

С.Э.ФРИШ и А.В.ТИМОРЕВА

---

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ  
II

ФИЗМАТГИЗ · 1962

**С. Э. ФРИШ и А. В. ТИМОРЕВА**

# **КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

**ТОМ II**

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ**

**ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ  
И ДОПОЛНЕННОЕ**

*Допущено Министерством высшего и среднего специального  
образования РСФСР в качестве учебника  
для государственных университетов*



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1962**



530.1  
Φ 90

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА

#### Глава XIV. Основные электростатические явления

§ 120. Введение . . . . .	7
§ 121. Электрические заряды . . . . .	9
§ 122. Проводники и изоляторы . . . . .	12
§ 123. Электростатическое поле. Закон Кулона . . . . .	14
§ 124. Напряженность электростатического поля . . . . .	18
§ 125. Линии напряженности . . . . .	23
§ 126. Поток напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса . .	24
§ 127. Более строгий вывод теоремы Остроградского — Гаусса . .	28
§ 128. Применения теоремы Остроградского — Гаусса . . . . .	30
§ 129. Работа сил электростатического поля. Потенциал . . . . .	37
§ 130. Поверхности уровня потенциала . . . . .	42
§ 131. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом . . . . .	45
§ 132. Связь между напряженностью, потенциалом и плотностью объемных зарядов . . . . .	47
§ 133. Проводники в электростатическом поле . . . . .	49
§ 134. Напряженность поля вблизи поверхности проводника . . . .	53
§ 135. Диполь во внешнем электрическом поле . . . . .	55
§ 136. Емкость проводников . . . . .	58
§ 137. Энергия системы зарядов . . . . .	61
§ 138. Энергия электростатического поля . . . . .	66

#### Глава XV. Электростатические явления в диэлектриках

§ 139. Диэлектрики. Диэлектрическая постоянная . . . . .	70
§ 140. Энергия конденсатора при наличии диэлектрика. Энергия поля в диэлектрике . . . . .	73
§ 141. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации . . . . .	74
§ 142. Напряженность поля в диэлектрике . . . . .	78
§ 143. Силы, действующие на заряженные тела при наличии диэлектриков . . . . .	81
§ 144. Вектор электростатической индукции . . . . .	87
§ 145. Определение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ по силам, действующим на заряд . . . . .	93
§ 146. Дипольные диэлектрики. Определение дипольных моментов молекул . . . . .	96
§ 147. Диэлектрические свойства кристаллов. Пьезоэлектричество . .	100
§ 148. Конденсаторы . . . . .	102
§ 149. Различные типы конденсаторов . . . . .	104



§ 150. Измерение разностей потенциалов . . . . .	107
§ 151. Измерение очень малых зарядов. Заряд электрона . . . . .	111
§ 152. Природа электростатического поля . . . . .	115

### ЧАСТЬ ПЯТАЯ

## ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### Глава XVI. Основные законы постоянного тока

§ 153. Постоянный ток. Закон Ома . . . . .	119
§ 154. Сопротивление проводников . . . . .	121
§ 155. Вектор плотности тока . . . . .	125
§ 156. Сохранение зарядов. Замкнутость стационарных токов . . . . .	128
§ 157. Закон Ленца — Джоуля . . . . .	131
§ 158. Измерение силы тока и разности потенциалов . . . . .	135
§ 159. Сопротивления и их измерение . . . . .	139
§ 160. Свободные электроны в проводниках. Классические представления . . . . .	141
§ 161. Законы Ома и Ленца — Джоуля с точки зрения классической электронной теории . . . . .	144
§ 162. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов . . . . .	149
§ 163. Квантовая теория электропроводности металлов . . . . .	151
§ 164. Замкнутая цепь постоянного тока . . . . .	155
§ 165. Энергия, выделяемая в цепи постоянного тока . . . . .	161
§ 166. Закон Ома для неоднородной цепи. Закон Кирхгофа . . . . .	163
§ 167. Применение уравнений Кирхгофа к решению отдельных задач . . . . .	167
§ 168. Контактная разность потенциалов . . . . .	174
§ 169. Гальванические элементы . . . . .	181
§ 170. Термоэлектрические явления . . . . .	184
§ 171. Полупроводники . . . . .	188
§ 172. Испускание электронов накалированными проводниками . . . . .	193
§ 173. Теория термоэлектронной эмиссии . . . . .	200

### Глава XVII. Токи в электролитах и газах

§ 174. Электролитическая проводимость . . . . .	204
§ 175. Законы Фарадея . . . . .	207
§ 176. Электролитическая диссоциация . . . . .	210
§ 177. Энергия ионов в растворе . . . . .	212
§ 178. Теория электролитической проводимости . . . . .	215
§ 179. Поляризация электродов . . . . .	219
§ 180. Технические применения электролиза . . . . .	222
§ 181. Электролитическая проводимость твердых тел . . . . .	225
§ 182. Электрический ток в газах . . . . .	227
§ 183. Теория несамостоятельной проводимости газов . . . . .	230
§ 184. Экспериментальное определение коэффициентов молизации и подвижности газовых ионов . . . . .	235
§ 185. Прохождение электронного тока через вакуум . . . . .	242
§ 186. Вывод формулы Богуславского — Ленгмюра; флуктуации силы тока . . . . .	245
§ 187. Длина свободного пути электронов в газе . . . . .	249
§ 188. Столкновения электронов с атомами и молекулами . . . . .	253
§ 189. Подвижность электронов в газе при низком давлении . . . . .	257
§ 190. Самостоятельная проводимость газов . . . . .	261

## ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

## Глава XVIII. Магнитное поле токов

§ 191. Магнитное поле и его характеристика . . . . .	267
§ 192. Графическое изображение напряженности магнитного поля . . . . .	271
§ 193. Способ определения магнитного поля токов . . . . .	275
§ 194. Магнитное поле кругового тока и соленоида . . . . .	279
§ 195. Единицы измерения напряженности магнитного поля. Абсолютная электромагнитная система единиц . . . . .	282
§ 196. Силы, действующие на ток в магнитном поле. Международная система электрических единиц . . . . .	287
§ 197. Замкнутый контур с током в магнитном поле . . . . .	293
§ 198. Циркуляция вектора магнитной напряженности . . . . .	300
§ 199. Применение выражения для циркуляции вектора магнитной напряженности . . . . .	302
§ 200. Магнетики . . . . .	305
§ 201. Магнитные моменты молекул, атомов и электронов . . . . .	309
§ 202. Вектор намагничения . . . . .	313
§ 203. Ферромагнетизм . . . . .	318
§ 204. Природа ферромагнетизма . . . . .	324
§ 205. Постоянные магниты . . . . .	327
§ 206. Линии вектора магнитной индукции. Циркуляция вектора магнитной индукции и вектора магнитной напряженности. Граничные условия . . . . .	332
§ 207. Аналогия между электростатическим и магнитным полями . . . . .	338
§ 208. Определение векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ по силам, действующим на рамку с током . . . . .	342
§ 209. Различие между соленоидом и магнитом . . . . .	345
§ 210. Работа перемещения контура с током в магнитном поле . . . . .	346
§ 211. Законы магнитной цепи . . . . .	351
§ 212. Уравнения Кирхгофа для магнитной цепи . . . . .	357
§ 213. Измерительные приборы . . . . .	359

## Глава XIX. Отклонение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

§ 214. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле . . . . .	365
§ 215. Магнитное поле движущегося заряда . . . . .	370
§ 216. Экспериментальное изучение магнитного поля движущихся зарядов . . . . .	372
§ 217. Эффект Холла . . . . .	379
§ 218. Определение удельного заряда электронов . . . . .	382
§ 219. Определение удельного заряда положительных ионов . . . . .	388
§ 220. Техническое применение электронного пучка . . . . .	393

## Глава XX. Электромагнитная индукция

§ 221. Явление электромагнитной индукции . . . . .	400
§ 222. Определение электродвижущей силы индукции . . . . .	403
§ 223. Количество электричества, перемещенного индукционным током. Единицы магнитных величин в международной системе . . . . .	407
§ 224. Определение электродвижущей силы индукции в частных случаях . . . . .	411
§ 225. Явление самоиндукции . . . . .	415



§ 226. Экстратоки размыкания и замыкания . . . . .	419
§ 227. Взаимная индукция . . . . .	422
§ 228. Энергия магнитного поля токов . . . . .	423
§ 229. Работа перемагничивания . . . . .	427
§ 230. Коэффициент самоиндукции кабеля . . . . .	429
§ 231. Токи Фуко. Поверхностный эффект . . . . .	430
§ 232. Переменный ток . . . . .	432
§ 233. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока . . . . .	437
§ 234. Цепь переменного тока, содержащая самоиндукцию и емкость . . . . .	439
§ 235. Динамомашин и электромоторы . . . . .	446
§ 236. Трансформаторы . . . . .	448
§ 237. Выпрямление и измерение переменных токов . . . . .	451
§ 238. Трехфазный ток . . . . .	453
<b>Глава XXI. Электромагнитные колебания и волны</b>	
§ 239. Колебательный разряд конденсатора . . . . .	457
§ 240. Вынужденные электрические колебания . . . . .	461
§ 241. Возбуждение незатухающих колебаний с помощью катодной лампы . . . . .	463
§ 242. Ток смещения . . . . .	468
§ 243. Электромагнитное поле . . . . .	471
§ 244. Уравнения Максвелла . . . . .	476
§ 245. Уравнения Максвелла — Лоренца . . . . .	481
§ 246. Электромагнитные волны . . . . .	482
§ 247. Скорость распространения электромагнитных волн . . . . .	489
§ 248. Вектор Умова — Пойнтинга . . . . .	492
§ 249. Радиотехника. Современные способы возбуждения и регистрации электромагнитных волн . . . . .	494
<b>Приложение. Системы единиц электрических и магнитных величин . . . . .</b>	<b>500</b>
<b>Алфавитный указатель . . . . .</b>	<b>509</b>

## ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА

---

### ГЛАВА XIV

#### ОСНОВНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

**§ 120. Введение.** В VII в. до н. э. греческий философ Фалес Милетский описал замеченную ткачихами способность янтаря, потертого о шерстяную материю, притягивать к себе некоторые легкие предметы. Это открытие было расширено лишь две с лишним тысячи лет спустя, в 1600 г., английским врачом Джильбертом, который нашел, что аналогичное свойство приобретают стекло и целый ряд других веществ, если их потереть о шелк. Тела, приведенные в такое состояние, были названы наэлектризованными, или, дословно, „наянтаренными“, так как по-гречески „электрон“ означает *янтарь*.

В течение почти двух столетий — до конца XVIII в. — изучение электризации тел развивалось медленно и шло в основном изолированно от изучения других явлений природы. Ограничивались, главным образом, приведением тел в наэлектризованное состояние путем трения и изучением сил взаимодействия между ними. Этот раздел учения об электричестве впоследствии получил название *электростатики*.

В 1789 г. Гальвани открыл физиологическое действие тока. Зацепив медным крючком поясничные нервы свежепрепарированной лягушки и повесив ее на железные перила балкона, он заметил, что каждый раз, когда перила приходили в соприкосновение с мускулами лягушки, мускулы сокращались. Хотя в то время было уже известно, что сокращение мускулов происходит при разряде через них наэлектризованных тел, тем не менее долгое время не было установлено единство электрических явлений и принято было различать „электричество гальваническое“ и электричество, получаемое трением. Лишь в начале XIX в. появился ряд крупных открытий, обнаруживших чрезвычайное разнообразие электрических явлений: были изучены условия возникновения электрического тока, установлено тепловое и магнитное действие тока, выяснена роль диэлектриков и т. д. Вторая половина XIX в. ознаменовалась дальнейшим бурным развитием учения об электричестве. В результате работ Фарадея и Максвелла было установлено единство электромагнитных явлений, открыты электромагнитные волны и создана электромагнитная теория света.



Принципиальное значение развития учения об электричестве исключительно велико: с одной стороны, оно сделало ясной невозможность сведения электрических явлений к механическим, с другой — указало глубокую взаимную связь электрических явлений со всеми остальными физическими процессами. Тем самым учение об электричестве способствовало переходу от материализма механистического к материализму диалектическому. Наконец, не менее важными оказались и практические применения электрических явлений.

В развитии учения об электричестве выдающуюся роль сыграли русские ученые. В середине XVIII в. М. В. Ломоносов, изучавший совместно с Г. В. Рихманом грозовые явления, пришел к выводу, что электризация воздуха возникает в результате трения между восходящими потоками. Ломоносов же в 1753 г. высказал передовую по своему времени мысль, что электричество есть очень быстрое вращательное движение частичек эфира. В том же 1753 г. Петербургская Академия наук объявила всемирный конкурс на тему „О природе электрической силы“. Премирована была в 1755 г. работа Л. Эйлера, в которой взаимодействие наэлектризованных тел объяснялось натяжениями в эфире. Петербургский академик Эпинус ввел пользовавшуюся в свое время широкой известностью теорию одной „электрической жидкости“ и впервые развил математическую теорию электрических и магнитных явлений. В 1803 г. академик В. В. Петров открыл электрическую дугу и указал на возможность ее практического применения. Он же один из первых изучал электролитическое разложение жидкостей при прохождении через них тока. В тридцатых и сороковых годах XIX в. Э. Х. Ленц, действительный член Петербургской Академии наук и профессор Петербургского университета, открыл важнейшие законы, устанавливающие направление индуцированного тока и тепловые действия тока. Во второй половине XIX в. А. Г. Столетов дал метод изучения магнитных свойств железа и открыл фотоэлектрическое явление. В 1895 г. А. С. Попов изобрел радиотелеграф, а несколькими годами позже П. Н. Лебедев получил миллиметровые электромагнитные волны. В начале же нынешнего столетия профессор Московского университета А. А. Эйхенвальд экспериментально доказал, что движущиеся заряды подобно току, вызывают магнитное поле. Крупнейших успехов в различных областях учения об электричестве достигли наши советские ученые.

Большую роль сыграли русские изобретатели в развитии электротехники. Б. С. Якоби первый сконструировал электромотор и применил его для приведения в движение лодки и вагона; он же открыл практическое применение электролиза (гальванопластику). П. Н. Яблочков изобрел первую практически пригодную для освещения электрическую дугу, а А. Н. Лодыгин — электрическую лампочку накаливания. П. Н. Яблочков и И. Ф. Усагин впервые ввели в практику электрический трансформатор, а М. О. Доливо-Добровольский — трехфазный ток. Н. Г. Славянов и Н. Н. Бенардос изобрели электросварку.

Большое место, занимаемое современной электротехникой в промышленности, определило и ту большую роль, которую электротехника играет в нашей стране. Это значение электротехники было подчеркнуто в знаменитых словах В. И. Ленина: „Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны“. Создавшиеся после Великой Октябрьской социалистической революции исключительно благоприятные условия для развития науки и техники привели к невиданно быстрым темпам электрификации нашей страны и к новым крупнейшим успехам в области учения об электричестве и практических приложений электрических явлений. Народнохозяйственный план предусматривает дальнейшее широкое строительство электростанций различных типов (гидростанций, тепловых и атомных электростанций) и использование электроэнергии во всех отраслях нашего хозяйства.

**§ 121. Электрические заряды.** В соответствии с историческим ходом развития учения об электричестве мы начнем изложение с характеристики состояния электризации и с законов взаимодействия наэлектризованных тел. Как мы указывали, этот раздел учения об электричестве носит название электростатики. Опыты, произведенные еще в самом начале XVIII в., показали, что электризация бывает двух и только двух родов: электризация, по качеству совпадающая с электризацией стекла, потертого о кожу (называется *положительной*), и электризация, совпадающая по качеству с электризацией кожи, потертой стеклом (называется *отрицательной*). Тела, наэлектризованные одинаково (например положительно), отталкиваются друг от друга; тела, наэлектризованные разноименно, притягиваются. При соприкосновении тел электризация может передаваться от одних тел другим.

Тело, находящееся в состоянии электризации, обладает, как говорят, зарядом, служащим мерой наэлектризованности тела. Определение понятия заряда будет дано ниже.

В природе существуют тела, по которым состояние электризации свободно передается, называемые проводниками, и тела, не передающие состояние электризации, — изоляторы.

Степень наэлектризованности можно определить по силам взаимодействия между наэлектризованными телами. Для качественного определения наэлектризованности можно, например, использовать два легких шарика, привязанных к длинным нитям (рис. 1); при одной и той же электризации шариков между ними возникнут силы отталкивания, в результате чего шарики разойдутся, и тем больше, чем сильнее они наэлектризованы. На практике употребляют специальные приборы — *электроскопы*, один из которых представлен на рис. 2.

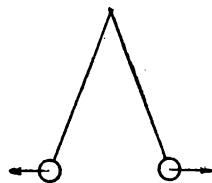


Рис. 1. Взаимодействие наэлектризованных шариков.



Электроскоп, изображенный на рис. 2, устроен следующим образом: к металлической проволоке  $D$  приделаны снизу два тонких листочка из алюминия  $E_1$  и  $E_2$ ; проволока с листочками помещена при помощи эбонитовой пробки  $B$  внутрь металлической коробки<sup>1</sup> со стеклянными окошками для наблюдения за листочками. Если проволоке  $D$  сообщить электрический заряд, путем прикосновения к ней наэлектризованным телом, то алюминиевые листочки наэлектризуются и, оттолкнувшись друг от друга, разойдутся. По их расхождению можно судить о степени сообщенной им электризации.

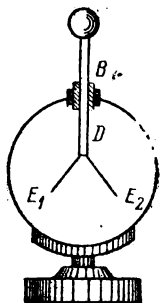


Рис. 2. Электроскоп с листочками.

Для более точного количественного определения степени электризации электроскоп должен быть снабжен шкалой. Такой прибор, названный „электрическим указателем“ или *электрометром*, был впервые осуществлен Г. В. Рихманом в 1745 г., наблюдавшим совместно с М. В. Ломоносовым электризацию, возникающую при грозовых разрядах.

Схематическое изображение „электрического указателя“ Г. В. Рихмана дано на рис. 3, на котором через  $g$  обозначена металлическая линейка, висящая вертикально. К линейке одним концом прикреплена шелковая нить  $f$ . При электризации нить отталкивается от линейки, и степень ее отклонения может быть определена с помощью делений, нанесенных на деревянный квадрат  $ab$ .

Современный электрометр, построенный по схеме Рихмана, изображен на рис. 4. При сообщении электризации стержню  $D$  алюминиевый листочек  $E$  отталкивается от неподвижного стержня  $D$ ; величина отклонения, зависящая от степени электризации, определяется по шкале.

Весьма важным явлением, помогающим понять процесс электризации тел, является следующее: если тело, наэлектризованное, например, положительно, начать электризовать отрицательно, то состояние его электризации сперва уменьшится, затем полностью пропадет, и только после этого тело начнет электризоваться отрицательно. Отсюда следует, что *заряды различных знаков компенсируют друг друга*. Этот факт привел к гипотезе, что и в незаряженных телах всегда имеются заряды, но только противоположных знаков и в таких количествах, что их действия полностью компенси-

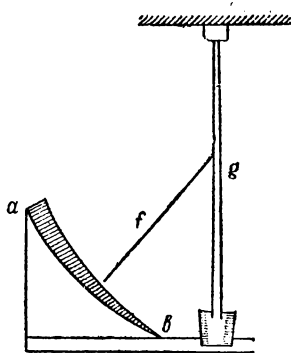


Рис. 3. Электрический указатель Г. В. Рихмана.

<sup>1</sup> Роль этой коробки будет указана ниже (стр. 52).

руют друг друга. Тело, содержащее избыток положительных зарядов, заряжено положительно. Тело, содержащее избыток отрицательных зарядов, заряжено отрицательно. При электризации тел трением электризуются оба тела, притом всегда одно из них положительно, а другое — отрицательно. Отсюда мы приходим к выводу, что *заряды не создаются и не пропадают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела.* Это положение, известное под названием *закона сохранения электрических зарядов*, является основным в области учения об электричестве и подтверждается многочисленными фактами, одним из которых является открытая Эпинусом *электризация наведением*, или, как говорят, путем *индукции*.

Явление электризации наведением заключается в следующем: если подносить к изолированному проводнику *В* заряженное тело *А* (рис. 5а), то на проводнике *В* появляются заряды, притом на той его части, которая ближе к телу *А*, — обратного знака, а на более удаленной — того же знака, что и заряд тела *А*. При удалении заряженного тела *А* заряды на проводнике *В* пропадают. Однако, если до удаления заряженного тела *А* разделить проводник *В* на две части (рис. 5б), то заряды на них сохраняются и после удаления заряженного тела *А*. Эти опыты непосредственно

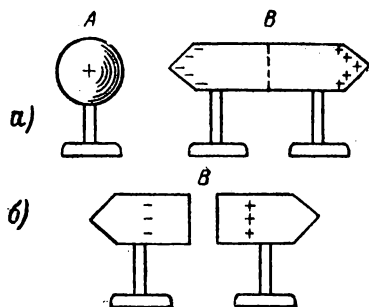


Рис. 5. Электризация наведением.

объясняются, если предположить, что в проводнике *В* все время имеются заряды обоих знаков — положительные и отрицательные, причем эти заряды (или по крайней мере заряды одного знака) могут свободно перемещаться в проводнике. Тогда при поднесении к проводнику *В* положительно заряженного тела *А* отрицательные заряды, существующие в проводнике *В*, будут притягиваться, а положительные — отталкиваться, и, таким образом, на концах проводника *В* возникнет электризация разных знаков. При удалении заряженного тела *А* на заряды в проводнике *В* перестают действовать внешние силы, заряды „перемешиваются“, и весь проводник *В* во всех его частях снова становится нейтральным. Если же проводник *В* был разделен на две части, пока заряженное тело *А* было еще около него, то после удаления заряженного тела *А* заряды в проводнике *В* не могут „перемешаться“, и обе разьединенные части проводника *В* останутся наэлектризованными.

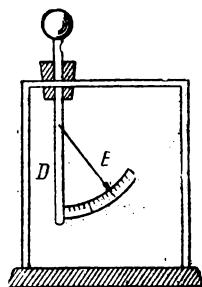


Рис. 4. Электрометр.

Легко проверить, приведя эти две разъединенные половинки тела *B* в соприкосновение, что сохранившиеся в них заряды одинаковы по величине, так как после соприкосновения половинок тело *B* становится нейтральным.

Наличие в нейтральном веществе зарядов двух знаков и их сохранение можно считать твердо установленным.

Первая теория электрических явлений, возникшая в середине XVIII в., допускала существование особой электрической жидкости. Затем появилась теория, допускавшая существование двух электрических жидкостей — положительной и отрицательной. Академик Петербургской Академии наук Эпинус развил теорию одной электрической жидкости которую он считал положительной. По теории Эпинуса, избыток этой жидкости в телах приводит их в состояние положительной электризации, ее недостаток — к отрицательной. В конце прошлого столетия было установлено, что существует элементарный электрический заряд; атомы или молекулы могут приобретать лишь заряды, кратные от этого элементарного заряда. Далее было установлено, что это является следствием существования элементарных частиц, несущих вполне определенный отрицательный заряд *e*; эти частицы получили название *электронов*. Как будет показано ниже, электрон характеризуется не только определенным зарядом *e*, но и определенной массой *m*, а также рядом других физических величин (вращательным моментом, магнитным моментом). Этот сложный характер природы электрона является одним из замечательных примеров подтверждений диалектического материализма, считающего, что объективно существующий мир неисчерпаемо разнообразен. В. И. Ленин писал: „Электрон так же *неисчерпаем*, как и атом...“.<sup>1</sup>

Масса электрона составляет примерно  $\frac{1}{1840}$  массы самого легкого из атомов — атома водорода.

Согласно современным представлениям (см. т. III), электроны входят как составная часть во все атомы; центральная часть атомов, так называемое *атомное ядро*, обладает положительным зарядом; почти вся масса атома сосредоточена в его ядре. В настоящее время известно существование также положительных электронов (называемых *позитронами*), однако они наблюдаются лишь при некоторых специальных условиях, и пока мы не будем их рассматривать.

**§ 122. Проводники и изоляторы.** Как сказано выше, опыты показывают, что все тела разделяются на два класса: 1) на тела, передающие электризацию; — они называются *проводниками*, и 2) на тела, не передающие электризации; эти тела называются *непроводниками* (а также *изоляторами* или *диэлектриками*). Проводники разделяются на проводники первого и второго рода. Перенесение

<sup>1</sup> В. И. Ленин, т. 18, Госполитиздат, 1961 г., стр. 277.



зарядов в проводниках первого рода не связано ни с каким изменением их химической природы и ни с каким заметным переносом вещества; перенесение зарядов в проводниках второго рода связано с химическими изменениями, ведущими к выделению составляющих их веществ в местах их соприкосновения с другими проводниками. К проводникам первого рода относятся все металлы; проводниками второго рода являются расплавленные соли, растворы солей, кислот и щелочей. Изоляторами являются кристаллы солей, масла, воздух, стекло, фарфор, эбонит, каучук, янтарь и ряд других веществ.

В настоящее время выделяют еще *полупроводники*. Это тела, обладающие хотя и очень малой, но все же заметной электропроводностью и рядом других свойств, позволяющих объединить их в особую группу. В настоящее время установлена определенная точка зрения на природу проводников и диэлектриков.

В металлах (проводниках первого рода) часть электронов может свободно передвигаться между отдельными атомами. В незаряженном металле заряды свободно передвигающихся электронов компенсируются положительными зарядами, связанными с остовом кристаллической решетки металла. Электризация проводника сводится к изменению числа входящих в него электронов: при отрицательной электризации проводнику добавляются извне лишние электроны, при положительной электризации от него отнимается часть электронов, в результате чего начинает сказываться не полностью компенсированный положительный заряд атомных ядер.

При электризации через наведение (индукцию) электроны перемещаются под влиянием сил притяжения или отталкивания со стороны внешнего заряда к одному концу проводника; на этом конце получается избыток электронов, что обуславливает появление отрицательной электризации; на противоположном конце проводника, из-за недостатка электронов, появляется некомпенсированный положительный заряд.

Все электроны во всех металлах одинаковы, поэтому их перемещение не связано с изменением химического состава проводника первого рода. Масса же электронов настолько мала, что при практически достижимых электризациях нельзя заметить изменения массы проводника из-за изменения числа находящихся в нем электронов.<sup>1</sup>

В проводниках второго рода нет свободных электронов, зато в них существуют атомы или молекулы, у которых есть недостаток или избыток электронов. Такие заряженные атомы или молекулы носят название *ионов*. Перенесение зарядов в проводниках второго рода обусловлено перемещением ионов, чем и объясняются происходящие при этом в проводниках второго рода химические изменения.

*Диэлектрики* — непроводники электричества — построены из молекул, в которых имеются в равных количествах положительные и

---

<sup>1</sup> См. расчет на стр. 113.

отрицательные заряды, или из ионов, которые не могут свободно передвигаться внутри диэлектрика. Под действием электрических сил заряды в диэлектрике лишь немного смещаются или изменяют свою ориентировку. Например, моделью диэлектрика может служить вещество, в котором попарно соединенные разноименные заряды (полярные молекулы) беспорядочно повернуты (рис. 6а) так что диэлектрик как в целом, так и в отдельных его частях нейтрален. Если к диэлектрику поднести заряженное тело, то заряды в нем не переместятся, но лишь одинаково ориентируются (рис. 6б), в результате чего на конце диэлектрика, обращенном к подносимому телу, выступают заряды обратного знака, а на противоположном конце — заряды того же знака. Такое состояние диэлектрика называется *поляризацией*. Оно отлично от электризации, которая возникает на проводниках при явлении индукции.

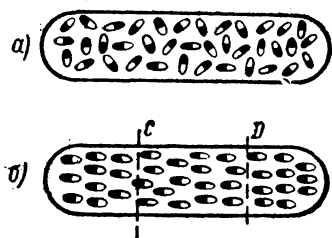


Рис. 6. Поляризация диэлектрика.

Если поляризованный диэлектрик разделить на части, например по линиям  $D$  и  $C$  (рис. 6б), то каждая из частей в целом будет нейтральна, лишь на поверхности окажутся заряды того или иного знака.

При очень больших электрических силах молекулы диэлектрика могут

быть разрушены, тогда диэлектрик становится проводником. Это явление называется *пробоем* диэлектрика.

**§ 123. Электростатическое поле. Закон Кулона.** Основным законом электростатики является закон взаимодействия зарядов. Взаимодействие зарядов первоначально истолковывалось на основании формальной аналогии с законом всемирного тяготения. При этом предполагалось, что и электрические силы и силы всемирного тяготения представляют собой „действия на расстоянии“ без какой-либо роли промежуточного пространства. В действительности же заряды вызывают в окружающем пространстве какие-то физические изменения (так же как и тяготеющие массы), которые прежде всего проявляются в том, что на всякий другой заряд, помещенный на некотором расстоянии от рассматриваемых зарядов, действуют силы. Не входя пока в рассмотрение природы этих изменений, мы будем говорить, что в случае покоящихся зарядов в окружающем их пространстве возникает *электростатическое поле*.

Взаимодействие, например, двух зарядов заключается в следующем: каждый из зарядов создает в окружающем пространстве поле, и это поле действует на другой заряд с определенной силой.

*Электростатическое поле представляет собою особый вид материи; оно передает действие одних на электризованных тел на*

*другие.* Свойства поля изучаются на основании тех закономерностей, которым подчиняются силы, действующие со стороны поля на заряды.

Так как взаимодействие заряженных тел зависит от их формы и размеров, то для установления закона взаимодействия рассматривают так называемые точечные заряды. *Под точечными зарядами подразумеваются такие заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.* Очевидно, что всякое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов.

Закон взаимодействия двух точечных зарядов был экспериментально установлен Кулоном в 1785 г. Закон Кулона содержит в себе вместе с тем определение величины заряда.

Все свои измерения Кулон производил в воздухе, но, строго говоря, рассматриваемое в этом параграфе выражение для закона Кулона относится к пустоте, т. е. к пространству, в котором нет в заметном количестве атомов, молекул или иных частиц.

Закон взаимодействия точечных зарядов Кулон установил на основании измерений, произведенных с помощью *крутильных весов* (рис. 7). Устройство этих весов таково: внутри большого стеклянного сосуда на тонкой проволоке подвешено стеклянное коромысло, несущее на одном конце металлический шарик  $m$ , а на другом — противовес. Второй металлический шарик  $n$  установлен неподвижно на стеклянной ножке. Обои шарикам можно извне сообщать электрические заряды, которые они удерживают некоторое время, так как шарики изолированы друг от друга и от окружающих тел. Расстояние между шариками  $m$  и  $n$  можно менять, поворачивая головку весов, к которой прикреплена нить, удерживающая коромысло с шариком  $m$ . При сообщении шарикам  $m$  и  $n$  зарядов они начнут притягиваться или отталкиваться (в зависимости от знаков зарядов), в результате чего коромысло с шариком  $m$  повернется на некоторый угол. Поворачивая головку весов, можно привести шарик  $m$  в прежнее положение; при этом момент кручения нити будет равен моменту электрической силы, приложенной к шарикам  $m$ . Если нить предварительно проградуирована, то по углу поворота головки можно непосредственно определить момент силы, а зная длину коромысла, — и силу взаимодействия между шариками.

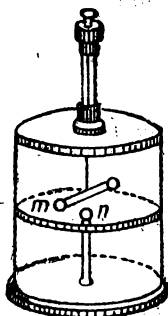


Рис. 7. Крутильные весы Кулона.

Ход рассуждений, приводящих к закону Кулона, следующий. Прежде всего наблюдения показывают, что силы взаимодействия между зарядами направлены по прямой, соединяющей заряды. При одноименных зарядах эти силы, как было указано в § 121, являются силами отталкивания, при разноименных зарядах — силами притяжения. Меняя расстояние  $r$  между шариками  $m$  и  $n$ , которым сообщены некоторые неизменные заряды (рис. 8а), можно убедиться из опыта, что силы

взаимодействия меняются обратно пропорционально квадрату расстояния  $r$ .

Для сравнения величины двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$  измерим силы  $f_1$  и  $f_2$  взаимодействия этих зарядов с некоторым определенным третьим зарядом  $q_0$ , если их последовательно помещать на одинаковом расстоянии  $r_0$  от этого третьего заряда  $q_0$  (рис. 8б и 8в). Для этого последовательно сообщаем шарiku  $m$  заряды  $q_1$  и  $q_2$ , а заряд шарика  $n$  держим неизменным и равным  $q_0$ . Опыт показывает, что отношение

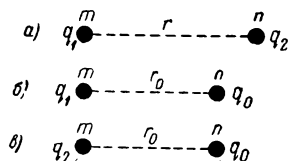


Рис. 8. К обоснованию закона Кулона.

сил  $f_1/f_2$  не зависит ни от величины  $q_0$  третьего заряда, ни от расстояния  $r_0$ , на котором заряды  $q_1$  и  $q_2$  помещались от этого третьего заряда. Следовательно, значение отношения сил  $f_1/f_2$  определяется лишь самими зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Отсюда естественно принять отношение зарядов  $q_1/q_2$  равным отношению сил  $f_1/f_2$ . Таким образом, мы получаем метод измерения отношения двух зарядов  $q_1/q_2$ .

Абсолютные значения зарядов могут быть получены лишь после установления единицы измерения зарядов, что будет сделано немного ниже.

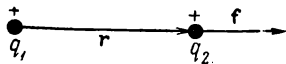
Имея метод сравнения зарядов, мы можем теперь различные заряды  $q_1, q_2, q_3, \dots$  помещать попарно на одинаковом расстоянии  $r$  друг от друга. Тогда опыт показывает, что сила взаимодействия  $f$  между парой зарядов пропорциональна произведению их величин  $q_i \cdot q_k$ .

Таким образом, окончательно формулируем закон Кулона: сила взаимодействия  $f$  между двумя точечными зарядами пропорциональна произведению величин зарядов  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Если приписать положительным зарядам знак плюс (+), а отрицательным знак минус (—), то отрицательные значения силы соответствуют силам притяжения, а положительные значения — силам отталкивания.



Закон Кулона (1) может быть записан в векторном виде. Проведем от точечного заряда  $q_1$  (рис. 9) к точечному заряду  $q_2$  радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Сила  $\mathbf{f}$ , действующая на заряд  $q_2$ , численно равна,

Рис. 9. Направление радиуса-вектора.

по (1), величине  $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$  и направлена в ту же сторону, что и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , — при одинаковом знаке обоих зарядов  $q_1$  и  $q_2$  (к этому случаю относится рис. 9), и в сторону, противоположную радиусу-вектору  $\mathbf{r}$  — при различных знаках зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Поэтому мы получим силу  $\mathbf{f}$  по величине и направлению, умножив величину  $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$  на единичный вектор  $\mathbf{r}/r$ , имеющий направ-

ление радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Таким образом, в векторном виде закон Кулона запишется:

$$\mathbf{f} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1a)$$

Для установления CGS-единицы заряда положим в законе Кулона (1) коэффициент пропорциональности  $k$  равным единице:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Отсюда получим: в CGS-системе за единицу заряда принят такой точечный заряд, который взаимодействует с равным ему зарядом, помещенным на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину. Эта единица называется абсолютной электростатической единицей заряда.

В учении об электричестве единицы, устанавливаемые на основании CGS-системы и законов электростатики, носят название абсолютных электростатических единиц и обозначаются символом CGSE.

Ввиду малости электростатической единицы в современной международной системе единиц (см. т. I) за единицу заряда принимается заряд в  $c/10$  раз больший CGSE-единицы заряда, где  $c$  — так называемая электродинамическая постоянная (см. § 196). Эта единица называется кулон. Так как электродинамическая постоянная  $c$  с большой степенью точности равна  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек, то имеем:

$$1 \text{ кулон} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-единиц заряда.}$$

Размерность заряда в CGSE-системе получим на основании формулы (1):

$$[q^2] = [f] \cdot [r^2],$$

откуда

$$[q] = [f^{1/2}] \cdot L = M^{1/2} \cdot L^{3/2} T^{-1}.$$

Приведем пример определения сил взаимодействия между заряженными телами.

Пример. Два малых шарика, находящихся в поле силы тяжести (каждый массой по 0,1 г) подвешены к нитям  $l$  длиной по 25 см (рис. 10). После того как шарикам были сообщены одинаковые заряды, они разошлись на расстояние  $r = 5$  см. Определить сообщенные им заряды в CGSE-системе и в кулонах.

Решение. Сила отталкивания между шариками:

$$f = \frac{q^2}{r^2},$$

где  $q$  — заряд, сообщенный каждому из шариков. Равновесие наступает тогда, когда сила  $F$ , являющаяся равнодействующей силы отталкивания  $f$  и силы тяжести  $P = mg$ , направлена вдоль нити. Из рис. 10 имеем:

$$f = P \cdot \operatorname{tg} \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

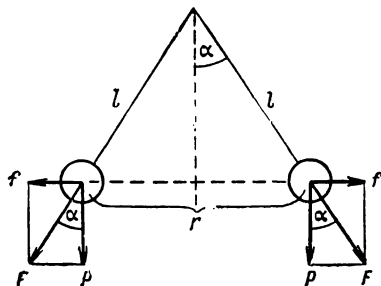


Рис. 10. Силы, действующие на наэлектризованные шары.

при малом угле  $\alpha$  можно положить  $\operatorname{tg} \alpha$  приближенно равным  $\sin \alpha$ , но

$$\sin \alpha = \frac{r}{l}, \quad \text{откуда } f = \frac{mgr}{2l}.$$

Приравнявая это значение  $f$  выражению  $q^2/r^2$ , получаем:

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{mgr}{2l},$$

что даст нам искомый ответ

$$q = r \sqrt{\frac{mgr}{2l}} = 5 \sqrt{\frac{0,1 \cdot 981 \cdot 5}{2 \cdot 25}} \text{ CGSE} = 15,6 \text{ CGSE}.$$

Переводя этот заряд в кулоны, найдем:

$$q = \frac{15,6}{3 \cdot 10^9} \kappa = 5,2 \cdot 10^{-9} \kappa.$$

Из этого расчета видно, что кулон представляет собой большую единицу, и заряды, наблюдаемые при обычной электризации тел, выражаются весьма малой долей кулона.

**§ 124. Напряженность электростатического поля.** Как мы указывали в § 123, каждый заряд вызывает в окружающем пространстве электростатическое поле. Изучение свойств поля можно произвести, помещая в него *точечные заряды* и наблюдая действующие на них силы. При этом будем полагать, что *помещаемые заряды столь малы, что они не изменяют ни величины, ни расположения тех зарядов, которые вызывают поле.* Из закона Кулона следует, что на положительный заряд  $q$ , помещенный в некоторую точку поля, действует сила  $\mathbf{f}$ , пропорциональная величине заряда  $q$ . Величина и направление этой силы определяются величиной и расположением всех зарядов, образующих поле. Отношение силы  $\mathbf{f}$ , действующей на заряд, к его величине  $q$ , как это опять-таки следует из закона Кулона, не зависит от величины заряда  $q$  и характеризует данную точку поля. Таким образом, отношение  $\mathbf{f}/q$ , найденное для всех точек поля, даст физическую характеристику определенных объективных свойств поля. Это отношение определяет физическую величину, называемую *напряженностью электростатического поля*, которую мы обозначим  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q}. \quad (1)$$

Если в этой формуле положить  $q = +1$ , то  $\mathbf{E}$  по величине и направлению совпадает с силой  $\mathbf{f}$ . Таким образом, *напряженность электростатического поля в некоторой точке является физической величиной, численно равной силе, действующей на единицу положительного заряда, помещенного в эту точку, и имеющей направление этой силы.* Из этого определения следует, что напряженность есть величина векторная.



За единицу напряженности мы примем напряженность такой точки поля, в которой на единичный заряд действует сила, равная единице. Отсюда в CGSE-системе единица напряженности — это напряженность в такой точке поля, в которой на заряд в одну электростатическую единицу действует сила в одну дину. Размерность напряженности в этой системе определится по формуле (1):

$$[E] = \frac{[f]}{[q]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}} = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}. \quad (2)$$

В качестве примеров вычислим напряженность электростатического поля в некоторых важных частных случаях.

1. Напряженность поля точечного заряда. Возьмем точечный заряд  $q$  и определим напряженность поля в произвольной точке  $A$ , отстоящей от заряда на расстоянии  $r$ .

По закону Кулона сила  $f$ , действующая на положительный заряд  $q_0$ , помещенный на расстоянии  $r$  от заряда  $q$ , равна:

$$f = \frac{q \cdot q_0}{r^2}.$$

Отсюда напряженность в точке  $A$  будет:

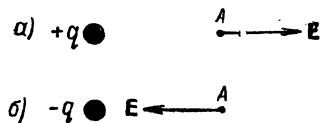
$$E = \frac{f}{q_0} = \frac{q}{r^2}. \quad (3)$$

Выражение (3) определяет величину напряженности в точке  $A$ . Направление напряженности совпадает с направлением силы  $f$ . Следовательно, вектор  $E$  направлен по линии, соединяющей заряд  $q$  с точкой  $A$ , в сторону от заряда  $q$ , если  $q$  положительно, и в сторону заряда  $q$ , если  $q$  отрицательно (рис. 11).

В векторном виде напряженность  $E$  запишется:

$$E = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{r}{r},$$

(3а)



где  $r$  — радиус-вектор, проведенный от того места, где расположен точечный заряд  $q$ , к тому месту, в котором вычисляется напряженность поля  $E$ .

Рис. 11. Направление напряженности электростатического поля  $E$ .

Если напряженность создается несколькими точечными зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то результирующая напряженность в некоторой точке выражается геометрической суммой напряженностей, создаваемых отдельными зарядами. Это следует из того факта, что сила  $f$ , действующая на заряд  $q_0$ , помещенный в данную точку, равна геометрической сумме сил  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n;$$

из этого равенства находим, что напряженность, измеряемая отношением силы  $\mathbf{f}$  к заряду  $q_0$ , будет:

$$E = \frac{f}{q_0} = \frac{f_1}{q_0} + \frac{f_2}{q_0} + \dots + \frac{f_n}{q_0}.$$

Члены, стоящие справа, представляют напряженности  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , создаваемые зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Следовательно,

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n. \quad (4)$$

2. Напряженность поля диполя. Диполем называется совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся друг от друга на расстоянии  $l$ , малом по сравнению с их расстоя-

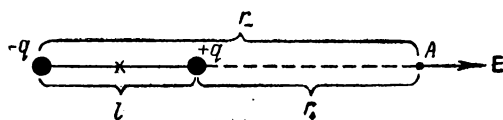


Рис. 12. К определению напряженности поля на оси диполя.

нием от точек, в которых определяется напряженность поля. Линию, проходящую через заряды, назовем осью диполя. Определим напряженность электростатического поля на оси диполя, на которой выберем произ-

вольную точку  $A$  (рис. 12). Расстояние точки  $A$  от зарядов  $+q$  и  $-q$  обозначим соответственно  $r_+$  и  $r_-$ . Расстояние точки  $A$  до средней точки диполя обозначим через  $r$ ; тогда:

$$r_+ = r - \frac{l}{2}, \quad r_- = r + \frac{l}{2}.$$

Напряженность  $E$  равна геометрической сумме напряженностей  $E_+$  и  $E_-$ , создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В данном случае, так как  $E_+$  и  $E_-$  направлены вдоль оси диполя, геометрическая сумма сводится к сумме алгебраической:

$$E = \frac{q}{r_+^2} - \frac{q}{r_-^2}$$

или

$$E = \frac{q(r_-^2 - r_+^2)}{r_+^2 \cdot r_-^2} = \frac{q(r_- + r_+)(r_- - r_+)}{r_+^2 \cdot r_-^2}.$$

Далее имеем:

$$r_- - r_+ = l, \quad r_+ + r_- = 2r;$$

и так как по условию  $r \gg l$ , то приближенно

$$r_+^2 \cdot r_-^2 \cong r^4,$$

и выражение для  $E$  принимает вид:

$$E = \frac{2ql}{r^3}.$$

Произведение заряда  $q$  на расстояние между зарядами

$$p = ql$$

называется *моментом диполя*. Введя в формулу для  $E$  момент диполя  $p$ , получаем окончательно:

$$E = \frac{2p}{r^3}. \quad (5)$$

Напряженность поля  $E$  в точке  $A$  направлена вправо от оси диполя.

Рассмотрим напряженность в точке  $B$ , лежащей на перпендикуляре  $OB$  к оси диполя, восстановленном из середины диполя (рис. 13). Напряженность в точке  $B$  есть геометрическая сумма напряженностей, создаваемых зарядами  $+q$  и  $-q$ . Так как расстояния  $r_+$  и  $r_-$  точки  $B$  от обоих зарядов равны, то численно:

$$E_+ = E_- = \frac{q}{r_+^2}.$$

Направления векторов напряженностей  $E_+$  и  $E_-$  указаны на рис. 13.

Результирующий вектор напряженности  $E = E_+ + E_-$ , как видно из рис. 13, по величине равен:

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha = \frac{2q}{r_+^2} \cos \alpha$$

или

$$E = \frac{2q}{r_+^2} \cdot \frac{l/2}{r_+} = \frac{ql}{r_+^3}.$$

Обозначим расстояние точки  $B$  от середины диполя через  $r$ , тогда, так как  $l \ll r$ , то приближенно  $r_+ = r$ , и последняя формула может быть переписана в виде

$$E = \frac{ql}{r^3}.$$

Вводя, наконец, момент диполя  $p = ql$ , получим:

$$E = \frac{p}{r^3}. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (5) и (6), видим, что в обоих случаях напряженность поля диполя пропорциональна моменту диполя  $p$  и обратно пропорциональна кубу расстояния  $r$  от диполя.

Рассмотренные выше примеры показывают, что результирующую напряженность можно рассчитывать как геометрическую сумму напряженностей, создаваемых точечными зарядами, образующими электрическую систему. Однако в большинстве случаев расчет с помощью представления системы, как совокупности точечных зарядов,

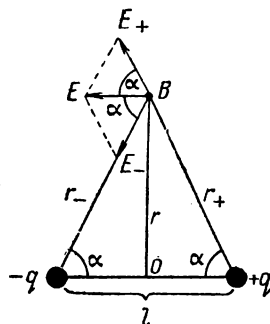


Рис. 13. К определению напряженности поля диполя в точке  $B$ .

является чрезвычайно громоздким или вообще невыполнимым; поэтому определение напряженности во многих задачах производится с помощью некоторых вспомогательных приемов, о которых речь будет ниже.

Исходя из формулы (5) для напряженности поля диполя, легко найти силу взаимодействия двух жестких диполей, расположенных вдоль одной прямой на расстоянии  $r$ , большом по сравнению с их собственными размерами.

При этом под жестким диполем подразумевается такой диполь, расстояние  $l$  между зарядами которого не изменяется под влиянием внешних сил; оба заряда такого диполя „жестко“ связаны друг с другом.

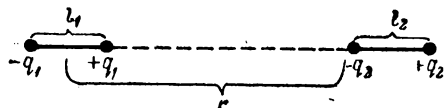


Рис. 14. К определению силы взаимодействия двух диполей.

Рассмотрим сперва случай, когда оба диполя направлены друг по отношению к другу разноименными концами (рис. 14). Пусть расстояние  $r$  отсчитано от середины первого диполя до ближайшего заряда  $-q_2$  второго диполя.

Напряженность поля  $E_1$ , создаваемого первым диполем в том месте, где находится заряд  $-q_2$ , по формуле (5) равна

$$E_1 = \frac{2p_1}{r^3},$$

где  $p_1 = q_1 l_1$  — момент первого диполя. Благодаря наличию этой напряженности, на заряд  $-q_2$  второго диполя действует сила

$$f_1 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2.$$

На заряд  $+q_2$  того же диполя действует сила

$$f_2 = +\frac{2p_1}{(r + l_2)^3} q_2.$$

Суммарная сила, действующая на второй диполь как на целое, равна:

$$f = f_1 + f_2 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2 + \frac{2p_1}{(r + l_2)^3} q_2 = -\frac{2p_1}{r^3} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{l_2}{r}\right)^3} \right] q_2.$$

Так как по условию  $l \ll r$ , то приближенно:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{l_2}{r}\right)^3} \approx 1 - 3\frac{l_2}{r}, \quad \text{откуда } f = -\frac{6p_1 l_2 q_2}{r^4}$$

или, так как  $l_2 q_2 = p_2$ , где  $p_2$  — момент второго диполя,

$$f = -\frac{6p_1 p_2}{r^4}. \quad (7)$$

Знак минус означает, что результирующая сила является силой притяжения.

В случае, когда оба диполя направлены друг по отношению к другу одноименными концами, как легко видеть, сила взаимодействия между ними та же, но положительна, т. е. является силой отталкивания.

Формула (7) показывает, что сила взаимодействия между диполями пропорциональна произведению их моментов и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними. Расчеты произведены нами для случая

диполей, расположенных вдоль одной прямой. Можно показать, что и при иных расположениях диполей сила взаимодействия между ними обратно пропорциональна четвертой степени расстояния.

**§ 125. Линии напряженности.** Как было выяснено в предыдущем параграфе, каждой точке электростатического поля может быть сопоставлен вектор напряженности  $E$ .

Введем теперь понятие о *линии напряженности*, называемой также силовой линией. Под линией напряженности будем подразумевать такую линию, в каждой точке которой *вектор напряженности направлен по касательной* (рис. 15). Линии напряженности приписываем направление, совпадающее с направлением вектора напряженности в каждой точке линии.

Таким образом, линия напряженности определяет в каждой точке, через которую она проходит, направление напряженности поля  $E$ , а следовательно, и направление силы  $f$ , действующей на положительный заряд  $+q$ , помещенный в эту точку поля. Так как направление силы  $f$  определяет лишь вектор ускорения, приобретаемого телом, на котором сосредоточен заряд  $q$ , а не направление его перемещения, то, следовательно, заряженное тело под действием сил поля, вообще говоря, движется не по линии напряженности. Положительно заряженное тело, на которое не действуют никакие силы, кроме электрических, будет двигаться по линии напряженности только в том случае, когда эта линия прямая и когда начальная скорость тела направлена по линии напряженности.



Рис. 15. Линия напряженности.

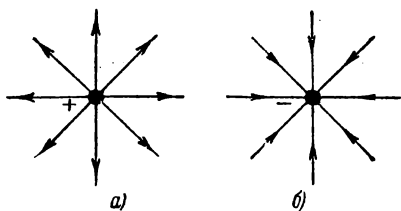


Рис. 16. Линии напряженности точечного заряда: *a* — положительного, *б* — отрицательного.

Рассмотрим примеры линий напряженности.

1. Линии напряженности точечного заряда. Легко видеть, что линии напряженности точечного заряда — это прямые линии, выходящие из заряда, если он положительный, и

входящие в заряд, если он отрицательный (рис. 16 *a* и *б*). Таким образом, положительный заряд можно рассматривать как место начала линий напряженности, а отрицательный заряд — как место окончания линий напряженности. Касательные к линиям напряженности в обоих этих случаях совпадают с самими линиями и направлены в каждой точке в том же направлении, что и напряженность.

2. Линии напряженности двух точечных зарядов. На рис. 17 *a* представлены линии напряженности двух *точечных*

равных и одноименных зарядов, на рис. 17 б — двух точечных разноименных зарядов, численно равных друг другу, т. е., другими словами, линии напряженности диполя.

3. Линии напряженности однородного поля. Однородным полем называется такое поле, во всех точках которого напряженности геометрически равны, т. е. одинаковы по величине и направле-

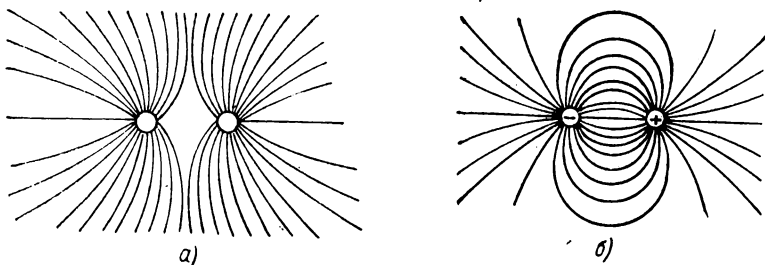


Рис. 17. Линии напряженности двух точечных зарядов: а — одноименных, б — разноименных.

нию. Очевидно, что линиями напряженности однородного поля являются прямые, параллельные вектору напряженности.

Ход линий напряженности можно экспериментально обнаружить, воспользовавшись тем, что удлинненные кусочки диэлектрика, поляризуясь, располагаются вдоль линий напряженности. Для демонстрации употребляют мелкие игольчатые кристаллы гипса, насыпая их на стек-

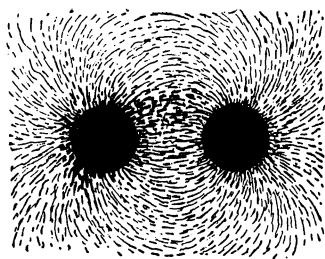


Рис. 18. Расположение кристалликов гипса вблизи станиолевых кружков, заряженных разноименно.

кланную пластинку с наклеенными на нее кусками станиоля, которым сообщаются заряды. На рис. 18 представлено расположение кристалликов гипса вблизи двух станиолевых кружков, заряженных разноименно.

Так как напряженность поля в каждой данной точке пространства имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не могут пересекаться. Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных.

**§ 126. Поток напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса.** Из предыдущего следует, что линию напряжен-

ности можно провести через любую точку пространства, так что число линий, проводимых в пространстве, ничем не ограничено.

Линия напряженности, характеризуя направление напряженности, сама по себе не характеризует величины напряженности. Однако можно ввести условие, связывающее *величину* напряженности с *числом*



проводимых линий напряженности. Там, где напряженность больше, будем проводить линии гуще, а там, где она меньше, — менее густо.

Произвольное поле можно мысленно разбить на малые области, в которых напряженность меняется столь мало, что поле можно считать в пределах этой области однородным. Проведем мысленно в такой области площадку  $\Delta S_0$  (рис. 19), перпендикулярную к линиям напряженности.

Условимся через эту площадку проводить такое число  $\Delta N$  линий напряженности, чтобы число линий, приходящихся на единицу поверхности площадки  $\Delta S_0$ , равнялось значению напряженности в области площадки, т. е. потребуем, чтобы выполнялось соотношение:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = E. \quad (1)$$

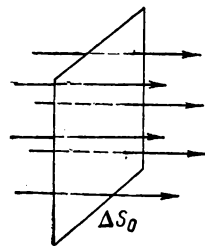


Рис. 19. Площадка  $\Delta S_0$ , перпендикулярная к линиям напряженности.

При выполнении этого условия построения линий величина напряженности действительно оказывается связанной с густотой линий напряженности. В тех местах поля, где напряженность меньше, линии напряженности проходят менее густо, а там, где напряженность больше, линии идут гуще.

Общее число линий напряженности, пронизывающих некоторую поверхность, назовем *потокom напряженности* через эту поверхность и обозначим буквой  $N$ . Число линий  $\Delta N$ , пронизывающих элементарную площадку  $\Delta S_0$ , образует элементарный поток через эту площадку.

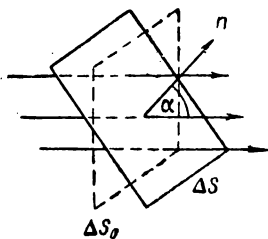


Рис. 20. Площадка  $\Delta S$ , расположенная наклонно по отношению к линиям напряженности.

Рассмотрим, какое число  $\Delta N$  линий напряженности пронизывает малую площадку  $\Delta S$  (рис. 20), направление нормали  $\mathbf{n}$  к которой образует угол  $\alpha$  с направлением линий напряженности. Пусть  $\Delta S_0$  — проекция  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную к направлению линий напряженности. Очевидно, что те и только те линии, которые пронизывают площадку  $\Delta S$ , пройдут и через площадку

$\Delta S_0$ ; следовательно, из соотношения (1) имеем:

$$\Delta N = \Delta S_0 \cdot E = \Delta S \cdot \cos \alpha \cdot E.$$

Но величина  $E \cos \alpha$  представляет собой проекцию вектора напряженности на направление нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Delta S$ :

$$E \cos \alpha = E_n,$$

следовательно,

$$\Delta N = E_n \cdot \Delta S. \quad (2)$$

Это соотношение определяет элементарный поток напряженности, пронизывающий произвольно ориентированный элемент поверхности  $\Delta S$ . Следовательно, элементарный поток напряженности через произвольно расположенный элемент поверхности равен произведению нормальной к элементу составляющей напряженности  $E$  на площадь элемента.

Если площадка  $\Delta S$  параллельна линиям напряженности, то поток через нее равен нулю, так как в этом случае  $\alpha = \pi/2$  и  $E_n = 0$ .

Знак потока зависит от того, какой угол образуют линии вектора напряженности с тем направлением нормали, которое принято за положительное.

На рис. 20 поток положителен; если бы мы выбрали за положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  направление, противоположное указанному на рис. 20, то знак потока изменился бы на отрицательный.

Поток напряженности через конечную поверхность  $S$  определяется как алгебраическая сумма элементарных потоков:

$$N = \sum \Delta N = \sum E_n \Delta S. \quad (3)$$

Суммирование производится по всем элементам поверхности, на которые мы разбиваем нашу поверхность  $S$ .

Элементы поверхности  $\Delta S$  надо брать бесконечно малыми. Обозначая поэтому элемент поверхности через  $dS$ , получим для элементарного потока напряженности  $dN$  выражение:

$$dN = E_n dS.$$

Поток напряженности  $N$  через поверхность  $S$  выразится суммой бесконечно большого числа таких бесконечно малых элементарных потоков, т. е. интегралом

$$N = \int_S E_n dS, \quad (3a)$$

где значок  $S$  означает, что интеграл распространяется на всю рассматриваемую поверхность  $S$ .

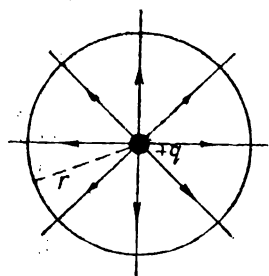


Рис. 21. К выводу теоремы Остроградского — Гаусса.

Выясним, какое число линий напряженности следует проводить из точечного заряда  $q$ , напряженность поля которого меняется обратно пропорционально квадрату расстояния (§ 124). Так как точечный заряд  $q$  создает поле, обладающее сферической симметрией, то линии напряженности, как было указано в § 125, представляют собой симметрично расположенные радиальные линии (рис. 21). Общее число их обозначим через  $N$ . Проведем мысленно сферическую поверхность произвольного радиуса  $r$  с центром в заряде  $q$ . Согласно принятому условию, число линий напряженности, пересекающих единицу поверхности, к ним перпендикулярной, равно значению напряженности в точках поверхности. Проведенная сферическая поверхность перпендикулярна к радиальным линиям напряженности. Общее число их

по предположению равно  $N$ , следовательно, через единицу поверхности их будет проходить  $\frac{N}{4\pi r^2}$ . Эта величина должна по условию (1) численно равняться напряженности на расстоянии  $r$  от заряда, т. е.

$$\frac{N}{4\pi r^2} = \frac{q}{r^2},$$

откуда

$$N = 4\pi q. \quad (4)$$

Таким образом, надо из *каждого точечного заряда  $q$  проводить  $4\pi q$  симметрично расположенных линий напряженности.*

Путем обобщения этого положения выводится так называемая *теорема Остроградского — Гаусса*, дающая общую связь между потоком напряженности через замкнутую поверхность и величиной зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Эта теорема облегчает для многих частных случаев определение вектора напряженности, создаваемого зарядами, находящимися на телах конечных или даже бесконечно больших размеров.

Теорема Остроградского — Гаусса может быть сформулирована следующим образом: *поток напряженности через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды, равен произведению  $4\pi$  на алгебраическую сумму охватываемых зарядов.*

Чтобы доказать это положение, условимся для замкнутой поверхности считать положительным направление нормали к элементу поверхности, *выходящее* из объема, ограничиваемого поверхностью (рис. 22). Тогда линии напряженности, выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создадут положительный поток; линии же, входящие в объем, создадут отрицательный поток.

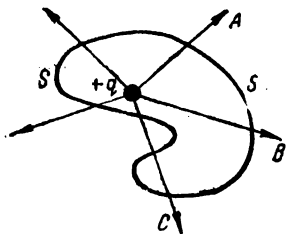


Рис. 23. Пересечение линиями напряженности произвольной замкнутой поверхности.

Каждая из этих линий пересечет поверхность  $S$  либо один раз, как линии  $A$  и  $B$ , либо любое другое, *нечетное* число раз, как, например, линия  $C$ , которая пересекает поверхность три раза. Но линия  $C$  *дважды выходит* из поверхности  $S$  и *один раз в нее входит*; по

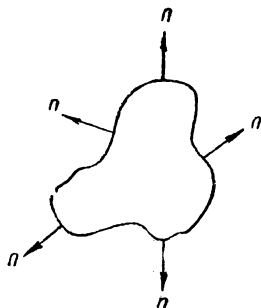


Рис. 22. Положительное направление нормали к замкнутой поверхности.

условию относительно знака потока в местах выхода она создает положительный поток, а в местах входа — отрицательный; таким образом, для расчета потока напряженности через замкнутую поверхность  $S$  линия напряженности  $C$  должна учитываться только один раз. Так же будет обстоять дело и с любой другой линией напряженности. В результате мы получим, что общее число линий напряженности, пронизывающих замкнутую поверхность любой формы, охватывающую точечный заряд  $q$ , равно числу линий, исходящих из точечного заряда  $q$ , т. е. равно  $4\pi q$ . По определению, это полное число линий напряженности  $N$  дает поток напряженности через замкнутую поверхность  $S$ .

Таким образом, справедливость теоремы Остроградского — Гаусса для одного точечного заряда доказана.

Для общего случая, когда внутри замкнутой поверхности находится любое число  $k$  зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , рассмотрим поток напряженности, создаваемый одним из них, который мы обозначим  $q_i$ . По сказанному, поток, создаваемый этим зарядом,  $N_i = 4\pi q_i$ ; при этом знак потока совпадает со знаком заряда.

Полный поток  $N$ , создаваемый всеми зарядами, равен алгебраической сумме потоков, создаваемых отдельными зарядами, т. е.

$$N = \sum N_i = 4\pi \sum q_i. \quad (5)$$

Этот результат и выражает собой теорему Остроградского — Гаусса, сформулированную выше.

Из теоремы Остроградского — Гаусса получается ряд важных следствий.

Во-первых, из теоремы мы снова получаем, что линии напряженности могут начинаться только в местах положительных зарядов, а кончаться только в местах отрицательных зарядов.

Во-вторых, если мы возьмем замкнутую поверхность, охватывающую заряды, алгебраическая сумма которых равна нулю, то полный поток напряженности через поверхность равен нулю; это означает, что число линий, выходящих из объема, ограниченного данной поверхностью, равно числу линий, входящих в объем.

В-третьих, если замкнутая поверхность проведена в поле так, что внутри нее нет зарядов, то линии напряженности будут ее пронизывать, не начинаясь и не кончаясь внутри нее. Следовательно, число входящих линий равно числу выходящих, и полный поток напряженности через поверхность также равен нулю.

**§ 127. Более строгий вывод теоремы Остроградского — Гаусса.** Ввиду важности рассматриваемых в § 126 вопросов, приведем вывод теоремы Остроградского — Гаусса непосредственно из закона Кулона и не основанный на применении понятия о линиях напряженности. Как и в предыдущем, разобьем поле на столь малые области, чтобы в пределах этих областей его можно было считать однородным.

Если взять в такой области бесконечно малую площадку  $dS$  (рис. 24), то в ее пределах напряженность  $\mathbf{E}$  можно считать постоянной по величине и направлению. Выберем положительное направление нормали к площадке, обозначив его через  $\mathbf{n}$ . Элементарный поток напряженности  $dN$  через площадку  $dS$  определится соотношением:

$$dN = E_n dS,$$

где  $E_n$  означает проекцию вектора  $\mathbf{E}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$ . Определим теперь элементарный поток, создаваемый через площадку  $dS$  точечным зарядом  $q$ , находящимся в такой точке, из которой элемент  $dS$  виден под телесным углом  $d\omega$  (рис. 24). По закону Кулона напряженность  $\mathbf{E}$  направлена по радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , проведенному из точки, где расположен заряд. Поэтому угол  $\alpha$  между нормалью  $\mathbf{n}$  и напряженностью  $\mathbf{E}$  равен углу между элементами поверхности  $dS$  и  $dS_0$ , где  $dS_0$  — проекция  $dS$  на направление, перпендикулярное к радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Отсюда следует, что:

$$dN = E_n dS = E \cos \alpha dS = E dS_0.$$

Так как в силу закона Кулона

$$E = \frac{q}{r^2},$$

то выражение для  $dN$  можно переписать в виде:

$$dN = \frac{q}{r^2} dS_0.$$

Величина  $\frac{dS_0}{r^2}$  есть, по определению, телесный угол  $d\omega$ , под которым элемент  $dS$  виден из места заряда. Отсюда окончательно получим:

$$dN = q d\omega, \quad (1)$$

т. е. элементарный поток напряженности  $dN$ , создаваемый точечным зарядом через элемент поверхности  $dS$ , равен произведению величины заряда  $q$  на величину телесного угла  $d\omega$ , под которым элемент поверхности  $dS$  виден из точки, где помещен заряд.

Полный поток  $N$  через замкнутую поверхность представляет собой сумму элементарных потоков через элементы поверхности. Однако ввиду того, что элементарные потоки бесконечно малы, суммирование должно быть заменено интегрированием:

$$N = \int dN.$$

Воспользовавшись формулой (1) для  $dN$ , перепишем последнее выражение в виде:

$$N = q \int d\omega. \quad (2)$$

Условимся, как и прежде, считать положительным направление нормали, выходящей из объема, ограниченного данной поверхностью; телесный угол будем считать положительным, когда из точки, где расположен заряд, видна внутренняя сторона поверхности.

Если заряд расположен внутри поверхности, то интеграл в формуле (2) должен быть распространен на весь телесный угол, под которым видна

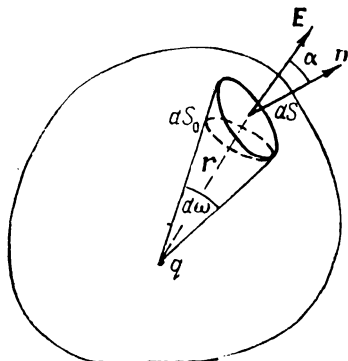


Рис. 24. К более точному выводу теоремы Остроградского — Гаусса.

замкнутая поверхность из точки, расположенной внутри этой поверхности. Как известно, он равен  $4\pi$ , откуда:

$$N = q \int d\omega = 4\pi q.$$

Если заряд находится вне замкнутой поверхности (рис. 25), то каждый элементарный телесный угол  $d\omega$  входит под интеграл и со знаком плюс (для элемента поверхности  $dS_1$ , внутренняя сторона которого видна из точки заряда) и со знаком минус (для элемента  $dS_2$ , внешняя сторона которого видна из точки заряда); следовательно, в этом случае в результате интегрирования по углам мы получим нуль, откуда следует, что и  $N = 0$ .

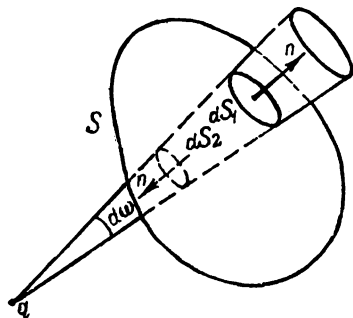


Рис. 25. К определению потока от заряда, находящегося вне замкнутой поверхности.

Результат этих интегрирований и даст теорему Остроградского — Гаусса: поток напряженности через замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на заряд, находящийся внутри поверхности.

**§ 128. Применение теоремы Остроградского — Гаусса.** Так как всякий заряд можно представить как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых зарядов, которые можно считать точечными, то теорема Остроградского — Гаусса справедлива по отношению к зарядам любой формы и размера. На этом основана плодотворность ее применения.

Прежде чем рассмотреть применения теоремы Остроградского — Гаусса, введем понятие об объемной и поверхностной плотностях зарядов.

Во многих задачах заряды оказываются распределенными в некотором объеме; в таких задачах существенно ввести в рассмотрение объемную плотность распределения зарядов. Пусть в некотором объеме  $\Delta V$  имеется заряд  $\Delta q$ . Тогда под средней *объемной плотностью* заряда будем подразумевать физическую величину, определяемую отношением

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (1)$$

Плотность  $\rho$  в данной точке определим как предел, к которому стремится это отношение при стягивании объема  $\Delta V$  к нулю:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta V} \right). \quad (1a)$$

В некоторых случаях заряды располагаются по поверхности тел, причем толщина слоя зарядов настолько мала, что ею можно пренебречь. В таких случаях мы вводим понятие о *поверхностной плотности зарядов*. Пусть на некоторую поверхность  $\Delta S$  приходится заряд  $\Delta q$ , тогда средняя поверхностная плотность заряда  $\bar{\sigma}$  определится отношением:

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (2)$$

Поверхностная плотность  $\sigma$  в данной точке будет равна пределу, к которому стремится это отношение при стягивании поверхности  $\Delta S$  к нулю:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta S} \right). \quad (2a)$$

Определим теперь с помощью теоремы Остроградского — Гаусса напряженность поля для ряда случаев.

1. Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости. Рассмотрим электростатическое поле, создаваемое бесконечной плоскостью, заряженной с плотностью  $+\sigma$ , постоянной во всех точках плоскости. По соображениям симметрии можно считать, что линии напряженности перпендикулярны к плоскости и направлены от нее. Чтобы в этом убедиться, будем рассуждать от противного; предположим, что линии напряженности направлены под некоторым углом к перпендикуляру к плоскости. Если бы линии напряженности были направлены так, как это изображено на рис. 26 пунктиром, то это означало бы, что от верхней полуплоскости положительный заряд отталкивается сильнее, чем от нижней, что находится в противоречии с нашим предположением о бесконечности плоскости и о постоянстве поверхностной плотности заряда на ней. Таким же рассуждением можно показать, что линии напряженности не могут иметь никакого другого

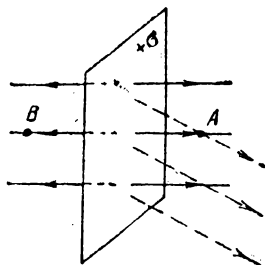


Рис. 26. Линии напряженности поля бесконечной плоскости.

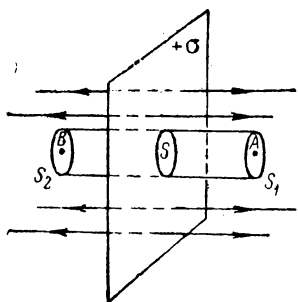


Рис. 27. К подсчету напряженности поля бесконечной плоскости.

направления, кроме нормального к поверхности. Рассмотрим точку  $A$ , лежащую справа от плоскости. Напряженность в этой точке направлена вправо; это следует из того, что она равна силе, действующей на единственный *положительный* заряд, который *отталкивается* от положительно заряженной плоскости. Если мы возьмем точку  $B$ , расположенную симметрично с точкой  $A$  влево от плоскости, то повторением приведенных рассуждений убедимся, что в ней напряженность  $E$  направлена в противоположную сторону по сравнению с направлением напряженности

в точке  $A$ . Следовательно, линии напряженности будут прямыми, выходящими из плоскости и перпендикулярными к ней.

Определим величину напряженности в точке  $A$ , применяя теорему Остроградского — Гаусса. В качестве замкнутой поверхности выберем



цилиндрическую поверхность (рис. 27), построенную следующим образом: берем произвольный участок  $S$  заряженной плоскости за среднее сечение цилиндра; боковую поверхность цилиндра проводим параллельно линиям напряженности. Оба основания цилиндра  $S_1$  и  $S_2$  проводим соответственно через точки  $A$  и  $B$ , параллельно плоскости. Тогда по соображениям симметрии можно считать, что напряженности постоянны во всех точках каждого из оснований  $S_1$  и  $S_2$ , по численному значению равны друг другу и равны искомой напряженности  $E$  в точке  $A$ . Рассчитаем поток напряженности через рассматриваемую цилиндрическую поверхность. Поток через боковую поверхность равен нулю, так как линии напряженности параллельны боковой поверхности. Следовательно, полный поток  $N$  складывается из потоков  $N_1$  и  $N_2$  через основания цилиндра  $S_1$  и  $S_2$ . Оба эти потока положительны. Так как поверхности  $S_1$  и  $S_2$  перпендикулярны к линиям напряженности, то потоки через них получаются умножением величины напряженности на площадь основания. Таким образом имеем:

$$N = N_1 + N_2 = ES_1 + ES_2 = E \cdot 2S.$$

По теореме Остроградского — Гаусса полный поток должен равняться произведению  $4\pi$  на заряд, заключенный внутри поверхности; этот заряд равен  $\sigma S$ . Следовательно,

$$2SE = 4\pi\sigma S,$$

откуда искомая напряженность  $E$  получается равной

$$E = 2\pi\sigma. \quad (3)$$

Значение  $E$  не зависит от расстояния точки  $A$  от плоскости. То же относится и к точке  $B$ . Таким образом, мы получаем справа и слева от плоскости однородные поля. Если плоскость заряжена отрицательно, то направление напряженности противоположно разобранным: линии будут входить в плоскость. Полученный результат верен только для бесконечной плоскости, так как только в таком случае могут быть использованы приведенные соображения симметрии; однако приближенно он справедлив для пространства, прилегающего к средней части конечной плоскости, вдали от ее краев.

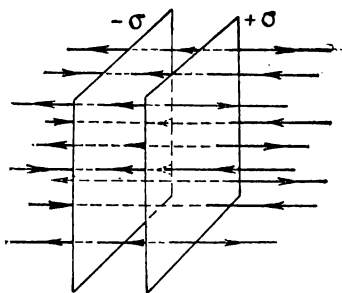


Рис. 28. Линии напряженности поля двух параллельных плоскостей.

2. Поле двух бесконечных параллельных плоскостей, заряженных разноименными зарядами с плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ .

Решение можно получить непосредственно геометрическим сложением полей двух плоскостей, заряженных разноименно. Из рис. 28

видно, что напряженности полей обеих плоскостей *между* плоскостями направлены в одну сторону, следовательно, их геометрическая сумма является их арифметической суммой. Напряженность поля каждой плоскости, согласно предыдущему, равна  $2\pi\sigma$ , следовательно, полная напряженность *между* плоскостями:

$$E = 2\pi\sigma + 2\pi\sigma = 4\pi\sigma. \quad (4)$$

Напряженности, создаваемые обеими плоскостями *правее* правой и *левее* левой плоскостей, направлены в противоположные стороны. Следовательно, их геометрическая сумма равна разности их численных значений; так как численное значение напряженности, создаваемой каждой плоскостью, равно  $2\pi\sigma$ , то результирующая напряженность для точек *вне* плоскостей равна нулю:

$$E = 0. \quad (4a)$$

3. Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью. Предположим, что сферическая поверхность радиуса  $R$  заряжена положительным электричеством и что поверхностная плотность заряда  $+\sigma$  постоянна во всех точках поверхности. Общий заряд сферической поверхности обозначим через  $q$ . Задачу разобьем на две части: а) определение напряженности электростатического поля *вне сферической поверхности*, б) определение напряженности *внутри сферической поверхности*.

Возьмем точку  $A$ , отстоящую от центра заряженной сферической поверхности на расстоянии  $r > R$  (рис. 29). Проведем через нее мысленно сферическую поверхность  $S$  радиуса  $r$  с центром в центре заряженной сферы.

По соображениям симметрии ясно, что напряженность будет численно одинакова во всех точках этой поверхности. Также по соображениям симметрии ясно, что в каждой точке вектор напряженности должен быть направлен по продолжению радиуса.

Применим теорему Остроградского — Гаусса к этой сферической поверхности  $S$  радиуса  $r$ . Так как эта поверхность перпендикулярна к линиям напряженности, то полный поток через нее получим, умножив напряженность  $E$  на величину поверхности, откуда полный поток равен  $E \cdot 4\pi r^2$ .

По теореме Остроградского — Гаусса имеем:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q,$$

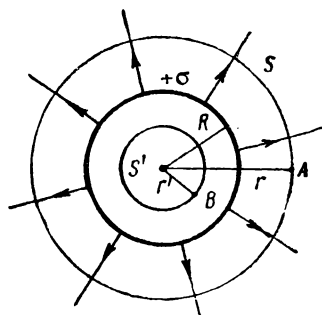


Рис. 29. К определению напряженности поля заряженной сферы.

откуда

$$E = \frac{q}{r^2} \quad \text{при } r > R, \quad (5)$$

т. е. *напряженность, создаваемая равномерно заряженной сферической поверхностью, вне ее такая же, как если бы весь заряд находился в ее центре.*

Перейдем к точкам, лежащим внутри сферической поверхности. Возьмем точку  $B$  (рис. 29), отстоящую от центра сферы на расстоянии  $r' < R$ , и проведем через эту точку сферическую поверхность  $S'$  с центром в центре заряженной сферы. Очевидно, что напряженность во всех точках этой поверхности будет численно одинакова. Так же, как и выше, по соображениям симметрии ясно, что напряженность (если она отлична от нуля) может иметь только радиальное направление и, следовательно, перпендикулярна к сферической поверхности  $S'$ .

Применяя теорему Остроградского — Гаусса к сферической поверхности  $S'$ , получим

$$E \cdot 4\pi r'^2 = 0,$$

так как внутри поверхности  $S'$  заряд равен нулю; отсюда:

$$E = 0 \quad \text{при } r' < R. \quad (6)$$

Следовательно, *напряженность электростатического поля во всех точках внутри равномерно заряженной сферической поверхности равна нулю.*

Можно показать (ср. § 132), что формулы (5) и (6) остаются справедливыми и для заряженного *проводящего* шара с зарядом  $q$ .

4. Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферой. Возьмем сферу радиуса  $R$ , общий положительный заряд  $q$  которой распределен по объему сферы с постоянной плотностью

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Напряженность поля в произвольной точке  $A$  (рис. 29), находящейся *вне* заряженной сферы и отстоящей от центра сферы на расстоянии  $r > R$ , очевидно, дается тем же выражением, что и напряженность от заряженной сферической поверхности:

$$E = \frac{q}{r^2},$$

и направлена так же по продолжению радиуса, так как соображения симметрии и расчет будут здесь те же. Таким образом, *равномерно заряженная сфера в точках вне ее создает такую напряженность, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в центре.*

Определим напряженность в точке  $B$ , лежащей *внутри заряженной сферы* и отстоящей от центра сферы на расстоянии  $r' < R$ . В этом случае условия симметрии те же, что и выше, откуда следует, что напряженность численно одинакова на всех точках сферической поверхности радиуса  $r'$  с центром в центре заряженной сферы, причем в каждой точке напряженность имеет радиальное направление. Заряд  $q'$ , находящийся внутри поверхности радиуса  $r'$ , равен:

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r'^3,$$

или, так как  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$ , то

$$q' = q \frac{r'^3}{R^3}.$$

Применяя теорему Остроградского — Гаусса к сферической поверхности радиуса  $r'$ , получаем:

$$N = E \cdot 4\pi r'^2 = 4\pi q' = 4\pi \frac{r'^3}{R^3} q,$$

откуда

$$E = \frac{N}{4\pi r'^2} = \frac{q}{R^3} r'.$$

Из формулы (7) видно, что *напряженность внутри равномерно заряженной сферы возрастает пропорционально расстоянию от*

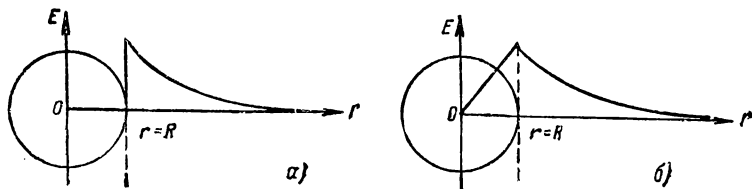


Рис. 30. Напряженность поля: *а* — поверхностно заряженной сферы, *б* — объемно заряженной сферы.

*центра сферы.* Это обстоятельство обусловлено тем фактом, что напряженность, как сказано, создается лишь той частью общего заряда, которая отстоит от центра не дальше, чем та точка, в которой вычисляется напряженность. Заряды, находящиеся вне мысленно проведенной сферы радиуса  $r'$ , по теореме Остроградского — Гаусса, дают на поверхности этой сферы напряженность поля, равную нулю.

На рис. 30*а* приведен график напряженности для случая поверхностно заряженной сферы и на рис. 30*б* — для случая объемно заряженной сферы.

5. Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной цилиндрической поверхностью. Возьмем цилиндрическую поверхность радиуса  $R$ ,

заряженную с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma$ . Определим напряженность в точке  $A$ , отстоящей на расстоянии  $r > R$  от оси цилиндра (рис. 31). Симметрия задачи сразу позволяет заключить, что напряженность в точке  $A$  должна быть направлена по продолжению радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Теорему Остроградского—Гаусса будем применять к проведенной через точку  $A$  цилиндрической поверхности, ось которой совпадает с осью заряженного цилиндра, а верхнее и нижнее основания перпендикулярны к оси и отстоят друг от друга на расстоянии  $l$ . Полный поток через эту поверхность выразится только потоком через боковую поверхность, так как напряженность параллельна основаниям, и поток через них равен нулю. Так как линии напряженности перпендикулярны к боковой поверхности цилиндра, то мы получим полный поток  $N$ , умножая значение напряженности  $E$  на величину боковой поверхности  $2\pi Rl$ :

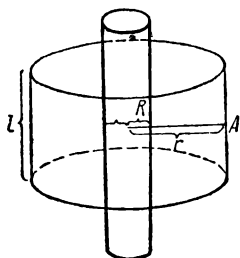


Рис. 31. К определению напряженности поля заряженного цилиндра.

и нижнее основания перпендикулярны к оси и отстоят друг от друга на расстоянии  $l$ . Полный поток через эту поверхность выразится только потоком через боковую поверхность, так как напряженность параллельна основаниям, и поток через них равен нулю. Так как линии напряженности перпендикулярны к боковой поверхности цилиндра, то мы получим полный поток  $N$ , умножая значение напряженности  $E$  на величину боковой поверхности  $2\pi Rl$ :

$$N = 2\pi Rl \cdot E. \quad (8)$$

В силу теоремы Остроградского—Гаусса, поток  $N$  численно равен произведению  $4\pi$  на заряд, заключенный внутри поверхности, через которую рассчитывается поток; этот заряд  $q$  равен заряду, приходящемуся на длину  $l$  цилиндра:

$$q = \sigma \cdot 2\pi Rl,$$

следовательно, по теореме Гаусса:

$$N = 4\pi q = 4\pi\sigma \cdot 2\pi Rl;$$

сравнивая это выражение для  $N$  с выражением (8), получим:

$$E = \frac{4\pi\sigma R}{r}. \quad (9)$$

Так как  $2\pi R$  численно равно площади боковой поверхности цилиндра, отнесенной к единице длины цилиндра, то  $\eta = 2\pi R\sigma$  представляет собой заряд, отнесенный к единице длины цилиндра. Отсюда формуле (9) может быть также придан вид:

$$E = \frac{2\eta}{r}. \quad (9a)$$

*Напряженность поля убывает обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра. Аналогичным приемом легко показать, что напряженность поля внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности равна нулю.*

Рассмотренные примеры показывают, что применение теоремы Остроградского—Гаусса дает возможность рассчитать электростати-

ческое поле в тех случаях, когда оно симметрично, и по соображениям симметрии можно наперед указать направление линий напряженности.

**§ 129. Работа сил электростатического поля. Потенциал.** При перемещении зарядов в электростатическом поле силы, приложенные к зарядам, совершают работу. Как будет показано ниже, силы электростатического поля обладают тем свойством, что работа, совершаемая ими при перемещении заряда, зависит не от того, по какому пути заряд перемещается, а зависит только от величины заряда и от его начального и конечного положений. Это свойство поля позволяет охарактеризовать любую точку поля с помощью особой функции, называемой *потенциалом* точки поля. Работа перемещения заряда от точки к точке выражается через разность значений потенциалов этих двух точек.

Рассмотрим сперва работу электрических сил в поле точечных зарядов.

Возьмем положительный заряд  $q_0$ , который перемещается в поле заряда  $q$  из точки  $a$  в весьма близкую точку  $b$  (рис. 32). Заряд  $q$  пусть расположен неподвижно в некоторой точке  $O$ . Бесконечно малое перемещение  $ds$  заряда  $q_0$  между точками  $a$  и  $b$  можно считать прямолинейным и на этом перемещении пренебречь изменением силы  $f$ , действующей на заряд  $q_0$ , и считать ее постоянной по величине и направлению. Согласно определению понятия работы, элементарная работа  $dA$  силы  $f$  на перемещении  $ds$  равна:

$$dA = f ds \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением силы  $f$  (совпадающим с направлением напряженности  $E$ ) и направлением смещения  $ds$ . Опустим из точки  $b$  перпендикуляр на продолжение прямой  $Oa$ , тогда видно, что  $ds \cdot \cos \alpha = Oc - Oa$ , но  $Oc$ , при бесконечно малом смещении  $ds$  может быть положено равным  $Ob$ , откуда  $ds \cdot \cos \alpha = Ob - Oa = dr$ , где  $dr$  — изменение расстояния между зарядами  $q$  и  $q_0$  при перемещении заряда  $q_0$  из точки  $a$  в точку  $b$ . Отсюда получаем для элементарной работы  $dA$  выражение:

$$dA = f dr. \quad (1)$$

Сила  $f$  представляет собою кулонову силу взаимодействия зарядов  $q_0$  и  $q$ ; ввиду малости смещения  $ds$  ее можно, как мы отметили, считать постоянной на всем перемещении  $ds$  и, следовательно, равной

$$f = \frac{qq_0}{r^2},$$

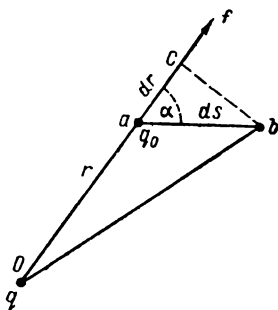


Рис. 32. К определению работы перемещения заряда  $q_0$  на пути  $ds$ .

где  $r = Oa$ . Подставляя это значение  $f$  в выражение работы (1) найдем:

$$dA = \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (2)$$

Пусть теперь заряд  $q_0$  перемещается из точки  $A$ , находящейся на расстоянии  $r_1$  от заряда  $q$ , в точку  $B$ , находящуюся на расстоянии  $r_2$  от него (рис. 33), и при этом пусть точки  $A$  и  $B$  не близки друг к другу. Для того чтобы определить работу на всем конечном перемещении  $AB$ , разобьем его на бесконечно малые перемещения  $ds$ . На каждом из таких перемещений элементарная работа  $dA$  выразится формулой (2), а полная работа  $A$  на всем пути  $AB$  выразится суммой всех таких элементарных работ, т. е. интегралом, взятым в пределах от  $r_1$  до  $r_2$ :

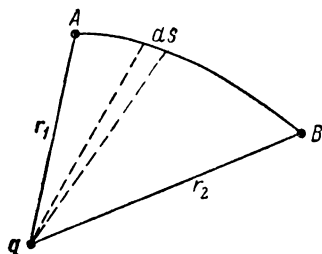


Рис. 33. К определению работы перемещения заряда  $q_0$  на пути  $AB$ .

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (3)$$

Вынося произведение  $qq_0$ , как постоянное, из-под знака интеграла получим

$$A = qq_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qq_0 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Это выражение для работы  $A$  мы можем записать в виде:

$$A = q_0 \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right), \quad (4)$$

откуда имеем, что работа сил поля при перемещении заряда  $q_0$  в поле точечного заряда  $q$  выражается произведением величины перемещаемого заряда на разность значений  $q/r$  в начальной и конечной точках перемещения.

Введем функцию  $V$ , определяемую равенством

$$V = \frac{q}{r} + C, \quad (5)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Функция  $V$  будет иметь для точки  $A$  значение:

$$V_1 = \frac{q}{r_1} + C,$$

а для точки  $B$  — значение:

$$V_2 = \frac{q}{r_2} + C.$$

Разность  $V_1 - V_2$  окажется равной  $\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$ , так как аддитивные по-

стоянные  $C$  сократятся. Функция  $V$ , определяемая равенством (5), называется *потенциалом точечного заряда*  $q$ . Вводя значение потенциала в формулу (4), получим:

$$A = q_0 (V_1 - V_2), \quad (6)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — значения функции  $V$  в точках  $A$  и  $B$ . Таким образом, *работа сил поля при перемещении заряда численно равна произведению его величины на разность потенциалов в начальной и конечной точках пути* и, следовательно, не зависит от формы пути, а только от положения его начальной и конечной точек. Если путь замкнут, то начальная и конечная точки пути совпадают, откуда  $V_1 = V_2$  и, по (6),  $A = 0$ , т. е. *при перемещении заряда по замкнутому пути работа электрических сил равна нулю*.

Рассмотрим теперь работу электрических сил при перемещении заряда в поле системы точечных зарядов. Возьмем систему точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (рис. 34) и предположим, что заряд  $q_0$  перемещается в поле этой системы из некоторой точки 1 в точку 2. Сила  $\mathbf{f}$ , действующая на заряд  $q_0$ , представляет собой равнодействующую сил  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ , с которыми действует на заряд  $q_0$  каждый из зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  в отдельности. Так как работа равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил, то работа перемещения заряда  $q_0$  в поле системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  равна  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — работы перемещения, совершаемые силами  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  в отдельности. Работу  $A_1$  силы  $\mathbf{f}_1$  можно, по (6), представить в виде:  $A_1 = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)})$ , где  $V_1^{(1)}$  и  $V_2^{(1)}$  — потенциалы, создаваемые зарядом  $q_1$  соответственно в точках 1 и 2. Также, обозначив через  $V_1^{(2)}$  и  $V_2^{(2)}$  потенциалы, создаваемые зарядом  $q_2$  соответственно в точках 1 и 2, получим  $A_2 = q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)})$  и т. д. Полная работа  $A$  равна:

$$A = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)}) + q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)}) + \dots + q_0 (V_1^{(n)} - V_2^{(n)}).$$

Это выражение, очевидно, можно переписать в виде:

$$A = q_0 [(V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \dots + V_1^{(n)}) - (V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \dots + V_2^{(n)})].$$

Обозначим алгебраическую сумму всех потенциалов в данной точке буквой  $V$ , тогда:

$$\left. \begin{aligned} V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \dots + V_1^{(n)} &= V_1, \\ V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \dots + V_2^{(n)} &= V_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда работа окажется равной:

$$A = q_0 (V_1 - V_2), \quad (8)$$

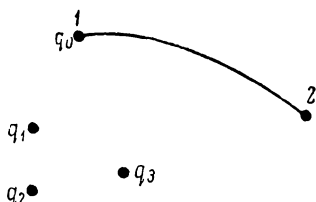


Рис. 34. Перемещение заряда  $q_0$  в поле системы зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .



т. е. работа  $A$  может быть численно представлена как произведение из величины  $q_0$  на разность значений функции  $V$  в точках 1 и 2, соответствующих началу и концу пути. Следовательно, функция  $V$  представляет собой потенциал, создаваемый всеми зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_{(n)}$  в данной точке. По (7), *потенциал  $V$  системы точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов  $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(n)}$ , создаваемых отдельными зарядами.*

Любую заряженную систему можно разделить на бесконечно большое число бесконечно малых зарядов, которые для точек, находящихся вне заряженной системы, можно считать точечными. Таким образом, можно, согласно предыдущему, говорить о потенциале, создаваемом любой заряженной системой вне ее. Понятие потенциала можно обобщить и для точек самой заряженной системы, если эта система заряжена с конечной поверхностной или объемной плотностью. Это обобщение понятия потенциала дается в общей теории электрического поля.

Остановимся еще на физическом смысле потенциала. Из формулы (8) следует, что разность потенциалов в двух точках электростатического поля численно равна отношению работы, совершаемой силами поля при перемещении заряда из одной точки в другую, к величине перемещающегося заряда:

$$\frac{A}{q_0} = V_1 - V_2. \quad (9)$$

Если мы положим  $q_0 = +1$ , то увидим, что *разность потенциалов в двух точках измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении положительного единичного заряда из первой точки во вторую.*

Из соотношения (9) определим единицу измерения разности потенциалов. В CGSE-системе за единицу разности потенциалов примем разность потенциалов между двумя точками, при перемещении между которыми единичного заряда совершается работа в один эрг. Эта единица называется электростатической единицей разности потенциалов. В международной системе единиц за единицу разности потенциалов принимают разность потенциалов между двумя точками, при перемещении между которыми заряда в один кулон совершается работа в один джоуль. Эта единица разности потенциалов называется *вольт*. Так как приблизительно  $1 \kappa = 3 \cdot 10^9$  CGSE, то с той же степенью точности:

1 вольт  $= \frac{1}{300}$  электростатической единицы разности потенциалов.

Размерность разности потенциалов в CGSE-системе получается из соотношения (9):

$$[V_1 - V_2] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}} = M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.$$

Заметим, что соотношение (9) связывает работу перемещения зарядов лишь с разностью потенциалов. Этим и определяется, что мы в соответствии с формулой (5) можем за потенциал точечного заряда взять бесконечное число функций, отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные  $C$ ; разность потенциалов при различном выборе  $C$  не изменится.

Таким образом, выбор постоянной  $C$  может быть сделан произвольно. Простейший случай мы получим, положив  $C=0$ ; тогда потенциал точечного заряда  $q$  в точке, отстоящей от него на расстоянии  $r$ , равен

$$V = \frac{q}{r}. \quad (5a)$$

Потенциал, по определению, есть величина скалярная. При выборе аддитивной постоянной  $C=0$  потенциал точечного заряда приобретает следующий физический смысл: *потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершат силы поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечно удаленную, потенциал которой равен нулю.* Действительно, работа перемещения единичного заряда из данной точки поля в бесконечно удаленную от заряда будет:

$$A_0 = \frac{A}{q_0} = \frac{q}{r} - \frac{q}{\infty} = \frac{q}{r}.$$

В случае, когда мы имеем дело со сложными системами зарядов, будем выбирать, по возможности, значение произвольной постоянной, входящей в выражения потенциала таким образом, чтобы потенциал бесконечно удаленных от системы точек равнялся нулю.<sup>1</sup> Тогда потенциал данной точки поля будет численно равен работе  $A_0$ , совершаемой силами, действующими со стороны поля на заряд, при перемещении единичного заряда из данной точки в бесконечность. В практических случаях, в которых нас обычно интересует разность потенциалов, часто удобно условно считать за нуль потенциал земной поверхности.

Рассмотрим теперь общий случай перемещения заряда  $q_0$  в любом электростатическом поле, характеризующем напряженностью  $\mathbf{E}$ . На бесконечно малом перемещении совершится работа:

$$dA = f \cos \alpha \, ds.$$

Замечая, что  $\mathbf{f} = q_0 \mathbf{E}$ , перепишем это выражение для элементарной работы  $dA$  в виде:

$$dA = q_0 E \cos \alpha \, ds.$$

Но  $E \cos \alpha$  представляет собой проекцию вектора напряженности  $\mathbf{E}$  на направление касательной к пути в данной точке (рис. 35). Обозначая эту проекцию через  $E_s$ , получим:

$$dA = q_0 E_s \, ds.$$

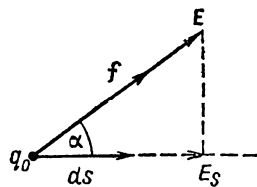


Рис. 35. К определению элементарной работы  $dA$ .

<sup>1</sup> Такой выбор произвольной постоянной всегда может быть осуществлен, если заряженная система имеет конечные размеры.

Работу  $A$ , совершаемую на конечном участке пути, получим, интегрируя выражение для  $dA$ :

$$A = \int_A^B q_0 E_s ds,$$

где интеграл взят в пределах от начальной точки пути  $A$  до конечной точки пути  $B$ . По сказанному, эта работа должна численно равняться произведению величины заряда  $q_0$  на разность потенциалов в точках  $A$  и  $B$ , откуда:

$$\int_A^B q_0 E_s ds = q_0 (V_A - V_B).$$

Вынося заряд  $q_0$ , как величину постоянную, из-под знака интеграла и сокращая на  $q_0$ , получим:

$$\int_A^B E_s ds = V_A - V_B.$$

Для замкнутого пути  $V_A = V_B$  и, следовательно,

$$\int_s E_s ds = 0, \quad (10)$$

где интегрирование распространено на весь замкнутый контур.

Контурный интеграл  $\int E_s ds$  есть предел суммы  $\sum E_s \Delta s$  по всем элементам  $\Delta s$  замкнутого контура, взятого при условии, что элементы  $\Delta s$  стремятся к нулю и что число элементов неограниченно возрастает. Такой интеграл называется циркуляцией вектора электростатической напряженности. Формула (10) является математическим выражением того, что в электростатическом поле работа электрических сил на замкнутом пути равна нулю. Циркуляция вектора электростатической напряженности равна нулю. Так как поле, в котором работа сил по замкнутому пути равна нулю, называется потенциальным, то можно сказать, что выражение (10) указывает на потенциальный характер электростатического поля.

**§ 130. Поверхности уровня потенциала.** Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке. Однако во всяком реальном случае можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

Геометрическое место точек постоянного потенциала назовем *поверхностью уровня потенциала* или *эквипотенциальной поверхностью*.

Очевидно, что работа перемещения заряда по поверхности уровня потенциала равна нулю.

В качестве иллюстрации рассмотрим поверхность уровня потенциала точечного заряда. Потенциал точечного заряда, как было показано, равен

$$V = \frac{q}{r}, \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние точки, в которой вычисляется потенциал, от заряда  $q$ . Следовательно, поверхностью уровня потенциала будет поверхность постоянного значения  $r$ , т. е. сфера с центром в точечном заряде (рис. 36).

Расположение поверхностей уровня потенциала часто бывает возможно определить из соображений симметрии, не пользуясь аналитическим выражением потенциала, на том основании, что работа перемещения заряда по поверхности уровня равна нулю. Например, для определения поверхностей уровня потенциала, создаваемого равномерно заряженной сферой, заметим, что поле, создаваемое сферой, обладает сферической симметрией, вследствие чего работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по поверхности сферы любого радиуса равна нулю. Отсюда заключаем, что поверхности уровня потенциала будут и в этом случае сферами, концентрическими с заряженной сферой. Тот же результат получится и для заряженного проводящего шара. В обоих случаях потенциал вне шара и на его поверхности определяется формулой (1).

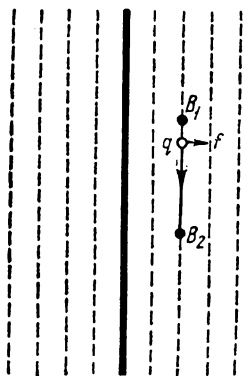


Рис. 37. Поверхности уровня потенциала бесконечной заряженной плоскости.

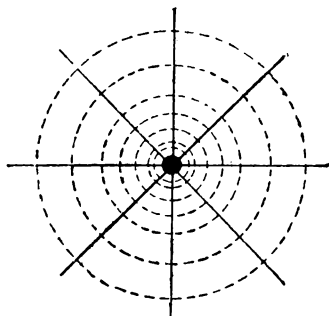


Рис. 36. Поверхности уровня потенциала (пунктирные линии) и линии напряженности (сплошные линии) точечного заряда.

Если точечный заряд, или заряд сферы, положителен, то силы, действующие со стороны поля на заряд, совершают положительную работу при удалении единичного положительного заряда от источника поля. Следовательно, в этом случае численные значения потенциалов поверхностей уровня убывают с увеличением радиуса. Если точечный заряд, или заряд сферы, отрицателен, то при удалении положительного заряда от источника силы поля совершают отрицательную работу. В этом случае значения потенциалов поверхностей уровня будут отрицательны, и по мере увеличения их радиуса потенциалы будут возрастать (убывая по абсолютному значению).

Возьмем равномерно заряженную бесконечную плоскость; поле, создаваемое такой плоскостью, однородно, а линии напряженности нормальны к плоскости. Отсюда следует, что работа перемещения заряда из некоторой точки  $B_1$  (рис. 37) в любую другую точку  $B_2$ , находящуюся на таком же расстоянии от заряженной плоскости, что и точка  $B_1$ , равна нулю.

Следовательно, потенциалы таких точек одинаковы:

$$V_{B_1} = V_{B_2},$$

таким образом, поверхности уровня потенциала являются плоскостями, параллельными заряженной плоскости. Если плоскость заряжена положительно, то значение потенциала убывает по мере удаления от заряженной плоскости. Очевидно, что поверхности уровня расположены симметрично по обе стороны от заряженной плоскости.

Во всех рассмотренных нами частных случаях вектор напряженности перпендикулярен к поверхности уровня потенциала. Покажем,

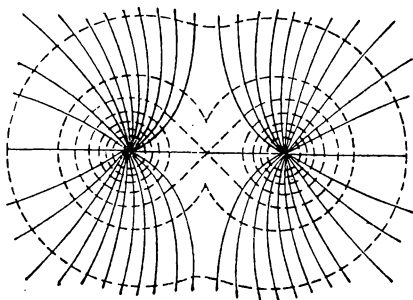


Рис. 38. Поверхности уровня потенциала (пунктирные линии) и линии напряженности (сплошные линии) двух точечных одноименных зарядов.

что это справедливо и в общем случае. Возьмем для этого поверхность уровня потенциала и рассмотрим работу перемещения заряда по поверхности уровня на малом участке пути  $\Delta s$ . При этом, по определению, работа электрической силы  $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$  на данном пути будет:

$$\Delta A = f \Delta s \cos \alpha = qE \Delta s \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями силы  $\mathbf{f}$  и перемещения  $\Delta s$ . С другой стороны, эта работа равна нулю, поскольку равна нулю эквипотенциальной поверхности.

разность потенциалов двух точек

Следовательно, мы получаем:

$$qE \Delta s \cos \alpha = 0.$$

Ввиду того, что ни заряд  $q$ , ни напряженность  $E$ , ни перемещение  $\Delta s$  не равны нулю, должен равняться нулю косинус угла  $\alpha$  между направлением силы  $\mathbf{f}$  и перемещением  $\Delta s$ , откуда получаем, что сила  $\mathbf{f}$  перпендикулярна к  $\Delta s$ . Направление силы  $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$  или совпадает с направлением напряженности (при  $q > 0$ ) или противоположно ему (при  $q < 0$ ). Следовательно, равенство  $\cos \alpha = 0$  означает, что направление напряженности перпендикулярно к поверхности уровня потенциала.

Таким образом, *линии напряженности представляют собой семейство линий, нормальных (ортогональных) к семейству поверхностей уровня потенциала (эквипотенциальных поверхностей)*. На рис. 38 изображены линии напряженности и

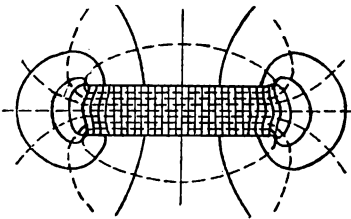


Рис. 39. Поверхности уровня потенциала (пунктирные линии) и линии напряженности (сплошные линии) двух разноименно заряженных дисков.

эквипотенциальные поверхности для случая двух точечных одноименных зарядов, равных по численному значению, а на рис. 39 — для двух разноименно заряженных дисков с одинаковым численным значением плотностей зарядов.

**§131. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом.** Установим теперь соотношение между потенциалом и напряженностью. Существование такой связи следует из того факта, что работа электрических сил, выражаемых через напряженность, вместе с тем выражается и через разность потенциалов точек поля.

Возьмем произвольное электростатическое поле и проведем в нем две близкие поверхности уровня потенциала. Потенциал одной поверхности пусть будет  $V$ , потенциал другой  $V + \Delta V$ ; положим  $\Delta V > 0$  (рис. 40). В некоторой точке  $B$  поверхности уровня потенциала  $V$  проведем нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности уровня в сторону возрастания потенциала. Точку пересечения нормали  $\mathbf{n}$  с поверхностью уровня  $V + \Delta V$  обозначим через  $B'$ . Расстояние между точками  $B$  и  $B'$  пусть будет равно  $\Delta n$ . Напряженность  $\mathbf{E}$  перпендикулярна к поверхности уровня потенциала, т. е. она направлена вдоль нормали  $\mathbf{n}$ , причем ввиду близости точек  $B$  и  $B'$  друг к другу можно на всем расстоянии между ними положить напряженность поля  $\mathbf{E}$  приблизительно постоянной. Тогда работа перемещения некоторого заряда  $q$  из точки  $B$  в точку  $B'$  представится в виде:

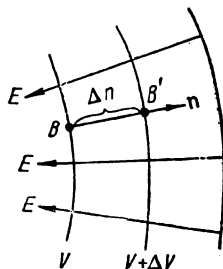


Рис. 40. Нормаль  $\mathbf{n}$  к двум близким уровням потенциала.

$$A = qE\Delta n.$$

С другой стороны, эта же работа  $A$  может быть выражена через разность потенциалов точек  $B$  и  $B'$ :

$$A = q[V - (V + \Delta V)].$$

Сравнивая оба выражения для работы  $A$ , найдем:

$$E \cdot \Delta n = -\Delta V,$$

что дает для  $E$  следующее выражение:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta n}. \quad (1)$$

Знак минус указывает, что напряженность  $\mathbf{E}$  направлена в сторону, противоположную направлению нормали  $\mathbf{n}$ . Действительно, нормаль  $\mathbf{n}$  мы провели в сторону возрастания потенциала, напряженность же  $\mathbf{E}$  по определению направлена в ту сторону, в которую действует сила на положительный заряд, т. е. в сторону убывания потенциала. Если в формуле (1) положить  $\Delta n = 1$ , то получим: *напряженность*

поля численно равна изменению потенциала на единицу длины, отсчитанной в направлении, перпендикулярном к поверхности уровня потенциала, и направлена в сторону убывания потенциала.

Величина  $\Delta V/\Delta n$ , указывающая быстроту изменения потенциала при перемещении в направлении, перпендикулярном к поверхностям уровня потенциала в сторону его увеличения, называется *градиентом потенциала*. Пользуясь понятием о градиенте, выражение (1) можно сформулировать так: *напряженность поля численно равна градиенту потенциала*.

Рассмотрим следующий пример.

Определим напряженность электростатического поля между двумя параллельными плоскостями, имеющими постоянные потенциалы.

Возьмем две бесконечные параллельные плоскости, потенциалы которых обозначим  $V_1$  и  $V_2$ . Расстояние между плоскостями равно  $d$  (рис. 41). По соображениям симметрии заключаем, что поверхности уровня потенциала представляют собой плоскости, параллельные данным.

Рис. 41.  
Две заряженные плоскости.

Напряженность электростатического поля одна и та же во всех точках между заряженными плоскостями и направлена перпендикулярно к ним. Численное значение напряженности получим, найдя изменение потенциала на единицу длины в направлении, перпендикулярном к поверхности уровня:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (2)$$

Напряженность направлена в сторону убывания потенциала. Таким образом, напряженность поля между двумя плоскостями, имеющими определенные потенциалы, пропорциональна разности их потенциалов и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

В случае неоднородного поля мы должны считать алгебраическую величину напряженности  $E$  в данной точке поля равной пределу, к которому стремится отношение  $-\Delta V/\Delta n$  при бесконечном убывании  $\Delta n$ :

$$E = -\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta V}{\Delta n} \right),$$

или, пользуясь обозначениями дифференциального исчисления,

$$E = -\frac{dV}{dn}. \quad (2a)$$

Воспользуемся вводимым в векторном исчислении понятием о *градиенте*. Пусть скаляр  $C$  задан как функция координат  $x, y, z$ . Под  $\text{grad } C$  подразумевается такой вектор  $A$ , составляющие которого  $A_x, A_y, A_z$ , вдоль осей прямоугольной координатной системы определяются соотношениями:

$$A_x = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (3)$$

Этот вектор, как оказывается, направлен в каждой данной точке по нормали к поверхности уровня скаляра  $C$  в сторону возрастания  $C$ . Его длина равна  $dC/dn$ . С помощью понятия о градиенте равенство (2а) может быть записано в виде:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4)$$

или

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V. \quad (4a)$$

Таким образом, получаем, что вектор напряженности  $\mathbf{E}$  равен взятому с обратным знаком градиенту от потенциала  $V$ .

**Пример 1.** Определим напряженность поля на оси диполя на расстоянии  $r$ , большом по сравнению с собственными размерами диполя.

Эта задача была нами непосредственно решена в § 124. Пользуясь соотношением (2а) между напряженностью поля и потенциалом, мы решим ее теперь проще. Потенциал в точке  $A$  (рис. 12) равен сумме потенциалов, создаваемых зарядами  $+q$  и  $-q$ :

$$V = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = q \frac{l}{r_+ r_-}.$$

При расстояниях  $r_+$  и  $r_-$ , много больших  $l$ , приближенно  $r_+ \cdot r_- = r^2$ , откуда

$$V = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2},$$

где  $p$  — момент диполя.

Направление нормали  $\mathbf{n}$  к эквипотенциальной поверхности в точке  $A$  совпадает с  $r$ , следовательно, по (2а):

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{2p}{r^3},$$

что совпадает с формулой (5) § 124.

**§ 132. Связь между напряженностью, потенциалом и плотностью объемных зарядов.** Между напряженностью электростатического поля и плотностью распределения зарядов имеется дифференциальное соотношение, справедливое в каждой точке поля. Это соотношение может быть найдено путем более детального анализа теоремы Остроградского — Гаусса.

Предположим, что в рассматриваемой области заряд распределен с объемной плотностью  $\rho$ , вообще говоря, непостоянной. Выделим элементарный кубик с гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными координатным осям (рис. 42). Объем кубика равен  $dx \, dy \, dz$ . Ввиду малости кубика плотность зарядов  $\rho$  можно считать во всех точках внутри кубика постоянной; тогда заряд  $q$ , находящийся внутри кубика, равен  $\rho \, dx \, dy \, dz$ . Напряженность поля в центре кубика (отмечен звездочкой на рис. 42) обозначим через  $E$ , а ее составляющие — через  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ .

Тогда значение составляющей  $E_x$  на грани 1 будет:

$$E_{x_1} = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx,$$

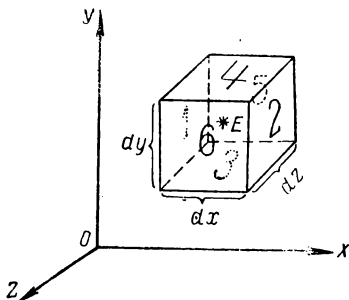


Рис. 42. К выводу выражения связывающего напряженность поля с плотностью объемных зарядов.



так как грань 1 имеет координату  $x$ , на  $\frac{1}{2} dx$  меньшую, чем центр кубика. Так же для составляющей  $E_{x_2}$  на грани 2 получим:

$$E_{x_2} = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx.$$

Точно так же для составляющих  $E_y$  и  $E_z$  на четырех остальных гранях кубика получим:

$$\begin{aligned} E_{y_3} &= E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, & E_{z_5} &= E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz, \\ E_{y_4} &= E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, & E_{z_6} &= E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz. \end{aligned}$$

Применим к нашему кубику теорему Остроградского — Гаусса. Для этого сосчитаем поток напряженности через грани кубика. Напомним, что поток напряженности  $dN$  через площадку  $dS$  равен произведению нормальной к площадке составляющей напряженности  $E$  на величину площадки  $dS$ . Нормаль к грани 1 направлена в сторону отрицательной оси  $OX$ , поэтому нормальная составляющая напряженности  $E$  к грани 1 равна  $-E_{x_1}$ . Площадь грани 1 равна  $dy dz$ , откуда поток напряженности через грань 1 равен:

$$dN_1 = -E_{x_1} dy dz = -E_x dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx dy dz.$$

Нормаль к грани 2 направлена в сторону положительной оси  $OX$ , а потому поток напряженности через нее равен:

$$dN_2 = +E_{x_2} dy dz = E_x dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx dy dz.$$

Сумма потоков через грани 1 и 2 будет:

$$dN_1 + dN_2 = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Точно так же получим, что сумма потоков напряженности через грани 3 и 4 равна:

$$dN_3 + dN_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz,$$

а через грани 5 и 6:

$$dN_5 + dN_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Полный поток через все шесть граней кубика окажется, таким образом, равным:

$$\begin{aligned} dN &= dN_1 + dN_2 + dN_3 + dN_4 + dN_5 + dN_6 = \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1)$$

По теореме Остроградского — Гаусса,  $dN = 4\pi q$ , где  $q$  — заряд, заключенный внутри кубика; но заряд этот равен  $\rho dx dy dz$ , откуда, воспользовавшись для  $dN$  его выражением (1), получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (2)$$

Формула (2) дает искомую связь между плотностью объемных зарядов  $\rho$  и производными вектора напряженности  $\mathbf{E}$ . Как известно из векторного анализа, сумма производных от составляющих вектора по соответствующим координатам носит название дивергенции вектора и обозначается:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Применяя обозначение  $\operatorname{div} \mathbf{E}$ , перепишем формулу (2) в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Воспользуемся формулами (4) на стр. 47, дающими связь между составляющими напряженности  $\mathbf{E}$  и производными потенциала по координатам:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Дифференцируя эти выражения вторично по координатам, получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

откуда следует:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Подставляя это значение суммы  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  в (2), найдем:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad \text{уравнение Лапласа} \quad (3)$$

Эта формула дает связь между плотностью объемных зарядов  $\rho$  и вторыми производными от потенциала по координатам. Сумму вторых производных от некоторой функции  $F(x, y, z)$  по переменным  $x, y, z$  принято обозначать символом  $\Delta F(x, y, z)$ , где  $\Delta$  носит название оператора Лапласа. Вводя это обозначение в формулу (3), получим:

$$\Delta V = -4\pi\rho. \quad (3a)$$

Полученное уравнение является основным дифференциальным уравнением для электростатического потенциала.

**§ 133. Проводники в электростатическом поле.** Как было указано в § 122, проводник представляет собой тело, содержащее свободные электроны, заряды которых компенсированы положительными зарядами, связанными с кристаллической решеткой проводника. Свободные электроны в проводнике способны под действием электрических сил определенного направления приобретать составляющую скорости в направлении сил и, следовательно, создавать перемещение зарядов — электрический ток. Если мы ограничиваемся электростатическими задачами, то должны выяснить условия равновесия зарядов. Необходимым условием равновесия зарядов внутри проводника является равенство нулю напряженности электростатического поля. Если бы напряженность поля не была равна нулю, то это создало бы электрические силы,

вызывающие направленное перемещение электронов. Таким образом, условием электростатического характера задачи будет

$$E = 0, \quad (1)$$

причем это условие должно быть выполнено для всех точек внутри проводника.

Условие (1) приводит к тому, что в заряженном проводнике некомпенсированные заряды могут располагаться только на поверхности проводника. Для доказательства этого применим теорему Остроградского — Гаусса к произвольной поверхности, ограничивающей некоторый объем *внутри* проводника. Во всех точках этой поверхности напряженность электростатического поля, по (1), равна нулю, так как поверхность проведена *внутри* проводника. Следовательно, поток напряженности через поверхность равен нулю, вследствие чего равен нулю и общий заряд, находящийся внутри рассматриваемой поверхности. Так как поверхность произвольна, то результат применим к любому участку внутри проводника. Итак, в любом участке, находящемся внутри проводника, помещенного в электростатическом поле, заряд равен нулю. Заряды на заряженном проводнике располагаются лишь на поверхности проводника.

Отсутствие зарядов на внутренних частях проводника является следствием теоремы Остроградского — Гаусса, которая, в свою очередь, устанавливается как следствие того, что силы взаимодействия между точечными зарядами по закону Кулона обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. Если бы в выражении закона Кулона

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

показатель степени при  $r$  равнялся не 2, а какому-либо другому числу  $n$ , то и на внутренних частях проводника должны были бы распределиться заряды. Таким образом, отсутствие зарядов на внутренних частях проводника служит косвенным подтверждением правильности закона Кулона. Непосредственные измерения Кулона с помощью крутильных весов (§ 123) не отличались большой точностью. Провести их более тщательно весьма трудно, так как затруднительно создать условия, которые в достаточной мере строго отвечали бы требованию, чтобы заряды были точечными. Отсутствие же зарядов на внутренних частях проводника может быть установлено гораздо более точно. Такого рода проверка была произведена Кевендишем, который в 1773 г., за 12 лет до Кулона, установил закон обратной пропорциональности электрических сил квадрату расстояния. Однако работы Кевендиша оставались неизвестными вплоть до 1879 г., когда Максвелл опубликовал их.

Максвелл повторил опыты Кевендиша в несколько измененном виде и более точно.

Он помещал два проводящих шара один в другой, причем между ними устанавливался с помощью проволоки контакт. При сообщении внешнему шару заряда внутренний шар оставался незаряженным, что Максвелл мог установить с большой точностью. Отсюда он нашел, что показатель степени  $n$  в законе Кулона не может отличаться от 2 более чем на  $1/20\,000$ .

Как мы увидим дальше, заряды отсутствуют не только внутри проводника, но и на внутренних поверхностях, ограничивающих полость внутри проводника. В общей теории электростатических явлений показывается, что и напряженность поля  $E$  внутри полости заряженного проводника равна нулю. При этом предполагается, что внутри самой полости нет других заряженных тел.

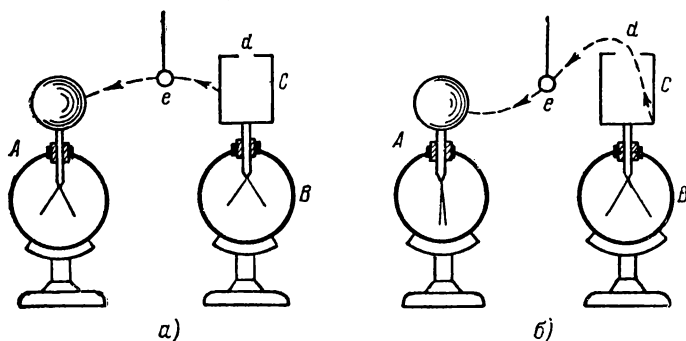


Рис. 43. Опыт с цилиндром Фарадея.

Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника может быть продемонстрировано весьма наглядным образом. Возьмем два электрометра  $A$  и  $B$ , на один из которых навинчен почти замкнутый полый цилиндр  $C$  (рис. 43), имеющий лишь в верхнем основании небольшое отверстие  $d$ . Такой цилиндр носит название цилиндра Фарадея. Сообщим электрометру  $B$  определенный заряд, что обнаружится по расхождению его листков. Возьмем маленький шарик  $e$ , прикрепленный к нити из изолирующего материала. Прикасаясь шариком  $e$  к внешней части фарадеева цилиндра  $C$ , мы зарядим шарик, а затем, пронеся его, например, по пути, указанному пунктиром на рис. 43а, приведем в соприкосновение с электрометром  $A$ . Этим мы передадим электрометру  $A$  некоторый заряд. Повторяя такой перенос несколько раз, можно получить заметное расхождение листков электрометра  $A$ . Если же мы первоначально приведем шарик  $e$  в соприкосновение с *внутренней* частью фарадеева цилиндра  $C$  (рис. 43б), то не сообщим этим шарiku никакого заряда и не сможем затем зарядить электрометр  $A$ .

Описанный опыт можно обратить. Представим себе некоторое тело  $A$  (рис. 44), поддерживаемое с помощью какого-либо источника

электризации при постоянном потенциале  $V$ . Зарядим шарик  $e$ , приведя его в соприкосновение с телом  $A$ , а затем поднесем к электроoskopу  $B$  и приведем в соприкосновение с внутренней частью фарадеева цилиндра  $C$ . Так как шарик составит при этом одну из внутренних частей сложного тела, образованного им совместно с цилиндром Фарадея, то на шарике не должно остаться заряда. Другими словами, шарик *целиком* передаст свой заряд электроoskopу  $B$ . Мы можем повторять такой перенос сколько угодно раз, и всегда шарик будет

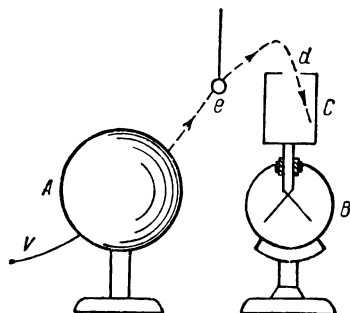


Рис. 44. Опыт с цилиндром Фарадея.

нацело отдавать свой заряд электроoskopу, так как условие отсутствия зарядов на внутренних частях проводника не зависит от величины его заряда и его потенциала. Таким образом, перенося шарик  $e$  достаточное число раз, мы можем зарядить электроoskop  $B$  до потенциала *более высокого*, чем потенциал  $V$  тела  $A$ , от которого берем заряды. В принципе, повторяя перенос неограниченное число раз, мы можем повышать потенциал электроoskopа  $B$  до бесконечности.<sup>1</sup> Практически повышение потенциала ограничивается утечкой зарядов, возрастающей по мере по-

вышения потенциала. Схема описанного опыта с цилиндром Фарадея использована в современном высоковольтном генераторе, позволяющем достигать разностей потенциалов в несколько миллионов вольт (см. т. III).

Отсутствие поля внутри полости в проводнике позволяет создать *электростатическую защиту*. Проводник, окружающий со всех сторон данную полость, экранирует ее от электростатических полей, созданных внешними зарядами. Практически сплошной проводник может быть заменен достаточно густой металлической сеткой. С целью создать электростатическую защиту листки электроoskopа помещают внутрь металлической коробки (см. сказанное на стр. 10). Коробку соединяют с землей, тогда она принимает потенциал Земли, и внешние поля не могут изменить ни поля, ни потенциала внутри коробки. Заряжаемые листочки электроoskopа должны быть изолированы от коробки. Если же их соединить с коробкой проводником, то будет невозможно сообщить им заряд, и они не разойдутся, какими бы источниками электризации мы ни располагали вне ящика электроoskopа.

<sup>1</sup> В § 137 мы увидим, что энергия заряженного тела возрастает с возрастанием его потенциала  $V$ . Отсюда может показаться, что указанный опыт с цилиндром Фарадея противоречит закону сохранения энергии. Однако это не так: на поднесение заряженного шарика  $e$  к заряженному цилиндру Фарадея надо *затратить* работу и тем большую, чем больше заряд цилиндра.

### § 134. Напряженность поля вблизи поверхности проводника.

В силу того, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, проводник представляет собой область постоянного потенциала. Действительно, численное значение напряженности равно изменению потенциала на единицу длины, нормальной к поверхности уровня. Отсюда из равенства нулю поля во всех точках проводника получаем, что изменение потенциала равно нулю для всех точек проводника; следовательно, само значение потенциала постоянно; таким образом, *все точки проводника как внутри него, так и на его поверхности, находятся при одном и том же потенциале*. Отсюда непосредственно следует, что поверхность проводника представляет собой поверхность уровня потенциала. Так как напряженность электростатического поля в каждой данной точке нормальна к поверхности уровня потенциала в этой точке, то *напряженность электростатического поля вне проводника вблизи его поверхности нормальна к поверхности проводника*.

Существует определенная связь между напряженностью электростатического поля вблизи поверхности проводника и поверхностной плотностью зарядов на поверхности проводника. Установим эту связь, пользуясь теоремой Остроградского — Гаусса. Возьмем малый участок  $\Delta S$  на поверхности заряженного проводника  $A$  (рис. 45). Предположим, что поверхностную плотность заряда на этом участке можно считать постоянной и равной  $\sigma$ . Тогда заряд  $q$ , приходящийся на этот участок, будет равен:

$$q = \sigma \cdot \Delta S. \quad (1)$$

Проведем мысленно малую замкнутую цилиндрическую поверхность  $S$ , образующие которой нормальны к поверхности проводника, а основания  $\Delta S'$  и  $\Delta S''$  параллельны  $\Delta S$ . По теореме Остроградского — Гаусса, число линий напряженности, пронизывающих замкнутую поверхность  $S$ , равно  $4\pi q$ . Так как внутри проводника, где проходит основание  $\Delta S''$ , напряженность поля  $E=0$ , а боковая поверхность параллельна  $E$ , то все  $4\pi q$  линии напряженности проходят через основание  $\Delta S'$ . Обозначив напряженность поля в пределах этого основания  $\Delta S'$  через  $E$ , получим:

$$E \cdot \Delta S' = 4\pi q,$$

откуда, пользуясь соотношением (1) и замечая, что  $\Delta S' = \Delta S$ , найдем:

$$E = 4\pi\sigma. \quad (2)$$

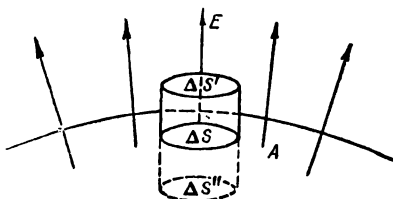


Рис. 45. К определению напряженности поля  $E$  вблизи поверхности заряженного проводника.

Из равенства (2) видно, что напряженность электростатического поля у поверхности проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда.

В тех случаях, когда поверхность проводника имеет выступы, поверхности уровня потенциала, проходящие вблизи проводника,

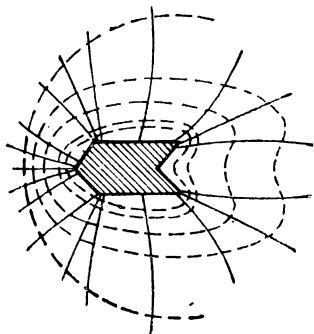


Рис. 46. Расположение эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) и линий напряженности (сплошные линии) у тела с выступом и впадиной.

оказываются сближенными у выступов. В этих областях напряженность поля будет больше, так как в них изменение потенциала на единицу длины будет значительнее. Таким образом, у выступов напряженность электрического поля больше и, следовательно, больше и поверхностная плотность зарядов на самих выступах проводника. На рис. 46 представлено заряженное проводящее тело, имеющее выступ и впадину; напряженность поля в окружающем пространстве максимальна вблизи выступа и минимальна во впадине. Эквипотенциальные поверхности, изображенные на рис. 46 пунктирными линиями, проходят наиболее густо в местах, где поле сильнее. В соответствии с этим

плотность зарядов на поверхности тела имеет наибольшее значение у выступа и наименьшее — во впадине.

Во внутренних полостях напряженность поля равна нулю и в соответствии с этим равна нулю и плотность зарядов на внутренних поверхностях проводников.

Особенно велико поле вблизи очень острых выступов. С этим обстоятельством приходится считать при зарядении проводников до высоких потенциалов: при наличии острых углов или выступов около них может произойти пробой окружающего диэлектрика (в частном случае воздуха) и начаться разряд — так называемое *коронирование*; поэтому всем металлическим частям приборов, заряжаемых до высоких потенциалов, придают закругленные формы и делают их поверхности гладкими.

Каждый из участков поверхности заряженного проводника находится в электростатическом поле, образуемом остальной частью заряженной поверхности проводника.

Поэтому на каждый участок  $\Delta S$  (рис. 47) заряженного проводника действует сила

$$\Delta f = \sigma \Delta S \cdot E_1, \quad (3)$$

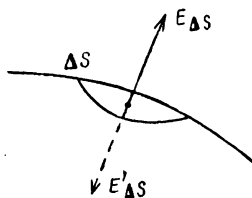


Рис. 47. Напряженность поля, образуемого элементом поверхности заряженного проводника.

где  $E_1$  — напряженность поля, создаваемого остальной частью поверхности проводника.

Для того чтобы определить  $E_1$ , рассмотрим поле, которое создает элемент  $\Delta S$  в точках, очень близких к своей поверхности. Это поле нормально к поверхности элемента  $\Delta S$  и симметрично по обе его стороны.

Напряженность этого поля по обе стороны от элемента  $\Delta S$  изображена на рис. 47 стрелками  $E_{\Delta S}$  и  $E'_{\Delta S}$ .

Полная напряженность  $E$ , создаваемая всей поверхностью заряженного тела вблизи  $\Delta S$ , снаружи тела, очевидно, равна сумме напряженностей  $E_1$  и  $E_{\Delta S}$ :

$$E = E_1 + E_{\Delta S}.$$

Так как векторы  $E$  и  $E_{\Delta S}$  перпендикулярны к поверхности элемента  $\Delta S$ , то, следовательно, перпендикулярен к  $\Delta S$  и вектор  $E_1$ , и последнее равенство можно переписать в виде алгебраической суммы

$$E = E_1 + E_{\Delta S}.$$

По равенству (2)  $E = 4\pi\sigma$ , откуда получаем:

$$E_1 + E_{\Delta S} = 4\pi\sigma. \quad (4)$$

Точно так же получим, что поле у поверхности элемента  $\Delta S$  внутри тела равно сумме  $E_1 + E'_{\Delta S} = E_1 - E_{\Delta S}$ . Так как внутри тела суммарная напряженность равна нулю, то:

$$E_1 - E_{\Delta S} = 0. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) найдем:

$$E_1 = E_{\Delta S} = 2\pi\sigma,$$

после чего равенство (3) дает для искомой силы, действующей на элемент поверхности заряженного тела:

$$\Delta f = 2\pi\sigma^2 \cdot \Delta S,$$

или, в силу равенства (2):

$$\Delta f = \frac{E^2}{8\pi} \Delta S.$$

Так как заряды одного знака отталкиваются, то сила  $\Delta f$ , независимо от знака заряда проводника, направлена наружу по отношению к проводнику.

**§ 135. Диполь во внешнем электрическом поле.** Рассмотрим диполь во внешнем *однородном* электрическом поле  $E$ . Пусть диполь образован двумя зарядами  $+q$  и  $-q$ , расположенными на неизменном расстоянии  $l$  друг от друга. Электрический момент такого диполя, по сказанному в § 124,  $p = ql$ . Пусть направление



диполя составляет с направлением напряженности  $\mathbf{E}$  угол  $\alpha$  (рис. 48). На положительный заряд диполя действует сила  $f_1 = qE$ , направленная по полю, а на отрицательный заряд — сила  $f_2 = -qE$ , направленная против поля. Эти силы образуют пару с моментом  $M = fl \sin \alpha = qlE \sin \alpha$ . Принимая во внимание, что  $ql = p$ , получим: на диполь в однородном внешнем электрическом поле *действует пара сил с моментом*

$$M = pE \sin \alpha. \quad (1)$$

Под влиянием этой пары диполь стремится повернуть вдоль линий напряженности поля.

Момент диполя  $\mathbf{p}$  можно рассматривать как величину векторную. Для этого проведем  $\mathbf{l}$  в виде вектора, направленного от отрицательного заряда  $-q$  к положительному заряду  $+q$ . Определим вектор  $\mathbf{p}$  равенством:

$$\mathbf{p} = ql. \quad (2)$$

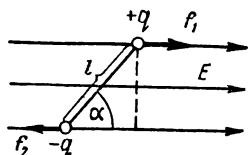


Рис. 48. Диполь во внешнем однородном поле.

Тогда имеем: в однородном внешнем электрическом поле диполь стремится повернуться так, чтобы вектор его электрического момента  $\mathbf{p}$  совпал по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ . Этому положению соответствует угол  $\alpha = 0$  и, по (1), равенство нулю действующего на диполь момента

сил. Очевидно, момент действующих сил  $M = 0$  и при  $\alpha = \pi$ . Однако это последнее положение неустойчиво: при малом отклонении диполя возникает момент, отклоняющий его еще больше от этого положения.

Если первоначально диполь составлял с линиями напряженности угол  $\alpha$ , отличный от нуля, то, очевидно, приближаясь к положению равновесия, он будет обладать некоторой скоростью вращения и по инерции перейдет через положение равновесия. В результате действия момента сил  $M$  диполь начнет совершать колебания около положения равновесия. Если на диполь, кроме момента сил  $M$ , действуют силы трения, то колебания будут затухающими, и диполь в конечном счете расположится вдоль линий напряженности. При очень больших силах трения его движение может быть аperiодическим, т. е. диполь асимптотически приблизится к положению равновесия, уменьшая постепенно скорость до нуля.

В § 35 т. I мы видели, что момент сил  $\mathbf{M}$  можно рассматривать, как величину векторную, направление которой связано с направлением сил, образующих пару, по правилу буравчика. На рис. 48 вектор  $\mathbf{M}$  направлен перпендикулярно к плоскости рисунка, за плоскость рисунка. По величине и направлению он определяется векторным произведением  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (1a)$$

Рассмотрим теперь диполь во внешнем *неоднородном* электрическом поле. В этом случае линии напряженности должны представлять

собой линии, сходящиеся или расходящиеся. Однако положим, что в пределах размеров диполя неоднородность поля столь незначительна, что силы  $f_1$  и  $f_2$ , действующие на заряды  $+q$  и  $-q$ , можно считать направленными в противоположные стороны (по и против оси  $Z$ ) и что напряженность поля меняется быстрее всего в направлении оси  $Z$ . Эти силы равны:

$$f_1 = +qE_1, \quad f_2 = -qE_2,$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — значения напряженностей поля в местах, где расположены заряды  $+q$  и  $-q$ . Сумма этих сил равна:

$$f = f_1 + f_2 = q(E_1 - E_2). \quad (3)$$

Отложим координату  $z$  параллельно силам, как показано на рис. 49. Тогда

$$E_1 - E_2 = \left( \frac{\Delta E}{\Delta z} \right) Z,$$

где  $(\Delta E / \Delta z)$  — градиент напряженности поля. Замечая, что  $Z = l \cos \alpha$ , получим:

$$E_1 - E_2 = \left( \frac{\Delta E}{\Delta z} \right) l \cos \alpha.$$

Подставляя это значение  $E_1 - E_2$  в (3), найдем:

$$f = ql \left( \frac{\Delta E}{\Delta z} \right) \cos \alpha$$

или

$$f = p \left( \frac{\Delta E}{\Delta z} \right) \cos \alpha. \quad (4)$$

Таким образом, в неоднородном внешнем электрическом поле на диполь, кроме момента сил, *действует сила, тем большая, чем больше градиент поля, т. е. чем сильнее неоднородность поля.* По равен-

ству (4) при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  сила  $f$  направлена в ту сторону, где напряженность поля по численному значению больше. При данных  $p$  и  $(\Delta E / \Delta z)$  сила  $f$  достигает максимального значения при  $\alpha = 0$ , т. е. когда диполь расположен вдоль линий напряженности поля. Окончательно имеем: во внешнем поле диполь стремится повернуться так, чтобы он расположился вдоль линий напряженности своим положительным концом в сторону линий напряженности  $E$ ; кроме того, на диполь действует еще сила, пропорциональная моменту диполя  $p$  и градиенту напряженности поля  $(\Delta E / \Delta z)$ . Эта сила перемещает диполь в сторону, где напряженность поля больше.

Существование сил, перемещающих диполь в область большей напряженности поля, объясняет притяжение наэлектризованной

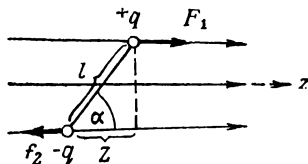


Рис. 49. Диполь во внешнем неоднородном поле.

стеклянной или эбонитовой палочкой легких предметов, не приходивших первоначально в соприкосновение с палочкой. Под влиянием электростатического поля палочки на предмете возникают индуцированные заряды, и он превращается в диполь. Благодаря неоднородности поля палочки на этот диполь действует сила, перемещающая его в область, где поле по численному значению больше, т. е. к самой палочке, независимо от знака ее заряда.

**§ 136. Емкость проводников.** Перейдем к рассмотрению весьма важного свойства проводников, называемого их *емкостью* или просто *емкостью*. Опыт показывает, что разные проводники, будучи заряжены одинаковым количеством электричества, принимают разные потенциалы; это указывает, что они отличаются друг от друга физическим свойством, которое характеризуется величиной, называемой *емкостью*.

Емкость проводника зависит от расположения окружающих тел, потому сперва определим понятие емкости уединенного проводника, т. е. такого проводника, вблизи которого нет никаких других тел, которые могли бы повлиять на распределение на нем зарядов. Потенциал уединенного проводника  $V$  пропорционален величине заряда  $Q$ , так как при увеличении заряда в определенное число раз увеличивается в такое же число раз напряженность поля, а следовательно, и работа перемещения заряда от проводника в бесконечность:

$$Q = CV. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  зависит от формы и величины проводника и называется его *емкостью*. Из равенства (1) имеем:

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (2)$$

Это соотношение указывает, что *емкость уединенного проводника есть физическая величина, численно равная количеству электричества, которое надо сообщить ранее не заряженному проводнику, чтобы потенциал его принял значение, равное единице* (при  $V=1$  имеем  $C=Q$ ). При этом мы считаем, что неопределенная постоянная в выражении потенциала выбрана так, что потенциалы бесконечно удаленных от проводника точек равны нулю.

Размерность емкости определится из соотношения (2):

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}} = L,$$

т. е. она оказывается *размерностью длины*. За единицу емкости примем емкость такого уединенного проводника, потенциал которого меняется на единицу при сообщении ему единичного заряда. В CGSE-системе это будет емкость такого проводника, сообщение которому одной CGSE-единицы заряда меняет его потенциал на одну CGSE-единицу потенциала; легко видеть, что это будет емкость проводя-

щего шара радиусом в 1 см. Действительно, потенциал проводящего шара равен (см. § 130)

$$V = \frac{Q}{R},$$

где  $R$  — радиус шара; сравнивая это выражение с формулой (2), получим:

$$C = R,$$

т. е. емкость шара численно равна его радиусу. Поэтому в CGSE-системе за единицу емкости принимается емкость уединенного шара радиусом в 1 см. Условно единицу емкости в CGSE-системе называют *сантиметром*.

В международной системе единиц за единицу емкости принято брать емкость такого проводника, увеличение на котором заряда на один кулон ведет к повышению его потенциала на один вольт. Такая единица называется *фарадой*. Связь между CGSE-единицей емкости и фарадой следующая:

$$1 \text{ фарада} = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ вольт}} \cong \frac{3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. заряда}}{\frac{1}{300} \text{ CGSE-ед. потенциала}} \cong 9 \cdot 10^{11} \text{ CGSE-ед. емкости.}$$

Очевидно, фарада есть чрезвычайно большая единица емкости. В самом деле, это есть емкость уединенного шара радиусом  $9 \cdot 10^{11}$  см, т. е. радиусом в 9 миллионов километров (в 1400 раз большим радиуса земного шара). Практически поэтому наряду с единицей емкости фарадой употребляют меньшую, называемую *микрофарадой*, равную одной миллионной доле фарады. Емкостью в одну микрофараду обладает уединенный шар радиусом 9 км, т. е. тоже еще очень большой шар.

*Емкость проводника зависит от окружающих данный проводник тел.* Действительно, под емкостью проводника мы подразумеваем физическую величину, измеряемую отношением заряда проводника к его потенциалу, потенциал же проводника зависит не только от заряда на нем самом, но и от зарядов всех тел, окружающих его. Если даже окружающие данный проводник тела и не были предварительно заряжены, то при заряджении рассматриваемого проводника они зарядятся через влияние и, таким образом, изменят потенциал на данном проводнике. В этом случае понятие емкости естественно обобщить, введя следующее определение, пригодное и в динамических задачах:

$$C = \frac{dQ}{dV};$$

емкость определяется по отношению приращения заряда проводника к приращению его потенциала при стремлении этих приращений к нулю, т. е. как производная заряда проводника по его потенциалу. Однако можно осуществить систему проводников с емкостью, практически не зависящей от окружающих тел; для этого система должна быть

защищена от влияния прочих тел. Примером таких систем являются конденсаторы.

Так называемый *плоский конденсатор* состоит из двух параллельных пластин  $A$  и  $B$  (рис. 50), расположенных друг от друга на расстоянии  $d$ , малом по сравнению с их собственными размерами. Будем считать, что между пластинами — пустота (практически это может быть воздух).

Пусть пластина  $B$  соединена с землей. Если другой пластине  $A$  сообщить заряд  $+Q$ , то благодаря электростатической индукции на пластине  $B$  возникает заряд  $-Q$  (равный ему заряд  $+Q$  отводится к земле и роли не играет). Пластина  $B$ , соединенная с землей, принимает потенциал Земли, который мы обозначим через  $V_2$ . Тогда пластина  $A$  примет некоторый потенциал  $V_1$ , значение которого определится лишь величиной заряда  $Q$  и потенциалом  $V_2$  пластины  $B$ . Другие незаряженные тела не будут влиять на потенциал  $V_1$  и, следовательно, на емкость конденсатора  $C$ , так как поле зарядов  $+Q$  и  $-Q$

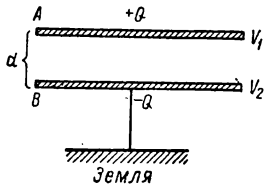


Рис. 50. Плоский конденсатор.

сосредоточено лишь между пластинами  $A$  и  $B$  и поэтому не может вызывать на других внешних телах индуцированные заряды.

Под емкостью  $C$  конденсатора подразумевается величина, измеряемая отношением заряда на одной из пластин (положительной) к разности потенциалов между пластинами:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}, \quad (3)$$

где считаем  $V_1 > V_2$ .

Выразим емкость плоского конденсатора через величины, характеризующие его размеры. Так как размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними, то напряженность поля между пластинами такая же, как и в случае двух бесконечных плоскостей, несущих равные по численному значению заряды противоположных знаков. Тогда, по сказанному в § 128, имеем, что напряженность поля между пластинами  $E$  равна:

$$E = 4\pi\sigma,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов. Обозначим площадь одной пластины через  $S$ , тогда  $\sigma = \frac{Q}{S}$  и

$$E = 4\pi \frac{Q}{S},$$

откуда:

$$Q = \frac{ES}{4\pi}. \quad (4)$$

Напряженность поля  $E$  выразим через разность потенциалов  $V_1 - V_2$  (см. § 131):

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

Подставляя это значение  $E$  в формулу (4), найдем:

$$Q = \frac{(V_1 - V_2) S}{4\pi d}.$$

Воспользовавшись этим равенством и формулой (3), для емкости плоского конденсатора  $C$  получим:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}. \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что емкость плоского конденсатора пропорциональна площади пластины  $S$  и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами  $d$ . Чем ближе расположены пластины друг к другу, тем больше емкость образуемого ими конденсатора. Впоследствии (см. § 139) мы увидим, как меняется емкость конденсатора, если пространство между пластинами заполнить какой-либо непроводящей (диэлектрической) средой.

**§ 137. Энергия системы зарядов.** При образовании любой системы заряженных тел совершается работа, так как заряды взаимодействуют друг с другом по закону Кулона и для размещения их в заданных местах надо совершить работу. Эта работа должна быть совершена какими-либо внешними силами за счет каких-либо внешних источников энергии, например за счет энергии химических процессов в гальваническом элементе, с помощью которого тела заряжаются, и т. д. По закону сохранения энергии работа внешних сил, приложенных к системе, определяет изменение ее энергии. Таким образом, система заряженных тел будет обладать некоторой энергией. Если затем тела разряжаются или перемещаются, то их электрическая энергия, частично или полностью, перейдет обратно в другие виды энергии.

В качестве примера подсчитаем электрическую энергию системы, состоящей из двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся в точках  $B_1$  и  $B_2$  на расстоянии  $r$  друг от друга. Для этого достаточно подсчитать работу, которую затрачивают внешние силы на перенесение зарядов  $q_1$  и  $q_2$  из бесконечно удаленных областей, где силы взаимодействия между ними равны нулю, в данные точки  $B_1$  и  $B_2$ ; при этом мы не учитываем работу образования самих зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , считая, что заряды нам даны.

Работа переноса зарядов  $q_1$  и  $q_2$  из бесконечно удаленных областей не зависит от порядка переноса зарядов. Перенесем сперва заряд  $q_1$  из бесконечности в точку  $B_1$ . Работа перемещения заряда  $q_1$ , при условии, что заряд  $q_2$  еще остается в бесконечности, равна нулю, так как равны нулю силы взаимодействия зарядов. После помещения заряда  $q_1$  в точку  $B_1$  перенесем заряд  $q_2$  в точку  $B_2$ . На это

затратится работа, равная произведению величины заряда  $q_2$  на разность потенциалов между точкой  $B_2$  и бесконечно удаленной точкой. Потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю, потенциал в точке  $B_2$  создается зарядом  $q_1$  и, как было показано в § 129, равен  $q_1/r$ . Таким образом, работа  $A$ , затрачиваемая на помещение зарядов  $q_1$  и  $q_2$  на расстоянии  $r$  друг от друга, равна

$$A = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Эта работа является мерой энергии взаимодействия  $W$  системы двух точечных зарядов:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Обозначая через  $V_1$  потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке  $B_1$ , и через  $V_2$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в точке  $B_2$ , имеем:

$$V_1 = \frac{q_2}{r}, \quad V_2 = \frac{q_1}{r}.$$

Выражение энергии  $W$  перепишем в виде:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{q_1}{r} \cdot q_2 + \frac{1}{2} \frac{q_2}{r} \cdot q_1, \quad (1)$$

откуда получаем

$$W = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2. \quad (1a)$$

Если заряды одноименны, энергия имеет положительный знак, если заряды разноименны, знак энергии — отрицательный.

Выражение энергии (1a) легко обобщить на систему, состоящую из  $n$  зарядов, расположенных на определенных расстояниях друг от друга; эта энергия выразится через сумму работ, необходимых для переноса каждого из зарядов  $q_i$  из бесконечности в то место, где он должен быть расположен. При этом получается выражение:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i, \quad (2)$$

где  $V_i$  означает потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $i$ -го, в месте, где находится  $i$ -й заряд.

Энергия системы зарядов носит характер потенциальной энергии. Отсюда вытекает важное следствие. Как известно, устойчивому состоянию системы соответствует минимум потенциальной энергии. Выражение же энергии системы зарядов ни при каком их взаимном расположении не достигает минимума. В самом деле, энергия каждой пары зарядов  $q_i$  и  $q_k$  выражается членом [см. формулу (1)] вида  $\frac{1}{2} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$ , где  $r_{ik}$  — расстояние между этими зарядами. Для одноименных зарядов это выражение положительно и непрерывно убывает по мере возрастания расстояния между зарядами  $r_{ik}$ . Это

соответствует тому факту, что два одноименных заряда непрерывно отталкивают друг друга, пока не разлетятся на бесконечно большие расстояния.

Для разноименных зарядов выражение  $\frac{1}{2} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$  отрицательно и, следовательно, непрерывно убывает по мере сближения двух зарядов: два разноименных заряда притягиваются друг к другу, пока не сольются и частично или полностью не нейтрализуют друг друга. Можно строго показать, что этот вывод о неустойчивости конфигурации, образованной каждой парой зарядов, справедлив и для системы зарядов при любом их начальном распределении, а также и для случая электрической системы с зарядами, характеризуемыми объемной плотностью.

*Устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна.*

Отсюда вытекает, что атомы и молекулы, представляющие собой сложные электрические системы, не могут представлять собой статических систем. Может показаться, что устойчивость достигается при непрерывном движении частиц, так же как устойчивость солнечной системы достигается за счет движения планет вокруг Солнца. Однако с точки зрения электродинамики система неустойчива и в этом случае, так как заряженная частица, движущаяся с ускорением, непрерывно теряет энергию путем излучения. С классической точки зрения невозможно построение устойчивой модели атомов или молекул, состоящих из отдельных заряженных частиц. Устойчивое состояние атомов или молекул находит объяснение лишь в квантовой механике.

Подсчитаем, далее, электростатическую энергию уединенного *заряженного проводника*. Предполагаем, что проводник, первоначально не заряженный, заряжается определенным количеством электричества  $Q$ , и при этом его потенциал принимает значение  $V$ .

На зарядение проводника тратится работа, которая будет мерой энергии заряженного проводника; эта работа может быть получена обратно при разряде проводника. Подсчитаем работу зарядения.

Между зарядом проводника и его потенциалом имеется соотношение:

$$Q = CV, \quad (3)$$

где  $C$  — емкость проводника.

При зарядении проводника возрастает его заряд  $Q$ , а вместе с зарядом — и его потенциал  $V$ , причем они все время связаны соотношением (3). Графически зависимость потенциала  $V$  от заряда  $Q$  изобразится прямой, проходящей через начало координат (рис. 51).

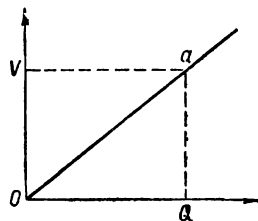


Рис. 51. Зависимость потенциала  $V$  от заряда  $Q$ .

Предположим, что на проводнике уже имеется некоторый заряд  $Q$ , и подсчитаем работу  $dA$ , которую надо затратить, чтобы из бесконечности принести на проводник еще бесконечно малый заряд  $dQ$ . Ввиду малости заряда  $dQ$ , мы можем считать, что при его сообщении проводнику, потенциал проводника заметно не меняется. Поэтому работа  $dA$  будет равна произведению из заряда  $dQ$  на разность потенциалов между проводником и бесконечно удаленной областью,



где потенциал по условию равен нулю. Таким образом,  $dA = VdQ$ . Полная работа переноса всех зарядов при зарядении тела от потенциала 0 до потенциала  $V$  выразится суммой всех элементарных работ  $dA$ , т. е. интегралом, взятым в пределах от 0 до  $V$ :

$$A = \int_0^V V dQ.$$

Из (3) имеем:  $dQ = C dV$ , откуда следует:

$$A = \int_0^V C V dV.$$

Емкость тела  $C$  есть величина постоянная, поэтому ее можно вынести из-под знака интеграла, после чего получим:

$$A = C \int_0^V V dV = \frac{CV^2}{2}.$$

Эта работа определяет энергию  $W$  заряженного тела; таким образом, для энергии заряженного проводника получаем:

$$W = \frac{CV^2}{2}. \quad (4)$$

Выразив емкость  $C$  через заряд  $Q$  и потенциал  $V$  по (3), получим другое выражение для энергии:

$$W = \frac{1}{2} QV, \quad (4a)$$

и, наконец, выразив потенциал через заряд и емкость, получим третью формулу для энергии заряженного проводника:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \quad (46)$$

Полученные формулы для энергии легко обобщить и на случай *заряженного конденсатора*. Процесс зарядения пластин можно представить происходящим следующим образом: первоначально нейтральные пластины постепенно заряжаются переносом бесконечно малых количеств  $+dQ$  электричества с одной пластины на другую; этот перенос увеличивает положительный заряд одной пластины на  $dQ$  и уменьшает положительный заряд, или, что то же самое, увеличивает отрицательный заряд другой на такую же величину. Таким образом, в процессе зарядения мы всегда имеем на обеих пластинах равные и противоположные по знаку количества электричества. Перенос количества электричества  $dQ$  с одной пластины на другую требует затраты работы. Если потенциал одной пластины равен  $V_1$ , а другой  $V_2$ , то эта работа равна:

$$dA = (V_1 - V_2) dQ.$$

Таким образом, мы получаем такое же выражение для элементарной работы  $dA$ , как и при зарядении уединенного тела, только вместо потенциала  $V$  стоит разность потенциалов  $V_1 - V_2$ . Отсюда и полная энергия заряженного конденсатора выразится формулой (4а), если в ней заменить  $V$  на  $V_1 - V_2$ :

$$W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2). \quad (5)$$

Пользуясь соотношением между зарядом  $Q$  и емкостью конденсатора  $Q = C(V_1 - V_2)$ , придадим этой формуле еще другой вид:

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2, \quad (5а)$$

а также

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \quad (5б)$$

Все три формулы дают энергию заряженного конденсатора, выраженную как функция двух из трех величин: разности потенциалов на обкладках  $V_1 - V_2$ , заряда на обкладках  $Q$  и емкости  $C$ .

Приведем численный пример. Определим энергию конденсатора емкостью в 1 мкф, заряженного до разности потенциалов в 3000 в.

Пример решим, пользуясь двумя различными системами единиц: а) CGSE-системой и б) практической системой.

а) В CGSE-системе емкость  $C = 1 \text{ мкф} = 9 \cdot 10^5 \text{ см}$ ,  $V_1 - V_2 = 3000 \text{ в} = \frac{3000}{300} \text{ CGSE-единиц потенциала}$ , т. е.  $V_1 - V_2 = 10 \text{ CGSE}$ . Отсюда по формуле (5а):

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \text{ эрг} = 4,5 \text{ дж}.$$

б) В практической системе единиц  $C = 1 \text{ мкф} = 10^{-6} \text{ ф}$ ,  $V_1 - V_2 = 3000 \text{ в}$ , откуда:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} (3 \cdot 10^3)^2 \text{ дж} = 4,5 \text{ дж}.$$

Определим энергию диполя во внешнем однородном электростатическом поле напряженности  $E$  (рис. 52). Пусть ось диполя  $l$  составляет с направлением напряженности поля  $E$  угол  $\alpha$ . Силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, соответственно равны  $+qE$  и  $-qE$ . Они образуют, как показано в § 135, пару с моментом

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

где  $p = ql$  — момент диполя.

Когда ось диполя параллельна напряженности поля,  $\alpha = 0$  и момент сил  $M = 0$ ; когда ось диполя перпендикулярна к напряженности поля ( $\alpha = \pi/2$ ), момент сил достигает максимального значения  $M = pE$ . Будем считать энергию диполя в этом последнем положении равной нулю.

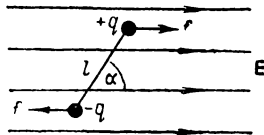


Рис. 52. Диполь во внешнем электрическом поле.

При повороте диполя на бесконечно малый угол  $d\alpha$  электрические силы совершают работу:

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha \cdot d\alpha;$$

на такую же величину уменьшится энергия диполя  $W$ . Запас энергии, которым диполь будет обладать, когда его ось составит с  $E$  угол  $\alpha$ , равен работе сил при его поворачивании из положения, перпендикулярного вектору  $E$  ( $\alpha = \pi/2$ ), в положение, определяемое данным значением  $\alpha$ :

$$W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha \cdot d\alpha = pE \int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha.$$

Выполняя интегрирование:

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha = -\cos \alpha,$$

получим

$$W = -pE \cos \alpha,$$

что и дает искомое выражение для энергии диполя. Знак минус получается в результате того, что мы поджили энергию диполя, расположенного перпендикулярно к напряженности поля  $E$ , равной нулю. Тогда при углах  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  она будет еще меньше, т. е. примет отрицательные значения. Положению  $\alpha = 0$  соответствует *минимум* электрической энергии. Вместе с тем это положение (при нем момент сил  $M = 0$ ) есть положение равновесия.

Таким образом, положению равновесия соответствует *минимум* электрической энергии. Так как в механике положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии, то, следовательно, энергия электрически заряженных тел, находящихся в электростатическом поле, как мы уже указывали, аналогична потенциальной энергии в механике.

**§ 138. Энергия электростатического поля.** Формулы, полученные в § 136, позволяют выразить энергию плоского конденсатора через величины, характеризующие электростатическое поле между его обкладками. Для этого воспользуемся связью между зарядом  $Q$  пластин плоского конденсатора и напряженностью поля  $E$  между пластинами (стр. 60):

$$E = \frac{4\pi Q}{S}, \quad (1)$$

где  $S$  — площадь пластины. Кроме того, разность потенциалов на обкладках связана с напряженностью поля  $E$  и расстоянием  $d$  между пластинами конденсатора соотношением:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (2)$$

Подставляя значения  $Q$  и  $V_1 - V_2$  из формул (1) и (2) в выражение энергии конденсатора [формула (5) § 137], получим:

$$W = \frac{1}{8\pi} E^2 S d. \quad (3)$$

Формула (3) выражает энергию конденсатора через напряженность поля  $E$ . Таким образом, оказывается, что энергию конденсатора можно

выразить двояко: либо через заряд и потенциалы пластин, либо через напряженность электростатического поля, созданного зарядами. Последнее обстоятельство позволяет считать, что электростатическое поле обладает энергией и что, следовательно, можно говорить *об энергии электростатического поля*. Эта точка зрения подтверждается еще тем, что по формуле (3) энергия пропорциональна произведению  $Sd$ , представляющему собою объем пространства между пластинами конденсатора. Так как поле пластин отлично от нуля лишь в пространстве между ними, то произведение  $Sd$  дает одновременно и объем пространства, в котором, в данном случае, сосредоточено поле. Таким образом, энергия  $W$  оказывается пропорциональной объему пространства, занятого полем.

Рассматривая энергию электростатического поля конденсатора, можно ввести понятие об *объемной плотности энергии*, подразумевая под ней величину

$$w = \frac{W}{Sd}, \quad (4)$$

т. е. величину, численно равную энергии, приходящейся на единицу объема поля. Подставляя в (4) вместо  $W$  его значение по (3), получим:

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \quad (5)$$

Понятие о плотности энергии введено нами для случая однородного поля конденсатора. Легко обобщить его на случай любого электростатического поля. Если поле неоднородно, то условимся под средней плотностью энергии  $\bar{w}$ , приходящейся на объем  $\Delta V$  неоднородного поля, подразумевать величину, измеряющуюся отношением энергии  $\Delta W$ , приходящейся на объем  $\Delta V$ , к величине этого объема:

$$\bar{w} = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Плотностью энергии в данной точке поля назовем предел, к которому стремится это отношение при неограниченном уменьшении объема  $\Delta V$  вблизи данной точки:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta W}{\Delta V} \right).$$

В очень малом объеме всякое поле можно считать приближенно однородным и характеризуемым определенным значением вектора напряженности  $E$ . Следовательно, плотность энергии неоднородного поля в данной точке равна

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2,$$

где  $E$  — напряженность в той точке поля, для которой вычисляется плотность энергии. Отсюда видно, что выражение (5) для плотности

энергии справедливо для любого поля. Плотность энергии неоднородного поля меняется от точки к точке.

Для вычисления энергии, приходящейся на конечный объем  $V$  электростатического поля, следует разбить этот объем на элементарные объемы  $\Delta V$ , определить энергию, приходящуюся на каждый из них,  $\Delta W = w \cdot \Delta V$ , и просуммировать по всему объему:

$$W = \sum w \cdot \Delta V. \quad (6)$$

Здесь  $w$  — значение плотности энергии, соответствующей каждому данному элементарному объему  $\Delta V$ .

Представление о распределении энергии поля с объемной плотностью  $w$  подтвердилось дальнейшим развитием учения об электрических и магнитных явлениях, показавшим, что энергия может передаваться через „пустое“ пространство в виде энергии электромагнитных волн с конечной скоростью  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек. Этот вывод имеет большое значение для понимания природы поля. Энергия есть одна из характеристик состояния материи и, следовательно, понятие об энергии не может быть оторвано от понятия о материи. Это подтверждает указанный в § 124 вывод, что само электростатическое поле является особым видом материи (подробнее см. § 152).

Более точно выражение энергии, приходящейся на конечный объем неоднородного поля, получим, рассматривая бесконечно малые элементы объема  $dV$ . Тогда энергия  $dW$ , приходящаяся на такой бесконечно малый объем, выразится формулой:

$$dW = \frac{1}{8\pi} E^2 dV.$$

Энергия  $W$  поля, заключенного в конечном объеме  $V$ , выразится суммой энергий всех бесконечно малых участков поля, т. е. интегралом

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV, \quad (6a)$$

где интеграл распространен на весь объем  $V$  поля.

Определим, пользуясь выражением (6a), полную энергию электростатического поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R$ . Пусть заряд сферы равен  $Q$ , и сфера находится в пустоте.

Подсчитаем энергию  $dW$ , приходящуюся на бесконечно тонкий шаровой слой, concentрический с заряженной сферой; пусть радиус этого шарового слоя  $r$  и его толщина  $dr$ . Ввиду малой толщины слоя напряженность поля  $E$  во всех точках внутри слоя можно считать постоянной и равной

$$E = \frac{Q}{r^2}.$$

Объем слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ , откуда энергия поля, заключенного внутри слоя:

$$dW = \frac{Q^2}{2r^2} dr.$$

Энергию всего поля получим, проинтегрировав  $dW$  по  $r$  от значения  $r = R$  (соответствует точкам вблизи поверхности заряженной сферы) до  $r = \infty$ :

$$W = \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{2r^2} dr = \frac{Q^2}{2} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$\int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{R}, \text{ откуда найдем } W = \frac{Q^2}{2R}.$$

Так как емкость уединенной сферы равна ее радиусу ( $C = R$ ), то последнее выражение можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C},$$

что совпадает с выражением (46) § 137 для энергии заряженного тела. Таким образом, исходя из выражения плотности энергии электрического поля, мы пришли к первоначальному выражению энергии заряженного тела через заряд и емкость.

---

## ГЛАВА XV

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

**§ 139. Диэлектрики. Диэлектрическая постоянная.** В середине прошлого столетия Фарадей, экспериментируя со сферическим конденсатором, заметил, что если пространство между обкладками конденсатора заполнить серой (вместо воздуха), то электроемкость конденсатора возрастет в несколько раз. Впоследствии было установлено, что это явление носит общий характер и что емкость любого конденсатора зависит от того, какое непроводящее вещество (*диэлектрик*) заполняет пространство между его обкладками. Обозначим через  $C_0$  емкость конденсатора в том случае, когда между его обкладками пустота. Тогда при наличии диэлектрика между обкладками конденсатора его емкость будет:

$$C = \epsilon C_0. \quad (1)$$

Величина  $\epsilon$ , называемая *диэлектрической постоянной*, показывает, во сколько раз возрастает емкость конденсатора, если вместо пустоты между его обкладками будет находиться данный диэлектрик.

Значение диэлектрической постоянной зависит от природы диэлектрика и от условий, при которых он находится (температура, давление и т. д.). Опыт показывает, что для всех веществ  $\epsilon > 1$ . В соответствии с формулой (1) диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  есть величина безразмерная; для пустоты  $\epsilon = 1$ .<sup>1</sup> В табл. I приведены

Таблица I

**Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$**

Вещество	$\epsilon$	Вещество	$\epsilon$	Вещество	$\epsilon$
Воздух (при 1 атм) . . .	1,0006	Парафин . . .	2,1	Эбонит . . . .	2,5
Сера . . . . .	4	Слюда . . . . .	6 — 7	Керосин . . . .	2,0
Воск . . . . .	7,8	Стекло . . . . .	5,5 — 7	Вода . . . . .	81
		Фарфор . . . . .	5,7 — 6,3		

<sup>1</sup> Ниже будет указано, что можно ввести такую систему измерения электрических величин, при которой диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  становится величиной размерной и ее численное значение для пустоты — отличным от единицы.

значения диэлектрической постоянной для ряда веществ (при обычных температурах). Как видно, значения диэлектрических постоянных колеблются от величин, весьма мало отличающихся от единицы (газы при атмосферном давлении), до нескольких десятков. Особенно большую диэлектрическую постоянную имеет вода ( $\epsilon = 81$ ).

Рассмотрим, что происходит при введении однородного диэлектрика между пластинами плоского конденсатора.

Предположим сперва, что обкладки конденсатора отключены от окружающих тел так, что заряды на них остаются неизменными:

$$Q = \sigma S.$$

При этих условиях увеличение емкости конденсатора при заполнении его диэлектриком происходит за счет уменьшения разности потенциалов между его обкладками. Действительно, из соотношения

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (2)$$

видно, что увеличение емкости в  $\epsilon$  раз должно произойти вследствие уменьшения в  $\epsilon$  раз разности потенциалов  $V_1 - V_2$  его обкладок. Уменьшение же разности потенциалов происходит из-за ослабления напряженности электростатического поля между обкладками, так как в силу соотношения (2) § 131:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

Отсюда видно, что напряженность поля  $E$  между обкладками заполненного диэлектриком конденсатора окажется в  $\epsilon$  раз меньше напряженности  $E_0$  поля такого же пустого конденсатора:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Разберем причины ослабления поля. В диэлектрике, внесенном в электрическое поле между обкладками конденсатора, возникает поляризация (см. § 122), сопровождающаяся перераспределением зарядов в молекулах диэлектрика или поворотами дипольных молекул. В случае однородного диэлектрика эта поляризация не сопровождается образованием объемных зарядов в толще диэлектрика, так как молекулы в целом нейтральны и заряды соседних молекул друг друга компенсируют (см. рис. 53). На границе диэлектрика, однако, компенсации зарядов не происходит. При этом на поверхности, обращенной к отрицательной пластине, возникают некомпенсированные положительные заряды, а на поверхности, обращенной к положительной пластине, — отрицательные заряды. Эти заряды носят название

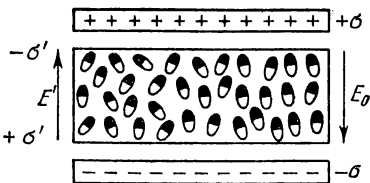


Рис. 53. Диэлектрик в конденсаторе.



*связанных* зарядов, и их можно считать распределенными на поверхности диэлектрика с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ . (См. подробнее § 141.)

В результате в диэлектрике создается дополнительное электрическое поле, образованное поляризацией диэлектрика, *направленное в сторону, противоположную направлению поля, создаваемого обкладками конденсатора.*

Предположим, что поле между обкладками при отсутствии в нем диэлектрика имеет напряженность  $E_0$ . Величина  $E_0$  связана с плотностью  $\sigma$  зарядов на обкладках, которые мы назовем *свободными*, соотношением:

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

Напряженность поля  $E'$ , создаваемого поляризацией диэлектрика, связана с плотностью связанных зарядов аналогичным соотношением:

$$E' = 4\pi\sigma'.$$

Полное поле между обкладками конденсатора, заполненного диэлектриком, будет характеризоваться напряженностью  $E$ , равной геометрической сумме напряженностей поля обкладок и поля поляризованного диэлектрика:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Учитывая то, что направление  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  противоположно, найдем численное значение результирующей напряженности:

$$E = E_0 - E' = 4\pi(\sigma - \sigma').$$

Таким образом, видно, что поляризация диэлектрика *ослабляет* поле. Используя соотношение

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon},$$

найдем связь между плотностью связанных зарядов и напряженностью поля в диэлектрике:

$$\sigma' = \frac{4\pi\sigma - E}{4\pi} = \frac{\epsilon E - E}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = \kappa E. \quad (3)$$

Величина  $\kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$  называется коэффициентом поляризации. Очевидно, что коэффициент поляризации зависит от рода диэлектрика. Из последнего равенства видно, что плотность зарядов, возникающих на границе диэлектрика в результате его поляризации, пропорциональна напряженности действующего в диэлектрике поля (подробнее см. § 142).

Заметим, что в данном случае поляризованный диэлектрик создает ослабляющее поле только внутри самого диэлектрика, так как связанные заряды  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$  оказываются распределенными по двум

параллельным плоскостям; такие же заряды, как мы знаем, вне области, ограниченной этими плоскостями, создают напряженность, равную нулю (см. § 128). Следовательно, если между диэлектриком и пластинами существуют зазоры, напряженность электрического поля в них будет та же, что и до внесения диэлектрика.

Рассмотрим теперь влияние диэлектрика в том случае, когда диэлектрик вносится в конденсатор, на обкладках которого поддерживается постоянная разность потенциалов (путем подключения обкладок к источнику постоянной разности потенциалов). В этом случае напряженность поля между обкладками остается той же, что и до внесения слоя (по основному соотношению между напряженностью и потенциалом). Поскольку поляризация диэлектрика ослабляет поле, постольку ясно, что сохранение напряженности неизменной возможно лишь при условии увеличения свободного заряда на обкладках конденсатора за счет зарядов подключенного источника.

По соотношению (2) видно, что увеличение емкости в  $\epsilon$  раз означает, что при этих условиях свободный заряд на обкладках возрастает в  $\epsilon$  раз.

**§ 140. Энергия конденсатора при наличии диэлектрика. Энергия поля в диэлектрике.** Посмотрим, что происходит с энергией конденсатора при введении между его пластинами диэлектрика. В § 137 мы видели, что энергия конденсатора  $W$  определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2), \quad (1)$$

где  $Q$  — заряд пластины конденсатора. Так как это выражение для  $W$  получено лишь на основании подсчета работы переноса зарядов между пластинами с данными разностями потенциалов, то *оно остается в силе и при наличии между пластинами конденсатора диэлектрика*. Формула (1) позволяет сравнить энергию  $W$  пустого конденсатора с энергией  $W_\epsilon$  такого же конденсатора, заполненного диэлектриком. Здесь, однако, надо уточнить условия, при которых идет сравнение.

Если *заряды* на обкладках пустого конденсатора и конденсатора с диэлектриком *одинаковы*, то различие в энергии обусловлено различием разностей потенциалов на обкладках обоих конденсаторов. Как было разобрано в § 139, в этом случае разность потенциалов на обкладках заполненного диэлектриком конденсатора в  $\epsilon$  раз меньше разности потенциалов на обкладках пустого конденсатора, поэтому при этих условиях мы получаем

$$\frac{W_\epsilon}{W} = \frac{1}{\epsilon},$$

т. е. *энергия конденсатора уменьшается при заполнении его диэлектриком в  $\epsilon$  раз*.

Наоборот, если у пустого и заполненного диэлектриком конденсатора на обкладках поддерживаются *одинаковые разности потенциалов*, то энергии будут пропорциональны свободным зарядам  $Q$  на обкладках.

В этом случае, как мы видели, заряд обкладок заполненного диэлектриком конденсатора в  $\epsilon$  раз больше, чем заряд обкладок пустого конденсатора, и мы получаем

$$\frac{W_\epsilon}{W} = \epsilon,$$

т. е. *энергия конденсатора возрастает* при заполнении его диэлектриком. Увеличение энергии происходит за счет источника, поддерживающего неизменную разность потенциалов на обкладках.

Из выражения для энергии конденсатора

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

легко найти плотность энергии электростатического поля внутри диэлектрика аналогично тому, как в § 138 было получено выражение для плотности энергии электростатического поля в пустоте. Для этого рассмотрим плоский конденсатор, заполненный диэлектриком, поле в котором можно считать однородным. Подставляя в формулу для энергии (1) заряд  $Q$  и разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , выраженные через напряженность поля,

$$Q = \sigma S = \frac{\epsilon SE}{4\pi} \text{ и } V_1 - V_2 = Ed,$$

найдем

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 Sd.$$

Деля последнее выражение на объем диэлектрика в конденсаторе  $Sd$ , получим для плотности энергии в диэлектрике выражение:

$$W = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}. \quad (2)$$

Обобщение на неоднородный диэлектрик и неоднородное поле можно провести, разбив диэлектрик на области  $\Delta V$ , столь малые, чтобы в пределах таких областей неоднородностями можно было пренебречь. Тогда, повторяя рассуждения § 138, для энергии поля в неоднородном случае получим

$$W = \sum \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \Delta V.$$

**§ 141. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации.** Рассмотрим более подробно процесс поляризации диэлектриков.

Диэлектрик состоит из молекул, в состав которых входят заряженные частицы — отрицательные электроны и положительные ядра. Поло-

жительные и отрицательные заряды внутри каждой молекулы компенсируют друг друга, так что молекула в целом нейтральна. Однако центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в молекуле могут быть сдвинуты друг относительно друга, что ведет к наличию у молекулы дипольного момента  $\mathbf{p}$ . Рассмотрим сперва случай, когда молекула имеет постоянный момент  $\mathbf{p}$ , не меняющийся под влиянием внешнего поля. Такая молекула называется *жесткой дипольной молекулой*.

При отсутствии внешнего поля, благодаря беспорядочному тепловому движению, моменты молекул ориентированы по-разному. Если мы выделим объем  $\Delta V$  диэлектрика, содержащий достаточно большое число молекул, то векторная сумма моментов всех молекул  $\sum \mathbf{p}$ , находящихся в этом объеме, будет равна нулю. При наличии внешнего электрического поля диполи частично повернутся по полю, сумма моментов  $\sum \mathbf{p}$  станет отличной от нуля и тем более отличной, чем сильнее поле. Диэлектрик с ориентированными в той или иной степени дипольными моментами окажется *поляризованным*.

За меру поляризации диэлектрика примем вектор  $\mathbf{P}$ , равный суммарному моменту молекул  $\sum \mathbf{p}$ , отнесенному к единице объема:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}. \quad (1)$$

Объем  $\Delta V$ , в пределах которого берется сумма моментов отдельных молекул  $\sum \mathbf{p}$ , должен содержать достаточное количество молекул, но вместе с тем быть настолько малым, чтобы внутри него все макроскопические величины — плотность, температура, напряженность электростатического поля  $\mathbf{E}$  и т. д. — могли считаться постоянными. Вектор  $\mathbf{P}$  носит название *вектора поляризации*.

Степень ориентации молекул естественно положить пропорциональной напряженности поля  $\mathbf{E}$  в пределах диэлектрика. Тогда и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  окажется *пропорциональным напряженности поля*  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (2)$$

Ниже мы покажем, что коэффициент  $\kappa$  совпадает с коэффициентом поляризации, введенным нами в § 139.

Если первоначально молекула не обладает дипольным моментом (неполярная молекула), то под влиянием внешнего электрического поля заряды в ней смещаются, и у нее появляется дипольный момент  $\mathbf{p}$ . И в этом случае сумму моментов можно считать пропорциональной напряженности поля. В случае нежесткой полярной молекулы  $\sum \mathbf{p}$  будет возрастать по двум причинам: благодаря увеличению моментов молекул  $\mathbf{p}$  и благодаря их ориентации. Но и в этом случае суммарный момент  $\sum \mathbf{p}$  возрастает пропорционально  $\mathbf{E}$ . Таким образом, соотношение (2) справедливо для молекул любого типа.

Если однородный диэлектрик находится в электрическом поле, то любой элемент его объема  $\Delta V$ , содержащий достаточно большое

число молекул, остается нейтральным. Не так обстоит дело, как мы видели, в тонком слое у поверхности диэлектрика. Благодаря повороту молекул у той границы, где входят линии напряженности, получится избыток отрицательных концов молекул, а у той границы, где линии напряженности выходят, — избыток положительных концов молекул (см. стр. 71).

В результате на поверхности поляризованного диэлектрика *возникают заряды с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma'$* .

В случае неоднородности диэлектрика *возникают и объемные заряды  $\rho'$  внутри самого диэлектрика*. Рассмотрим, например, неоднородный диэлектрик, распо-

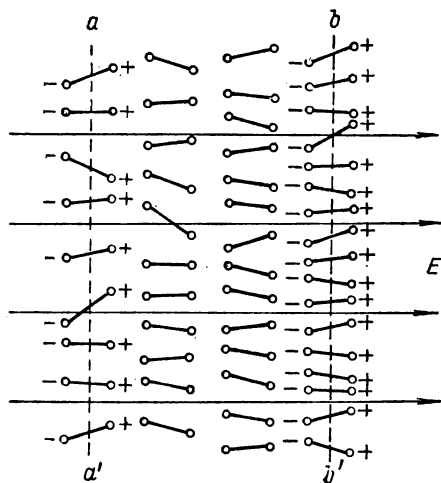


Рис. 54. Появление объемных зарядов при поляризации неоднородного диэлектрика.

слоя из левой части диэлектрика *меньше* положительных концов молекул, чем их выйдет через поверхность  $bb'$  из слоя. Таким образом, внутри слоя  $aa'bb'$  получится недостаток положительных зарядов, и он окажется отрицательно заряженным.

Под влиянием переориентации молекул, вызванной внешним электрическим полем, меняются механические свойства диэлектрика. Поэтому при поляризации диэлектрика в нем возникают упругие натяжения и происходит изменение его объема и формы. Эти явления называются *электрострикцией*. Кроме того, добавочные механические натяжения возникают на поверхностях диэлектриков.

Поверхностные и объемные заряды, возникающие при поляризации диэлектрика, носят название *связанных*. Все прочие заряды (не обусловленные явлением поляризации) носят название *свободных*.

Между вектором поляризации и поверхностной плотностью зарядов, выступающих на границе диэлектрика, существует простая

расположенный в электрическом поле. Пусть концентрация частиц диэлектрика возрастает слева направо (рис. 54) и пусть в ту же сторону направлена напряженность поля. Выделим мысленно в этом диэлектрике слой, ограниченный поверхностями  $aa'$  и  $bb'$ . У поверхности слоя  $aa'$  число частиц в единице объема, по предположению, меньше, чем у поверхности  $bb'$ . Следовательно, поверхность  $aa'$  перережет меньше молекул, чем поверхность  $bb'$ . Так как каждая молекула представляет собой диполь, повернутый по полю, то через поверхность  $aa'$  проникнет внутрь

связь. Мы установим ее на простом частном случае. Внесем бесконечно большую плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика в однородном поле. При этом поле  $E$  внутри диэлектрика, а вместе с тем и вектор поляризации  $P$  [формула (2)] будут постоянными. Выделим мысленно из этой пластины цилиндрический объем  $\Delta V$  так, чтобы его образующие были параллельны напряженности поля  $E$  в пластине (см. рис. 55, где  $n$  — нормаль к поверхности пластины). При поляризации диэлектрика на поверхностях пластины появляются заряды с поверхностными плотностями  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ . Так как в рассматриваемом случае (однородный диэлектрик, предварительно не заряженный) внутри объема  $\Delta V$  заряды не возникают, то с макроскопической точки зрения электрический момент объема  $\Delta V$  обязан своим происхождением лишь наличию поверхностных зарядов на основаниях цилиндра  $S$ . Заряды эти соответственно равны  $+\sigma'S$  и  $-\sigma'S$ , а расстояние между ними равно длине цилиндра  $L$ . Отсюда электрический момент цилиндра равен  $\sigma'SL$ . Но, с другой стороны, момент всего цилиндра равен численному значению суммы векторов моментов всех находящихся внутри цилиндра молекул, откуда:

$$|\sum p| = \sigma'SL.$$

Численное значение вектора поляризации  $P$  в пределах цилиндра получим, поделив суммарный момент  $|\sum p|$  на объем  $\Delta V$ :

$$P = \frac{|\sum p|}{\Delta V} = \frac{\sigma'SL}{\Delta V}.$$

Объем цилиндра

$$\Delta V = SL \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между образующей цилиндра  $L$  и направлением нормали к основанию цилиндра  $S$ . Подставляя это значение  $\Delta V$  в выражение для  $P$ , получим:

$$P = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}, \text{ откуда } \sigma' = P \cdot \cos \alpha.$$

Направление образующей цилиндра  $L$  совпадает по построению с направлением напряженности поля  $E$ , а с этим последним совпадает направление вектора поляризации  $P$ , откуда:

$$P \cos \alpha = P_n$$

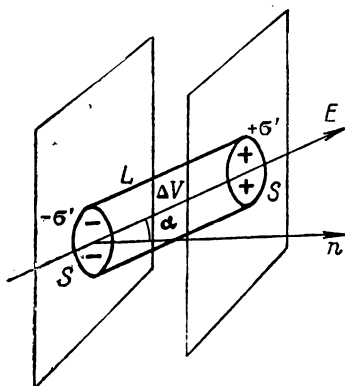


Рис. 55. К определению значения вектора поляризации  $P$ .

где  $P_n$  — проекция вектора поляризации на нормаль к поверхности, на которой выступают заряды. Следовательно,

$$\sigma' = P_n, \quad (3)$$

т. е. *плотность поверхностных связанных зарядов  $\sigma'$  численно равна нормальной составляющей вектора поляризации.*

Этот вывод позволяет нам прийти к важному следствию. По формуле (2), вектор поляризации  $\mathbf{P}$  пропорционален напряженности поля  $\mathbf{E}$ , отсюда, по (3), получаем, что плотность поверхностных зарядов  $\sigma'$  пропорциональна нормальной составляющей напряженности поля  $E_n$ :

$$\sigma' = \kappa E_n. \quad (4)$$

Этот результат совпадает с полученным нами для более частного случая соотношением (3) § 139. Таким образом, мы видим, что коэффициент  $\kappa$  в формуле (2) действительно совпадает с введенным в § 139 коэффициентом поляризации.

Что касается объемных связанных зарядов, то, как сказано, они появляются при наличии неоднородностей диэлектрика, а также в тех местах, где есть свободные заряды. Можно показать, что объемная плотность связанных зарядов  $\rho'$  определяется дивергенцией вектора поляризации  $\mathbf{P}$ , взятой с обратным знаком:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (5)$$

Формулы (3) и (5) позволяют в каждом частном случае найти поверхностные и объемные заряды, возникающие при поляризации диэлектрика.

**§ 142. Напряженность поля в диэлектрике.** Рассматривая электростатические явления в пустоте, мы всегда полагали, что заряды обусловлены избытком или недостатком электронов в каждом элементе объема заряженного тела, содержащем достаточно большое число молекул.

Заряды такого рода мы называли *свободными*. В предыдущем параграфе мы видели, что при поляризации диэлектрика возможно появление других зарядов, вызванных либо поворотом постоянных дипольных моментов молекул, либо появлением индуцированных моментов у молекул, причем каждая молекула остается нейтральной. Эти заряды мы называли *связанными*. Связанные заряды появляются только при наличии в диэлектрике электрического поля.<sup>1</sup> Таким образом, первичным источником поля всегда являются свободные заряды.

Однако *при наличии в поле куска диэлектрика на первичное поле, вызванное свободными зарядами, налагается еще добавочное поле связанных зарядов*. Это добавочное поле отлично от нуля как в самом диэлектрике, так, вообще говоря, и вне его. Для того чтобы найти результирующую напряженность поля  $\mathbf{E}$ , надо сложить напря-

<sup>1</sup> На возможность сохранения связанных зарядов после прекращения действия поля будет указано ниже,

женность поля свободных зарядов  $E_0$  с напряженностью поля связанных зарядов  $E'$ :

$$E = E_0 + E'. \quad (1)$$

Определим, в соответствии с равенством (1), напряженность поля в диэлектрике для простых частных случаев, когда возникающие связанные заряды могут быть легко найдены. При этом будем считать, что свободные заряды остаются неизменными.

1. Однородный диэлектрик, окружающий заряженный проводящий шар. Предположим, что заряженный проводящий шар радиуса  $R$  погружен в однородный диэлектрик, простирающийся до бесконечности. Заряд шара пусть равен  $Q$ . Как мы видели (§ 128, п. 3), проводящий заряженный шар вызывает во внешней части пространства такое поле, как если бы весь его заряд  $Q$  был сосредоточен в его центре.

Следовательно, напряженность поля  $E_0$  в точке  $A$ , отстоящей на расстоянии  $r$  от центра шара, равна

$$E_0 = \frac{Q}{r^2}.$$

Внутри шара напряженность поля равна нулю. Под влиянием поля диэлектрик поляризуется, и на его поверхности, примыкающей к поверхности шара, возникают связанные заряды  $Q'$  обратного знака относительно  $Q$ . Поверхностная плотность этих зарядов:

$$-\sigma' = -\kappa E_R,$$

где  $E_R$  — напряженность поля внутри диэлектрика у поверхности шара (рис. 56). Так как поверхность шара равна  $4\pi R^2$ , то

$$Q' = -\sigma' \cdot 4\pi R^2 = -4\pi R^2 \kappa E_R.$$

Этот заряд расположен по поверхности сферы, концентрической с самим заряженным шаром, поэтому он вызовет в точке  $A$  добавочное поле:

$$E' = \frac{Q'}{r^2} = -\frac{4\pi R^2 \kappa E_R}{r^2}.$$

Отсюда напряженность поля в точке  $A$  равна

$$E = E_0 + E' = \frac{Q}{r^2} - \frac{4\pi R^2 \kappa E_R}{r^2}. \quad (2)$$

Так как напряженность поля заряженного проводящего шара и равномерно заряженной шаровой поверхности в однородном диэлектрике

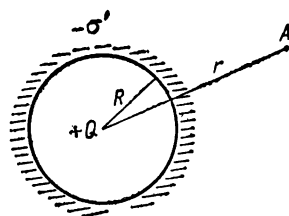


Рис. 56. Влияние диэлектрика на поле заряженного шара.



будет убывать обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара, то:

$$\frac{E_R}{E} = \frac{r^2}{R^2}, \text{ откуда } E_R = \frac{r^2}{R^2} E.$$

Подставив это значение  $E_R$  в (2), получим

$$E = \frac{Q}{r^2} - 4\pi\kappa E \text{ или } E = \frac{Q}{(1 + 4\pi\kappa) r^2},$$

откуда, принимая во внимание, что  $1 + 4\pi\kappa = \epsilon$ , найдем

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (3)$$

независимо от радиуса заряженного шара  $R$ . Таким образом, и в этом случае напряженность поля  $E$  в диэлектрике в  $\epsilon$  раз меньше напряженности поля  $E_0$ , вызванной свободными зарядами.

2. Выше нами был разобран случай плоского диэлектрического слоя между обкладками конденсатора (см. § 137). Там было показано, что и в этом случае диэлектрик вызывает ослабление напряженности в  $\epsilon$  раз при условии неизменности свободных зарядов:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Оба рассмотренных случая характерны тем, что *однородный* диэлектрик заполняет *все* пространство, где поле отлично от нуля. При этом напряженность поля уменьшается в  $\epsilon$  раз. Этот результат, как оказывается, носит общий характер: *напряженность поля в однородном диэлектрике, создаваемая рассматриваемыми свободными зарядами при условии, что однородный диэлектрик целиком заполняет все пространство, где поле отлично от нуля, в  $\epsilon$  раз меньше напряженности поля тех же зарядов в пустоте.* В этом случае, так как  $E = \frac{1}{\epsilon} E_0$ , все три вектора  $E$ ,  $E_0$ ,  $E'$ , входящие в формулу (1), параллельны, причем на основании соотношения  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$  и формулы (2) § 141:

$$E' = E - E_0 = -4\pi P. \quad (4)$$

Предыдущие результаты несправедливы для *неоднородных* диэлектриков, а также в том случае, когда диэлектрик (хотя бы и однородный) не целиком заполняет пространство, занятое полем<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Из этого правила имеются исключения, вызванные высокой степенью симметрии. Так, для одного равномерно заряженного однородного диэлектрического шара, погруженного в другой однородный безграничный диэлектрик, напряженность поля вне заряженного шара уменьшается в  $\epsilon$  раз (внутри него она не изменяется). Точно так же и в случае плоского (или сферического) конденсатора, заполненного параллельными (соответственно, concentрическими) слоями различных однородных диэлектриков, напряженность поля в каждом слое будет  $E_k = \frac{1}{\epsilon_k} E_0$ .

(например, отдельные куски однородного диэлектрика, внесенные в поле). Чтобы определить напряженность поля в этих случаях, нужно в каждом данном случае учесть появление всех связанных зарядов, подсчитать их поле и сложить с полем свободных зарядов. Рассмотрим, например, точечный заряд  $+q$  (рис. 57), около которого помещен удлинненный кусок диэлектрика  $D$ . Под влиянием поля заряда  $+q$  на концах диэлектрика  $S_1$  и  $S_2$  возникнут связанные заряды  $-q'$  и  $+q'$ . Весь кусок диэлектрика превратится в диполь с определенным моментом  $p$ . Как мы видели (§ 125), диполь вызывает поле, линии напряженности которого выходят из его положительного конца и входят в его отрицательный конец. Рассмотрим три точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , лежащие на одной прямой с зарядом  $+q$ . Тогда напряженность поля  $E'$ , вызванная связанными зарядами диэлектрика, направлена в точках  $A_2$  и  $A_3$  в ту же сторону, что и напряженность поля  $E_0$ , а в точке  $A_1$  — в обратную. Результирующая напряженность поля  $E = E_0 + E'$  в точке  $A_1$  меньше напряженности поля заряда  $+q$ , а в точках  $A_2$  и  $A_3$  — больше. Если взять точку, не лежащую на упомянутой прямой, то в ней векторы  $E_0$  и  $E'$  не параллельны.

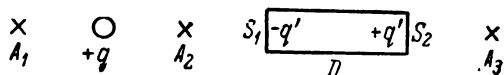


Рис. 57. Кусок диэлектрика  $D$  вблизи точечного заряда  $+q$ .

Таким образом, этот пример показывает, что в общем случае между напряженностью поля  $E_0$  свободных зарядов и напряженностью поля  $E'$  связанных зарядов нет простого соотношения.

**§ 143. Силы, действующие на заряженные тела при наличии диэлектриков.** Силы, действующие между заряженными телами, погруженными в диэлектрик, нельзя определить, рассматривая только взаимодействия между свободными и связанными зарядами. Для того чтобы это показать, рассмотрим две параллельные, разноименно заряженные пластины, погруженные в однородный диэлектрик, например в какую-либо диэлектрическую жидкость. Если пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их собственными размерами, то создаваемое ими поле заключено лишь в пространстве между пластинами. Поэтому поляризована будет лишь та часть диэлектрика, которая находится между пластинами. В результате поляризации этой части диэлектрика на поверхностях диэлектрика, примыкающих к пластинам, возникнут связанные поверхностные заряды с плотностями  $\pm \sigma'$ . Эти заряды эквивалентны двум параллельным заряженным поверхностям и, следовательно, изменяют поле только внутри слоя диэлектрика, находящегося между пластинами, и не окажут никакого действия на пластины. Таким образом, мы приходим к выводу, что в данном случае поляризация диэлектрика не может изменить сил взаимодействия между пластинами (при условии, что заряды на пластинах остаются

неизменными); силы взаимодействия должны остаться такими же, какими они были в пустоте. В действительности дело обстоит не так: опыт показывает, что если параллельные заряженные пластины, расположенные на расстоянии, малом по сравнению с их собственными размерами, погрузить в диэлектрическую жидкость, то при неизменности зарядов силы между ними уменьшатся в  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная взятой жидкости. То же будет иметь место при заполнении пространства каким-либо диэлектрическим газом. С твердым диэлектриком такой опыт, очевидно, практически осуществить трудно.

Указанное изменение сил взаимодействия между пластинами, которое не удается объяснить возникновением связанных зарядов, является следствием механических напряжений, появляющихся в поляризованном диэлектрике.

Если пластины заряжены зарядами противоположных знаков (между пластинами действуют силы притяжения), то жидкий или газо-

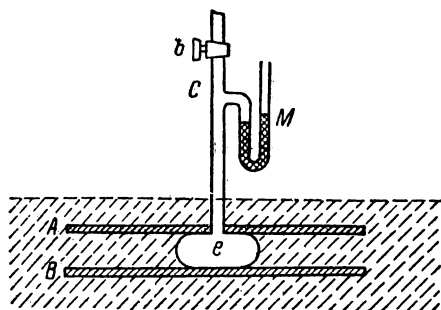


Рис. 58. К расчету добавочного давления.

образный диэлектрик втягивается в пространство между пластинами и создает дополнительную механическую силу, раздвигающую пластины, в результате чего силы притяжения между ними частично компенсируются, следовательно, становятся меньше, чем они были в пустоте. Наличие добавочного давления в диэлектрической среде между пластинами может быть проверено прямым опытом. Две горизонтальные пластины *A* и *B* погружаются в однородный жидкий диэлектрик (рис. 58, на котором область, занятая диэлектриком, заштрихована). К верхней пластине *A* примазана вертикальная трубка *C* с манометром *M*. Через верхний конец трубки *C* вдувается воздух так, чтобы между пластинами *A* и *B* образовался пузырь *e*; после этого кран *b* закрывается. Если теперь пластины *A* и *B* зарядить разноименно, то уровень в правом колене манометра *M* повысится за счет увеличения давления в воздушном пузыре *e*. Последнее произошло в результате затягивания диэлектрической жидкости в пространство между пластинами. Если пластины *A* и *B* зарядить одноименно, то давление в пузыре *e* уменьшится, так как жидкость теперь будет выталкиваться из пространства между пластинами наружу. Такое перемещение диэлектрической жидкости легко объяснить, если принять, что она состоит из дипольных молекул. Диполь, как было указано в § 135, в неоднородном поле испытывает силу, перемещающую его в область, где напряженность поля больше.

Изменение сил взаимодействия между заряженными пластинами при их погружении в диэлектрик в  $\epsilon$  раз подтверждается энергетическим расчетом. В § 140 мы указали, что энергия плоского конденсатора, при наличии диэлектрика, равна

$$W = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} Sd,$$

где  $S$  — площадь пластины конденсатора,  $d$  — расстояние между пластинами,  $E$  — напряженность поля между пластинами. (Эта формула, строго говоря, приближенна и тем точнее, чем меньше расстояние  $d$  в сравнении с размером пластин.) Так как между зарядом  $Q$ , сосредоточенным на одной из пластин, и напряженностью поля  $E$  имеет место соотношение

$$Q = \frac{\epsilon}{4\pi} ES,$$

то выражение для энергии может быть переписано в виде

$$W = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} d.$$

Пусть под влиянием сил взаимного притяжения правая пластина (рис. 59) перемещается по направлению к левой на малый отрезок  $\Delta d$ . Считая силу  $f$ , действующую на правую пластину, постоянной, получим, что при этом совершится работа

$$A = f\Delta d.$$

Эта работа совершится за счет изменения энергии конденсатора, которое произойдет в результате уменьшения расстояния между пластинами на  $\Delta d$ :

$$\Delta W = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} d - \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} (d - \Delta d) = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} \Delta d.$$

Приравняв работу изменению энергии, получим

$$f = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S}. \quad (1)$$

В пустоте сила  $f_0$ , действующая на правую пластину, равна произведению напряженности поля, создаваемого только левой пластиной (что равно половине полной напряженности между пластинами), на заряд правой пластины:

$$f_0 = \frac{E_0}{2} Q = \frac{2\pi Q^2}{S}.$$

Сравнивая это выражение с (1), видим, что при заполнении пространства однородным диэлектриком сила взаимодействия между пластинами убывает в  $\epsilon$  раз, в соответствии с результатами опытов.

Энергетический расчет автоматически учитывает все виды взаимодействий и потому дает правильный результат, в то время как рас-

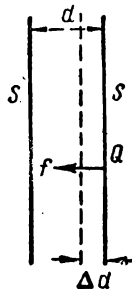


Рис. 59. К расчету сил, действующих на пластины конденсатора.

смотрение взаимодействий только между свободными и связанными зарядами не полностью учитывало роль диэлектрика, так как не принимало во внимание изменение его механических свойств (давления и плотности), происходящее под влиянием электрического поля.

Полученный нами результат можно обобщить. Из формулы (2) § 140 для плотности энергии поля (справедливой для всех изотропных тел) вытекает (путем расчетов, аналогичных только что проведенному расчету для плоского конденсатора), что *при погружении заряженных тел в однородный диэлектрик, целиком заполняющий все пространство, где поле отлично от нуля, силы взаимодействия между телами убывают в  $\epsilon$  раз.*

Отсюда следует, что два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , помещенных на расстоянии  $r$  друг от друга, внутри однородного безграничного диэлектрика взаимодействуют с силой:

$$f = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (2)$$

Эта формула выражает собою закон Кулона для случая зарядов, погруженных в однородный диэлектрик: *сила взаимодействия между точечными зарядами, помещенными в однородный безграничный диэлектрик, в  $\epsilon$  раз меньше силы взаимодействия между теми же зарядами, помещенными на том же расстоянии друг от друга в пустоте.* Если диэлектрик не однороден или не безграничен, то формула (2) будет неверна. Приближенно она справедлива, если граница однородного диэлектрика достаточно удалена от погруженных в него зарядов.

В общем же случае неоднородных и конечных диэлектриков их влияние на силы взаимодействия между зарядами не может быть учтено никакими простыми соотношениями, как это видно из примера, рассмотренного на стр. 81. Неоднородность диэлектрика может быть, очевидно, вызвана и тем, что заряженное тело, на которое определяется действие силы, помещено внутрь полости в диэлектрике, самом по себе однородном и безграничном. При наличии полости исключается действие сил со стороны подвергнутого натяжениям диэлектрика и играют роль лишь связанные заряды. В этом случае силы, действующие на заряженное тело, зависят от формы полости, в которую помещено тело (см. § 145).

Следует заметить, что между формулой (2) и законом Кулона для точечных зарядов в пустоте имеется принципиальное различие. Обе формулы имеют аналогичный смысл только тогда, когда под точечными зарядами подразумеваются заряды, сосредоточенные на макроскопических телах, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Но закон Кулона для зарядов в пустоте можно истолковать и иначе, а именно, в дифференциальном виде, считая, что он выражает силу взаимодействия  $df$  между двумя воображаемыми элементарными зарядами  $dq_i$  и  $dq_k$ , на которые можно мысленно разбить всякие конечные заряды  $q_i$  и  $q_k$ . Тогда сила взаимодействия между конечными зарядами  $q_i$  и  $q_k$  выразится суммой сил  $df$ , распространенной на

все возможные пары зарядов  $dq_i$  и  $dq_k$ . В таком дифференциальном виде формула (2) не применима: при наличии диэлектриков силы, действующие на данную пару зарядов  $dq_i$  и  $dq_k$ , обусловлены еще, как мы видели, рядом других причин.

Резюмируя содержание последних параграфов, мы имеем: в однородном диэлектрике, целиком заполняющем все пространство, где поле отлично от нуля, напряженность поля  $E$  в  $\epsilon$  раз меньше напряженности того поля  $E_0$ , которое данные свободные заряды вызывали бы при отсутствии диэлектрика. Также силы взаимодействия между заряженными телами убывают в  $\epsilon$  раз при их погружении в однородный диэлектрик, целиком заполняющий все пространство, где поле отлично от нуля. Следовательно, в этом случае, как и в пустоте, сила  $f$ , действующая на заряд  $q$ , определяется равенством  $f = qE$ .

Однако это равенство несправедливо при наличии произвольного диэлектрика. Дело в том, что заряд  $q$ , погруженный в диэлектрик, обычно сосредоточен на каком-либо другом теле (например, проводнике) и на него действует поле, отличное от поля, которое имеется внутри диэлектрика вблизи тела. Мы видели это на примере взаимодействия двух заряженных параллельных пластин, где поле в месте расположения зарядов иное, чем в диэлектрике у поверхности пластин. Вместе с тем, на том же примере мы видели, что если определить силу по напряженности поля в том месте, где расположены заряды, то мы не получим правильного значения силы. Это происходит от того, что мы не учитываем добавочных механических сил, действующих на тело со стороны диэлектрика. Такие силы возникают в результате натяжений, образующихся в диэлектрике в местах неоднородностей поля, а также в местах неоднородностей самого диэлектрика (в том числе и на границе между заряженным телом и диэлектриком).

Лишь в тех частных случаях, когда и напряженность поля в диэлектрике и сила, действующая на заряд, в одинаковое число раз (в  $\epsilon$  раз) меньше тех же величин при отсутствии диэлектрика (т. е. в случае однородного диэлектрика, целиком заполняющего все пространство, где поле отлично от нуля), формула  $f = qE$  верна и позволяет по силе  $f$  определить напряженность поля  $E$  в диэлектрике.

Вообще же из сказанного следует, что *невозможно определить напряженность поля в диэлектрике  $E$  по силе, действующей на заряд*, если он сосредоточен на каком-либо теле. Обратно: напряженность поля в диэлектрике  $E$  не определяет, вообще говоря, сил, действующих на заряженные тела.

Подробнее о физическом смысле вектора  $E$  будет сказано в § 145.

В ряде задач электростатики расчет действующих сил может быть выполнен с помощью следующих соображений. Предположим, что в изолированной системе заряженных тел энергия электростатического поля является функцией ряда параметров, характеризующих расположение тел в системе. Этими параметрами могут, например,

быть просто координаты точек системы тел или расстояния между телами или углы, определяющие положение стержней, нитей и т. д.

Назовем такие параметры обобщенными координатами и обозначим их буквами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Таким образом, для энергии системы  $W$  имеем зависимость:

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При изменении одного из параметров  $x_i$  на величину  $\Delta x_i$  электростатическими силами будет совершена работа, которая пропорциональна  $\Delta x_i$  и, следовательно, может быть представлена в виде:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i.$$

Величину  $f_i$ , входящую в это выражение, назовем обобщенной силой.

Работа совершается за счет убыли энергии электростатического поля, связанной с изменением параметра  $x_i$ . Таким образом, имеем:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i = -\Delta W,$$

откуда для обобщенной силы получим выражение:

$$f_i = -\frac{\Delta W}{\Delta x_i}.$$

Отношение  $\frac{\Delta W}{\Delta x_i}$  дает, при стремлении  $\Delta x_i$  к нулю, частную производную энергии по обобщенной координате  $x_i$  (остальные параметры остаются постоянными), т. е. мы получаем:

$$f_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Энергия системы является не только функцией обобщенных координат, но также и функцией электрических характеристик тел, например зарядов, находящихся на телах, или потенциалов тел. В изолированной системе заряды, расположенные на отдельных телах, остаются неизменными, в то время как потенциалы тел, входящих в систему, меняются. Следовательно, в выражении (3) энергия должна быть представлена как *функция зарядов тел*.

Если по условию задачи потенциалы тел предполагаются постоянными, то заряды тел не могут быть постоянными и система тел не может быть изолированной — у системы должен иметься контакт с внешними телами, не входящими в состав системы. В этом случае можно показать, что обобщенная сила также может быть представлена в виде частной производной энергии по обобщенной координате, однако в этом случае энергия должна быть выражена как функция обобщенных координат и *потенциалов тел*, что приводит, как можно показать, к тому, что производная, выражающая обобщенную силу, должна быть взята со знаком плюс:

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}.$$

Иллюстрируем приведенные соображения примером. Пусть требуется рассчитать силу, действующую на обкладки плоского конденсатора. Энергия системы в данном случае равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 Sd.$$

Эта энергия может быть выражена или как функция зарядов обкладок или как функция разности потенциалов между обкладками:

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon \left( \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \right)^2 Sd, \quad (4)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon \left( \frac{V_1 - V_2}{d} \right)^2 Sd. \quad (5)$$

Обобщенной координатой в данном случае будет расстояние между обкладками  $d$ . Обобщенная сила, очевидно, будет просто сила, действующая на обкладку, так как при изменении расстояния  $d$  на величину  $\Delta d$  совершается работа  $f\Delta d$  силами, действующими на обкладки.

Подсчитаем силу по выражениям (4) и (5). В случае (4) имеем:

$$f = - \frac{\partial W}{\partial d} = - \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S.$$

Знак минус соответствует тому, что при увеличении расстояния совершается отрицательная работа, т. е. тому, что на обкладку действует сила *притяжения* со стороны второй обкладки.

В случае (5) имеем

$$f = \frac{\partial W}{\partial d} = - \frac{1}{8\pi} \epsilon \left( \frac{V_1 - V_2}{d^2} \right)^2 S = - \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S,$$

т. е. мы получили выражение, совпадающее с предыдущим [формула (1)].

**§ 144. Вектор электростатической индукции.** Имея дело с электростатическим полем в пустоте, мы вводили в рассмотрение линии напряженности. Линии напряженности в пустоте обладают тем свойством, что они тянутся непрерывно от одних зарядов до других или уходят в бесконечность. Не так обстоит дело в диэлектриках, если учитывать одни только свободные заряды. Например, на границах раздела диэлектриков возникнут связанные поверхностные заряды, и часть линий напряженности будет на них кончатся или с них начинаться. Таким образом, линии напряженности не пройдут непрерывно границу раздела диэлектриков. В соответствии с этим в неоднородных диэлектриках перестает иметь смысл и теорема Остроградского — Гаусса в том виде, как она была дана в § 126.

Можно, однако, ввести для характеристики поля внутри диэлектрика такой новый вектор  $\mathbf{D}$ , линии которого пойдут непрерывно в диэлектриках (как однородных, так и неоднородных), а также через границы их раздела. Этот вектор называется *вектором электростатической индукции*; он связан с вектором напряженности  $\mathbf{E}$  соотношением:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1)$$



где  $\epsilon$  — значение диэлектрической постоянной в той точке диэлектрика, где определяется значение вектора  $\mathbf{D}$ .

Выражение для вектора  $\mathbf{D}$  можно дать и в другом виде. По сказанному в § 139,  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$ , откуда

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\kappa\mathbf{E},$$

но  $\kappa\mathbf{E} = \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации (см. § 141). Отсюда получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (1a)$$

т. е. вектор индукции выражается через сумму вектора напряженности поля  $\mathbf{E}$  и вектора поляризации  $\mathbf{P}$ , умноженного на  $4\pi$ .

Из соотношения (1) следует, что вектор индукции  $\mathbf{D}$  направлен в каждой данной точке так же, как и вектор напряженности  $\mathbf{E}$ ,<sup>1</sup> но по численному значению он в  $\epsilon$  раз больше напряженности. Для пустоты векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают.

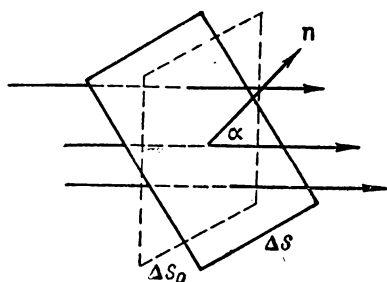


Рис. 60 Площадка  $\Delta S$ , расположенная наклонно к линиям электростатической индукции  $\mathbf{D}$ .

Линии вектора индукции будем строить тем же способом, каким мы строили в пустоте линии вектора напряженности. *Линией вектора индукции* назовем линию, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением вектора индукции. Направление самой линии считаем совпадающим в каждой точке с направлением вектора индукции в этой точке. Количество проводимых линий индукции подчиним требованию, чтобы отношение числа линий  $\Delta N$ , пересекающих малую площадку  $\Delta S_0$ , перпендикулярную к линиям индукции, к площади  $\Delta S_0$  численно равнялось значению вектора индукции в области площадки:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = D. \quad (2)$$

Если мы введем произвольно ориентированную площадку  $\Delta S$  (рис. 60), то

$$\Delta N = D \Delta S_0 = D \Delta S \cos \alpha = D_n \Delta S, \quad (3)$$

где  $D_n$  — проекция вектора индукции на нормаль к площадке  $\Delta S$ . Величина  $\Delta N$  может быть названа *поток вектора индукции* через площадку  $\Delta S$ . В случае площадки конечных размеров, ее следует разбить на малые элементы  $\Delta S$ , сосчитать поток через каждый эле-

<sup>1</sup> Для кристаллов направление вектора  $\mathbf{D}$  может отличаться от направления вектора  $\mathbf{E}$ .

мент, и тогда общий поток вектора индукции выразится суммой таких элементарных потоков:

$$N = \sum_S D_n \Delta S. \quad (4)$$

Для того чтобы доказать, что линии вектора индукции непрерывны, рассмотрим два однородных плоских слоя диэлектриков с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 61). Пусть напряженность поля  $E_0$  свободных зарядов составляет некоторый угол с границей раздела диэлектриков. На границах раздела возникнут связанные поверхностные заряды: на первом диэлектрике — с плотностями зарядов  $+\sigma'_1$  и  $-\sigma'_1$ , а на втором — с плотностями  $+\sigma'_2$  и  $-\sigma'_2$ . Заряды  $+\sigma'_1$  и  $-\sigma'_1$  вызовут в первом диэлектрике напряженность поля

$$E'_1 = -4\pi\sigma'_1,$$

направленную нормально к границам диэлектрика в сторону, противоположную нормальной составляющей  $E_{0n}$ . Вне этого диэлектрика заряды  $+\sigma'_1$  и  $-\sigma'_1$  напряженности поля не создадут.

Также заряды  $+\sigma'_2$  и  $-\sigma'_2$  создадут во втором диэлектрике напряженность поля

$$E'_2 = -4\pi\sigma'_2,$$

нормальную к границам этого диэлектрика. Эти добавочные напряженности  $E'_1$  и  $E'_2$ , вызванные связанными зарядами, изменят лишь нормальные составляющие первоначальной напряженности  $E_0$  и не изменят ее составляющие, касательные к границе раздела. Так как сумма обеих напряженностей  $E_0$  и  $E'$  по определению дает напряженность поля в диэлектриках (§ 142), то для нормальной составляющей напряженности поля в первом диэлектрике получаем

$$E_{1n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_1, \quad (5)$$

а для тангенциальной составляющей

$$E_{1t} = E_{0t}. \quad (6)$$

Также для составляющих напряженности поля во втором диэлектрике находим

$$E_{2n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_2, \quad (5a)$$

$$E_{2t} = E_{0t}. \quad (6a)$$

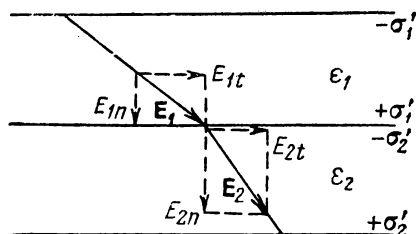


Рис. 61. К выводу пограничных условий для вектора напряженности  $E$ .

Из равенств (6) и (6а) получаем

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (7)$$

т. е. что тангенциальная составляющая напряженности поля непрерывна при переходе через границу диэлектриков.

Для поверхностных плотностей связанных зарядов  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  имеем:  $\sigma'_1 = \kappa_1 E_{1n}$  и  $\sigma'_2 = \kappa_2 E_{2n}$ , где  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — коэффициенты поляризации первого и второго диэлектриков. После этого равенства (5) и (5а) принимают вид:

$$(1 + 4\pi\kappa_1) E_{1n} = E_{0n}, \quad (1 + 4\pi\kappa_2) E_{2n} = E_{0n}.$$

Замечая, что  $1 + 4\pi\kappa_1 = \epsilon_1$  и  $1 + 4\pi\kappa_2 = \epsilon_2$ , из этих двух равенств получим:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}. \quad (8)$$

Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля терпит разрыв при переходе через границу раздела диэлектриков.

Равенства (7) и (8) представляют собой пограничные условия для вектора  $\mathbf{E}$ . Из них, в силу соотношения  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}$ , получим пограничные условия для вектора электростатической индукции  $\mathbf{D}$ :

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}, \quad D_{1n} = D_{2n}. \quad (9)$$

Нормальная составляющая  $D_n$  вектора индукции непрерывна при переходе через границу раздела диэлектриков, а тангенциальная составляющая терпит разрыв непрерывности.

Рис. 62. Преломление линий индукции на границе двух диэлектриков.

Пусть в первом диэлектрике вектор индукции  $\mathbf{D}_1$  составляет с нормалью к границе раздела угол  $\alpha_1$ , а во втором диэлектрике вектор  $\mathbf{D}_2$  составляет угол  $\alpha_2$ . Разложив  $\mathbf{D}_1$  на составляющие  $D_{1t}$  и  $D_{1n}$  и  $\mathbf{D}_2$  — на составляющие  $D_{2t}$  и  $D_{2n}$  (рис. 62), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} \cdot \frac{D_{2n}}{D_{1n}}.$$

Из последнего равенства, в силу пограничных условий (9), получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (10)$$

Это соотношение выражает закон преломления линий индукции на границе двух диэлектриков.

Пограничные условия (9) для вектора индукции  $\mathbf{D}$  как раз соответствуют непрерывности линий индукции, пересекающих границу раздела двух диэлектриков. Пусть линии вектора индукции пересекают, преломляясь, границу раздела двух диэлектриков (рис. 63). Число линий индукции  $\Delta N_1$ , попадающих в первом диэлектрике на площадку  $\Delta S$  на границе раздела, по определению равно

$$\Delta N_1 = D_{1n} \Delta S.$$

Во втором диэлектрике из той же площадки  $\Delta S$  исходит поток индукции:

$$\Delta N_2 = D_{2n} \Delta S.$$

Но так как по условиям (9)  $D_{1n} = D_{2n}$ , то

$$\Delta N_1 = \Delta N_2.$$

Таким образом, линии индукции проходят через площадку непрерывно.

В случае неоднородного диэлектрика, его можно мысленно разбить на столь тонкие слои, чтобы каждый из них можно было считать однородным. Тогда линии индукции будут непрерывно переходить из слоя в слой, а следовательно, вообще, будут идти непрерывно внутри диэлектрика.

Для однородного диэлектрика, сплошь заполняющего пространство, где поле отлично от нуля, вектор индукции  $\mathbf{D}$  совпадает с напряженностью поля свободных зарядов  $\mathbf{E}_0$ . Это следует из того обстоятельства, что в таком диэлектрике  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon}$  (см. § 142), откуда  $\mathbf{E}_0 = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ .

Для поля в диэлектрике теорема Остроградского — Гаусса принимает видоизмененную форму. Возьмем поляризованный диэлектрик и подсчитаем поток напряженности через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , взятую внутри диэлектрика. Полный заряд  $Q$  внутри поверхности состоит из двух частей: свободного заряда  $Q_0$ , внесенного в диэлектрик извне, и связанного заряда  $Q'$ , образованного поляризацией диэлектрика. Имеем

$$\sum E_n \Delta S = 4\pi Q = 4\pi (Q_0 + Q'), \quad (11)$$

где  $n$  означает внешнюю нормаль в точках поверхности  $S$ .

Подсчитаем заряд  $Q'$ . Очевидно, что молекулы, которые лежат целиком внутри поверхности  $S$ , не создадут внутри этой поверхности некомпенсированного заряда. Некомпенсированный заряд создадут лишь молекулы, которые пересечены поверхностью  $S$ . Те молекулы, у которых за пределы поверхности  $S$  вышли положительные заряды, дадут внутри поверхности  $S$  отрицательный заряд, те же, у которых за пределы поверхности вышел отрицательный заряд, создадут внутри поверхности  $S$  положительный заряд. Возьмем элемент поверхности  $\Delta S$

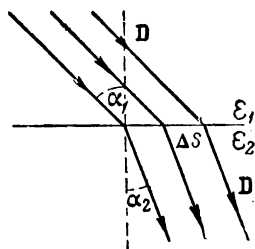


Рис. 63. Непрерывность линий индукции при прохождении через границу двух диэлектриков.

и подсчитаем, сколько молекул пересечет этот элемент. Предположим, что вблизи элемента  $\Delta S$  дипольные моменты молекул одинаковы по величине и по направлению и равны  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , где  $l$  — расстояние между положительным и отрицательным зарядами молекулы. Предположим, что оси диполей (направленные по  $\mathbf{l}$ ) образуют угол  $\theta$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к элементу  $\Delta S$ . Очевидно, что элемент  $\Delta S$  пересечет те молекулы, центры  $C$  которых отстоят от элемента  $\Delta S$  не дальше, чем на расстояние  $\frac{l}{2}$  по направлению  $\mathbf{l}$  по обе стороны поверхности

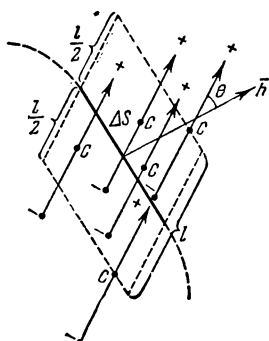


Рис. 64. К подсчету связанного заряда.

(см. рис. 64,  $l$  — длина диполя). Таким образом, элемент  $\Delta S$  пересечет те молекулы, центры диполей которых лежат в объеме косоугольного цилиндра с основанием  $\Delta S$  и с длиной образующей, равной  $l$ . Полагая, что число центров диполей в единице объема равно  $n_0$ , получим для числа пересеченных элементом  $\Delta S$  молекул выражение:

$$n_0 \Delta S l \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}).$$

Каждая пересеченная молекула образует внутри поверхности  $S$  отрицательный заряд  $q$ , если направление  $\mathbf{l}$  образует острый угол с направлением  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{l}$  направлено от положительного к отрицательному заряду). Таким образом, пересеченные элементом  $\Delta S$  молекулы создадут внутри поверхности  $S$  некомпенсированный отрицательный заряд, равный

$$-qn_0 l \Delta S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})$$

(если элемент  $\Delta S$  имеет внешнюю нормаль, образующую тупой угол с направлением  $\mathbf{l}$ , приведенное выше выражение даст положительный заряд). Вместе с тем  $q\mathbf{l}n_0 = \mathbf{P}$  есть вектор поляризации среды (момент единицы объема), следовательно, избыточный заряд, созданный молекулами, пересеченными элементом  $\Delta S$ , может быть представлен в виде:

$$-P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{P}) \Delta S = -P_n \Delta S.$$

Здесь  $P_n$  означает проекцию вектора поляризации на внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$  к элементу  $\Delta S$ .

Полный заряд внутри всей поверхности  $S$  получим, просуммировав заряды по всем элементам  $\Delta S$ :

$$Q' = - \sum P_n \Delta S.$$

Подставляя в (11) выражение  $Q'$ , найдем

$$\begin{aligned} \sum E_n \Delta S &= 4\pi (Q - \sum P_n \Delta S) \\ \text{или} \quad \sum (E_n + 4\pi P_n) \Delta S &= 4\pi Q. \end{aligned}$$

Вместе с тем сумма  $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  есть вектор электростатической индукции  $\mathbf{D}$ , откуда следует окончательно

$$\sum D_n \Delta S = 4\pi Q.$$

Этот результат представляет собой теорему Остроградского — Гаусса для диэлектрика: поток вектора электростатической индукции через произвольную замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на *свободный* заряд, заключенный внутри поверхности.

В § 130 было показано, что имеется следующая связь между напряженностью электростатического поля  $\mathbf{E}$  и плотностью объемных зарядов  $\rho$ :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (12)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (12a)$$

В случае диэлектрика  $\rho$  есть объемная плотность как свободных, так и связанных зарядов. При наличии диэлектриков объемная плотность свободных зарядов  $\rho_0$  определит дивергенцию вектора  $\mathbf{D}$ . Действительно, по формуле (1a),

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации. Отсюда получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{E} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (13)$$

По сказанному в § 141,  $\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'$ , где  $\rho'$  — объемная плотность связанных зарядов. Подставляя в (13) это значение  $\operatorname{div} \mathbf{P}$  и значение  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  по (12a), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi(\rho - \rho'),$$

но  $\rho - \rho' = \rho_0$ , где  $\rho_0$  — объемная плотность свободных зарядов, откуда находим

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0. \quad (14)$$

Таким образом, дивергенция вектора  $\mathbf{D}$  определяется плотностью лишь свободных зарядов.

Выражение (12a) для вектора  $\mathbf{E}$  было нами получено как следствие теоремы Остроградского — Гаусса. Обратно, можно показать, что вектор, удовлетворяющий соотношению (12a), удовлетворяет теореме Остроградского — Гаусса. Также из равенства (14) вытекает, что в любом диэлектрике вектор  $\mathbf{D}$  удовлетворяет теореме Остроградского — Гаусса, причем должны быть учтены только свободные заряды.

**§ 145. Определение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  по силам, действующим на заряд.** В пустоте мы определяли напряженность поля  $\mathbf{E}$  по силе, действующей на единичный положительный заряд (§ 124). Если на заряд  $q$ , помещенный в данную точку поля, действует сила  $\mathbf{f}$ , то напряженность поля  $\mathbf{E}$  в этой точке определяется соотношением:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q}. \quad (1)$$

При этом существенно оговорить два момента: 1) „пробный“ заряд  $q$  должен быть точечным, т. е. должен быть сосредоточен на теле столь малых размеров, чтобы напряженность поля в его

пределах была постоянной; 2) внесение заряда  $q$  не должно вызывать никакого изменения ни в величине, ни в расположении зарядов, вызывающих поле. Обоим этим условиям практически можно достаточно хорошо удовлетворить, взяв заряд  $q$  весьма малым и сосредоточив его на теле, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до любого из зарядов, вызывающих поле.

Напряженность поля в диэлектрике  $E$  мы определили (§ 142), как сумму напряженности  $E_0$ , вызванной свободными зарядами, и напряженности  $E'$ , вызванной связанными зарядами:

$$E = E_0 + E'.$$

Как мы указывали в § 143, силы, действующие на заряженные тела, помещенные в диэлектрик, вообще говоря, не определяются равенством  $f = qE$ , где  $q$  — заряд, сосредоточенный на рассматриваемом теле. Это обусловлено тем, что на границе между телом и диэлектриком возникают добавочные поверхностные связанные заряды, величина которых зависит от величины заряда  $q$  и размеров и формы тела, на котором он сосредоточен. Кроме того, в самом диэлектрике и на его границе с телом возникают механические натяжения, также вызывающие силы. Добавочные связанные заряды не пропадают и при малых размерах тела, поэтому, вообще говоря, нельзя

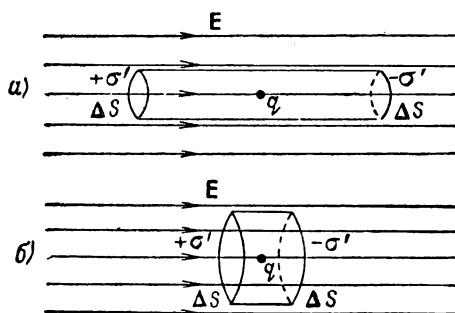


Рис. 65. Полость в диэлектрике: а) в виде узкого длинного цилиндра, б) в виде широкого короткого цилиндра.

определить напряженность поля  $E$  в диэлектрике на основании равенства (1), пользуясь „пробным“ зарядом  $q$ .

От механических сил, вызванных натяжениями в диэлектрике, можно избавиться, если *сделать в диэлектрике полость* и поместить „пробный“ заряд внутри этой полости так, чтобы он не соприкасался с ее стенками. Однако в этом случае сила, действующая на „пробный“ заряд  $q$ , *зависит от формы и размеров поло-*

*сти* и, следовательно, вообще говоря, не определится одной только напряженностью поля  $E$  внутри диэлектрика.

Рассмотрим безграничный однородный диэлектрик, внутри которого сделаем полость в виде узкого длинного цилиндра, образующие которого параллельны линиям напряженности  $E$  (рис. 65а). Внесем в среднюю часть этой полости настолько малый „пробный“ заряд  $q$ , сосредоточенный на теле малых размеров, чтобы можно было пренебречь теми связанными зарядами, которые заряд  $q$  вызовет на поверхности полости, и рассматривать действие на него лишь поля  $E$  и свя-

занных зарядов  $\pm \sigma'$ , которые это поле вызывает на границах полости. При этих условиях сила, действующая на „пробный“ заряд  $q$ , равна

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + \mathbf{f}', \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}'$  — сила, вызванная связанными зарядами  $\pm \sigma'$ . Так как образующие цилиндра параллельны вектору **E**, то связанные заряды появятся лишь на основаниях цилиндра  $\Delta S$ ; величина этих зарядов равна  $Q_i = \pm \sigma' \Delta S$ . Если цилиндр узок и длинен, то заряды  $Q_i$  малы (малы поверхности  $\Delta S$ ), и они отстоят далеко от „пробного“ заряда  $q$ . Поэтому сила  $\mathbf{f}'$  мала по сравнению с  $q\mathbf{E}$  и ею можно пренебречь; тогда равенство (2) дает:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}.$$

Следовательно, *сила, действующая на малый пробный заряд, помещенный в среднюю часть полости в виде узкого длинного цилиндра, образующие которого параллельны линиям напряженности, определяется напряженностью поля **E** в диэлектрике.*

Рассмотрим теперь полость другой формы, а именно: в виде короткого широкого цилиндра, основания которого  $\Delta S$  перпендикулярны к линиям напряженности **E** (рис. 65б). Теперь нельзя пренебречь действием связанных зарядов  $Q_i = \pm \sigma' \Delta S$ .

Считая основания цилиндра за две бесконечно большие параллельные друг другу плоскости, получим, что связанные заряды  $Q_i$  вызывают между ними поле, численное значение напряженности которого равно

$$E' = 4\pi\sigma' = 4\pi\kappa E.$$

Эта напряженность обуславливает силу, равную

$$\mathbf{f}' = q \cdot 4\pi\kappa E,$$

после чего равенство (2) дает

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + 4\pi\kappa\mathbf{E}) \text{ или } \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}),$$

где **P** — вектор поляризации. Но по равенству (1а) § 144

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{D},$$

где **D** — вектор электростатической индукции. Таким образом,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{D}, \quad (3)$$

т. е. *сила, действующая на малый пробный заряд, помещенный в среднюю часть полости в виде короткого широкого цилиндра, основания которого перпендикулярны к линиям напряженности, определяется значением вектора электростатической индукции **D** в диэлектрике.*

Из сказанного еще раз видно, что сила, действующая на „пробный“ заряд, внесенный внутрь полости, зависит от размеров и формы полости. В частности, полости можно придать такие формы, что сила,



действующая на „пробный“ заряд, внесенный в полость, будет определяться либо напряженностью поля в диэлектрике  $E$ , либо индукцией  $D$ .

Вместе с тем можно выяснить физический смысл вектора  $E$  и другим способом. Для этого в качестве „пробного“ заряда выберем не заряд, сосредоточенный на макроскопическом (хотя бы и очень малом) теле, а какую-либо элементарную заряженную частицу, например электрон. Отдельный электрон всегда находится в пустоте, даже если он расположен среди молекул твердого вещества. Значение силы  $f$ , действующей на этот электрон, поделенное на величину его заряда  $e$ , определит напряженность поля в той точке, где электрон расположен. Это значение напряженности обозначим через  $E_{\text{микро}}$ , где индекс „микро“ означает, что напряженность поля определена с помощью микроскопической частицы. Значение напряженности поля  $E_{\text{микро}}$  получится разное — в зависимости от того, помещен ли электрон вблизи того или иного заряда, входящего в состав молекул. Но если мы будем последовательно помещать электрон в различные, произвольно выбранные точки физически малого объема и найдем среднее значение  $\bar{E}_{\text{микро}}$ , то оно определится лишь совокупностью всех зарядов, свободных и связанных, т. е. как раз даст напряженность поля  $E$  в пределах данного объема в диэлектрике.

Существенно подчеркнуть, что, определяя  $E_{\text{микро}}$ , мы помещали электрон в произвольно выбранные точки по отношению к молекулам диэлектрика. Если же выделять внутри диэлектрика *определенные молекулы*, то средняя напряженность поля  $E_1$ , действующая в пределах объема, где расположена одна *молекула*, будет отлична от  $\bar{E}_{\text{микро}}$  и, следовательно, от напряженности поля  $E$ . Это вызвано тем что в этом случае речь идет о среднем значении *напряженности поля, определенного для тех точек, где расположены центры молекул*, в предположении, что сама молекула каждый раз удалена. Таким образом, точки, для которых теперь берется среднее значение, выбраны *не произвольно*, по отношению к ним остальные молекулы поляризованного диэлектрика расположены не беспорядочно, и они дают свое добавочное поле.

Соответственные расчеты показывают, что в среднем напряженность поля  $E_1$ , действующая на молекулу, находящуюся внутри изотропного диэлектрика, равна

$$E_1 = E + \frac{4\pi}{3} P, \quad (4)$$

где  $P$  — вектор поляризации диэлектрика.

**§ 146. Дипольные диэлектрики. Определение дипольных моментов молекул.** До сих пор мы считали, что результат поляризации диэлектрика получается один и тот же, независимо от того, имели ли молекулы первоначально дипольный момент или этот момент возник у них лишь под влиянием внешнего поля. Однако существуют

явления, которые позволяют установить различие между диэлектриками из дипольных и недипольных молекул и вычислить собственные дипольные моменты полярных молекул.

До сих пор мы считали, что значение вектора поляризации  $\mathbf{P}$  определяется равенством

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность поля в диэлектрике и  $\chi$  — коэффициент поляризации диэлектрика. Предположим теперь, что  $\mathbf{P}$  может быть представлено в виде:

$$\mathbf{P} = \alpha n_0 \mathbf{E}_1, \quad (1)$$

где  $n_0$  — число молекул в единице объема,  $\mathbf{E}_1$  — среднее значение напряженности, действующей на молекулы, и  $\alpha$  — коэффициент поляризации молекул.

Подставляя в (1) вместо  $\mathbf{E}_1$  его значение по формуле (4) § 145, найдем:

$$\mathbf{P} = \alpha n_0 \left( \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right),$$

откуда

$$\mathbf{P} \left( 1 - \frac{4\pi}{3} \alpha n_0 \right) = \alpha n_0 \mathbf{E}. \quad (2)$$

Однако, воспользовавшись соотношением  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$  и замечая, что  $1 + 4\pi\chi = \epsilon$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, мы можем, с другой стороны, написать:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Подставляя это выражение для  $\mathbf{P}$  в формулу (2), получим:

$$\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} \left( 1 - \frac{4\pi}{3} \alpha n_0 \right) = \alpha n_0 \mathbf{E},$$

откуда после простых алгебраических преобразований находим:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{1}{n_0} = \frac{4\pi}{3} \alpha.$$

Число молекул в единице объема  $n_0$  равно  $N \frac{\delta}{\mu}$ , где  $\mu$  — молекулярный вес вещества диэлектрика,  $\delta$  — его плотность и  $N$  — число Авогадро; отсюда получим:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\mu}{\delta} = \frac{4\pi}{3} \alpha N. \quad (3)$$

Так как коэффициент поляризации молекул  $\alpha$  есть для каждого данного сорта молекул величина постоянная, то, следовательно, и величина  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\mu}{\delta}$  для каждого данного диэлектрика есть величина постоянная, не зависящая от изменений его плотности, вызванных

какими-либо внешними причинами, например давлением, изменением температуры и т. д. Величина  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\mu}{\delta}$  называется *молекулярной* (или *молярной*) *поляризацией*. Независимость молекулярной поляризации от плотности  $\delta$  может быть экспериментально проверена на газах, плотность которых легко меняется под влиянием внешнего давления.

Выражение (3) для молекулярной поляризации справедливо для недипольных диэлектриков. В дипольных диэлектриках молекулы, как мы указали, обладают собственным дипольным моментом  $p_0$ . Под влиянием внешнего электрического поля они стремятся расположиться своими диполями вдоль поля. Но этому ориентирующему действию мешает беспорядочное тепловое движение. Чем выше температура  $T$ , тем больше средняя энергия теплового движения молекул и тем, следовательно, слабее ориентирующее действие внешнего электрического поля. Это ведет к тому, что вектор поляризации диэлектрика  $P$  оказывается зависящим от температуры. Соответственные вычисления дают, что

$$P = n_0 \frac{p_0^2 E_1}{3kT},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Если диполи молекул, кроме того, увеличиваются под влиянием поля  $E$  (т. е. коэффициент поляризации  $\alpha$  молекул не равен нулю), то численное значение вектора поляризации диэлектрика  $P$  оказывается равным

$$P = \alpha n_0 E_1 + n_0 \frac{p_0^2 E_1}{3kT},$$

откуда для молекулярной поляризации вместо выражения (3) получается:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\mu}{\delta} = \left( \frac{4\pi}{3} \alpha + \frac{4\pi p_0^2}{9 kT} \right) N. \quad (4)$$

Таким образом, для дипольных диэлектриков молекулярная поляризация содержит член, зависящий от абсолютной температуры диэлектрика  $T$ . Эта зависимость хорошо оправдывается для газов. Определяя экспериментально ход молекулярной поляризации с температурой  $T$ , можно определить дипольный момент  $p_0$  для различных полярных молекул. Дипольные моменты полярных молекул оказываются величинами порядка от  $1 \cdot 10^{-18}$  до  $6 \cdot 10^{-18}$  CGSE-единиц. Такие моменты соответствуют дипольному моменту двух точечных зарядов, равных зарядам электрона, разведенных на расстояние порядка  $10^{-8}$  см.

У атомов инертных газов и некоторых двуатомных молекул (например,  $H_2$ ,  $N_2$ ) дипольные моменты равны нулю. Определение дипольных моментов молекул играет большую роль при изучении их строения (особенно в органической химии). Определенные классы веществ имеют близкие значения  $\chi$ , характерные для данного рода химического

соединения. Значения дипольных моментов некоторых веществ приведены в табл. II.

В жидких и твердых диэлектриках следует учитывать взаимодействие между молекулами. Это ведет к тому, что на поворот молекул под влиянием внешнего электрического поля требуется некоторое, хотя и малое, но заметное время. Если диэлектрик ввести в переменное электрическое поле, быстро меняющееся по величине и направлению, то молекулы не успевают поворачиваться за полем, и роль второго члена в формуле (4) убывает.

Наконец, мы отметим следующее обстоятельство: во всех разобранных случаях существование не зависящей от напряженности диэлектрической постоянной  $\epsilon$  является следствием пропорциональности вектора поляризации  $\mathbf{P}$  напряженности поля  $\mathbf{E}$ .

Существуют, однако, такие тела, для которых „диэлектрическая постоянная“  $\epsilon$  не есть величина постоянная, но зависит от напряженности поля  $\mathbf{E}$ . Такого рода диэлектрики обладают рядом своеобразных свойств, сближающих их с магнитными свойствами ферромагнитных тел.

Эти свойства были впервые обнаружены у сегнетовой соли (двойная натрокалиевая соль винной кислоты) советскими физиками Б. В. Курчатовым и П. П. Кобеко и по названию соли называются *сегнетоэлектрическими* свойствами. Поведение сегнетовой соли весьма различно в зависимости от того, выше или ниже ее температура определенной температуры  $\Theta$ , равной  $25^\circ \text{C}$  (аналог „точки Кюри“ для ферромагнитных тел; § 203).

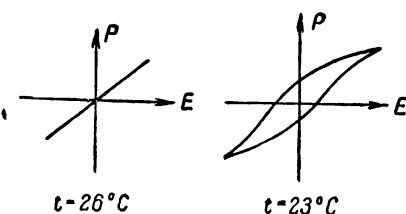


Рис. 66. Зависимость поляризации сегнетовой соли от меняющейся со временем напряженности поля.

При  $T > \Theta$  соблюдается пропорциональность между напряженностью поля и вектором поляризации;  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ ; при этом коэффициент  $\chi$  обнаруживает зависимость от температуры  $T$  по закону:  $\chi(T - \Theta) = \text{const}$ . При  $T < \Theta$  нарушается пропорциональность вектора  $\mathbf{P}$  напряженности поля  $\mathbf{E}$ . При изменении  $\mathbf{E}$  вектор  $\mathbf{P}$  „запаздывает“, т. е. принимает значения, соответствующие более ранним по времени значениям  $\mathbf{E}$ . Это явление носит название *гистерезиса* (аналогично магнитным гистерезисным явлениям в ферромагнитных телах; § 203). При периодическом изменении напряженности поля  $\mathbf{E}$  по величине и направлению

Т а б л и ц а II  
Электрические дипольные моменты

Вещество	$p \cdot 10^{18} \text{ CGSE}$
Хлористый водород HCl	1,03
Вода $\text{H}_2\text{O}$ . . . . .	1,85
Аммиак $\text{NH}_3$ . . . . .	1,5
Спирты . . . . .	1,7
Простые эфиры . . . . .	1,2
Кислоты органические .	1,4

кривая зависимости  $P$  от  $E$  приобретает при  $T < \Theta$  петлеобразную форму (рис. 66). Б. М. Вул обнаружил такие же свойства у некоторых солей титана, причем для них  $\epsilon$  достигает нескольких тысяч.

**§ 147. Диэлектрические свойства кристаллов. Пьезоэлектричество.** До сих пор мы рассматривали диэлектрики, состоящие из отдельных молекул, заряды в которых могут смещаться или подвергаться ориентирующему действию под влиянием внешнего электрического поля. Такое представление оправдывается для газообразных, жидких и аморфных твердых тел. Иной характер носит поляризация ионных *кристаллов*. Как было указано в т. I, ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов различных знаков. Например, кристалл каменной соли представляет собой пространственную решетку из чередующихся положительных ионов натрия и отрицательных ионов хлора. В таком кристалле нельзя выделить отдельные молекулы. В соответствии с этим поляризация кристалла сводится к смещению всех положительных ионов по полю и отрицательных ионов против поля.

Поляризуемость кристаллов может быть различной в зависимости от направления вектора электростатической напряженности  $E$  по отношению к направлениям кристаллографических осей. В этом случае направление вектора поляризации  $P$  не совпадает с направлением вектора  $E$  и, следовательно, связь между векторами  $P$  и  $E$  нельзя выразить простым соотношением (2) § 141. Вместо одной величины  $\chi$  приходится в общем случае вводить девять величин  $\chi_{ik}$ , с помощью которых выражается линейная связь между составляющими векторов  $P$  и  $E$  вдоль координатных осей:

$$\begin{aligned} P_x &= \chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z, \\ P_y &= \chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z, \\ P_z &= \chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z. \end{aligned}$$

В соответствии с этим и вектор электростатической индукции  $D$  не параллелен вектору  $E$ , и вместо диэлектрической постоянной  $\epsilon$  в общем случае также приходится вводить девять величин  $\epsilon_{ik}$ .

Пространственно правильное распределение частиц в кристаллической решетке ведет к существованию особого эффекта, носящего название *пьезоэлектрического эффекта*; этот эффект заключается в том, что на гранях некоторых кристаллов при их механических деформациях (например, при сжатии или растяжении) возникают электрические заряды.

Пьезоэлектрический эффект обнаруживают кварц, турмалин, сегнетова соль, сахар, цинковая обманка и ряд других кристаллов. Наиболее изучен пьезоэлектрический эффект у кварца. При сжимающей силе в 1 кГ на противоположных гранях кристалла кварца возникает разность потенциалов порядка сотых долей вольта. В кристаллах сегнетовой соли эффект сильнее.

Кроме описанного прямого пьезоэлектрического эффекта, существует обратный пьезоэлектрический эффект, сводящийся к изменению размеров кристалла, т. е. к его удлинению или укорочению при электризации (*электрострикция*). Изменение размеров кристалла при электрострикции мало: оно составляет величину порядка  $10^{-7}$  см при приложенных разностях потенциалов в сотни вольт.

Прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты находят в настоящее время широкое применение в технике. В т. I нами было указано на применение пьезокварцев для получения и наблюдения ультразвуков. В радиотехнике пьезокварцы употребляются для стабилизации электрических колебаний. Пьезокварцы используются также в различных измерительных приборах и для изготовления эталонов времени.

Для получения пьезоэлектрического эффекта из кристалла кварца вырезается прямоугольный параллелепипед (рис. 67), у которого одна система ребер параллельна так называемой оптической оси  $L^3$ , другая — одной из двойных осей  $L^2$  (электрических осей). При действии на вырезанный таким образом пьезокварц сжимающей силы  $f$ , параллельной оси  $L^2$ , на гранях, нормальных к  $L^2$ , появляются равные и противоположные по знаку заряды  $+q$  и  $-q$ . Количество электричества  $q$  пропорционально сжимающей силе  $f$  и не зависит от размеров пластинки кварца:

$$q_{\parallel} = kf;$$

этот эффект носит название *продольного пьезоэлектрического эффекта*. Величина  $k$  носит название *пьезоэлектрической постоянной* кварца; она равна приблизительно  $6,5 \cdot 10^{-8}$ , если  $q$  выражено в CGSE-единицах заряда, а  $f$  — в динах.

Если действующая сила  $f$  параллельна оптической оси  $L^3$ , то возникновение зарядов не наблюдается.

Если сила  $f$  действует в направлении  $n$ , перпендикулярном к плоскости, содержащей оси  $L^2$  и  $L^3$ , то возникает так называемый *поперечный пьезоэлектрический эффект*. Заряды образуются также на гранях, нормальных к  $L^2$ , но знак зарядов — обратный тому, который наблюдается при продольном эффекте. Количество возникающего при этом на каждой из граней электричества  $q_{\perp}$  равно:

$$q_{\perp} = k \frac{a}{b} f,$$

где  $k$  имеет прежнее значение,  $a$  — толщина пластинки в направлении действия силы  $f$ ,  $b$  — ее толщина в направлении электрической оси  $L^2$ .

При изменении знака силы меняется и знак зарядов  $q$ : на грани, на которой при сжатии появляется положительный заряд, при растягивании появляется отрицательный, и наоборот.

Для наблюдения обратного пьезоэлектрического эффекта к граням пьезокварца приклеиваются металлические обкладки, которым сообщаются электрические заряды; при этом в зависимости от направления поля кристаллическая пластинка сжимается или расширяется.

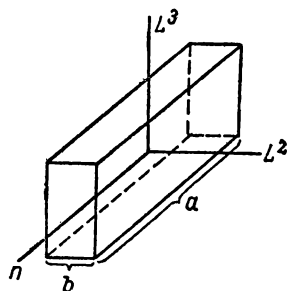


Рис. 67. Параллелепипед кварца.

§ 148. Конденсаторы. В § 136 мы рассмотрели плоский конденсатор в пустоте и вывели, что его емкость  $C$  равна

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}, \quad (1)$$

где  $S$  — площадь одной из пластин конденсатора, а  $d$  — расстояние между пластинами. При наличии между пластинами конденсатора диэлектрика с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , по сказанному в § 139, его емкость  $C$  возрастает в  $\epsilon$  раз и, следовательно, станет равной

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (2)$$

Таким образом, емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади пластины  $S$ , диэлектрической постоянной  $\epsilon$  и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами  $d$ .

Теперь рассмотрим соединения конденсаторов. Соединение конденсаторов возможно последовательное и параллельное.

Случай последовательного соединения двух конденсаторов с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  представлен на рис. 68. При зарядке пластины 1 зарядом  $+Q$  на пластинах 2 и 3, представляющих собой один проводник, вследствие индукции возникнут соответственно заряды  $-Q$  и  $+Q$ ; на пластине 4 заряд будет  $-Q$ .

Потенциал пластины 1 обозначим  $V_1$ , потенциал пластины 4 обозначим  $V_2$ , общий потенциал пластин 2 и 3 обозначим  $V'$ . Для каждой пары пластин можем написать соотношения:

$$V_1 - V' = \frac{1}{C_1} Q, \quad V' - V_2 = \frac{1}{C_2} Q,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — емкости соединенных конденсаторов. Складывая почленно эти равенства, получаем:

$$V_1 - V_2 = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q;$$

с другой стороны, можно написать:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{C} Q,$$

где  $C$  обозначает результирующую емкость сложного конденсатора. Из сравнения двух последних формул имеем:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (3)$$

или

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (3a)$$

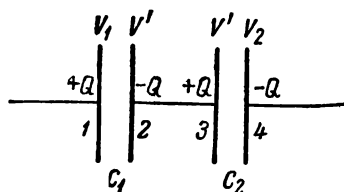


Рис. 68. Последовательное соединение конденсаторов.

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов получается конденсатор, обратная величина емкости которого равна сумме обратных величин соединяемых емкостей.

При *параллельном соединении конденсаторов* с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 69) потенциалы соединенных пластин будут одинаковы. Заряды на обкладках разных конденсаторов будут разные; обозначим их  $Q_1$  и  $Q_2$ . Применим к каждому конденсатору формулу, связывающую заряд на обкладках с разностью потенциалов и емкостью:

$$Q_1 = C_1 (V_1 - V_2), \quad Q_2 = C_2 (V_1 - V_2).$$

Складывая эти равенства почленно, имеем:

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) (V_1 - V_2).$$

С другой стороны, можно написать:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C (V_1 - V_2),$$

где  $C$  — емкость системы из обоих конденсаторов. Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$C = C_1 + C_2, \quad (4)$$

т. е. емкость двух соединенных параллельно конденсаторов равна сумме их емкостей.

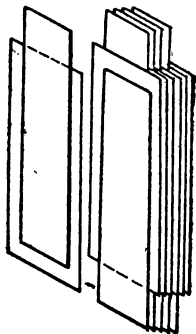


Рис. 70. Плоский конденсатор из листов фольги, переложенных листками парафинированной бумаги.

Очевидно, что полученные результаты можно обобщить на любое число соединенных вместе конденсаторов.

Возможность соединять конденсаторы в системы находит широкое применение. Весьма часто употребляются плоские конденсаторы, сделанные из листов фольги, переложенной листками парафинированной бумаги или слюды. Листки фольги соединяются через один между собою (рис. 70), так что все нечетные листки, соединенные вместе, представляют собой одну обкладку конденсатора, а все четные составляют другую обкладку. Такие конденсаторы могут обладать емкостью в сотни и больше микрофард и выдерживать несколько сот вольт, имея совсем небольшие размеры.

Приведем численный пример. Требуется построить плоский конденсатор емкостью в  $1 \text{ мкф}$ , употребляя в качестве диэлектрика парафинированную бумагу толщиной  $0,05 \text{ мм}$  с диэлектрической постоянной  $\epsilon = 1,8$ . Определить его размеры.

Из формулы (2) имеем, что емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

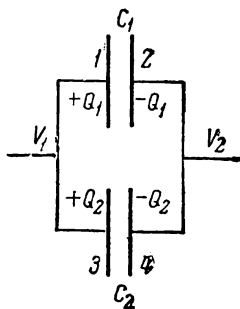


Рис. 69. Параллельное соединение конденсаторов.



откуда площадь его пластины  $S$  должна быть:

$$S = \frac{4\pi dC}{\epsilon},$$

подставляя сюда  $C = 1 \cdot 10^{-6} \phi = 9 \cdot 10^5 \text{ см}$ ,  $d = 0,005 \text{ см}$ ,  $\epsilon = 1,8$ , получим  $S \cong 31\,000 \text{ см}^2$ . Так как каждый листок фольги (кроме крайних) заряжается с обеих сторон, то общая площадь листков должна быть приблизительно  $31\,000 \text{ см}^2$ . Если отдельные листки сделать размером  $10 \times 10 \text{ см}^2$ , то полное число листков будет 310; при толщине фольги в  $0,001 \text{ см}$  объем конденсатора будет приблизительно  $2 \times 10 \times 10 \text{ см}^3$ , т. е. весь конденсатор уместится в совсем небольшую плоскую коробку.

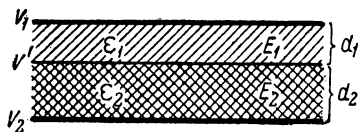


Рис. 71. Плоский конденсатор со слоями различных диэлектриков.

на два слоя диэлектрика с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ; толщины слоев пусть будут соответственно  $d_1$  и  $d_2$  (рис. 71).

В этом случае емкость  $C$  определится, как и в предыдущем случае, соотношением

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}. \quad (1)$$

Однако, так как мы имеем случай границы двух диэлектриков, то напряженность поля будет меняться при переходе от одного диэлектрика к другому. Обозначим через  $E_0$  напряженность поля, которая создалась бы между заряженными обкладками в пустоте; тогда

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

В диэлектриках напряженности  $E_1$  и  $E_2$  соответственно будут (см. сноску на стр. 80):

$$E_1 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_1} = \frac{E_0}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2} = \frac{E_0}{\epsilon_2}.$$

Заряд на одной из обкладок:

$$Q = \sigma S = \frac{E_0}{4\pi} S. \quad (2)$$

Разность потенциалов на обкладках может быть вычислена через напряженность поля. Обозначим через  $V'$  потенциал границы двух диэлектриков, тогда

$$\frac{V_1 - V'}{d_1} = E_1, \quad \frac{V' - V_2}{d_2} = E_2,$$

откуда

$$V_1 - V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_0 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right). \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получаем для емкости конденсатора:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{E_0 S}{4\pi E_0 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)},$$

откуда

$$C = \frac{S}{4\pi \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)}. \quad (4)$$

Легко видеть, что емкость не зависит от порядка расположения слоев. Эта формула переходит в формулу емкости для конденсатора с одним диэлектриком, если в ней положить  $d_2 = 0$ .

Рассмотрим еще несколько типов конденсаторов.

2. **Сферический конденсатор.** Сферический конденсатор состоит из двух сферических обкладок, концентрических одна с другой, радиусы которых обозначим через  $R_1$  и  $R_2$ . Пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ ; заряды обкладок, равномерно распределенные по их поверхности, обозначим  $+Q$  и  $-Q$ , а потенциалы обкладок — соответственно  $V_1$  и  $V_2$ .

Как было доказано (см. § 127), напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью, внутри нее равна нулю, а вне ее совпадает с напряженностью точечного заряда, помещенного в центре сферы и равного по величине заряду самой поверхности. Отсюда напряженность поля *между обкладками* конденсатора создается только зарядами на внутренней обкладке и равна

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2},$$

где  $r$  — расстояние, отсчитанное от центра сферической обкладки.

Направление  $r$  совпадает с направлением нормали  $n$  к поверхностям уровня потенциала; отсюда по формуле (2а) § 131:

$$E = -\frac{dV}{dr}, \text{ откуда } dV = -\frac{Q}{\epsilon r^2} dr.$$

Полное изменение потенциала при переходе от одной обкладки на другую получим, интегрируя это выражение в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon r^2} dr = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{R_1} \right).$$

Отсюда искомая емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q\epsilon}{\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}},$$

или

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (5)$$

Пользуясь этой формулой, легко подсчитать, что, например, сферический конденсатор в виде двух концентрических сфер с  $R_1 = 2$  м и  $R_2 - R_1 = 1$  мм и со средой между сферами с диэлектрической постоянной  $\epsilon = 2,5$  будет иметь емкость около 1 мкф. Этот результат интересно сравнить с данными, приведенными в § 136, по которым уединенный шар радиусом 9 км имеет также емкость в 1 мкф.

3. **Цилиндрический конденсатор.** Цилиндрический конденсатор представляет собой два коаксиальных полых цилиндра радиусов  $R_1$  и  $R_2$  и общей длины  $l$  (рис. 72). Пространство между цилиндрами заполнено средой с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Пусть на обкладках имеются заряды  $+Q$  и  $-Q$ ; потенциалы обкладок обозначим соответственно  $V_1$  и  $V_2$ .

Напряженность поля между обкладками создается только зарядом на внутреннем цилиндре и в точке на расстоянии  $r$  от оси цилиндра равна:

$$E = \frac{2\eta}{\epsilon r},$$

где  $\eta$  — заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра. Изменение потенциала на участке  $dr$  связано с напряженностью соотношением:

$$-\frac{dV}{dr} = E, \text{ откуда } dV = -E dr = -\frac{2\eta}{\epsilon r} dr.$$

Разность потенциалов между обкладками  $V_2 - V_1$  получим, интегрируя это выражение в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\eta}{\epsilon r} dr = -\frac{2\eta}{\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (6)$$

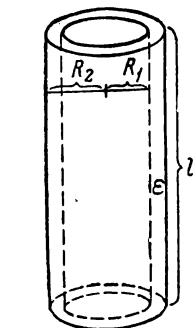


Рис. 72. Цилиндрический конденсатор.

Таким образом, емкость цилиндрического конденсатора пропорциональна длине конденсатора, пропорциональна, как всегда, диэлектрической постоянной среды, заполняющей конденсатор; она зависит, далее, только от отношения радиусов, цилиндров, возрастая с уменьшением этого отношения.

4. Конденсатор переменной емкости. В радиотехнике часто употребляется конденсатор переменной емкости, устройство которого представлено на рис. 73. Пластины в виде полуколец (рис. 74а) через одну соединены друг с другом. Половина пластин укреплена неподвижно, половина может поворачиваться с помощью ручки вокруг вертикальной оси. При повороте подвижные пластины более или менее значительно входят в промежутки между неподвижными пластинами и образуют, таким образом, ряд параллельно соединенных между собою конденсаторов.

Конденсаторы, образованные пластинами, приближенно можно считать плоскими, а потому емкость  $C'$  отдельного такого конденсатора положить равной

$$C' = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды, находящейся между пластинами;  $d$  — расстояние между пластинами;  $S$  — площадь той части пластин, которые находятся друг под другом. Если пластины повернуть друг относительно друга на угол  $\alpha$ , то  $S$  представит собой площадь заштрихованной части на рис. 74б. Обозначая внешний радиус пластин через  $r_1$ , а внутренний — через  $r_2$ , имеем:

$$S = \pi (r_1^2 - r_2^2) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{(r_1^2 - r_2^2) \alpha}{2},$$

где угол  $\alpha$  выражен в радианах.

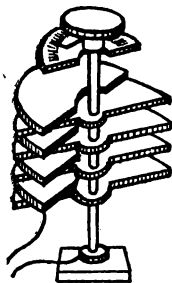


Рис. 73. Конденсатор переменной емкости.

Отсюда емкость одного конденсатора будет:

$$C' = \frac{\epsilon (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{8\pi d}.$$

Если в конденсаторе в целом имеется  $n$  промежутков между пластинами, то он представляет собой параллельное соединение  $n$  конденсаторов с емкостью  $C'$  каждый.

Следовательно, емкость всего конденсатора  $C$  равна:

$$C = nC' = \frac{\epsilon n (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{8\pi d}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  выражено в радианах. Формула не пригодна при малых  $\alpha$ .

Если угол  $\alpha$  выражать в градусах, то на основании соотношения

$$\alpha (\text{радианов}) = \frac{2\pi}{360} \alpha (\text{градусов}),$$

можно переписать выражение (7) в виде:

$$C = \frac{\epsilon n (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{1440 \cdot d}. \quad (8)$$

Обычно между пластинами такого конденсатора находится воздух, тогда  $\epsilon$  практически равно единице.

Подсчитаем численный пример. Определить максимальную емкость, которую дает конденсатор указанного устройства при следующих данных: внутренний радиус пластин  $r_2 = 1$  см, внешний радиус  $r_1 = 3$  см, расстояние между пластинами  $d = 1$  мм, число пластин  $n = 40$ . Между пластинами — воздух.

Решение. Максимальная емкость получится при  $\alpha = 180^\circ$ , поэтому по формуле (8) имеем:

$$C = \frac{1 \cdot 40 \cdot (3^2 - 1^2) \cdot 180}{1440 \cdot 0,1} \text{ см} = 400 \text{ см} \cong 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ мкф.}$$

**§ 150. Измерение разностей потенциалов.** В § 121, приводя устройство электроскопа, мы указывали, что степень расхождения его листков является мерилем зарядов, находящихся на листках. Однако одновременно электроскоп измеряет и разность потенциалов между листками и оправой электроскопа. При заряджении листков на оправе возникают индуцированные заряды; если при этом оправа соединена с землей, то на оправе остаются лишь заряды, знак которых противоположен знаку зарядов, находящихся на листках. Листки электроскопа и оправа представляют собой две обкладки конденсатора; разность потенциалов между этими обкладками тем больше, чем больше заряд  $Q$ , сосредоточенный на листках. Таким образом, степень расхождения листков электроскопа измеряет разность потенциалов между листками и оправой. Если электроскоп снабжен шкалой, проградуированной в вольтах, то он носит название *электростатического вольтметра*.

Градуирование электростатического вольтметра может быть выполнено с помощью *абсолютного электрометра*. В принципе измерение

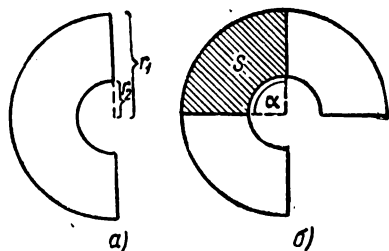


Рис. 74. Пластины конденсатора переменной емкости.

с помощью абсолютного электromетра сводится к измерению силы притяжения между двумя пластинами плоского конденсатора, которая может быть выражена через разность потенциалов. Для того чтобы иметь возможность пользоваться формулами, выведенными для

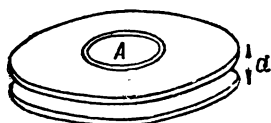


Рис. 75. Конденсатор с охранным кольцом.

плоского конденсатора с бесконечными пластинами, применяется конденсатор с *охран-ным кольцом*. Представим себе конденсатор, состоящий из двух параллельно расположенных горизонтальных дисков; в верхнем диске небольшая часть  $A$  отделена узким зазором от остальной части, носящей название охранного кольца (рис. 75); тогда поле под этой частью  $A$  однородно, так как отступления поля от однородного имеют место лишь на краях пластин.

Поэтому емкость этой средней части будет выражаться той же формулой, что и емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

где  $S$  — площадь пластины  $A$ , а  $d$  — расстояние между пластинами. Сила, действующая на пластину  $A$ , равна произведению из напряженности поля, создаваемого нижней пластиной, на заряд  $Q$  пластины  $A$ . Нижняя пластина создает внутри конденсатора напряженность поля, вдвое меньшую, чем полная напряженность поля  $E$  внутри конденсатора; следовательно, сила, действующая на пластину  $A$ , равна:

$$f = \frac{E}{2} \cdot Q \quad (1)$$

Замечая, что  $E = \frac{V_1 - V_2}{d}$  и  $Q = C(V_1 - V_2)$ , где  $V_1 - V_2$  — разность потенциалов между пластинами, получим:

$$f = \frac{C(V_1 - V_2)^2}{2d};$$

подставляя сюда значение емкости  $C$  по (1), найдем:

$$f = \frac{\epsilon S}{8\pi d^2} (V_1 - V_2)^2, \quad (2)$$

т. е. сила взаимодействия  $f$  выражается через разность потенциалов  $V_1 - V_2$ .

Если между пластинами находится воздух, то  $\epsilon = 1$  и из (2) имеем:

$$V_1 - V_2 = d \sqrt{\frac{8\pi f}{S}}.$$

Зная расстояние между пластинами  $d$  и площадь пластин  $S$  и измерив силу  $f$ , мы, таким образом, определим в абсолютной мере разность потенциалов  $V_1 - V_2$ .

Сила  $f$  может быть определена путем „взвешивания“, если одну из чашек весов заменить пластиной, притягиваемой к другой заряженной пластине. Этот принцип определения электрических величин „взвешиванием“ был разработан английским физиком Томсоном. На рис. 76 приведена, основанная на том же принципе, схема градуировки электростатического вольтметра  $D$ . В обыкновенных весах одна из чашек удалена и заменена средней частью конденсатора  $A$ . Если верхнюю пластинку этого конденсатора вместе с охранным кольцом и весь корпус весов соединить с землей, а нижнюю пластину конденсатора  $B$ , изолированную от земли, зарядить до некоторого потенциала  $V$ , то средняя часть верхней пластинки будет притягиваться к нижней; для сохранения равновесия весов на другую чашку нужно положить груз  $P$ , который и измерит силу  $f$ . Отсюда по выведенной формуле определим потенциал  $V$  (потенциал Земли  $V_2 = 0$ ). Листки градуируемого вольтметра  $D$  соединены с пластинкой  $B$ , а его оправа заземлена; таким образом, потенциал  $V$  измерит потенциал листков градуируемого вольтметра.

Некоторое затруднение представляет то обстоятельство, что весы, уравновешенные с одной стороны гирьками, а с другой — электрическими силами притяжения пластинок, не находятся в устойчивом равновесии. Незначительный перевес грузов ведет к увеличению расстояния  $d$  между пластинками, в результате чего сила притяжения уменьшается, и равновесие нарушается еще более. Наоборот, если гирек недостаточно, то пластинки конденсатора сближаются, и сила притяжения между ними еще более возрастает. Чтобы избавиться от этого неудобства, помещают у коромысла две задержки  $M$  и  $N$ . Сила притяжения определяется по нагрузке, ведущей к отрыву коромысла от одной из задержек.

Описанные электрометры с листками обладают малой чувствительностью. Обоим листкам сообщаются заряды  $Q$  одинаковой величины и одного и того же знака; сила отталкивания пропорциональна

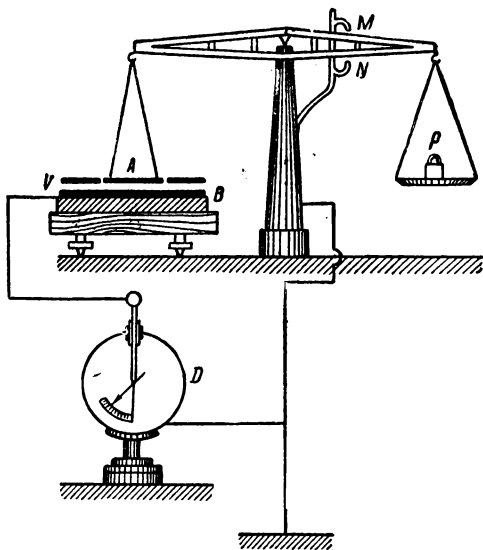


Рис. 76. Схема градуировки электростатического вольтметра с помощью абсолютного электрометра.

произведению зарядов листов, т. е. пропорциональна квадрату заряда  $Q^2$ . При малом заряде  $Q$  величина  $Q^2$ , а следовательно, и сила отталкивания будет очень мала. Но если тот же заряд  $Q$  поместить в электрическое поле  $E$ , то сила, действующая на заряд, будет пропорциональна  $QE$  и, следовательно, может быть сделана достаточно большой и при малом  $Q$ , если только взять достаточно большим  $E$ .

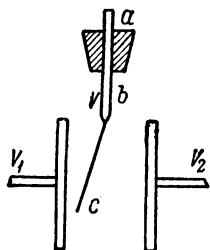


Рис. 77. Электроскоп с заряженными пластинками.

В простейшем виде этот принцип использован в электроскопе, изображенном на рис. 77. Легкий металлический листок  $bc$  висит между двумя пластинами, которым сообщается разность потенциалов  $V_1 - V_2$ . При зарядении листка  $bc$ , он отклоняется. Кроме более высокой чувствительности, по сравнению с обычным электроскопом, этот прибор имеет еще то преимущество, что он позволяет по направлению отклонения определить знак заряда, сообщенного листку  $bc$ .

Этот же принцип использован в современном лабораторном электрометре, известном под названием *струнного электрометра*.

Весьма тонкая платиновая проволочка (толщиной порядка  $2-3 \text{ мк}$ ) натянута вертикально между металлическими призмами (ножами) (рис. 78). Призмы изолированы и могут быть заряжены до некоторой разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Платиновая проволочка соединяется с исследуемым источником электричества. При заряде проволочка изгибается в сторону той или другой призмы, в зависимости от знака заряда. Этот изгиб может быть измерен либо путем наблюдения в микроскоп, либо путем фотографирования. Струнные электрометры достигают чувствительности в  $0,01 \text{ в}$  и имеют весьма важное свойство, заключающееся в том, что нить, благодаря малой массе, быстро устанавливается в равновесии. Это позволяет регистрировать и измерять быстро меняющиеся во времени заряды.

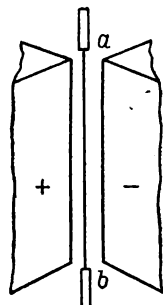


Рис. 78. Струнный электрометр.

Наконец, отметим еще один электрометр, построенный для измерения очень малых разностей потенциалов, называемый *квадрантным электрометром*. Металлический ящик (см. рис. 79, где показана внутренность этого ящика в плане и в разрезе) цилиндрической формы разрезан по радиусам на четыре изолированных друг от друга квадранта. Внутри этого ящика на тонкой нити подвешена 8-образная стрелка. Если поставить ось стрелки по направлению одного из разрезов, разделяющих квадранты, и зарядить ее до некоторого потенциала  $V_0$ , соединив все квадранты с землей, то стрелка останется в силу симметрии, в равновесии. Так как достичь точной симметрии в квадрантах трудно, то один из

них делают подвижным и, зарядив стрелку, передвигают квадрант до тех пор, пока равновесие не будет достигнуто. После этого двум противоположным квадрантам сообщают потенциал  $V_1$ , а двум другим — потенциал  $V_2$ , в результате чего стрелка поворачивается. Как показывает теория прибора, поворот стрелки в широких пределах пропорционален разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Таким образом, по повороту стрелки измеряется данная разность потенциалов. Поворот стрелки измеряется оптическим путем с помощью зеркальца  $S$ , прикрепленного к нити, на которой подвешена стрелка.

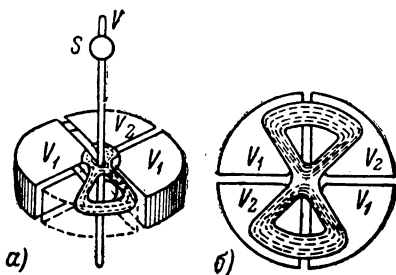


Рис. 79. Квадрантный электрометр.

Квадрантный электрометр обладает высокой чувствительностью: им можно измерять разности потенциалов в 1 в с точностью до 0,001 в. Недостатком квадрантного электрометра является большой период колебаний стрелки.

**§ 151. Измерение очень малых зарядов. Заряд электрона.** Существует простой метод измерения очень малых зарядов, сосредоточенных на микроскопических капельках. Идея этого метода заключается в следующем. Пусть микроскопическая капелька, несущая положительный заряд  $+q$ , находится между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора (рис. 80).

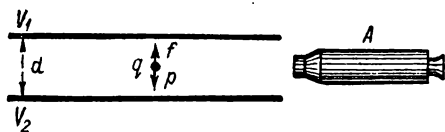


Рис. 80. Определение заряда методом капельки, взвешанной между пластинами конденсатора.

Если верхняя пластина заряжена отрицательно, а нижняя положительно, то на капельку действует *направленная вверх* электрическая сила

$$f = Eq,$$

где  $E$  — напряженность поля между пластинами конденсатора. Эта сила действует в направлении, противоположном силе тяжести капельки  $p$ .

При равенстве этих сил по абсолютному значению

$$Eq = p. \quad (1)$$

В этом случае капелька повиснет неподвижно между пластинами конденсатора.

Выражая напряженность поля  $E$  через разность потенциалов пластин  $V_1 - V_2$  и расстояние  $d$  между ними, имеем:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$



Отсюда, по (1), заряд  $q$ , несомый капелькой, будет равен:

$$q = p \frac{d}{V_1 - V_2}. \quad (2)$$

Зная вес капельки  $p$ , расстояние между пластинами  $d$  и ту разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , которую надо приложить, чтобы капелька повисла, найдем по формуле (2) значение заряда  $q$ .

Вес капельки в воздухе  $p$  можно найти, зная плотность  $\rho$  вещества, из которого она состоит, и ее радиус  $r$ :

$$p = \frac{4}{3} \pi (\rho - \rho') r^3 g, \quad (3)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести и  $\rho'$  — плотность среды, в которой находится капелька (воздуха).

Радиус капельки  $r$  определится по скорости падения ее, под влиянием силы тяжести, при отсутствии электрического поля. Скорость  $v$  такого падения, как было изложено в § 42 т. I, выражается формулой Стокса:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho'}{\eta} \cdot g r^2, \quad (4)$$

где  $\rho'$  — плотность и  $\eta$  — вязкость среды, в которой происходит падение (в данном случае воздуха). Зная  $\rho$ ,  $\rho'$  и  $\eta$  и измерив скорость падения капельки  $v$ , найдем, по (4), ее радиус  $r$ .

Этот метод позволяет измерять весьма малые заряды. В самом деле, пусть радиус микроскопической капельки  $r = 10^{-4}$  см и плотность ее  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup> (плотностью воздуха  $\rho'$  пренебрегаем); тогда ее масса  $m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \cong 4 \cdot 10^{-12}$  г. Положим расстояние между пластинами  $d = 2,5$  см и разность потенциалов  $V_1 - V_2 = 3000$  в, что составляет 10 CGSE-единиц потенциала. Тогда, по (2):

$$q = 4 \cdot 10^{-12} \cdot 981 \cdot \frac{2,5}{10} \text{ CGSE, откуда } q \cong 10^{-9} \text{ CGSE.}$$

Таким образом может быть измерен заряд порядка  $10^{-9}$  CGSE.

Милликэн использовал этот метод для точного измерения заряда электрона. В пространство между пластинами конденсатора вдувались микроскопические масляные капельки, которые при этом заряжались из-за трения о воздух. Капельки освещались сбоку с помощью источника света и наблюдались в микроскоп А (рис. 80). Подбирая разность потенциалов  $V_1 - V_2$  между пластинами, можно было добиться того, что некоторые капельки повисали неподвижно.

Затем воздух, заключенный между пластинами конденсатора, освещался рентгеновыми лучами. Рентгеновы лучи ионизировали воздух, т. е. образовывали в нем заряженные молекулы и свободные электроны. Тогда отдельная капелька, захватывая ион или электрон, внезапно меняла свой заряд; изменение заряда сказывалось на нарушении равно-

весия капельки. Таким образом, можно было не только измерять заряд, который капелька уже имела, но и менять заряд капельки во время опыта.

*Измерения Милликэна показали, что заряды капелек  $q$  во всех случаях являлись кратными от некоторого наименьшего заряда  $e$ :*

$$q = ne,$$

где  $n$  — целое число. Эти измерения непосредственно доказали прерывность электрического заряда и позволили измерить величину элементарного заряда  $e$ . Этот элементарный заряд представляет собой заряд элементарной электрической частицы — *электрона*.

По измерениям последнего времени, произведенным по методу Милликэна, а также по некоторым другим методам, заряд электрона равен

$$e = 4,802 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE} = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ К.}$$

Опыты над свободными электронами показали, что их заряд отрицателен и что они обладают массой покоя, равной

$$m_0 = 9,107 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

При обычных опытах над электризацией тел нам представляется, что заряды тел могут меняться непрерывно, так как заряд отдельного электрона очень мал. Пылинки же, наблюдаемые в этих опытах, настолько малы, что несомы ими заряды равны зарядам всего нескольких электронов; скачкообразное, прерывное изменение зарядов становится при этом непосредственно наблюдаемым.

Интересно отметить, что электрические силы относительно очень велики: достаточно на капельке наличия всего нескольких лишних электронов, чтобы электрическая сила могла уравновесить силу тяжести, хотя микроскопическая капелька состоит из очень большого числа атомов.

Для того чтобы конкретнее представить себе заряд и массу электрона, произведем следующий подсчет: медный сплошной шарик радиусом  $r = 1 \text{ см}$  заряжается отрицательно до потенциала 3000 в; определим число электронов, которые для этого нужно ему сообщить.

Заряд шарика

$$Q = C \cdot V = 1 \cdot \frac{3000}{300} = 10 \text{ CGSE.}$$

Так как заряд одного электрона  $e = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}$ , то искомое число электронов  $n$  равно:

$$n = \frac{10}{4,8 \cdot 10^{-10}} \cong 2,1 \cdot 10^{10},$$

таким образом, шарiku должно быть сообщено  $2,1 \cdot 10^{10}$  лишних электронов. Это число, само по себе очень большое, все же очень

мало по сравнению с числом атомов, входящих в состав шарика. Действительно, масса шарика

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 1^3 \text{ г} \cong 37 \text{ г},$$

т. е. составляет приблизительно  $\frac{1}{2}$  моля меди; следовательно, число атомов меди в шарике равно  $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{2} \cong 3 \cdot 10^{23}$ . Отсюда видно, что число добавленных электронов составляет приблизительно  $\frac{1}{1,5 \cdot 10^{13}}$  долю от числа атомов.

Интересно, наконец, отметить, что масса всех электронов, сообщенных шарiku, весьма мала; эта масса  $m_1 = nm_0 = 2,1 \cdot 10^{10} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ г} \cong 1,9 \cdot 10^{-17} \text{ г}$ , т. е. она в сотни тысяч раз меньше массы микропической пылинки. Отсюда видно, что практически достижимые электризации тел не связаны со сколько-нибудь заметным изменением их масс, хотя электроны и обладают массой.

Электроны обладают отрицательным зарядом. В настоящее время, как мы указывали, открыты также положительные электроны — так называемые *позитроны*. Их заряд, по-видимому, в точности равен по абсолютному значению заряду электрона, но имеет положительный знак; их масса также, по-видимому, точно равна массе электрона. Однако позитроны проявляются лишь при процессах, связанных с превращением атомных ядер или фотонов, и в свободном виде существуют весьма кратковременно (см. т. III). Поэтому во всех рассуждениях, касающихся электрических свойств тел, возникновения электрического тока и т. д., приходится говорить лишь об электронах.

При выполнении опытов с капелькой, взвешенной между пластинами конденсатора, трудно добиться полного равновесия электрической силы  $qE$  и силы тяжести капельки  $p$ . Однако этого и не требуется.

Пусть при отсутствии электрической силы, под влиянием одной только силы тяжести, капелька падает в воздухе равномерно со скоростью  $v_0$ ; по закону Стокса эта скорость пропорциональна силе тяжести  $p$ . Будем считать направление вниз положительным. При наличии электрического поля, тянущего капельку вверх, на капельку действует сила, равная разности сил тяжести и электрической силы:  $p - qE$ ; под влиянием этой силы капелька движется равномерно со скоростью  $v_1$ ; так как эта скорость пропорциональна силе  $p - qE$ , то

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p}{p - qE},$$

откуда заряд капельки

$$q = \frac{p}{Ev_0} (v_0 - v_1). \quad (5)$$

Подставляя сюда значение веса капельки  $p$  по (3), получим:

$$q = \frac{4}{3} \pi \frac{(\rho - \rho') r^3 g}{Ev_0} (v_0 - v_1).$$

Радиус капельки найдем из формулы Стокса (4):

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho - \rho')g}}.$$

Подставляя это выражение  $r$  в выражение для  $q$ , получим:

$$q = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{9}{2} \eta \right)^{3/2} \cdot \left[ \frac{1}{g(\rho - \rho')} \right]^{1/2} \cdot \frac{(v_0 - v_1) v_0^{1/2}}{E}. \quad (6)$$

Скорости падения капельки  $v_1$  и  $v_0$  измеряются с помощью микроскопа, снабженного шкалой, и секундомера; все остальные величины, входящие в формулу (6), также доступны непосредственному измерению. Таким образом определяется  $q$ .

Т а б л и ц а III

Измерения, как указано, показали, что заряд капельки пропорционален элементарному заряду  $e$ . Приведем табл. III, взятую из работы Милликена; в этой таблице в первом столбце выписаны наблюдаемые значения зарядов капельки, а во втором — величины, кратные от заряда, равного 4,917 CGSE-единиц заряда.

Таблица с несомненностью показывает, что капелька несет заряды, лишь кратные от некоторого элементарного заряда. По данным этой таблицы, величина такого элементарного заряда, должна быть принятой  $4,917 \cdot 10^{-10}$  CGSE. Однако затем Милликэн показал, что необходимо для столь малых капелек, какими он пользовался, ввести поправку к закону Стокса. В результате длительных измерений он получил в 1916 г. значение для заряда электрона  $e = 4,774 \times 10^{-10}$  CGSE.

Впоследствии были внесены поправки в значение вязкости воздуха  $\eta$ , которым пользовался Милликэн, и тогда было получено значение для заряда электрона  $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$  CGSE, приведенное в тексте.

Наблюдаемые заряды капельки $\times 10^{10}$	Величины кратные 4,917
19,66	$4,917 \times 4 = 19,66$
24,60	$4,917 \times 5 = 24,59$
29,62	$4,917 \times 6 = 29,50$
34,47	$4,917 \times 7 = 34,42$
39,38	$4,917 \times 8 = 39,34$
44,42	$4,917 \times 9 = 44,25$

**§ 152. Природа электростатического поля.** Содержание предыдущих параграфов убеждает нас, что в пространстве, окружающем заряженное тело, происходят какие-то изменения, которые сказываются прежде всего в том, что на всякое другое заряженное тело, помещенное в это пространство, действуют силы. Мы охарактеризовали это свойство, проявляющееся в действии сил на заряды, с помощью вектора напряженности  $E$ , а всю упомянутую область действия зарядов называли *электростатическим полем*. Каждая точка поля характеризуется определенным значением вектора  $E$ . Для более удобной графической характеристики совокупности значений  $E$  мы ввели в рассмотрение линии напряженности. Наконец, для характеристики работы, совершаемой при перемещении в электростатическом поле зарядов, был введен потенциал  $V$ , имеющий также в каждой точке поля определенное значение и, вообще говоря, меняющийся от точки к точке.

Как мы указывали в § 123, описание свойств электростатического поля вначале носило формальный характер и строилось по аналогии с математической теорией поля тяготения. При этом предполагалось, что электрические силы и силы всемирного тяготения передаются мгновенно, что они представляют собой некое „действие на расстоянии“, без какой-либо роли промежуточного пространства.

Такая точка зрения носила идеалистический характер и оспаривалась еще в XVIII в. рядом ученых, в том числе М. В. Ломоносовым, полагавшим, что электрические силы обусловлены вращением частичек эфира — среды, заполняющей все пространство.

В первой половине XIX в. идеи о роли электрического поля были особенно широко использованы М. Фарадеем (1791 — 1867). Дальнейшее развитие учения об электрических явлениях подтвердило правильность идеи о существовании электрического поля и заставило полностью отказаться от гипотезы „действия на расстоянии“. Между взаимодействующими зарядами существует электрическое поле, объективные свойства которого определяются такими величинами, как напряженность поля  $E$  и потенциал  $V$ .

Однако необходимо отметить, что физики, развивавшие теорию электрического поля, исходили из общепринятых в то время механистических воззрений: они пытались объяснить электростатические явления, построив их механическую модель. Линиям напряженности приписывали механический смысл, рассматривая их как механические напряжения в некоторой упругой среде. Линии напряженности наглядно рассматривались как натянутые упругие нити, тянущиеся от одних зарядов к другим. Натяжение нитей объясняло взаимное притяжение разноименно заряженных тел; давление, нормальное к нитям, обуславливало взаимное отталкивание нитей и могло объяснить отталкивание тел, заряженных одноименно. Эта теория требовала признания существования универсальной упругой среды, пронизывающей все известные нам вещества и заполняющей все пустое пространство, — *мирового эфира*. Распространение волнового процесса в том же эфире должно было объяснить световые явления.

Эта гипотеза механического эфира оказалась, однако, несостоятельной перед лицом новых открытий конца прошлого столетия. Многочисленные факты выявили особую природу электрических процессов, не сводимую к явлениям чисто механическим. Такого рода отказ от возможности дать механическое объяснение электрическим процессам ни в коей мере не представляет собою отказ от материалистического объяснения. В. И. Ленин, критикуя физиков-идеалистов начала нынешнего столетия, которые видели в замене механических теорий электромагнитными отказ от материализма, писал: «...как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д. — все это только лишнее

*подтверждение* диалектического материализма»<sup>1</sup> и дальше: «Это, конечно, сплошной вздор, будто материализм утверждал „меньшую“ реальность сознания или обязательно „механическую“, а не электромагнитную, не какую-нибудь еще неизмеримо более сложную картину мира, как *движущейся материи*».<sup>2</sup>

К числу фактов, подтверждающих реальность электростатического поля, относятся следующие. Как мы видели (§ 138), электростатическое поле характеризуется определенным значением энергии, распределенной с некоторой объемной плотностью. Впоследствии было открыто, что поле распространяется с конечной скоростью. Опыты Фарадея над электромагнитной индукцией (§ 221) указали на тесную связь между электрическими и магнитными явлениями. В 60-х годах прошлого столетия Максвелл развил общую теорию электромагнитных явлений и показал, что электростатическое поле является частным случаем более общего по своей природе *электромагнитного поля*. Эта теория охватила весьма широкий круг электрических и магнитных явлений; она привела к открытию электромагнитных волн и выяснила электромагнитную природу света. Таким образом возникла единая теория электрических, магнитных и оптических явлений, базирующаяся на представлении об электромагнитном поле.

Теория Максвелла, казалось, подтверждала теорию мирового эфира. По теории Максвелла, развитой затем Лоренцом, атомы, из которых состоят твердые, жидкие и газообразные тела, погружены в эфир. Каждый атом представляет собою сложную электрическую систему: он состоит из положительного ядра и электронов. Таким образом, считалось, что существуют лишь эфир и электрические заряды — положительные (ядра атомов) и отрицательные (электроны). „Пустое“ пространство заполнено только эфиром. В части пространства, где расположено какое-либо тело, в эфир вкраплены заряды, входящие в состав атомов этого тела. Эти заряды вызывают изменения в эфире, которые мы воспринимаем как электромагнитное поле.

В теории Лоренца эфир рассматривался как неподвижная материальная среда, со свойствами, отличными от свойств известных механических упругих тел. Свойства эфира выражались уравнениями, данными Максвеллом, вытекающими из обобщения многочисленных опытных фактов, относящихся к области электромагнитных явлений. Теория Максвелла — Лоренца содержала в себе нечто новое по отношению к механике, она давала не механическое объяснение природы электромагнитного поля. Механический эфир старых теорий света уступил место электромагнитному эфиру.

Однако эфир рассматривался как *сплошная среда, которая, как и любая механическая сплошная среда, может служить системой*

<sup>1</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1948, стр. 244.

<sup>2</sup> Там же, стр. 263.

*отсчета* (ср. сказанное в т. I, § 4). Можно было говорить о движении тел, например о движении земного шара относительно эфира. Опыты Майкельсона (см. т. III), а также опыты Трутона и Нобля и целый ряд других опытов (см. § 216), с помощью которых делались попытки определить движение Земли относительно эфира, привели к отрицательным результатам. Теория относительности обобщила эти опытные результаты, показав, что абсолютное движение относительно эфира вообще не существует. Это нарушило последнюю аналогию между эфиром и сплошными механическими средами. В связи с этим, поскольку с понятием об эфире исторически твердо связывалось понятие *о среде, относительно которой можно определить движение*, современная теоретическая физика перестала пользоваться представлением о „среде-эфире“ вообще. Мы говорим теперь об электромагнитном поле как об особом виде материи. Электромагнитное поле не только обладает свойствами, отличными от свойств известных нам механических сред, но и характеризуется той своеобразной особенностью, что оно не может служить системой отсчета.

---

## ЧАСТЬ ПЯТАЯ

# ПОСТОЯННЫЙ ТОК

---

### ГЛАВА XVI

#### ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**§ 153. Постоянный ток. Закон Ома.** Перемещение заряженных частиц образует электрический ток. Носители зарядов при этом могут быть различными. В некоторых случаях это будут заряженные атомы или молекулы (ионы), как, например, при электролитической проводимости или в положительных лучах, возникающих в разреженных газах. В других случаях ток обусловлен движением электронов (ток в металлах или катодных лучах). Однако во всех случаях наличие тока сопровождается некоторыми общими явлениями, например возникновением магнитного поля.

Не следует думать, что явление электрического тока исчерпывается простым механическим движением заряженных частиц. Во-первых, электрическое и магнитное поля, связанные с движущимися заряженными частицами, обладают, как было сказано в § 152, особой немеханической природой. Во-вторых, и само движение элементарных частиц подчиняется иным законам, чем механическое движение макроскопических тел (§ 163). Однако в ряде вопросов, связанных с током, оказывается возможным пользоваться представлением о механических перемещениях зарядов, и расчеты, полученные на основе таких представлений, дают в ряде случаев хорошо согласующиеся с опытом результаты. В других случаях такие (классические) представления оказываются непригодными и явления приходится анализировать на основе более сложных (квантовомеханических) представлений.

Электрический ток характеризуется величиной, называемой *силой тока*. Сила тока  $I$ , протекающего через данную площадку, представляет собой физическую величину, измеряемую количеством электричества, переносимым через эту площадку за единицу времени. Если за время  $\Delta t$  через площадку перенесено количество электричества  $\Delta Q$ , то сила тока  $I$  равна

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (1)$$

В том случае, когда  $I$  для данной площадки не меняется со временем, мы говорим о *постоянном токе*.



*За единицу силы тока в CGSE-системе берется такая сила тока, при которой через данную площадку за 1 сек переносится одна CGSE-единица количества электричества. Ввиду малости этой единицы в международной системе за единицу силы тока принимается сила тока, при которой через данную площадку за 1 сек переносится один кулон количества электричества; эта единица силы тока называется ампером.*

Определение ампера, как одной из четырех основных единиц международной системы единиц, будет дано в § 196.

Связь между ампером и электростатической единицей силы тока определяется условием:

$$1 \text{ ампер} = \frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ сек}} \cong \frac{3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. кол. эл-ва}}{1 \text{ сек}} \cong 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. силы тока.}$$

Размерность силы тока  $I$  получим из соотношения (1):

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}. \quad (2)$$

Рассмотрим сперва явление тока в проводниках первого рода — металлах. Ток в проводниках возникает только в тех случаях, если в них имеются области, находящиеся при разных потенциалах. Возникающий при этом ток идет до тех пор, пока потенциалы частей проводника не выравниваются. Если поддерживать разность потенциалов на концах участка проводника постоянной, то в этом участке будет идти постоянный ток.

Сила тока  $I$ , текущего по участку однородного проводника, удовлетворяет, как показывает опыт, закону Ома:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}. \quad (3)$$

Здесь  $V_1 - V_2$  — разность потенциалов на концах участка проводника, а  $R$  — величина, характеризующая данный участок проводника и называемая его *сопротивлением*. Таким образом, закон Ома показывает, что сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов на концах участка проводника и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка проводника.

Закон Ома был установлен в 1826 г. на основании произведенных Омом измерений. Так как Ом заметил, что сила тока, даваемая гальваническим элементом, меняется со временем (см. явление поляризации электродов; § 179), то он пользовался в качестве источника электродвижущей силы термопарой (см. § 172). Окружив один спай термопары льдом, а другой держа в кипящей воде, он смог получить вполне постоянный источник разности потенциалов. Силу тока Ом измерял по действию тока на магнитную стрелку. Годом позже Ом опубликовал статью, в который он выводил свой закон

теоретически, сопоставляя электрический ток с потоком жидкости в трубе. Следует, однако, заметить, что такое сопоставление законно лишь для случая ламинарного течения жидкости (см. т. I) и перестает быть верным для турбулентного течения.

Впоследствии закон Ома проверялся многими авторами и было установлено, что он выполняется весьма точно. Отступления от закона Ома, достигающие 1%, были обнаружены лишь при очень больших плотностях тока — порядка нескольких миллионов ампер на 1 см<sup>2</sup>.

Как и в опытах самого Ома, так и в других исследованиях, сила тока измерялась по магнитному действию тока. Строго говоря, требуется предварительно доказать, что магнитное действие пропорционально силе тока, определяемой по равенству (1) через количество электричества  $\Delta Q$ , протекающее в единицу времени. В соответствии с определением (1), силу тока можно измерить в абсолютной мере, заставляя разряжаться конденсатор определенной емкости, предварительно заряженный до определенной разности потенциалов. Разность потенциалов может быть измерена, а емкость конденсатора, имеющего простую геометрическую форму, вычислена. Однако практически такие измерения трудно выполнимы, так как при разряде конденсатора нельзя получить постоянный ток.

Поэтому в настоящее время сила тока определяется, как в работах Ома, по магнитному действию токов, а именно по силе взаимодействия между двумя бесконечно длинными параллельными проводниками, по которым течет ток определенной силы (см. § 196).

**§ 154. Сопротивление проводников.** Сопротивление участка проводника зависит от материала проводника, от его размеров и формы.

Для участка проводника постоянного поперечного сечения  $S$  и длины  $l$  сопротивление оказывается равным

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — величина, зависящая лишь от материала проводника; она называется *удельным сопротивлением* материала. Таким образом, сопротивление участка проводника прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади его сечения  $S$ .

Из формулы (1) имеем

$$\rho = R \frac{S}{l}, \quad (1a)$$

откуда видно, что удельное сопротивление  $\rho$  численно равно сопротивлению проводника, имеющего единицу длины и площадь поперечного сечения, равную единице площади.

В *CGSE-системе за единицу сопротивления* принимается сопротивление проводника, в котором при разности потенциалов на концах в одну CGSE-единицу течет одна CGSE-единица силы тока. Так как эта единица велика для практических случаев, то в качестве *практической единицы сопротивления* выбрано сопротивление проводника, в котором возникает ток в один ампер при разности потенциалов в один вольт. Эта единица называется *омом*.

Связь между омом и CGSE-единицей сопротивления получим с помощью соотношения, вытекающего из закона Ома:

$$1 \text{ ом} = \frac{1 \text{ вольт}}{1 \text{ ампер}} \cong \frac{\frac{1}{300} \text{ CGSE-ед. потенциала}}{3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. силы тока}} \cong \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ GGSE-ед. сопротивления.}$$

Миллион омов называется *мегаомом*.

Размерность сопротивления получим на основании равенства:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = TL^{-1}.$$

Удельное сопротивление  $\rho$  в практической системе принято измерять в единицах, устанавливаемых на основании формулы (1а), причем сопротивление  $R$  выражают в омах, площадь поперечного сечения  $S$  — в квадратных сантиметрах, а длину  $l$  — в сантиметрах; получающаяся единица удельного сопротивления называется *омо-сантиметром* (сокращенно *ом·см*).

Таким образом, за единицу удельного сопротивления принимается удельное сопротивление такого материала, изготовленный из которого куб с длиной ребра в 1 см имеет сопротивление в 1 ом, при условии, что ток идет от одной грани этого куба к противоположной.

При технических расчетах сопротивления проводов, пользуясь формулой (1а), часто измеряют площадь поперечного сечения  $S$  в квадратных миллиметрах, а длину провода  $l$  — в метрах. В соответствии с этим за единицу удельного сопротивления принимается удельное сопротивление такого материала, изготовленный из которого провод длиной в 1 м и с площадью поперечного сечения в 1 мм<sup>2</sup> имеет сопротивление в 1 ом.

Между этой технической единицей удельного сопротивления и *ом·см* имеет место соотношение:

$$1 \text{ техн. ед. удельного сопротивления} = 1 \text{ ом} \frac{0,01 \text{ см}^2}{100 \text{ см}} = 10^{-4} \text{ ом} \cdot \text{см}.$$

Кроме удельного сопротивления  $\rho$ , часто вводят в рассмотрение обратную величину:

$$\sigma = \frac{1}{\rho},$$

называемую *удельной проводимостью* или *электропроводностью* (см. табл. IV).

Удельное сопротивление  $\rho$  зависит от температуры проводника. Почти для всех металлов при обычных температурах удельное сопротивление меняется с температурой линейно:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (2)$$

где  $t$  — температура в шкале Цельсия,  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ \text{C}$ ,  $\alpha$  — постоянный коэффициент.

Таблица IV

Удельное сопротивление и электропроводность некоторых проводников при  $0^\circ \text{C}$

Проводник	$\rho \cdot 10^8$ , ом · см	$\sigma \cdot 10^{-4}$ , ом <sup>-1</sup> · см <sup>-1</sup>
Алюминий . . . . .	2,53	39,5
Графит . . . . .	39,2	2,55
Железо чистое . .	8,69	11,48
Медь чистая . . .	1,55	64,5
Ртуть . . . . .	94,3	1,06

Для многих металлов  $\alpha$  по численному значению близко к  $0,00367$ , т. е. к  $\frac{1}{273}$ , так что соотношение (2) может быть переписано в виде:

$$\rho = \alpha \rho_0 T, \quad (2a)$$

где  $T$  — температура в абсолютной шкале. Однако это соотношение носит приближенный характер и не оправдывается ни при высоких, ни при очень низких температурах. При высоких температурах коэффициент  $\alpha$  возрастает.

Кроме того, сопротивление возрастает при плавлении металлов. При низких температурах  $\alpha$  убывает. На рис. 81 дана зависимость  $\rho$  от  $T$  для Cu, Fe, Pt и Pb.

При очень низких температурах, порядка  $1-7^\circ \text{K}$ , сопротивление некоторых металлов и сплавов резко падает, становясь исчезающе малым (см. рис. 82). Это явление, впервые открытое голландским физиком Каммерлинг-Оннесом в 1911 г., называется *сверхпроводимостью*. Практически сопротивление при сверхпроводимости равно нулю. В настоящее время сверхпроводимость установлена у большого числа элементов (Al, Ti, Zn, Tc, Cd, Sn, Hg, Tl, Pb, Bi, U и др.), у многих сплавов и у ряда химических соединений. Для сплавов сверхпроводимость может наблюдаться и в том случае, когда один из компонентов

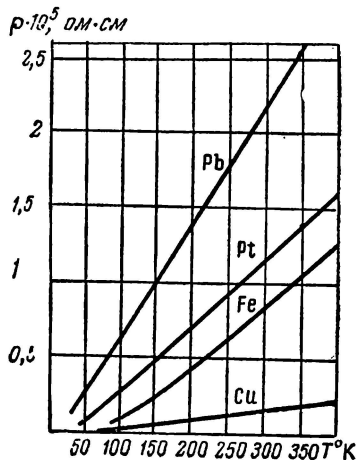


Рис. 81. Зависимость удельного сопротивления металлов от абсолютной температуры.

в чистом виде не обнаруживает сверхпроводимости. Среди химических соединений сверхпроводимость возможна и тогда, когда ни один из компонентов этого соединения сам по себе сверхпроводимостью не обладает. Критическая температура  $T_k$ , при которой вещество переходит в сверхпроводящее состояние, в большинстве случаев, как сказано, лежит в интервале  $1\text{--}7^\circ\text{K}$ . Однако встречаются и более низкие и более высокие значения  $T_k$ . Из исследованных до сих пор чистых элементов наиболее низкое значение  $T_k = 0,35^\circ\text{K}$  имеет гафний (Hf) и наиболее высокое  $T_k = 11,7^\circ\text{K}$  — технеций (Tc); соединение  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ , имеет  $T_k = 18^\circ\text{K}$ . Для разных изотопов одного и того же элемента критическая температура  $T_k$  несколько различна. При повышении давления критическая температура  $T_k$  меняется, однако, незначительно (приблизительно на  $10^{-5}$  град/атм), причем у одних веществ наблюдается повышение  $T_k$  с увеличением давления, а у других — понижение.

При переходе вещества в сверхпроводящее состояние одновременно меняется и ряд его других свойств — скачкообразно изменяется теплоемкость и (при наличии магнитного поля) происходит выделение или поглощение тепла. Особенно своеобразны магнитные свойства сверхпроводников. Вещество в сверхпроводящем состоянии представляет собой „идеальный“ диамагнетик, внутри которого магнитная индукция  $B = 0$ . Коэффициент намагничивания (§ 202) сверхпроводника  $\chi = -\frac{1}{4\pi}$ . Равенство магнитной индукции нулю в сверхпроводящем

теле может быть объяснено появлением в его поверхностном слое токов, магнитное поле которых компенсирует внешнее магнитное поле. В очень тонком поверхностном слое сверхпроводящего тела (порядка  $10^{-5}$  см)  $B \neq 0$ . Внешнее сильное магнитное поле разрушает состояние сверхпроводимости. Такое разрушение сверхпроводящего состояния происходит также за счет магнитного поля, вызванного электрическим током, текущим в самом сверхпроводящем теле.

Явление перехода из сверхпроводящего состояния в обычное и обратно было подробно изучено как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения рядом советских физиков (Л. Д. Ландау, А. И. Шальников и др.). А. И. Шальников обнаружил, что в веществе при переходе из сверхпроводящего в обычное состояние образуются отдельные сверхпроводящие слои, чередующиеся с обычными слоями, имеющими конечную проводимость.

Несмотря на многочисленные теоретические исследования, до самого последнего времени полной теории сверхпроводимости создать не удавалось. Лишь в 1956 г. американским физиком Купером было показано, что решающую роль при переходе в сверхпроводящее состояние играет процесс образования пар электронов с параллельно расположенными спиновыми моментами (см. § 202). После этого удалось в основном объяснить сверхпроводимость и сопутст-

вующие ей явления. При сверхпроводимости электроны внутри вещества обладают как бы сверхтекучестью. В наиболее полном виде теория сверхпроводимости развита на указанной основе советским ученым Н. Н. Боголюбовым и его сотрудниками.

Наряду с металлами, являющимися очень хорошими проводниками ( $\sigma$  порядка  $10^4$ — $10^8$   $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ), существуют тела с гораздо меньшей проводимостью ( $\sigma$  порядка  $10$ — $10^{-10}$   $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ), например селен, закись меди ( $\text{Cu}_2\text{O}$ ), многие минералы, неметаллические элементы четвертой, пятой и шестой групп таблицы Менделеева, неорганические соединения с кислородом и серой, некоторые сплавы металлов, некоторые органические красители и др. Эти тела носят название *полупроводников* (см. § 171).

Особые явления обнаруживаются в месте соприкосновения некоторых полупроводников с металлами: образуется *запирающий слой*, способный пропускать ток лишь в одном направлении. Так, в случае закиси меди электрический ток при той же разности потенциалов в несколько тысяч раз больше, когда он идет от металла к закиси меди, чем в обратном направлении (см. § 237).

**§ 155. Вектор плотности тока.** Сила тока  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  представляет со-

бою величину *скалярную*: она определяется лишь величиной заряда, перенесенного через данную площадку в единицу времени, независимо от того, в каком направлении и под каким углом к площадке движутся частицы, несущие заряды. Очевидно, такая характеристика электрического тока будет неполной; во многих случаях требуется рассмотрение *направления*, в котором движутся заряженные частицы. Для учета направления переноса зарядов вводится в рассмотрение *вектор плотности тока*.

Ток может быть обусловлен движением как положительно, так и отрицательно заряженных частиц. Опыт показывает, что движения в противоположных направлениях частиц, противоположных по знаку, создают во всех отношениях эквивалентные токи. Поэтому можно ограничиться рассмотрением движения частиц какого-либо одного знака, например положительных. Тогда движение отрицательных частиц можно условно заменить движением положительных частиц в противоположном направлении.

Рассмотрим первоначально однородный поток положительно заряженных частиц, т. е. такой поток, в котором все частицы движутся в одном направлении с одинаковыми скоростями, причем распределены эти частицы в пространстве с постоянной плотностью.

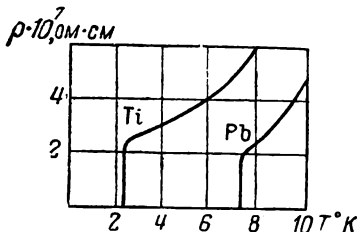


Рис. 82. Падение удельного сопротивления до нуля при переходе в сверхпроводящее состояние.

Выделим мысленно внутри проводника, где движутся эти заряды, площадку  $\Delta S_0$ , перпендикулярную к направлению движения зарядов. Будем подразумевать под *вектором плотности тока*  $\mathbf{i}$  вектор, совпадающий по направлению с направлением движения положительных зарядов и численно равный

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S_0}, \quad (1)$$

где  $\Delta Q$  — заряд, перенесенный через площадку  $\Delta S_0$  за время  $\Delta t$ . Таким образом, *вектор плотности тока численно равен заряду, перенесенному в единицу времени через единичную площадку, расположенную нормально к направлению движения зарядов. Направлен вектор плотности тока по скорости движения положительных зарядов.*

Если площадка  $\Delta S$  ориентирована произвольно, то надо взять ее проекцию на плоскость, перпендикулярную к направлению движения зарядов, тогда:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S \cos \alpha}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением движения положительных зарядов и нормалью к площадке  $\Delta S$ .

В случае неравномерного потока заряженных частиц берем столь малую площадку  $\Delta S$  и столь малый промежуток времени  $\Delta t$ , чтобы в их пределах поток мог считаться равномерным. Тогда численное значение вектора плотности тока в данном месте проводника и в данный момент времени определяется соотношением:

$$i = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S \cos \alpha}. \quad (2a)$$

Обозначая через  $\Delta I$  малый ток, протекающий через малую площадку  $\Delta S$ , имеем:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

после чего из равенства (2a) получаем:

$$i \cos \alpha = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

Величина  $i \cos \alpha$  представляет собой проекцию вектора плотности тока  $\mathbf{i}$  на нормаль к площадке  $\Delta S$  (рис. 83), откуда:

$$i_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (3)$$

т. е. нормальная составляющая вектора плотности тока численно равна силе тока, протекающего через единичную площадку.

Понятие о плотности тока позволяет дать иную формулировку закона Ома, чем приведенная на стр. 120. Как сказано выше, мы условно считаем, что ток создается движением положительных зарядов (на самом деле ток в проводнике создается движением электронов). Свободные заряды движутся в проводнике в направлении сил электрического поля. Следовательно, вектор плотности тока  $\mathbf{i}$  направлен в сторону падения потенциала, т. е. туда, куда направлен вектор напряженности  $\mathbf{E}$ .

Возьмем цилиндрический проводник, по которому течет ток  $\Delta I$ . Пусть заряды в этом проводнике движутся перпендикулярно к его нормальным сечениям  $\Delta S$  (рис. 84). Рассмотрим два сечения этого проводника, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\Delta l$ . Пусть разность потенциалов между этими сечениями равна  $V_1 - V_2 = -\Delta V$ . Сопротивление этого участка проводника равно  $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta S}$ , где  $\sigma$  — удельная проводимость

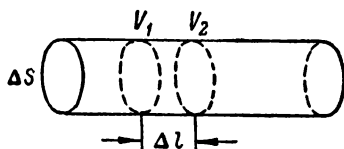


Рис. 84. К выводу выражения для плотности тока.

материала, из которого сделан проводник. Применяя к рассматриваемому участку проводника закон Ома, получим:

$$\Delta I = \frac{V_1 - V_2}{R} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta l} \Delta S,$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta l}, \quad (4)$$

но  $\Delta I / \Delta S$  равно плотности тока  $i$ , а величина  $-\Delta V / \Delta l$ , дающая падение потенциала на единицу длины, равна напряженности поля  $E$  внутри проводника. После этого равенство (4) примет вид:

$$i = \sigma E.$$

Мы уже указывали, что вектор плотности тока  $\mathbf{i}$  направлен так же, как вектор напряженности  $\mathbf{E}$ , поэтому последнее равенство можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5)$$

Это соотношение представляет собой закон Ома для плотности тока. Оно показывает, что плотность тока  $\mathbf{i}$  пропорциональна напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и направлена в сторону напряженности. В проводнике, по которому течет ток, напряженность поля отлична от нуля. Обратно, если внутри проводника  $\mathbf{E} = 0$ , то

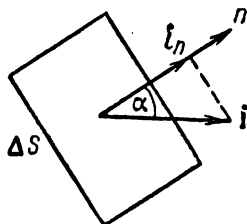


Рис. 83. К определению нормальной составляющей плотности тока  $i_n$ .



в проводнике отсутствуют токи: при  $E=0$  мы имеем дело с явлением электростатическим.

**§ 156. Сохранение зарядов. Замкнутость стационарных токов.** В предыдущем параграфе мы получили выражение, связывающее силу тока  $\Delta I$ , протекающего через малую площадку  $\Delta S$  [формула (3) § 155], с плотностью тока:

$$i_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

Отсюда получаем, что сила тока  $\Delta I$ , протекающего через малую площадку  $\Delta S$ , может быть представлена в виде:

$$\Delta I = i_n \Delta S. \quad (1)$$

В случае тока, протекающего через конечную площадь  $S$ , разобьем эту площадь на элементарные площадки  $\Delta S$ . Тогда сила тока  $I$ , протекающего через всю площадь  $S$ , выразится суммой токов  $\Delta I$ :

$$I = \sum i_n \Delta S. \quad (2)$$

Таким образом, сила тока представляет собой поток вектора плотности тока.

Определим силу тока  $I$ , протекающего через мысленно выделенную в проводнике замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем. Будем считать положительными нормали, *внешние* по отношению к этому объему (рис. 85). Тогда значения углов  $\alpha$  могут быть как меньше, так и больше  $\pi/2$ , и элементарные силы токов  $\Delta I$ , по (1), могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительное значение элементарного тока  $\Delta I$  означает, что через данную площадку  $\Delta S$  *выносятся* положительные заряды из объема, ограниченного поверхностью  $S$ . Отрицательное значение элементарного тока  $\Delta I$  означает, что через данную площадку  $\Delta S$  *вносятся* положительные заряды внутрь того же объема. Количество внесенных зарядов будет равно количеству вынесенных из данного объема, если сумма всех элементарных токов через поверхность  $S$ , ограничивающую данный объем, равна нулю. Если полная сила тока  $I$  через замкнутую поверхность  $S$  отлична от нуля, то это значит, что количества внесенных и вынесенных зарядов не равны друг другу, т. е. общая величина зарядов, заключенных внутри объема  $S$ , меняется. Положительное значение тока означает убыль зарядов, а отрицательное — возрастание зарядов внутри объема. Если обозначим через  $-\Delta Q$  убыль зарядов за время  $\Delta t$  внутри объема, ограниченного поверхностью  $S$ , то получим

$$I \Delta t = \sum i_n \Delta S \Delta t = -\Delta Q. \quad (3)$$

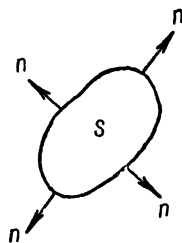


Рис. 85. Внешние нормали к замкнутой поверхности  $S$ .

Это соотношение показывает, что изменение общего заряда  $\Delta Q$  внутри замкнутого объема происходит за счет внесения зарядов извне или вынесения их наружу. Таким образом, соотношение (3) имеет смысл *закона сохранения зарядов*.

Из соотношения (3) для тока  $I$ , текущего через замкнутую поверхность, получаем

$$I = \sum i_n \Delta S = - \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (3a)$$

Введем в рассмотрение *линии тока*. Под линией тока подразумевается линия, касательная к каждой точке которой совпадает с направлением вектора плотности тока в этой точке.

Выражение  $\sum i_n \Delta S$  представляет собой поток линий тока через замкнутую поверхность  $S$ . Равенство (3a) показывает, что полный поток линий тока через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, только если меняется заряд внутри объема, ограниченного данной поверхностью. Если полный заряд внутри данной поверхности неизменен, то линии тока лишь пересекают поверхность. Кончаться линии тока могут лишь там, где происходит накопление или убыль зарядов. *При постоянстве зарядов в некоторой области линии тока в ней непрерывны и либо замкнуты, либо уходят в бесконечность*. Пространство, ограниченное линией тока, назовем *трубкой тока*. По самому определению понятия трубки тока ясно, что *сила тока через любое сечение трубки одна и та же*.

Понятие о линиях тока, как видно из сказанного, позволяет интерпретировать равенство (3a) аналогично теореме Остроградского — Гаусса в электростатике (см. § 126). В электростатике по теореме Остроградского — Гаусса поток линий напряженности через замкнутую поверхность равен сумме зарядов (умноженных на  $4\pi$ ), находящихся внутри поверхности. По равенству (3a) поток линий тока через замкнутую поверхность равен скорости убыли зарядов внутри поверхности.

Примером незамкнутых линий тока являются линии тока, возникающие при разрядке конденсатора. Разряжающиеся обкладки конденсатора являются местами концов линий тока, так как их заряд во время разряда конденсатора изменяется. Процесс разрядки конденсатора нестационарен: сила тока меняется со временем, спадая в конечном счете до нуля. Так как всякие заряды будут в конечном счете исчерпаны, то ток с незамкнутыми линиями тока не может поддерживаться неопределенно долгое время. *Стационарному, т. е. постоянному, неограниченно долго текущему току всегда соответствуют замкнутые линии тока*. Так, в случае постоянного тока, поддерживаемого с помощью гальванического элемента, линии тока замыкаются через внутреннюю часть цепи, образуя замкнутые кривые.

Пользуясь обозначениями дифференциального исчисления, мы перепишем равенство (1):

$$dI = i_n dS. \quad (1a)$$

Заменяя, далее, в равенстве (2) сумму интегралом, распространенным на данную поверхность  $S$ , получим

$$I = \int_S i_n dS. \quad (2a)$$

Наконец, заменяя в равенстве (3a)  $\Delta t$  бесконечно малым интервалом времени  $dt$ , получим;

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \quad (3b)$$

Подставляя сюда вместо  $I$  его значение по (2a), запишем закон сохранения электрических зарядов в следующем виде:

$$\int_S i_n dS = -\frac{dQ}{dt}. \quad (4)$$

Закон сохранения зарядов мы можем записать еще в другом виде. Для этого поделим правую и левую части равенства (4) на объем  $V$ , охватываемый замкнутой поверхностью  $S$ :

$$\frac{1}{V} \int_S i_n dS = -\frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{V} \right). \quad (5)$$

Уменьшая до нуля объем  $V$ , получим, что  $Q/V$  даст плотность  $\rho$  зарядов в данном месте. Таким образом, в первой части равенства (5) будет стоять  $-\frac{d\rho}{dt}$ . Слева мы получим выражение

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S i_n dS}{V}.$$

Как известно из векторного исчисления, этот предел равен дивергенции вектора  $\mathbf{i}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S i_n dS}{V}.$$

Следовательно, равенство (5) примет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{d\rho}{dt}, \quad (6)$$

что представляет собой закон сохранения электрических зарядов, записанный в дифференциальной форме. Если  $\rho$  постоянно во времени, то  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  и (6) принимает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0. \quad (6a)$$

**§ 157. Закон Ленца — Джоуля.** Опыты показывают, что прохождение электрического тока по проводнику сопровождается выделением в проводнике тепла. Это выделение тепла связано с переносом зарядов и, следовательно, с работой электрических сил, которая идет на этот перенос.

Возьмем сечение проводника, через которое протекает заряд  $Q$  за время  $t$ :  $Q = It$ . Этот заряд, перемещаясь по проводнику, за время  $t$  проходит некоторую разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , причем электрические силы совершают работу, равную:

$$A = It(V_1 - V_2). \quad (1)$$

Работа сил поля не вызывает увеличения тока и, следовательно, идет на нагревание проводника. Пользуясь законом Ома, выражение для работы перепишем в виде:

$$A = I^2 R t, \quad (1a)$$

где  $R$  — сопротивление участка с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$ .

Подсчитаем численное значение выделяющегося в проводнике тепла. Предположим, что сила тока  $I$  выражена в амперах, время  $t$  — в секундах, разность потенциалов  $V_1 - V_2$  — в вольтах; при этом легко видеть, что формула (1) дает работу в джоулях. В самом деле, при прохождении тока в 1 а в течение 1 сек переносится количество электричества, равное кулону, т. е.  $3 \cdot 10^9$  CGSE-единиц; если это количество электричества переносится между точками с разностью потенциалов в 1 в, равной  $\frac{1}{300}$  CGSE-единицы потенциала, то совершается работа:

$$A_0 = 3 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{300} \text{ эрг} = 10^7 \text{ эрг} = 1 \text{ дж.}$$

Вспомня, что джоуль эквивалентен 0,24 кал, для количества тепла в калориях, выделяющегося за  $t$  секунд в проводнике, на концах которого разность потенциалов равна  $V_1 - V_2$  вольт и по которому течет ток силой в  $I$  ампер, получаем выражение:

$$Q = 0,24 It (V_1 - V_2). \quad (2)$$

Это выражение с помощью закона Ома может быть также переписано в следующих видах:

$$Q = 0,24 I^2 R t, \quad (2a)$$

$$Q = 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t. \quad (2б)$$

При этом здесь сопротивление  $R$  должно быть выражено в омах.

Соотношение (2а) было экспериментально установлено одновременно профессором Петербургского университета Э. Х. Ленцом и Джоулем. Оно носит название *закона Ленца — Джоуля*. По этому закону, *количество тепла  $Q$ , выделяемое в участке проводника при прохождении тока, пропорционально времени прохождения тока  $t$ , сопротивлению участка  $R$  и квадрату силы тока  $I^2$ .*

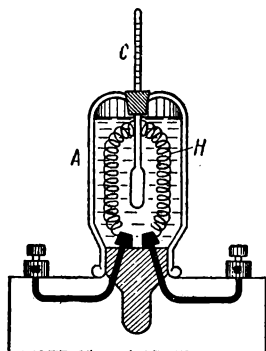


Рис. 86. Прибор Ленца для измерения количества тепла, выделяемого при прохождении тока по проводу.

На рис. 86 представлен прибор, которым пользовался Ленц. Стекланный сосуд  $A$ , наполненный спиртом, служил калориметром. Ток пропускался по спирали  $H$  с известным сопротивлением. Нагревание спирта за определенное время  $t$  измерялось термометром  $C$ .

Заметим, что коэффициент 0,24 в законе Ленца — Джоуля вводится при специальном выборе единиц: количество тепла измеряется в калориях, сила тока в амперах, сопротивление в омах. Если мы будем выражать выделенное количество тепла в джоулях, силу тока в амперах, время в секундах, а сопротивление в омах, то численный коэффициент 0,24 заменится в формулах (2), (2а) и (2б) единицей, и мы получим для закона Ленца — Джоуля:

$$Q = I^2 R t. \quad (3)$$

Преобразуем закон Ленца — Джоуля к другому виду, воспользовавшись представлениями о плотности тока  $i$  и плотности тепловой мощности  $w$ . Под плотностью тепловой мощности  $w$  подразумевается величина, измеряемая количеством тепла, выделяемым в единицу времени в единице объема проводника. Возьмем цилиндрический проводник длиной  $\Delta l$  поперечного сечения  $S$ ; тогда

$$w = \frac{Q}{S \cdot \Delta l \cdot t};$$

подставляя сюда вместо  $Q$  его значение по (3), получим:

$$w = \frac{I^2 R}{S \cdot \Delta l},$$

или, так как  $R = \rho \frac{\Delta l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{S}$  и  $\frac{I}{S} = i$ , то

$$w = \frac{1}{\sigma} i^2.$$

Если ввести сюда вместо плотности тока  $i$  ее выражение через проводимость и напряженность электрического поля по формуле (§ 155, по которой  $i = \sigma E$ , то получим:

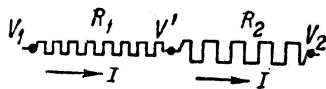
$$w = \sigma E^2, \quad (4)$$

т. е. плотность тепловой мощности пропорциональна квадрату напряженности электрического поля и проводимости проводника.

Чем меньше удельное сопротивление проводника, тем меньшее количество тепла (при том же токе) в нем выделяется. При состоянии *сверхпроводимости*, когда удельное сопротивление становится неизмеримо малым, в проводнике при прохождении тока не выделяется сколько-нибудь заметного количества тепла. Так как при этом энергия тока никуда не тратится, то раз возбужденный в замкнутом сверхпроводнике ток поддерживается в нем неопределенно долго без затраты энергии извне.

Выделение тепла в проводниках играет большую роль в технике. Действие заводских электрических печей и всевозможных нагревательных приборов основано на явлении Ленца — Джоуля. Нагревание проводников током используется также для накала нитей в электрических лампочках. Первые попытки получить свет за счет нагревания проводников током принадлежат еще самому Ленцу. Однако только в 1874 г. русский инженер А. Н. Лодыгин впервые сконструировал лампы, достаточно совершенные с технической точки зрения, чтобы их можно было использовать для целей освещения. В 1875 г. лампами А. Н. Лодыгина освещались места работ при строительстве Литейного моста через Неву в Петербурге; это — первое практическое использование электрических ламп накаливания.

В ряде же технических задач выделение тепла в проводниках приносит вред. К числу таких вредных потерь энергии на выделение тепла относятся потери в проводах, передающих электроэнергию от места ее получения к потребителю.



Разберем несколько примеров на расчет сопротивлений и количества тепла, выделяемого в проводниках.

**Пример 1.** Определим полное сопротивление двух последовательно соединенных проводников (рис. 87), сопротивления которых в отдельности равны  $R_1$  и  $R_2$ , и вычислим отношение теплот  $Q_1/Q_2$ , выделяющихся при этом в каждом из проводников.

**Решение.** Сила тока  $I$  при последовательном соединении проводников будет в обоих проводниках одна и та же. Применим закон Ома к каждому проводнику в отдельности:

$$IR_1 = V_1 - V', \quad IR_2 = V' - V_2.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$I(R_1 + R_2) = V_1 - V_2,$$

Рис. 87. Последовательное соединение проводников.

откуда

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R}, \quad \text{где } R = R_1 + R_2 \quad (5)$$

представляет собой полное сопротивление обоих проводников. Таким образом полное сопротивление при последовательном соединении проводников равно сумме отдельных сопротивлений.

Количества тепла  $Q_1$  и  $Q_2$ , выделяющиеся в каждом из проводников, равны:

$$Q_1 = 0,24I^2R_1t, \quad Q_2 = 0,24I^2R_2t, \quad \text{откуда } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

т. е. количества тепла, выделяющиеся в проводниках при последовательном соединении, относятся как сопротивления соединенных проводников. В том

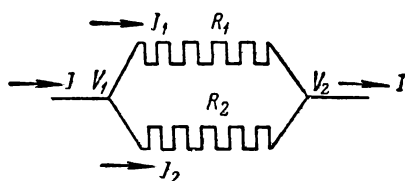


Рис. 88. Параллельное соединение проводников.

проводнике, который обладает большим сопротивлением, при последовательном соединении выделяется больше тепла.

Пример 2. Определим сопротивление параллельно соединенных проводников  $R_1$  и  $R_2$  и вычислим отношение теплот  $Q_1/Q_2$ , выделяющихся в каждом из этих проводников (рис. 88).

Разность потенциалов на концах параллельно соединенных проводников одинакова. Применим закон Ома

к каждому из проводников в отдельности, обозначив в них силы тока через  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, \quad \text{откуда } \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

т. е. силы токов в параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональны сопротивлениям проводников. Полная сила тока, идущего в обоих проводниках, равна:

$$I = I_1 + I_2 = (V_1 - V_2) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

где  $R$  обозначает результирующее сопротивление обоих проводников. Отсюда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (6)$$

т. е. при параллельном соединении проводников обратная величина результирующего сопротивления равна сумме обратных величин сопротивлений соединенных проводников.

Для подсчета количества выделяющегося тепла следует воспользоваться формулой (26) для закона Ленца — Джоуля, так как разности потенциалов на концах обоих проводников одинаковы:

$$Q_1 = 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_1} t, \quad Q_2 = 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_2} t,$$

откуда

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

т. е. при параллельном соединении проводников количества выделившегося в проводниках тепла обратно пропорциональны сопротивлениям проводников: в проводнике с меньшим сопротивлением выделяется больше тепла.

Покажем, что полное количество тепла, являющееся суммой количеств тепла, выделившихся в обоих проводниках, может быть рассчитано по формуле (26), если в нее подставить результирующее сопротивление, определенное по формуле (6); действительно:

$$\begin{aligned} Q = Q_1 + Q_2 &= 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_1} t + 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_2} t = \\ &= 0,24 (V_1 - V_2)^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t, \end{aligned}$$

откуда по (6):

$$Q = 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t.$$

**§ 158. Измерение силы тока и разности потенциалов.** Сила тока  $I$  может быть определена по количеству перенесенного заряда  $\Delta Q$  и времени  $\Delta t$ , в течение которого этот заряд переносился по данному проводнику, так как по формуле (1) § 153 мы имеем соотношение:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Однако практически такое измерение затруднительно. Поэтому силу тока измеряют с помощью специальных приборов, построенных на других принципах. В дальнейшем (см. § 213) мы опишем весьма распространенный тип электромагнитных приборов, сейчас же рассмотрим прибор, основанный на тепловом действии тока.

Схема „теплого“ измерительного прибора представлена на рис. 89.

Измеряемый ток подводится к зажимам  $A$  и  $B$  и пропускается через тонкую проволочку  $ab$ . В результате выделяющегося в этой проволочке, по закону Ленца — Джоуля, тепла проволочка  $ab$  нагревается и благодаря этому удлиняется. От середины проволочки  $ab$  отходит нить  $cd$ , соединенная со второй нитью  $fe$ , охватывающей блок  $Q$  и натягиваемой пружиной  $T$ . На оси блока  $Q$  насажена стрелка  $S$ . При удлинении проволочки  $ab$  стрелка  $S$  поворачивается (рис. 89б). Чем больше сила проходящего по проволочке  $ab$  тока, тем сильнее она удлиняется и тем больше отклоняется стрелка  $S$ .

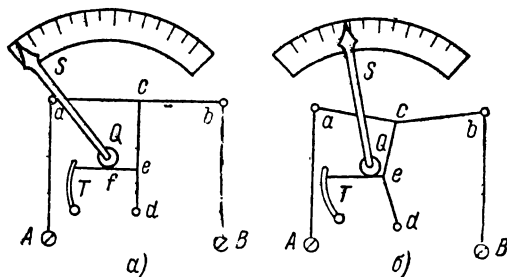


Рис. 89. Схема теплового измерительного прибора.



Таким образом, проградуировав соответственно шкалу, можно измерять силу тока  $I$ , протекающего через прибор.

Однако непосредственное включение указанного прибора в цепь для измерения протекающего в ней тока невозможно, так как проволоку  $ab$  приходится брать весьма тонкой, при этом сопротивление ее оказывается значительным. Поэтому включение такого прибора в цепь поведет, как правило, к значительному изменению общего сопротивления цепи, а следовательно, и к изменению силы тока. Измеренная сила тока не будет равняться той, которая протекала по цепи до включения в нее измерительного прибора. Кроме того, прибор не годится для измерения значительных сил токов, так как в этих случаях проволока  $ab$  перегорит. Поэтому параллельно измерительному прибору присоединяют проводник, сопротивление которого подбирают так, чтобы ток, проходящий через прибор, составлял определенную долю неразветвленного тока в цепи.

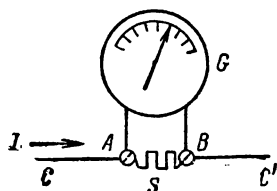


Рис. 90. Включение шунта  $S$ .

Предположим, что необходимо измерить силу тока  $I$ , протекающего по проводнику  $CC'$ . Тогда измерительный прибор  $G$  присоединяется *последовательно* к проводнику  $CC'$ . Параллельно зажимам  $AB$  измерительного прибора присоединяется известное сопротивление  $S$ , называемое *шунтом* (рис. 90). Пусть сопротивление самого прибора будет  $R_g$ , а сопротивление шунта  $R_s$ . Обозначим силу тока, проходящего через прибор,  $I_g$ , а проходящего через шунт,  $I_s$ . Тогда, во-первых, сумма сил токов  $I_g$  и  $I_s$  должна равняться силе тока  $I$ , протекающего по проводнику  $CC'$ ; во-вторых, силы токов  $I_g$  и  $I_s$  должны быть обратно пропорциональны сопротивлениям  $R_g$  и  $R_s$  (см. стр. 134), т. е.

$$I_g + I_s = I, \quad \frac{I_g}{I_s} = \frac{R_s}{R_g}.$$

Из двух этих равенств имеем:

$$I_g = I \frac{R_s}{R_s + R_g}. \quad (1)$$

Из формулы (1) получаем, что чем меньше сопротивление шунта  $R_s$ , тем меньшая доля от общего тока  $I$  будет протекать через измерительный прибор. Для того чтобы силы тока  $I_g$  в приборе  $G$  составляла  $1/n$  долю от силы тока  $I$ , надо положить, как следует из равенства (1):

$$R_s = \frac{R_g}{n-1}. \quad (2)$$

Например, беря шунт с сопротивлением в  $1/9$  сопротивления самого измерительного прибора, получим, что через измерительный

прибор пойдет  $\frac{1}{100}$  доля от тока в цепи. Снабдив тепловой измерительный прибор шунтом и проградуировав его в амперах, получают так называемый *амперметр*, т. е. прибор для измерения силы тока в амперах. Благодаря малому сопротивлению шунта общее сопротивление амперметра мало, в результате чего включение амперметра в цепь заметно не меняет в ней силы тока. Шкала амперметра обычно градуируется так, что она дает в амперах силу полного тока  $I$ , протекающего через амперметр (т. е. силу суммы токов, протекающих через шунт и собственно измерительный прибор). По большей части шунт вдевается внутрь коробки прибора. Иногда амперметры снабжаются набором шунтов, пользуясь которыми можно менять чувствительность прибора.

Тот же тепловой измерительный прибор может быть использован для измерения разности потенциалов. Предположим, что нам необходимо измерить разность потенциалов на концах проводника  $CC'$ , по которому течет ток  $I$ . Для этого присоединим измерительный прибор  $G$  параллельно к проводнику  $CC'$  (рис. 91).

Ток  $I_g$ , который потечет через измерительный прибор  $G$ , будет равен:

$$I_g = \frac{V_1 - V_2}{R_g},$$

где  $V_1 - V_2$  — разность потенциалов на концах проводника  $CC'$ , а  $R_g$  — сопротивление измерительного прибора  $G$ .

Отсюда:

$$V_1 - V_2 = I_g R_g.$$

Так как сопротивление измерительного прибора  $R_g$  есть величина заданная, то сила тока  $I_g$  непосредственно определяет разность потенциалов  $V_1 - V_2$ . Однако, для того чтобы включение измерительного прибора заметно не изменило разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , его собственное сопротивление должно быть велико по сравнению с сопротивлением проводника  $CC'$ . Так как сопротивление самой проволоки  $ab$  для этого недостаточно, то к ней последовательно присоединяют большое сопротивление  $R'_g$  (рис. 91). Обычно это сопротивление вдевается внутрь коробки прибора, а шкала прибора градуируется в вольтах. В таком виде прибор называется *вольтметром*.

Резюмируя, мы можем сказать: один и тот же тепловой измерительный прибор может быть использован и как амперметр и как вольтметр; в первом случае параллельно нагреваемой проволочке присоединяется шунт, во втором случае — последовательно к нагреваемой проволочке присоединяется большое сопротивление. Амперметр включается последовательно с тем участком цепи, в котором

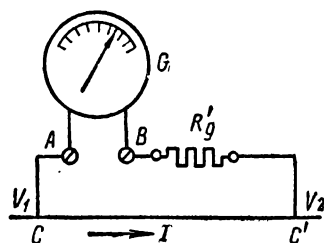


Рис. 91. Включение последовательно с измерительным прибором  $G$  сопротивления  $R'_g$  для измерения разности потенциалов.

измеряется сила тока; вольтметр присоединяется параллельно тому участку цепи, на концах которого измеряется разность потенциалов.

**Пример 1.** Сопротивление нагреваемой проволоочки  $ab$  в тепловом измерительном приборе  $R_g = 1$  ом. Шкала прибора имеет 50 делений, одно деление соответствует  $0,01$  а. Требуется подобрать такой шунт, чтобы прибор мог употребляться в качестве амперметра для измерения сил токов до 15 а.

**Решение.** Вся шкала измерительного прибора по условию соответствует  $0,5$  а. Следовательно, шунт должен уменьшить силу тока, проходящего через проволочку  $ab$ , в следующее число раз:

$$n = \frac{I}{I_g} = \frac{15}{0,5} = 30.$$

Отсюда по формуле (2) находим искомое сопротивление шунта:

$$R_s = \frac{R_g}{n-1} = \frac{1}{29} \text{ ом} = 0,0345 \text{ ом}.$$

Общее сопротивление  $R_A$  амперметра определяется соотношением (см. стр. 134):

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_g},$$

откуда

$$R_A = \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = \frac{1 \cdot 0,0345}{1 + 0,0345} \text{ ом} \cong 0,0334 \text{ ом}.$$

Предположим, что этим амперметром измеряется ток, текущий по проводу с сопротивлением в 40 ом под влиянием разности потенциалов в 110 в. Легко убедиться, что в этом случае включение в цепь амперметра заметно не изменит в ней силу тока. В самом деле, по закону Ома, сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{110}{40} \text{ а} = 2,750 \text{ а}.$$

При включении в цепь амперметра общее сопротивление возрастет на 0,0334 ом, т. е. станет равным  $R_1 = 40,0334$  ом, а следовательно, сила тока окажется равной:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{110}{40,0334} \text{ а} \cong 2,748 \text{ а}.$$

Эту силу тока и укажет амперметр; как видно, практически она мало отличается от первоначальной силы тока в 2,75 а.

**Пример 2.** Нагревательный измерительный прибор с данными, приведенными в примере 1, желательно использовать как вольтметр, вся шкала которого соответствовала бы 500 в. Какое добавочное сопротивление  $R'_g$  для этого надо присоединить последовательно к нагреваемой проволочке  $ab$ ?

**Решение.** По условию вся шкала измерительного прибора соответствует 0,5 а. Чтобы при этом на зажимах прибора разность потенциалов равнялась 500 в, полное сопротивление прибора  $R_g + R'_g$  должно равняться:

$$R_g + R'_g = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{500}{0,5} \text{ ом} = 1000 \text{ ом}.$$

Так как  $R_g = 1$  ом, то искомое добавочное сопротивление  $R'_g = 999$  ом.

Предположим, что этим прибором измеряется разность потенциалов на концах проводника  $CC'$  (см. рис. 91), сопротивление  $R = 4$  ом, по которому

течет ток  $I = 50$  а. Легко убедиться, что в этом случае подключение вольтметра заметно не изменит разности потенциалов на концах проводника  $CC'$ . В самом деле, по закону Ома разность потенциалов  $V_1 - V_2$  на концах проводника  $CC'$  равна:

$$V_1 - V_2 = IR = 4 \cdot 50 = 200 \text{ в.}$$

При включении параллельно проводнику  $CC'$  вольтметра с сопротивлением в 1000 ом общее сопротивление разветвленной цепи между концами проводника  $CC'$  станет равным:

$$R_1 = \frac{4 \cdot 1000}{4 + 1000} \text{ ом} \cong 3,984 \text{ ом.}$$

Это уменьшение сопротивления должно повести к некоторому возрастанию силы тока, однако для оценки максимальной возможной погрешности, вносимой включением вольтметра, мы можем считать, что сила тока осталась по-прежнему равной 50 а. Тогда разность потенциалов на концах проводника  $CC'$  будет:

$$V'_1 - V'_2 = I \cdot R_1 = 50 \cdot 3,984 \text{ в} = 199,2 \text{ в.}$$

Эту разность потенциалов и укажет вольтметр. Как видно, она отличается от первоначальной весьма мало.

**§ 159. Сопротивления и их измерение.** Для изменения сопротивления цепи употребляются приборы, носящие название *реостатов*.

В лабораторной практике для небольших токов употребляются реостаты с движком (рис. 92). Такой реостат состоит из проволоки, намотанной на фарфоровый цилиндр. Передвигая движок, можно менять число витков проволоки, введенных в цепь, а тем самым менять и величину вводимого сопротивления.

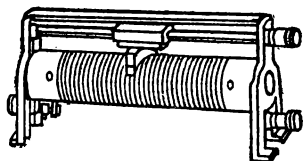


Рис. 92. Реостат с движком.

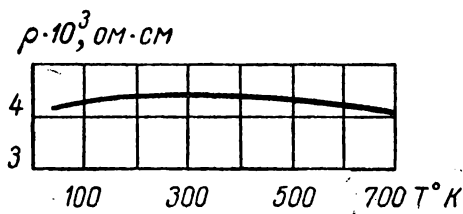


Рис. 93. Зависимость удельного сопротивления  $\rho$  манганина от абсолютной температуры.

В качестве материала для проволоки избираются сплавы (константан, манганин, нихром и др.), обладающие достаточно высоким удельным сопротивлением и малым температурным коэффициентом, т. е. малой зависимостью сопротивления от температуры. На рис. 93 представлена зависимость  $\rho$  от  $T$  для манганина. Слабая зависимость сопротивления от температуры нужна для того, чтобы

по мере разогревания реостата под влиянием проходящего тока, его сопротивление заметно не менялось. Такого рода реостаты весьма удобны, но их конструкция не обеспечивает достаточно хорошей теплоотдачи, что ведет к сильному нагреванию и к невозможности пользоваться ими в случае сильных токов.

Для больших токов употребляются реостаты из толстых проволок, свитых в спирали, или из лент, натягиваемых на раму (рис. 94). Скользящий контакт позволяет вводить в цепь то или иное число отдельных звеньев реостата.

Сопротивление данного проводника может быть легко измерено с помощью амперметра и вольтметра. Последовательно с измеряемым проводником  $MN$  (рис. 95) включается амперметр  $A$ , а параллельно к проводнику — вольтметр  $V$ . Обозначим искомое сопротивление проводника  $MN$  через  $R_x$ , а собственное сопротивление вольтметра — через  $R_g$ . Пусть амперметр показывает силу тока  $I$ , а вольтметр — разность потенциалов  $V_1 - V_2$ . Ток, измеряемый амперметром, в точке  $M$  разветвляется: часть его  $I_x$  идет через проводник  $MN$ , а часть  $I_g$  — через вольтметр  $V$ . Если пренебречь сопротивлением проводов, с помощью которых присоединен вольтметр, то

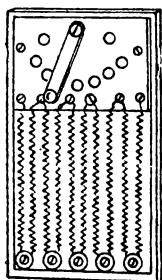


Рис. 94. Реостат со скользящим контактом.

$$I_g = \frac{V_1 - V_2}{R_g},$$

откуда ток  $I_x$ , идущий по проводнику  $MN$ , оказывается равным:

$$I_x = I - I_g = I - \frac{V_1 - V_2}{R_g}.$$

Если сопротивление вольтметра  $R_g$  много больше измеряемого сопротивления  $R_x$ , то ток  $I_g$ , текущий через вольтметр, мал по сравнению с током  $I$ , и тогда приближенно:

$$I_x = I,$$

откуда по закону Ома:

$$R_x = \frac{V_1 - V_2}{I},$$

т. е.  $R_x$  непосредственно определяется по измерениям вольтметра и амперметра. Этот метод, как видно, обязательно требует выбора такого вольтметра, сопротивление которого  $R_g$  велико по сравнению с измеряемым сопротивлением  $R_x$ . Для более точных измерений пользуются иными методами, сводящимися к сравнению измеряемого сопротивления со стандартными. Один из таких методов описан ниже (см. § 167).

Стандартные сопротивления изготавливаются обычно в виде так называемых *магазинов сопротивлений*; внешний вид магазина сопротивлений представлен на рис. 96. Магазин состоит из ряда катушек. На каждую катушку намотан кусок провода с точно известным сопротивлением; концы провода припаиваются к толстым медным пла-

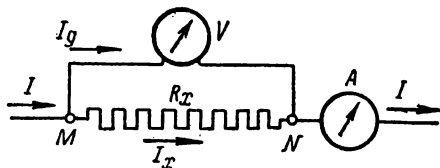


Рис. 95. Включение амперметра  $A$  и вольтметра  $V$  для измерения сопротивления  $R_x$ .

стинам (рис. 97), расположенным на изолирующей крышке ящика магазина. Между пластинами оставляется просвет, который можно замкнуть медным коническим штепселем. Когда штепсель не вставлен, ток проходит через катушку, в противном случае сопротивление данной части магазина делается практически равным нулю. Набор катушек с различным сопротивлением составляет подобно набору разновесок так, чтобы комбинацией введенных катушек можно было осуществить различные сопротивления в данном промежутке через каждые, например, 0,1 ома или через каждый ом.

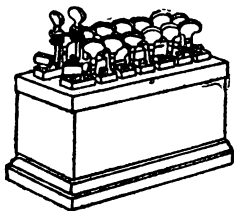


Рис. 96. Магазин сопротивлений.

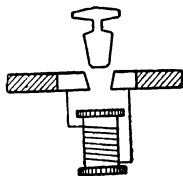


Рис. 97. Деталь устройства магазина сопротивлений.

**§ 160. Свободные электроны в проводниках. Классические представления.** Как мы уже указывали, прохождение тока в металлах не сопровождается какими-либо изменениями химического состава проводника. Отсюда следует, что электропроводность металла не связана с перемещением атомов металла, а определяется движением электронов. Чтобы объяснить электронный характер проводимости металлов, приходится допустить, что атомы в металле, по крайней мере частично, диссоциированы на электроны и положительные ионы, в результате чего в металле имеется большое число свободных электронов. Эти электроны могут свободно перемещаться в кристаллической решетке, образованной ионами металла (см. т. I, § 87). Свободные электроны в металле совершают беспорядочное тепловое движение. Если же имеется внешнее электрическое поле, то электроны увлекаются полем в определенном направлении, и их перемещение образует электрический ток в металле.

Гипотеза о возможности свободного перемещения электронов в металле подтверждается рассмотрением энергии связи между электронами и положительными ионами, расположенными по узлам кристаллической решетки металла. Рассмотрим сперва два соседних положительных иона  $A_1^+$  и  $A_2^+$ , расположенных на некотором неизменном расстоянии друг от друга. Каждый из ионов будем считать за точечный заряд. Потенциальная энергия, соответствующая взаимодействию каждого из ионов с электроном,  $E_p$  равна (ср. со сказанным в т. I, § 61):

$$E_p = -\frac{C}{r},$$

где  $C$  — константа, а  $r$  — расстояние электрона от иона. Значение потенциальной энергии  $E_p$ , соответствующей каждому из ионов, представлено пунктирными кривыми на рис. 98. Ход суммарной

потенциальной энергии, вызванной наличием обоих ионов  $A_1^+$  и  $A_2^+$ , изображен в области между ионами сплошной кривой.

При правильном расположении ионов  $A^+$  в решетке кристалла полная потенциальная энергия, вызванная наличием всех ионов, имеет вид, изображенный на рис. 99. В пространстве между ионами кривая потенциальной энергии проходит плоско и только вблизи ионов дает узкие и глубокие потенциальные ямы. Таким образом, область этих ям мала по сравнению с областью, где кривая потенциальной энергии проходит плоско; поэтому можно считать, что потенциальная энергия

Рис. 98. Потенциальные кривые вблизи положительных зарядов.

внутри металла имеет постоянное значение  $E_{pa}$ . Потенциальная энергия вне металла имеет некоторое значение  $E_{p0}$ , большее чем  $E_{pa}$ . Следовательно, потенциальная энергия внутри металла меньше чем вне, т. е. электрон внутри металла находится в потенциальной яме.

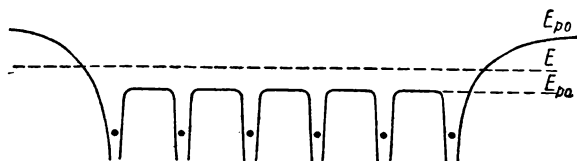


Рис. 99. Потенциальные кривые в кристалле.

Если положить  $E_{p0} = 0$ , то  $E_{pa}$  будет  $< 0$ . Пусть электрон имеет некоторое значение полной энергии  $E$ , удовлетворяющее неравенству  $E_{p0} > E > E_{pa}$ . Такой электрон может свободно двигаться внутри металла, но не может из него вылететь, так как для его удаления из металла надо совершить работу  $A = E_{p0} - E > 0$ .

То, что ток в металле обусловлен перемещением свободных электронов, можно подтвердить непосредственными опытами.

Идея, лежащая в основе этих опытов, такова. Представим себе проводник, который движется с некоторой скоростью. Электроны, входящие в состав проводника, в своем беспорядочном движении непрерывно сталкиваются с остовом решетки металла, вследствие чего они все приобретают составляющую скорости в направлении скорости движения проводника и, следовательно, движутся вместе с ним. Если проводник внезапно затормозить, то электроны, двигаясь внутри кристаллической решетки металла, в течение некоторого времени сохранят по инерции скорость в направлении первоначального движения проводника. В результате произойдет смещение электронов внутри проводника, в проводнике возникнет ток  $I$ , и некоторое количество электричества  $Q$  окажется перенесенным вдоль проводника. Это

количество электричества  $Q$  может быть подсчитано следующим образом. Пусть начальная скорость проводника  $v_0$ . Затем он затормаживается, т. е. ему сообщается ускорение  $-\omega$ . При этом свободные электроны в проводнике в первый момент сохраняют скорость  $v_0$ , т. е. они приобретут *относительно проводника* ускорение  $+\omega$ . Это движение электронов относительно проводника будет таково, как если бы существовала напряженность поля  $E$ , в результате которой на каждый электрон действует сила  $f=eE$ , сообщающая ему ускорение  $\omega$ .

Таким образом, величина этой силы должна быть равной  $f=m\omega$ , где  $m$  — масса электрона, а следовательно, величина напряженности поля  $E$  должна быть:

$$E = \frac{f}{e} = \frac{m}{e} \omega. \quad (1)$$

Если длина проводника  $l$ , то наличие напряженности  $E$  равносильно тому, как если бы на концах проводника имелась разность потенциалов  $V_1 - V_2 = El$ ; подставив сюда вместо  $E$  его значение по (1), получим:

$$V_1 - V_2 = \frac{m}{e} \omega l.$$

Ток  $I$ , обусловленный смещением электронов относительно остова кристаллической решетки проводника, эквивалентен току, возникающему в этом проводнике под влиянием разности потенциалов на его концах  $V_1 - V_2$ ; если сопротивление проводника  $R$ , то сила этого тока  $I$  будет равна:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{m}{e} \cdot \frac{\omega}{R} l. \quad (2)$$

Пусть  $t$  — время, потребное для полного затормаживания проводника, тогда среднее ускорение  $\omega = \frac{v_0}{t}$ , и выражение (2) принимает вид:

$$I = \frac{m}{e} \frac{v_0}{Rt} l,$$

откуда для полного количества электричества  $Q$ , протекшего через проводник при его затормаживании, получим:

$$Q = It = \frac{m}{e} \cdot \frac{v_0 l}{R}. \quad (3)$$

Затормозив быстро двигавшийся проводник, можно по знаку возникающей разности потенциалов определить знак зарядов, образующих ток, а измерив полное количество электричества, протекшее по проводнику, можно по формуле (3) определить отношение величины заряда электрона  $e$  к его массе  $m$ , для которого получаем:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0 l}{QR}. \quad (4)$$



Возникновение в ускоряемом проводнике электрического тока было впервые наблюдеено русскими физиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в 1913—1914 гг. Они приводили катушку с намотанным на ней длинным проводом в быстрые крутильные колебания вокруг ее оси симметрии. К концам провода присоединялся телефон, в котором слышался звук за счет токов, возникавших в катушке.

Из формулы (3) видно, что количество прошедшего электричества пропорционально длине проводника и его первоначальной скорости  $v_0$ . Чтобы получить измеримые количества электричества  $Q$ , надо брать возможно большие скорости и возможно большую длину проводника. Количественные опыты произвели в 1916 г. Стюарт и Толмен, которые быстро затормаживали катушку с намотанным на нее длинным проводом. Катушка замыкалась на баллистический гальванометр (см. § 230), который измерял заряд  $Q$ . Эти опыты показали, что ток в проводниках создают отрицательные заряды; для отношения  $e/m$  получилось значение  $4,8 \cdot 10^{17} \frac{\text{CGSE-ед. заряда}}{g}$ . Это значение  $e/m$  близко к значению, получаемому для электронов другими методами (см. § 218).

В настоящее время для отношения заряда электрона к его массе принимается значение:

$$\frac{e}{m} = 5,273 \cdot 10^{17} \frac{\text{CGSE-ед. заряда}}{g}.$$

Зная  $e/m$  и значение заряда электрона  $e$  [из опытов Милликэна (§ 151)  $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$  CGSE], найдем массу электрона:

$$m = 9,109 \cdot 10^{-28} g,$$

что составляет  $\frac{1}{1838}$  от массы атома водорода.

Как мы указывали в § 31 т. I, масса электрона, как и вообще всякая масса, зависит от скорости, возрастая до бесконечности при стремлении скорости  $v$  движения этой массы к скорости света  $c$ . Приведенные здесь значения массы электрона  $m$  и отношения  $e/m$  относятся к „покоящейся“ массе, т. е. к тому значению массы, которое она имеет при скоростях  $v$ , ничтожно малых по сравнению со скоростью света  $c$ .

**§ 161. Законы Ома и Ленца — Джоуля с точки зрения классической электронной теории.** Представление о свободных электронах в металлах впервые было развито Лоренцом; оно легло в основу классической теории электропроводности металлов. Лоренц считал, что свободные электроны в металле находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, и в этом смысле совокупность электронов в металле представляет собой „электронный газ“. Электроны испытывают столкновения с остовом кристаллической решетки и, следовательно, характеризуются средней длиной свободного пробега, которую

мы обозначим через  $\bar{\lambda}$ . Число свободных электронов  $n_0$  в единице объема металла можно считать порядка числа атомов в единице объема, которое равно  $\frac{N}{\mu} \delta$ , где  $N$  — число Авогадро,  $\mu$  — молекулярный вес металла,  $\delta$  — его плотность. Отсюда:

$$n_0 \cong \frac{\delta}{\mu} N. \quad (1)$$

Исходя из принципов статистики, Лоренц считал, что средняя кинетическая энергия движения электронов равна средней кинетической энергии поступательного движения атомов, которая, как известно, равна  $\frac{3}{2} k T$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура в абсолютной шкале. Отсюда, обозначая среднюю квадратичную скорость беспорядочного движения электрона через  $\bar{u}$ , а его массу — через  $m$ , получим:

$$\frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{3}{2} k T \quad (2)$$

или

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (2a)$$

Как показано в предыдущем параграфе, масса электрона примерно в 1840 раз меньше массы атома водорода, поэтому средняя скорость беспорядочного теплового движения электронов много больше средней скорости теплового движения атомов. Масса атома может быть представлена в виде:  $M = A M_H$ , где  $A$  — атомный вес этого атома, а  $M_H$  — масса атома водорода;<sup>1</sup> отсюда скорость теплового движения этого атома (средняя квадратичная скорость):

$$\bar{u}_A = \sqrt{\frac{3kT}{A M_H}},$$

а следовательно,

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_A} = \sqrt{\frac{A \cdot M_H}{m}} = \sqrt{1838 A} \cong 43 \sqrt{A}.$$

Средние квадратичные скорости газовых молекул (атомов) при комнатных температурах представляют собой величины порядка нескольких сот метров в секунду, т. е. порядка  $10^5$  см/сек, следовательно, скорости теплового движения электронов при комнатных температурах представляют собой величины порядка  $10^7$  см/сек.

Беспорядочное тепловое движение электронов не дает переноса электрического заряда в каком-либо одном направлении и, следова-

<sup>1</sup> В соответствии с химическим определением атомных весов вместо  $M_H$  следует брать  $1/16$  массы атома кислорода, однако такая замена практически не скажется на проводимом расчете.

тельно, не ведет к возникновению электрического тока. Если же внутри металла с помощью какого-либо внешнего источника создано электрическое поле определенного направления, то под влиянием этого поля электроны приобретают добавочную скорость  $\bar{v}$  направленного движения. Это направленное движение электронов ведет к переносу заряда и, следовательно, к возникновению электрического тока. Легко показать, что весьма небольшой скорости такого переносного движения достаточно, чтобы объяснить возникновение токов даже весьма значительной плотности.

Обозначим среднюю скорость направленного движения электронов через  $\bar{v}$ . Тогда число электронов, проходящих в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению скорости, равно  $n_0 \bar{v}$ . Так как каждый электрон несет заряд  $e$ , то плотность тока  $i$ , равная заряду, перенесенному в единицу времени через единицу поверхности, будет:

$$i = en_0 \bar{v}. \quad (3)$$

Чтобы определить порядок величины скорости направленного движения  $\bar{v}$ , возьмем следующие конкретные данные: пусть по проводнику идет ток, плотность которого  $i = 100 \frac{\text{а}}{\text{см}^2} = 3 \cdot 10^{11} \frac{\text{CGSE-ед. силы тока}}{\text{см}^2}$ . Скорость направленного движения  $\bar{v}$  электронов связана с плотностью тока, по (3), соотношением:

$$\bar{v} = \frac{i}{n_0 e}.$$

Заряд электрона  $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}$ , число свободных электронов  $n_0$  в единице объема металла, по (1), равно  $\frac{N}{\mu} \delta$ . Для обычных металлических проводников молекулярный вес есть величина порядка нескольких десятков, например для меди  $\mu = 64 \text{ г/моль}$ , плотность металлов  $\delta$  большею частью не превышает 10. Отсюда для  $\bar{v}$  получаем величину порядка

$$\bar{v} = \frac{i\mu}{N\delta e} \cong \frac{3 \cdot 10^{11} \cdot 60}{6 \cdot 10^{23} \cdot 10 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \cong 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Таким образом, мы видим, что скорость переносного движения электронов  $\bar{v}$  в металле, по которому течет ток, весьма мала и при комнатных температурах много меньше скорости их теплового беспорядочного движения  $u$ .

Свяжем теперь плотность тока  $i$  с напряженностью  $E$  электрического поля, создающего переносное движение электронов.

При наличии электрического поля напряженности  $E$  на каждый электрон действует сила  $f = eE$ , направленная в сторону, противоположную  $E$ , так как заряд электрона отрицателен. Под влиянием

этой силы каждый электрон во время своего свободного пробега приобретает ускорение

$$\omega = \frac{f}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (4)$$

Если напряженность поля постоянна, то ускорение электрона тоже постоянно, и он движется равноускоренно. Однако уравнение движения (4) имеет *место только между двумя столкновениями* электрона. В момент столкновения на электрон действует сила удара, обычно значительно большая, чем сила  $f = eE$ , благодаря чему нарушается направленность его движения. Таким образом, непосредственно *после* столкновения в среднем для большого числа электронов скорость направленного движения равна нулю. К концу свободного пробега электрон приобретает скорость направленного движения  $v_1$ , равную произведению ускорения  $\omega$  на время  $\tau$  между двумя соударениями:

$$v_1 = \omega\tau = \frac{eE}{m}\tau. \quad (5)$$

Среднее для всех электронов время пробега  $\bar{\tau}$  получим, поделив среднюю длину свободного пробега  $\bar{\lambda}$  на среднюю скорость электронов. Так как при обычных плотностях тока и обычных температурах скорость переносного движения очень мала по сравнению со скоростью беспорядочного теплового движения электронов  $\bar{u}$ , то мы можем первой пренебречь и положить

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}}.$$

Подставляя это значение  $\bar{\tau}$  в выражение (5), получим, что в среднем *к концу* свободного пробега электроны будут иметь скорость направленного движения

$$v_1 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}}. \quad (6)$$

*Среднее же за время свободного пробега* значение скорости направленного движения  $\bar{v}$  будет равно половине скорости к концу пробега  $v_1$  (так как движение между столкновениями считаем равноускоренным):

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}}.$$

Итак, под действием электрического поля на беспорядочное движение электронов накладывается движение направленное, средняя скорость которого пропорциональна напряженности  $E$  электрического поля.

Наличие этой средней скорости переносного движения и ведет к появлению тока в металле.

Плотность этого тока получим, подставив найденное выражение для  $\bar{v}$  в формулу (3):

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot u} \cdot E. \quad (7)$$

Очевидно, для данного проводника при данной температуре множитель  $\frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot u}$  постоянен, поэтому последнее выражение представляет собой не что иное, как закон Ома для плотности тока  $i = \sigma E$  (см. § 155) — плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля.

Таким образом, закон Ома непосредственно вытекает из приведенной электронной теории проводимости металлов.

Сравнивая формулу (7) с выражением для закона Ома  $i = \sigma E$ , мы видим, что величина

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot u} = \sigma \quad (8)$$

представляет собой удельную проводимость металла. Отсюда следует, что удельная проводимость металла тем больше, чем больше число свободных электронов в единице объема металла и чем больше средняя длина их свободного пробега  $\bar{\lambda}$ .

Разберем закон Ленца — Джоуля с точки зрения электронной теории металла. Двигаясь под действием внешнего электрического поля, электроны приобретают на протяжении свободного пути  $\bar{\lambda}$  кинетическую энергию, связанную с направленной скоростью  $v$ , которую они при столкновении передают остову решетки металла. Под влиянием приложенного поля эта кинетическая энергия электронов возникает вновь после каждого столкновения и вновь передается металлу. Таким образом, металл нагревается за счет работы сил электрического поля.

Подсчитаем, какое количество тепла выделяется в единицу времени в единице объема проводника.

К концу свободного пробега, как было показано [формула(6)], электрон приобретает скорость, равную:

$$v_1 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{u}.$$

Следовательно, кинетическая энергия, которую он передаст при столкновении, будет:

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 E^2 \bar{\lambda}^2}{m u^2}.$$

В единицу времени каждый электрон в среднем столкнется  $\bar{z}$  раз. Число столкновений  $\bar{z}$ , как было показано в § 53 т. I, связано со

средней длиной свободного пробега  $\bar{\lambda}$  и со скоростью теплового движения  $u$  соотношением:

$$\bar{z} = \frac{u}{\lambda}.$$

Полное количество энергии, переданной в единицу времени единице объема проводника, получим, умножив энергию  $E_k$  на число столкновений  $\bar{z}$ , испытываемых одним электроном в единицу времени, и на число электронов в единице объема  $n_0$ :

$$w = E_k \bar{z} \cdot n_0 = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{m u} E^2.$$

Множитель  $\frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{m u}$  по формуле (8) равен удельной проводимости металла  $\sigma$ , откуда

$$w = \sigma E^2,$$

что совпадает с законом Ленца — Джоуля в том виде, как он приведен в § 157 [формула (4)].

Таким образом, представление о свободных электронах в металлах объясняет законы Ома и Ленца — Джоуля. Однако дальнейшее развитие теории, как мы увидим в следующих параграфах, встречает существенные трудности, которые можно преодолеть лишь с помощью квантовой механики.

**§ 162. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов.** Важным следствием результатов, полученных в предыдущем параграфе, является так называемый закон Видемана — Франца. Этот закон связывает явление электропроводности с явлением теплопроводности. Металлы — хорошие проводники тепла, диэлектрики — плохие, поэтому естественно предположить, что теплопроводность металлов обусловлена свободными электронами. Сделав это предположение, можно для коэффициента теплопроводности металлов принять выражение, полученное для теплопроводности газов, так как механизм переноса тепла электронами и молекулами в основном один и тот же. Поэтому для коэффициента теплопроводности  $\kappa$  металла непосредственно воспользуемся формулой (6), выведенной в § 56 т. I, полагая в ней число степеней свободы  $i = 3$ :

$$\kappa = \frac{1}{2} n_0 k u \bar{\lambda}.$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана,  $n_0$  — число электронов в единице объема,  $\bar{\lambda}$  — их средняя длина свободного пути в кристаллической решетке металла,  $u$  — средняя скорость теплового движения.

Беря отношение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$ , выражаемому формулой (8) § 161, получаем:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{m\bar{u}^2}{e^2} k.$$

Величина  $m\bar{u}^2/2$  представляет собой среднюю кинетическую энергию теплового движения электронов; если эту энергию считать равной средней кинетической энергии молекул (атомов) при той же температуре, т. е. равной величине  $\frac{3}{2} kT$ , то отношение  $\kappa/\sigma$  принимает вид

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3k^2}{e^2} T,$$

здесь  $k$  и  $e$  — величины постоянные (постоянная Больцмана и заряд электрона), откуда получаем: отношение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$  пропорционально абсолютной температуре металла  $T$  и не зависит от сорта металла.

Эта закономерность была установлена экспериментально Виде-маном и Францем. Если коэффициент теплопроводности  $\kappa$  измерять в *кал/град · см · сек*, а коэффициент электропроводности  $\sigma$  — в *ом<sup>-1</sup> · см<sup>-1</sup>*, то множитель при  $T$  по экспериментальным данным для различных металлов равен  $4,6—5,6 \cdot 10^{-9}$ . Выведенное здесь теоретическое значение множителя  $3k^2/e^2$  в тех же единицах равно  $5,3 \cdot 10^{-9}$ . Однако, если уточнить формулы для  $\kappa$  и  $\sigma$ , пользуясь выражением для максвеллова распределения скоростей, то численное согласие с опытом ухудшается, что указывает на случайный характер совпадения и необходимость дальнейшего развития теории. Как мы уже отмечали, представление о свободных электронах в металле хотя в общем виде и объясняет явление электропроводности и ряд других связанных с ним явлений, все же дает во многих случаях существенные расхождения между теорией и опытом. Выражение коэффициента электропроводности  $\sigma = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{m\bar{u}}$  содержит две постоянные:  $n_0$  — число свободных

электронов в единице объема металла и  $\bar{\lambda}$  — среднюю длину свободного пробега электрона, которые непосредственно не поддаются опытному измерению. Теория Лоренца предполагает, что  $n_0$  по порядку совпадает с числом атомов в единице объема, а  $\bar{\lambda}$  равно расстоянию между ионами в кристаллической решетке проводника. Эти предположения естественны и не противоречат опытным значениям коэффициента электропроводности. Выражение для  $\sigma$ , однако, не дает правильной температурной зависимости, так как единственный член в выражении для  $\sigma$ , который, несомненно, зависит от температуры, — это скорость  $\bar{u}$  теплового движения электронов. Последняя же, согласно кинетической теории, пропорциональна квадратному корню из абсо-

лутной температуры  $T$ . Однако опыт (см. § 154) показывает, что удельное сопротивление  $\rho$  прямо пропорционально абсолютной температуре, а следовательно, электропроводность  $\sigma$  обратно пропорциональна первой степени температуры; отсюда для соответствия с опытом надо допустить, что произведение  $n_0 \bar{\lambda}$  меняется обратно пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры; это допущение трудно обосновать.

Другое несогласие между теоретическими представлениями и опытными данными еще более резко. Предположение о большом числе свободных электронов, движущихся в проводнике и обладающих энергией, приводит к заключению, что теплоемкость проводника должна быть значительно больше теплоемкости непроводящих твердых тел. Сделав предположение, что число электронов — порядка числа атомов, мы получим на граммолекулу вещества дополнительную внутреннюю энергию, а именно — энергию беспорядочно движущихся электронов, равную  $\frac{3}{2} kNT = \frac{3}{2} RT$ , где  $R$  — газовая постоянная.

Это приведет к тому, что молярная теплоемкость возрастет на величину  $\frac{3}{2} R \cong 3 \text{ кал/град} \cdot \text{моль}$ . Однако опыт показывает, что проводники удовлетворяют закону Дюлонга и Пти (см. § 93 т. I) не хуже, чем непроводящие твердые тела, т. е. их молярная теплоемкость равна приблизительно  $6 \text{ кал/град} \cdot \text{моль}$ , а не  $9 \text{ кал/град} \cdot \text{моль}$ , как того требует наше рассуждение.

Следовательно, электроны, участвующие в процессе электропроводности и теплопроводности, не влияют в силу каких-то причин на теплоемкость проводника. Это обстоятельство необъяснимо с точки зрения теории Лоренца и может быть объяснено лишь с помощью квантовой механики.

**§ 163. Квантовая теория электропроводности металлов.** Как мы указывали в предыдущем параграфе, теория электропроводности может быть правильно развита лишь с помощью квантовой механики. Основное отличие квантовой механики от классической заключается в следующем: с точки зрения квантовой механики система частиц, вообще говоря, может находиться лишь в ряде определенных, отличных друг от друга (прерывных, „дискретных“) энергетических состояний, в то время как с точки зрения классической теории система может находиться в состояниях с любыми значениями энергии в пределах некоторого интервала энергий. С квантовой точки зрения переход системы из одного возможного состояния в другое происходит скачкообразно с изменением энергии на конечную величину  $\Delta E$ . Этот вывод подтверждается многочисленными фактами, относящимися к области атомной и молекулярной физики (см. т. III).

Иллюстрируем сказанное конкретным примером. Пусть один электрон находится в кулоновом поле точечного положительного заряда,



расположенного неподвижно в начале координат. Тогда потенциальная энергия электрона  $E_p$  равна:

$$E_p = -\frac{C}{r},$$

где  $C$  — положительная константа, а  $r$  — расстояние электрона от начала координат (рис. 100). В этом случае по квантовой теории (см. т. III) полная энергия электрона в области отрицательных энергий ( $E < 0$ ) может принимать лишь одно из значений

$$E = -\frac{B}{n^2}, \quad (1)$$

где  $B$  — константа, а  $n$  принимает значения целых чисел:  $n = 1, 2, 3, \dots$  Энергии, соответствующие формуле (1), изображены на рис. 100 горизонтальными чертами („уровнями“).

Рис. 100. Энергетические уровни электрона в кулоновом поле.

и сходных с ним ионов (один электрон в кулоновом поле атомного ядра) даются формулой (1). Также и в кристаллах электроны могут находиться лишь на определенных энергетических уровнях.

Как было указано в § 160, часть электронов в металле перестает быть связанной с определенными атомами и движется свободно внутри потенциальной ямы. Однако с точки зрения квантовой механики это движение, как сказано, отличается от рассматриваемого в классической теории тем, что энергия электронов может принимать лишь прерывный ряд значений. Эти значения энергии электронов в кристалле могут быть представлены набором уровней, число которых для кристалла обычных размеров чрезвычайно велико, так что соседние уровни расположены весьма близко друг к другу (рис. 101).

Для понимания электропроводности существенно еще и другое отличие от классической теории, к которому приводит квантовая механика. Это отличие касается закона распределения электронов по энергетическим уровням. С классической точки зрения электроны распределяются по энергетическим уровням по закону Больцмана, которому соответствует на рис. 102 кривая  $I$ . В квантовой механике

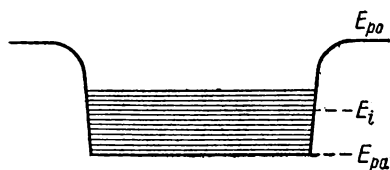


Рис. 101. Уровни энергии электронов в кристалле.

распределение иное, что обусловлено подчинением электронов так называемому *принципу Паули*. По этому принципу на одном энергетическом уровне (при условии, что он „не вырожден“) не может находиться более двух электронов. Оба эти электрона должны различаться направлением своих собственных магнитных моментов (см. т. III).

Из принципа Паули сразу вытекает различие классического и квантового распределений электронов по энергетическим уровням при температуре абсолютного нуля ( $T=0$ ). Действительно, с классической точки зрения при  $T=0$  энергия *всех* электронов должна равняться нулю. По принципу же Паули и при  $T=0$  число электронов на одном уровне не может превышать двух. Если общее число свободных электронов в кристалле равно  $n$ , то при  $T=0$  они займут  $n/2$  наиболее низких энергетических уровней. За-

кон распределения электронов по уровням представится в этом случае ломаной линией 2 на рис. 102. Пусть  $E_i$  означает энергию последнего из заполненных электронами уровней (рис. 101). Кривая 2 выражает тот факт, что при  $T=0$  все уровни с энергиями  $E \leq E_i$  заполнены электронами одинаково (на каждом уровне по два электрона); уровни с энергиями  $E > E_i$  пусты. При  $T \neq 0$  распределение электронов по уровням определяется так называемым законом Ферми, которому соответствует кривая 3 на рис. 102. При очень высоких температурах кривая Ферми приближается к кривой, соответствующей классическому закону Больцмана.

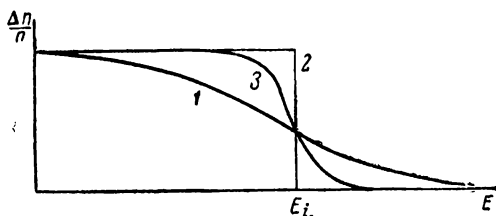


Рис. 102. Распределение электронов по энергетическим уровням.

1 — по Больцману при  $T \neq 0$ ; 2 — по Ферми при  $T=0$ ; 3 — по Ферми при  $T \neq 0$ .

Следует иметь в виду, что для металлов энергия  $E_i$  имеет относительно большое значение и соответствует средним энергиям тепловых движений атомов при температурах в десятки тысяч градусов.

Указанные выводы из квантовой механики позволяют в основном объяснить явление электропроводности. При отсутствии внешнего электрического поля электроны распределены симметрично по отношению к направлениям скоростей, что соответствует, как и в классической теории, их беспорядочному движению и, следовательно, отсутствию в кристалле направленного электрического тока.

Рассмотрим случай не слишком высокой температуры, когда не все уровни заполнены электронами. Тогда даже слабое внешнее поле может переводить электроны на более высокие свободные уровни, так как уровни расположены очень близко друг к другу. Другими словами, под влиянием внешнего поля энергия электронов может

меняться, т. е. электроны могут приобретать добавочную скорость. Под влиянием внешнего поля возникает перемещение электронов в направлении действующей на них силы — в кристалле пойдет ток. Этот случай относится к кристаллам металлов с их высокой электропроводностью. Для объяснения конечного значения электропроводности  $\sigma$  необходимо в соответствии с квантовой механикой учесть волновой характер движения свободных электронов (см. т. III). Электронные волны рассеиваются от неоднородностей, всегда существующих в кристаллической решетке. Рассеяние же волн соответствует конечной длине свободного пути электронов в кристалле. В случае идеальной решетки неоднородности, рассеивающие волны связаны лишь с тепловым движением (колебаниями) решетки, что ведет к пропорциональности электропроводности  $\sigma$  величине  $1/T$ , где  $T$  — абсолютная температура кристалла. Как мы указывали (§ 154), такая зависимость  $\sigma$  от  $T$  действительно наблюдается, но она не могла быть объяснена с классической точки зрения. При наличии примесей в кристаллической решетке имеются неоднородности, не зависящие от температуры, поэтому связь электропроводности  $\sigma$  с температурой принимает вид:

$\sigma = a \frac{1}{T} + b$ , где  $a$  и  $b$  — константы. Такая зависимость  $\sigma$  от  $T$  наблюдается при низких температурах, если к какому-либо чистому металлу прибавить малую примесь другого металла.

Мысль о том, что сопротивление металлов обусловлено рассеянием электронных волн на неоднородностях решетки, вызванных тепловым движением, была впервые высказана советским физиком Я. И. Френкелем в его работе по теории металлов.

Квантовая теория устраняет и другую трудность классической теории, а именно, отсутствие влияния свободных электронов на теплоемкость металлов (§ 162). При повышении температуры часть электронов переходит на более высокие энергетические уровни. Однако, если средняя энергия теплового движения  $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ , приходящаяся на три степени свободы, мала по сравнению с  $E_F$ , то кривая распределения электронов по уровням в соответствии с формулой Ферми мало отличается от кривой распределения при  $T=0$  (кривые 3 и 2 рис. 102 мало отличны друг от друга). Отсюда следует, что общая энергия электронов слабо зависит от температуры (при не очень высоких температурах), откуда, в свою очередь, вытекает, что наличие свободных электронов в металле практически не влияет на его теплоемкость.

Для того чтобы более точно показать, что свободные электроны практически не влияют на теплоемкость металлов, надо воспользоваться количественным законом распределения электронов по скоростям.

На рис. 102 приведены графики распределения электронов по уровням. Если же мы поставим вопрос об относительном числе электронов  $dn/n$ , полная энергия которых заключена в интервале энергий  $E, E + dE$ , то получим график другого вида, так как уровни расположены не одинаково густо при

разных значениях энергии и, следовательно, на одинаковый интервал  $dE$  придется разное число уровней, в зависимости от того, в какой области энергий взят интервал  $dE$ . По закону распределения Ферми:

$$\frac{dn}{n} = \gamma \frac{E^{1/2}}{E - E_i} \frac{dE}{1 + e^{\frac{kT}{E - E_i}}}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — константа,<sup>1</sup> а  $E_i$ , в соответствии со сказанным выше, — наибольшая энергия электронов при  $T=0$ . Тогда, вместо графиков 2 и 3 рис. 102, мы получим графики, изображенные на рис. 103, где кривая 2 снова относится к случаю  $T=0$ , а кривая 3 — к случаю  $T \neq 0$ .

Средняя энергия электронов в кристалле при некоторой температуре  $T$  равна

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \int E dn,$$

где интегрирование должно быть распространено на все возможные значения энергии  $E$ . Воспользовавшись распределением (2), получим

$$\bar{E} = \gamma \int_0^{\infty} \frac{E^{3/2}}{E - E_i} \frac{dE}{1 + e^{\frac{kT}{E - E_i}}}.$$

Интегрирование дает следующий приближенный результат:

$$\bar{E} = \frac{3}{5} E_i \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_i} \right)^2 \right].$$

Так как молярная теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  определяется производной от энергии (приходящейся на один моль) по температуре, то

$$C_V = N \frac{d\bar{E}}{dT} = \frac{\pi^2}{2} Nk \left( \frac{kT}{E_i} \right), \quad (3)$$

где  $N$  — число Авогадро.

По классической теории молярная теплоемкость электронного газа равняется  $C_V = \frac{3}{2} Nk$ . По сказанному, для металлов  $E_i$  соответствует средней энергии теплового движения частиц при температуре в десятки тысяч градусов. Следовательно, величина  $E_i$  в сотни раз превышает  $kT$ , относящиеся к средним температурам. Таким образом, множитель  $\left( \frac{kT}{E_i} \right) \sim 0,01$  и формула (3) дают при средних температурах теплоемкость электронного газа, ничтожно малую по сравнению с той, которую дает классическая теория.

**§ 164. Замкнутая цепь постоянного тока.** Поддержание постоянного тока в проводнике требует поддержания постоянной разности потенциалов на его концах. Источники этой постоянной разности

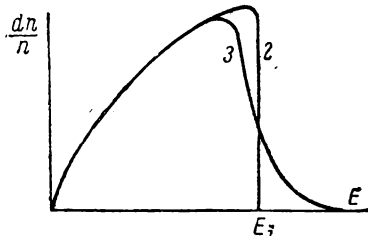


Рис. 103. Распределение электронов по энергиям.

2 — при  $T=0$ ; 3 —  $T \neq 0$ .

<sup>1</sup>  $\gamma$  зависит от объема кристалла.

потенциалов могут быть различными. Примером таких источников могут служить *гальванические элементы*.

Гальванический элемент состоит из двух, большей частью металлических пластинок, называемых электродами, погруженных в определенные растворы (электролиты). Например, *элемент Даниэля* (рис. 104) состоит

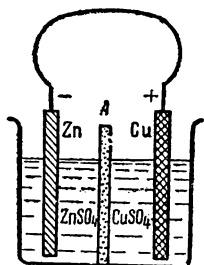


Рис. 104. Элемент Даниэля.

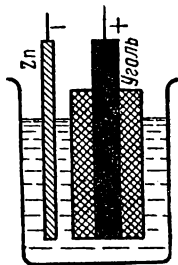


Рис. 105. Элемент Лекланше.

из цинковой пластинки, погруженной в раствор цинкового купороса, и медной пластинки, погруженной в раствор медного купороса. Растворы разделены пористой перегородкой *A*. На пластинках разомкнутого элемента Даниэля возникает разность потенциалов в 1,1 в. *Элемент Лекланше*

(рис. 105), дающий на электродах разность потенциалов около 1,5 в, состоит из цинковой пластинки в растворе нашатыря и угольной пластинки, окруженной слоем перекиси марганца.

Не входя пока в рассмотрение причин, создающих разность потенциалов на зажимах гальванического элемента, рассмотрим, что произойдет, если такой источник постоянной разности потенциалов включить в замкнутую цепь.

Предположим, что сопротивление цепи, замыкающей элемент (рис. 106), равно  $R$ ; назовем его *внешним сопротивлением*. Элемент, в свою очередь, обладает сопротивлением  $R_0$ , которое назовем *внутренним сопротивлением*. Внешнее сопротивление имеет на концах потенциалы  $V_1$  и  $V_2$ , которые представляют собой потенциалы электродов при условии, что они соединены внешним проводником данного сопротивления. Предположим, что потенциал  $V_1$  больше потенциала  $V_2$ ; тогда ток во внешней цепи идет от электрода с потенциалом  $V_1$  к электроду с потенциалом  $V_2$ . Во внешней цепи мы имеем *падение потенциала*.

Применяя закон Ома к участку цепи, образованному внешним сопротивлением  $R$ , получим, что падение потенциала во внешней цепи  $V_1 - V_2$  равно

$$V_1 - V_2 = IR. \quad (1)$$

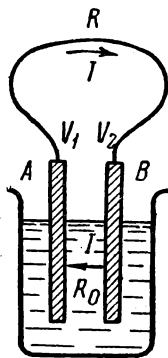


Рис. 106. Цепь гальванического элемента и внешнего сопротивления.

Стационарный ток представляющий собой течение зарядов, должен быть замкнут (см. § 156), следовательно, во внутренней части цепи он должен течь в другом направлении, чем во внешней. Если во внешней части он течет от электрода *A* к электроду *B* (рис. 106),

то во внутренней он течет от электрода  $B$  к электроду  $A$ . Это возможно только при наличии скачков потенциалов на границах электродов с электролитом. Причины, могущие создать такие скачки, мы рассмотрим в дальнейшем. Сейчас предположим, что на границе электрода  $B$  и электролита возникает подъем (скачок) потенциала до величины  $V'_2$ . Потенциал электролита на границе с электродом  $A$  обозначим через  $V'_1$ . Для удобства графического представления падений и скачков потенциалов во всей замкнутой цепи будем откладывать потенциалы  $V$  вдоль образующих цилиндрической поверхности. На рис. 107 точки  $A$  и  $B$  соответствуют положению электродов: часть  $AbB$  — внешней части цепи и часть  $BcA$  — внутренней части цепи.

Внутри электролита ток идет от потенциала  $V'_2$  до потенциала  $V'_1$ . Падение потенциала во внутренней части цепи по закону Ома равно

$$V'_2 - V'_1 = IR_0, \quad (2)$$

где  $R_0$  — сопротивление внутренней части цепи. Обойдем мысленно замкнутую цепь по направлению  $AbBcA$  и вернемся к исходному электроду  $A$  с потенциалом  $V_1$ ; сумма падений потенциалов при обходе контура должна равняться сумме их подъемов.

Обозначим скачки потенциалов через  $\varepsilon$ ;

$$V_1 - V'_1 = \varepsilon_1,$$

$$V'_2 - V_2 = \varepsilon_2.$$

Условимся считать скачки положительными, если они повышают потенциал в направлении обхода цепи, и отрицательными, если они понижают потенциал. Условие, что сумма падений потенциала при обходе контура равняется сумме подъемов, запишется:

$$IR + IR_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (3)$$

Алгебраическая сумма скачков потенциала, получающихся при обходе цепи,

$$\mathcal{E} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

называется *электродвижущей силой*, включенной в цепь; в данном случае сумма скачков выражает э. д. с. элемента. Введя э. д. с.  $\mathcal{E}$ , мы можем переписать равенство (3) в виде:

$$IR + IR_0 = \mathcal{E}. \quad (3a)$$

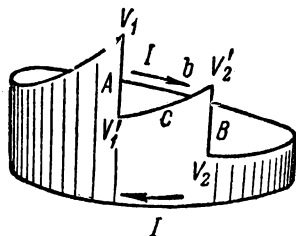


Рис. 107. Изображение падений и скачков потенциала в замкнутой цепи из гальванического элемента и внешнего сопротивления.

Это равенство *представляет собой закон Ома для замкнутой цепи*. Перепишем его в следующем виде:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0}, \quad (4)$$

откуда следует, что сила тока  $I$  в замкнутой цепи прямо пропорциональна э.д.с.  $\mathcal{E}$  и обратно пропорциональна полному сопротивлению цепи  $R + R_0$ .

Заметив, что  $IR = V_1 - V_2$ , получим из равенства (3а):

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E} - IR_0, \quad (5)$$

т. е. *разность потенциалов  $V_1 - V_2$  на зажимах элемента равна его э.д.с. минус падение потенциала во внутренней части цепи*. Чем больше падение потенциала во внутренней части цепи, тем сильнее отличается разность потенциалов на зажимах элемента от его э.д.с.

Для разомкнутого элемента  $I = 0$  и, следовательно, равно нулю и падение потенциала во внутренней части цепи; в этом случае из (5) имеем:  $\mathcal{E} = V_1 - V_2$ , т. е. *э.д.с.  $\mathcal{E}$  равна разности потенциалов на зажимах разомкнутого элемента*.

Разность потенциалов на зажимах элемента, замкнутого внешним сопротивлением, всегда меньше его э.д.с.

Разность потенциалов на зажимах элемента равна его э.д.с.  $\mathcal{E}$  и в том случае, когда ток  $I$ , идущий через элемент, компенсирован каким-либо внешним источником разности потенциалов (см. определение э.д.с. методом компенсации; § 167).

В § 156 мы показали, что в случае стационарного тока линии тока замкнуты. Отсюда следует, что заряды, перемещение которых образует ток, движутся по замкнутым кривым. Таким образом, в цепи гальванического элемента заряды, условно считаемые положительными, движутся не только в областях падений потенциалов, т. е. во внешнем участке цепи  $AbB$  (рис. 107) и во внутреннем участке цепи  $BcA$ , но и в областях скачков потенциалов. В этих последних участках они движутся в *направлениях возрастания потенциалов*, т. е. против направления действия электростатических сил. Очевидно, это движение происходит под влиянием не электростатических сил, а сил какого-то иного происхождения. Эти силы носят название *сторонних сил*. В случае гальванического элемента сторонние силы возникают за счет химических процессов, протекающих в результате растворения материала электродов в электролитах.

Обобщим понятие об электродвижущей силе для случая, когда сторонние силы действуют в любом месте цепи. Закон Ома для плотности тока имеет вид:

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}.$$

Это выражение было нами установлено в предположении, что на заряды, создающие ток, действуют электрические силы. В общем

случае на заряды могут действовать как электрические силы, так и силы иного происхождения, которые мы называли сторонними. Обозначим сторонние силы, действующие на заряд, через  $\mathbf{f}_0$ .

Тогда в выражении (4) § 161 ускорение заряда  $\mathbf{w}$  следует представить в виде:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}_0}{m} = \frac{e\mathbf{E} + \mathbf{f}_0}{m} = \frac{e(\mathbf{E} + \mathbf{f}_0/e)}{m}.$$

Обозначим  $\mathbf{f}_0/e$  через  $\mathbf{E}_0$  и назовем напряженностью сторонних сил. Тогда ускорение заряда  $\mathbf{w}$  будет определяться суммой напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и напряженности сторонних сил  $\mathbf{E}_0$ :

$$\mathbf{w} = \frac{e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0)}{m}.$$

Повторяя далее рассуждения § 161, мы придем к выражению закона Ома, которое теперь примет вид:

$$\mathbf{i} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0). \quad (6)$$

В этом выражении видна роль сторонних сил при движении зарядов. Очевидно, что в тех местах, где сторонние силы отсутствуют,  $\mathbf{E}_0 = 0$ , и мы получим закон Ома в прежней форме.

Рассмотрим трубку тока, т. е. пространство, ограниченное линиями тока (трубкой тока может быть и весь рассматриваемый проводник). Сила тока через сечение трубки  $\Delta S$  постоянна и может быть представлена в виде:

$$I = i_n \Delta S = \sigma(E_n + E_{0n}) \Delta S.$$

Предположим, что сечение  $\Delta S$  перпендикулярно к линиям тока, тогда нормаль к этому сечению  $\mathbf{n}$  совпадает по направлению с направлением  $\mathbf{l}$  линии тока, и мы получим:

$$I = \sigma(E_l + E_{0l}) \Delta S$$

или

$$E_l + E_{0l} = \frac{I}{\sigma \Delta S}.$$

Умножая обе части этого равенства на элемент длины трубки тока  $\Delta l$  и суммируя по всем элементам замкнутой трубки тока, получим:

$$\sum (E_l + E_{0l}) \Delta l = \sum \frac{I}{\sigma \Delta S} \Delta l.$$

Так как сила тока  $I$  через любое сечение трубки постоянна, то ее можно вынести за знак суммы и тогда будем иметь:

$$\sum E_l \Delta l + \sum E_{0l} \Delta l = I \sum \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}.$$



Величина  $\sum \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$  представляет собой полное сопротивление трубки, которое мы обозначим через  $R + R_0$ , подразумевая под  $R_0$  сопротивление той части, в которой действуют сторонние силы (внутреннее сопротивление), а под  $R$  — сопротивление той части, где сторонние силы не действуют (внешнее сопротивление). Далее видим, что сумма  $\sum E_l \Delta l$  для замкнутого контура равна нулю, так как это выражение дает работу электростатических сил при обходе единичного заряда по замкнутому контуру трубки (потенциальность электростатических сил).

Выражение  $\sum E_{0l} \Delta l$  для замкнутого контура называется *циркуляцией вектора напряженности сторонних сил*. Оно представляет сумму произведений проекций вектора напряженности сторонних сил на направление элементов контура  $E_{0l}$  на длину этих элементов  $\Delta l$ , взятую по всем элементам замкнутого контура. Обозначим эту сумму через  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \sum E_{0l} \Delta l, \quad (7)$$

тогда равенство (6) примет форму:

$$\mathcal{E} = I(R + R_0),$$

откуда видно, что  $\mathcal{E}$  представляет собой э.д.с., действующую в контуре. Таким образом, мы получили закон Ома для замкнутой цепи, в котором *э.д.с. представлена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил*.

Сторонние силы могут действовать в любом месте цепи. Легко видеть, что в случае, когда сторонние силы создают лишь скачки потенциала в отдельных местах цепи, циркуляция дает алгебраическую сумму скачков потенциала для замкнутого контура тока. Следовательно, приведенное выше определение э.д.с. как суммы скачков потенциала является частным случаем соотношения (7). В случае постоянного тока от гальванического элемента или батареи элементов сторонние силы действуют в областях, где происходят химические процессы (внутренние части цепи).

Беря в выражении (7) элементы контура бесконечно малыми, заменим сумму интегралом, распространенным по всему замкнутому контуру, тогда выражение для э.д.с.  $\mathcal{E}$  примет вид:

$$\mathcal{E} = \oint E_{0l} dl.$$

Интеграл, стоящий справа, представляет собой циркуляцию вектора напряженности сторонних сил.

**Пример.** Внутреннее сопротивление элемента  $R_0$  в  $k$  раз меньше внешнего сопротивления  $R$ , которым замкнут элемент с э.д.с.  $\mathcal{E}$ . Найти: во сколько раз разность потенциалов на зажимах элемента  $V_1 - V_2$  отличается от э.д.с.  $\mathcal{E}$  элемента?

Решение. Подставляя значение силы тока  $I$  из (4) в выражение (5), получим для разности потенциалов  $V_1 - V_2$  на зажимах элемента:

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E} \frac{R}{R + R_0},$$

или

$$V_1 - V_2 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{R_0}{R}}.$$

Так как по условию  $\frac{R_0}{R} = \frac{1}{k}$ , то последняя формула принимает вид:

$$V_1 - V_2 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{k}{k + 1} \mathcal{E},$$

т. е. разность потенциалов на зажимах элемента  $V_1 - V_2$  в  $\frac{1}{1 + \frac{1}{k}}$  раз

меньше э. д. с.

Если внешнее сопротивление  $R$  становится велико по сравнению с внутренним сопротивлением  $R_0$ , то отношение  $\frac{1}{k}$  становится малым по сравнению с единицей, и разность потенциалов  $V_1 - V_2$  приближается к значению э. д. с.

Наоборот, если  $R$  мало по сравнению с  $R_0$ , то  $\frac{1}{k}$  становится большим, и разность потенциалов  $V_1 - V_2$  принимает значение, много меньшее  $\mathcal{E}$ .

**§ 165. Энергия, выделяемая в цепи постоянного тока.** Рассмотрим энергетические соотношения в замкнутой цепи постоянного тока. На рис. 106 была представлена замкнутая цепь постоянного тока, питаемая элементом э. д. с.  $\mathcal{E}$  и с внутренним сопротивлением  $R_0$ ; внешнее сопротивление цепи обозначим через  $R$ . Полная мощность, выделяемая в цепи, будет складываться из мощностей, выделяемых во внешней и внутренней частях цепи:

$$W = I^2 R + I^2 R_0 = I^2 (R + R_0),$$

или, так как по формуле (3а) § 164  $I(R + R_0) = \mathcal{E}$ , то

$$W = I \cdot \mathcal{E}. \quad (1)$$

Таким образом, *полная мощность, выделяемая в цепи, выражается произведением из силы тока на э. д. с. элемента*. Эта мощность выделяется за счет каких-либо сторонних источников энергии; такими источниками энергии могут быть, например, химические реакции, происходящие в элементе.

Следовательно, *в цепи постоянного тока сторонние силы развивают положительную мощность  $+I\mathcal{E}$* .

Разберем, далее, как зависит мощность, выделяемая в цепи, от внешнего сопротивления  $R$ , на которое замкнут элемент. Предположим, что элемент данной э. д. с.  $\mathcal{E}$  и данного внутреннего сопротивления  $R_0$

замыкается внешним сопротивлением  $R$ ; определим зависимость от  $R$  следующих величин: полной мощности  $W$ , выделяемой в цепи, мощности  $W_a$ , выделяемой во внешней части цепи, и к. п. д.  $\eta$ , который численно равен отношению мощности, выделяющейся во внешней части цепи, ко всей мощности.

Сила тока  $I$  в цепи выражается по закону Ома соотношением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0}.$$

Наибольшей величины она достигает при  $R=0$ ; при этом ток называется *током короткого замыкания*, его сила равна:

$$I_{к.з.} = \frac{\mathcal{E}}{R_0}.$$

При увеличении внешнего сопротивления сила тока падает, стремясь асимптотически к нулю при бесконечном увеличении внешнего сопротивления (см. рис. 108).

Полная мощность, выделяющаяся в цепи, будет:

$$W = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + R_0}.$$

Наибольшего значения она достигает при токе короткого замыкания ( $R=0$ ):

$$W_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0}.$$

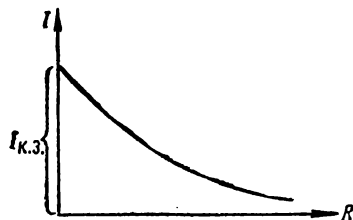


Рис. 108. Зависимость силы тока от внешнего сопротивления.

При увеличении  $R$  мощность спадает, стремясь асимптотически к нулю при неограниченном увеличении  $R$ .

Мощность, выделяющаяся во внешней части цепи, равна:

$$W_a = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + R_0)^2} \cdot R.$$

При токе короткого замыкания  $R=0$ , откуда мощность, выделяемая во внешней части цепи, при этом равна нулю. Наибольшего значения  $W_a$  достигает при  $R=R_0$ , т. е. когда внешнее сопротивление равно внутреннему. При этом

$$W_{a\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_0},$$

т. е. равна четверти мощности при коротком замыкании.

Чтобы убедиться в том, что максимум мощности  $W_a$  получается при  $R=R_0$ , возьмем производную от  $W_a$  по внешнему сопротивлению:

$$\frac{dW_a}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + R_0)^4} [(R + R_0)^2 - 2(R + R_0) \cdot R],$$

откуда:

$$\frac{dW_a}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + R_0)^4} \cdot (R_0^2 - R^2),$$

По условию максимума требуется равенство нулю первой производной:

$$\frac{dW_a}{dR} = 0, \quad \text{откуда} \quad R = R_0.$$

Можно убедиться, что при этом условии мы получаем максимум, а не минимум для  $W_a$ , определив знак второй производной  $\frac{d^2 W}{dR^2}$ .

При бесконечном увеличении внешнего сопротивления мощность, выделяемая во внешней цепи, стремится к нулю.

Коэффициент полезного действия определим отношением мощности  $W_a$ , выделяемой во внешней части цепи, ко всей мощности  $W$ :

$$\eta = \frac{W_a}{W} = \frac{R}{R + R_0}.$$

При  $R=0$  имеем  $\eta=0$ ; с увеличением  $R$  к. п. д.  $\eta$  возрастает, стремясь к значению  $\eta=1$  при неограниченном увеличении  $R$ , однако при этом мощность, выделяющаяся во внешней цепи, стремится к нулю, поэтому условие максимума к. п. д. с практической точки зрения не интересно.

На рис. 109 кривая 1 дает зависимость мощности  $W_a$ , выделяемой во внешней части цепи, от сопротивления внешней части цепи  $R$ ; кривая 2 дает зависимость от  $R$  полной мощности  $W$ ; наконец, кривая 3 дает ход к. п. д.  $\eta$  от того же внешнего сопротивления  $R$ . Как видно,  $\eta$  возрастает с возрастанием  $R$ .

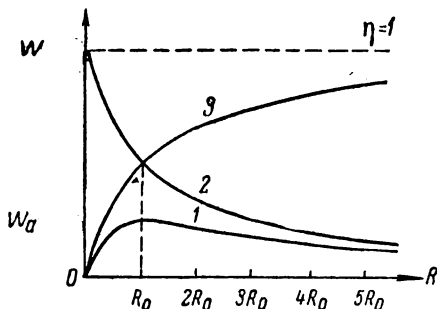


Рис. 109. Зависимость от сопротивления внешней части цепи  $R$  мощности  $W_a$ , выделяемой во внешней части цепи (1); полной мощности  $W$  (2); коэффициента полезного действия  $\eta$  (3).

Наиболее же интересная, с практической точки зрения, мощность  $W_a$ , выделяемая во внешней части цепи, сперва возрастает, а затем, достигнув при  $R=R_0$  максимума, начинает спадать.

При  $R=R_0$ , когда  $W_a$  имеет максимум,  $\eta = \frac{1}{2}$ .

**§ 166. Закон Ома для неоднородной цепи. Закон Кирхгофа.** Закон Ома в том виде, как он приведен в § 153, справедлив для однородной цепи, т. е. такой, в которой нет никаких э. д. с. и скачков потенциалов. Однако мы уже отмечали, что возникновение постоянного тока в цепи возможно лишь при наличии э. д. с.; в гальванических элементах э. д. с. возникают в результате скачков потенциалов на границе электродов и тех растворов, в которые они погружены (§ 164). В дальнейшем мы увидим (§ 168), что скачки

потенциалов возникают и в месте контакта двух различных металлов, а также в случае температурных неоднородностей. Таким образом, в общем случае следует рассматривать цепь, в которой имеются скачки потенциалов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ . При заданном направлении обхода цепи скачки могут быть разных знаков. Алгебраическая сумма скачков потенциалов  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \dots$  в данном участке цепи образует действующую в этом участке э. д. с.  $\mathcal{E}$ .<sup>1</sup>

Рассмотрим для простоты неоднородную цепь, состоящую из последовательно соединенных различных проводников  $A, B, C$  (рис. 110).

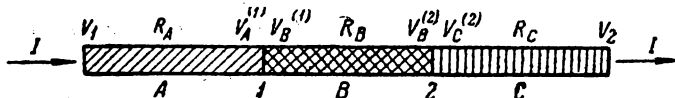


Рис. 110. Скачки потенциалов в местах контактов в неоднородной цепи.

Контакты между проводниками обозначим цифрами 1 и 2. Потенциал левого края цепи обозначим через  $V_1$ , правого края — через  $V_2$ . Потенциал проводника  $A$  в месте первого контакта обозначим через  $V_A^{(1)}$ , потенциал проводника  $B$  в том же контакте обозначим через  $V_B^{(1)}$ ; также потенциалы проводников  $B$  и  $C$  в местах второго контакта обозначим соответственно через  $V_B^{(2)}$  и  $V_C^{(2)}$ . Сопротивления проводников  $A, B, C$  пусть соответственно равны  $R_A, R_B$  и  $R_C$ . Так как проводники соединены последовательно, то через них протекает один и тот же ток  $I$ . К каждому из проводников в отдельности мы можем применить закон Ома:

$$\begin{aligned} IR_A &= V_1 - V_A^{(1)}, \\ IR_B &= V_B^{(1)} - V_B^{(2)}, \\ IR_C &= V_C^{(2)} - V_2. \end{aligned}$$

Складывая эти три равенства почленно, найдем:

$$I(R_A + R_B + R_C) = V_1 + (V_B^{(1)} - V_A^{(1)}) + (V_C^{(2)} - V_B^{(2)}) - V_2. \quad (1)$$

Но разности  $V_B^{(1)} - V_A^{(1)}$  и  $V_C^{(2)} - V_B^{(2)}$  представляют собой скачки потенциалов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на границах проводников 1 и 2. Сумма скачков потенциалов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  дает э. д. с.  $\mathcal{E}$ , действующую на данном участке цепи; следовательно:

$$(V_B^{(1)} - V_A^{(1)}) + (V_C^{(2)} - V_B^{(2)}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathcal{E}.$$

Также сумма сопротивлений  $R_A, R_B$  и  $R_C$  представляет собой полное сопротивление данного участка цепи  $R$ :

$$R_A + R_B + R_C = R.$$

<sup>1</sup> В неоднородной цепи возможно не только наличие скачков потенциала, но, вообще говоря, и непрерывное нарастание потенциала, например в электролите с меняющейся от места к месту концентрацией ионов.

Отсюда равенство (1) может быть переписано в виде:

$$IR = V_1 - V_2 + \mathcal{E},$$

или

$$I = \frac{V_1 - V_2 + \mathcal{E}}{R}. \quad (2)$$

Соотношение (2) выражает закон Ома в применении к неоднородной цепи: *сила тока численно равна сумме разности потенциалов на концах цепи  $V_1 - V_2$  и действующей в цепи э. д. с.  $\mathcal{E}$ , деленной на полное сопротивление цепи  $R$* . При этом положительной считается такая э. д. с., которая вызывает *увеличение* потенциала в направлении тока.

Если э. д. с., действующая на данном участке цепи, равна нулю, т. е.  $\mathcal{E} = 0$ , то формула (2) переходит в обычный закон Ома:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}.$$

Для замкнутой цепи  $V_1 = V_2$ , и полное сопротивление складывается из сопротивления внешней части цепи  $R$  и внутренней части цепи  $R_0$ , откуда:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0},$$

что совпадает с формулой (4), приведенной в § 164.

Обобщенный закон Ома, выражаемый формулой (2), позволяет рассчитать любую сложную цепь. Однако непосредственный расчет разветвленных цепей представляется сложным. Эта сложность в значительной степени устраняется, если пользоваться двумя системами уравнений, данными Кирхгофом.

Разветвленная цепь характеризуется силой токов, идущих по ее участкам, сопротивлениями участков и э. д. с., включенными в эти участки. Эти величины связаны между собою, и по одним из них могут быть найдены другие. Например, по заданным сопротивлениям и э. д. с. можно найти направления и силы токов, текущих в каждом из участков цепи.

Рассмотрим уравнения Кирхгофа в отдельности.

Первая система уравнений Кирхгофа. Назовем в разветвленной цепи *узлом* (рис. 111) всякую точку, в которой сходится не меньше трех проводников. Первая система уравнений Кирхгофа относится к узлам. Так как мы рассматриваем случай постоянных токов, то в любой точке цепи, в том числе и в любом узле, имеющийся заряд должен оставаться постоянным. Следовательно, сколько приносится зарядов, столько должно и уноситься (см. § 156). Если

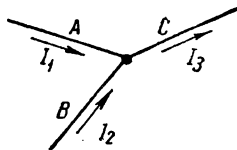


Рис. 111. Узел, образованный тремя проводниками A, B, C.

мы условимся токи, подходящие к узлу, считать положительными, а токи, исходящие из узла, — отрицательными, то можем сказать: *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле*, равна нулю. Аналитически это запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (3)$$

где  $n$  обозначает число токов, сходящихся в данном узле; такое уравнение имеет место для каждого узла цепи.

Совокупность уравнений (3), написанных для разных узлов данной цепи, представляет собой первую систему уравнений Кирхгофа.

Вторая система уравнений Кирхгофа относится к произвольным замкнутым контурам, которые можно выделить в данной

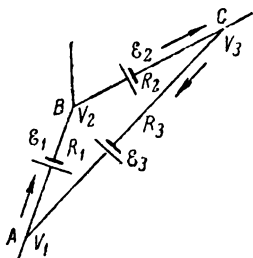


Рис. 112. Замкнутый контур  $ABCA$ .

разветвленной цепи. Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $ABCA$  (рис. 112), состоящий из неоднородных участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Условимся, обходя контур в определенном направлении, например *по часовой стрелке*, считать положительными те токи, направление которых совпадает с направлением обхода, и отрицательными — те, направление которых противоположно направлению обхода. Также положительными будем считать те э. д. с., которые повышают потенциал в направлении обхода, и отрицательными — те, которые понижают потенциал в направлении обхода.

К каждому неоднородному участку контура  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  применим закон Ома в том виде, как он дается формулой (2). Обозначим сопротивления участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно через  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , силы текущих по ним токов — через  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и встречающиеся в них э. д. с., — через  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$ . Потенциалы точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  обозначим через  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ .

Тогда по закону Ома, написанному для каждого из участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в отдельности, получим:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= V_1 - V_2 + \mathcal{E}_1, \\ I_2 R_2 &= V_2 - V_3 + \mathcal{E}_2, \\ I_3 R_3 &= V_3 - V_1 + \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

Складывая эти три равенства почленно, найдем:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Как видно, в результате потенциалы  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  выпали. Так как такое рассуждение может быть применено к любому

замкнутому контуру, то в общем виде для *всякого замкнутого контура* можно написать:

$$\sum_{k=1}^m I_k R_k = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k; \quad (4)$$

здесь  $m$  означает число участков в замкнутом контуре, а  $k$  — номер, характеризующий участок. Таким образом: *в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи проводников, сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна сумме э.д.с., встречающихся в этом контуре.* Совокупность уравнений (4), написанных для различных замкнутых контуров, выделенных в данной разветвленной цепи, образует вторую систему уравнений Кирхгофа. Уравнения Кирхгофа (3) и (4), составленные для узлов и контуров, позволяют рассчитывать сети разветвленных токов. Уравнений (3) и (4) надо составить столько, чтобы число их равнялось числу искомых величин, при этом необходимо следить, чтобы одни уравнения не являлись следствием других. Если в сети имеется  $r$  узлов, то в первой системе уравнений Кирхгофа можно составить независимые уравнения лишь для  $r - 1$  узлов. Уравнение для последнего узла будет следствием предыдущих. Если в сети можно выделить несколько замкнутых контуров, например, замкнутые контуры  $ABCA$ ,  $ACDA$  и  $ABCD A$  (рис. 113), то независимые уравнения второй системы уравнений Кирхгофа можно составить только для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных.

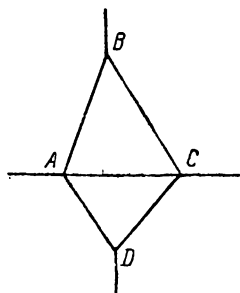


Рис. 113. Замкнутые контуры:  $ABCA$ ,  $ACDA$  и  $ABCD A$ .

Например, для сложной цепи, изображенной на рис. 113, можно составить уравнения для контуров  $ABCA$  и  $ACDA$ : они будут независимыми. Уравнение для контура  $ABCD A$  окажется при этом следствием двух предыдущих. Можно составить независимые уравнения для двух других контуров, например  $ABCA$  и  $ABCD A$ ; тогда уравнение для контура  $ACDA$  окажется следствием двух первых.

При составлении второй системы уравнений Кирхгофа необходимо аккуратно пользоваться указанными выше правилами знаков для токов и э.д.с.

**§ 167. Применение уравнений Кирхгофа к решению отдельных задач.** 1. Параллельное соединение проводников. Используем сперва систему уравнений Кирхгофа для решения простой задачи о двух параллельно соединенных проводниках. Пусть два проводника с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно.



Общая сила тока, текущего по проводникам, равна  $I$  и направлена, как указано на рис. 114. По заданным  $R_1$ ,  $R_2$  и  $I$  требуется найти силы токов  $I_1$  и  $I_2$  в каждом из проводников.

Неизвестных величин в данной задаче две — это силы токов  $I_1$  и  $I_2$ . Следовательно, необходимо составить два уравнения. Первое уравнение составим для одного из узлов, например для узла  $A$ . Будем считать ток  $I$  подходящим к узлу, тогда токи  $I_1$  и  $I_2$  следует считать выходящими из узла и приписать им отрицательные знаки.

Таким образом, первое уравнение Кирхгофа, написанное для узла  $A$ , примет вид:

$$I - I_1 - I_2 = 0,$$

откуда следует:

$$I = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Рис. 114. Параллельное соединение двух проводников  $B$  и  $D$ .

Второе уравнение Кирхгофа напишем для замкнутого контура  $ABCD$ . Обходя этот контур по часовой стрелке, т. е. в направлении от узла  $A$  через проводник  $B$  к узлу  $C$  и дальше через проводник  $D$  обратно к узлу  $A$ , мы должны считать ток  $I_1$  положительным и ток  $I_2$  — отрицательным. Так как в указанном контуре э. д. с. отсутствуют, то второе уравнение Кирхгофа напишется в виде:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0,$$

откуда

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1} I_2, \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно  $I_1$  и  $I_2$ , найдем:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I,$$

что и дает нам искомое решение. Из соотношения (2) получаем также:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

т. е. известный закон, что силы токов в двух параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям.

2. Мостик Уитстона. Мостик Уитстона представляет собой схему, употребляемую для сравнения некоторого неизвестного сопротивления  $R_x$  с известным сопротивлением  $R_0$ . Схема мостика Уитстона заключается в следующем: цепь, идущая от гальванического элемента  $E$  (рис. 115), начиная от узла  $A$  разветвляется. Одну ее часть образуют два сопротивления  $R_x$  и  $R_0$ , соединенных последовательно. Вторую часть обычно составляет натянутый однородный провод  $AC$ . К точке  $B$ ,

где соединяются сопротивления  $R_x$  и  $R_0$  между собой, прикреплен один зажим измерительного прибора (гальванометра)  $G$ ; его второй зажим прикреплен к скользящему контакту  $D$ . Этот контакт может передвигаться вдоль провода  $AC$  и таким образом менять отношение сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  участков провода  $AD$  и  $DC$ . Ниже мы покажем, что в участке цепи  $BGD$  будет отсутствовать ток при выполнении соотношения

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (3)$$

которое может быть переписано в виде:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_0. \quad (3a)$$

Для однородного провода сопротивления отдельных его участков относятся, как их длины. Таким образом, если мы обозначим длину участка провода  $AD$  через  $l_1$ , а участка  $DC$  — через  $l_2$ , то получим:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2},$$

после чего равенство (3a) примет вид:

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R_0.$$

Это соотношение и служит для сравнения измеряемого сопротивления  $R_x$  с известным сопротивлением  $R_0$ . Для этого подвижный контакт  $D$  передвигают так, чтобы через гальванометр  $G$  перестал течь ток, что непосредственно определяют по отсутствию отклонения его стрелки. Отношение длин  $l_1/l_2$  находят с помощью отсчетной линейки, расположенной вдоль провода  $AC$ .

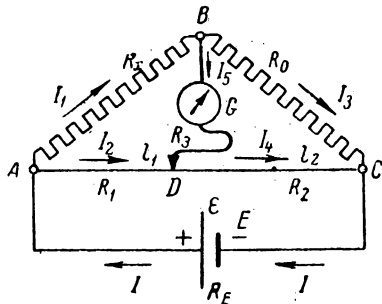


Рис. 115. Схема мостика Уитстона.

Воспользуемся уравнениями Кирхгофа для вывода соотношения (3). Предположим сперва, что нам даны все четыре сопротивления  $R_x$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , а также внутреннее сопротивление  $R_E$  гальванического элемента  $E$ , его э.д.с.  $\mathcal{E}$  и сопротивление  $R_3$  участка цепи  $BGD$ , содержащего гальванометр  $G$ . Сопротивлением проводов, подводящих ток от элемента к узлам нашей схемы  $A$  и  $C$ , пренебрежем. Силу тока, идущего от элемента, обозначим через  $I$ , а силы токов в участках цепи  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $DC$  и  $BGD$  — соответственно через  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$ .

Узлов в нашей системе *четыре*:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . По сказанному в § 166, для *трех* из них составим уравнения Кирхгофа. В качестве этих трех выберем узлы  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Токи, подходящие к узлу, мы условились считать положительными, а выходящие из него — отрицательными. Однако в сложной схеме мы можем заранее не знать,

как именно направлены токи. В таком случае мы можем приписать направление токам произвольно. В результате решения уравнений Кирхгофа мы получим некоторые значения  $I_k$  в виде положительных величин — это те токи, которым мы приписали правильные направления, другие значения  $I_k$  мы получим в виде отрицательных величин; для этих токов действительные направления обратны приписанным. В нашем случае припишем токам направления, обозначенные на рис. 115 стрелками. Тогда получаем первую систему уравнений Кирхгофа в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{для узла } A: \quad I - I_1 - I_2 &= 0, \\ \text{для узла } B: \quad I_1 - I_3 - I_5 &= 0, \\ \text{для узла } D: \quad I_5 + I_2 - I_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вторую систему уравнений Кирхгофа построим, выделив в нашей схеме замкнутые контуры  $ABDA$ ,  $BCDB$  и  $ACEA$ . Обходя каждый из этих контуров по часовой стрелке, получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{для контура } ABDA: \quad I_1 R_x + I_5 R_3 - I_2 R_1 &= 0, \\ \text{для контура } BCDB: \quad I_3 R_0 - I_4 R_2 - I_5 R_3 &= 0, \\ \text{для контура } ACEA: \quad I_2 R_1 + I_4 R_2 + I R_E &= \mathcal{E}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом, мы получаем шесть уравнений, которые по заданной э.д.с.  $\mathcal{E}$  и заданным сопротивлениям  $R_x$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_E$  позволяют найти силы всех шести токов  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$ . Однако мы ограничимся более простой задачей, ведущей к соотношению (3). А именно, выясним условие, при котором ток  $I_5$ , текущий через гальванометр  $G$ , равен нулю. При  $I_5 = 0$  второе и третье уравнения системы (4) дают:

$$I_1 = I_3, \quad I_2 = I_4, \quad (6)$$

а первое и второе уравнения системы (5):

$$I_1 R_x = I_2 R_1, \quad I_3 R_0 = I_4 R_2. \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) получаем:

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2},$$

что и требовалось показать.

Точность сравнения сопротивлений  $R_x$  и  $R_0$  будет больше, когда отношение  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1}{I_2}$  не сильно отличается от единицы. Поэтому при измерении с помощью мостика Уитстона неизвестного сопротивления  $R_x$  желательно, чтобы сопротивление стандартного сопротивления  $R_0$  не сильно отличалось от  $R_x$ . Для этого в качестве стандартного сопротивления, образующего ветвь  $BC$  мостика Уитстона, обычно берут

магазин сопротивлений (см. § 159); вынимая то или иное число штепселей у магазина, добиваются, чтобы  $R_0$  оказалось близким к  $R_x$ .

3. Соединение элементов в батарею. Рассмотрим сперва два случая: последовательное соединение элементов в батарею и параллельное соединение элементов в батарею. Для простоты будем считать, что все соединяемые элементы имеют одинаковые э.д.с.  $\mathcal{E}$  и одинаковые внутренние сопротивления  $R_0$ .

Пусть батарею образует  $n$  последовательно соединенных элементов (рис. 116); батарея замкнута на внешнее сопротивление  $R$ . Требуется определить силу тока в цепи. Сопротивлением проводов, соединяющих элементы друг с другом, пренебрежем.

Напишем для всего замкнутого контура, образующего нашу цепь, второе уравнение Кирхгофа; оно, очевидно, в этом случае будет иметь вид:

$$InR_0 + IR = n\mathcal{E},$$

откуда

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nR_0}. \quad (8)$$

Если сравнить это выражение с выражением

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0},$$

дающим силу тока в замкнутой цепи с одним элементом с э.д.с.  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $R_0$ , то мы увидим, что *при последовательном соединении  $n$  одинаковых элементов в батарею э.д.с. возрастает в  $n$  раз и в  $n$  раз возрастает внутреннее сопротивление*. Отсюда становится очевидным, что последовательное соединение элементов выгодно в том случае, когда внешнее сопротивление  $R$  очень велико по сравнению с внутренним сопротивлением  $R_0$ . В самом деле, если  $R$  настолько велико, что  $R \gg nR_0$ , то в знаменателе формулы (8) можно пренебречь  $nR_0$  по сравнению с  $R$  и тогда приближенно имеем:

$$I = n \frac{\mathcal{E}}{R},$$

т. е. в результате последовательного соединения  $n$  элементов ток в цепи становится почти в  $n$  раз больше, чем при одном элементе. Если же внешнее сопротивление  $R$  мало по сравнению с общим внутренним сопротивлением батареи  $nR_0$ , то в формуле (8) можно

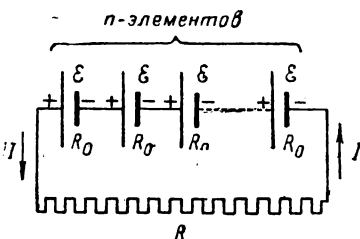


Рис. 116. Последовательное соединение элементов в батарею.

пренебречь  $R$  по сравнению с  $nR_0$  и тогда приближенно получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0},$$

т. е. такой же ток, как и при одном элементе.

Рассмотрим теперь *параллельное соединение* в батарею  $m$  одинаковых элементов с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $R_0$  у каж-

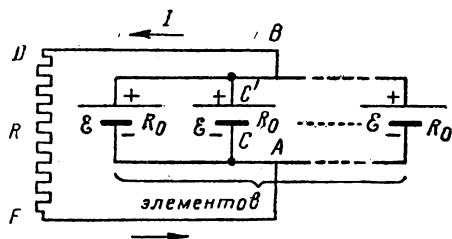


Рис. 117. Параллельное соединение элементов в батарею.

дого (рис. 117). Пусть батарея замкнута на внешнее сопротивление  $R$ ; сопротивлением соединительных проводов пренебрегаем. Так как в узле  $A$  цепь разветвляется на  $m$  одинаковых участков, то первое уравнение Кирхгофа даст, что сила тока в каждом из них будет в  $m$  раз меньше, чем сила тока  $I$  во всей цепи; другими словами, через каж-

ждый из элементов в отдельности протекает ток  $I/m$ . После этого составим второе уравнение Кирхгофа для одного из замкнутых участков цепи, например для контура  $ACC'BDFGA$ ; тогда получим:

$$\frac{I}{m} R_0 + IR = \mathcal{E},$$

откуда

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{R_0}{m}}. \quad (9)$$

Формула (9) показывает, что *при параллельном соединении  $m$  одинаковых элементов в батарею э. д. с. не меняется, а внутреннее сопротивление уменьшается в  $m$  раз.*

Легко видеть, что параллельное соединение элементов в батарею выгодно при малом внешнем сопротивлении: в самом деле, если  $R$  настолько мало, что им можно пренебречь по сравнению с  $R_0/m$ , то формула (9) приближенно дает:

$$I = m \frac{\mathcal{E}}{R_0},$$

т. е. возрастание тока в  $m$  раз по сравнению с током, даваемым в той же цепи одним элементом. При большом внешнем сопротивлении  $R \gg \frac{R_0}{m}$ , и формула (9) показывает, что параллельное соединение элементов в батарею не ведет к увеличению силы тока.

Пользуясь уравнениями Кирхгофа, так же легко показать, что если составить  $n$  последовательно соединенных групп, каждая из которых

состоит из  $m$  параллельно соединенных одинаковых элементов, то сила тока  $I$  будет равна:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{n}{m}R_0}.$$

4. Компенсационный метод определения электродвижущей силы элемента. Определение э. д. с. элемента производится обычно путем сравнения с э. д. с. так называемого „нормального“ элемента, э. д. с. которого хорошо известна. Это сравнение производится с помощью компенсационной схемы, представленной на рис. 118. Батарея  $E_1$ , э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  которой больше э. д. с.  $\mathcal{E}_0$  нормального элемента  $E_0$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_x$  измеряемого элемента  $E_x$ , замыкается на внешнее сопротивление  $AC$ . Нормальный элемент  $E_0$  присоединяется с помощью ключа  $I$  к цепи  $AC$  так, что его положительный полюс соединен с той точкой  $A$  сопротивления  $AC$ , где потенциал выше, а отрицательный — с контактом  $B$ , могущим скользить вдоль сопротивления  $AC$ . Гальванометр  $G$  измеряет силу тока, проходящего через нормальный элемент  $E_0$ . Измеряемый элемент  $E_x$  первоначально предполагаем отключенным от схемы с помощью ключа  $2$ .

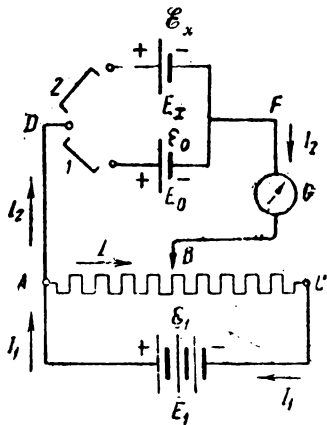


Рис. 118. Схема компенсационного метода определения электродвижущей силы элемента.

Пусть по участкам цепи  $AB$ ,  $BCE_1A$  и  $ADE_0FB$  соответственно текут токи  $I$ ,  $I_1$  и  $I_2$ . Тогда, применяя первое уравнение Кирхгофа к узлу  $A$ , получим:

$$I_1 - I_2 = I.$$

Обозначим сопротивление участка цепи  $ADE_0FB$  через  $R_0$ , а сопротивление участка цепи  $AB$  — через  $R_1$ , тогда, составляя второе уравнение Кирхгофа для замкнутого контура  $ADE_0FBA$ , получим:

$$R_0 I_2 - R_1 I = -\mathcal{E}_0,$$

или, так как  $I = I_1 - I_2$ , то

$$R_0 I_2 - R_1 (I_1 - I_2) = -\mathcal{E}_0. \quad (10)$$

Перемещая контакт  $B$ , можно добиться равенства нулю силы тока  $I_2$ , что непосредственно устанавливается по отсутствию отклонения стрелки гальванометра  $G$ . Тогда соотношение (10) принимает вид:

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_0. \quad (11)$$

Таким образом, когда падение потенциала  $I_1 R_1$  на участке цепи  $AB$  равно э. д. с. нормального элемента  $\mathcal{E}_0$ , его э. д. с. компенсирована, — ток через нормальный элемент равен нулю. Написав при этом второе уравнение Кирхгофа для контура  $ABCE_1A$ , получим, что сила тока  $I_1$  определяется только значением э. д. с.  $\mathcal{E}_1$  и сопротивлением  $R_3$  всего контура:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_3}.$$

После того как был компенсирован нормальный элемент, его отключают с помощью ключа 1 и вместо него в схему включают ключом 2 измеряемый элемент  $\mathcal{E}_x$ . Передвигая скользящий контакт  $B$ , снова добиваются равенства нулю тока, идущего через гальванометр  $G$ . При этом положение контакта  $B$  будет иное, чем при нормальном элементе, и сопротивление участка цепи  $AB$  будет иметь некоторое другое значение  $R_2$ . Однако, очевидно, снова должно быть выполнено условие, аналогичное условию (11):

$$I_1 R_2 = \mathcal{E}_x. \quad (12)$$

Сила тока  $I_1$  снова равна  $\mathcal{E}_1/R_3$ ; тогда из (11) и (12) получаем отношение э. д. с.:

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_0} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_x = \frac{R_2}{R_1} \mathcal{E}_0.$$

Таким образом, зная э. д. с. нормального элемента  $\mathcal{E}_0$  и отношение сопротивлений  $R_2/R_1$ , находим измеряемую э. д. с.  $\mathcal{E}_x$ .

Как видно, метод не требует знания самих сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , а лишь их отношения  $R_2/R_1$ ; это отношение может быть определено по положениям скользящего контакта  $B$ .

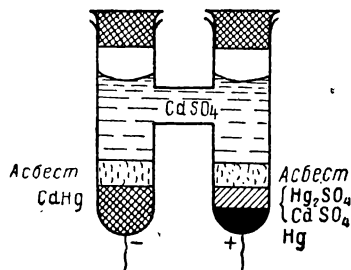


Рис. 119. Нормальный элемент.

В качестве нормального элемента обычно употребляется ртутно-кадмиевый элемент, э. д. с. которого весьма мало меняется со временем (мала поляризация электродов; см. § 179). Этот элемент (рис. 119) состоит из ртутного электрода (положительный полюс) и амальгамы кадмия (отрицательный полюс). Между ними помещается сернокислая ртуть ( $Hg_2SO_4$ ) с кристаллами  $CdSO_4$  и раствор сернокислого кадмия ( $CdSO_4$ ). Электродвижущая сила нормального элемента при температуре в  $20^\circ C$  равна  $\mathcal{E}_{0,20} = 1,0183$  в;

с изменением температуры она меняется весьма мало: э. д. с.  $\mathcal{E}_{0,t}$  при  $t^\circ C$  выражается следующей эмпирической формулой:

$$\mathcal{E}_{0,t} = \mathcal{E}_{0,20} - 4,075 \cdot 10^{-5} (t^\circ - 20^\circ) - 9,444 \cdot 10^{-7} (t^\circ - 20^\circ)^2 + 9,8 \cdot 10^{-9} (t^\circ - 20^\circ)^3.$$

**§ 168. Контактная разность потенциалов.** Для понимания причин, создающих э. д. с., рассмотрим прежде всего условия, имеющие

место на границе двух металлов и на границе металл—вакуум. В 1797 г. Вольта открыл, что при соприкосновении двух различных металлов между ними возникает разность потенциалов. Вольта установил ряд металлов, в котором каждый предыдущий металл при соприкосновении с одним из последующих электризуется положительно. Ряд этот следующий: Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

Далее Вольта установил, что если несколько различных металлов  $A, B, C, D$  (рис. 120) присоединить друг к другу последовательно, то на концах проводников этого ряда возникает разность потенциалов, зависящая только от природы

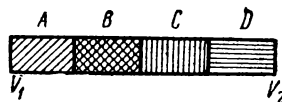


Рис. 120. Последовательный ряд металлов.

крайних проводников  $A$  и  $D$  и не зависящая от того, какие проводники  $B$  и  $C$  находятся между ними. Указанная разность потенциалов, возникающая при соприкосновении разнородных металлов, называется *контактной разностью потенциалов*. Контактная разность потенциалов колеблется для различных пар металлов от нескольких десятых вольт до целых вольт; она сильно зависит от чистоты металлов, в особенности от чистоты их поверхности от оклюдированных газов.

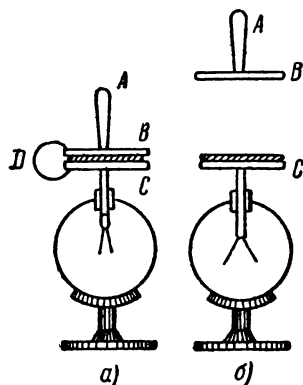


Рис. 121. Обнаружение контактной разности потенциалов.

Существование контактной разности потенциалов наиболее просто можно обнаружить с помощью следующего опыта. На стержень электроскопа навинчивают пластинку  $C$  из испытуемого металла (рис. 121  $a$ ). Пластинка  $C$  сверху покрыта тонким слоем изолирующего материала. На пластинку  $C$  накладывают вторую пластинку  $B$  из второго испытуемого металла, снабженную изолирующей ручкой  $A$ . Обе пластинки соединяют проволокой  $D$ . Тогда, по сказанному выше, между пластинками  $C$  и  $B$  установится разность потенциалов, соответствующая природе тех металлов, из которых они

сделаны, независимо от того, из какого металла сделана проволока  $D$ . В результате этого плоский конденсатор, который представляет собой обе пластинки  $C$  и  $B$ , зарядится. Отведем верхнюю пластинку  $B$  к земле и уберем проволоку  $D$ . Нижняя пластинка  $C$  окажется заряженной до потенциала, равного контактной разности потенциалов между испытуемыми металлами. Однако ввиду недостаточной чувствительности обыкновенного электроскопа с листочками, мы ее еще не обнаружим. Для того чтобы обнаружить наличие разности потенциалов между



пластинками  $C$  и  $B$ , поднимем пластинку  $B$  за ручку  $A$  (рис. 121  $\sigma$ ), тогда расстояние между пластинками увеличится, а следовательно, емкость образованного ими конденсатора упадет (§ 148). Так как заряды, находящиеся на пластинках, при этом останутся неизменными, то разность потенциалов между пластинками возрастет во столько же раз, во сколько уменьшилась емкость. При достаточном раздвижении пластинок потенциал пластинки  $B$  повысится настолько, что листочки электроскопа разойдутся. Если электроскоп градуирован в вольтах и заранее измерена его емкость (емкость без пластинки и емкость после наложения верхней пластинки, соединенной с землей), то можно вычислить искомую контактную разность потенциалов.

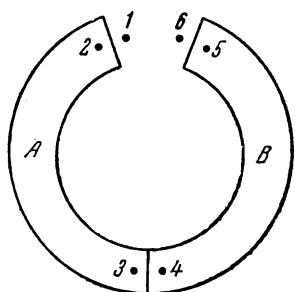


Рис. 122. К объяснению контактной разности потенциалов.

Однако этот способ недостаточно точен, и ниже мы опишем другие способы измерения контактной разности потенциалов.

Рассмотрим подробнее возникновение контактной разности потенциалов. Возьмем незамкнутую цепь из двух металлов  $A$  и  $B$  (рис. 122) и проследим изменение потенциала при обходе контура последовательно через точки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Между точками 1 и 2 имеется разность потенциалов вследствие того, что электроны в металле находятся в потенциальной яме. Точки 2 и 3 находятся при одном потенциале, как относящиеся к одному и тому же металлу. В месте контакта металлов  $A$  и  $B$  возникнет разность потенциалов, что даст изменение потенциала при переходе от точки 3 (металл  $A$ ) к точке 4 (металл  $B$ ). Точки 4 и 5 находятся при одном потенциале. Между точками 5 и 6 (металл  $B$  и вакуум) снова будет скачок потенциала, так как электроны в металле  $B$  находятся в потенциальной яме. Таким образом, можно рассматривать две разные величины: разность потенциалов в месте соприкосновения двух металлов (так называемую внутреннюю контактную разность потенциалов) и разность потенциалов между точками 1 и 6 у поверхности обоих металлов в вакууме. Эта последняя называется внешней контактной разностью потенциалов и она-то обычно и измеряется, поэтому ее часто называют просто контактной разностью потенциалов  $V_{AB}$ . Благодаря разности потенциалов между точками 1 и 6, в зазоре между концами металлов  $A$  и  $B$  возникает электрическое поле, а на свободных поверхностях металлов  $A$  и  $B$  — электрические заряды.

Как указано в § 163, электроны в металле находятся в потенциальной яме, внутри которой имеются энергетические уровни. При температуре абсолютного нуля  $n/2$  нижних уровней заполнены электронами ( $n$  — число электронов), остальные пусты. При  $T \neq 0$  часть элек-

тронов находится на более высоких уровнях. Однако при не очень высоких температурах число таких электронов относительно невелико, и мы поэтому будем считать, для простоты, что только  $n/2$  нижних уровней заполнены. Эти уровни изображены на рис. 123, где  $E_{p0}$  — энергия электрона вне металла, а  $E_i$  — энергия последнего из занятых уровней. Величина  $A = E_{p0} - E_i$  представляет собой работу выхода электрона из металла в вакуум. Работу выхода принято выражать произведением из заряда электрона  $e$  на разность потенциалов  $V$ , подобранную так, чтобы произведение  $eV$  равнялось работе выхода  $A$ :

$$eV = A.$$

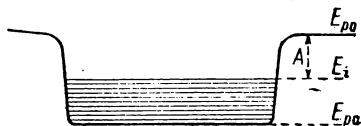


Рис. 123. Неполное заполнение энергетических уровней в кристалле.

Так как заряд электрона есть величина постоянная, то работа выхода однозначно определяется разностью потенциалов  $V = \frac{A}{e}$ . Однако работу выхода обычно измеряют не в единицах потенциала, а в особых единицах работы, называемых *электрон-вольт* (сокращенно *эв*). Эта единица работы равна работе, совершаемой при перемещении заряда, равного заряду одного электрона  $e$ , между точками с разностью потенциалов в 1 вольт. Так как  $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ , то

$$1 \text{ эв} = \frac{4,803 \cdot 10^{-10}}{300} \text{ эрг} = 1,601 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Исходя из этого представления об энергии электрона в металле, проследим, каковы будут энергии электронов в случае двух соприкасающихся металлов. На рис. 124 изображены графически энергии электронов в двух соприкасающихся металлах, причем точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют точкам на рис. 122, отмеченным теми же цифрами. Величина  $E_{iA}$  представляет собой энергию электрона, находящегося в металле  $A$  на последнем из занятых уровней, а  $E_{iB}$  —

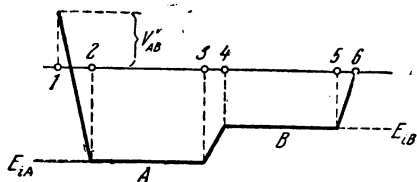


Рис. 124. Потенциальная яма двух соприкасающихся металлов.

энергию электрона, находящегося на последнем из занятых уровней в металле  $B$ . Если эти энергии не равны друг другу, то в месте контакта металлов возникнет скачок потенциала, соответствующий переходу от точки 3 к точке 4. Этот скачок потенциалов представляет собой внутреннюю контактную разность потенциалов  $V_{AB}^*$ .

Разность потенциалов между точками 2 и 1 обусловлена тем, что для перевода электрона из металла (точка 2) в вакуум (точка 1) надо совершить работу  $A_A$ . Работа выхода  $A_A$  определит потенциал

$V_A = \frac{A_A}{e}$ , которым будет обладать электрон, вырванный из металла  $A$  и находящийся в вакууме около его поверхности (точка  $I$ ). Точно также потенциал электрона вблизи металла  $B$  в точке  $6$  будет равен  $V_B = \frac{A_B}{e}$ , где  $A_B$  — работа выхода электрона из металла  $B$  в вакуум. Таким образом, в зазоре между металлами возникнет разность потенциалов  $V'_{AB}$  (разность потенциалов между точками  $I$  и  $6$ ), равная:

$$V'_{AB} = V_B - V_A = \frac{A_B - A_A}{e}. \quad (1)$$

Величина  $V'_{AB}$  представляет собой внешнюю контактную разность потенциалов двух соприкасающихся металлов. Как сказано, она вызвана разностью работ выхода из обоих металлов.

Полная контактная разность потенциалов  $V_{AB}$  между точками  $I$  и  $2$  складывается из внешней и внутренней контактных разностей потенциалов:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB}. \quad (2)$$

Внутренняя контактная разность потенциалов  $V''_{AB} = E_{iB} - E_{iA}$  (см. рис. 124). Полная теория внутренней контактной разности потенциалов может быть дана лишь на основе квантовой механики. С точки зрения классической электронной теории возникновение внутренней контактной разности потенциалов можно объяснить тем, что в действительности число свободных электронов  $n_0$ , приходящихся на единицу объема, различно в металлах  $A$  и  $B$ . Обозначим число электронов в единице объема в металле  $A$  через  $n_{0A}$ , а в металле  $B$  — через  $n_{0B}$ . Если допустить, что  $n_{0A} < n_{0B}$ , то через поверхность соприкосновения обоих металлов будет диффундировать меньше электронов в металл  $B$ , чем обратно из металла  $B$  в металл  $A$ . В результате, между металлами  $A$  и  $B$  возникнет разность потенциалов  $V''_{AB}$ . Соответственные теоретические выкладки (см. мелкий шрифт) показывают, что

$$V''_{AB} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}, \quad (3)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $e$  — заряд электрона,  $T$  — абсолютная температура металлов. Однако числа электронов  $n_{0A}$  и  $n_{0B}$  для всех действительных пар металлов мало отличаются друг от друга. Поэтому разность потенциалов  $V''_{AB}$  обычно мала по сравнению с разностью потенциалов  $V'_{AB}$ , и практически контактная разность потенциалов  $V_{AB}$  близка к  $V'_{AB}$ , т. е. выражается приближенно через работы выхода равенством (1).

Разность потенциалов на концах ряда последовательно соединенных металлов зависит лишь от природы крайних металлов и не за-

висит от природы промежуточных металлов. Рассмотрим для этого ряд последовательно соединенных металлов  $A, B, C$ . Разность потенциалов на концах такой разомкнутой цепи равна сумме контактных разностей потенциалов отдельных пар:

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = (V_B - V_A) + (V_C - V_B) = V_C - V_A.$$

Как видно,  $V_{AC}$  определяется лишь значениями  $V_A$  и  $V_C$ , т. е.  $V_{AC}$  равно той контактной разности потенциалов, которая возникла бы при непосредственном соприкосновении металлов  $A$  и  $C$  без промежуточного металла  $B$ . Таким же образом мы приходим к выводу, что *при образовании замкнутой цепи из последовательно соединенных различных металлов (рис. 125) сумма контактных разностей потенциалов этих металлов не создаст в цепи результирующей э. д. с.* В самом деле, э. д. с.  $\mathcal{E}$  представляет собой алгебраическую сумму всех скачков потенциалов, встречаемых при обходе замкнутой цепи. Отсюда при обходе замкнутой цепи, например из трех различных металлов  $A, B, C$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = (V_B - V_A) + \\ &+ (V_C - V_B) + (V_A - V_C) = 0. \end{aligned}$$

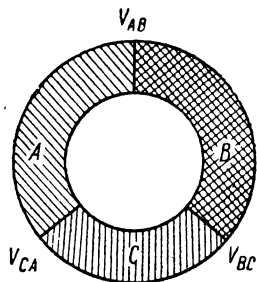


Рис. 125. Замкнутая цепь из трех металлов.

Этот результат справедлив, если все контакты цепи находятся при одинаковой температуре.

К тому же результату можно прийти из общих термодинамических соображений. Металлы представляют собой так называемые проводники первого рода, т. е. такие проводники, в которых не происходит никаких химических изменений при прохождении через них электрического тока. Поэтому, если бы в замкнутой цепи из проводников первого рода возникла отличная от нуля э. д. с., то вызванный ею постоянный электрический ток не повел бы к каким-либо изменениям в самих проводниках. Вместе с тем этот ток развивал бы определенную мощность, которая могла бы братья лишь за счет тепла, передаваемого окружающими телами. Но такой процесс представлял бы собой перпетуум мобиле второго рода, осуществление которого невозможно.

Окончательно мы приходим к выводу, что существование одной лишь контактной разности потенциалов не может повести к возникновению э. д. с. Электродвижущая сила может возникнуть в замкнутой цепи (при одинаковой температуре всех частей цепи), лишь если эта цепь содержит наряду с проводниками первого рода и проводники второго рода, т. е. такие, в которых при прохождении тока происходят химические процессы.

Приведем рассмотрение второй части контактной разности потенциалов, связанной с различием числа свободных электронов в разных металлах, пользуясь приемами классической электронной теории. Такое рассмотрение этого вопроса допустимо вследствие того, что энергетические уровни электронов в металле расположены близко друг к другу и не целиком заполнены.

Предположим, что резкой границы между металлами нет, но имеется переходный слой, в котором число электронов, приходящихся на единицу объема, непрерывно меняется от значения  $n_{0A}$  до значения  $n_{0B}$ . Выделим в переходном слое цилиндр с образующими, перпендикулярными к границе раздела обоих соприкасающихся металлов, и с основаниями, параллельными этой границе (рис. 126). Пусть длина цилиндра равна  $dx$ , а площадь оснований  $dS$ . По гипотезе Лоренца (ср. сказанное в § 161), свободные электроны в металле

образуют электронный газ, удовлетворяющий основным представлениям кинетической теории газов.

Пусть в области, где лежит основание цилиндра 1, число электронов в единице объема равно  $n_0 + dn_0$ , а в области, где лежит основание цилиндра 2, оно равно  $n_0$ . Тогда давление электронного газа на основание 2 равно

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w},$$

Рис. 126. К подсчету давления электронного газа.

где  $\bar{w}$  — средняя кинетическая энергия электронов при данной температуре.

Как мы видели (§ 163), классическая и квантовая теории дают разные значения для средней энергии  $\bar{w}$  электронов при данной температуре, причем классическое значение ведет к неверной теплоемкости металлов. Тем не менее мы воспользуемся здесь классическим значением  $3/2 kT$  как более простым, что возможно, так как мы будем ограничиваться выяснением лишь основных черт процесса.

Таким образом, подставляя  $\bar{w} = 3/2 kT$  в выражение для давления электронного газа  $p$  на основание цилиндра 2 получим

$$p = n_0 kT.$$

Так же получим, что на основание цилиндра 1 электронный газ оказывает давление

$$p + dp = (n_0 + dn_0) kT.$$

Отсюда разность давлений, испытываемых цилиндром, равна

$$dp = kT dn_0. \quad (4)$$

Вследствие этой разности давлений электроны начнут перемещаться от основания 1 в сторону основания 2 (если считать  $dn_0$  положительным). Это перемещение электронов поведет к переносу зарядов, а следовательно, к возникновению разности потенциалов  $dV$  между основаниями 2 и 1, препятствующей дальнейшему перемещению электронов. Динамическое равновесие наступит, когда тормозящая сила электрического поля станет равной силе, обусловленной разностью давлений  $dp$ .

Число электронов в рассматриваемом цилиндрическом объеме равно  $n_0 dx dS$ , отсюда сила, действующая со стороны поля на все эти электроны,

$$dF = E en_0 dx dS,$$

где  $E$  — напряженность поля,  $e$  — заряд электрона. По формуле (2а) § 131, напряженность поля  $E$  по численному значению равна

$$|E| = \frac{dV}{dx}, \text{ откуда } |dF| = en_0 \frac{dV}{dx} dx dS,$$

а следовательно, условие динамического равновесия, которое сводится к требованию, чтобы  $|dF| = dp dS$ , приводит к равенству:

$$en_0 dV = dp,$$

или, если воспользоваться формулой (4),

$$en_0 dV = kT dn_0.$$

Последнее равенство может быть переписано в виде:

$$dV = \frac{kT}{e} \frac{dn_0}{n_0}.$$

Для получения полной разности потенциалов  $V''_{AB}$  это соотношение надо проинтегрировать от слоя, лежащего в области металла  $B$ , где число электронов в единице объема равно  $n_{0B}$ , до слоя в области металла  $A$ , где число электронов в единице объема равно  $n_{0A}$ . Таким образом, получаем

$$V''_{AB} = \int_{n_{0B}}^{n_{0A}} \frac{kT}{e} \cdot \frac{dn_0}{n_0} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}},$$

что совпадает с формулой (3) § 168.

Как мы указывали, разность потенциалов  $V''_{AB}$  мала. Это обусловлено тем, что число свободных электронов, приходящихся на единицу объема, мало отличается для различных металлов друг от друга; во всяком случае, можно полагать, что  $n_{0A}/n_{0B}$  не превышает 3. Это дает  $\ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} \cong 1$  и, следовательно, при  $T = 300^\circ \text{K}$  имеем

$$V''_{AB} \cong \frac{kT}{e} = \frac{1,38 \cdot 10^{-18} \cdot 300}{4,8 \cdot 10^{-10}} \text{ CGSE} \cong 0,03 \text{ в.}$$

Приведенное классическое рассмотрение второй части контактной разности потенциалов в значительной мере имеет иллюстративное значение и в строгой теории должно быть заменено квантовомеханическим, однако физическая сторона процесса в классическом рассмотрении очень ясно выражена, хотя количественно результаты даются этим рассмотрением не точно.

**§ 169. Гальванические элементы.** Наряду с проводниками первого рода (металлы, уголь), в которых не происходит никаких химических изменений при прохождении через них электрического тока, существуют так называемые *проводники второго рода*, в которых происходят химические изменения при прохождении через них тока. К проводникам второго рода относятся растворы солей, кислот и щелочей. В металлах, как мы видели, электрический ток сводится к перемещению свободных электронов. В проводниках второго рода носителями зарядов являются ионы. Молекулы солей при растворении

солей распадаются на ионы, т. е. на части, заряженные противоположными знаками. Например, при растворении в воде поваренной соли молекулы  $\text{NaCl}$  распадаются на положительные ионы  $\text{Na}^+$  и отрицательные ионы  $\text{Cl}^-$ . Передвижение этих ионов, под влиянием внешнего электрического поля, образует ток в проводнике второго рода. Процесс распада молекул в растворе на ионы, носящий название *электролитической диссоциации*, а также механизм прохождения тока через проводники второго рода мы рассмотрим подробно в параграфах, посвященных электролизу. Сейчас же разберем роль проводников второго рода в возникновении э. д. с.

Как мы видели, при образовании замкнутой цепи из различных проводников первого рода в ней не возникает э. д. с. Если же составить замкнутую цепь из проводников первого и второго рода, то в ней возникает отличная от нуля э. д. с. Э. такого рода комбинация проводников первого и второго рода образует *гальванический элемент*.

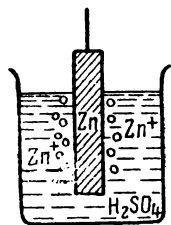


Рис. 127. Переход ионов цинка в раствор серной кислоты.

На границе между металлом (проводником первого рода) и раствором (проводником второго рода) образуется скачок потенциала, непрерывное восстановление которого происходит за счет работы химических сил.

Рассмотрим, например, цинковую пластинку, опущенную в водный раствор серной кислоты (рис. 127). Цинк начнет растворяться; однако атомы цинка будут переходить при этом в раствор не в виде нейтральных атомов, а в виде положительных ионов  $\text{Zn}^+$ . В результате раствор окажется заряженным положительно, а цинк — отрицательно. На границе между цинком и раствором  $\text{H}_2\text{SO}_4$  образуется двойной электрический слой. В области двойного электрического слоя появится электрическое поле, и ионы цинка начнут частично поступать обратно в цинк. В результате установится динамическое равновесие.

При вполне определенной разности потенциалов между раствором и металлом (в случае чистого цинка около  $+0,51$  в) электрические силы уравнивают химические, и дальнейшее растворение цинка прекратится.

Но если в раствор  $\text{H}_2\text{SO}_4$  поместить вторую металлическую пластинку из какого-либо другого металла и соединить ее с первой проволокой, то возникнет ток, так как около второй пластинки будет происходить аналогичный процесс поступления ионов в раствор, но вторая пластинка примет, вообще говоря, другой потенциал, чем первая (рис. 128).

Работа химических сил будет непрерывно восстанавливать скачки потенциалов около обоих металлов. Наличие этих неравных друг

другу скачков потенциалов, непрерывно поддерживаемых за счет работы химических сил, обусловит э. д. с. гальванического элемента.

Возможен подбор и такой пары металл — раствор, когда из раствора положительные ионы поступают в металл; в этом случае металл заряжается положительно; а раствор отрицательно.

Разберем с указанной точки зрения действие элемента Даниэля. Элемент Даниэля, схематически представленный на рис. 104, состоит, как мы уже указывали, из цинковой пластинки, погруженной в раствор цинкового купороса ( $\text{ZnSO}_4$ ), и медной пластинки, погруженной в раствор медного купороса ( $\text{CuSO}_4$ ); растворы разделены пористой перегородкой А. Цинковая пластинка заряжается отрицательно в результате выделения положительных ионов  $\text{Zn}^{+}$  в раствор; на границе цинка и раствора возникает скачок потенциала  $+0,51$  в. Медная пластинка заряжается положительно за счет поступающих в нее положительных ионов  $\text{Cu}^{+}$  из раствора, в котором молекулы  $\text{CuSO}_4$  диссоциируют на отрицательные ионы  $\text{SO}_4^{-}$  и положительные ионы  $\text{Cu}^{+}$ ; на границе раствора с медью возникает скачок потенциала  $+0,60$  в.

Наконец, при обходе всего замкнутого контура надо принять во внимание контактную разность потенциалов между медью и цинком (она равна  $+0,006$  в) и разность потенциалов в месте соприкосновения обоих растворов. Эта последняя разность потенциалов зависит от концентрации растворов и выражается тысячными долями вольт.

Таким образом, э. д. с. элемента Даниэля в основном сложится из двух скачков потенциалов, возникающих на границах соприкосновения металлических пластинок с соответственными растворами. Так как эти скачки потенциалов равны  $+0,5$  и  $+0,6$  в, то э. д. с. элемента Даниэля  $\mathcal{E} = 1,1$  в. Эта э. д. с. может быть рассчитана по теплотам химических реакций, протекающих в элементе.

Термохимические измерения дают, что процесс превращения цинка в цинковый купорос  $\text{ZnSO}_4$  (что в конечном счете происходит в элементе) сопровождается выделением энергии в количестве  $1,06 \cdot 10^5$  кал/моль.

Выделение меди из медного купороса протекает с поглощением  $0,56 \cdot 10^5$  кал/моль.

Таким образом, на каждый моль прореагировавшего в элементе вещества выделяется энергия

$$U = (1,06 - 0,56) 10^5 \text{ кал/моль} = 5,0 \cdot 10^4 \text{ кал/моль} \cong 2 \cdot 10^{12} \text{ эрг/моль}.$$

Эта энергия идет на поддержание работы тока  $A = Q\mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — э. д. с. элемента, а  $Q$  — количество перенесенного электричества. Отсюда

$$Q\mathcal{E} = U \text{ или } \mathcal{E} = \frac{U}{Q}. \quad (1)$$

Количество перенесенного электричества  $Q$  легко подсчитать. Каждый положительный ион цинка в растворе, как мы увидим в дальнейшем, несет двойной положительный заряд, т. е. заряд, численно равный удвоенному заряду электрона  $+2e$ . Отсюда следует, что при растворении одного моля цинка от электрода к раствору переносится количество электричества  $Q = 2eN$ ,

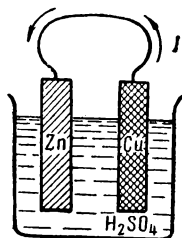


Рис. 128. Гальванический элемент из пластинок цинка и меди, погруженных в раствор серной кислоты.



где  $N$  — число Авогадро. Тогда по (1) получим

$$\mathcal{E} = \frac{U}{Q} = \frac{U}{2eN}.$$

Подставляя вместо  $U$ ,  $e$  и  $N$  их численные значения, найдем

$$\mathcal{E} = \frac{2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 6 \cdot 10^{23}} \text{ CGSE} \cong 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE},$$

или, переводя полученное численное значение из CGSE-единиц в вольты

$$\mathcal{E} = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \text{ в} = 1,05 \text{ в},$$

что близко к указанной выше э. д. с. элемента Даниэля.

В большинстве других элементов химические процессы носят более сложный характер, и расчет э. д. с. не может быть произведен так просто.

**§ 170. Термоэлектрические явления.** В § 168 мы показали, что в замкнутой цепи, составленной из проводников первого рода, не возникает э. д. с. Однако так обстоит дело, пока температура контактов между различными проводниками одинакова. При разной температуре контактов в цепи возникает отличная от нуля э. д. с. (*термоэлектродвижущая сила*). Если составить замкнутую цепь из двух металлов и один из спаев нагревать, оставляя другой холодным, то в цепи потечет ток.

Этот эффект получил название *термоэлектрического явления*.

Возникновение термоэлектродвижущей силы легко объясняется на основании сказанного в § 168. Мы видели, что контактная разность потенциалов обусловлена двумя причинами: различием в работах выхода и различием в числе свободных электронов, приходящихся на единицу объема, в разных металлах. Если принять во внимание обе эти причины, то, по формулам (2) и (3) § 168, контактная разность потенциалов  $V_{AB}$  между металлами  $A$  и  $B$  будет равна

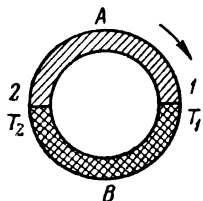


Рис. 129. В замкнутой цепи из двух металлов возникает э. д. с., если температура контактов  $T_1$  и  $T_2$  различна.

$$V_{AB} = V_B - V_A + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что в замкнутой цепи, составленной из двух металлов  $A$  и  $B$  (рис. 129), контакт  $1$  поддерживается при температуре  $T_1$ , а контакт  $2$  — при температуре  $T_2$ . Работы выхода  $V_A$  и  $V_B$  и числа свободных электронов  $n_{0A}$  и  $n_{0B}$  будем считать не зависящими от температуры. Полная э. д. с.  $\mathcal{E}$  равна сумме всех скачков потенциалов, которые мы встретим, обходя замкнутую цепь в определенном направлении (например, в направлении, указанном стрелкой на рис. 129). Тогда, по (1):

$$\mathcal{E} = V_{AB} + V_{BA} = V_B - V_A + \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} + V_A - V_B + \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}},$$

откуда

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e} (T_1 - T_2) \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}. \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что при разных температурах спаев появляется термоэлектродвижущая сила  $\mathcal{E}$ , прямо пропорциональная разности температур спаев  $T_1 - T_2$ . Формула (2) не учитывает возможную зависимость концентрации электронов  $n_{0A}$  и  $n_{0B}$  от температуры.

Величина термоэлектродвижущей силы составляет по теории несколько сотых тысяч долей вольта на градус. Например, в случае цепи, составленной из константана и железа, при разности температур спаев в  $1^\circ\text{C}$  возникает э. д. с.  $5,2 \cdot 10^{-5}$  в. Эта э. д. с. растет, с достаточной хорошей точностью, прямо пропорционально разности температур спаев. Однако наблюдаются и такие случаи, когда зависимость термоэлектродвижущей силы от разности температур носит более сложный характер. Например, пара цинк — серебро в интервале разности температур от  $0^\circ$  до  $100^\circ\text{C}$  дает  $+0,5$  мкв/град, а в интервале разности температур от  $300$  до  $400^\circ\text{C}$  дает  $+4,6$  мкв/град. Возможно даже изменение знака э. д. с.: в паре вольфрам — молибден при малых разностях температур ток идет через горячий спай от молибдена к вольфраму, а при больших разностях температур — от вольфрама к молибдену. Такой характер зависимости термоэлектродвижущей силы от разности температур отчасти объясняется тем, что с температурой меняется отношение числа свободных электронов в единице объема. Однако полная теория термоэлектрических явлений может быть дана лишь на основе квантовой механики.

Термоэлектрические явления в настоящее время широко используются как для измерения высоких температур, так и для обнаружения весьма слабых нагреваний. Для измерения высоких температур употребляются так называемые *термопары*, или термоэлементы, представляющие собой две проволоки из определенных металлов с известной и заранее хорошо промеренной термоэлектродвижущей силой. В месте контактов проволоки спаиваются или свариваются. Один контакт ( $b$  на рис. 130) помещается в среду с определенной температурой  $T_0$ , например в сосуд с тающим льдом, другой ( $a$  на рис. 130) — в область, где измеряется температура  $T$ . Возникающая в цепи э. д. с. измеряется с помощью вольтметра  $V$ . По измеренной э. д. с.

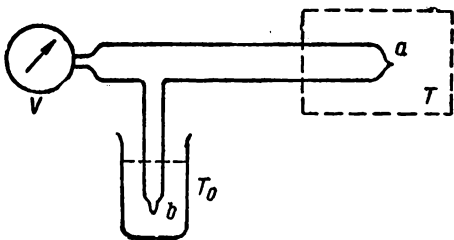


Рис. 130. Схема измерения температуры с помощью термопары.

определяется разность температур  $T - T_0$ . Поскольку температура  $T_0$  заранее известна, эта разность непосредственно даст нам  $T$ . Для термопары, составленной из данных металлов, вольтметр  $V$  может быть градуирован прямо в градусах. Для измерения не слишком высоких

Таблица V

**Термоэлектродвижущие силы  
при температуре холодного спая  $0^\circ\text{C}$**

$T - T_0$ в $^\circ\text{C}$	Термоэлектродвижущая сила (в мВ)		
	Pt — Pt + + 10% Rh	констан- тан — железо	констан- тан — медь
1	0,00	0,00	0,00
100	0,64	5,2	4,3
200	1,42	10,5	8,3
300	2,29	15,8	14,9
500	4,17	26,6	—
800	7,31	43,4	—
1000	9,56	—	—
1500	15,45	—	—
1700	17,81	—	—

температур применяются термопары константан — медь и константан — железо; для измерения высоких температур в заводских и лабораторных печах (до  $1700^\circ\text{C}$ ) употребляются термопары, в которых один провод берется из чистой платины, а другой — из сплава платины и 10% родия.

В табл. V мы приводим термоэлектродвижущие силы, возникающие в указанных трех термопарах при различных разностях температур контактов.

Термоэлектрический эффект может быть использован

также для обнаружения весьма малых нагреваний, например нагреваний, вызываемых поглощением светового потока. Эффект может быть усилен путем применения ряда термопар, соединенных последовательно, причем, например, все четные спаи нагреваются, а нечетные — охлаждаются. Такого рода система термопар называется *термостолбиком*. Термостолбик, изображенный на рис. 131, состоит из ряда очень тонких полосок константановой и манганиновой жести (толщиной порядка 0,005 мм). Средние зачерненные спаи подвергаются действию излучения, боковые располагаются на массивной медной оправе, благодаря чему их температура остается постоянной. В таком термостолбике э. д. с. в один микровольт отвечает мощности поглощаемого излучения в 20 эрг/сек. Дальнейшего повышения чувствительности и большего постоянства показаний можно достигнуть, употребляя *вакуумные термоэлементы*. Обычно вакуумный термоэлемент представляет собой одну термопару из очень тонких полосок константана и манганина, закрепленных между массивными медными стержнями A и B (рис. 132). Вся система помещена в сосуд, из которого откачан воздух. Помещение термопары в вакуум уменьшает потери тепла, что ведет при том же поглощенном световом потоке к более сильному нагреванию спая;

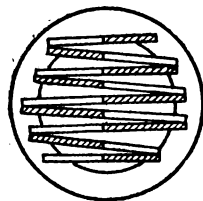


Рис. 131. Термостолбик.

благодаря этому чувствительность термопары повышается до 100 раз. В лучших образцах вакуумных термопар э. д. с. в один микровольт отвечает мощности излучения в  $0,5 \text{ эрг/сек.}$

Большое число соединенных вместе термопар может образовать батарею, способную давать разность потенциалов в несколько вольт и токи силой в несколько ампер. Однако к. п. д. такой *термобатареи* невелик. Термобатарея, давая за счет поглощаемого тепла электрический ток, должна удовлетворять второму началу термодинамики. Следовательно, ее к. п. д.  $\eta'$  не может превышать к. п. д.  $\eta$  идеальной тепловой машины:

$$\eta = \frac{T - T_0}{T},$$

где  $T$  — температура горячего спая, а  $T_0$  — температура холодного спая.

Таким образом, чтобы действие термобатареи было выгодно, надо сильно нагревать одни спай, оставляя другие холодными. Но при этом становятся неизбежными большие вредные потери, и практически достижимое значение к. п. д.  $\eta$  оказывается значительно ниже теоретического.

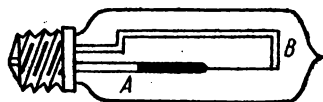


Рис. 132. Вакуумный термоэлемент.

В известном смысле обратным термоэлектрическому оказывается явление *Пельтье*. Оно заключается в том, что при прохождении тока через спай двух

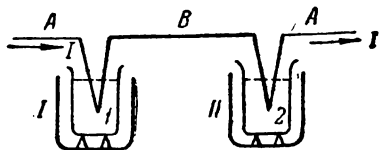


Рис. 133. Схема опыта для наблюдения явления Пельтье.

различных металлов в спаях выделяется или поглощается количество тепла, добавочное по отношению к обычному лентц-джоулеву теплу. Если при определенном направлении тока в спаях выделяется тепло, то при обратном направлении тока в том же спаях тепло поглощается. Для наблюдения этого явления можно использовать следующую схему: в два калориметра погружаются спай 1 и 2 трех последовательно соединенных проводников — проводника А, проводника В и снова проводника А (рис. 133). При пропускании электрического тока в направлении, указанном стрелкой, в спаях 1 ток идет от металла А к металлу В, а в спаях 2 — от металла В к металлу А. При этом, если в спаях 1 выделяется тепло, в спаях 2 оно поглощается. Если в оба калориметра погружены одинаковые отрезки цепи, то выделяемые в них лентц-джоулевы теплоты  $Q$  одинаковы, теплоты же Пельтье  $q$  имеют разные знаки.

Таким образом, в калориметре I выделяется за некоторое время количество тепла

$$Q_1 = Q + q,$$

а в калориметре II за то же время выделяется

$$Q_2 = Q - q.$$

Отсюда

$$Q_1 - Q_2 = 2q \quad \text{или} \quad q = \frac{Q_1 - Q_2}{2},$$

т. е. калориметрические измерения позволяют непосредственно найти тепло  $q$ . Тепло  $q$  пропорционально силе тока, проходящего через спай, и времени его прохождения.

Качественно явление Пельтье объясняется наличием контактной разности потенциалов. Если электрическое поле, создаваемое в спайе контактной разностью потенциалов, ускоряет электроны, то в спайе выделяется добавочное количество тепла, если поле задерживает электроны, то тепло поглощается.

Существует еще одно термоэлектрическое явление, предсказанное теоретически Томсоном и заключающееся в том, что в *однородном проводнике*, при наличии в нем разности температур, должна возникать э. д. с. В результате этой э. д. с. наблюдается эффект, аналогичный явлению Пельтье: при пропускании тока через такой неравномерно нагретый проводник в нем выделяются или поглощаются добавочные количества теплоты, кроме обычного ленц-джоулева тепла. В том участке, где направление электронного тока совпадает с направлением теплового потока, выделяется добавочное количество тепла. В том же участке, где направления электронного тока и теплового потока противоположны, поглощается тепло.

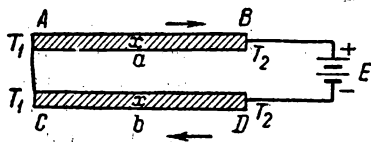


Рис. 134. Метод обнаружения явления Томсона.

Явление Томсона может быть наблюде-  
но следующим образом: два одинаковых стержня  $AB$  и  $CD$  соединены проволокой, как указано на рис. 134. Концы  $A$  и  $C$  поддерживаются при более высокой температуре  $T_1$ , а концы  $B$  и  $D$  — при более низкой температуре  $T_2$ . Если стержни включить в цепь батареи  $E$ , как показано на рис. 134, то электронный ток, направление которого отмечено стрелками, потечет в стержне  $AB$  в направлении спада температуры, а в стержне  $CD$  — в направлении возрастания температуры. До включения тока симметрично расположенные точки  $a$  и  $b$  на обоих стержнях имеют одинаковую температуру. После включения тока, в результате явления Томсона, точка  $a$  станет горячее точки  $b$ , так как в стержне  $AB$  электронный ток совпадает по направлению с тепловым потоком, а в стержне  $CD$  ему противоположен.

Следует отметить, что все приведенные объяснения термоэлектрических явлений, в основе которых лежит представление о „газе“ из электронов, принимающих участие в тепловом движении, носят лишь качественный характер. С количественной стороны результаты теории плохо сходятся с опытными данными. Причина этих расхождений лежит в непригодности классических представлений для описания поведения электронов в металлах. Правильное представление может быть дано лишь на основе квантовой механики (см. § 163).

**§ 171. Полупроводники.** Рассмотренные явления относятся к металлам-проводникам, электропроводность которых обусловлена наличием свободных электронов. В настоящее время в физике стали играть большую роль полупроводники. Как было сказано выше (см. § 154), полупроводники отличаются от металлов малой электропроводностью, которая в отличие от электропроводности проводников увеличивается с температурой по закону:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{b}{T}},$$

где  $T$  — абсолютная температура, а  $b$  — постоянная, различная для разных полупроводников.

Как правило, электропроводность полупроводников чрезвычайно быстро возрастает с увеличением температуры, а их удельное сопротивление  $\rho$  соответственно падает. Так, чистый кремний (Si), представляющий собой типичный полупроводник, при  $20^\circ\text{C}$  имеет  $\rho = 6 \cdot 10^4 \text{ ом} \cdot \text{см}$ , а при  $700^\circ\text{C}$  его удельное сопротивление  $\rho \approx 0,1 \text{ ом} \cdot \text{см}$ , т. е. в несколько сот тысяч раз меньше.

При очень низких температурах полупроводники становятся изоляторами.

Увеличение проводимости с повышением температуры объясняется тем, что тепловое движение создает в полупроводниках носители тока. Увеличение электропроводности полупроводников может быть также вызвано освещением или другим воздействием, связанным с передачей энергии. Особое значение полупроводников вызвано рядом их свойств. Оказывается, что в цепи, составленной из двух различных полупроводников, можно получить термоэлектродвижущую силу, значительно более высокую, чем в термоэлементе из двух проводников. Обозначая температуры обоих контактов через  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно, получаем в цепи из двух полупроводников э. д. с., которая оказывается пропорциональной разности температур контактов:

$$\mathcal{E} = \alpha (T_1 - T_2),$$

причем величина  $\alpha$  достигает значений порядка  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ в/град}$ , тогда как в металлах эта величина имеет порядок  $10^{-8} \text{ в/град}$ .

Особые условия создаются в месте контакта двух полупроводников или полупроводника и металла. Сопротивление в месте контакта может сильно зависеть от направления тока: при одном направлении тока оно мало, при другом — велико. Это обстоятельство используется в так называемых *твердых выпрямителях* (см. § 237).

Под действием освещения, как сказано, электропроводность полупроводников также возрастает. Это используется для измерения величины светового потока (см. т. III).

Свойства полупроводников могут быть объяснены только на основе квантовой теории твердых тел. В § 163 было сказано, что в металлических проводниках электроны распределены по многочисленным энергетическим уровням, расположенным очень близко друг от друга. Каждый энергетический уровень заполняется двумя электронами. В проводнике электроны заполняют нижние уровни, верхние уровни остаются свободными. Это означает, что под влиянием внешнего электрического поля электроны могут переходить на более высокие свободные уровни, т. е. менять свою энергию, в том числе и свою кинетическую энергию. Другими словами, электроны под влиянием внешнего поля могут менять скорость. Поскольку энергетические уровни расположены очень близко друг от друга, изменение энергии практически происходит непрерывно, чем и объясняется, что классическая

электронная теория могла правильно описать значительное число фактов, относящихся к электропроводности металлов.

Более подробная теория кристаллических твердых тел показывает, что в кристаллах образуются группы или, как принято говорить, *зоны* дозволенных энергетических уровней, разделенные достаточно широкими областями „запрещенных“ энергетических состояний.

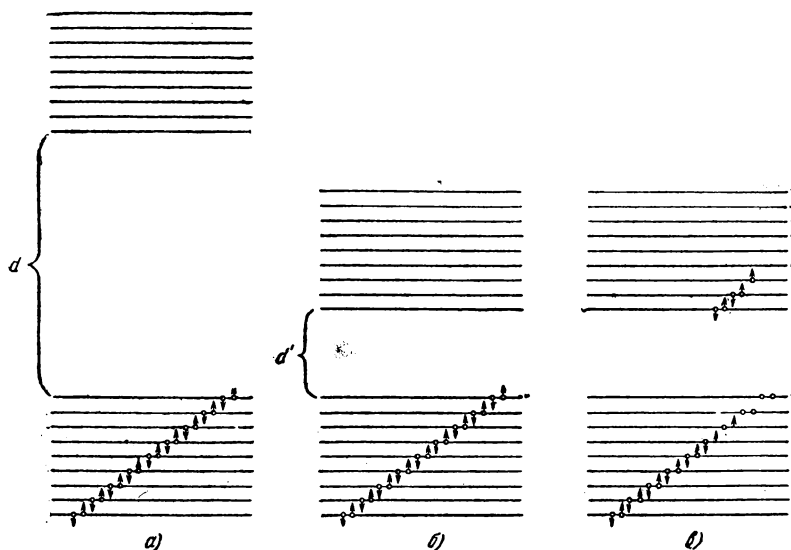


Рис. 135. Зоны дозволенных состояний электронов в кристалле: а — диэлектрик, б — полупроводник, в — полупроводник с „дырками“.

Различное относительное расположение зон дозволенных энергетических состояний объясняет различие в свойствах диэлектриков, проводников и полупроводников. Пусть в кристалле имеются две разделенные достаточно широким промежутком зоны, причем число подуровней в нижней зоне как раз равно половине числа свободных электронов. Тогда вся нижняя зона заполнена электронами, на верхней же зоне электроны отсутствуют. Этот случай изображен на рис. 135а, где электроны отмечены точками со стрелками. Внешнее электрическое поле (если оно не очень сильно) не сможет перевести электроны из нижней зоны в верхнюю, так как зоны разделены широким промежутком. Поэтому внешнее поле не может вообще изменить состояния движения электронов, т. е. сообщить им добавочные скорости. В кристалле под влиянием внешнего поля не возникает электрический ток — такой кристалл является диэлектриком (изоляция

тором). В случае же, если не вся нижняя зона заполнена электронами, то даже слабое внешнее поле может перевести электроны на ближайшие свободные энергетические уровни, т. е. привести их в движение. Такой кристалл (металл) будет проводником.

Из сказанного видно, что квантовая и классическая теория совсем по-разному объясняют различие между диэлектриками и металлами. С классической точки зрения в диэлектрике все электроны прочно удерживаются около своих атомов, в металлах же имеются свободные электроны, переносное движение которых под влиянием внешнего поля образует электрический ток. С квантовой точки зрения и в диэлектрике и в металле существуют „свободные“, т. е. не связанные с определенными атомами, электроны<sup>1</sup>. Диэлектрики и металлы различаются заполненностью и относительным расположением зон дозволенных энергетических состояний электронов.

Зонная теория не только устраняет те трудности, которые встречала классическая теория при попытках объяснить электропроводность металлов, но и объясняет свойства полупроводников. Полупроводник характеризуется тем, что у него, как и у диэлектрика, нижняя зона вся занята электронами (рис. 135б), но расстояние  $d'$  между зонами невелико. При достаточно высокой температуре часть электронов из нижней зоны переходит в верхнюю зону (освободившиеся в нижней зоне места — „дырки“ — отмечены кружками — см. рис. 135в). Так как в верхней зоне остается еще много незанятых мест, то электроны могут менять состояние своего движения, т. е. приобретать скорость под влиянием внешнего поля и, следовательно, создавать электропроводность. Поэтому верхняя зона энергетических состояний в полупроводнике называется *зоной проводимости*. Число электронов  $n'$ , перешедших в зону проводимости, равно

$$n' = ae^{-\frac{b}{2kT}},$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. В соответствии с этим зависимость электропроводности от температуры имеет вид:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{b}{2kT}}.$$

Электропроводность полупроводников обладает еще одной особенностью. Переход электронов с нижней заполненной зоны на верхнюю создает в нижней зоне свободные места — „дырки“. Это позволяет

<sup>1</sup> Однако существует различие между „свободными“ электронами в кристалле и действительно свободными электронами, на которые не действуют никакие силы. Теория показывает, что это различие сводится к тому, что электрон в кристалле обладает как бы другой массой, отличной от массы действительно свободного электрона. Она носит название „эффективной“ массы.



электронам нижней зоны также принимать участие в процессе электропроводности. В результате перемещения электронов под влиянием внешнего поля „дырка“ сместится в направлении, обратном направлению движения электронов. Перемещение такой „дырки“, очевидно, эквивалентно перемещению положительного заряда.

Указанная схема энергетических зон относится к очень чистым веществам. При наличии примесей могут возникнуть добавочные энергетические уровни, носящие локальный характер. Электроны, находящиеся на этих уровнях, в электропроводности участия не принимают, но захват или отдача электронов с этих уровней в другие зоны ведет к появлению либо добавочных электронов проводимости, либо „дырок“. Примесь, ведущая к возникновению электронов проводимости, носит название *донорной* (например, мышьяк в кремнии), а примесь, ведущая к возникновению „дырок“, — *акцепторной* (например, бор в кремнии). Носители заряда, присутствующие в данном полупроводнике в большинстве, называются *основными*, а присутствующие в меньшем числе — *неосновными*. Если основными носителями заряда являются электроны, то полупроводник называется электронным, а если основными носителями заряда являются „дырки“, то — „дырочным“. При сравнимом числе электронов и „дырок“ электропроводность полупроводника называется смешанной.

Вопрос о том, является ли механизм электропроводности полупроводника электронным или „дырочным“ может быть решен по знаку эффекта Холла (см. § 217).

Следует иметь в виду, что и в том случае, когда электропроводность полупроводника вызвана перемещением „дырок“, в действительности движутся электроны. Дело заключается в том, что когда электроны почти полностью заполняют зону, их движение в одном направлении эквивалентно перемещению пустого места — „дырки“ в обратном направлении. Тем не менее, результат движения электронов в зоне, где много свободных мест, и в зоне, почти полностью занятой, в ряде случаев оказывается различным, например, в этих двух случаях, как сказано, различен знак эффекта Холла. Поэтому имеет смысл различать электронную и „дырочную“ проводимость полупроводников. Наличие этих двух типов проводимости объясняет возникновение „запорного слоя“ на границе двух полупроводников, что ведет к выпрямляющему действию в месте контакта двух полупроводников или полупроводника и металла.

Потенциальная энергия обоих носителей заряда (электронов и „дырок“) различна в соприкасающихся полупроводниках, в результате чего на их границе возникает скачок потенциала (см. рис. 136). Электроны и „дырки“ диффундируют через границу обоих полупроводников (ср. со сказанным в § 168 о диффузии электронов через границу двух соприкасающихся металлов).

При отсутствии внешнего поля (рис. 136а) число зарядов, перенесенных в обоих направлениях, одинаково и суммарный ток равен

нулю. При наличии внешнего поля энергия электронов в обоих полупроводниках изменяется. Если увеличение потенциала происходит от  $n$ -полупроводника к  $p$ -полупроводнику, то энергия электронов в  $n$ -полупроводнике увеличится, а в  $p$ -полупроводнике уменьшится. В результате, величина скачка потенциала на границе обоих полупроводников уменьшится (рис. 136б) и электроны смогут легко переходить из одного полупроводника в другой, через контакт потечет ток, сила которого будет быстро возрастать с увеличением разности потенциалов. Наоборот, если увеличение потенциала происходит от  $p$ -полупроводника к  $n$ -полупроводнику, то скачок потенциала на границе обоих

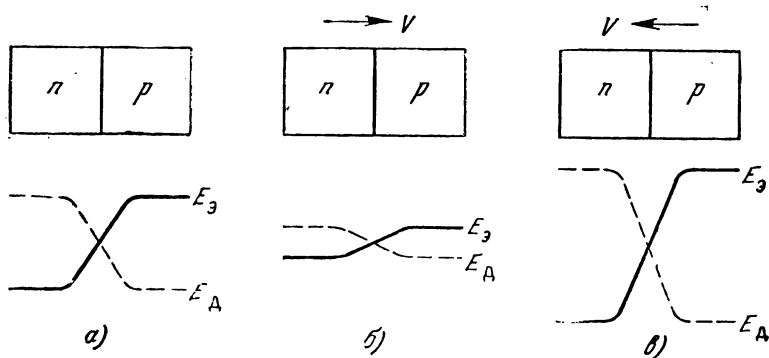


Рис. 136. Изменение потенциальной энергии на границе электронного ( $n$ ) и дырочного ( $p$ ) полупроводников при наличии внешнего поля.

полупроводников возрастет (рис. 136в) — возникнет „запорный слой“. Теперь электроны, если только разность потенциалов не очень велика, не могут пройти через контакт — сила тока, проходящего от одного полупроводника к другому, очень мала.

Очевидно, для неосновных носителей зарядов условия перехода через границу полупроводников будут обратными, по сравнению с основными. Однако в виду малого числа неосновных носителей, создаваемый ими ток очень мал и не играет заметной роли в прохождении общего тока через контакт.

Аналогичный „запирающий слой“ может возникнуть и на границе полупроводник — металл.

Экспериментальное изучение свойств полупроводников было в широком масштабе проведено в Советском Союзе А. Ф. Иоффе и его сотрудниками. Объяснение выпрямляющего действия на границе двух полупроводников одновременно и независимо дано Б. И. Давыдовым и Шоттки и Моттом.

**§ 172. Испускание электронов накаленными проводниками.** В предыдущих параграфах было показано, что вырывание электро-

нов из металла наружу связано с совершением определенной работы выхода  $A = eV_A$ . При комнатных температурах лишь ничтожная часть электронов внутри металла имеет достаточный запас кинетической энергии, чтобы, совершив работу выхода  $A$ , вырваться из металла наружу. По мере повышения температуры число быстрых электронов возрастает и благодаря этому должно возрастать и число электронов, вырывающихся из металла. Этот процесс вполне аналогичен процессу испарения молекул из нагреваемой жидкости. При достаточно высокой температуре наступает заметное испускание электронов металлом. Это явление носит название *термоэлектронной эмиссии*.

Разберем это явление с точки зрения классической электронной теории. Пусть работа выхода электрона из данного металла равна  $eV_A$ . Тогда металл могут покинуть лишь те электроны, кинетическая энергия которых  $\frac{1}{2}mv^2$  не меньше работы выхода  $eV_A$ , т. е. не меньше величины  $mv_k^2/2$ , удовлетворяющей условию:

$$\frac{1}{2}mv_k^2 = eV_A. \quad (1)$$

Для оценки энергии  $mv_k^2/2$  сравним ее со *средней* энергией теплового движения атомов (или молекул), которая по классической теории равна  $\frac{3}{2}kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Приравняв эту энергию работе выхода  $eV_A$ , найдем ту температуру  $T_k$ , при которой средняя энергия частиц равна работе выхода

$$\frac{3}{2}kT_k = eV_A, \quad \text{откуда} \quad T_k = \frac{2eV_A}{3k}. \quad (2)$$

Для различных металлов работа выхода колеблется в пределах от 1 до 4,5 эв. Если мы примем  $V_A = 2$  в, т. е.  $\frac{2}{300}$  CGSE-ед. потенциала, то получим

$$T_k = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 2}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 300} \cong 15\,000^\circ \text{K},$$

т. е. энергия электронов, необходимая для того, чтобы они могли вылететь из металла, должна быть относительно очень велика и соответствовать *средним* энергиям теплового движения атомов при температурах порядка десятка тысяч градусов. На самом деле электроны начинают вылетать в заметном количестве при температурах порядка 1000—3000°K, т. е. при гораздо более низких температурах.

Это объясняется тем, что электроны имеют определенное распределение по энергиям. Благодаря этому часть электронов обладает энергиями, значительно *большими средней*. За счет этих электронов и начинается эмиссия.

Если испущенные раскаленным металлом электроны ускорить внешним электрическим полем, то они образуют ток. Такой электронный ток может быть получен в вакууме, где столкновения с молекулами или атомами не мешают движению электронов. По силе электронного тока можно сделать заключение и о числе электронов, испускаемых раскаленным металлом.

Явление термоэлектронной эмиссии удобно изучать с помощью *катодной лампы*, представляющей собой трубку, из которой выкачан воздух, с двумя впаянными в нее электродами: электродом  $K$  — в виде проволоки (рис. 137) и электродом  $A$  — в виде диска или пластинки. Электрод  $K$ , носящий название *катода*, соединен с отрицательным полюсом батареи  $B$ , электрод  $A$ , называемый *анодом*, соединен с положительным полюсом той же батареи. Катод  $K$  можно нагревать с помощью добавочной батареи  $B'$ . Электростатическое поле, образующееся между катодом  $K$  и анодом  $A$ , ускоряет электроны, вырывающиеся из катода  $K$  при его нагревании: в результате поток электронов, пролетающих через вакуум между  $K$  и  $A$ , замыкает цепь  $KAGBK$ . Сила возникающего в цепи тока измеряется прибором  $G$ . Вольтметр  $V$  позволяет измерять разность потенциалов между катодом  $K$  и анодом  $A$ .

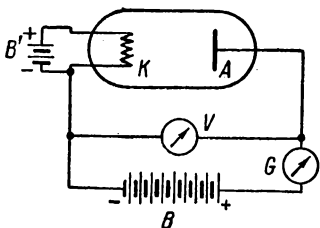


Рис. 137. Наблюдение термоэлектронной эмиссии с помощью катодной лампы.

Опыт показывает, что сила тока, проходящего через лампу (так называемого *анодного тока*), зависит от температуры катода и от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  между катодом и анодом. При постоянной температуре катода сила анодного тока  $I_A$  возрастает с увеличением разности потенциалов  $V_1 - V_2$  между электродами. Однако зависимость между силой тока  $I_A$  и разностью потенциалов  $V_1 - V_2$  не выражается законом, аналогичным закону Ома, по которому  $I$  пропорционально разности потенциалов; эта зависимость носит более сложный характер, графически представленный на рис. 138. Сперва сила тока возрастает с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$  медленно, затем быстрее, а затем опять медленнее; начиная же с некоторого определенного значения  $V_1 - V_2 = V_n$ , дальнейшее возрастание силы тока вообще прекращается — ток *достигает насыщения*.

Качественно такой характер зависимости анодного тока  $I_A$  от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  объясняется следующим образом. При  $V_1 - V_2 = 0$  сила анодного тока, при достаточно большом расстоянии между электродами, тоже равна нулю.<sup>1</sup> Это происходит от того,

<sup>1</sup> При близких электродах незначительный ток будет идти и при  $V_1 - V_2 = 0$ .

что вылетевшие из катода электроны образуют вблизи него электронное облако, создающее поле, тормозящее вновь вылетающие электроны; в результате дальнейшая эмиссия электронов прекращается: сколько электронов вылетает из металла, столько же в него возвращается под действием обратного поля электронного облака. При создании между электродами поля, ускоряющего электроны, электронное облако рассасывается, и между катодом и анодом появляется ток. Сила этого тока  $I_A$  возрастает с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$ . Теоретический расчет (см. § 186) показывает, что сила тока  $I_A$  пропорциональна  $(V_1 - V_2)^{3/2}$ ;

$$I_A = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2}. \quad (3)$$

Формула (3) носит название формулы Богуславского—Ленгмюра. Здесь  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от формы и расположения электродов.

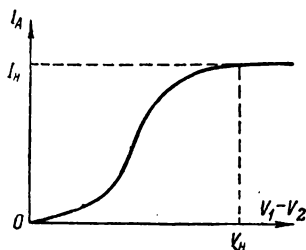


Рис. 138. Зависимость анодного тока  $I_A$  от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  между катодом и анодом.

Таким образом, сила тока  $I_A$  возрастает *быстрее*, чем прямо пропорционально разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Однако при дальнейшем увеличении разности потенциалов  $V_1 - V_2$  возрастание силы тока начнет задерживаться, так как общее число электронов, испускаемых катодом  $K$  при данной температуре, ограничено. Когда разность потенциалов  $V_1 - V_2$  достигает значения  $V_n$ , достаточного, чтобы отсасывать от катода все те электроны, которые из него испускаются, дальнейшее возрастание тока прекращается вовсе. При этом достигается *ток насыщения*  $I_n$ , которому соответствует горизонтальная часть графика на рис. 138.

На основании сказанного можно считать, что сила тока насыщения  $I_n$  численно равна заряду всех электронов, испускаемых в единицу времени данным катодом при данной температуре.

Следовательно, если мы обозначим через  $n$  число электронов, испускаемых катодом в единицу времени, то

$$I_n = ne,$$

где  $e$  — заряд электрона. Отсюда

$$n = \frac{I_n}{e}. \quad (4)$$

Опыты показывают, что сила тока насыщения возрастает чрезвычайно быстро с увеличением температуры катода. Характер зависи-

мости силы тока насыщения от температуры испускающего металла графически представлен на рис. 139.

По формуле (4) ток насыщения  $I_n$  измеряет число электронов, вылетающих из раскаленного металла. Если вместо полного тока  $I_n$  ввести плотность тока  $i_n$ , т. е. величину, представляющую собой ток с единицы поверхности эмиттирующего металла, то  $i_n$  будет измерять число электронов  $n$ , испускаемых единицей поверхности данного металла при данной температуре  $T$ .

Квантовая теория позволяет вычислить значения плотности тока насыщения  $i_n$ . Эти расчеты (см. мелкий шрифт) дают:

$$i_n = BT^2 \cdot e^{-\frac{eV_A}{kT}}, \quad (5)$$

где  $T$  — абсолютная температура металла,  $eV_A$  — работа выхода,  $k$  — постоянная Больцмана,  $B$  — определенная константа, вообще говоря, разная для разных металлов.

Формула (5) указывает на чрезвычайно быстрое возрастание плотности тока насыщения  $i_n$  с температурой; в основном закон

Т а б л и ц а VI

Эмиссионная постоянная  $B$  и работа выхода  $eV_A$

Эмиттирующая поверхность	$B, \frac{a}{c.m^2} \cdot град^2$	$eV_A, эв$
Pt . . . . .	32	5,3
W . . . . .	60	4,5
Mo . . . . .	55	4,2
Th . . . . .	70	3,4
W + Cs . . . . .	3,2	1,36
W + Ba . . . . .	1,5	1,56
W + Th . . . . .	3,0	2,63
Окись бария . .	1,18	1,84

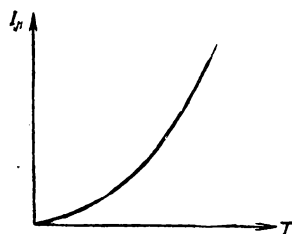


Рис. 139. Зависимость тока насыщения  $I_n$  от температуры  $T$  катода.

этого возрастания определяется экспоненциальным множителем

$e^{-\frac{eV_A}{kT}}$ . Теоретическое значение постоянной  $B$  для вполне чистой поверхности металла равно  $120 \frac{a}{c.m^2} \cdot град^2$ . На самом деле  $B$  варьирует для различных металлов в широких пределах, причем значение  $B$  сильно зависит от состояния поверхности металла и в особенности от степени ее чистоты. То же имеет место, как мы уже указывали, и для работы выхода  $eV_A$ . Тонкий слой адсорбированных Cs, Ba, Th, окислов бария и т. д. способен весьма сильно снизить работу выхода.

Этим обстоятельством пользуются, чтобы получить значительные электронные токи при сравнительно невысоких температурах катода.

В табл. VI приведены значения постоянной  $B$  и работы выхода  $eV_A$  для различных чистых металлов, а также для вольфрама, покрытого тонкой пленкой определенного другого вещества.

Так как работа выхода  $eV_A$  входит в формуле (5) в показатель степени, а величина  $B$  является множителем, то для достижения больших токов насыщения основную роль играет работа выхода  $eV_A$ . Поэтому покрытие поверхности вольфрама Cs, Ba и т. д., как указано, чрезвычайно выгодно, несмотря на малые значения эмиссионной постоянной  $B$ .

Для того чтобы более конкретно представить себе роль отдельных факторов в формуле (5), приведем следующие численные примеры.

Для чистой поверхности вольфрама по данным табл. VI работа выхода  $eV_A = 4,5$  эв и эмиссионная постоянная  $B = 60$  а/см<sup>2</sup>·град<sup>2</sup>. Отсюда плотность тока насыщения  $i_n$  при температуре  $T = 1000^\circ \text{K}$  будет

$$i_n = 60 \cdot 1000^2 \cdot e^{-\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 4,5}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 1000 \cdot 300}} \text{ а/см}^2 \cong 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ а/см}^2.$$

Та же поверхность вольфрама при  $T = 3000^\circ \text{K}$  даст

$$i_n = 60 \cdot 3000^2 \cdot e^{-\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 4,5}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 3000 \cdot 300}} \text{ а/см}^2 \cong 11 \text{ а/см}^2.$$

Как видно, повышение температуры  $T$  от 1000 до 3000° К ведет к возрастанию тока насыщения почти в  $10^{16}$  раз.

Для поверхности вольфрама, покрытой цезием, имеем  $eV_A = 1,36$  эв и  $B = 3,2$  а/см<sup>2</sup>·град<sup>2</sup>, откуда для этого случая при 1000° К получается плотность тока насыщения

$$i_n = 3,2 \cdot 1000^2 \cdot e^{-\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,36}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 1000 \cdot 300}} \text{ а/см}^2 \cong 0,46 \text{ а/см}^2.$$

Таким образом, покрытие поверхности вольфрама цезием позволяет получать при температуре накала  $T = 1000^\circ \text{K}$  токи насыщения примерно в  $3 \cdot 10^{14}$  раз больше, чем с чистого вольфрама при той же температуре.

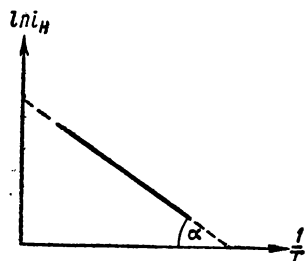


Рис. 140. Линейная зависимость логарифма тока насыщения от  $1/T$ .

Измерение тока насыщения  $i_n$  позволяет найти работу выхода  $eV_A$ . В самом деле, логарифмируя формулу (5), получим

$$\ln i_n = \ln B + 2 \ln T - \frac{eV_A}{kT}.$$

Сумму первых двух членов  $\ln B + 2 \ln T$  можно считать приблизительно постоянной, так как при изменении температуры значение  $\ln T$  меняется гораздо медленнее, чем  $1/T$ . Поэтому приближенно имеем

$$\ln i_n = \text{const} - \frac{eV_A}{k} \cdot \frac{1}{T}. \quad (6)$$

Если по оси ординат мы отложим  $\ln i_n$ , а по оси абсцисс  $1/T$  (рис. 140), то, согласно формуле (6), зависимость  $\ln i_n$  от  $1/T$  выразится прямой. Такой характер зависимости  $i_n$  от  $T$  хорошо подтверждается опытом. Тангенс угла наклона  $\alpha$  прямой к оси абсцисс опре-

делится, по (6), коэффициентом при  $1/T$ , т. е. мы будем иметь соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{eV_A}{k}. \quad (7)$$

Получив по экспериментальным данным зависимость  $\ln i_n$  от  $1/T$ , мы можем найти угол наклона  $\alpha$  и, по (7), значение работы выхода. Значения работы выхода  $eV_A$ , приведенные в табл. VI, найдены таким способом.

Явление термоэлектронной эмиссии играет в современной электро- и радио-технике исключительно большую роль. На нем основано устройство так называемых кенотронов, усилительных ламп и т. д.

Испускание заряженных частиц раскаленными поверхностями наблюдается не только у металлов, но и у других твердых тел. Электронные полупроводники эмиттируют главным образом электроны. Ионные кристаллы эмиттируют положительные или отрицательные ионы, а в некоторых случаях одновременно ионы обоих знаков. Соли  $\text{CdJ}_2$ ,  $\text{ZnJ}_2$ ,  $\text{CaF}_2$ ,  $\text{TlJ}$ ,  $\text{CuJ}_2$  и многие другие испускают при температурах  $600-700^\circ\text{K}$  лишь положительные ионы. Щелочногалогенные соли ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$  и др.) испускают при температурах  $700-800^\circ\text{K}$  только положительные ионы, а при температурах выше  $900-1000^\circ\text{K}$  — отрицательные ионы.

Положительные ионы дают также некоторые металлы при их нагреве в парах щелочных металлов.

Кроме термической эмиссии электронов, возможна еще эмиссия под влиянием *внешнего электрического поля*, а также под влиянием ударов электронами или ионами; последняя носит название *вторичной электронной эмиссии*.

Подсчет величины внешнего электрического поля, достаточного для вырывания электронов из металлов, требует точного знания структуры поверхностного слоя. Микроскопические шероховатости могут значительно изменить величину сил, действующих на электрон у поверхности. По приближенным подсчетам, для вырывания электронов при комнатной температуре требуется создание у поверхности градиента поля порядка  $10^8$  в/см. Для создания таких больших полей у поверхности проводника можно воспользоваться характером поля в цилиндрическом конденсаторе. По сказанному в § 149, напряженность поля в пространстве между цилиндрами, образующими конденсатор, равна

$$E = \frac{2Q}{\epsilon r l},$$

где  $Q$  — заряд,  $l$  — длина цилиндров,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды между цилиндрами,  $r$  — расстояние от оси внутреннего цилиндра. Емкость такого конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}},$$

где  $R_2$  и  $R_1$  — радиусы соответственно внешнего и внутреннего цилиндров. Воспользовавшись соотношением  $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ , где  $V_1 - V_2$  — разность



потенциалов между цилиндрами, получим

$$\frac{Q}{l} = \frac{\varepsilon (V_1 - V_2)}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Подставив это значение  $Q/l$  в выражение для  $E$ , получим

$$E = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Отсюда видно, что напряженность поля у поверхности внутреннего цилиндра, где  $r = R_1$ , равна

$$E = \frac{V_1 - V_2}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

При очень малом  $R_1$  величина  $E$  может быть сделана весьма большой. При проведении опытов в качестве внутреннего цилиндра берется очень тонкая нить, диаметром в несколько микрон, тогда при сравнительно небольших разностях потенциалов  $V_1 - V_2$  можно достичь у поверхности нити напряженности поля до  $10^8$  в/см. Опыты необходимо ставить в вакууме и тщательно обезгаживать поверхности, так как иначе между нитью и внешним цилиндром возникает разряд. Существенно также состояние поверхностей, которые должны быть очень гладкими. Несмотря на возможные побочные явления, удалось, принимая все необходимые предосторожности, экспериментально обнаружить существование вырывания электронов внешним полем и показать, что оно начинается при напряженности поля у поверхности порядка  $10^7 - 10^8$  в/см.

*Вторичная электронная эмиссия* наблюдается при бомбардировке поверхности различных веществ электронами или ионами. В случае бомбардировки электронами испускаемые поверхностью электроны отчасти состоят из отраженных первичных электронов, а отчасти — из вторичных электронов, вырванных из тела. Общее число электронов, испущенных поверхностью, может превышать число электронов, падающих на нее. Например, для алюминия, при энергии падающих электронов в 350 эв, число электронов, испущенных поверхностью, в 1,75 раза больше числа падающих. Особенно велика вторичная эмиссия электронов со сложных поверхностей, например со слоя цезия, нанесенного на серебро и покрытого тонкой пленкой окисла. Для таких пленок число вторичных электронов может в десятки раз превышать число первичных.

В настоящее время вторичная электронная эмиссия находит применение для усиления токов внутри электровакуумных приборов (фотоумножители или трубки Кубецкого).

**§ 173. Теория термоэлектронной эмиссии.** Испускание электронов из нагретых металлов происходит за счет теплового движения электронов. Для того чтобы электрон смог вылететь из металла, необходимо не только, чтобы его скорость была достаточно велика, но чтобы она имела и соответственное направление. Поэтому рассмотрим число электронов, имеющих определенное значение составляющей скорости, перпендикулярной к поверхности металла, через которую электроны вылетают. Если мы проведем прямоугольную систему координат  $XYZ$ , направив ось  $OX$  перпендикулярно к поверхности металла, то нам нужно будет рассмотреть группу электронов  $dn_{0x}$ , составляющая скорости  $v_x$  которых лежит в данном интервале  $v_x, v_x + dv_x$ , а две другие составляющие имеют произвольные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Распределение электронов по энергиям в металле, как было указано в § 163, подчиняется закону Ферми. Из этого закона следует, что число электронов  $dn_0$ , скорости которых имеют составляющие  $v_x, v_y, v_z$ , лежащие в интервалах  $v_x, v_x + dv_x, v_y, v_y + dv_y, v_z, v_z + dv_z$ , равно

$$dn_0 = \alpha \frac{1}{1 + e^{\frac{E_k - E_i'}{kT}}} dv_x dv_y dv_z, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — константа,  $E_i' = |E_{pa} - E_i|$ ,  $E_i$  — максимальная энергия электронов при  $T = 0$ ,  $E_{pa}$  — потенциальная энергия и  $E_k$  — кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ .

Для того чтобы получить число  $dn_{0x}$  электронов в единице объема, составляющая скорости которых вдоль оси  $OX$  лежит в интервале  $v_x, v_x + dv_x$ , а две другие составляющие имеют произвольные значения, проинтегрируем правую часть формулы (1) по  $v_y$  и  $v_z$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$dn_{0x} = \alpha dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{E_k - E_i'}{kT}}} dv_y dv_z. \quad (2)$$

Так как при тех температурах, при которых наблюдается эмиссия, для электронов, способных вылететь из металла, выполнено неравенство

$E_k - E_i' \gg kT$ , то величина  $e^{\frac{E_k - E_i'}{kT}}$  много больше единицы и приближенно

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{E_k - E_i'}{kT}}} \cong e^{-\frac{E_k - E_i'}{kT}} = e^{\frac{E_i'}{kT}} \cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)},$$

после чего выражение (2) можно переписать в виде

$$dn_{0x} = \alpha \cdot e^{\frac{E_i'}{kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z.$$

Как известно, определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

откуда получаем

$$dn_{0x} = \alpha \cdot \frac{2\pi kT}{m} \cdot e^{\frac{E_i'}{kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x. \quad (3)$$

Теперь подсчитаем число электронов, вылетающих с единицы поверхности металла в единицу времени. Рассмотрим группу электронов  $dn_{0x}$  с

составляющей  $v_x$ , лежащей в данном интервале  $v_x, v_x + dv_x$ . В единицу времени с единицы поверхности успевают вылететь все те электроны этой группы, которые находятся в столбике с поперечным сечением в единицу площади и с длиной, численно равной скорости  $v_x$  (рис. 141, ср. способ рассуждения в § 161). Число этих электронов  $dn_x$  равно

$$dn_x = dn_{0x} \cdot v_x.$$

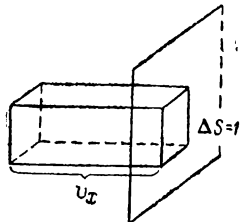


Рис. 141. К подсчету числа электронов, вылетающих с единицы поверхности в единицу времени.

Общее число электронов  $n$ , вылетающих в единицу времени с единицы площади поверхности металла, получим, проинтегрировав  $dn_x$  в пределах от  $v_{xa}$  до  $+\infty$ , где  $v_{xa}$  — минимальная составляющая скорости  $v_x$ , достаточная, чтобы электрон смог вылететь из металла. Таким образом,

$$n = \int_{v_{xa}}^{+\infty} v_x dn_{0x}. \quad (4)$$

Величину  $v_{xa}$  определим из следующих соображений. Потенциальная энергия внутри металла постоянна и повсюду равна  $E_{pa}$  (рис. 101 и 123)<sup>1</sup>. Следовательно, для того, чтобы электрон смог вылететь из металла, составляющая его скорости  $v_x$  должна быть не меньше, чем величина  $v_{xa}$ , удовлетворяющая равенству:

$$\frac{1}{2} m v_{xa}^2 = |E_{pa}|,$$

откуда

$$v_{xa} = \sqrt{\frac{2|E_{pa}|}{m}}.$$

Подставляя это значение  $v_{xa}$  в (4) и воспользовавшись равенством (3), найдем

$$n = a \frac{2\pi k T}{m} \cdot e^{\frac{E'_i}{kT}} \int_{\sqrt{\frac{2|E_{pa}|}{m}}}^{+\infty} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} v_x dv_x.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$n = a \frac{2\pi k^2 T^2}{m^2} \cdot e^{-\frac{|E_{pa}| - E'_i}{kT}}.$$

Плотность тока насыщения  $i_n$  получим, умножив число вылетающих электронов  $n$  на заряд электрона  $e$ :

$$i_n = a e \frac{2\pi k^2}{m^2} T^2 e^{-\frac{|E_{pa}| - E'_i}{kT}}.$$

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что на рис. 101 и 123 горизонтальные линии, изображающие уровни энергии, относятся к *полной энергии*.

Заметив, наконец, что  $|E_{pa}| - E'_i = eV_a$ , где  $eV_a$  — работа выхода, перепишем последнюю формулу в виде:

$$i_n = BT^2 e^{-\frac{eV_a}{kT}},$$

где  $B$  — постоянная. Таким образом, используя закон распределения Ферми, мы пришли к выражению для тока насыщения, которое было дано в § 172 и которое подтверждается экспериментально.

Теоретическое значение постоянной  $\alpha$  равно  $\frac{2m^3}{h^3}$ , где  $m$  — масса электрона, а  $h$  — так называемая постоянная Планка, равная  $6,624 \cdot 10^{-27}$  эрг · сек. Это приводит к следующему значению  $B$ :

$$B = \frac{4\pi m e k^2}{h^3} = 120 \text{ а/см}^2 \cdot \text{град}^2.$$

Эксперименты дают для ряда чистых металлов  $B \cong 60 \text{ а/см}^2 \cdot \text{град}^2$ , т. е. величину вдвое меньшую. Это может быть объяснено тем, что не все электроны, для которых  $v_x \geq v_{xa}$ , вылетают из металла, но часть из них отражается от поверхности металла.

---

## ГЛАВА XVII

### ТОКИ В ЭЛЕКТРОЛИТАХ И ГАЗАХ

**§ 174. Электролитическая проводимость.** Большая часть чистых жидкостей плохо проводит электричество. Так, совершенно чистая вода, керосин, минеральные масла и т. д. являются очень плохими проводниками. Однако растворы солей, кислот и щелочей в воде и некоторых других жидкостях хорошо проводят ток. Например, стоит в дистиллированную воду добавить немного поваренной соли ( $\text{NaCl}$ ) или капнуть в нее несколько капель серной кислоты ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ), чтобы она стала хорошим проводником.

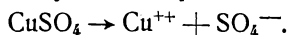
В различных частях нашего курса нам уже приходилось отмечать, что прохождение электрического тока через растворы солей и кислот сопровождается выделением составных частей этих веществ на электродах. Такого рода проводники, разлагающиеся при прохождении тока, носят, как мы указывали, название проводников второго рода, или *электролитов*, а их проводимость — *электролитической проводимости*. Электролитическая проводимость обусловлена наличием в растворе ионов, т. е. заряженных атомов или молекул. *Движение ионов под влиянием внешнего электрического поля образует в электролите ток*, в то время как в проводниках второго рода (металлах) ток вызывается движением свободных электронов.

Совершенно чистая вода, как мы только что указали, очень слабо проводит ток. Это означает, что она состоит в основном из нейтральных молекул и что в ней нет достаточных количеств свободных электронов или каких-либо других свободных заряженных частичек, которые, двигаясь под влиянием внешнего электрического поля, создавали бы ток. При растворении в воде ряда веществ, например сахара, глицерина и т. д., получающийся раствор также не проводит тока. Эти растворы, как было указано в § 85, т. I, обнаруживают осмотическое давление, величина которого хорошо определяется по *формуле Вант-Гоффа*. Молекулы этих веществ при растворении не претерпевают никаких изменений, — они остаются нейтральными и не диссоциируют. Растворы же солей и кислот обнаруживают осмотическое давление, большее, чем то, которое вычисляется по обычной формуле Вант-Гоффа. Мы видели, что аномально большое значение осмотического давления непосредственно объясняется, если допустить, что

часть молекул растворенного вещества диссоциирует, т. е. распадается на части. Тот факт, что раствор одновременно оказывается проводящим, убеждает нас, что те части, на которые диссоциировала молекула, оказываются заряженными, т. е. представляют собой ионы. Диссоциация молекул особенно велика в водных растворах, что объясняется большой диэлектрической постоянной воды ( $\epsilon = 81$ ).

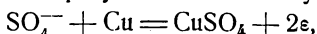
Пусть, например, в сосуд *C* (рис. 142) налит водный раствор медного купороса  $\text{CuSO}_4$  и в него опущены два электрода: *K* — угольный и *A* — медный. К электродам присоединены полюсы батареи *B*, причем угольный электрод *K* соединен с отрицательным полюсом батареи, а медный электрод *A* — с положительным. Тогда электроды окажутся заряженными, и между ними в растворе образуется электрическое поле. Под влиянием этого поля ионы, на которые диссоциировали в растворе молекулы медного купороса, начнут двигаться, — через раствор пойдет ток. Положительно заряженные ионы будут двигаться к катоду *K* и, отдав ему свой заряд, выделятся на нем в виде нейтрализованных частиц. Отрицательные ионы начнут двигаться к аноду *A* и выделятся на нем.

Пропуская некоторое время ток через раствор медного купороса, легко заметить, как на темной поверхности угольного катода осаждается красноватый слой металлической меди. Это убеждает нас в том, что медь присутствовала в растворе в виде положительных ионов. Остальная часть диссоциировавшей молекулы  $\text{CuSO}_4$ , т. е. группа  $\text{SO}_4$ , должна образовывать отрицательные ионы. Таким образом, мы приходим к следствию, что молекулы медного купороса диссоциируют при растворении на положительные ионы меди и отрицательные ионы  $\text{SO}_4$ , что мы запишем следующим образом:



Двойные знаки  $++$  и  $--$  означают, что в данном случае ионы являются двухзарядными, т. е. возникают соответственно в результате потери двух электронов или захвата двух лишних электронов.

Положительные ионы меди  $\text{Cu}^{++}$  движутся к катоду и там выделяются в качестве атомов меди. Отрицательные ионы  $\text{SO}_4^{--}$  движутся к аноду. Если этот анод медный, как мы это нарочно выбрали в рассматриваемом примере, то ионы  $\text{SO}_4^{--}$ , нейтрализовавшись у анода, вступают с ним в химическую реакцию и образуют вновь молекулы медного купороса:



где  $e$  означает электрон, переходящий на анод.

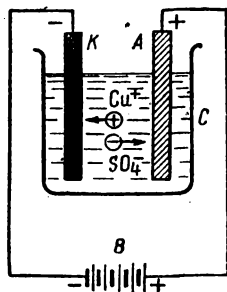
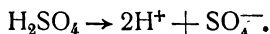


Рис. 142. Движение ионов  $\text{Cu}^{++}$  и  $\text{SO}_4^{--}$  при электролитической проводимости раствора медного купороса.

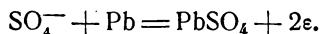
Эти образовавшиеся молекулы медного купороса снова переходят в раствор. В результате количество медного купороса в растворе остается неизменным; на катоде выделяется медь, а медь с анода, вступая в химическую реакцию с ионом  $\text{SO}_4^-$ , переходит в раствор.

Этот пример характерен: он показывает, что, с одной стороны, проводимость электролита обусловлена движением тех ионов, на которые диссоциировали молекулы растворенного вещества, а с другой, — что на электродах не обязательно выделяются составные части растворенного вещества. Конечный результат электролиза зависит от тех химических реакций, которые происходят в местах выделения ионов. Эти реакции называются *вторичными реакциями* и без их учета нельзя правильно разобрать процесс электролитической диссоциации. Очевидно, что характер вторичных реакций определяется не только природой раствора, но и материалом, из которого сделаны электроды.

Результаты электролиза одного и того же раствора могут быть различны в зависимости от выбора электродов. Рассмотрим, например, электролиз водного раствора серной кислоты  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Молекулы серной кислоты диссоциируют на положительные ионы водорода  $\text{H}^+$  и отрицательные ионы  $\text{SO}_4^-$ , причем при диссоциации каждой из молекул  $\text{H}_2\text{SO}_4$  возникают два иона водорода и один ион  $\text{SO}_4^-$ , заряд которого по численному значению вдвое больше заряда каждого из ионов водорода в отдельности; мы запишем это в виде:

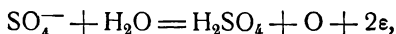


Предположим сперва, что в раствор серной кислоты опущены свинцовые электроды. Тогда на том из них, который служит катодом, выделится газообразный водород. На аноде же начнет выделяться ион  $\text{SO}_4^-$ , который вступит в химическую реакцию с материалом катода и образует сульфат свинца:



Количество серной кислоты в растворе начнет убывать, мы получим в результате электролиза разложение серной кислоты.

Но проведем электролиз того же самого раствора серной кислоты, взяв платиновые электроды. В этом случае на катоде по-прежнему будет выделяться газообразный водород. Ион же  $\text{SO}_4^-$ , выделяющийся у анода, не вступит в химическую реакцию с платиной, а вступит в реакцию с водой, причем реакция будет протекать в виде:



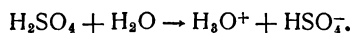
т. е. вновь образуется серная кислота, а у анода выделяется газообразный кислород. В конечном счете мы получим: количество серной кислоты в растворе останется неизменным; у электродов выделяются газообразные водород и кислород, причем на каждый атом кислорода, выделившийся у анода, у катода выделяются два атома

водорода, т. е. оказывается разложенной одна молекула воды. Таким образом, в результате вторичных реакций, сопровождающих электролиз серной кислоты, разлагается вода, а сама серная кислота оказывается восстановленной.

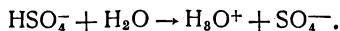
Анализ этих и других случаев электролиза показывает, что *металлы и водород всегда образуют положительные ионы, или катионы*, как их называют. Остальные части молекул (радикалы, галогены и т. д.) образуют отрицательные ионы (*анионы*).

В действительности процесс диссоциации носит более сложный характер, чем это изложено в основном тексте, так как ионы взаимодействуют с молекулами воды. Например, в случае водного раствора положительный ион водорода  $H^+$  не остается в свободном виде (свободный протон), а соединяется с молекулой воды, образуя молекулярный положительный ион  $H_3O^+$  (ион гидроксония). Также положительные ионы металлов подвергаются гидратированию (соединению с молекулами воды), например при растворении медных солей образуются группы  $Cu(H_2O)_4^{++}$  и т. д.

Сам процесс диссоциации в водных растворах следует рассматривать как результат взаимодействия диссоциирующей молекулы с молекулой воды. Например, при диссоциации серной кислоты в результате взаимодействия молекулы серной кислоты  $H_2SO_4$  с молекулой воды  $H_2O$  возникают ионы  $H_3O^+$  и  $HSO_4^-$ :



Далее, молекулярный ион  $HSO_4^-$ , реагируя с водой, ведет к образованию двухзарядного иона  $SO_4^{--}$ :



При обычных условиях равновесия в растворе присутствуют как ионы  $SO_4^{--}$ , так и ионы  $HSO_4^-$ , причем вторых будет значительно больше, чем первых. Тем не менее окончательный результат электролиза и вторичных реакций будет тот же, что приведен в основном тексте.

**§ 175. Законы Фарадея.** Законы электролитической проводимости были экспериментально установлены Фарадеем в 1836 г. Этих законов два.

*Первый закон Фарадея* относится к связи между количеством выделившегося на электроде вещества, силой тока и временем прохождения тока через электролит. Этот закон имеет следующий простой смысл: масса выделившегося на электроде вещества  $M$  пропорциональна силе тока  $I$  и времени его прохождения  $t$ :

$$M = kIt; \quad (1)$$

здесь  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий только от рода выделившегося вещества и состава электролита.

Произведение силы тока  $I$  на время  $t$  представляет собой количество электричества  $Q$ , прошедшее через электролит:

$$It = Q,$$

откуда первому закону Фарадея можно придать вид:

$$M = kQ, \quad (1a)$$



т. е. масса выделившегося вещества  $M$  пропорциональна прошедшему через электролит количеству электричества  $Q$ . Коэффициент  $k$  называется *электрохимическим эквивалентом* выделяемого вещества.

Так как при  $Q = 1$  численно имеем

$$M = k,$$

то, следовательно, электрохимический эквивалент численно равен массе вещества, выделившегося при прохождении через электролит единицы количества электричества.

Второй закон Фарадея определяет величину электрохимического эквивалента  $k$ .

Раньше чем формулировать второй закон Фарадея, напомним некоторые химические характеристики вещества. *Химическим эквивалентом* элемента называется безразмерная величина, численно равная массе данного элемента, выраженной в граммах, которая замещает в химических соединениях 1,0078 г водорода.

*Валентностью* элемента называется число атомов водорода, которое замещается в химическом соединении одним атомом данного элемента. Обозначив через  $A$  атомный вес элемента, через  $n$  — его валентность, получим, что химический эквивалент равен  $A/n$ . Если мы возьмем  $A/n$  граммов элемента, то такое количество этого элемента составляет *грамм-эквивалент*.

*Второй закон Фарадея* состоит в том, что *электрохимические эквиваленты элементов  $k$  пропорциональны их химическим эквивалентам*:

$$k = C \frac{A}{n}, \quad (2)$$

где  $C$  — коэффициент пропорциональности, одинаковый для всех элементов. Обычно вместо коэффициента  $C$  вводят величину, ему обратную:

$$\frac{1}{F} = C,$$

тогда второй закон Фарадея принимает вид:

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}. \quad (2a)$$

Величина  $F$  называется *числом Фарадея*. Подставляя значение электрохимического эквивалента  $k$  из (2a) в выражение для первого закона Фарадея (1), получим формулу, объединяющую оба закона Фарадея:

$$M = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} Q. \quad (3)$$

Отсюда следует, что если выделяется один грамм-эквивалент вещества, т. е. масса  $M$ , численно равная  $A/n$ , то  $Q$  должно численно равняться  $F$ .

Таким образом, *число Фарадея  $F$  численно равно количеству электричества  $Q$ , при прохождении которого через электролит на электроде выделяется один грамм-эквивалент вещества.*

Измерения электрохимических эквивалентов дают для числа Фарадея  $F$  следующее значение:

$$F = 96\,494 \frac{\text{кулон}}{\text{грамм-эквивалент}}.$$

Особое значение законы Фарадея сыграли в установлении электронной теории. Из формулы (3) следует, что для выделения одного грамм-эквивалента любого вещества требуется прохождение через электролит вполне определенного количества электричества, а именно: количества электричества, численно равного числу Фарадея  $F$ . Количество атомов  $N'$  в грамм-эквиваленте зависит от валентности элемента  $n$  и, очевидно, равно

$$N' = \frac{N}{n},$$

где  $N$  — число Авогадро. Таким образом, выделение каждого атома связано с прохождением через электролит количества электричества

$$q = \frac{F}{N'} = \frac{F}{N} \cdot n. \quad (4)$$

По ионной теории проводимости электролитов прохождение тока через электролит сводится к передвижению ионов, отсюда из формулы (4) вытекает, что *ион каждого элемента несет заряд  $q$ , пропорциональный валентности элемента  $n$ .*

Наименьший заряд иона  $e$  соответствует заряду одновалентного иона ( $n = 1$ ), откуда

$$e = \frac{F}{N}. \quad (5)$$

Так как валентность элемента выражается целым числом  $n$ , то заряд  $q$ , переносимый любым ионом,

$$q = ne,$$

оказывается *целым кратным от наименьшего заряда  $e$ .* Таким образом, закон Фарадея в совокупности с атомной теорией вещества приводит к представлению об атомном строении электричества. Этот вывод был сделан одновременно и независимо друг от друга Гельмгольцем и Стонеем в 1881 г. Каждый атом вещества может терять или присоединять к себе заряд, кратный элементарному заряду  $e$ . Очевидно, этот элементарный заряд  $e$  представляет собой заряд электрона. Положительный ион образуется, если атом (или молекула)

теряет один или несколько электронов. Отрицательный ион образуется, если атом (или молекула) присоединяет к себе один или несколько лишних электронов.

Так, при электролитической диссоциации водород и щелочные металлы (литий, натрий, калий и т. д.) образуют одновалентные положительные ионы, т. е. они являются атомами, потерявшими по одному электрону. Цинк и медь при диссоциации сульфатов этих элементов ( $\text{ZnSO}_4$  и  $\text{CuSO}_4$ ) образуют двувалентные положительные ионы, т. е. они представляют собой атомы, у которых не хватает двух электронов.

Галогены Cl, Br, J образуют одновалентные отрицательные ионы — их атомы захватывают по одному лишнему электрону.

Один и тот же элемент может проявлять себя с разной валентностью. В соответствии с этим возникают и ионы с разными зарядами. Например, положительный ион железа, возникающий при диссоциации солей двувалентного железа, представляет собой атом железа, потерявший два электрона, а возникающий при диссоциации трехвалентных солей железа — атом, потерявший три электрона.

Соотношение (5) позволяет определить заряд электрона по числу Фарадея  $F$  и числу Авогадро  $N$ . Полагая число Авогадро  $N = 6,023 \times 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, получим

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,494}{6,023 \cdot 10^{23}} \kappa = 1,601 \cdot 10^{-19} \kappa = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE},$$

что представляет собой ныне принимаемое значение заряда электрона. Однако экспериментальные методы определения числа Авогадро  $N$  менее точны, чем методы непосредственного измерения заряда электрона, поэтому равенство (5) обычно используется для определения числа Авогадро  $N$  по числу Фарадея  $F$  и заряду электрона  $e$ .

**§ 176. Электролитическая диссоциация.** Электролитическая проводимость, как мы указывали в § 174, обусловлена наличием в растворе ионов, которые возникают в результате диссоциации молекул растворимого вещества. Молекулы диссоциируют в растворе под влиянием взаимодействия с молекулами растворителя. Степень диссоциации зависит от природы молекул как растворенного вещества, так и растворителя. Имеется параллелизм между диэлектрической постоянной вещества и его способностью вызывать диссоциацию, если оно употребляется в качестве растворителя: чем больше диэлектрическая постоянная растворителя, тем большую степень диссоциации он вызывает.

Для количественной характеристики степени диссоциации вводится в рассмотрение коэффициент диссоциации  $\alpha$ . Предположим, что в единице объема раствора имеется  $n_0$  молекул растворенного вещества, из которых

$$n'_0 = \alpha n_0$$

диссоциированы на ионы, а

$$n'' = n_0 - \alpha n_0 = (1 - \alpha) n_0$$

не диссоциированы. Коэффициент диссоциации  $\alpha$  указывает степень диссоциации молекул в растворе; очевидно, что если

$$\alpha = 1,$$

то все молекулы диссоциированы, а если

$$\alpha = 0,$$

то диссоциация отсутствует.

При данной степени диссоциации раствора мы имеем дело с равновесием между процессом ионизации молекул и процессом воссоединения ионов в нейтральные молекулы (*молизацией*). Число молекул, диссоциирующих за некоторый промежуток времени, пропорционально числу наличных молекул. Следовательно, число новых пар ионов, возникающих в единице объема в единицу времени, можно положить равным

$$\Delta n'_0 = \beta \cdot (1 - \alpha) n_0, \quad (1)$$

где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности. Число ионов, воссоединяющихся в молекулы, пропорционально как числу положительных ионов, так и числу отрицательных ионов, так как для образования молекулы нужны ионы обоих знаков. Так как число ионов каждого знака в единице объема равно  $\alpha n_0$ , то, следовательно, число пар ионов, воссоединяющихся в единице объема в единицу времени, можно считать равным

$$\Delta n''_0 = \gamma \cdot \alpha n_0 \cdot \alpha n_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности. Условие равновесия между процессом ионизации и процессом молизации, очевидно, сводится к тому, чтобы число вновь образующихся пар ионов равнялось числу воссоединяющихся пар ионов, т. е. чтобы

$$\Delta n'_0 = \Delta n''_0,$$

откуда, по (1) и (2)

$$\beta (1 - \alpha) n_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2;$$

из последнего равенства находим

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot n_0. \quad (3)$$

Эта формула связывает коэффициент диссоциации  $\alpha$  с числом растворенных молекул в единице объема  $n_0$ .

Отношение коэффициентов  $\gamma/\beta$  не зависит от  $n_0$ , а зависит лишь от природы раствора и тех условий (температуры), при которых он находится.

Формула (3) позволяет сделать некоторые заключения о степени диссоциации молекул в растворе. Предположим сперва, что раствор очень слабый, т. е. что число молекул растворенного вещества в единице объема близко к нулю:  $n_0 \cong 0$ , тогда получаем

$$\alpha \cong 1,$$

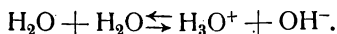
т. е. в слабых растворах  $\alpha$  близко к единице, что означает, что практически все молекулы диссоциированы.

Если мы предположим, наоборот, что степень диссоциации мала, то в равенстве (3) можно пренебречь в числителе коэффициентом  $\alpha$  по сравнению с единицей, тогда получим

$$\alpha = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_0}}; \quad (3a)$$

в этом случае степень диссоциации обратно пропорциональна корню квадратному из числа молекул растворенного вещества в единице объема, или, другими словами, обратно пропорциональна корню квадратному из концентрации раствора.

Значение коэффициента диссоциации может быть определено через электропроводность раствора (см. § 178);  $\alpha$  принимает весьма различные значения, меньшие единицы, в зависимости от природы и концентрации раствора. Например, для KCl при концентрации в 0,0001 моль/л получается  $\alpha = 0,993$ , а при концентрации 1 моль/л получается  $\alpha = 0,757$ . Чистая вода также диссоциирована, но в очень слабой степени. Она диссоциирует на положительные ионы  $H^+$  и отрицательные ионы гидроксидов  $OH^-$ . Положительные ионы  $H^+$ , соединяясь с водой, ведут к образованию ионов  $H_3O^+$ , так что весь процесс диссоциации воды носит следующий характер:



Для очень чистой воды  $\alpha$  приблизительно равно  $1,7 \cdot 10^{-9}$ . Этому соответствует концентрация ионов  $H^+$ , приблизительно равная  $10^{-7}$  молей на 1 л. Легко подсчитать, что при этом на 1 см<sup>3</sup> воды приходится приблизительно  $6 \cdot 10^{13}$  ионов  $H^+$  и столько же отрицательных ионов гидроксидов  $OH^-$ .

В электрохимии играет большую роль определение концентрации ионов  $H^+$  в различных растворах. Эта концентрация, выраженная в молях на 1 л, обозначается  $[H^+]$ . Десятичный логарифм от  $[H^+]$ , взятый с обратным знаком, обозначается символом pH:

$$pH = -\lg [H^+].$$

Для воды  $[H^+] = 10^{-7}$  и, следовательно,  $pH = -\lg 10^{-7} = 7$ . Среды, для которых  $pH < 7$ , называются кислотными, а для которых  $pH > 7$  — щелочными.

**§ 177. Энергия ионов в растворе.** Рассматривая явление контактной разности потенциалов, мы видели, что электроны внутри металла обладают потенциальной энергией, меньшей чем свободный электрон вне металла. Для вырывания электрона из металла надо затратить определенную работу. Точно так же ион внутри растворителя обладает определенной потенциальной

энергией. Вопрос об энергии иона в растворе мы рассмотрим сперва с макроскопической точки зрения. Предположим, что мы имеем заряженный шар радиуса  $r$ , несущий заряд  $q$  и находящийся в пустоте. Его энергия (см. § 138) равна

$$E_p = \frac{q^2}{2r}.$$

Тот же шар, помещенный в сплошной диэлектрик с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , обладает энергией

$$E'_p = \frac{q^2}{2\epsilon r}. \quad (1)$$

Если ион в растворе рассматривать как шарик с зарядом  $q$ , помещенный в диэлектрическую среду, то его потенциальная энергия выразится формулой (1). Для того чтобы перенести этот ион из раствора в пустоту, надо затратить работу, равную разности потенциальных энергий:

$$A = E_p - E'_p = \frac{q^2}{2r} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right). \quad (2)$$

Полгая радиус иона величиной порядка  $2 \cdot 10^{-8}$  см, найдем, что работа  $A$  представляет собой величину порядка 3 эв.

Для более точного определения энергии иона в растворе надо детальнее рассмотреть взаимодействие иона с окружающими молекулами.

Вода, наиболее часто встречающаяся в качестве растворителя, состоит из полярных трехатомных молекул. Возьмем первоначально уединенный ион и станем к нему симметрично приближать шесть нейтральных молекул воды (рис. 143). Под влиянием электрического поля иона полярные молекулы воды будут притягиваться к иону независимо от знака заряда иона, так как они всегда повернутся в сторону к иону тем концом, который несет противоположный заряд. Взаимная потенциальная энергия иона и молекул воды убывает по мере приближения молекул к иону, она изображается ниспадающей частью кривой  $ab$  на рис. 144. При достаточно малом значении расстояния  $r$  между полярными молекулами и ионом сила притяжения перейдет в силу отталкивания, и потенциальная энергия начнет возрастать (часть кривой  $cd$  на рис. 144). Определенному расстоянию между ионом и молекулами соответствует минимум потенциальной энергии и устойчивое расположение молекул вокруг иона. Вместо того чтобы приближать к иону шесть молекул, мы можем приближать к нему шесть групп молекул, достаточных для образования вокруг него оболочки в две-три молекулы толщиной. Кривая потенциальной энергии окажется в этом случае такой же, как на рис. 144, но с еще более глубоким минимумом. Дальнейшее прибавление молекул мало изменит потенциальную кривую, так как напряженность поля вокруг иона быстро убывает с расстоянием. Добавив достаточно молекул, мы получим ион в капле жидкости. Таким образом, изменение энергии иона при его внесении в растворитель представится глубиной минимума потенциальной кривой типа изображенной на рис. 144. Потенциальная энергия иона в растворителе может быть снова представлена формулой (1), только значение  $\epsilon$  будет несколько отличным от значения диэлектрической постоянной растворителя, определенной обычным макроскопическим путем.

При очень слабом растворе нет надобности учитывать взаимодействие ионов между собой, как мы и делали. Каждый ион взаимодействует лишь с соседними молекулами растворителя, образуя вместе с ними комплекс, называемый *сольватом*, который движется в чистом растворителе.

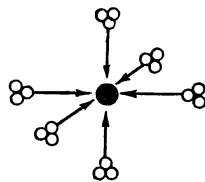


Рис. 143. Молекулы воды, окружающие ион.

Для не очень слабых растворов надо принять во внимание взаимодействие ионов. Предположим, что все ионы несут одинаковые по численному значению заряды. Рассмотрим определенный ион. Потенциальная энергия его взаимодействия с другим ионом, находящимся от него на расстоянии  $r_i$ , равна  $q^2/\epsilon r_i$ . Она положительна, если оба иона одноименны, и отрицательна, если они разноименны. Потенциальная энергия взаимодействия данного иона со всеми окружающими ионами будет равна  $q_i \sum \frac{q_i}{\epsilon r_i}$ . Заряды  $q_i$  разных знаков, поэтому отдельные члены этой суммы также разных знаков, и значение всей суммы невелико. Оно было бы равно нулю, если бы вблизи данного иона имелось одинаковое число положительных и отрицательных ионов и они находились бы в среднем на одинаковых расстояниях. В этом случае потенциальная энергия иона оказалась бы такой же, как если бы по соседству с ним не было других ионов. Однако в действительности дело обстоит иначе. Совершая тепловое движение, каждый ион сталкивается с окружающими нейтральными молекулами растворителя и иногда сближается с другими ионами. Отталкивание одноименных ионов препятствует их сближению, а взаимное притяжение разноименных ионов способствует их сближению. В результате вблизи положительного иона чаще оказываются отрицательные ионы, а вблизи отрицательного — положительные. Каждый ион окружен как бы облаком из ионов противоположного знака.

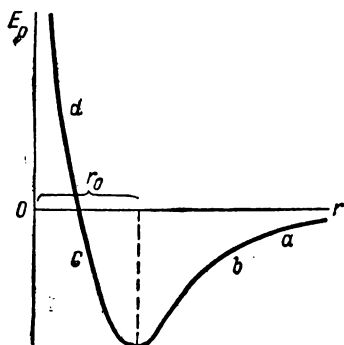


Рис. 144. Зависимость потенциальной энергии  $E_p$  от расстояния  $r$ .

В решетках ионных кристаллов (например, кристалла каменной соли) каждый положительный ион окружен шестью отрицательными, а каждый отрицательный — шестью положительными. Таким образом, распределение ионов в растворе является промежуточным между произвольным распределением нейтральных молекул в жидкости и упорядоченным распределением ионов в кристаллической решетке. Отсюда вытекает, что совокупность ионов в растворе обладает некоторым запасом энергии, подобной энергии ионной кристаллической решетки. Следовательно, работа удаления иона из раствора, где присутствуют другие ионы, несколько больше, чем из чистого растворителя. Однако величина этой добавочной работы невелика по сравнению с работой, выражаемой формулой (2).

Силы взаимодействия иона с окружающей средой несут не только электростатический характер. Это обстоятельство заставляет с осторожностью относиться к способам определения скачков потенциалов между двумя различными веществами, например между двумя металлами или металлом и электролитом. Если мы, например, определим (по работе переноса) скачок потенциала между металлом и электролитом, один раз переноса из металла в электролит электрон, а другой раз — ион, то можем получить различные значения. Определение разности электростатических потенциалов двух точек через работу переноса единичного заряда из одной из этих точек в другую справедливо лишь в случае переноса идеального точечного электрического заряда, который не может взаимодействовать с окружающим веществом никакими другими силами, кроме электростатических. При переносе же какого-либо реального заряда (электрона, иона), кроме электростатических сил взаимодействия, возникают другие более или менее значительные силы, зависящие от рода переносимых частиц и рода граничащих веществ, например „обменные силы“, рассматриваемые

в квантовой механике. Тогда определение разности потенциалов через работу переноса такой реальной заряженной частицы возможно лишь в случае, если обе точки, для которых определяется разность потенциалов, лежат в одной среде. Если же точки лежат в разных средах, то работа может получиться различной — в зависимости от того, какая именно частица переносится.

**§ 178. Теория электролитической проводимости.** При отсутствии внешнего электрического поля ионы в электролите совершают тепловое движение, следовательно результирующий ток равен нулю. При наличии поля положительные ионы приобретают добавочную скорость  $u_+$  в направлении электрического поля, а отрицательные ионы — добавочную скорость  $u_-$  в противоположном направлении. На беспорядочное тепловое движение накладывается переносное движение ионов, и в растворе возникает перенос зарядов в определенном направлении, т. е. возникает электрический ток.

При рассмотрении электропроводности металлов (§ 161) мы учитывали действие поля на электрон на длине его свободного пути. Далее, мы считали, что при соударении с ионами, образующими остов кристаллической решетки металла, электрон теряет приобретенную под влиянием внешнего поля добавочную скорость. Движение же ионов в электролите мы будем рассматривать макроскопически; мы будем считать, что на ион в электролите действуют две силы — электрическая сила  $qE$ , где  $q$  — заряд иона, и  $E$  — напряженность электрического поля, и сила сопротивления среды. Такая точка зрения оправдывается тем, что ионы крупнее электронов и густо окружены молекулами растворителя. В большинстве случаев ион облеплен нейтральными молекулами, так что под влиянием поля  $E$  движется целый комплекс, носящий название *сольвата*.

При тех скоростях, которыми обладают ионы, можно считать, что сила трения пропорциональна скорости и, очевидно, направлена в сторону, противоположную скорости иона. Таким образом, силу трения, действующую на положительный ион, можно считать равной  $-k_+u_+$ , где  $k_+$  — коэффициент трения. Обозначая массу положительного иона через  $m_+$ , а его ускорение — через  $w_+$ , получим уравнение для направленного движения положительного иона в виде:

$$m_+w_+ = qE - k_+u_+. \quad (1)$$

Это уравнение показывает, что при малых скоростях большую роль играет электрическая сила  $qE$ , под действием которой скорость иона  $u_+$  возрастает; однако по мере возрастания скорости  $u_+$  сила трения  $k_+u_+$  тоже возрастет и в некоторый момент достигнет такой величины, что правая часть уравнения (1) обратится в нуль:

$$qE - k_+u_+ = 0;$$

тогда обратится в нуль и ускорение  $w_+$ , следовательно скорость примет постоянное значение, равное

$$u_+ = \frac{qE}{k_+}. \quad (2)$$



Отсюда мы получаем, что скорость установившегося направленного движения иона  $u_+$  пропорциональна напряженности электрического поля  $E$ .

Аналогичное соотношение получим для скорости  $u_-$  отрицательного иона

$$u_- = \frac{qE}{k_-}, \quad (2a)$$

здесь  $k_-$  — коэффициент трения отрицательного иона.

Ток в электролите будет создаваться движением ионов обоого знака; число ионов каждого знака в единице объема электролита равно  $an_0$ ; следовательно, плотность тока, выражаемая суммой плотностей тока, создаваемых движением положительных ионов до полю и отрицательных ионов против поля, будет равна

$$i = i_+ + i_- = qan_0u_+ + qan_0u_- = qan_0(u_+ + u_-), \quad (3)$$

где  $q$  — заряд, несомый каждым из ионов.

Назовем *эквивалентной концентрацией*  $\eta$  величину, равную числу грамм-эквивалентов растворенного вещества, приходящемуся на единицу объема раствора. Тогда  $\eta = \frac{n_0}{N'}$ , где  $n_0$  — число молекул растворенного вещества в единице объема, а  $N'$  — число молекул в грамм-эквиваленте. Помножив и поделив произведение  $qn_0$  на  $N'$ , получим  $qn_0 = qN' \cdot \frac{n_0}{N'}$ . Но, по сказанному,  $\frac{n_0}{N'} = \eta$ , а  $qN' = F$ , где  $F$  — число Фарадея. Отсюда

$$qn_0 = \eta F.$$

Подставив это значение  $qn_0$  в (3), получим

$$i = F\eta\alpha(u_+ + u_-),$$

или, подставляя сюда вместо скоростей ионов  $u_+$  и  $u_-$  их выражения по (2) и (2a):

$$i = F\eta\alpha\left(\frac{q}{k_+} + \frac{q}{k_-}\right)E. \quad (4)$$

Отношения  $q/k_+$  и  $q/k_-$ , численно равные скорости ионов при напряженности поля  $E=1$ , называются *подвижностями ионов*. Обозначим их через  $u_+^0$  и  $u_-^0$ . Тогда равенство (4) переписывается:

$$i = F\eta\alpha(u_+^0 + u_-^0)E. \quad (4a)$$

Величина  $F\eta\alpha(u_+^0 + u_-^0)$  для данного раствора постоянна. Так как по закону Ома плотность тока  $i = \sigma E$ , то равенство (4a) выражает закон Ома для случая электролитической проводимости. Коэффициент электропроводности  $\sigma$  для электролита оказывается равным

$$\sigma = F\eta\alpha(u_+^0 + u_-^0). \quad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что электропроводность электролита пропорциональна коэффициенту диссоциации  $\alpha$  и сумме подвижностей ионов ( $u_+^0 + u_-^0$ ).

Коэффициент диссоциации  $\alpha$  зависит от концентрации раствора, поэтому зависимость  $\sigma$  от  $\eta$ , выражаемая формулой (5), носит сложный характер. Для чистого растворителя электропроводность  $\sigma = 0$ , так как равна нулю концентрация  $\eta$ . Затем, с увеличением  $\eta$ , электропроводность возрастает и достигает некоторого максимума. Для концентрированных растворов  $\sigma$  снова падает, так как уменьшается степень диссоциации  $\alpha$ . На рис. 145 приведена зависимость  $\sigma$  от концентрации раствора серной кислоты в воде.

Величина  $\sigma/\eta$  называется *эквивалентной электропроводностью*. Обозначим ее через  $\Lambda$ , тогда по (5):

$$\Lambda = F\alpha(u_+^0 + u_-^0). \quad (6)$$

Число Фарадея  $F$  есть величина постоянная, сумма подвижностей ионов  $u_+^0 + u_-^0$  для данного электролита есть тоже величина постоянная, поэтому, по (6),

$$\Lambda = C\alpha, \quad (6a)$$

где  $C$  — величина постоянная. Таким образом, эквивалентная электропроводность пропорциональна коэффициенту диссоциации  $\alpha$ . Для очень слабого раствора  $\alpha = 1$ , и тогда  $\Lambda = C$ , т. е. для очень слабого раствора эквивалентная электропроводность перестает зависеть от концентрации. Обозначим это постоянное значение эквивалентной электропроводности через  $\Lambda_\infty$ , тогда из формулы (6a) получим

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty},$$

отсюда коэффициент диссоциации  $\alpha$  может быть определен по отношению эквивалентных электропроводностей при данной концентрации и при весьма слабой концентрации.

Значение  $\Lambda_\infty$  непосредственно связано с суммой подвижностей ионов. В самом деле, из (6) имеем

$$\Lambda_\infty = F(u_+^0 + u_-^0).$$

Отсюда, определив эквивалентную электропроводность при очень слабой концентрации, можно найти сумму подвижностей ионов.

Для определения самих подвижностей ионов достаточно знать еще отношение  $u_+^0/u_-^0$ . Это отношение может быть найдено на основании следующего подсчета. Число ионов каждого знака в единице объема  $n_0$  мы считали одинаковым для всех частей электролита. Однако благодаря

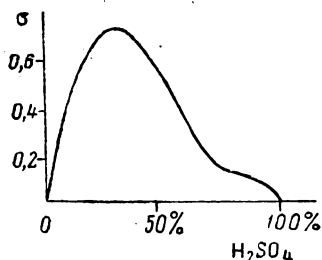


Рис. 145. Зависимость электропроводности  $\sigma$  от концентрации раствора серной кислоты в воде.

различной подвижности ионов число их будет меняться со временем по-разному вблизи катода и вблизи анода.

Пусть раствор настолько слабый, что диссоциация полная ( $\alpha = 1$ ), и, следовательно, число пар ионов в единице объема  $n_0$  равно числу молекул растворенного вещества  $n_0$ , приходящихся на единицу объема. Тогда первоначально у катода было  $n_0$  положительных ионов в единице объема (и столько же отрицательных). При прохождении тока положительные ионы начнут прибывать к катоду, а отрицательные — от него уходить. Все вновь прибывающие к катоду положительные ионы на нем выделяются, и потому их нет надобности учитывать. Что касается отрицательных ионов, то за время  $t$  из каждой единицы объема, прилегающего к катоду, уйдет  $n_0 u_- t$  ионов. В результате этого столько же положительных ионов останется непарными и выделится на катоде.

Таким образом, за время  $t$  число пар ионов вблизи катода уменьшится на  $n_0 u_- t$  пар и станет равным

$$n_{0t}^{(K)} = n_0 - n_0 u_- t = n_0 (1 - u_- t).$$

Следовательно, за время  $t$  число пар ионов у катода изменилось в отношении

$$\frac{n_{0t}^{(K)}}{n_0} = 1 - u_- t. \quad (7)$$

Совершенно так же получим, что за время  $t$  число пар ионов у анода изменится в отношении

$$\frac{n_{0t}^{(A)}}{n_0} = 1 - u_+ t. \quad (7a)$$

Так как по нашему предположению диссоциация полная, то число пар ионов в единице объема равно числу растворенных в единице объема молекул, а последнее пропорционально эквивалентной концентрации  $\eta$ . Отсюда, по (7):

$$\frac{\eta_t^{(K)}}{\eta_0} = 1 - u_- t, \quad (8)$$

где  $\eta_t^{(K)}$  — значение эквивалентной концентрации вблизи катода через время  $t$  после начала электролиза, а  $\eta_0$  — начальное значение эквивалентной концентрации. Также из (7a) следует:

$$\frac{\eta_t^{(A)}}{\eta_0} = 1 - u_+ t, \quad (8a)$$

где  $\eta_t^{(A)}$  — значение эквивалентной концентрации вблизи анода через время  $t$  после начала электролиза.

Из соотношений (8) и (8a) получаем

$$\frac{u_+}{u_-} = \frac{\eta_0 - \eta_t^{(A)}}{\eta_0 - \eta_t^{(K)}};$$

так как подвижности ионов  $u_+^0$  и  $u_-^0$  пропорциональны их скоростям, то

$$\frac{u_+^0}{u_-^0} = \frac{\eta_0 - \eta_t^{(A)}}{\eta_0 - \eta_t^{(K)}}. \quad (9)$$

Из равенства (9) видно, что, исследуя степень понижения концентрации растворов у электродов в результате электролиза, можно найти отношение подвижностей ионов. Пользуясь формулами (5) и (9), можно определить и сами подвижности ионов.

Значения подвижностей  $u_+^0$  и  $u_-^0$  для некоторых ионов приведены в табл. VII.

Из данных табл. VII видно, что при практически достижимых напряженностях полей ( $E$  порядка нескольких вольт на 1 см) скорости ионов весьма малы и не превышают нескольких тысячных сантиметра в секунду.

В концентрированных растворах подвижности ионов меньше, чем в разбавленных. В концентрированных растворах нельзя пренебрегать полем остальных ионов по сравнению с внешним полем.

Движение ионов может быть непосредственно продемонстрировано путем применения ионов, дающих окрашенные растворы. В U-образную трубку с двумя платиновыми электродами  $K$  и  $A$  (рис. 146) наливают два различных раствора одинаковой плотности: вниз — раствор марганцево-кислого калия ( $KMnO_4$ ), обладающий интенсивной фиолетовой окраской, и сверху — бесцветный раствор азотнокислого калия ( $KNO_3$ ). При пропускании через трубку тока граница окрашенного раствора иона  $MnO_4^-$  заметно передвигается к аноду.

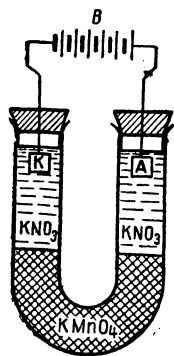


Рис. 146. Метод наблюдения подвижности ионов.

**§ 179. Поляризация электродов.** Предположим, что в какой-либо электролит погружены два одинаковых металлических электрода, например две платиновые пластинки — в водный раствор медного купороса. Такая комбинация, как мы указывали, не дает э. д. с., отличной от нуля; отличная от нуля э. д. с. получается лишь при погружении в электролит двух *различных* проводников первого рода.

Но пропустим через наш раствор медного купороса с платиновыми электродами ток, присоединив электроды к какому-либо внешнему источнику э. д. с., например к гальваническому элементу. Тогда на платиновом электроде, служащем катодом, выделится медь, а у анода выделится ион  $SO_4^{--}$ ; этот ион вступит

Таблица VII  
Подвижности ионов  
(в  $см^2/сек \cdot в$ )

Ионы	$u^0$
H . . . . .	0,003263
K . . . . .	0,000669
Na . . . . .	0,000450
OH . . . . .	0,001802
Cl . . . . .	0,000677
$NO_3$ . . . . .	0,000639

в химическую реакцию с водой, что поведет к образованию серной кислоты ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) и выделению у электрода кислорода.

В результате симметрия электродов нарушится: один из них окажется покрытым слоем меди, а другой — пленкой кислорода. Теперь погруженные в раствор электроды не будут одинаковы и образуют гальванический элемент, со своей э.д.с.  $\mathcal{E}'$ , так называемый *поляризационный элемент*.

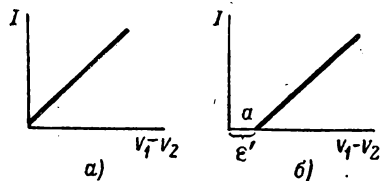
Если его отключить от внешнего источника э.д.с. и замкнуть каким-либо сопротивлением, то он даст ток, который будет идти до тех пор, пока в результате происходящих в нем в обратном порядке химических реакций симметрия электродов не восстановится (элемент не разрядится).

Аналогичное нарушение первоначальной симметрии, существующей при одинаковом материале электродов, будет иметь место всякий раз при электролизе растворов. Происходящее при этом изменение электродов носит название *поляризации электродов*, а возникающая э.д.с. — *поляризационной э.д.с.* В действительности поляризация не всегда проходит указанным обратимым образом: после разрядки элемента первоначальное состояние может быть не вполне восстановленным.

Существование поляризационной э.д.с. ведет к ряду важных выводов.

Во-первых, мы можем разобрать вопрос о том, в каком виде применим закон Ома к электролитам.

При прохождении тока через проводник первого рода сила тока  $I$ , разность потенциалов  $V_1 - V_2$  на концах проводника и его сопротивление  $R$  связаны между собой по закону Ома соотношением



$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}, \quad (1)$$

откуда графически зависимость силы тока от разности потенциалов выразится прямой, проходящей через начало координат (рис. 147а).

Рис 147. Зависимость силы тока  $I$  от разности потенциалов: а — для проводника первого рода, б — для проводника второго рода (электролита).

При прохождении тока через электролит разность потенциалов  $V_1 - V_2$  на электродах (которые мы полагаем сделанными из одинакового вещества) лишь в первый момент окажется равной произведению  $IR$ ; через некоторое время в результате поляризации электродов, для поддержания прежней силы тока  $I$ , необходимо будет приложить разность потенциалов

$$V_1 - V_2 = IR + \mathcal{E}'. \quad (2)$$

В соответствии с этим зависимость силы тока  $I$  от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  выразится соотношением:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} - \frac{\mathcal{E}'}{R}, \quad (3)$$

т. е. графически она выразится прямой, но не проходящей через начало координат, как в случае обычного закона Ома (1), а прямой, пересекающей ось абсцисс в точке  $a$  с координатой, равной  $\mathcal{E}'$  (рис. 147б).

Работа, совершаемая током, проходящим через электролит за время  $t$ , в силу равенства (2), окажется равной

$$A = I(V_1 - V_2)t = I^2 R t + \mathcal{E}' I t, \quad (4)$$

но  $I^2 R t$  представляет собой тепло  $Q$ , выделяющееся в электролите, откуда

$$A = Q + \mathcal{E}' I t \quad (5)$$

т. е., кроме работы, идущей на выделение тепла  $Q$ , при электролизе совершается еще добавочная работа  $A' = \mathcal{E}' I t$ .

Электрический ток не производит разложения электролита. Растворяемое вещество диссоциирует на ионы в процессе растворения. При прохождении тока происходит только выделение ионов на электродах. Однако еще в § 164 мы видели, что между проводником, погруженным в электролит, и электролитом возникает разность потенциалов, в результате чего на ионы вблизи электрода действуют электрические силы. Чтобы выделиться на электроде, ионы должны преодолеть некоторый потенциальный барьер. На преодоление этого потенциального барьера и идет работа  $A' = \mathcal{E}' I t$ . Работа, идущая на выделение ленд-жоулева тепла  $Q = I^2 R t$ , может быть сделана сколь угодно малой, для этого только надо сделать малым сопротивление  $R$ , чего можно достичь, взяв большие электроды и расположив их близко друг от друга. Но работы  $A'$  избежать нельзя: ее значение определяется составом электролита и веществом электродов. Величина  $\mathcal{E}'$  равняется поляризационной э.д.с. только в тех случаях, когда поляризация электродов происходит обратимо. Однако в большинстве случаев она больше. Для того чтобы начался процесс выделения данных ионов на электроде, требуется „перенапряжение“. Это перенапряжение может достигать нескольких десятых вольта. Так, в случае обратной поляризации электродов для начала электролиза водного раствора серной кислоты, требовалась бы разность потенциалов на электродах в 1,22 в; на самом деле при чистых платиновых электродах электролиз (ведущий в данном случае к разложению воды) начинается лишь при 1,64 в.

Разность потенциалов на электродах, при которой начинается выделение данных ионов, называется *потенциалом выделения*. Различие потенциалов выделения для разных ионов позволяет выделять

из раствора, содержащего несколько различных ионов одного знака (например, ионов  $\text{Cu}^+$  и  $\text{Zn}^+$ ), ионы одного сорта. Это обстоятельство играет большую роль в техническом применении электролиза для получения чистых металлов.

Второе следствие из существования поляризации электродов, которое мы рассмотрим в этом параграфе, — это падение э.д.с. гальванических элементов после начала их работы. Через гальванический элемент при замыкании его внешним сопротивлением идет ток и происходит разложение электролита, в результате чего электроды поляризуются и возникает поляризационная э.д.с., уменьшающая первоначальную э.д.с. элемента  $\mathcal{E}$ . Кроме того, изменения, происходящие в элементе, повышают его внутреннее сопротивление. Например, в случае выделения на одном из электродов пузырьков водорода, внутреннее сопротивление элемента сильно возрастает.

Для избежания вредного действия поляризационной э.д.с., гальванический элемент должен представлять собой такую комбинацию проводников первого и второго рода, чтобы поляризация электродов в конечном счете отсутствовала. В элементе Даниэля это достигается тем, что медная и цинковая пластинки помещены в различные растворы, разделенные пористой перегородкой (рис. 104). В результате этого при действии элемента имеет место лишь растворение цинковой пластинки и осаждение меди — на медной, что не ведет ни к какому изменению вещества самих пластинок. Однако неизбежная диффузия растворов через пористую перегородку ограничивает время существования элемента Даниэля и делает его практически мало выгодным.

В элементе Лекланше водород, выделяющийся вблизи катода, вступает в химическую реакцию с перекисью марганца, благодаря чему избегается поляризация угольного электрода.

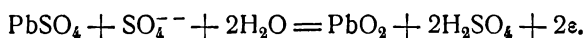
Относительно сложное устройство нормального элемента (§ 167) объясняется тем, что при такой комбинации электродов и электролитов практически полностью отсутствует поляризация. Электродвижущая сила нормального элемента не меняется со временем при его действии.

**§ 180. Технические применения электролиза.** 1. Аккумуляторы. Как мы видели в § 179, два одинаковых металлических электрода, погруженных в электролит, после прохождения через них тока поляризуются и образуют гальванический элемент, который сам может некоторое время служить источником тока. Таким образом, создавая систему из двух одинаковых проводников первого рода и проводника второго рода (электролита), мы получим *аккумулятор*, т. е. прибор, способный накапливать электрическую энергию.

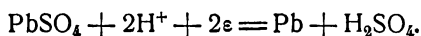
Однако, чтобы аккумулятор оказался практически ценным, он должен удовлетворять двум условиям: а) поляризация электродов должна быть устойчива, б) процессы, происходящие в аккумуляторе, должны быть обратимы. Первое условие необходимо, чтобы аккумулятор не разряжался сам собою, когда от него не берется

ток; второе — чтобы в нем не происходили изменения, делающие его непригодным для дальнейшей работы.

Первый технический аккумулятор представлял собой две свинцовые пластинки, погруженные в водный раствор серной кислоты ( $H_2SO_4$ ). Свинцовые пластинки, вступая в химическую реакцию с серной кислотой, покрываются с поверхности слоем сернистого свинца  $PbSO_4$  (сульфата свинца). При пропускании через аккумулятор тока от внешнего источника (*зарядка аккумулятора*) отрицательные ионы  $SO_4^{--}$  перемещаются к аноду и превращают сульфат в перекись свинца по формуле:



Положительные водородные ионы перемещаются к катоду и восстанавливают сульфат в металлический свинец по формуле:



Таким образом, создается резкая несимметрия электродов: один из них свинцовый, другой — из перекиси свинца. Аккумулятор „заряжен“, он представляет собой гальванический элемент, способный служить источником тока.

Давая ток во внешнюю цепь, *аккумулятор разряжается*, процессы протекают в нем в обратном порядке. В конце разряда обе пластинки оказываются покрытыми одинаковыми слоями сульфата свинца, и э.д.с. аккумулятора падает до нуля.

Описанный аккумулятор невыгоден тем, что происходящие в нем химические процессы захватывают лишь поверхность пластинок, а потому количество накопленной в нем энергии незначительно. Аккумулятор разряжается скоро. Для увеличения *емкости аккумулятора*, т. е. количества накапливаемой им энергии, применяются различные способы. В современных свинцовых аккумуляторах (рис. 148) положительный электрод состоит из ребристой свинцовой пластины, поверхность которой разрыхляется (формируется) многократной предварительной зарядкой и разрядом. Отрицательный электрод имеет вид свинцовой сетки, ячейки которой заполнены пастой из окиси свинца. При зарядке окись свинца переходит в свинец. Электродвижущая сила такого аккумулятора при зарядке сперва поднимается до 2,1 в, затем долгое время остается постоянной и в конце зарядки быстро поднимается до 2,7 в. После этого химические реакции на электродах прекращаются, на них начинают бурно выделяться пузырьки газа: аккумулятор, как говорят, „закипает“. На этом зарядку аккумулятора прекращают. При разрядке процессы идут в обратном порядке:

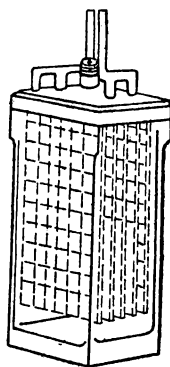


Рис. 148. Свинцовый аккумулятор.



сначала э.д.с. быстро падает с 2,7 до 2,1 в, а затем долго остается постоянной. К концу разрядки э.д.с. начинает снова падать. Обычно ее не доводят ниже 1,85 в, так как при более сильном разрядении начинается идти необратимый процесс образования сернистого свинца, в результате которого аккумулятор портится.

*Емкостью аккумулятора* называется то количество электричества, которое он отдает при разрядении, протекающем в промежутке убывания его э.д.с. от 2,7 до 1,85 в. Эта емкость измеряется обыкновенно в *ампер-часах* (1 ампер-час = 3600 кулонам).

*Коэффициентом полезного действия* аккумулятора называется отношение энергии, отдаваемой им при разрядении, к энергии, затрачиваемой при его зарядке. Коэффициент полезного действия современных свинцовых аккумуляторов достигает 80%.

В зависимости от технических требований, аккумуляторы соединяются в батареи тех или других размеров. Большие батареи аккумуляторов имеют емкости в сотни и тысячи ампер-часов и дают э.д.с. в сотни вольт. Техническое использование аккумулятора весьма разнообразно.

В настоящее время, наряду со свинцовыми аккумуляторами, употребляются щелочные *железо-никелевые аккумуляторы*. Катодом в них служат пластины из губчатого железа. Анод состоит из гидрата окиси никеля  $[\text{Ni}(\text{OH})_2]$ . Электролитом является раствор щелочи (KOH). Железо-никелевые аккумуляторы имеют э.д.с.  $\mathcal{E} = 1,45$  в; их к.п.д. меньше, чем у свинцовых аккумуляторов, и не превышает 60%, но они легче свинцовых аккумуляторов, проще в эксплуатации и способны кратковременно выдерживать сильные токи (свинцовые аккумуляторы при очень сильных токах разрядки портятся).

2. **Электрометаллургия.** Электролизом пользуются для различных целей в металлургии. Наиболее распространено электролитическое получение алюминия и чистой меди.

Медь, получающаяся при плавке из руд, содержит обычно сернистые соединения  $\text{CuS}$  и  $\text{Cu}_2\text{S}$ . Из такой меди изготавливаются аноды; электролитом служит раствор серной кислоты. На катоде при этом выделяется вполне чистая медь (так называемая „электролитическая медь“).

Алюминий, употребляемый в современной технике, целиком получается электролизом его расплавленных солей. Электролитом служит расплавленная двойная соль фтористых алюминия и натрия вместе с глиноземом.<sup>1</sup> В качестве электродов употребляются угольные пластины. Соль поддерживается в расплавленном состоянии за счет тепла, выделяющегося при прохождении тока. Заводы, выпускающие алюминий, располагаются вблизи гидроэлектрических станций, являющихся дешевыми источниками электрической энергии. Через ванны,

---

<sup>1</sup> Первичным сырьем для получения алюминия в большинстве случаев служит *боксит* — минерал, содержащий 50—60% глинозема ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ).

в которых производится электролиз солей алюминия, пропускают ток в десятки тысяч ампер.

Электролитическим же путем добываются магний, натрий и другие щелочные металлы.

3. Гальванопластика. Академик Петербургской академии наук Б. С. Якоби впервые в 1837 г. использовал электролиз для получения рельефных тонкослойных предметов из меди; процесс, изобретенный Якоби, получил название *гальванопластики*. Первоначально изготавливается модель данного предмета из воска или какого-либо другого пластического материала и покрывается, для сообщения ей проводимости, слоем графита. Эта модель служит катодом при электролизе медного купороса, анодом служит медная пластинка. Тогда на модели осаждается пленка меди, толщина которой зависит от длительности электролиза. Получившаяся пленка затем может быть отделена от модели.

Электролиз употребляется также для нанесения на предмет из одного материала слоя какого-либо другого материала (металла). Так, широко применяется никелирование электролитическим путем. Большое значение гальванопластика имеет в технике изготовления клише для иллюстрации книг и других печатных изданий.

4. Получение тонких изолирующих поверхностей. При пропускании тока между алюминиевыми и свинцовыми электродами через раствор борной щелочи ток проходит в том случае, если алюминий служит катодом. Если же алюминий сделать анодом, то он покрывается весьма тонкой изолирующей пленкой окислов, и сила проходящего тока падает до нуля. Пленка выдерживает разность потенциалов до 40 в.

Возможность получить такую изолирующую пленку практически используется в двух направлениях: во-первых, для *выпрямления переменного тока* (см. § 237) и, во-вторых, для получения *конденсаторов большой емкости*. В последнем случае между тонкими листами алюминия прокладывается бумага, пропитанная электролитом. При пропускании тока один из алюминиевых листов покрывается изолирующей пленкой и таким образом этот лист совместно с электролитом образует конденсатор. Ввиду весьма малой толщины изолирующей пленки емкость конденсатора оказывается очень большой. Практически указанные *электролитические конденсаторы* при небольших размерах могут иметь емкость до  $10^{-2}$  ф.

**§ 181. Электролитическая проводимость твердых тел.** Молекулы солей диссоциируют на ионы не только при растворении солей, но и при их расплавлении. Как мы видели в предыдущем параграфе, электролиз расплавленных солей алюминия, магния, натрия и других металлов в больших масштабах используется в промышленности. Электролитическая проводимость таких расплавленных солей, по существу, ничем не отличается от проводимости растворов. Однако

электролитическую проводимость обнаруживают также и твердые соли. Характерным примером в этом отношении может служить каменная соль.

Как известно, кристаллы каменной соли представляют собой образец ионной кристаллической решетки (см. т. I, § 87). Положительные ионы натрия и отрицательные ионы хлора расположены по узлам кубической решетки. При обычных температурах каменная соль является хорошим изолятором. Но при высоких температурах, начиная с  $600^{\circ}\text{C}$ , она, оставаясь еще вполне твердой (температура плавления каменной соли  $780^{\circ}\text{C}$ ), обнаруживает заметную проводимость. Нанеся на противоположные грани кристалла каменной соли металлические проводящие пластинки, приложив к ним разность потенциалов и разогрев кристалл в печке, можно наблюдать прохождение через кристалл тока. Аналогичную проводимость обнаруживают кристаллы галогено-серебряных солей, хлористого свинца и др.

П. И. Лукирским, С. А. Щукаревым и О. Н. Трапезниковой было показано, что при прохождении тока через твердые кристаллы каменной соли имеет место закон Фарадея, что является прямым доказательством электролитического характера проводимости.

Электролитическая проводимость твердого кристалла обычно ведет к его разрушению. Так, при электролизе нагретой каменной соли у катода выделяется натрий в виде заметных на глаз фиолетовых нитей (так называемых дендритов), проникающих в толщу кристалла.

Электропроводность кристаллов быстро возрастает с температурой. При больших разностях потенциалов происходит *пробой*, ведущий к сильному возрастанию тока. Пробой может возникнуть непосредственно за счет влияния на кристалл сильного электрического поля (порядка  $10^6$  в/см), а также за счет местного разогрева кристалла; в последнем случае он носит название теплового пробоя. Теория теплового пробоя была дана советскими учеными Н. Н. Семановым и В. А. Фоком.

Механизм продвижения ионов сквозь кристаллическую решетку под влиянием внешнего электрического поля до сих пор не вполне выяснен. Простейшая гипотеза заключается в том, что при высокой температуре амплитуда колебаний ионов около их положений равновесия настолько значительна, что под влиянием электрической силы, вызванной внешним полем, отдельные ионы иногда обмениваются местами со своими соседями. Однако, с другой стороны, следует иметь в виду, что всякий реальный кристалл значительно отличается от идеальной непрерывной решетки. Внутри кристалла имеются многочисленные микроскопические трещинки и другие изъяны решетки, и они могут играть существенную роль в проводимости кристалла.

Более определенен электролитический характер проводимости таких твердых тел, как стекло, которое не обладает кристаллической структурой и скорее может быть сравнено с жидкостью, обладающей очень большой вязкостью, чем с действительно твердым телом.

Обыкновенное стекло при комнатной температуре очень плохо проводит ток, но при нагревании оно становится сравнительно хорошим проводником, причем эта проводимость носит электролитический характер.

Электролитический характер проводимости разогретого стекла может быть легко продемонстрирован. Электрическую лампочку с вольфрамовой нитью накала (рис. 149) погружают нижней частью в железную чашку с расплавленной натронной селитрой ( $\text{NaNO}_3$ ) при температуре около  $300^\circ\text{C}$ . При этой температуре стекло остается еще вполне твердым и не продавливается под влиянием атмосферного давления. Железную чашку соединяют с положительным полюсом, а вольфрамовую нить лампочки — с отрицательным; от отдельного источника тока нить раскаляется. При этих условиях нить служит источником электронов. Ускоряемые электрическим полем, эти электроны образуют электронный ток между нитью и стеклом лампочки. Далее имеет место электролитическая проводимость разогретого стекла, и, наконец, ток замыкается, проходя через расплавленную селитру и железную чашку. В стекле по направлению к катоду движутся ионы натрия; через некоторое время лампочка покрывается с внутренней стороны блестящим зеркалом металлического натрия.

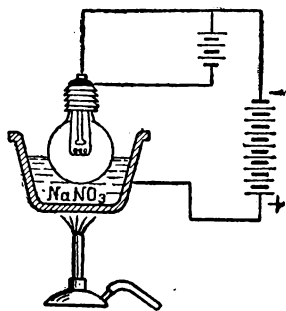


Рис. 149. Способ наблюдения электролитической проводимости стекла.

Наблюдения над электролитической проводимостью кристаллов позволяют определить подвижность ионов. Оказалось, что при электролизе твердых галогенных солей серебра ( $\text{AgCl}$ ,  $\text{AgBr}$ ,  $\text{AgJ}$ ) движется лишь положительный ион серебра, ионы же галогенов остаются неподвижными. Аналогичное явление имеет место при электролизе каменной соли ( $\text{NaCl}$ ), где при не очень высоких температурах движется лишь ион  $\text{Na}^+$ ; при более высоких температурах начинает двигаться и ион  $\text{Cl}^-$ . При электролизе хлористого свинца ( $\text{PbCl}_2$ ) перемещаются только ионы хлора, ионы же металла в кристаллической решетке остаются неподвижными. В § 154 мы указывали, что некоторые твердые соединения, например  $\text{Cu}_2\text{O}$  (полупроводники), обнаруживают электронную проводимость. Теперь мы видим, что твердые соли ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{AgCl}$  и т. д.) обнаруживают ионную проводимость. Но есть и такие вещества, как  $\text{CuJ}$ ,  $\text{Ag}_2\text{S}$ , которые обладают смешанной проводимостью; электрический ток обуславливается в них передвижением как ионов, так и электронов.

**§ 182. Электрический ток в газах.** Газы при давлениях, близких к атмосферному и больших, представляют собой хорошие изоляторы. Это означает, что их молекулы нейтральны и что в них нет свободных электронов или каких-либо других носителей зарядов.

Однако, если в массе газа создать каким-либо способом ионы (ионизировать газ), он становится проводящим.

Ионизацию газа можно вызвать термически, диссоциируя его молекулы в пламени, освещая его рентгеновскими или ультрафиолетовыми лучами или лучами радиоактивных веществ. Проводимость такого рода носит название *несамостоятельной проводимости* газа.

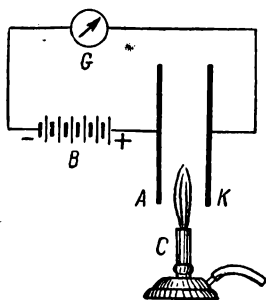


Рис. 150. Проводимость воздуха вблизи пламени.

Наряду с этим в газах (особенно разреженных) возможно поддержание проводимости за счет ионов, образующихся в результате удара частиц, ускоренных тем самым электрическим полем, которое обуславливает наличие тока. Такая проводимость носит название *самостоятельной*.

Несамостоятельная проводимость газа может быть продемонстрирована весьма просто. Между металлическими пластинами *A* и *K* (рис. 150) с помощью батареи *B* создается электрическое поле напряженности *E*. Ввиду хороших изолирующих свойств воздуха в цепи *ABGKA* ток при этом не возникает, и стрелка гальванометра *G* не отклоняется. Если же между пластинами расположить пламя горелки *C*, то благодаря образующимся в пламени ионам воздух между пластинами *A* и *K* становится проводящим, и гальванометр *G* обнаруживает в цепи ток.

Можно показать, что возникающие в пламени ионы имеют некоторое (не слишком малое) время существования. Для этого расположим электроды *A* и *K* горизонтально и поместим горелку *C* на некотором

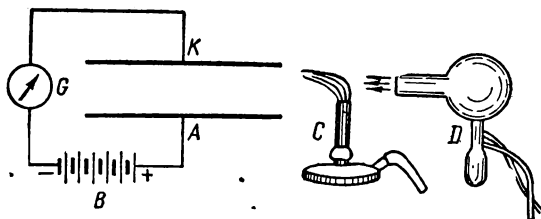


Рис. 151. Увлечение ионов потоком воздуха.

расстоянии от них (рис. 151). Образующиеся при этом в пламени ионы не попадают в пространство между электродами, и воздух между ними остается непроводящим. Но если с помощью небольшого вентилятора *D* продуть воздух через пламя и направить его в пространство между электродами, то между ними возникает ток. Это показывает, что, по крайней мере, часть ионов сохраняет свой заряд в течение времени, пока они переносятся струей воздуха от горелки

к электродам. По расстоянию между горелкой и электродами и по скорости струи воздуха можно определить, что продолжительность жизни ионов измерится десятками долями секунды.

Токи, возникающие при несамостоятельном разряде, обычно очень слабы, порядка  $10^{-6} — 10^{-12}$  а. Измерение таких слабых токов производится по большей части косвенным методом с помощью струнного или квадрантного электрометра. При этом употребляются два метода. Один из них носит название *метода натекания*. Схема этого метода показана на рис. 152. Между пластинами  $A$  и  $K$  воздух ионизируется каким-либо способом, и между ними возникает ток.  $B$  — батарея, создающая между пластинами поле, ускоряющее ионы;  $C$  и  $D$  — ножи струнного электрометра;  $G$  — его нить, отклонение которой измеряет сообщаемый ей потенциал;  $B'$  — батарея, создающая разность потенциалов между ножами электрометра. Если переключатель  $a$  занимает положение, изображенное на рис. 152 пунктиром, то нить электрометра окажется соединенной с землей  $Z$ , и ее потенциал будет равен нулю: она останется в неотклоненном состоянии. При отключении переключателем  $a$  нити от земли (положение переключателя изображено сплошной линией на рис. 152) на нить будет натекать заряд с пластины  $K$ , и она начнет отклоняться. Пусть через время  $t$ , отсчитываемое секундомером, потенциал нити оказался равным  $V$ ; тогда сообщенный ей заряд  $Q$  равен

$$Q = CV,$$

где  $C$  — емкость всей системы, образованной электрометром, пластинами  $A$  и  $K$  и подводящими проводами. Средняя сила тока  $I$ , протекающего в течение времени  $t$  между пластинами  $A$  и  $K$ , равна

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{CV}{t}.$$

Зная  $C$  и измерив  $V$  и  $t$ , найдем, таким образом, силу тока  $I$ . Например, если емкость  $C = 50$  см  $\cong 5,5 \cdot 10^{-11}$  ф и нить электрометра зарядилась до 0,05 в за 27,5 сек, то

$$I = \frac{5,5 \cdot 10^{-11} \cdot 0,05}{27,5} \text{ а} = 10^{-13} \text{ а}.$$

Как видно, указанный способ позволяет измерять очень слабые токи, но недостаток его заключается в том, что он дает лишь среднюю силу тока за время наблюдения  $t$ .

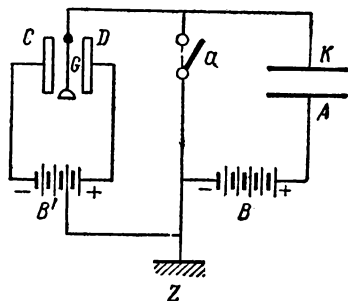


Рис. 152. Измерение малых токов методом натекания.

Второй метод называется *методом постоянного отклонения*. Он сводится к измерению с помощью электрометра разности потенциалов на концах очень большого сопротивления  $R$  (рис. 153), которым замыкаются пластины  $A$  и  $K$  (остальные обозначения те же, что на рис. 152). По измеренной разности потенциалов  $V_1 - V_2$  и сопротивлению  $R$  сила тока вычисляется по закону Ома:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}.$$

Например, при сопротивлении  $R = 100 \text{ мом} = 10^8 \text{ ом}$  и разности потенциалов  $V_1 - V_2 = 0,01 \text{ в}$ , сила тока окажется равной

$$I = \frac{0,01}{10^8} \text{ а} = 10^{-10} \text{ а}.$$

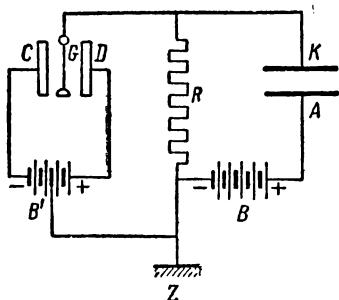


Рис. 153. Измерение малых токов методом постоянного отклонения.

Ввиду малой инерции нити этот метод позволяет практически измерять силу тока для данного момента времени. Недостаток метода заключается в трудности осуществления точного измерения очень большого сопротивления.

Несамостоятельная проводимость в газах при давлениях, близких к атмосферному и больших, есть ионная проводимость.

Если в результате процесса ионизации из молекул газа вырываются электроны, то эти последние в большинстве случаев немедленно притягиваются к молекулам и, таким образом, не остаются свободными, а образуют молекулярные отрицательные ионы.

Но при низких давлениях электроны остаются свободными, и тогда проводимость газа носит электронный характер.

**§ 183. Теория несамостоятельной проводимости газов.** Теория несамостоятельной проводимости газов аналогична теории проводимости электролитов (§ 178).

Пусть ионизатор создает в единицу времени в единице объема газа  $\Delta n_0$  ионов каждого знака. Обратный процесс — *молизация* (или, как иногда говорят, *рекомбинация*) ионов пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов в единице объема.

Предположим, что в данный момент в единице объема газа имеется  $n_0$  положительных ионов и столько же отрицательных, тогда число ионов, молизующихся в единице объема в единицу времени, будет:

$$\Delta n'_0 = \gamma n_0^2,$$

где  $\gamma$  — коэффициент молизации.

Условие равновесия заключается в равенстве числа вновь возникающих ионов  $\Delta n_0$  числу пропадающих ионов  $\Delta n'_0$ ; оно запишется в виде

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^3. \quad (1)$$

Отсюда для числа ионов (одного знака)  $n_0$ , находящихся при данных условиях в единице объема газа, получим

$$n_0 = \sqrt[3]{\frac{\Delta n_0}{\gamma}}. \quad (2)$$

Предположим, что ионизированный газ находится между двумя плоскими параллельными электродами, между которыми создается электрическое поле напряженности  $E$ . Тогда ионы начнут под влиянием этого поля двигаться и создадут ток. Ионы, достигшие электродов, отдадут им свой заряд. Таким образом, исчезновение ионов будет теперь происходить не только за счет молизации внутри объема самого газа, но и за счет нейтрализации ионов у электродов. Ионы будут достигать электродов еще и за счет диффузии, но в дальнейшем мы пренебрежем этим эффектом.

Пусть сила тока между электродами равна  $I$ , тогда за время  $t$  окажется перенесенным заряд  $Q = It$ , и, следовательно, число ионов одного знака, достигших электрода и отдавших ему свой заряд за время  $t$ , будет  $It/q$ , а за единицу времени  $I/q$ , где  $q$  — заряд одного иона. Пусть  $S$  — площадь каждой из пластин, образующих электроды,  $l$  — расстояние между ними. Тогда объем газа, заключенный между пластинами, равен  $Sl$ , и, следовательно, в результате прохождения тока из единицы объема газа в единицу времени уходит число ионов, равное

$$\Delta n''_0 = \frac{I}{qSl}.$$

Замечая, что  $I/S$  равно плотности тока  $i$ , перепишем последнее равенство:

$$\Delta n''_0 = \frac{i}{ql}.$$

При наличии тока условие равновесия выразится не равенством (1), а требованием, чтобы число вновь возникающих ионов  $\Delta n_0$  равнялось полному числу пропадающих ионов  $\Delta n'_0 + \Delta n''_0$ , откуда

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^3 + \frac{i}{ql}. \quad (3)$$

Рассмотрим два предельных случая. Во-первых, предположим, что плотность тока  $i$  настолько мала, что

$$\frac{i}{ql} \ll \gamma n_0^3, \quad (4)$$

т. е. что числом ионов, уносимых вследствие наличия тока, можно пренебречь по сравнению с числом ионов, пропадающих



в результате молизации. Тогда мы снова возвращаемся к равенству (1) и к вытекающему из него равенству (2); число ионов  $n_0$  в единице объема газа постоянно. Пусть скорость положительных ионов равна  $u_+$  и отрицательных  $u_-$ . Тогда мы получим, что к катоду в единицу времени подойдет  $n_0 u_+ S$  положительных ионов. Одновременно от катода отойдет  $n_0 u_- S$  отрицательных ионов, в результате чего около катода останутся непарными еще  $n_0 u_- S$  положительных ионов. Благодаря этому общее число положительных ионов, выделившихся в единицу времени на катоде, окажется равным  $n_0 (u_+ + u_-) S$ ; столько же отрицательных ионов выделится в единицу времени на аноде. Следовательно, для плотности тока  $i$  получим:

$$i = q n_0 (u_+ + u_-). \quad (5)$$

Рассуждая совершенно аналогично тому, как мы рассуждали при рассмотрении движения ионов в электролите (§ 178), можем положить скорость уравновешенного движения ионов пропорциональной напряженности поля  $E$ :

$$u_+ = u_+^0 E, \quad u_- = u_-^0 E;$$

величины  $u_+^0$  и  $u_-^0$  являются *подвижностями газовых* ионов и численно равны скоростям ионов при напряженности, равной единице. Подставляя в (5) вместо скоростей ионов  $u_+$  и  $u_-$  их выражения через подвижности, получим

$$i = q n_0 (u_+^0 + u_-^0) E. \quad (6)$$

Так как величины  $q$ ,  $u_+^0$  и  $u_-^0$  постоянны при данных условиях опыта, а  $n_0$  для очень малой плотности тока мы тоже считаем постоянным, то и вся величина  $\sigma = q n_0 (u_+^0 + u_-^0)$  постоянна, и, следовательно, равенство (6) выражает собою закон Ома:

$$i = \sigma E,$$

здесь  $\sigma$  — проводимость газа. Отметим еще раз, что закон Ома для несамостоятельной проводимости газа справедлив лишь при очень малой плотности тока  $i$ ; критерий того, какую плотность тока  $i$  можно считать достаточно малой, дается неравенством (4). Ниже мы дадим этому неравенству другую формулировку.

Рассмотрим теперь второй предельный случай, когда плотность тока  $i$  настолько велика, что вся убыль ионов фактически определяется их нейтрализацией на электродах, а убыль в результате молизации можем пренебречь, т. е. когда

$$\gamma n_0^3 \ll \frac{i}{q l}.$$

Тогда равенство (3) принимает вид:

$$\Delta n_0 = \frac{i}{q l}. \quad (7)$$

Обозначив плотность тока, удовлетворяющую равенству (7), через  $i_n$ , получим

$$i_n = \Delta n_0 q l. \quad (8)$$

Из равенства (8) вытекает, что плотность тока  $i_n$  не зависит от напряженности поля  $E$ , а следовательно, и от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  между электродами. Плотность тока  $i_n$  является максимально возможной при данных условиях (данных  $\Delta n_0$ ,  $q$  и  $l$ ) и называется *плотностью тока насыщения*. Из равенства (8) следует вывод, который может показаться несколько неожиданным, а именно, что плотность тока насыщения  $i_n$  тем больше, чем больше  $l$ , т. е. чем дальше друг от друга расставлены электроды. Но этот вывод справедлив при условии, что ионизация производится во всем пространстве между электродами и, следовательно, на тем большем участке, чем больше расстояние между электродами  $l$ . Таким образом, при большом  $l$  общее число возникающих ионов становится больше, что и обуславливает возрастание тока насыщения  $i_n$ .

Для случаев, промежуточных по отношению к рассмотренным предельным случаям, сила тока  $I$  возрастает с разностью потенциалов медленнее, чем того требует закон Ома. Резюмируя, мы можем сказать: при несамостоятельном газовом разряде при *силе тока  $I$ , много меньшей силы тока насыщения  $I_n$ , имеет место закон Ома: сила тока  $I$  возрастает пропорционально разности потенциалов  $V_1 - V_2$  между электродами;*

*при больших разностях потенциалов  $V_1 - V_2$  закон Ома не выполняется — ток достигает насыщения.* Общий характер зависимости силы тока  $I$  от разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , приложенной к электродам, графически представлен на рис. 154 кривой  $abc$ . При очень больших разностях потенциалов  $V_1 - V_2$  наступает „пробой“, и сила тока резко возрастает (пунктирная часть кривой  $cd$ ). Существование тока насыщения при несамостоятельной проводимости газов было установлено А. Г. Столетовым, который наблюдал разряд через газ при низком давлении, возникающий за счет электронов, испускаемых катодом при его освещении ультрафиолетовыми лучами.

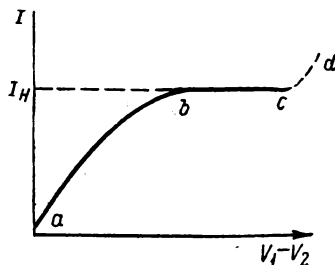


Рис. 154. Зависимость силы тока  $I$  от разности потенциалов  $V_1 - V_2$  для случая несамостоятельной проводимости.

Рассмотрим еще вопрос о распределении падения потенциала между плоскими параллельными электродами при наличии между ними ионизированного газа.

При отсутствии ионизации, по сказанному в § 128, напряженность поля  $E$  во всех точках между электродами постоянна, и потенциал  $V$  падает при перемещении от положительного электрода к отрицательному равномерно.

Проведя ось  $OX$  перпендикулярно к электродам и расположив начало координат в плоскости положительного электрода, получим, что распределение потенциала  $V$  в пространстве между электродами изобразится прямой  $V_1V_2$  (рис. 155).

При наличии равномерной ионизации во всем пространстве между электродами, когда в каждой единице объема присутствует одинаковое число положительных и отрицательных ионов, газ в любом объеме, большом по сравнению с молекулярными размерами, нейтрален и макроскопическое распределение потенциала остается прямолинейным. Не так будет обстоять дело при наличии тока. Тогда вблизи анода получится избыток отрицательных ионов, а вблизи катода — избыток положительных ионов. У электродов возникнут объемные заряды  $\rho$ , распределение которых изобразится кривой  $I$  на рис. 156. Наличие объемных зарядов изменит напряженность поля  $E$ : она не будет постоянна во всем пространстве между электродами.

По сказанному в § 132, напряженность поля  $E$  связана с плотностью зарядов  $\rho$  соотношением:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

Рис. 155. Распределение потенциала  $V$  между электродами при отсутствии ионизации.

которое для данного случая, где  $E$  зависит только от координаты  $x_1$  принимает вид:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho. \quad (9)$$

В пространстве, удаленном от электродов (область  $ab$  на рис. 156), где  $\rho = 0$ , по (9), производная от  $E$  по координате равна нулю, т. е. сама напряженность  $E$  постоянна. Вблизи электродов, где  $\rho$  отлично от нуля, отлична от нуля и производная  $dE/dx$ , откуда следует, что напряженность  $E$  меняется с координатой  $x$ . Так как вблизи анода  $\rho$  отрицательно, то здесь, по равенству (9), отрицательна и  $dE/dx$ , т. е.  $E$  убывает по мере удаления от анода. Вблизи катода  $\rho$  положительно, и здесь  $E$  возрастает. Окончательно мы имеем распределение напряженности  $E$  в пространстве между электродами, изображаемое кривой  $II$  на рис. 156.

Наконец, рассмотрим распределение потенциала  $V$ . Потенциал  $V$  связан с напряженностью поля соотношением (см. § 131)  $E = -\frac{dV}{dx}$ , откуда, так как в рассматриваемом случае нормаль  $n$  совпадает с осью  $OX$ ,

$$-\frac{dV}{dx} = E.$$

Отсюда получаем: в области  $ab$ , где отсутствуют объемные заряды и  $E$  постоянно, постоянна и производная  $dV/dx$ , т. е. имеет место равномерное падение потенциала. Вблизи электродов, где  $E$  больше, чем вдали от них, падение потенциала происходит быстрее. Общий ход потенциала в пространстве между электродами изображен кривой  $III$  рис. 156.

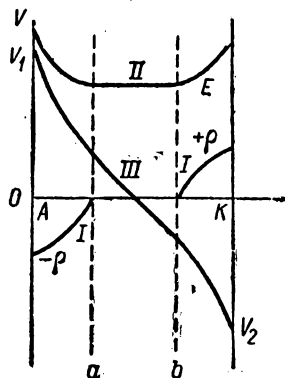


Рис. 156. Распределение между электродами:  $I$  — объемных зарядов  $\rho$ ,  $II$  — напряженности поля  $E$ ,  $III$  — потенциала.

**§ 184. Экспериментальное определение коэффициентов моли-зации и подвижности газовых ионов.** Коэффициент молизации  $\gamma$  и подвижность ионов  $u^0$  могут быть определены экспериментально несколькими способами.

Рассмотрим наиболее прямые из них.

Коэффициенты молизации  $\gamma$  для разных газов были впервые измерены по определению числа ионов в струе газа на различных расстояниях от области, где происходит ионизация.

По прекращении действия ионизатора, число ионов  $n_0$  в единице объема начнет убывать со временем вследствие их молизации. Обозначим через  $n$  число ионов в единице объема в данный момент времени  $t$ . Тогда, если через  $-dn$  мы обозначим число ионов, пропа-дающих вследствие молизации за малый промежуток времени  $dt$ , то число ионов, исчезающих в единицу времени, будет  $-\frac{dn}{dt}$ ; по определению коэффициента молизации оно должно равняться  $\gamma n^2$ , где  $\gamma$  — коэффициент молизации:

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n^2 \text{ или } \gamma dt = -\frac{dn}{n^2}. \quad (1)$$

Будем отсчитывать время  $t$  от момента прекращения действия ионизатора. Тогда, чтобы получить в явном виде зависимость числа ионов  $n$  от времени  $t$ , надо проинтегрировать выражение (1) в пределах от  $t=0$  до некоторого определенного момента  $t$ :

$$\int_0^t \gamma dt = - \int_{n_0}^n \frac{dn}{n^2},$$

где  $n_0$  — число ионов в единице объема в момент прекращения действия ионизатора, а  $n$  — через время  $t$ . Выполняя интегрирование, получим:

$$\gamma t = \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}, \quad (2)$$

откуда находим

$$n = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 t}. \quad (3)$$

Выражение (3) дает закон спадания числа ионов  $n$  со временем после прекращения действия ионизатора.

Экспериментальные измерения по определению числа ионов в струе газа на различных расстояниях от области, где происходит ионизация, базируются на соотношении (2). В некотором ограниченном объеме производится ионизация. Через этот объем продувается струя газа. На расстоянии  $d$  от места ионизации располагается электрод, который соединяется с одним из полюсов батареи, другой полюс которой заземлен. Тогда, благодаря электрическому полю, возникающему около

электрода, на него попадают ионы одного знака. При достаточно сильном поле число ионов, попадающих в единицу времени на электрод, равно их числу в объеме газа, протекающем мимо электрода в единицу времени, т. е. равно  $nSv$ , где  $S$  — площадь электрода, а  $v$  — скорость струи. В результате электроду будет сообщен заряд  $Q = nSvq$ , где  $q$  — заряд одного иона.

Измерения производятся для двух разных расстояний  $d_1$  и  $d_2$ ; пусть при расстоянии  $d_1$  измерен заряд

$$Q_1 = n_1 S v q,$$

а при расстоянии  $d_2$  — заряд

$$Q_2 = n_2 S v q.$$

По формуле (2)

$$\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} = \gamma t_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_0} = \gamma t_2,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — те промежутки времени, которые потребны струе газа, чтобы продвинуться от области ионизации соответственно до мест первого и второго положений электрода.

Отсюда имеем

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \gamma(t_2 - t_1), \quad \text{но} \quad t_2 - t_1 = \frac{d_2 - d_1}{v},$$

где  $v$  — скорость струи. Следовательно,

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \gamma \frac{d_2 - d_1}{v}.$$

Подставляя сюда вместо  $n_2$  и  $n_1$  их выражения через  $Q_1$  и  $Q_2$ , найдем

$$\left( \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right) S v q = \gamma \frac{d_2 - d_1}{v},$$

Т а б л и ц а VIII

**Коэффициент молизации**  
( $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ ) при 1 атм  
и температуре 18° С

откуда получаем

Газ	$\gamma \cdot 10^6$
Воздух . . . . .	1,67
Кислород . . . . .	1,61
Водород . . . . .	1,44
Оксид углерода CO .	0,87

$$\gamma = S q \left( \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right) \frac{v^2}{d_2 - d_1}. \quad (4)$$

Измерив  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $v$  и зная  $S$ ,  $q$  и  $d_2 - d_1$ , найдем по формуле (4) коэффициент молизации  $\gamma$ .

Коэффициент молизации  $\gamma$  определяется соотношением  $\gamma = \frac{\Delta n'_0}{n_0^2}$ ,

где  $\Delta n'_0$  — число ионов, пропадаящих в единице объема в единицу времени, а  $n_0$  — число ионов в единице объема. Следовательно,  $\gamma$  имеет размерность  $L^3 T^{-1}$  и может быть измерен в  $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Значения  $\gamma$  для различных газов приведены в табл. VIII.

От давления  $\gamma$  зависит слабо, заметно уменьшаясь лишь при очень малых давлениях. С увеличением температуры  $\gamma$  уменьшается.

Для ознакомления с порядком величин, с которыми приходится иметь дело при несамостоятельной проводимости газов и их ионизации, приведем несколько численных примеров.

**Пример 1.** Между плоскими электродами, площадью  $S = 100 \text{ см}^2$  каждый, находящимися на расстоянии  $l = 5 \text{ см}$  друг от друга, наблюдается, при ионизации с помощью рентгеновых лучей, ток насыщения  $I_n = 10^{-7} \text{ а}$ .

Определить число пар ионов  $\Delta n_0$ , образуемых рентгеновыми лучами в  $1 \text{ см}^3$  за  $1 \text{ сек}$ , и наибольшее возможное число пар ионов  $n_0$  в  $1 \text{ см}^3$ . Возникающие ионы считать одновалентными.

**Решение.** Плотность тока насыщения  $i_n$  равна

$$i_n = \frac{I_n}{S} = \frac{10^{-7}}{10^2} \text{ а/см}^2 = 10^{-9} \text{ а/см}^2.$$

Заряд  $q$  одного (одновалентного) иона равен  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к}$ , откуда по формуле (8) § 183:

$$\Delta n_0 = \frac{i_n}{ql} = \frac{10^{-9}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5} \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1} = 1,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Наибольшее возможное число пар ионов  $n_0$  в  $1 \text{ см}^3$  найдем по формуле (2) § 183:

$$n_0 = \sqrt{\frac{\Delta n_0}{\gamma}}.$$

Полагая, в соответствии с табл. VIII, для воздуха  $\gamma = 1,67 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ , имеем

$$n_0 = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^9}{1,67 \cdot 10^{-6}}} \text{ см}^{-3} \cong 2,7 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

Так как при атмосферном давлении в  $1 \text{ см}^3$  заключается  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул газа, то, следовательно, в данном примере рентгеновы лучи способны ионизировать  $10^{-12}$  часть всех молекул. Эта ионизация очень мала по сравнению со степенью ионизации в электролитах, где в слабых растворах диссоциируют на ионы почти все молекулы растворенного вещества.

**Пример 2.** В атмосферном воздухе у поверхности Земли, из-за радиоактивности почвы и космического излучения, в среднем образуется 5 пар ионов в  $1 \text{ см}^3$  за  $1 \text{ сек}$ . Определить ток насыщения, который получается в результате этой естественной ионизации воздуха между плоскими электродами площадью  $S = 100 \text{ см}^2$  каждый, расположенными на расстоянии  $l = 5 \text{ см}$  друг от друга.

**Решение.** По формуле (8) § 183:

$$I_n = i_n S = \Delta n_0 q l S.$$

Считая, что возникающие ионы несут однократный заряд  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к}$ , получим

$$I_n = 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ а} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ а}.$$

Таким образом, атмосферный воздух обладает, хотя и очень малой, но все же заметной естественной несамостоятельной проводимостью.

**Пример 3.** Определить, через сколько времени в воздухе, ионизированном рентгеновыми лучами, после прекращения действия лучей число пар ионов вследствие молизации уменьшится вдвое.

Первоначальное число ионов принять равным  $n_0 = 10^6 \text{ см}^{-3}$ .

Решение. Полагая в формуле (3)

$$n = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 t}$$

число ионов  $n = \frac{1}{2} n_0$ , получим уравнение, определяющее тот промежуток времени  $t = \tau$ , за который число ионов вследствие молизации убывает вдвое:

$$\frac{1}{2} n_0 = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 \tau}, \quad \text{откуда } \tau = \frac{1}{\gamma n_0}.$$

Подставляя сюда  $n_0 = 10^8 \text{ см}^{-3}$  и  $\gamma = 1,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ , получим

$$\tau = \frac{1}{10^8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-8}} \text{ сек} = 0,6 \text{ сек}.$$

Таким образом, через 0,6 сек в газе останется половина от первоначального числа ионов.

Пример 4. По условиям, приведенным в примере 1, определить эффективный диаметр ионов.

Решение. Напомним, что эффективным диаметром называется диаметр частиц, определяющий длину их свободного пути или число столкновений, испытываемых ими друг с другом в единицу времени. При этом число столкновений подсчитывается так, как если бы сталкивающиеся частицы были твердыми шариками.

При условиях примера 1 в  $1 \text{ см}^3$  газа в 1 сек возникает  $\Delta n_0 = 1,25 \cdot 10^9$  пар ионов. При равновесии столько же пар ионов должно в  $1 \text{ см}^3$  за 1 сек пропадать вследствие молизации. Предположим, что ионы нейтрализуются при взаимном столкновении.

По сказанному в § 53 т. I, молекула испытывает в среднем в единицу времени число столкновений, равное

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 \bar{v} n_0,$$

где  $\sigma$  — эффективный диаметр молекулы,  $\bar{v}$  — средняя скорость теплового движения молекул,  $n_0$  — число молекул в единице объема. Применяя эту формулу к определению числа столкновений ионов друг с другом, мы под  $n_0$  должны подразумевать число пар ионов в единице объема. Общее число столкновений, испытываемых всеми ионами, заключенными в единице объема, будет:

$$Z = \bar{z} n_0 = \sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 \bar{v} n_0^2.$$

По сделанному предположению, что число  $Z$  должно равняться числу молизирующихся пар ионов  $\Delta n'_0$ :

$$\Delta n'_0 = \sqrt{2} \pi \sigma^2 \cdot \bar{v} n_0^2,$$

откуда

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Delta n'_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \bar{v} n_0^2}}. \quad (5)$$

Скорость теплового движения ионов равна скорости теплового движения молекул, т. е. для воздуха при комнатной температуре  $\bar{v} \cong 5 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$ . Подставляя это значение  $\bar{v}$  в (5) и полагая, в соответствии с данными примера 1,  $\Delta n'_0 = 1,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1}$  и  $n_0 = 2,7 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ , получим:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^9}{1,41 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot (2,7 \cdot 10^7)^2}} \text{ см} \cong 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Эффективные диаметры нейтральных молекул представляют собою величины порядка  $2,5 \cdot 10^{-8}$  см; таким образом, эффективные диаметры ионов оказываются приблизительно в 100 раз большими. Это легко объяснить: обладая зарядами различного знака, ионы притягиваются друг к другу электростатическими силами, что ведет к увеличению числа столкновений между ними, а следовательно, и к возрастанию их эффективных диаметров.

Рассмотрим простейший способ определения подвижности ионов путем задерживания ионов струей газа. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 157) представляют собой две сетки, помещенные в газ. Газ в пространстве между сетками  $A_1$  и  $A_2$  подвергается ионизации каким-либо внешним ионизатором. Если сетка  $A_1$  заряжена отрицательно, а сетка  $A_2$  — положительно, то отрицательные ионы движутся по направлению к сетке  $A_2$  со скоростью  $u_- = u_-^0 E$ , где  $u_-^0$  — подвижность ионов,  $E$  — напряженность поля между сетками. Заряд, приносимый ионами на сетку  $A_2$ , обнаруживается с помощью электрометра. Если теперь начать продувать газ через сетку  $A_2$  по направлению к сетке  $A_1$  со скоростью  $v$  (указано на рис. 157 стрелками), то скорость движения ионов по направлению к сетке  $A_2$  станет  $u_-^0 E - v$ . По мере увеличения скорости продувания газа  $v$ , эта скорость будет становиться все меньше и меньше. Когда  $u_-^0 E - v$  окажется равным нулю, отрицательные ионы перестанут падать на сетку  $A_2$ , и электрометр перестанет заряжаться. Таким образом, может быть установлен момент, когда окажется выполненным соотношение  $u_-^0 E = v$ . Отсюда по  $v$  и  $E$  определяется подвижность отрицательных ионов  $u_-^0$ .

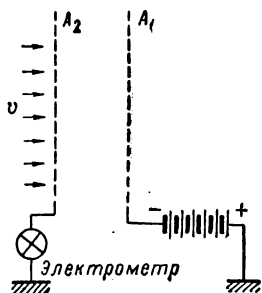


Рис. 157. Схема простейшего способа определения подвижности ионов.

Т а б л и ц а IX

Подвижность ионов  
(в  $\text{см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}$ )  
при  $p = 1 \text{ атм}$   
и температуре  $18^\circ \text{C}$

Газ	$u_+^0$	$u_-^0$	$\frac{u_-^0}{u_+^0}$
Водород . .	5,91	8,26	1,4
Кислород . .	1,29	1,79	1,4
Азот . . . .	1,27	1,84	1,4
СО . . . . .	1,10	1,14	1,0
Хлор . . . .	0,65	0,51	0,8

Изменив знаки зарядов сеток  $A_1$  и  $A_2$ , можно совершенно таким же образом определить подвижность положительных ионов  $u_+^0$ .

Результаты измерений подвижностей различных ионов при давлении газа в одну атмосферу приведены в табл. IX.

*Подвижность ионов в широких пределах обратно пропорциональ-*

*на давлению  $p$ . Подвижность положительных ионов не зависит заметно от напряженности поля  $E$ ; подвижность отрицательных ионов также не зависит от  $E$  при не слишком больших  $E$ , при больших  $E$*



она возрастает с дальнейшим увеличением  $E$ . Таким образом, для не слишком больших  $E$  оправдывается сделанное в § 183 предположение о пропорциональности скорости ионов напряженности поля.

Следует отметить, что подвижности ионов, особенно отрицательных, сильно зависят от загрязнений газа. Ничтожная примесь, например, кислорода изменяет подвижность отрицательных ионов в десятки и даже сотни раз. Так, для гелия при давлении в 1 атм, содержащего следы кислорода,  $u_+^0 = 5,09 \text{ см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}$  и  $u_-^0 = 6,31 \text{ см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}$ . В совершенно чистом гелии подвижность положительных ионов  $u_+^0$  остается почти та же, в то время как подвижность отрицательных ионов  $u_-^0$  достигает огромной величины 500  $\text{см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}$ . Это объясняется тем, что в гелии при ионизации возникают свободные электроны, подвижность которых очень велика. При наличии хотя бы малых следов кислорода электроны присоединяются к нейтральным молекулам кислорода и образуют отрицательные молекулярные ионы с их относительно малой подвижностью.

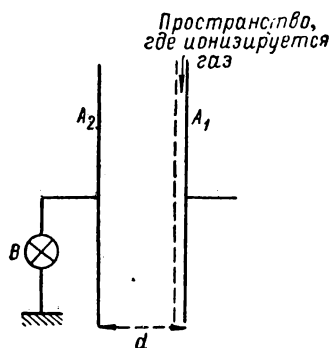


Рис. 158. Схема метода определения подвижности ионов.

Другой метод определения подвижности ионов заключается в следующем. Газ ионизируется у поверхности плоского электрода  $A_1$  (рис. 158). Между электродом  $A_1$  и параллельным ему электродом  $A_2$  накладывается периодически меняющееся со временем поле напряженности  $E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ ,

где  $t$  — время,  $T$  — период,  $E_0$  — постоянная величина. Электрод  $A_2$  соединен с электрометром  $B$ . Рассмотрим ионы того знака, подвижность которых больше, например отрицательные. В каждый данный момент они имеют скорость  $u_- = u_-^0 E$ . Так как напряженность поля  $E$  меняется со временем, то

меняется и скорость  $u_-$ . Пусть за первые полпериода, т. е. за время от  $t = 0$  до  $t = \frac{T}{2}$ , поле  $E$  ускоряет отрицательные ионы по направлению к электроду  $A_2$ , тогда за следующие полпериода оно будет их двигать обратно к электроду  $A_1$ . За время от  $t = 0$  до  $t = \frac{T}{2}$  ионы пройдут путь:

$$s = \int_0^{T/2} u_-^0 E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt = \frac{T}{\pi} u_-^0 E_0.$$

Если  $s$  меньше расстояния  $d$  между электродами, то ионы, образованные вблизи электрода  $A_1$ , не достигнут электрода  $A_2$ , и соединенный с ним электрометр  $B$  не обнаружит отклонения. Меняя период  $T$ , можно достичь условия  $s = d$ , при котором заряды достигнут электрода  $A_2$ , что обнаружится по отклонению электрометра. Тогда

$$d = \frac{T}{\pi} u_-^0 E_0,$$

откуда по известным  $T$ ,  $d$  и  $E_0$  находится искомая подвижность  $u_-^0$ .

При еще большем увеличении периода  $T$ , электрода  $A_2$  начнут достигать (за вторые полпериода) и положительные ионы, по нашему предположению более медленные. При этом отклонение электрометра уменьшится. Таким образом, может быть найдена подвижность и ионов другого знака.

Приведем численный пример, указывающий роль подвижности ионов.

Пример. Определить проводимость  $\sigma$  воздуха, ионизированного рентгеновыми лучами так, что в  $1 \text{ см}^3$  воздуха находится в условиях равновесия  $n_0 = 10^7$  пар ионов. Заряд ионов считать однократным.

Решение. По формуле (6) § 183 имеем

$$\sigma = qn_0(u_+^0 + u_-^0).$$

Выражая заряд иона  $q$  в кулонах,  $n_0$  — в  $\text{см}^{-3}$  и  $u_+^0$  и  $u_-^0$  — в  $\text{см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}$ , получим  $\sigma$  в  $\text{ом}^{-1} \text{см}^{-1}$ . Считая воздух в основном состоящим из азота, получим для суммы подвижностей ионов  $u_+^0 + u_-^0$ , по данным табл. IX:

$$u_+^0 + u_-^0 = 1,27 + 1,84 = 3,11 \text{ см}^2/\text{сек} \cdot \text{в}.$$

Отсюда, пользуясь значениями  $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$  и  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к}$ , найдем

$$\sigma = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 3,11 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cong 5 \cdot 10^{-12} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Интересно сравнить этот результат с проводимостью металлов. Для меди по данным табл. IV на стр. 123,  $\sigma = 6,4 \cdot 10^5 \text{ ом}^{-1} \text{см}^{-1}$ , откуда видно, что проводимость ионизированного воздуха при условиях данного примера приблизительно в  $10^{17}$  раз меньше проводимости меди.

Проводимость электролитов зависит от их состава и концентрации. Для примера подсчитаем проводимость электролита, получаемого при растворении 2,92 г поваренной соли NaCl в 1 л воды.

В § 85 т. I было определено по осмотическому давлению, что при этих условиях 0,44 всех растворенных молекул NaCl диссоциированы на ионы. Это означает, что число пар ионов составляет 0,44 от числа растворенных молекул. Так как молекулярный вес NaCl равен 58, то число растворенных молекул в единице объема равно

$$n_0 = \frac{2,92 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{58 \cdot 1000} \text{ см}^{-3} \cong 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3},$$

отсюда число пар ионов  $n'_0$  в единице объема

$$n'_0 = 0,44 \cdot 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \cong 1,3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Проводимость  $\sigma$  электролита определим по формуле (5) § 178:

$$\sigma = F\eta\alpha(u_+^0 + u_-^0) = n'_0 q(u_+^0 + u_-^0).$$

Сумма подвижностей ионов  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  в электролите, по табл. VII на стр. 219, равна

$$u_+^0 + u_-^0 = 0,000450 + 0,000677 \cong 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек} \cdot \text{в},$$

откуда

$$\sigma = 1,3 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cong 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Таким образом, проводимость указанного электролита приблизительно в  $10^9$  раз больше проводимости воздуха, ионизированного, как указано в нашем примере. Эта относительно большая проводимость электролита объясняется большим количеством ионов в единице объема: в  $1 \text{ см}^3$  электролита ионов приблизительно в  $10^{19}$  раз больше, чем в  $1 \text{ см}^3$  воздуха, ионизированного рентгеновыми лучами; подвижность же ионов в электролите в тысячи раз меньше подвижности газовых ионов.

§ 185. Прохождение электронного тока через вакуум. Как предельный случай несамостоятельной проводимости может рассматриваться электронный ток через вакуум, т. е. через пространство, где давление остаточного газа так мало, что длина среднего свободного пути электронов больше расстояния между электродами. В § 170 мы видели, что электронный ток через вакуум может быть осуществлен с помощью такого источника электронов, каким является раскаленная поверхность металла.

Получаемый при этом чисто электронный ток между горячим катодом и анодом не подчиняется закону Ома. Как было указано (стр. 188), для токов  $I$  — малых по сравнению с током насыщения  $I_{\text{н}}$  — имеет место формула Богуславского — Ленгмюра (вывод см. в § 186);

$$I = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2}, \quad (1)$$

по которой сила тока  $I$  растет пропорционально разности потенциалов в степени  $3/2$ . Причина такой зависимости  $I$  от  $V_1 - V_2$  заключается в образовании между электродами электронного облака. При больших

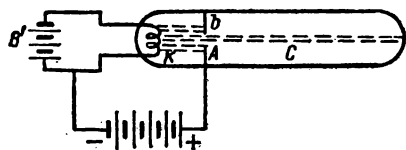


Рис. 159. Получение катодного луча.

разностях потенциалов ток достигает насыщения, определяемого числом электронов  $n$ , испускаемых катодом в единицу времени.

Пользуясь раскаленным катодом, можно получить поток прямолинейно летящих электронов. Расположив близко от катода K анод A с небольшим отверстием  $b$  (рис. 159), мы получим в пространстве C пучок электронов, так называемый *электронный*, или *катодный луч*. Этот электронный луч легко обнаружить по яркому свечению (люминесценции), которое он вызывает, ударяясь о ряд твердых тел, например урановое стекло, виллемит, сернистый цинк и т. д.

Катодные лучи были впервые наблюдаемы еще в середине XIX в., но лишь в начале нынешнего столетия было с несомненностью установлено, что они представляют собой поток элементарных отрицательных частиц — электронов.

При движении электрона без столкновений под влиянием электрического поля на него действует сила  $f = eE$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $E$  — напряженность поля. В этом случае вся работа поля  $A = e(V_1 - V_2)$ , где  $V_1 - V_2$  — разность потенциалов начальной и конечной точек пути электрона, идет на увеличение его кинетической энергии  $E_k$ . Если начальная скорость электрона равнялась нулю, то

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = e(V_1 - V_2). \quad (2)$$

Как мы уже говорили в § 168, энергию электрона принято измерять в особых единицах энергии, называемых „электрон-вольтами“

(сокращенно *эв*). Один электрон-вольт равен кинетической энергии, приобретаемой электроном при прохождении пути, разность потенциалов на концах которого равна 1 *в*.

Как было указано,

$$1 \text{ эв} = 1,601 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Для многих расчетов бывает удобно пользоваться единицей, в *N* раз большей, где *N* — число Авогадро; эта единица представляет собой энергию, отнесенную к одному молю вещества, и может быть названа *эв/моль*. Очевидно,

$$1 \text{ эв/моль} = 1,601 \cdot 10^{-12} \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ эрг/моль} = 9,643 \cdot 10^{11} \text{ эрг/моль} = 23\,055 \text{ кал/моль.}$$

Из равенства (2) легко определить скорость *v*, приобретаемую электроном при прохождении пути, разность потенциалов на концах которого равна  $V_1 - V_2$  (начальная скорость полагается равной нулю):

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V_1 - V_2}. \quad (3)$$

Подставляя сюда вместо заряда *e* и массы *m* электрона их численные значения, получим

$$v \text{ (см/сек)} = 5,930 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{(V_1 - V_2) \text{ (в)}}. \quad (3a)$$

Таким образом, *скорость электрона прямо пропорциональна корню квадратному из разности потенциалов на концах пройденного им пути*. При прохождении пути с разностью потенциалов на концах в 1 *в*, электрон приобретает скорость  $5,93 \cdot 10^7$  см/сек.

Формула (3) справедлива, пока скорость электрона мала по сравнению со скоростью света. При приближении скорости электрона к скорости света *c* необходимо учитывать возрастание массы электрона в соответствии с теорией относительности (см. § 218, также § 31 т. I). В табл. X приведены скорости электрона, прошедшего путь с разностью потенциалов на концах  $V_1 - V_2$ , с учетом зависимости массы от скорости по принципу относительности. В третьем столбце даны отношения  $\beta$  скорости электрона *v* к скорости света *c*. Как видно из данных табл. X, при  $V_1 - V_2 = 100$  *в* действительная скорость электрона практически совпадает с той, которую дает

Таблица X  
Скорости электрона *v*, прошедшего путь с разностью потенциалов на концах  $V_1 - V_2$

$V_1 - V_2, \text{ в}$	$v, \frac{\text{см}}{\text{сек}}$	$\beta = \frac{v}{c}$
$10^2$	$5,93 \cdot 10^8$	0,0198
$10^3$	$1,88 \cdot 10^9$	0,0626
$10^4$	$5,85 \cdot 10^9$	0,195
$10^5$	$1,64 \cdot 10^{10}$	0,548
$5 \cdot 10^5$	$2,59 \cdot 10^{10}$	0,863
$10^6$	$2,82 \cdot 10^{10}$	0,9411

формула (3а), при разности же потенциалов  $V_1 - V_2 = 10^6$  в действительная скорость электрона равна  $2,82 \cdot 10^{10}$  см/сек, в то время как формула (3а), не учитывающая поправки на теорию относительности, дала бы для  $v$  значение  $5,93 \cdot 10^{10}$  см/сек, т. е. больше скорости света  $c$ , что невозможно.

Описанные опыты с электронным пучком приводят нас к представлению об электронах как о частицах с определенными зарядами и массой, движущихся по определенным траекториям. Однако в § 31 т. I, говоря о границах применимости классической механики, мы отметили, что к элементарным частицам (отдельным электронам, протонам и т. д.) неприменимы те представления, которые годятся для обычных „частиц“ классической механики. Элементарная частица не есть „частица“ в обычном смысле слова, и для нее неприменимо понятие о траектории. Элементарные частицы подчиняются так называемому соотношению неопределенности, по которому каждая из них не может быть одновременно охарактеризована сколь угодно точно определенными координатами и вектором скорости, но лишь с некоторыми допусками; так, координата  $x$  и составляющая скорости  $v_x$  могут быть одновременно определены лишь с такими допусками  $\Delta x$  и  $\Delta v_x$ , что

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{h}{m}, \quad (4)$$

где  $m$  — масса частицы, а  $h = 6,624 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек есть постоянная, носящая название *постоянной Планка*.

Впоследствии мы увидим (см. т. III), что именно более тщательные опыты с электронными пучками приводят к соотношению (4), и тогда более подробно выясним его физический смысл. Сейчас же лишь отметим, что некоторыми буржуазными физиками делаются неправильные идеалистические выводы о том, что из соотношения между  $\Delta x$  и  $\Delta v_x$  якобы вытекает предел познаваемости элементарных частиц, необходимость отказаться от возможности пространственно-временного описания их поведения. В действительности же это соотношение указывает лишь *предел применимости к элементарным частицам представлений классической механики*. Тем самым оказывается возможным выяснить, в каких случаях можно приближенно пользоваться представлением об электронах, как о „частицах“ классической механики.

Легко видеть, что во всех разобранных нами случаях представление об электронном „пучке“ согласуется с соотношением (4).

Для этого мы должны вспомнить пример, приведенный в § 31 т. I. Если ширина пучка  $\Delta x \cong 10^{-2}$  см (а с большей точностью мы в описанных опытах и не фиксируем пучок), то по соотношению (4)

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m \cdot \Delta x} \cong \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-2}} \text{ см/сек} \cong 7 \cdot 10^3 \text{ см/сек}.$$

Но при ускоряющем потенциале всего в 1 в (фактически в трубках для получения электронных пучков ускоряющие потенциалы

гораздо больше) скорость электрона по формуле (3а) равна  $v \cong \cong 5,9 \cdot 10^7$  см/сек и, следовательно, значение  $\Delta v_x$ , требуемое соотношением (4), составляет приблизительно 0,001% от самой скорости, т. е. остается далеко за пределами возможной точности эксперимента. Отсюда следует, что в описанных опытах, так же как и во всех других опытах, которые мы будем рассматривать в этом томе, электрон можно представить себе в виде обычной „частицы“.

**§ 186. Вывод формулы Богуславского — Ленгмюра; флуктуации силы тока.** Предположим для простоты, что мы имеем два бесконечно больших плоских электрода, расположенных параллельно друг другу (рис. 160). Расстояние между электродами обозначим через  $d$ , левый электрод будем считать катодом и потенциал его положим равным нулю:  $V_K = 0$ . Потенциал правого электрода (анода) обозначим через  $V_A$ . Катод является источником электронов.

Ускоряемые полем электроны движутся от одного электрода к другому и образуют ток.

Проведем ось  $OX$  перпендикулярно к электродам. В силу симметрии расположения электродов, значение объемной плотности зарядов  $\rho$ , создаваемой электронным облаком, будет зависеть лишь от координаты  $x$ ; эквипотенциальные поверхности пройдут параллельно электродам, и векторы напряженности поля  $E$  будут повсюду направлены по оси  $OX$ .

Плотность тока  $i$  численно равна заряду, переносимому в единицу времени через единичную площадку.

При стационарном режиме плотность тока  $i$  постоянна во времени и одинакова для всех значений координаты  $x$ .

Связь между объемной плотностью зарядов  $\rho$  и потенциалом  $V$  дается формулой (3) § 132:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае потенциал  $V$  меняется лишь в направлении, перпендикулярном к плоскостям электродов, т. е. лишь вдоль оси  $OX$ ; поэтому отлична от нуля только производная от  $V$  по координате  $x$ , и равенство (1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -4\pi\rho. \quad (2)$$

При термоэмиссии электроны вылетают из катода с тепловыми скоростями, которые малы по сравнению со скоростями, приобретаемыми электронами под влиянием обычных внешних электрических полей. Поэтому будем приближенно считать начальные скорости электронов равными нулю. Тогда электроны, достигшие точки между электродами, характеризуемой потенциалом  $V$ , будут иметь скорость  $v$ , определяемую формулой:

$$\frac{mv^2}{2} = eV. \quad (3)$$

Плотность тока  $i$  определится через плотность объемного заряда  $\rho$  и скорость движения электронов с помощью равенства

$$i = -\rho v. \quad (4)$$

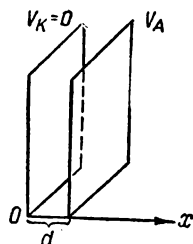


Рис. 160. К выводу формулы Богуславского — Ленгмюра.

Здесь справа поставлен знак минус, так как направление вектора  $\mathbf{i}$  сопоставляется с направлением движения положительных зарядов.

Из формул (2), (3) и (4) находим

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-1/2}.$$

Умножая правую и левую части этого равенства на  $\frac{dV}{dx} dx$ , получим

$$\frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{dV}{dx} dx = 4\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-1/2} \cdot \frac{dV}{dx} dx. \quad (5)$$

Интегрируя равенство (5) в пределах от 0 до  $x$  напишем

$$\int_0^x \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{dV}{dx} dx = 4\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \int_0^x V^{-1/2} \cdot \frac{dV}{dx} dx. \quad (6)$$

По условию при  $x=0$  и  $V=0$ ; также нам надо положить при  $x=0$  и  $\frac{dV}{dx}=0$ .

Это последнее условие вытекает из того соображения, что вблизи катода образуется электронное облако, в которое электроны от катода поступают только за счет диффузии. Следовательно, у катода напряженность поля  $E=0$ , откуда и вытекает требование:

$$\frac{dV}{dx} = 0.$$

При этих условиях в результате интегрирования равенства (6) получаем

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 16\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{1/2} \quad \text{или} \quad \frac{dV}{V^{1/4}} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot dx.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах изменения  $x$ , от 0 до  $d$ :

$$\int_0^{V_A} \frac{dV}{V^{1/4}} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot \int_0^d dx.$$

Пределами интегрирования левой части равенства мы взяли 0 и  $V_A$ , так как  $V=0$  при  $x=0$  и  $V=V_A$  при  $x=d$ ; интегрирование даст:

$$\frac{4}{3} V_A^{3/4} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot d.$$

Решая это равенство относительно плотности тока  $i$ , получим:

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot V_A^{3/2}. \quad (7)$$

Чтобы перейти от плотности тока  $i$  к общей силе тока  $I$ , надо умножить  $i$  на площадь поверхности  $S$ , эмиттирующей электроны:

$$I = iS.$$

Замечая, кроме того, что при наших обозначениях  $V_A$  совпадает с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$  между электродами, получим из (7)

$$I = \frac{S\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} (V_1 - V_2)^{3/2}.$$

Полагая множитель

$$\frac{S\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} = \alpha,$$

где величина  $\alpha$  будет постоянной для данных размеров и расположения электродов, найдем

$$I = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2},$$

что совпадает с формулой (3), приведенной на стр. 196.

При очень слабом электронном токе, когда среднее число электронов  $n$ , достигающих анода в единицу времени, невелико, должны сказываться *флуктуации силы тока*  $I$ . Эти флуктуации силы тока вполне аналогичны упомянутым в т. I флуктуациям давления газа его плотности и т. д.; они непосредственно обусловлены прерывной „автоматической“ природой электрических зарядов, т. е. существованием электронов.

Разобьем время наблюдения на равные промежутки  $\Delta t$ , тогда  $\bar{n}_{\Delta t}$  есть среднее число электронов, достигающих анода за время  $\Delta t$ ; за отдельные же промежутки времени  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k, \dots$ , в силу беспорядочности вылета из катода, числа электронов  $n_{\Delta t_k}$ , достигающих анода, будут несколько отличны от этого среднего значения  $\bar{n}_{\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} n_{\Delta t_1} &= \bar{n}_{\Delta t} + \delta_1 n \\ n_{\Delta t_2} &= \bar{n}_{\Delta t} + \delta_2 n \\ &\dots \dots \dots \\ n_{\Delta t_k} &= \bar{n}_{\Delta t} + \delta_k n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В соответствии с этим силы токов  $I_k = n_{\Delta t_k} \cdot \frac{e}{\Delta t_k}$  (где  $e$  — заряд электрона), наблюдаемые как среднее значение силы тока за данный промежуток времени  $\Delta t_k$ , будут несколько различны:

$$\begin{aligned} I_1 &= \bar{I}_{\Delta t} + \delta_1 I \\ I_2 &= \bar{I}_{\Delta t} + \delta_2 I \\ &\dots \dots \dots \\ I_k &= \bar{I}_{\Delta t} + \delta_k I \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{I}_{\Delta t} = \bar{n}_{\Delta t} \cdot \frac{e}{\Delta t}$  — среднее значение силы тока, взятого за все промежутки времени.

Соответственный статистический расчет показывает, что среднее квадратичное отклонение силы тока  $\delta_k I^2$  равно

$$\overline{\delta_k I^2} = \frac{\bar{I}_{\Delta t} \cdot e}{\Delta t}. \quad (8)$$



Это отклонение становится тем меньше, чем за больший промежуток времени  $\Delta t$  мы производим наблюдение: этот результат очевиден, так как для больших промежутков времени лучше сглаживаются неравномерности в силе тока, вызванные случайными изменениями числа электронов, вылетающих из катода. Во-вторых, отклонение  $\delta k I^2$  зависит от величины заряда электрона  $e$ . Это следствие теории также понятно: если бы, например, заряд электрона  $e$  был больше той величины, которой он равен в действительности, то при той же силе тока число вылетающих электронов было бы меньше, и, следовательно, случайные отклонения от среднего значения силы тока стали бы заметнее.

Указанное „дрожание“ силы тока носит название „дробового“ эффекта и указывает на сходство пучка электронов с потоком дробин.

Флуктуационные колебания можно разложить на гармонические составляющие. В виду их беспорядочности, их можно разложить лишь на бесчисленное множество гармонических составляющих всевозможных частот  $\nu$ , т. е. разложить в *сплошной спектр* (см. т. I). Если наблюдать флуктуационные колебания с помощью микрофона, то они вызовут в нем шум; отсюда возникло название флуктуационных колебаний тока — *электрические шумы*.

У дробового эффекта, вплоть до периода порядка времени пролета электронов через катодную трубку ( $\sim 10^{-8}$  сек), амплитуда гармонических составляющих для всех частот одинакова. Если катодную лампу (см. рис. 137) рассматривать, как цепь, с сопротивлением  $R$  и температурой  $T$ , то среднее квадратичное значение амплитуды флуктуационной разности потенциалов, возникающих на электродах лампы, равно:

$$\overline{\delta V^2} = 4kTR\Delta\nu, \quad (9)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана и  $\Delta\nu$  — ширина выделенного интервала частот. Среднее квадратичное значение амплитуды флуктуационных колебаний анодного тока в лампе  $\overline{\delta I_a^2}$  равно

$$\overline{\delta I_a^2} = 4kT \frac{\Delta\nu}{R}. \quad (10)$$

При работе лампы в условиях отсутствия объемных зарядов, последнюю формулу можно представить в виде

$$\overline{\delta I_a^2} = 2eI_a\Delta\nu. \quad (10a)$$

Указанные колебания вызваны тем, что из-за беспорядочности теплового движения число электронов, вылетающих с горячего катода, подвержено непрерывным флуктуациям. Амплитуда их зависит от температуры и может быть снижена лишь за счет ее понижения. Флуктуационные колебания силы тока определяют точность электрических измерений. Величина измеряемого тока должна быть больше величины его флуктуаций.

Наряду с указанными флуктуационными колебаниями в катодной лампе могут происходить изменения тока эмиссии за счет изменения активности отдельных участков поверхности катода. Такие изменения, ведущие к более медленным колебаниям силы анодного тока ( $\nu \approx 10^{-3}$  сек $^{-1}$ ) открыты Джонсоном и носят название „мерцаний“.

Выделяя с помощью резонансного контура одну из гармонических составляющих флуктуационных колебаний силы тока, можно измерить среднее квадратичное значение ее амплитуды. Сравнение измеренного значения  $\overline{\delta I_a^2}$  с вычисленным по формуле (10a) позволяет определить заряд электрона  $e$ . Измерения, произведенные таким способом, дали для  $e$  значение, совпадающее в пределах точности наблюдений ( $\sim 1\%$ ) со значением заряда электрона, найденным другими способами.

Флуктуационные колебания силы тока возникают не только в электронных лампах, где ток обусловлен переносом свободных электронов, но и в любых проводниках тока (металлах, полупроводниках, электролитах).

**§ 187. Длина свободного пути электронов в газе.** Двигаясь в газовой среде, электрон испытывает с атомами и молекулами столкновения. Средняя длина его свободного пути может быть определена совершенно тем же методом рассуждений, что и длина свободного пути молекул.

В § 53 т. I мы получили, что средняя длина свободного пути молекул

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0}, \quad (1)$$

где  $n_0$  — число молекул в единице объема,  $\sigma$  — эффективный диаметр молекул; точнее говоря,  $\sigma$  представляет собой сумму эффективных радиусов  $r$  и  $r'$  сталкивающихся молекул:  $\sigma = r + r'$ . Напомним, наконец, что  $\sqrt{2}$  в знаменателе появляется в результате учета того, что движутся все молекулы — и „ударяющие“ и „ударяемые“. Желая определить среднюю длину свободного пути  $\bar{\lambda}$  электрона, мы должны учесть два обстоятельства: во-первых, размеры электрона много меньше размеров молекул или атомов, так что в выражении для эффективного диаметра  $\sigma = r + r'$  радиусом электрона  $r'$  можно пренебречь по сравнению с радиусом молекулы  $r$ ; во-вторых, скорость электрона благодаря его малой массе гораздо больше скорости молекул, поэтому нет надобности сохранять в формуле (1) в знаменателе  $\sqrt{2}$ .

В результате для средней длины свободного пути электронов получаем

$$\bar{\lambda}_e = \frac{1}{\pi r^2 n_0}, \quad (2)$$

где  $r$  — эффективный радиус молекул того газа, в котором движутся электроны.

*Средняя длина свободного пути электронов  $\bar{\lambda}_e$ , как и средняя длина свободного пути молекул  $\bar{\lambda}$ , обратно пропорциональна давлению газа  $p$ .*

Так как в формуле (1) для молекул данного газа (т. е. когда  $r = r'$ ) эффективный диаметр  $\sigma = 2r$ , то из сравнения формул (1) и (2) имеем

$$\bar{\lambda}_e = 4 \sqrt{2} \cdot \bar{\lambda} \cong 5,6 \bar{\lambda},$$

т. е. средняя длина свободного пути электронов приблизительно в 5,6 раза больше средней длины свободного пути молекул газа при том же давлении.

Численные значения средних длин свободного пути электронов  $\bar{\lambda}_e$  для различных газов и при различных давлениях даны в табл. XI.

Т а б л и ц а   X I  
Средняя длина свободного пути электронов  $\bar{\lambda}_e$   
(в см) при 0° С

Газ	Давление		
	1 мм Hg	10 <sup>-2</sup> мм Hg	10 <sup>-4</sup> мм Hg
He . . . . .	7,4 · 10 <sup>-2</sup>	7,4	740
Ne . . . . .	6,6 · 10 <sup>-2</sup>	6,6	660
Ar . . . . .	4,4 · 10 <sup>-2</sup>	4,4	440
H <sub>2</sub> . . . . .	7,5 · 10 <sup>-2</sup>	7,6	750
N <sub>2</sub> . . . . .	3,6 · 10 <sup>-2</sup>	3,6	360
O <sub>2</sub> . . . . .	4,1 · 10 <sup>-2</sup>	4,1	410

Как видно из данных табл. XI, при давлении в 10<sup>-4</sup> мм Hg, легко достижимом с помощью современных вакуумных насосов, средние длины свободного пути электронов достигают нескольких метров. Этим объясняется, что хорошо ограниченные не размытые электронные пучки могут быть без труда получены в сосудах линейным размером в несколько десятков сантиметров.

Экспериментально средняя длина свободного пути электронов может быть определена методом, идея которого в принципе совпадает с идеей опыта по определению средней длины

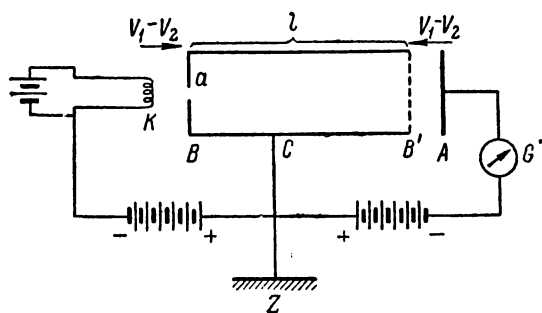


Рис. 161. Схема метода определения средней длины свободного пути электронов.

свободного пути газовых молекул с помощью молекулярного пучка (см. т. I, § 54). Схема этого метода изображена на рис. 161:  $K$  — горячий катод, служащий источником электронов;  $B$  — анод с отверстием  $a$ . Все части прибора находятся в сосуде с пониженным давлением. Анод  $B$  расположен от катода  $K$  на расстоянии, меньшем средней длины свободного пути электронов. Между анодом и катодом прикладывается ускоряющая электроны разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , благодаря чему электронам задается определенная скорость. Пройдя через отверстие  $a$ , электроны образуют пучок, движущийся

по определению средней длины свободного пути электронов. Этим объясняется, что хорошо ограниченные не размытые электронные пучки могут быть без труда получены в сосудах линейным размером в несколько десятков сантиметров.

внутри металлического цилиндра  $C$ , находящегося при том же потенциале, что и анод  $B$ . Цилиндр  $C$  заканчивается сеткой  $B'$ . Таким образом, внутри цилиндра  $C$  отсутствует поле, и электроны движутся с постоянной скоростью. Пролетая через сетку  $B'$ , они попадают на электрод  $A$  и отдают ему свой заряд. Длина цилиндра  $C$  больше средней длины свободного пути электронов, электрод же  $A$  расположен от сетки  $B'$  снова на расстоянии, много меньшем  $\bar{\lambda}_e$ .

Некоторые электроны пучка испытывают внутри цилиндра  $C$  столкновения с молекулами газа, в результате чего они отклоняются в сторону и попадают на внутреннюю часть цилиндра  $C$  или подлетают к сетке  $B'$  косо. Между электродом  $A$  и сеткой  $B'$  прикладывается задерживающая электроны разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , равная ускоряющей разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , приложенной между катодом  $K$  и анодом  $A$ . Тогда только те электроны, которые движутся перпендикулярно к сетке  $B'$ , т. е. которые не испытали столкновений, достигнут электрода  $A$  и образуют ток  $I$ , измеряемый гальванометром  $G$ .

Электрод  $A$  и сетка  $B'$  делаются подвижными, чтобы можно было менять их расстояние  $l$  от анода  $B$ .

По формуле, приведенной в т. I, § 54, число частиц в пучке  $n$ , прошедших путь  $l$  без столкновений, равно

$$n = n_0 e^{-l/\bar{\lambda}},$$

где  $n_0$  — первоначальное число частиц в пучке, а  $\bar{\lambda}$  — их средняя длина свободного пути.

Эта же формула применима к электронному пучку: она дает число  $n$  электронов, достигающих в единицу времени электрода  $A$ .

Так как сила тока  $I$  пропорциональна числу электронов  $n$ , то

$$I = I_0 e^{-l/\bar{\lambda}_e}.$$

Произведем отсчет силы тока  $I$  для двух различных значений  $l$  при одном и том же давлении газа и одной и той же силе начального тока  $I_0$ , тогда

$$I_1 = I_0 e^{-l_1/\bar{\lambda}_e}, \quad I_2 = I_0 e^{-l_2/\bar{\lambda}_e}, \quad \text{откуда} \quad \frac{I_1}{I_2} = e^{-(l_1 - l_2)/\bar{\lambda}_e}.$$

Из последней формулы получаем для средней длины свободного пути электрона  $\bar{\lambda}_e$ :

$$\bar{\lambda}_e = \frac{l_2 - l_1}{\ln I_1 / I_2}.$$

Так как расстояния  $l_1$  и  $l_2$  и силы тока  $I_1$  и  $I_2$  доступны непосредственному измерению, то таким образом определяется  $\bar{\lambda}_e$ .

Экспериментальные данные подтверждают теоретическое значение длины свободного пути электронов. Однако надо отметить, что средняя длина свободного пути электронов зависит от скорости

электронов; в большинстве газов для медленных электронов она меньше определяемой из кинетической теории газов по средней длине свободного пути молекул. При больших скоростях она приближается к значению, определяемому по кинетической теории газов.

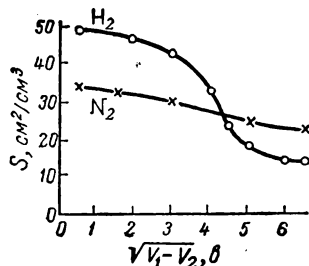


Рис. 162. Зависимость от скорости электронов эффективного сечения  $S$  молекул  $\text{H}_2$  и  $\text{N}_2$ , находящихся в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{C}$  и при давлении  $1 \text{ мм Hg}$ .

Эффективный диаметр молекулы должен зависеть от скорости пролетающего электрона и, определяемый по столкновениям с электроном, может оказаться отличным от эффективного диаметра, определяемого по столкновениям молекул друг с другом.

В теории столкновений электронов с молекулами часто рассматривают полное сечение всех молекул, заключенных в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{C}$  и давлении  $1 \text{ мм Hg}$ . Это полное сечение  $S$  равно

$$S = \pi r^2 n_0,$$

где  $r$  — радиус молекулы, а  $n_0$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{C}$  и давлении в  $1 \text{ мм Hg}$ .

Определяя  $r$  по длине свободного пути электронов  $\bar{\lambda}_e$ , получим, например, для водорода ( $\text{H}_2$ ) при ускоряющем потенциале в  $25 \text{ в}$  сечение  $S = 20 \text{ см}^2/\text{см}^3$ . По сказанному,  $S$  зависит от скорости электронов.

На рис. 162 приведены экспериментально полученные значения  $S$  для  $\text{H}_2$  и для  $\text{N}_2$ . По оси абсцисс отложены корни квадратные из ускоряющих потенциалов, т. е. величины, пропорциональные скоростям электронов  $v$ . Справа нанесены значения  $S$ , вычисленные на основании кинетической теории газов по длине свободного пути молекул. Как видно, для водорода при малых скоростях электронов эффективные сечения молекул более чем вдвое превышают вычисленные по кинетической теории газов; при больших скоростях сечения, вычисленные как по длине свободного пути электронов, так и по данным кинетической теории газов, практически совпадают.

Для инертных газов  $\text{He}$ ,  $\text{Ne}$ ,  $\text{Ar}$ ,  $\text{Kr}$ ,  $\text{Xe}$  было обнаружено, что эффективные сечения атомов этих газов для медленных электронов очень малы, затем

Мы уже не раз указывали, что представление о взаимодействии газовых молекул, как об упругом столкновении шариков при их непосредственном соприкосновении, является слишком примитивным.

Молекулы представляют собой сложные системы заряженных частиц, взаимодействующих друг с другом не только при непосредственном соприкосновении, но и на расстоянии. Еще в большей мере это относится к случаю столкновений электронов с молекулами или атомами. Электрон начинает взаимодействовать с молекулой или атомом на расстояниях, много больших, чем действительные размеры атома или молекулы, и силы взаимодействия возрастают по мере уменьшения расстояния между ними. Отсюда ясно, что эффективный диаметр молекулы должен зависеть от скорости пролетающего электрона и, определяемый по столкновениям с электроном, может оказаться отличным от эффективного диаметра, определяемого по столкновениям молекул друг с другом.

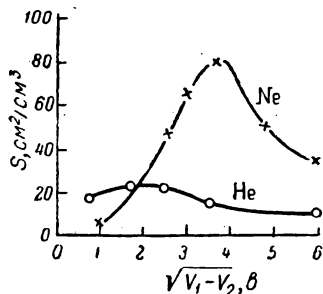


Рис. 163. Зависимость от скорости электронов эффективного сечения  $S$  атомов  $\text{He}$  и  $\text{Ne}$ , находящихся в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{C}$  и при давлении  $1 \text{ мм Hg}$ .

они возрастают, достигают максимума при ускоряющих потенциалах порядка нескольких вольт, а затем спадают. Для очень медленных электронов ( $V_1 - V_2 \cong 1$  в) эффективные сечения значительно меньше определенных по кинетической теории газов. Атомы оказываются как бы „прозрачными“ для электронов: электроны проникают сквозь них не отклоняясь. Этот эффект, открытый Рамзауером, может быть объяснен лишь на основании квантовой механики.

На рис. 163 приведены эффективные сечения  $S$  атомов He и Ne в зависимости от скорости сталкивающихся электронов. Справа снова нанесены эффективные сечения, определенные по кинетической теории газов.

**§ 188. Столкновения электронов с атомами и молекулами.** При небольших скоростях удары электронов с атомами и молекулами носят *упругий характер*. Ввиду того, что масса электрона  $m$  гораздо меньше массы атома или молекулы  $M$ , электрон при упругом ударе почти не изменяет своей скорости по величине: она меняется лишь по направлению. Электрон упруго „отскакивает“ от атома или молекулы. В соответствии с этим и количество энергии, переданной электроном при упругом столкновении молекуле, составляет лишь весьма небольшую долю первоначальной кинетической энергии.

Так как скорость электрона  $v$  много больше скорости молекул, то последние мы можем считать неподвижными. Тогда, применяя к центральному удару электрона формулы, выведенные в § 28 т. I для упругого столкновения шаров, получим, что после соударения молекула приобретает скорость

$$v' = \frac{2mv}{m + M},$$

где  $v$  — скорость электрона до удара.

Пренебрегая в знаменателе массой электрона  $m$  по сравнению с массой атома или молекулы  $M$ , приближенно будем иметь

$$v' = \frac{2mv}{M}.$$

Кинетическая энергия, приобретенная атомом или молекулой, равна

$$\Delta E_k = \frac{Mv'^2}{2} = \frac{4m}{M} \frac{mv^2}{2}.$$

Такое же количество кинетической энергии потеряет электрон. Замечая, что  $\frac{mv^2}{2}$  есть первоначальная кинетическая энергия электрона  $E_k$ , получим

$$\Delta E_k = \frac{4m}{M} E_k.$$

При нецентральном ударе потеря энергии будет меньше; в *среднем* мы можем считать, что при упругом столкновении с атомом

или молекулой электрон теряет энергию

$$\Delta \bar{E}_k = \kappa E_k. \quad (1)$$

где

$$\kappa = \frac{2m}{M}. \quad (1a)$$

Величина  $\kappa$  представляет собой малую дробь. Так, для случая упругих столкновений электронов с атомами неона  $\kappa = 5,45 \cdot 10^{-5}$ , а для столкновений с атомами аргона  $\kappa = 2,76 \cdot 10^{-5}$ .

Таким образом, при упругом столкновении с атомом или молекулой электрон в среднем теряет несколько стотысячных долей от своей первоначальной энергии.

При увеличении скорости электрона начинают происходить *неупругие столкновения*, при которых электрон может отдать нацело свою кинетическую энергию атому или молекуле, с которой он сталкивается. Переданная энергия идет либо на *возбуждение атома (молекулы)*, либо на его *ионизацию*, т. е. на *вырывание из него одного или нескольких электронов*. В том случае, если энергия идет на возбуждение атома, она переходит затем либо в энергию излучения, либо в тепло.

В настоящей главе мы будем рассматривать лишь те неупругие столкновения, которые ведут к ионизации; при этом мы будем считать, что имеет место однократная ионизация, т. е. что атом или молекула под влиянием неупругого столкновения с электроном теряют лишь один из своих электронов и, следовательно, превращаются в одновалентный положительный ион.

Обозначим энергию, необходимую для ионизации, через  $E_j$ . Тогда, чтобы электрон смог ионизировать атом, его кинетическая энергия должна быть не меньше  $E_j$ . Так как кинетическая энергия электрона:

$$\frac{mv^2}{2} = e(V_1 - V_2),$$

где  $V_1 - V_2$  — ускоряющая электрон разность потенциалов, то *наименьшая необходимая для ионизации разность потенциалов ускоряющего электрон поля* определится соотношением:

$$e(V_1 - V_2)_j = \frac{mv_j^2}{2} = E_j. \quad (2)$$

Разность потенциалов  $(V_1 - V_2)_j$  называется *ионизационным потенциалом* данного атома или молекулы.

*Энергию ионизации  $E_j$*  обычно выражают в электрон-вольтах (эв).

Существуют многочисленные экспериментальные методы определения ионизационных потенциалов. Некоторую трудность в определении этих потенциалов представляет необходимость отличить их от тех разностей потенциалов, которые ведут к возбуждению атома или

молекулы. Мы рассмотрим лишь простейший метод, заключающийся в следующем. В катодной трубке (рис. 137) между раскаленным катодом  $K$  и анодом  $A$  получается электронный ток. В трубке имеется в небольшом количестве газ, так что длина свободного пути электронов несколько меньше расстояния  $l$  между катодом и анодом.

Пока электроны испытывают с молекулами газа лишь упругие столкновения, ток является чисто электронным, и его сила  $I$  определяется формулой Богуславского—Ленгмюра (см. § 186):

$$I = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2}.$$

Поэтому, если мы отложим по оси абсцисс  $(V_1 - V_2)^{3/2}$ , то графическая зависимость силы тока  $I$  от  $(V_1 - V_2)^{3/2}$  изобразится прямой  $Oa$  на рис. 164. Однако как только скорости электронов станут достаточными, чтобы ионизировать газ в трубке, в объеме трубки возникнут добавочные электроны и положительные ионы, и сила тока  $I$  резко возрастет (ветвь  $ab$  кривой на рис. 164). Разность потенциалов, при которой зависимость силы тока  $I$  от

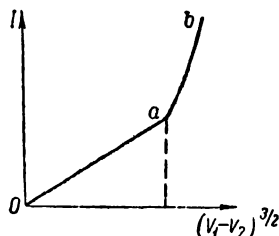


Рис. 164. Излом на графике, дающем зависимость силы тока  $I$  от  $(V_1 - V_2)^{3/2}$ , вызванный ионизацией.

Таблица XII

**Ионизационные потенциалы (в в)**

Атомы или молекулы	$(V_1 - V_2)_i$
Водород, Н . . . .	13,54
Гелий, He . . . .	24,47
Неон, Ne . . . .	21,47
Аргон, Ar . . . .	15,69
Ртуть, Hg . . . .	10,38
Натрий, Na . . . .	5,12
Калий, K . . . .	4,32
Цезий, Cs . . . .	3,87
Водород моле- кул., H <sub>2</sub> . . . .	15,4
Азот моле- кул., N <sub>2</sub> . . . .	15,8

представляет собой ионизационный потенциал.

В табл. XII приведены ионизационные потенциалы некоторых атомов и молекул.

Если скорость электрона больше потребной для ионизации, то он отдает при столкновении лишь столько энергии, сколько необходимо для ионизации, сам же продолжает после столкновения двигаться с остающейся кинетической энергией. Не всякое столкновение ведет к ионизации. Для больших скоростей вероятность ионизации становится меньше, электрон „успевает“ пролететь мимо атома, не ионизировав его. На рис. 165 приведена кривая, дающая число положительных ионов ртути ( $Hg^+$ ), образуемых электронами разных скоростей на

длине пути в 1 см при давлении паров ртути 1 мм Hg. Как видно, вероятность ионизации достигает максимума при ускоряющем поле с разностью потенциалов 50 в (потенциал ионизации ртути равен 10,4 в); при больших ускоряющих потенциалах вероятность иониза-



ции убывает. Из рис. 165 видно, что в максимуме кривой электрон образует около 20 ионов  $\text{Hg}^+$  на 1 см пути. Так как при указанных условиях он испытывает на пути в 1 см около 57 столкновений, то, следовательно, лишь  $\frac{20}{57}$  столкновений (т. е. 35% от общего числа столк-

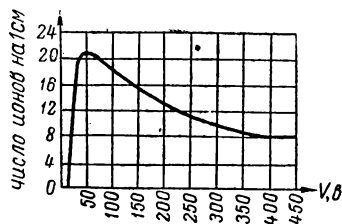


Рис. 165. Зависимость числа образуемых ионов ртути ( $\text{Hg}^+$ ) от скорости электронов.

новений) ведут к ионизации. При всех других скоростях процент столкновений, ведущих к ионизации, будет ниже.

До сих пор мы говорили лишь об ионизации электронным ударом. Однако возможна и ионизация при столкновении с ионами. Но в настоящее время установлено, что ионы вызывают заметную ионизацию лишь при очень больших энергиях, так что во всех интересующих нас случаях газовой проводимости ионизация ионами играет лишь второстепенную роль.

Кроме схемы, описанной на стр. 255, для определения ионизационных потенциалов используются различные другие схемы. Франк и Герц впервые в 1913 г. определение ионизационных потенциалов с помощью следующей установки (рис. 166). Помещенная в замкнутый сосуд накаливаемая платиновая нить  $AA'$  служила источником электронов. Электрометр  $E$  позволял обнаружить заряды, попадающие на электрод  $CC'$ . Между накаливаемой нитью и электродом  $CC'$  располагалась сетка  $BB'$ . Электрод  $CC'$  и сетка  $BB'$  изготовлялись также из платины, чтобы избежать возникновения контактных разностей потенциалов. Все пространство внутри сосуда заполнялось исследуемым газом или паром при низком давлении. Между нитью  $AA'$  и сеткой  $BB'$  приложена разность потенциалов  $V_A - V_B$ , ускоряющая электроны. Между сеткой  $BB'$  и электродом  $CC'$  приложена разность потенциалов  $V_B - V_C$ , задерживающая электроны. Если по численному значению  $V_B - V_C$  больше  $V_A - V_B$ , то электроны, пролетев через сетку, будут отброшены назад и не достигнут электрода  $CC'$ . Но если скорость электронов, приобретаемая под влиянием разности потенциалов  $V_A - V_B$ , достаточна, чтобы электроны при столкновениях с атомами между  $BB'$  и  $CC'$  могли их ионизировать, то возникнут положительные ионы. Эти ионы будут ускорены под влиянием разности потенциалов  $V_B - V_C$  и, достигнув электрода  $CC'$ , сообщат ему положительный заряд, который будет отмечен электрометром  $E$ . Таким образом может быть установлена та разность потенциалов  $V_A - V_B$ , при которой впервые появится положительный заряд на электроде  $CC'$ . Эта разность потенциалов и определит ионизационный потенциал исследуемых атомов.

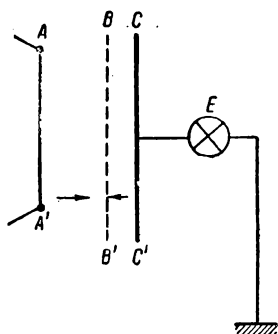


Рис. 166. Схема метода Франка и Герца определения ионизационных потенциалов.

Метод Франка и Герца обладает одним существенным недостатком: положительный заряд на электроде  $CC'$  может возникнуть не только в случае

ионизации атомов электронами, но и при их возбуждении. Как мы увидим впоследствии (см. т. III), возбужденный атом, переходя в свое нормальное состояние, излучает свет. Если это излучение относится к ультрафиолетовой области спектра, то, падая на электрод  $CC'$ , оно может вырвать из него электроны (такое вырывание электронов под влиянием света носит название *фотоэффекта*; см. т. III). В результате потери отрицательных электронов сам электрод  $CC'$  зарядится положительно, что будет отмечено электрометром  $E$ .

Для того чтобы иметь возможность отделить возбуждение атомов электронным ударом от их ионизации, был использован следующий метод. Между накаливаемой нитью  $AA'$  и электродом  $CC'$  расположили две сетки:  $BB'$  и  $DD'$  (рис. 167). Между нитью и сеткой  $BB'$  снова прилагалась разность потенциалов  $V_A - V_B$ , ускоряющая электроны, а между сетками  $BB'$  и  $DD'$  — разность потенциалов  $V_B - V_D$ , задерживающая электроны. Наконец, между сеткой  $DD'$  и электродом  $CC'$  создавалось слабое поле, направление которого можно менять произвольно. Если электроны, вылетевшие из накаленной нити, производят ионизацию в пространстве между сетками  $BB'$  и  $DD'$ , то возникшие положительные ионы достигнут электрода  $CC'$  и сообщают ему положительный заряд, независимо от направления добавочного слабого поля между сеткой  $DD'$  и электродом  $CC'$ . В самом деле, если это поле направлено так же, как поле между сетками  $BB'$  и  $DD'$ , то оно только еще более ускорит ионы по направлению к электроду  $CC'$ ; если оно имеет обратное направление, то, ввиду того что разность потенциалов между  $DD'$  и  $CC'$  берется по численному значению меньше  $V_B - V_D$ , оно не будет достаточно, чтобы задержать ионы.

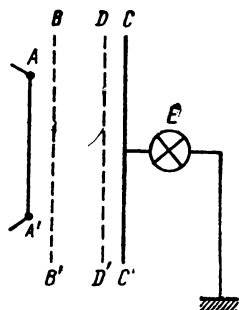


Рис. 167. Схема метода определения ионизационных потенциалов.

Рассмотрим теперь случай, когда электроны, сталкиваясь с атомами в пространстве между сетками  $BB'$  и  $DD'$ , вызывают лишь их возбуждение. Возбужденные атомы испускают свет, который вырывает электроны с сеток  $BB'$  и  $DD'$  и электрода  $CC'$ . Если направление добавочного поля между сеткой  $DD'$  и электродом  $CC'$  такое же, как и между сетками  $BB'$  и  $DD'$  (при этом направлении поля положительные ионы ускоряются по направлению к  $CC'$ ), то электроны будут отброшены от электрода  $CC'$ , и он приобретет положительный заряд. Если же направление этого добавочного поля взять обратное, то фотоэлектроны, вырванные из  $CC'$ , упадут на него обратно, также на него попадут электроны с сетки  $DD'$ , и он приобретет отрицательный заряд. Таким образом, меняя направление добавочного поля, можно различить случай ионизации от случая возбуждения атомов.

Эксперименты с парами ртути дали возможность установить наличие трех разностей потенциалов, при которых происходили неупругие столкновения: 4,9; 6,7 и 10,4 в. Эти потенциалы получили название *критических*. Первые два из них ведут к возбуждению атомов ртути, последний — к ионизации.

**§ 189. Подвижность электронов в газе при низком давлении.** Рассматривая подвижность ионов в электролитах, а также в газах при не слишком малых давлениях, мы допускали существование силы трения, пропорциональной скорости ионов. Это было возможно благодаря малой длине свободного пути ионов. В случае движения электронов в газе требуется более детальное рассмотрение.

Для простоты ограничимся рассмотрением лишь упругих столкновений электронов с атомами газа. В этом случае, как следует из формулы (1) § 188, численное значение скорости электрона в результате столкновения почти не

меняется, направление же скорости может измениться любым образом: электрон может и отклониться в сторону и отскочить назад. Если напряженность поля равна  $E$ , то в промежутках между столкновениями электрон испытывает постоянное ускорение:

$$w = \frac{eE}{m} \quad (1)$$

и, следовательно, движется по отрезку параболы. Весь его путь среди атомов газа при наличии электрического поля имеет вид, изображенный на рис 168.

Рассмотрим более подробно путь электрона между двумя последовательными столкновениями. Направление вектора напряженности  $E$  указано стрелкой на рис. 169. Пусть скорость электрона  $v$  сразу после столкновения с атомом  $A$  составляет с  $E$  угол  $\varphi$ . Будем считать, что добавочная скорость, приобретаемая электроном под влиянием напряженности поля  $E$  во время движения между двумя столкновениями, мала по сравнению со скоростью  $v$ . Тогда

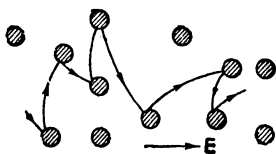


Рис. 168. Путь электрона среди атомов газа.

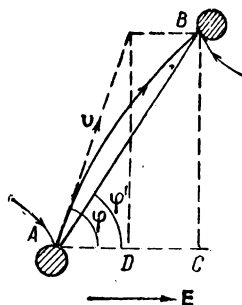


Рис. 169. К определению пути электрона между двумя столкновениями.

путь электрона, изображаемый дугой  $\overline{AB}$ , не сильно отличается от той длины свободного пути  $\lambda = AB$ , которую он прошел бы, двигаясь между атомами  $A$  и  $B$  при отсутствии электрического поля. Угол между  $AB$  и направлением вектора напряженности  $E$  обозначим через  $\varphi'$ .

За время между двумя столкновениями  $\tau$  электрическая сила совершит работу

$$dA = eE \lambda \cos \varphi'.$$

В среднем для многих столкновений эта работа будет равна:

$$\overline{dA} = eE \bar{\lambda} \cos \varphi'. \quad (2)$$

При ударе электрод теряет, по формуле (1) § 188, энергию  $\propto \frac{mv^2}{2}$ .

Равновесие будет достигнуто, когда средняя работа  $\overline{dA}$ , совершаемая электрической силой между двумя столкновениями, станет равной средней потере энергии электрона при ударе

$$\overline{dA} = \propto \frac{m\bar{v}^2}{2};$$

подставляя вместо  $\overline{dA}$  его значение по (2), получим условие стационарности движения:

$$eE \bar{\lambda} \cos \varphi' = \propto \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (3)$$

Из рис. 169 имеем

$$\cos \varphi' = \frac{AC}{AB} = \frac{AD + DC}{AB},$$

но  $AD = v\tau \cos \varphi$ , а  $DC = \frac{1}{2} \omega \tau^2$ , где  $\omega$  — ускорение, определяемое равенством (1). Следовательно,

$$\cos \varphi' = \frac{v\tau \cos \varphi + \frac{1}{2} \omega \tau^2}{AB} = \frac{v\tau \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau^2}{\lambda}.$$

откуда среднее значение  $\overline{\cos \varphi'}$  определится

$$\overline{\cos \varphi'} = \frac{\bar{v} \bar{\tau} \overline{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \bar{\tau}^2}{\lambda}.$$

Но мы считаем, что любое направление движения электрона после столкновения равновероятно, он может отскочить от атома под любым углом  $\varphi$ ; тогда  $\overline{\cos \varphi} = 0$  и

$$\overline{\cos \varphi'} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m\lambda} \bar{\tau}^2.$$

Среднее время между двумя столкновениями  $\bar{\tau}$  равно

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}},$$

откуда

$$\overline{\cos \varphi'} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}^2}. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{v}^2$  означает квадрат средней скорости, в то время как в формуле (3) стоит средняя квадратичная скорость. Однако принимая во внимание приближенный характер наших вычислений, мы не будем делать различия между этими двумя средними. Тогда, подставляя значение  $\overline{\cos \varphi'}$  в (3) и решая полученное уравнение относительно  $\bar{v}$ , найдем

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{e\bar{\lambda}}{m} \sqrt{\kappa}} \cdot \sqrt{E}. \quad (5)$$

Таким образом, средняя скорость беспорядочного движения электрона между атомами газа пропорциональна  $\sqrt{E}$ .

Найдем теперь скорость  $u$  перемещения электрона в направлении поля. Из рис. 169 имеем

$$u = \frac{AC}{\tau} = v \cos \varphi + \frac{1}{2} \omega \tau.$$

Среднее значение этой скорости будет

$$\bar{u} = \bar{v} \cdot \overline{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \omega \bar{\tau}.$$

Замечая, что по-прежнему  $\overline{\cos \varphi} = 0$ , и подставляя вместо  $\omega$  и  $\bar{\tau}$  их значения по (1) и (4), найдем

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\bar{\lambda}}{m\bar{v}} \cdot E.$$

Наконец, подставляя сюда вместо  $\bar{v}$  его выражение по (5), получим

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\bar{\lambda} \sqrt{x}}{m}} \cdot \sqrt{E}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что скорость перемещения электрона в направлении поля  $\bar{u}$  пропорциональна  $\sqrt{E}$ . Определяя подвижность электрона как величину, равную  $u^0 = \frac{\bar{u}}{E}$ , найдем

$$u^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\bar{\lambda} \sqrt{x}}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}; \quad (7)$$

таким образом, подвижность электрона в газе зависит от напряженности поля, будучи обратно пропорциональна  $\sqrt{E}$ . В соответствии с этим для электронной проводимости газов не имеет места закон Ома. На самом деле закон Ома не выполняется еще и по ряду других причин.

Мы рассматривали лишь упругие столкновения, поэтому полученные формулы применимы лишь для небольших напряженностей  $E$ . Для инертных газов (Ne, Ar и т. д.) при  $E = 1$  в/см значения  $\bar{v}$  и  $\bar{u}$ , вычисленные по формулам (5) и (6), хорошо согласуются со значениями этих величин, вычисленными другими способами. Для давления  $p = 1$  мм Hg и  $E = 1$  в/см получим

$$\bar{v} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ см/сек}, \quad \bar{u} = 4,63 \cdot 10^5 \text{ см/сек}.$$

Скорость  $\bar{v}$  беспорядочного движения электрона между атомами, которую он приобретает под влиянием электрического поля напряженности  $E = 1$  в/см, велика по сравнению с тепловой скоростью его движения в газах в отсутствие электрического поля при обычных температурах.

В отсутствие электрического поля средняя энергия теплового движения электронов та же, что и средняя энергия теплового движения молекул:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура.

Отсюда

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

При  $T = 300^\circ \text{ K}$  получим

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-27}}} \text{ см/сек} \cong 3,74 \cdot 10^8 \text{ см/сек},$$

т. е. приблизительно в 30 раз меньше приведенного значения  $\bar{v}$ .

Средняя скорость перемещения электрона в направлении вдоль поля  $\bar{u}$  много меньше его полной средней скорости  $\bar{v}$ . Благодаря этому и общая длина пути  $l$ , проходимого электроном, велика по сравнению со смещением  $l_E$  электрона в направлении поля; очевидно,

$$\frac{l}{l_E} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}.$$

Воспользовавшись формулами (5) и (6), перепишем это выражение в виде:

$$\frac{l}{l_E} = \frac{2}{\sqrt{x}};$$

для неона  $\frac{l}{l_E} = 271$ , а для аргона  $\frac{l}{l_E} = 381$ ; таким образом, общий путь, проходимый электроном, в сотни раз больше его перемещения вдоль поля.

**§ 190. Самостоятельная проводимость газов.** В § 188 мы видели, что при достаточных скоростях электронов, когда они при столкновениях вызывают ионизацию, сила тока в газе сильно возрастает, так как возрастает число заряженных частиц, перенос которых образует ток. Рассмотрим теперь этот процесс подробнее.

Для простоты предположим, что ток возникает между двумя плоскими параллельными электродами  $K$  и  $A$ , причем катод  $K$  является источником электронов (рис. 170). Пусть из катода в единицу времени вылетает  $n_0$  электронов. Выделим параллельно электродам, на расстоянии  $x$  от катода, слой толщиной  $dx$ . Число электронов, долетающих до этого слоя, обозначим через  $n$ .

Тогда внутри слоя, в результате ионизации при ударе электронов, образуется новых электронов

$$dn = \alpha n dx,$$

где  $\alpha$  — коэффициент ионизации. Перепишывая это равенство в виде

$$\frac{dn}{n} = \alpha dx,$$

получаем, интегрируя левую и правую части,

$$\ln n = \alpha x + C. \quad (1)$$

Постоянную  $C$  определяем из условия, что при  $x=0$ , т. е. у самого катода,  $n = n_0$ , откуда

$$\ln n_0 = C.$$

Воспользовавшись этим значением  $C$ , получим из (1):

$$\ln \frac{n}{n_0} = \alpha x,$$

или

$$n = n_0 e^{\alpha x}. \quad (2)$$

При выводе этой формулы мы пренебрегали рекомбинацией. Если расстояние между электродами равно  $d$ , то анода достигнет  $n_d$  электронов

$$n_d = n_0 e^{\alpha d}. \quad (2a)$$

При отсутствии ионизации в объеме газа анода достигало бы в лучшем случае  $n_0$  электронов, и, следовательно, сила тока насыщения  $I_n$  равнялась бы

$$I_n = n_0 q, \quad (3)$$

где  $q$  — заряд электрона.

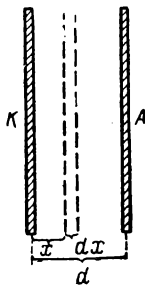


Рис. 170.  
К подсчету  
силы тока  
между плоскими  
электродами при  
самостоятельной  
проводимости.

При наличии ионизации анода достигает  $n_d$  электронов, и сила тока по (2а) равна

$$I = n_d q = n_0 e^{\alpha d} \cdot q. \quad (4)$$

Сравнивая равенство (4) с (3), получаем

$$I = I_n e^{\alpha d}. \quad (4a)$$

Таким образом, ток возрастает в  $e^{\alpha d}$  раз.

Если, например, положить  $d = 5$  см и допустить, что электрон, испущенный катодом, образует на пути в 1 см в среднем два новых электрона, то  $\alpha = 2$  см<sup>-1</sup> и

$$I = I_n \cdot e^{2 \cdot 5} \sim 2,2 \cdot 10^4 I_n,$$

т. е. сила тока возросла в десятки тысяч раз. Этот расчет показывает, что при наличии ионизации электронным ударом проводимость оказывается в основном обусловленной не теми электронами, которые поступают в область разряда извне, а теми, которые возникают в ней самой. Для поддержания тока достаточно, чтобы в разряд извне поступало сравнительно небольшое число электронов или других заряженных частиц. Источником этих первичных электронов обычно является отрицательный электрод (катод), с которого электроны вырываются либо под влиянием ударяющихся о него положительных ионов, поступающих из области разряда, либо в результате сильного разогрева всего электрода или, наконец, под влиянием излучения (фотоэффект). Во всех этих случаях электрод испускает электроны под влиянием процессов, происходящих в самом разряде, и, таким образом, разряд поддерживается самостоятельно, — мы имеем случай самостоятельной проводимости газа.

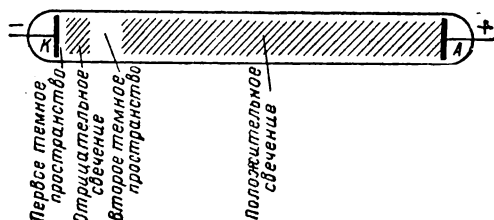


Рис. 171. Тлеющий разряд.

Рассмотрим несколько типичных случаев самостоятельной проводимости газов.

### 1. Тлеющий разряд.

Разряд этого типа наблюдается в газах при низких давлениях (порядка 1 мм Hg); его легко наблюдать в длинной стеклянной трубке с рас-

положенными у ее концов электродами (рис. 171), если к электродам приложить разность потенциалов порядка нескольких сот вольт. Под влиянием проходящего через трубку тока газ светится, при этом различают следующие характерные области свечения: а) область слабого свечения вблизи самого катода — так называемое первое темное пространство; б) область свечения, называемого отрицательным свечением; в) вторую область слабого свечения — второе (фарадеево) темное

пространство; г) область интенсивного положительного свечения. Положительное свечение может охватывать значительную часть трубки.

Падение потенциала происходит вдоль трубки неравномерно. Наибольшая величина падения приходится на первое темное пространство — это так называемое катодное падение потенциала (рис. 172); затем почти вдоль всей трубки идет весьма незначительное падение потенциала (порядка 1 — 2 в/см), и лишь у анода наблюдается новый скачок — анодное падение потенциала.

Величина катодного падения потенциала в основном определяется материалом катода и природой газа.

При малых силах тока отрицательное свечение обволакивает лишь часть поверхности катода. При этом величина катодного падения не зависит ни от силы тока, ни от давления газа (в некотором интервале изменения давления); эта величина катодного падения носит название *нормального*.

Значения нормального катодного падения потенциала для различных материалов катода и различных газов приведены в табл. XIII.

При увеличении силы тока (путем уменьшения внешнего сопротивления) увеличивается пропорционально и площадь катода, покрытая свечением, так что плотность тока у поверхности катода остается постоянной. После

Таблица XIII

Нормальное катодное падение потенциала (в в)

Материал катода	Газ					
	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	He	Ne	Ar	Hg
Na . . . . .	178	185	80	75	—	—
Cu . . . . .	208	214	177	220	131	447
Al . . . . .	179	171	141	120	100	245
Fe . . . . .	215	198	153	150	131	389
Ni . . . . .	197	211	158	140	131	275

того как весь катод покрыт свечением, дальнейшее возрастание тока связано с увеличением катодного падения потенциала, а следовательно, и разности потенциалов между электродами. Таким образом, к тлеющему разряду совершенно не применим закон Ома.

При сильных токах, когда наблюдается разогрев катода, возможна даже так назы-

ваемая падающая характеристика: разность потенциалов на электродах падает с увеличением силы тока, проходящего сквозь трубку.

Для начала разряда (зажигания трубки) требуется разность потенциалов несколько большая, чем катодная.

Схематически процессы, происходящие в трубке, могут быть представлены следующим образом. При прикладывании к элек-

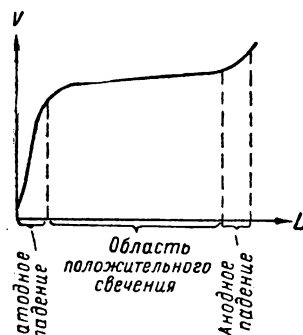


Рис. 172. Падение потенциала вдоль разрядной трубки.



тромам достаточной разности потенциалов в трубке возникает поле, ускоряющее всегда присутствующие в газе, хотя бы в очень малом количестве, ионы и свободные электроны. Электроны на своем пути ионизируют атомы газа и создают новые ионы, что ведет в соответствии с теорией к резкому возрастанию тока. В дальнейшем существенную роль играет катодное падение потенциала. Оно сосредоточено на пространстве порядка длины свободного пути электронов. Электроны здесь приобретают скорость, достаточную, чтобы удары стали носить неупругий характер. В этой же области положительные ионы ускоряются в направлении к катоду и, ударяясь о него, выбивают с его поверхности новые электроны, наличие которых еще больше повышает проводимость газа.

В области положительного свечения концентрация электронов и положительных ионов одинакова. Но в силу большей подвижности электронов проводимость газа обусловлена почти исключительно электронами. Степень ионизации в области положительного свечения может быть очень высока; так, например, при разряде в парах ртути при давлении в 0,05 мм Hg число электронов в единице объема может достигнуть  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Так как при этих условиях число атомов в единице объема равно приблизительно  $2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , то, следовательно, около 1/200 части всех атомов ртути ионизировано.

Газ в состоянии высокой степени ионизации при равенстве числа электронов и положительных ионов в единице объема представляет собой квазинейтральную среду, так называемую *плазму*. В плазме электроны совершают в основном беспорядочное движение, лишь сравнительно медленно продвигаясь в сторону анода (ср. расчеты на стр. 257).

Измерения, произведенные с помощью особого метода, получившего название метода зонда, показали, что скорости этого беспорядочного движения электронов имеют максвеллово распределение. При этом средние кинетические энергии относительно очень велики и колеблются, в зависимости от природы газа и условий разряда, приблизительно от 2 до 10 эв. Воспользовавшись равенством

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

мы можем определить температуру  $T$ , соответствующую данной средней энергии движения электронов. Для  $\frac{m\bar{v}^2}{2} = 1 \text{ эв}$  получаем

$$T = \frac{2}{3k} \cdot \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16}} \text{ } ^\circ\text{K} = 7735^\circ\text{K}.$$

Следовательно, средним энергиям электронов в 2—10 эв соответствуют температуры от 15 000 до 70 000°K. Температура же самого газа, в котором происходит разряд, при этом будет гораздо ниже и может не превышать нескольких сот градусов. Таким образом, плазма представляет собой как бы смесь двух газов — атомного и электронного, — каждый из которых в отдельности находится в равновесном состоянии и характеризуется своей собственной температурой; обмен же энергиями между обоими газами, несмотря на то, что они взаимно проникают друг друга, так слаб, что их температуры не выравниваются и остаются сильно различными.

2. Электрическая дуга. Особый интерес представляет случай самостоятельной проводимости сквозь газ при давлении, близком к атмосферному, или давлениях, больших атмосферного. Этот тип разряда был впервые наблюден В. В. Петровым, профессором Медико-хирургической академии в Петербурге, в 1803 г. получил название *электрической дуги*. Несколькоми годами позже ее изучал также Дэви, который назвал ее *вольтовой дугой* в честь Вольта, одного из первых исследователей электрических явлений.

Электрическая дуга возникает при контакте и последующем разведении двух электродов, чаще всего угольных. Дуга между угольными электродами горит при разности потенциалов 30—40 в; сила тока может достигать многих десятков ампер. Оба электрода сильно раскаляются (до 3000°C, а при повышенных давлениях — даже до 6000°C); при атмосферном давлении сильнее разогревается положительный электрод, на котором образуется углубление, носящее название *кратера*. Однако необходимым для горения дуги является лишь наличие раскаленного пятна на катоде, который служит источником электронов. Анод может оставаться холодным. Роль раскаленного катода как источника электронов, поддерживающих разряд, была впервые выяснена в 1905 г. В. Ф. Миткевичем.

Дуговой разряд обладает *падающей вольт-амперной характеристикой*: с увеличением силы тока (за счет уменьшения внешнего сопротивления) уменьшается разность потенциалов между электродами (рис. 173).

Электрическая дуга была впервые применена для уличного освещения П. Н. Яблочковым; в настоящее время она употребляется как источник света главным образом для прожекторов и проекционных аппаратов (кино). Дуга между металлическими электродами употребляется для местного разогрева металла (электросварка, введенная впервые в практику инженером Н. Г. Славяновым и Н. Н. Бенардосом).

В настоящее время для целей освещения и в лабораторной практике используются также электрические дуги, горящие в газах или парах при низком давлении. Источником первичных электронов в них также являются раскаленные катоды, которые разогреваются либо за счет процессов, происходящих в самом разряде, либо за счет внешнего источника тока („горячие катоды“).

3. Искра. Искровой разряд наблюдается между холодными электродами при большой разности потенциалов. Разряд носит сложный

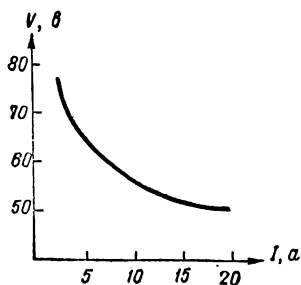


Рис. 173. Падающая вольт-амперная характеристика дугового разряда.

колебательный характер. При увеличении силы тока, в случае разогрева электродов, искра переходит в дугу.

Начало искрового разряда можно рассматривать как электрический пробой газа, как лавинообразное возрастание числа ионов в газе, в результате чего он делается проводящим. Разность потенциалов, ведущая к пробую, зависит от материала электродов, природы и давления газа, а также от размеров и формы электродов и расстояния между ними. Для остроконечных электродов пробивная разность потенциалов меньше.

Т а б л и ц а XIV

**Искровые промежутки (в миллиметрах) для воздуха при атмосферном давлении**

Разность потенциалов (в в)	Расстояние между электродами в виде		
	острый	шаров диаметром 5 см	плоскостей
20 000 . . .	15,5	5,8	6,1
40 000 . . .	45,5	13	13,7
100 000 . . .	220	45	36,7
200 000 . . .	410	262	75,3
300 000 . . .	600	530	114

В случае больших плоских электродов для данного материала электродов и данного газа пробивной потенциал зависит лишь от произведения  $pd$ , где  $p$  — давление газа, а  $d$  — расстояние между электродами. Так, пробивной потенциал при атмосферном давлении и расстоянии между электродами в 5 см тот же, что при давлении в 0,5 атм и расстоянии между электродами 10 см.

Расстояние между электродами, при котором при данной разности потенциалов возникает пробой, называется *искровым промежутком*.

В табл. XIV приведены искровые промежутки для ряда частных случаев.

4. Коронный разряд. Особый вид самостоятельного разряда представляет собой так называемый коронный разряд, возникающий при сравнительно больших давлениях (атмосферном), когда поле в разрядном промежутке очень неравномерно, за счет малого радиуса кривизны поверхности одного или обоих электродов. Ионизация и свечение газа происходят в узком слое около электродов; в остальной части газа проводимость обусловлена движением ионов обоих знаков. Коронный разряд является существенной помехой при передаче по проводам тока высокого напряжения.

## ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

---

### ГЛАВА XVIII

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ

**§ 191. Магнитное поле и его характеристика.** Подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле с определенными физическими свойствами, так и в пространстве, окружающем токи, возникает особого вида поле, называемое *магнитным полем*. Наличие электростатического поля обнаруживается по действию сил на внесенные в него заряженные тела. Магнитное поле проявляется по силам, действующим на внесенные в него проводники, по которым течет ток. Так, два параллельных провода, по которым текут токи одного направления, взаимно притягиваются (рис. 174). Этот факт мы истолковываем следующим образом: каждый из токов создает в окружающем пространстве магнитное поле, и это поле воздействует на другой ток. Характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления в нем тока. Поэтому для характеристики магнитного поля надо рассматривать его действие на некоторый вполне определенный ток. При этом мы будем пока считать, что проводники, по которым текут токи, находятся в пустоте.

В электростатике мы пользовались для изучения свойств электростатического поля точечным зарядом, т. е. зарядом, сосредоточенным на теле, размеры которого малы по сравнению с расстояниями до зарядов, вызывающих поле (см. § 124). Для изучения свойств магнитного поля воспользуемся его действием на *замкнутый плоский контур с током*. Такой контур мы будем называть *рамкой*. Размеры этого контура должны быть малыми по сравнению с расстоянием до тех проводников, по которым текут токи, образующие магнитное поле. Практически для поддержания в рамке постоянного тока к ней надо

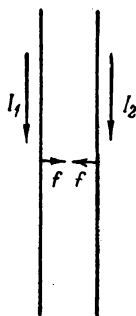


Рис. 174. Взаимное притяжение двух параллельных проводов, по которым текут токи одного направления.

подводить ток по каким-либо проводам. Магнитное поле будет действовать и на эти провода; чтобы избежать этого действия, подводящие провода можно расположить вплотную друг к другу, тогда суммарное действие магнитного поля на них окажется равным нулю (благодаря указанной ниже зависимости направления магнитных сил от направления тока). Такую рамку, подвешенную к тонкой нити, способной обнаруживать деформацию кручения (рис. 175), мы и будем использовать для исследования свойств магнитного поля.



Рис. 175.  
Рамка с током.

Опыт показывает, что такая малая рамка, помещенная около проводов, по которым текут токи, поворачивается определенным образом. *Магнитное поле оказывает на рамку ориентирующее действие.*

Возьмем, например, прямой и длинный провод (рис. 176), по которому течет ток  $I$ . Рамка  $C$ , помещенная вблизи такого провода, повернется так, что она расположится в плоскости  $AA'BB'$ , проходящей через провод.

При этом ориентация рамки будет зависеть и от направления тока в ней: при перемене направления тока в рамке рамка поворачивается на  $180^\circ$ .<sup>1</sup>

Ориентирующее действие поля на рамку можно прежде всего использовать для характеристики *направленности магнитного поля*. Для этого проведем нормаль к плоскости рамки. *За положительное направление нормали примем такое, чтобы ток в рамке, при рассмотрении с конца нормали, казался идущим против часовой стрелки.*

Другими словами, будем считать за положительное направление нормали направление поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении тока, текущего по рамке (рис. 177).

В результате действия магнитного поля на рамку с током, рамка окажется в каждом данном случае определенным образом ориентирована,<sup>2</sup> так что ее нормаль будет направлена в определенную сторону. Очевидно, что факт такой определенной ориентации рамки в магнитном поле указывает на направленность самого

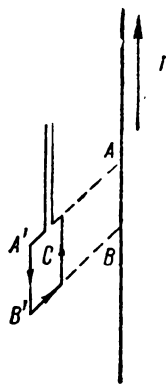


Рис. 176. Свободно поворачивающаяся рамка располагается в плоскости  $AA'BB'$ , проходящей через провод.

<sup>1</sup> Ниже мы увидим, что на рамку в магнитном поле действует пара сил, исчезающая при определенной ориентации рамки. Поэтому, вообще говоря, рамка будет совершать колебания около своего положения равновесия в магнитном поле. Однако при наличии сил трения эти колебания быстро затухнут.

<sup>2</sup> Кроме этой ориентации рамки, возможна ориентация, при которой нормаль направлена противоположно; однако положение рамки, соответствующее этой второй ориентации, неустойчиво.

магнитного поля. *За направление магнитного поля в месте расположения рамки примем то направление, вдоль которого расположится положительная нормаль к рамке.* Таким образом, по ориентации рамки можно однозначно определить направление магнитного поля.

Далее мы можем воспользоваться той же рамкой и для количественной характеристики магнитного поля.

Тот факт, что рамка испытывает ориентирующее действие поля, указывает, что *на рамку в магнитном поле действует пара сил.*<sup>1</sup> Величина этой пары сил может быть измерена по закручиванию нити, к которой подвешена рамка. Опыт показывает, что величина момента  $M$  этой пары зависит как от силы и расположения токов, образующих магнитное поле, так и от свойств самой рамки: ее размеров, ориентации и силы тока в ней.

Остановимся прежде всего на свойствах самой рамки. Для этого будем поддерживать неизменным расположение и силы токов, образующих магнитное поле. Возьмем определенную рамку с определенной в ней силой тока. При ориентации нормали рамки по полю момент действующей на нее пары сил равен нулю. *Момент пары сил достигает наибольшего значения, когда нормаль рамки ориентирована перпендикулярно к направлению поля.* Поэтому условимся во всех случаях, когда мы хотим использовать рамку для количественной характеристики магнитного поля, располагать ее так, чтобы нормаль к ней была перпендикулярна к направлению поля. Далее легко убедиться из опыта, что момент пары сил  $M$  пропорционален силе тока  $I$  в рамке. Наконец, опыт показывает, что для различных плоских рамок момент  $M$  пропорционален площади  $S$  рамки, независимо от ее формы (рамка может быть прямоугольной, круглой, эллиптической и т. д.):

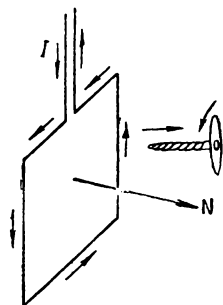


Рис. 177. Направление положительной нормали к рамке с током.

$$M \sim IS. \quad (1)$$

Величина, пропорциональная произведению силы тока в рамке  $I$  на ее площадь  $S$ , носит название *магнитного момента рамки*  $p_m$ :

$$p_m \sim IS. \quad (2)$$

В данной точке магнитного поля на все рамки с одним и тем же магнитным моментом  $p_m$  действуют одинаковые пары сил  $M$ .

Если же рамку с данным магнитным моментом располагать в различных точках магнитного поля, то, вообще говоря, мы обнаружим, что на нее будут действовать различные моменты сил  $M$ . Например,

<sup>1</sup> В неоднородном поле на рамку действует еще сила (см. § 197), которую мы, однако, пока не будем рассматривать.

чем ближе мы расположим рамку к проводу, по которому течет ток, вызывающий поле, тем больше окажется момент действующих на нее сил. Этот факт можно использовать для количественной характеристики магнитного поля, а именно считать, что момент сил  $M$ , действующих на рамку с данным магнитным моментом  $p_m$ , тем больше, чем больше *напряженность поля*  $H$  в месте расположения рамки:

$$M \sim H.$$

Объединяя этот вывод с соотношением (1), получим: момент пары сил, действующих на рамку с током в магнитном поле, пропорционален магнитному моменту рамки  $p_m$  и напряженности магнитного поля  $H$  в том месте, где рамка расположена:

$$M \sim p_m H. \quad (3)$$

Этим соотношением мы будем пользоваться для измерения с помощью рамки напряженности магнитного поля  $H$ . Из (3) и (2) имеем

$$H \sim \frac{M}{p_m} \sim \frac{M}{IS}. \quad (4)$$

Для того, чтобы в последнем выражении перейти от знака пропорциональности к знаку равенства, надо ввести коэффициент пропорциональности  $k$ ; тогда получим

$$H = k \frac{M}{IS}. \quad (4a)$$

Численное значение коэффициента пропорциональности  $k$  зависит от выбора единиц измерения  $H$ ,  $M$ ,  $I$  и  $S$ . Выбрав определенное численное значение  $k$ , мы можем на основании равенства (4a), измерить напряженность магнитного поля  $H$  по моменту сил  $M$ , действующих на рамку с известным магнитным моментом  $p_m$ . Об единицах, в которых измеряется напряженность магнитного поля  $H$ , будет сказано в § 195.

Так как магнитное поле характеризуется и направлением и численным значением напряженности, то, следовательно, напряженность магнитного поля  $H$  является *величиной векторной*. Тогда, резюмируя сказанное, имеем: направление вектора магнитной напряженности  $H$  в каждой данной точке магнитного поля определяется направлением положительной нормали к рамке с током, принимающей положение устойчивого равновесия в магнитном поле. Величина напряженности определяется по равенству (4a) моментом пары сил, действующих на рамку при условии, что нормаль рамки расположена перпендикулярно к направлению вектора  $H$ .

Мы можем теперь уточнить и вопрос о размерах рамки. Очевидно, в случае неоднородного поля момент сил, действующих на рамку, измеряет среднее значение напряженности поля в пределах рамки. Для того, чтобы измерить напряженность поля в данной точке, *размеры рамки должны быть настолько малыми, чтобы в пределах рамки поле могло считаться однородным.*

**§ 192. Графическое изображение напряженности магнитного поля.** Аналогично тому, как в электростатике мы рассматривали графический метод характеристики электростатического поля с помощью линий напряженности, так и для характеристики магнитного поля мы введем в рассмотрение линии магнитной напряженности. *За линию магнитной напряженности примем такую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности  $H$  в этой точке.* (рис. 178). Условимся приписывать линиям напряженности направление, совпадающее на каждом данном участке с направлением вектора напряженности  $H$ .

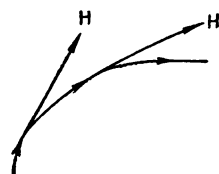


Рис. 178. Линия магнитной напряженности.

Пользуясь рамкой с током, мы можем способом, описанным в предыдущем параграфе, определить вид линий магнитной напряженности для различных частных случаев.

В случае прямого длинного тока, как мы уже видели, рамка располагается в плоскости, проходящей через направление тока. Следовательно, нормаль к рамке ориентируется перпендикулярно к радиусу-вектору, соединяющему провод, по которому течет ток, с местом, где располагается рамка. Отсюда вытекает, что в случае длинного тока линии напряженности имеют вид окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к току, и с центрами в том месте, где проходит ток. Направление линий напряженности магнитного поля прямого тока указано на рис. 179 а и б; оно определяется *правилом буравчика*: *если поступательное движение буравчика сопоставить с направлением тока, то направление вращения его рукоятки даст направление магнитных линий напряженности.*

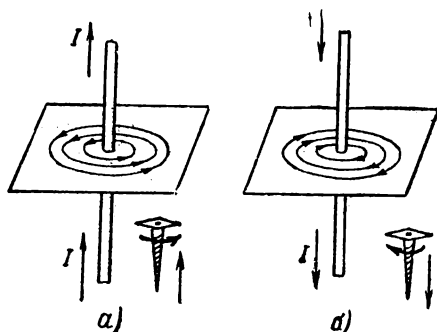


Рис. 179. Направление линий напряженности магнитного поля прямого тока.

*направлением тока, то направление вращения его рукоятки даст направление магнитных линий напряженности.*

С помощью рамки можно исследовать магнитные поля токов любой формы. Возьмем, например, круговой ток; в этом случае магнитные линии напряженности в плоскости, перпендикулярной плоскости контура тока, представляют собой кривые, изображенные на рис. 180. Эти линии являются также или замкнутыми кривыми, или кривыми, имеющими тенденцию замкнуться при их продолжении.

Система одинаковых круговых токов с общей прямолинейной осью называется *соленоидом*.



Соленоид обычно представляет собой намотанный на цилиндрическую поверхность проводник, по которому идет ток. Исследуя магнитное поле соленоида, мы получим картину, изображенную на рис. 181. В средней части внутренней полости соленоида магнитные линии представляют собой систему параллельных оси соленоида прямых; по мере приближения к концам соленоида прямые превращаются в расходящиеся из концов соленоида кривые, замыкающиеся во внешней части пространства или имеющие тенденцию замкнуться при их продолжении. Магнитные линии напряженности соленоида во внешней части напоминают электрические линии напряженности диполя (см. рис. 176). Однако направление магнитных линий напряженности внутри соленоида переходит непрерывно в направление линий напряженности вне соленоида, тогда как электрические линии напряженности диполя меняют свое направление у зарядов диполя. Во внешней относительно соленоида части пространства маг-

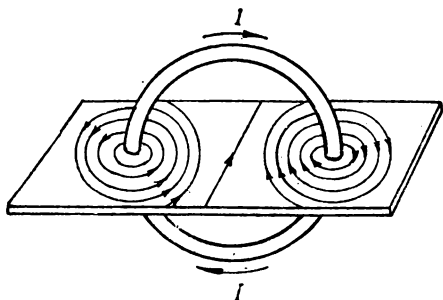


Рис. 180. Направление линий напряженности магнитного поля кругового тока.

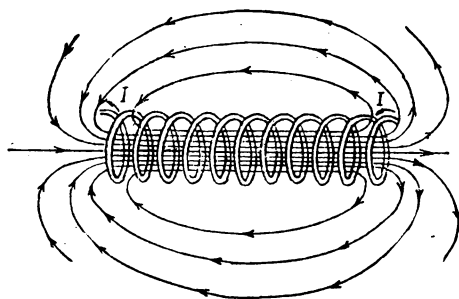


Рис. 181. Направление линий напряженности магнитного поля соленоида.

нитное поле значительно лишь вблизи концов соленоида, при удалении от концов оно быстро ослабевает; у средней части соленоида, вне его, магнитное поле очень мало. Чем длиннее соленоид, тем резче выражены указанные особенности поля. *Во внутренней части соленоида поле можно считать однородным*; заметное отступление от однородности получается лишь вблизи концов соленоида.

Система одинаковых круговых токов, центры которых расположены по окружности, образует *тороид* (рис. 182).

Магнитное поле тороида сосредоточено лишь в его внутренней части, во внешней части пространства на рамку с током силы не действуют.

Если длина тороида велика по сравнению с его поперечным сечением, то поле внутри него можно тоже считать однородным.

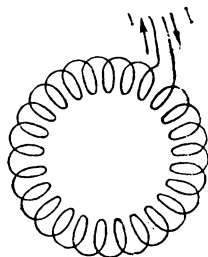


Рис. 182. Тороид.

Опыт показывает, что соленоид ориентируется в магнитном поле так же, как рамка с током. При этом, если смотреть на соленоид против линий напряженности магнитного поля, то наблюдатель видит ток в соленоиде идущим против часовой стрелки (рис. 183). Момент сил  $M$ , действующих на соленоид, состоящий из  $n$  витков, очевидно, в  $n$  раз больше, чем момент, действующий на один виток. Таким образом, по аналогии с формулой (4а) § 191, можно написать, что если ось соленоида перпендикулярна к линиям магнитной напряженности, то на него действует пара сил с моментом

$$M = \frac{1}{k} nIS \cdot H. \quad (1)$$

Магнитным моментом соленоида называется величина  $p_c$ , в  $n$  раз большая магнитного момента отдельного витка:

$$p_c \sim nIS, \quad (2)$$

где  $I$  — сила тока, текущего по соленоиду, и  $S$  — площадь его поперечного сечения.

Рассмотрение линий напряженности магнитного поля токов показывает, что они *представляют собой замкнутые линии*. Линии магнитной напряженности всегда охватывают в виде замкнутых кривых электрический ток. Замкнутость магнитных линий напряженности является характерным их отличием от линий напряженности электростатического поля. Этот факт указывает, что между электростатическим и магнитным полями нет глубоких аналогий. Природа этих полей различна.

Электростатическое поле, линии напряженности которого начинаются на одних зарядах и кончаются на других или уходят в бесконечность, является *потенциальным полем*. Каждой точке такого поля может быть однозначно приписано определенное значение потенциала. Магнитное поле характеризуется замкнутостью его линий напряженности. Такое поле носит название *соленоидального*. Как мы увидим в дальнейшем (см. § 198), точкам магнитного поля нельзя приписать значений однозначного потенциала так, как это делается для электростатического поля.

Линии напряженности  $H$ , указывая направление напряженности в каждой точке поля, не дают, без добавочных определений, величину напряженности. Если же мы условимся, подобно тому, как это было сделано в электростатике, сопоставлять густоту проводимых линий напряженности с численным значением напряженности, то картина линий напряженности будет характеризовать магнитное поле и с количественной стороны. Всякое поле можно в достаточно малом участке считать однородным; возьмем в таком участке элемент поверхности

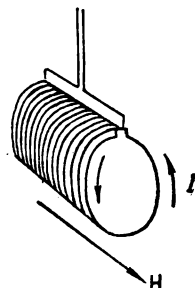


Рис. 183. Ориентация соленоида во внешнем магнитном поле.

$\Delta S_0$ , нормальный к линиям напряженности данного участка. Условимся проводить через площадку  $\Delta S_0$  такое число  $\Delta N$  линий напряженности, чтобы отношение этого числа к величине поверхности  $\Delta S_0$  равнялось значению напряженности в данном участке поля:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = H.$$

Число линий напряженности, проходящих через любую площадку  $\Delta S$ , равно числу линий напряженности, пересекающих нормальную к линиям проекцию  $\Delta S_0$  площадки  $\Delta S$  (рис. 184). Отсюда число линий напряженности  $\Delta N$ , пересекающих площадку  $\Delta S$ , равно

$$\Delta N = H \Delta S \cos \alpha, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением линий напряженности и нормалью к площадке  $\Delta S$ . Так как  $H \cos \alpha = H_n$ , где  $H_n$  обозначает проекцию вектора напряженности  $\mathbf{H}$  на нормаль к элементу поверхности  $\Delta S$ , то равенство (3) можно переписать:

$$\Delta N = H_n \Delta S. \quad (3a)$$

Выражение (3a) определяет *элементарный поток напряженности*  $\Delta N$  через элемент поверхности  $\Delta S$ . Очевидно, что поток  $\Delta N$  имеет знак, зависящий от знака  $H_n$ . Знак же  $H_n$  определяется выбором направления нормали. Если элемент  $\Delta S$  принадлежит замкнутой поверхности, то принято за положительное направление нормали брать направление нормали, *внешней* по отношению к объему, ограниченному данной поверхностью (ср. стр. 27).

Полный поток  $N$  через конечную поверхность определится как алгебраическая сумма элементарных потоков через все элементы  $\Delta S$ , образующие данную поверхность  $S$ :

$$N = \sum \Delta N = \sum H_n \Delta S. \quad (4)$$

Если поверхность  $S$  замкнута, то число линий магнитной напряженности, входящих в поверхность, равно числу выходящих из нее, так как линии магнитной напряженности всегда представляют собой замкнутые кривые. При этом входящие линии, образуя тупой угол с направлением внешней нормали (рис. 185), создают отрицательный поток. Выходящие же линии, образуя с внеш-

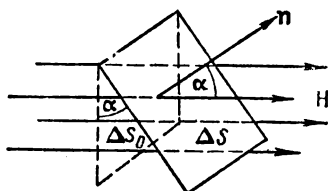


Рис. 184. Линии напряженности, проходящие через косо расположенную площадку  $\Delta S$ .

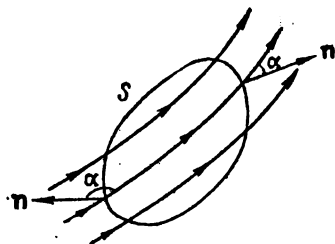


Рис. 185. Поток линий напряженности через замкнутую поверхность.

ней нормалью острый угол, создают положительный поток. Таким образом, оба эти потока взаимно компенсируются, и мы приходим к выводу: *полный поток магнитной напряженности через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

В этом снова сказывается существенное различие между магнитным и электростатическим полями; полный поток линий электрической напряженности  $E$  может быть отличен от нуля, как это следует из теоремы Остроградского — Гаусса (§ 126).

Пользуясь обозначениями интегрального исчисления, заменим в выражении (4) сумму интегралом и тогда получим для потока магнитной напряженности  $N$  через поверхность  $S$ :

$$N = \int_S H_n dS, \quad (4a)$$

где интеграл распространен на всю поверхность  $S$ .

Поток магнитной напряженности через замкнутую поверхность, как сказано, равен нулю. Таким образом, если интеграл (4a) распространить на *замкнутую поверхность*, то

$$\int_S H_n dS = 0. \quad (5)$$

Пусть  $V$  есть объем, ограничиваемый рассматриваемой поверхностью, тогда (ср. со сказанным в § 156, на стр. 130) при стягивании замкнутой поверхности в точку:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int_S H_n dS \right) = \operatorname{div} \mathbf{H}.$$

Так как  $\int_S H_n dS$  все время остается равным нулю, то отсюда получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Таким образом, *в пустоте, в любой точке пространства, дивергенция вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  равна нулю.*

В электростатике, как было показано в § 132,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

где  $\rho$  — плотность объемных зарядов в рассматриваемой точке. Только в тех местах, где плотность объемных электрических зарядов  $\rho = 0$ , дивергенция вектора напряженности электростатического поля  $\mathbf{E}$  равна нулю.

Во всех же тех местах, где плотность объемных электрических зарядов  $\rho$  не равна нулю, отлична от нуля и дивергенция вектора  $\mathbf{E}$ . Так как, по сказанному, дивергенция вектора  $\mathbf{H}$  в пустоте всегда равна нулю, то отсюда вытекает, что в области магнитных явлений не существует аналога электрическим зарядам.

**§ 193. Способ определения магнитного поля токов.** Как мы указывали, напряженность поля  $\mathbf{H}$  в какой-либо точке пространства зависит от формы проводов, по которым текут токи, от сил токов и от расположения рассматриваемой точки по отношению к этим проводам. Экспериментально направление и величина напряженности

поля  $H$  могут быть определены по моменту сил  $M$ , действующих на рамку с заданным магнитным моментом  $p_m$ .

В качестве простейшего примера мы можем выбрать прямой и очень длинный провод и определять напряженность поля  $H$  на некотором расстоянии  $r$  от него.

Прежде всего определим экспериментально, с помощью рамки, как зависит напряженность поля  $H$  от силы тока  $I$ , текущего по проводу, и от расстояния от провода  $r$ . Магнитное поле, вызванное током, текущим по прямому и длинному проводу, неоднородно, но если размеры рамки малы по сравнению с расстоянием  $r$ , то поле в пределах рамки можно считать однородным. Как было указано на стр. 268, рамка поворачивается вблизи прямого длинного провода, по которому течет ток, так, что ее нормаль располагается перпендикулярно к прямой  $r$ , проведенной от ближайшего участка провода к рамке. Если ток  $I$  (рис. 186а) течет по проводу сверху вниз, то нормаль к рамке  $N$  расположится перпендикулярно к плоскости чертежа, положительным концом в направлении на читателя. Чтобы удержать нормаль к рамке вдоль направления  $r$  (рис. 186б), к рамке надо приложить момент сил  $M$ , который, по сказанному, будет пропорционален напряженности поля  $H$ . Измеряя момент сил  $M$ , при постоянном магнитном моменте рамки  $p_m$ , прежде всего легко убедиться, что он пропорционален силе тока  $I$  в проводе  $AB$ . Отсюда следует, что напряженность магнитного поля  $H$  пропорциональна силе тока  $I$ , вызывающего это поле.

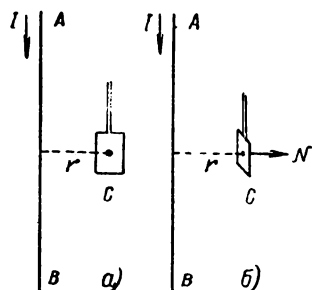


Рис. 186. Определение напряженности поля с помощью рамки.

$$H \sim I.$$

Во-вторых, помещая рамку на различных расстояниях от провода  $r$ , можно обнаружить, что момент  $M$  обратно пропорционален расстоянию  $r$  от провода, откуда следует, что и напряженность поля  $H$  обратно пропорциональна  $r$ :

$$H \sim \frac{1}{r}.$$

Обратная пропорциональность напряженности магнитного поля прямого длинного тока расстоянию от проводника была выяснена Био и Саваром в 1820 г. Однако эта зависимость имеет место лишь в частном случае прямого длинного провода. В каждом случае зависимость напряженности поля от общего расположения проводов, по которым текут токи, будет особая. Единственным общим обстоятельством является пропорциональность напряженности магнитного поля  $H$  в данной точке силе тока  $I$ , вызывающего поле.

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , вызванного током, текущим по проводу, определяется действием всех отдельных участков этого провода. Отдельные участки вызывают элементарные напряженности  $\Delta\mathbf{H}$ , и наблюдаемая напряженность  $\mathbf{H}$  есть их векторная сумма. Это, естественно, привело к попытке установить закон, связывающий элементарный участок тока с напряженностью магнитного поля, которое этим участком обуславливается. На опыте мы не можем осуществить отдельного участка тока, так что нельзя непосредственно измерить поле, создаваемое элементом тока. Можно измерить только суммарную напряженность магнитного поля, создаваемую всеми элементами тока в данной точке пространства. Однако Лапласу удалось найти путем обобщения опытных данных такой элементарный закон, который, будучи применен к участкам контура произвольной формы, позволяет во всех случаях вычислить значение результирующей напряженности поля, совпадающее с измеренным на опыте. Этот закон принято называть *законом Био — Савара — Лапласа*.

Его содержание следующее: элемент контура  $\Delta l$ , по которому течет ток силой  $I$ , создает в произвольно выбранной точке  $A$  (рис. 187) магнитное поле напряженности  $\Delta\mathbf{H}$ , равной

$$\Delta H = k' \frac{\Delta l \sin \alpha}{r^2}, \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние от элемента тока  $\Delta l$  до точки  $A$ ,  $\alpha$  — угол, который радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный к точке  $A$ , составляет с элементом  $\Delta l$ , и  $k'$  — коэффициент пропорциональности. Вектор  $\Delta\mathbf{H}$  перпендикулярен к плоскости, содержащей элемент  $\Delta l$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ ; направление  $\Delta\mathbf{H}$  определяется правилом буравчика: направление вращения головки буравчика дает направление  $\Delta\mathbf{H}$ , если поступательное движение буравчика соответствует направлению тока  $I$  в элементе контура  $\Delta l$ .

По сказанному, формула Био — Савара — Лапласа (1) дает не всю напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , создаваемого данным током в точке  $A$ , а лишь ту его часть, которая создается элементом контура  $\Delta l$ . Полная напряженность  $\mathbf{H}$  представляет собой векторную сумму всех  $\Delta\mathbf{H}$ , создаваемых всеми элементами, на которые мы мысленно разбиваем контур тока. Совпадение результатов, вычисленных на основании формулы (1) для различных контуров тока, с опытом служит подтверждением ее правильности.

Для того чтобы определить  $\Delta\mathbf{H}$  и по величине и по направлению, формулу (1) можно записать в векторном виде:

$$\Delta\mathbf{H} = k' \frac{[\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (1a)$$

где  $[\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{r}]$  — векторное произведение векторов  $\Delta\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ .

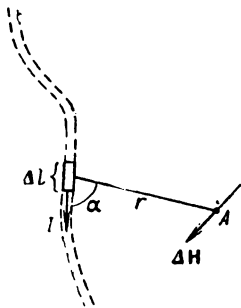


Рис. 187. Элемент тока  $\Delta l$  создает в точке  $A$  напряженность магнитного поля  $\Delta\mathbf{H}$ , перпендикулярную к плоскости, содержащей  $\Delta l$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ .

Элементу длины провода  $\Delta l$  приписывается направление, совпадающее с направлением тока. Радиус-вектор  $r$  проводится от элемента провода  $\Delta l$  к точке  $A$ , в которой вычисляется поле. Полная напряженность поля  $H$  в точке  $A$  определится геометрической суммой всех элементарных полей  $\Delta H$ :

$$H = \sum \Delta H.$$

Из элементарного закона (1) вытекает, что напряженность магнитного поля  $H$  тока, текущего по прямому длинному проводу, пропорциональна  $I/r$ . Действительно, определим напряженность поля  $H$  в точке  $A$ , отстоящей на расстоянии  $r_0$  от прямого очень длинного провода (рис. 188), как сумму элементарных напряженностей, вызванных отдельными элементами провода. По формуле Био — Савара — Лапласа (1), элемент контура тока  $\Delta l$  создает в точке  $A$  напряженность поля

$$\Delta H = k' \frac{\Delta l \sin \alpha}{r^2},$$

Рис. 188. К подсчету напряженности магнитного поля прямого тока.

где  $r$  — расстояние элемента  $\Delta l$  от точки  $A$ ; направлено  $\Delta H$  перпендикулярно к плоскости рисунка и, если ток течет сверху вниз, то — на читателя.

Таким образом, напряженности  $\Delta H$  от всех элементов  $\Delta l$  будут направлены одинаково, и суммарная напряженность  $H$  выразится алгебраической суммой:

$$H = \sum k' \frac{\Delta l \sin \alpha}{r^2}.$$

Из рис. 188 имеем, что

$$\Delta l = \frac{r \cdot \Delta \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r \sin \alpha},$$

но  $r \sin \alpha = r_0$  и, следовательно,

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r_0},$$

после чего выражение для  $H$  принимает вид:

$$H = \sum k' \frac{I \sin \alpha \cdot \Delta \alpha}{r_0}. \quad (2)$$

Полагая элементы  $\Delta l$ , на которые мы мысленно разбиваем провод, бесконечно малыми, получим, что и угол  $\Delta \alpha$  бесконечно мал и что, следовательно, сумма в выражении (2) должна быть заменена интегралом:

$$H = \int k' \frac{I \sin \alpha \, d\alpha}{r_0}.$$

Интегрировать надо по всем значениям  $\alpha$ , начиная от  $\alpha = 0$ , что соответствует самым верхним элементам  $dl$ , до  $\alpha = \pi$ , что соответ-

ствуется самым нижним элементам  $dl$ . Следовательно, пределами интегрирования будут 0 и  $\pi$ . Замечая, кроме того, что  $I$  и  $r_0$ , как величины постоянные, можно вынести из-под знака интеграла, получим

$$H = k' \frac{I}{r_0} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = k' \frac{I}{r_0} [-\cos \alpha]_0^\pi = k' \frac{2I}{r_0}. \quad (3)$$

Таким образом, из закона Био — Савара — Лапласа действительно вытекает, что напряженность магнитного поля  $H$ , вызываемого током, текущим по бесконечно длинному прямому проводу, пропорциональна  $I/r_0$ , где  $r_0$  — расстояние от провода до точки, в которой измеряется поле.

**§ 194. Магнитное поле кругового тока и соленоида.** Приведем ряд примеров на применение формулы Био — Савара — Лапласа.

1. Напряженность магнитного поля в центре кругового тока. Пусть по контуру в виде круга радиуса  $R$  по часовой стрелке течет ток силой  $I$  (рис. 189). Любой элемент кругового контура  $\Delta l$  находится на одном и том же расстоянии  $r=R$  от центра. Кроме того, для любого элемента  $\Delta l$  радиус-вектор  $\mathbf{R}$  перпендикулярен к  $\Delta l$ , откуда угол  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и, следовательно,  $\sin \alpha = 1$ . Отсюда, по формуле (1) § 193, напряженность магнитного поля  $\Delta H$ , создаваемого в центре круга элементом  $\Delta l$ , будет

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

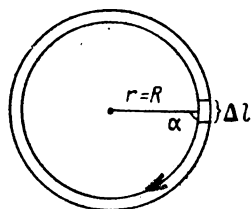


Рис. 189. К подсчету напряженности поля в центре кругового тока.

Направление  $\Delta H$  определится правилом буравчика:  $\Delta H$  направлено перпендикулярно к плоскости круга и при направлении тока по часовой стрелке — за плоскость рисунка. Таким образом, все элементы  $\Delta l$  кругового контура тока вызывают в центре одинаково направленные  $\Delta H$ , и суммарная напряженность поля  $H$  в этом случае выразится алгебраической суммой  $\Delta H$ :

$$H = \sum \Delta H = \sum k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

Сила тока  $I$ , радиус  $R$  и коэффициент пропорциональности  $k'$ , как величины постоянные, могут быть вынесены за знак суммы, откуда

$$H = k' \frac{I}{R^2} \sum \Delta l,$$

но  $\sum \Delta l$  представляет собой сумму всех элементов, на которые разбит круговой контур радиуса  $R$ , т. е.  $\sum \Delta l$  равна длине окружности радиуса  $R$ , откуда  $\sum \Delta l = 2\pi R$  и

$$H = k' \frac{2\pi I}{R}. \quad (1)$$



Связь между направлениями  $\mathbf{H}$  и  $I$  дана на рис. 190.

2. Напряженность магнитного поля на оси кругового тока. Осью кругового тока назовем перпендикуляр, восстановленный из центра окружности контура.

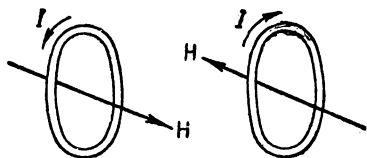


Рис. 190. Направление напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  в центре кругового тока.

Определим напряженность в точке  $A$ , отстоящей на расстоянии  $d$  от плоскости контура (рис. 191); радиус кругового контура обозначим  $R$ , а расстояние элементов  $\Delta l$  от точки  $A$  — через  $r$ . Рассмотрим напряженности  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$ , создаваемые двумя элементами контура  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , находящимися на противоположных концах диаметра. Так как угол  $\alpha$  между  $r$  и  $\Delta l$  равен  $\pi/2$  (как угол между образующей конуса и элементом окружности его основания), то по формуле (1) § 193 имеем соответственно:

$$\Delta H_1 = k' \frac{I \Delta l_1}{r_1^3}, \quad \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l_2}{r_2^3}.$$

Выбрав длину элементов  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  одинаковой и равной  $\Delta l$  и замечая, что  $r_1 = r_2$ , получим

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l}{r^3}, \quad (2)$$

где  $r = r_1 = r_2$ . Таким образом, численно  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$  равны друг другу; направлены же они по-разному:  $\Delta H_1$  — перпендикулярно к  $r_1$  и к элементу  $\Delta l_1$ ,  $\Delta H_2$  — перпендикулярно к  $r_2$  и к элементу  $\Delta l_2$ ; направления  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$  определяются правилом буравчика (см. рис. 191). Геометрическая сумма  $\Delta \mathbf{H}$  векторов  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$  будет направлена по оси кругового тока и численно равна сумме их проекций на ось  $OA$

$$\Delta H = \Delta H_1 \sin \beta + \Delta H_2 \sin \beta.$$

Замечая из рис. 191, что  $\sin \beta = \frac{R}{r}$ , и подставляя вместо  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$  их значения по (2), получим

$$\Delta H = k' 2 \frac{I \Delta l}{r^3} \cdot \frac{R}{r} = k' \frac{2 I \Delta l R}{r^3}.$$

Разбивая весь круговой контур тока на указанные пары элементов  $\Delta l$ , получим, что результирующая напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  направлена по оси и численно равна алгебраической сумме величин  $\Delta H$ :

$$H = \sum k' \frac{2 I \Delta l \cdot R}{r^3} = k' \frac{I R}{r^3} \cdot 2 \sum \Delta l.$$

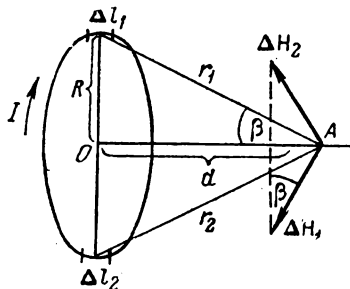


Рис. 191. К подсчету напряженности магнитного поля на оси кругового тока.

Сумма всех элементов  $2 \sum \Delta l$  равна длине кругового контура тока  $2\pi R$ , поэтому

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{r^3}.$$

Из рис. 191 имеем  $r^2 = R^2 + d^2$ , откуда

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Направлено  $\mathbf{H}$  по оси так, что, глядя вдоль направления  $\mathbf{H}$ , мы увидим ток идущим по часовой стрелке.

Для центра кругового тока  $d = 0$ , и формула (3) дает:

$$H = k' \frac{2\pi I}{R},$$

т. е. переходит в формулу (1), как и следовало ожидать.

Для расстояний  $d$ , больших по сравнению с радиусом кругового тока  $R$ , величиной  $R$  в знаменателе формулы (3) можно пренебречь, и тогда приближенно

$$H \cong k' \frac{2\pi R^2 I}{d^3},$$

т. е.  $H$  меняется обратно пропорционально кубу расстояния  $d$ .

3. Напряженность магнитного поля на оси соленоида. Соленоид, как мы указывали, состоит из провода, намотанного на цилиндрическую поверхность. Если витки соленоида расположены вплотную друг к другу, то соленоид эквивалентен системе круговых токов одинаковых радиусов, имеющих общую ось. Отсюда напряженность магнитного поля на оси соленоида может быть получена суммированием напряженностей от отдельных круговых токов.

Соответственный расчет (см. мелкий шрифт) дает:

$$H = k' 4\pi n I, \quad (4)$$

где  $n$  — число витков на единицу длины соленоида и  $I$  — сила тока.

Если выделить малый участок  $dl$  длины соленоида, то на него придется  $n dl$  витков; обозначая силу тока в каждом витке через  $I$ , можно участок  $dl$  соленоида рассматривать как круговой ток силы  $In dl$ . Напряженность магнитного поля в некоторой точке  $A$  на оси соленоида, создаваемая этим участком, по формуле (3) равна

$$dH = k' \frac{2\pi I R^2 \cdot n}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl, \quad (5)$$

где  $l$  — расстояние по оси от участка  $dl$  до точки  $A$ . Вводя в рассмотрение угол  $\beta$  между осью соленоида и радиусом-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к участку  $dl$  (рис. 192), получим

$$l = R \operatorname{ctg} \beta, \quad \text{откуда} \quad dl = -R \frac{d\beta}{\sin^2 \beta};$$

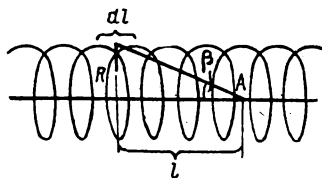


Рис. 192. К подсчету напряженности магнитного поля внутри соленоида.

кроме того,

$$R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta};$$

подставляя значения  $|dl|$  и  $R^2 + l^2$  в (5) [в формуле (5)  $dl$  — величина положительная], имеем

$$dH = k'2\pi nI \cdot \sin \beta d\beta.$$

Так как напряженность в точке  $A$  от всех элементов направлена по оси токов, то для получения результирующего значения  $H$  в точке  $A$  надо проинтегрировать полученное выражение по всем значениям  $\beta$ . Если обозначить через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  значения углов для концов соленоида, то в результате интегрирования получим

$$H = k'2\pi nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = k'2\pi nI (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \quad (6)$$

Этот результат зависит от положения точки  $A$  и длины соленоида. Для бесконечно длинного соленоида имеем  $\beta_1 = 0$  и  $\beta_2 = \pi$ , откуда

$$A = k'4\pi nI,$$

что совпадает с формулой (4).

Для всякого конечного соленоида напряженность поля будет меньше, чем для бесконечно длинного; для конечного соленоида наибольшим значение напряженности будет в точке, равноудаленной от концов соленоида. Для точки, находящейся у конца соленоида, напряженность получится по формуле (6); если в ней положить один из углов, например  $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$H = k'2\pi nI \cos \beta_1.$$

Если соленоид очень длинный, то  $\beta_1 \cong 0$  и

$$H = k'2\pi nI,$$

т. е. у конца длинного соленоида поле вдвое меньше, чем внутри. Направлена напряженность поля по оси согласно правилу буравчика, так что, глядя вдоль направления напряженности, мы видим токи витков идущими по часовой стрелке.

**§ 195. Единицы измерения напряженности магнитного поля. Абсолютная электромагнитная система единиц.** Выбор единиц напряженности магнитного поля может быть сделан, если в законе Био — Савара — Лапласа, (1) § 193, положить коэффициент  $k'$  равным какому-нибудь определенному числу. В CGSE-системе коэффициент  $k'$  полагают равным единице при условии, что сила тока  $I$  измерена в CGSE-системе,  $\Delta l$  и  $r$  — в сантиметрах; этим определяется единица напряженности в CGSE-системе.

Тогда формула Био — Савара — Лапласа принимает вид:

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}. \quad (1)$$

Так как магнитное поле  $\Delta H$ , вызываемое отдельным элементом  $\Delta l$  провода, по которому течет ток, экспериментально обнаружить нельзя,

то для определения единицы напряженности магнитного поля  $H$  надо рассматривать поле, вызванное в определенном месте единичным током, текущим по проводу определенных формы и размеров. В качестве такого провода мы можем выбрать прямой и очень длинный провод. По формуле (3) § 193 напряженность магнитного поля  $H$  на расстоянии  $r$  от такого провода равна

$$H = k' \frac{2I}{r}.$$

Если, как мы условились, коэффициент  $k'$  положить равным единице, то

$$H = \frac{2I}{r}. \quad (2)$$

Измеряя силу тока в CGSE-единицах и  $r$  — в сантиметрах, установим на основании равенства (2) CGSE-единицу напряженности магнитного поля. Тогда получим: *на расстоянии 2 см от очень длинного прямого провода, по которому течет ток в 1 CGSE-единицу силы тока, напряженность магнитного поля  $H$  равна 1 CGSE-единице напряженности магнитного поля.*

Также при  $k' = 1$  по формулам (1) и (4) § 194 получим, что напряженность поля в центре кругового тока радиуса  $R$  равна

$$H = \frac{2\pi I}{R}, \quad (3)$$

а в средней части длинного и тонкого соленоида равна

$$H = 4\pi nI, \quad (4)$$

где  $n$  — число витков провода на единицу длины соленоида. Из формулы (3) получаем: *при протекании тока в 1 CGSE-единицу силы тока по круговому проводу радиусом  $R = 1$  см в центре провода возникает напряженность поля  $H$ , равная  $2\pi$  CGSE-единицам напряженности магнитного поля.*

Также из формулы (4) имеем: при протекании по длинному и тонкому соленоиду силы тока в 1 CGSE-единицу в средней части соленоида возникает напряженность магнитного поля  $H$ , равная  $4\pi$  CGSE-единицам напряженности магнитного поля. Размерность напряженности магнитного поля в CGSE-системе легко установить по любой из формул (2), (3) или (4):

$$[H] = L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}.$$

Указанная CGSE-единица напряженности магнитного поля  $H$  употребляется сравнительно редко. В физике напряженность магнитного поля обычно измеряют в так называемой электромагнитной системе (см. ниже).

По сказанному в § 191, напряженность магнитного поля можно измерять по моменту сил  $M$ , действующих на рамку с током. По формуле (4а) § 191:

$$H = k \frac{M}{IS}, \quad (5)$$

где  $I$  — сила тока в рамке и  $S$  — площадь рамки. Этой формулой можно было бы воспользоваться для установления единицы измерения напряженности магнитного поля  $H$ , приписав коэффициенту  $k$  определенное численное значение и пользуясь определенными единицами измерения  $M$ ,  $I$  и  $S$ . Например, можно было бы положить  $k = 1$  и измерить все остальные величины в CGSE-системе, т. е.  $M$  — в  $\text{дин} \cdot \text{см}$ ,  $S$  — в  $\text{см}^2$  и  $I$  — в CGSE-единицах силы тока.

При измерении же напряженности магнитного поля  $H$  в CGSE-единицах мы должны приписать коэффициенту  $k$  в формуле (5) определенную размерность и определенное численное значение. В самом деле, по формуле (5) момент сил  $M$ , действующих на рамку, равен

$$M = \frac{1}{k} HIS. \quad (6)$$

В этой формуле в CGSE-системе для всех четырех входящих сюда физических величин  $M$ ,  $H$ ,  $I$  и  $S$  уже выбраны единицы измерения; таким образом, коэффициенту  $k$  уже не может быть приписано произвольное значение. Коэффициент  $k$  представляет собою, следовательно, константу, обладающую определенной размерностью и определенным численным значением. Чтобы это показать, предположим, например, что рамка внесена внутрь соленоида в его среднюю часть, где магнитное поле однородно и где его напряженность  $H = 4\pi n I'$  (силу тока в соленоиде мы обозначаем через  $I'$  в отличие от силы тока в рамке  $I$ ). Если нормаль к рамке при этом перпендикулярна к оси соленоида, то на рамку действует момент сил  $M$ , определяемый формулой (6). Подставляя в эту формулу вместо  $H$  его значение  $4\pi n I'$ , получим

$$M = \frac{1}{k} 4\pi n I' IS. \quad (7)$$

Отсюда для размерности коэффициента  $k$  находим

$$[k] = \frac{[n] \cdot [I'] \cdot [S]}{[M]}. \quad (8)$$

Для размерностей  $M$  и  $S$  имеем следующие выражения:  $[M] = ML^2 T^{-2}$  и  $[S] = L^2$ . Размерность силы тока в CGSE-системе равна  $[I] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$ . Величина  $n$  представляет собою число витков на единицу длины соленоида, поэтому  $[n] = L^{-1}$ . Пользуясь всеми этими размерностями, получим из соотношения (8):

$$[k] = L^2 T^{-2}.$$

Из последнего выражения видно, что размерность коэффициента  $k$  совпадает с размерностью квадрата скорости:  $[v^2] = L^2 T^{-2}$ . По

соображениям, которые становятся ясными при рассмотрении магнитного поля движущихся зарядов (§ 215), принято вместо  $k$  вводить другую константу  $c$ , равную  $\sqrt{k}$  и называемую *электродинамической постоянной*. Размерность электродинамической постоянной совпадает с размерностью скорости.

Численное значение электродинамической постоянной  $c$  можно определить по формуле (7), измерив в CGSE-единицах момент сил  $M$ , действующих на рамку, помещенную внутрь соленоида. Такие измерения дают

$$c = \sqrt{k} = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

В этом предположении формула (7) примет вид:

$$M = \frac{1}{c^2} 4\pi n I' S. \quad (7a)$$

Как мы увидим впоследствии, электродинамическая постоянная  $c$ , выраженная в CGS-единицах, совпадает по численному значению со скоростью распространения электромагнитных волн в пустоте, выраженной в см/сек (в частном случае — со скоростью световых волн).

Можно, однако, построить другую систему единиц электромагнитных величин, взяв, например, за основную формулу, определяющую систему, формулу (7) для момента пары сил, действующей на рамку с током в поле соленоида, и положив в этой формуле коэффициент  $k$  равным единице. Поскольку единицы момента сил и площади в CGS-системе уже введены, постольку положить  $k=1$  можно лишь введя новую единицу для измерения силы тока. Эта новая единица силы тока называется *электромагнитной единицей*. Она кладется в основу так называемой электромагнитной системы единиц — CGSM-системы.

Рассмотрим соотношение между этой новой единицей силы тока и CGSE-единицей силы тока. Из формулы (7) получаем очевидное равенство:

$$\frac{1}{k} 4\pi n I_{CGSE} I'_{CGSE} = 4\pi n I_{CGSM} I'_{CGSM}.$$

Здесь индексы CGSE и CGSM указывают, в какой системе единиц измерены силы токов. Подставляя значение  $k=c^2$ , получим

$$\frac{I_{CGSE}}{I_{CGSM}} = c, \quad (9)$$

т. е. сила тока, измеренная в CGSM-единицах, выражается числом в  $c$  раз *меньшим*, чем та же сила тока, измеренная в CGSE-единицах. Следовательно, сама CGSM-единица силы тока в  $c$  раз *больше* CGSE-единицы силы тока:

$$\frac{\text{CGSM-ед. силы тока}}{\text{CGSE-ед. силы тока}} = c = 2,998 \cdot 10^{10} \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

Значение электродинамической постоянной  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$  см/сек определено экспериментально и, следовательно, хотя и с малой, но с некоторой погрешностью (приблизительно 0,002 %). Отсюда вытекает, что численное соотношение между CGSE- и CGSM-единицами силы тока не может быть дано с абсолютной точностью, а лишь с некоторым приближением. Поскольку число 2,998 очень близко к 3, то в большинстве случаев можно считать: 1 CGSM-ед. силы тока  $= 3 \cdot 10^{10}$  CGSE-ед. силы тока (см. § 153).

Размерность электромагнитной единицы силы тока можно получить из соотношения (9) и размерности электродинамической постоянной  $c$ :

$$[I_{CGSM}] = \frac{[I_{CGSE}]}{[c]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{L T^{-1}} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}.$$

Таким образом, размерность силы тока в CGSM- и CGSE-системах разная. Напомним, что одна и та же физическая величина может иметь разные размерности в разных системах (см. т. I, § 30).

Введя электромагнитную единицу силы тока, мы тем самым должны ввести и новую (электромагнитную) единицу количества электричества. Так как  $Q = It$ , а время  $t$  в обеих системах измеряется в секундах, то CGSM-единица количества электричества во столько же раз больше CGSE-единицы количества электричества, во сколько раз CGSM-единица силы тока больше CGSE-единицы силы тока. Таким образом:

$$\frac{\text{CGSM-ед. кол-ва эл-ва}}{\text{CGSE-ед. кол-ва эл-ва}} = c \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

Размерность CGSM-единицы количества электричества установим из соотношения  $[Q] = [I] \cdot [t]$ , откуда

$$[Q_{CGSM}] = M^{1/2} L^{1/2}.$$

Наконец, введем CGSM-единицу напряженности магнитного поля  $H$ . Для этого воспользуемся соотношением (3) § 193:

$$H = \frac{2I}{r}, \quad (10)$$

в котором силу тока  $I$  будем измерять в CGSM-единицах, а расстояние  $r$  — по-прежнему в сантиметрах. Установленная таким образом единица напряженности магнитного поля  $H$  носит название *эрстед* (сокращенно э) в честь Эрстеда, наблюдавшего в 1820 г. магнитное действие тока.

Из соотношения (10) следует, что на расстоянии в 2 см от бесконечно длинного прямого провода, по которому течет ток в 1 CGSM-единицу силы тока, возбуждается магнитное поле напряженностью в 1 эрстед. Также мы получим на основании формулы (4), что в средней части длинного тонкого соленоида, имею-

шего  $n$  витков на 1 см, по которому течет ток в 1 CGSM-единицу силы тока, напряженность магнитного поля равна  $4\pi n$  эрстедам. Ниже мы будем часто измерять напряженность магнитного поля в эрстедах. Эрстед в  $c$  раз больше CGSE-единицы магнитной напряженности.

В законе Био — Савара — Лапласа

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2};$$

коэффициент пропорциональности  $k'$  в CGSM-системе, так же как и в CGSE-системе, равен единице. Это происходит от того, что в CGSM-системе единица силы тока  $I$  и единица напряженности магнитного поля  $H$  в одно и то же число раз (в  $c$  раз) больше единиц этих же величин в CGSE-системе.

Размерность напряженности  $H$  в CGSM-системе установим из соотношения (10):

$$H = \frac{[I]}{[r]} = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}.$$

Об единицах силы тока и магнитной напряженности в международной системе единиц сказано в § 196.

**§ 196. Силы, действующие на ток в магнитном поле. Международная система электрических единиц.** Опыты по отклонению рамки с током в магнитном поле показывают, что на всякую рамку с током, помещенную в магнитное поле, действует пара сил. Естественно предположить, что эта пара создается силами, действующими на каждый элемент контура тока, находящегося в магнитном поле.

Наблюдать наличие силы, приложенной к отдельному участку контура тока, возможно с помощью следующей установки: по двум параллельным металлическим шинам могут катиться два ролика, соединенных прямым стержнем  $ab$  длину которого обозначим через  $\Delta l$  (рис. 193). Концы шин присоединены к полюсам батареи, так что они совместно с батареей и стержнем  $ab$  образуют замкнутый контур с током.

Пусть по стержню  $ab$  течет ток силой  $I$  в направлении, указанном стрелкой на рис. 193. Возбудим однородное магнитное поле напряженности  $H$ , направленное перпендикулярно к плоскости,

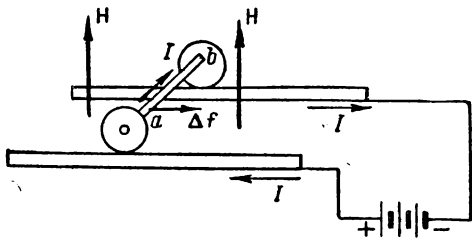


Рис. 193. Обнаружение силы  $\Delta f$ , действующей на проводник с током во внешнем магнитном поле  $H$ .



содержащей шины. Тогда на стержень  $ab$  начнет действовать сила, под влиянием которой он покатится. Эту силу  $\Delta f$  легко измерить, уравновесив ее с помощью пружины или каким-либо другим механическим способом. Опыт показывает, что сила  $\Delta f$  перпендикулярна к плоскости, содержащей  $H$  и  $I$ .

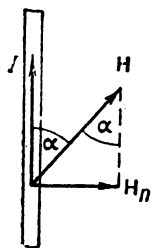


Рис. 194. Действие магнитного поля на ток определяется нормальной составляющей напряженности поля  $H$ .

Ампер установил, что величина силы  $\Delta f$  пропорциональна силе тока  $I$ , напряженности магнитного поля  $H$  и длине участка проводника  $\Delta l$ .

Кроме того, величина силы  $\Delta f$  зависит от направления  $H$ . Если  $H$  перпендикулярно к направлению тока  $I$ , то при прочих одинаковых условиях сила  $\Delta f$  имеет наибольшее значение. Если  $H$  параллельно направлению тока  $I$ , то  $\Delta f = 0$ . Это заставляет предположить, что сила  $\Delta f$  обуславливается лишь составляющей напряженности магнитного поля  $H$ , перпендикулярной к направлению силы тока  $I$ . Так как составляющая (см. рис. 194) равна  $H \sin \alpha$ , то окончательно получаем для закона Ампера выражение:

$$\Delta f \sim IH \sin \alpha \cdot \Delta l. \quad (1)$$

Чтобы перейти к знаку равенства, надо ввести коэффициент пропорциональности.

Как следует из опыта и как подтверждает расчет, приводимый ниже, коэффициент пропорциональности равен  $1/c^2$ , если  $I$  и  $H$  измерены в электростатических единицах, а  $\Delta f$  — в динах.

Поэтому мы напишем:

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} IH \sin \alpha \cdot \Delta l. \quad (1a)$$

Как мы указали, сила  $\Delta f$  направлена перпендикулярно к плоскости, содержащей направления  $I$  и  $H$ . Если напряженность магнитного поля  $H$  перпендикулярна к направлению тока  $I$ , то сила  $\Delta f$  направлена, как показано на рис. 195.

В общем случае для определения направления силы  $\Delta f$  существует несколько правил.

Во-первых, может быть использовано правило буравчика, которое в этом случае применяется следующим образом: будем вращать головку буравчика от направления силы тока  $I$  к направлению вектора  $H$  (рис. 196); при этом вращение надо совершать в направлении того угла между  $I$  и  $H$ , который меньше  $\pi$ . Тогда поступательное движение буравчика дает направление силы  $\Delta f$ .

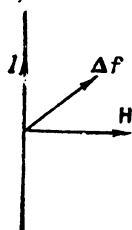


Рис. 195. Направление силы  $\Delta f$ , действующей на ток в магнитном поле.

Второе правило, которое мы дадим,—это так называемое *правило левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы перпендикулярная к  $\Delta l$  составляющая напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  входила в ладонь (рис. 197), а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль тока  $I$ , то отставленный большой палец даст направление силы  $\Delta \mathbf{f}$ .

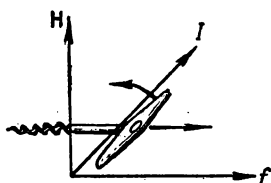


Рис. 196. Определение силы  $\Delta \mathbf{f}$  с помощью правила буравчика.

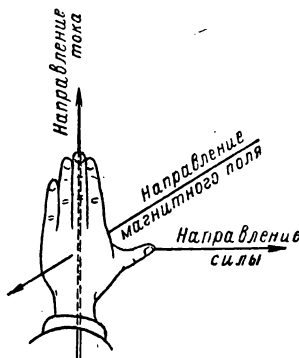


Рис. 197. Правило левой руки.

Сила  $\Delta \mathbf{f}$ , действующая на элемент провода, может быть выражена и по величине и по направлению, если воспользоваться векторным произведением

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{1}{c^2} I [\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{H}], \quad (16)$$

где элементу провода  $\Delta \mathbf{l}$  приписывается направление, совпадающее с направлением тока.

Исходя из формулы Ампера, прежде всего покажем, что момент сил  $M$ , действующих на плоскую прямоугольную рамку, нормаль к которой перпендикулярна к направлению поля  $\mathbf{H}$ , равен

$$M = \frac{1}{k} IHS. \quad (2)$$

Пусть нормаль к рамке  $ABDC$  (рис. 198) перпендикулярна к плоскости чертежа, а линии магнитной напряженности лежат в плоскости чертежа. Предположим для простоты, что стороны рамки  $AC$  и  $BD$  параллельны линиям магнитной напряженности, а следовательно, стороны  $AB$  и  $CD$  — перпендикулярны к ним. Магнитное поле считаем в пределах рамки однородным. Рамка обтекается током  $I$  в направлении, указанном стрелками на рис. 198. По правилу левой руки находим, что на сторону рамки  $AB$

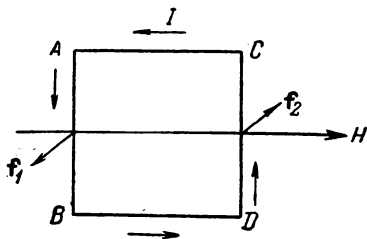


Рис. 198. Силы, действующие на рамку с током, расположенную параллельно линиям магнитной напряженности.

действует сила  $f_1$ , перпендикулярная к плоскости чертежа и направленная вперед. По численному значению эта сила по формуле (1а) равна

$$f_1 = \frac{1}{c^2} I H l_1, \quad (3)$$

где  $l_1$  — длина стороны рамки  $AB$ .

Равная ей, но направленная за плоскость чертежа, сила  $f_2$  действует на сторону рамки  $CD$ .

Эти силы образуют пару с моментом

$$M = f_1 l_2,$$

где  $l_2$  — длина стороны рамки  $BD$ .

Подставляя сюда вместо силы  $f_1$  ее значение по (3) и замечая, что произведение  $l_1 l_2$  равно площади рамки  $S$ , получим

$$M = \frac{1}{c^2} I H S.$$

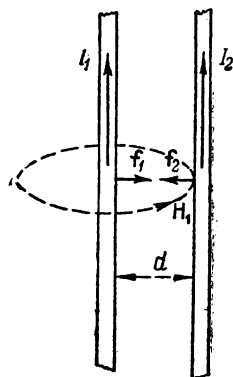
Эта формула совпадает с формулой (2) при  $k = c^2$ . Но в § 195 была введена именно такая связь между коэффициентами  $k$  и  $c$ .

Таким образом, приведенный расчет не только дает правильное выражение для момента сил, действующих на рамку с током в магнитном поле, но и указывает, что в законе Ампера при измерении  $I$  и  $H$  в CGSE-системе должен стоять коэффициент  $1/c^2$ .

Исходя из формулы Ампера, найдем выражение для силы взаимодействия двух бесконечно длинных прямых, параллельных друг другу проводов, по которым текут токи. Пусть расстояние между проводами равно  $d$  и силы токов равны  $I_1$  и  $I_2$ .

Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока  $I_1$  на участок длиной  $l$  второго тока.

Рис. 199. Взаимодействие двух прямолинейных бесконечных токов.



Для этого заметим, что линии вектора напряженности магнитного поля тока  $I_1$  представляют собой концентрические окружности, и если ток  $I_1$  течет вверх, то напряженность  $H_1$  в точках второго проводника направлена по правилу буравчика за чертеж (рис. 199); численно она равна

$$H_1 = \frac{2I_1}{d}. \quad (4)$$

Для определения направления силы  $f_2$ , действующей на участок  $l$  второго тока, воспользуемся правилом левой руки. Расположим левую

руку так, чтобы вектор напряженности  $H_1$  был направлен в ладонь, а четыре вытянутых пальца направим по току  $I_2$ ; тогда отставленный большой палец даст направление силы  $f_2$ , действующей на участок  $l$  тока  $I_2$ . Если ток  $I_2$  течет вверх, то эта сила, как видно, будет направлена налево, т. е. участок  $l$  тока  $I_2$  притягивается к току  $I_1$ . Так как  $H_1$  перпендикулярно к  $l$ , то величина силы притяжения  $f_2$ , по (1а), равна

$$f_2 = \frac{1}{c^2} I_2 H_1 l$$

или, подставив сюда вместо  $H_1$  его значение по (4),

$$f_2 = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l. \quad (5)$$

Точно такое же рассуждение покажет, что напряженность  $H_2$ , создаваемая током  $I_2$  в пределах участка длиной  $l$  первого тока, направлена на читателя, т. е. участок  $l$  тока  $I_1$  притягивается к току  $I_2$ . Величина силы притяжения будет

$$f_1 = \frac{1}{c^2} I_1 H_2 l = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l,$$

т. е. равная величине силы  $f_2$ , выражаемой формулой (5).

Таким образом, мы получаем, что два параллельных тока, текущих в одинаковом направлении, притягиваются друг к другу. На участок длиной  $l$  каждого из токов, по (5), действует сила, прямо пропорциональная произведению из сил токов и обратно пропорциональная расстоянию между ними. Если в формуле (5)  $I_1$  и  $I_2$  выражены в CGSE-единицах силы тока, а  $l$  и  $d$  — в сантиметрах, то сила  $f$  будет выражена в динах.

Совершенно аналогичное рассмотрение показывает, что два параллельных тока противоположных направлений отталкиваются с силой, численное значение которой определится также формулой (5).

Если токи текут по двум прямым проводам, направления которых пересекаются под некоторым углом  $\alpha$ , то между токами возникают силы, стремящиеся повернуть проводники так, чтобы они встали параллельно друг другу и чтобы токи текли в них в одну сторону (рис. 200).

Во всех приведенных в этом параграфе формулах предполагается, что электрические и магнитные величины измерены в электростатической системе единиц. Если напряженность магнитного поля и силу тока измерять в электромагнитной системе единиц, то коэффициент  $1/c^2$  в формулах (1а), (1б), (2), (3) и (5) пропадает.

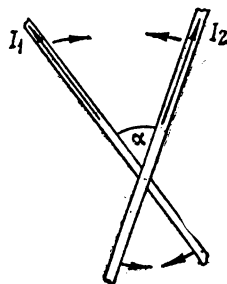


Рис. 200. Взаимодействие двух прямолинейных токов, текущих под углом  $\alpha$  друг к другу.

Например, формула для закона Ампера в CGSM-системе принимает вид:

$$\Delta f = IH \sin \alpha \cdot \Delta l, \quad (6)$$

сила взаимодействия параллельных токов будет выражаться формулой:

$$f_1 = f_2 = \frac{2I_1 I_2 l}{d}. \quad (5a)$$

В современной международной системе единиц (см. т. I) основная электрическая единица — единица силы тока *ампер* — устанавливается на основании формулы (5a). Эта единица определяется следующим образом: *ампер есть сила тока, который, протекая по двум параллельным бесконечно длинным проводам, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в пустоте, вызывает между ними силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютонов на каждый метр длины*. Таким образом, при измерении всех величин, входящих в формулу (5a) в международной системе единиц, она примет вид:

$$f \text{ (ньютонов)} = \frac{2 \cdot 10^{-7} I_1(a) \cdot I_2(a) \cdot l(m)}{d(m)}.$$

Так как 1 *ньютон* =  $10^5$  *дин*, то получаем следующее соотношение между ампером и CGSM-единицами силы тока:

$$1 \text{ а} = 0,1 \text{ CGSM-ед. силы тока.}$$

Отсюда видно, что по определению ампер точно равен одной десятой CGSM-единицы силы тока.

Соотношение между ампером и CGSE-единицей силы тока получим на том основании, что по соотношению (9) § 195:

$$1 \text{ CGSM-ед. силы тока} = c \cdot \text{CGSE-ед. силы тока.}$$

Так как  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$  *см/сек*, то:

$$1 \text{ а} = 2,998 \cdot 10^9 \text{ CGSM-ед. силы тока} \cong 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. силы тока.}$$

Все остальные электрические и магнитные единицы в международной системе единиц устанавливаются через ампер. Так, за единицу количества электричества принимается кулон, равный количеству электричества, переносимому за 1 *сек* через поперечное сечение провода, по которому течет ток силой в 1 *а* (см. § 153). Очевидно, между кулоном и CGSM- и CGSE-единицами количества электричества имеют место следующие соотношения:

$$1 \text{ кулон} = 0,1 \text{ CGSM-ед. кол-ва эл-ва,}$$

$$1 \text{ кулон} = 2,998 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. кол-ва эл-ва} \cong \\ \cong 3 \cdot 10^9 \text{ CGSE-ед. кол-ва эл-ва.}$$

За единицу напряженности магнитного поля в международной системе единиц принимается напряженность магнитного поля на расстоя-

нии  $\frac{1}{2\pi}$  м от бесконечно длинного прямого провода, по которому течет ток в 1 а. Эта единица называется „ампер на метр“ (сокращенно а/м). Легко видеть, что  $1 \text{ а/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э}$ .

Далее во всех случаях, кроме специально оговоренных, мы будем измерять магнитные величины в CGSM-единицах.

**§ 197. Замкнутый контур с током в магнитном поле.** В § 196 мы вывели, исходя из закона Ампера, выражение для момента сил, действующих в магнитном поле на плоскую прямоугольную рамку.

Рассмотрим теперь случай действия магнитного поля на плоские контуры с током произвольной формы. При этом провод, образующий контур, будем считать настолько жестким, что под влиянием магнитных сил, приложенных ко всем его элементам, он ведет себя как твердое тело.

1. Замкнутый контур с током в однородном магнитном поле. Предположим сперва, что плоский контур произвольной формы, по которому течет ток силы  $I$ , помещен в однородное магнитное поле напряженности  $H$ , направленное перпендикулярно плоскости контура (рис. 201). Возьмем произвольный элемент  $\Delta l$  контура и определим действующую на него силу  $\Delta f$ . Так как  $H$  перпендикулярно  $\Delta l$ , то в CGSM-системе по формуле (6) § 196:

$$\Delta f = IH \Delta l.$$

Направление силы  $\Delta f$  определим по правилу левой руки: если поле направлено перпендикулярно к плоскости рисунка вперед и ток в контуре течет по часовой стрелке, то сила будет направлена к центру контура (рис. 201). Так как ввиду однородности поля силы, приложенные ко всем элементам контура, численно равны, то контур окажется в состоянии равномерного сжатия. Если изменить направление магнитного поля или направление силы тока на обратное, то направление сил  $\Delta f$  изменится также на обратное — контур окажется в состоянии равномерного растяжения. При одновременном изменении направлений тока и магнитного поля силы не изменят своего направления.

Теперь расположим контур так, чтобы магнитные линии были параллельны плоскости контура (рис. 202). Определим, какие силы  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2$  действуют на элементы  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  контура, заключенные между двумя параллельными линиями напряженности. По правилу левой руки при выбранных на рисунке направлениях тока и напряженности магнитного поля на элемент  $\Delta l_1$  действует сила, перпендикулярная к плоскости контура и направленная на читателя; на элемент  $\Delta l_2$

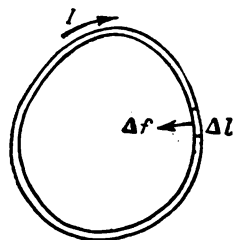


Рис. 201. Сила, действующая на элемент  $\Delta l$  контура с током, расположенного перпендикулярно направлению напряженности магнитного поля.

действует сила, перпендикулярная к плоскости контура, направленная от читателя. Величина силы  $\Delta f_1$  равна

$$\Delta f_1 = I \Delta l_1 \sin \alpha H;$$

замечая, что  $\Delta l_1 \sin \alpha$  равно расстоянию  $\Delta h$  между прямыми, ограничивающими элементы  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , перепишем выражение для силы  $\Delta f_1$ :

$$\Delta f_1 = IH \Delta h.$$

Так же получим, что  $\Delta f_2 = IH \Delta h$ , откуда следует, что силы  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2$  численно равны друг другу. Таким образом, на элементы  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  действует пара сил, момент  $\Delta M$  которой равен  $\Delta M = \Delta f x = IH \Delta h x$ , где  $x$  — среднее расстояние между элементами  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ . Произведение  $\Delta h x$  дает площадь  $\Delta S$  заштрихованного на рис. 202 участка, откуда выражение для момента  $\Delta M$  можно написать в виде:

$$\Delta M = IH \Delta S.$$

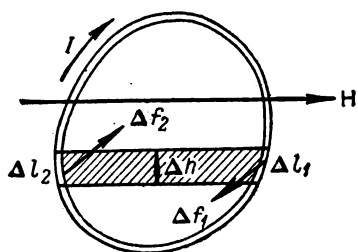


Рис. 202. К подсчету момента сил, действующих на контур с током, расположенный параллельно напряженности магнитного поля.

Весь контур может быть разбит на пары элементов, аналогичных элементам  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ . Вследствие этого ко всему контуру будет приложена пара сил, момент которой равен сумме моментов

пар сил, приложенных к элементам. Этот момент, очевидно, равен

$$M = \sum \Delta M = IH \sum \Delta S,$$

откуда

$$M = IHS, \quad (1)$$

где  $S$  — площадь, охватываемая всем контуром.

Обращая внимание на направление пары сил, мы видим, что плоскость контура под действием пары стремится стать перпендикулярно линиям магнитной напряженности, при этом контур стремится установиться так, чтобы, глядя в направлении магнитного поля, мы видели ток в контуре идущим по часовой стрелке. Этот результат можно сформулировать иначе: контур с током стремится установиться в магнитном поле так, чтобы направление напряженности магнитного поля, создаваемого током в контуре на его оси, было параллельно напряженности внешнего магнитного поля.

В § 191 мы назвали величину  $p_m$ , пропорциональную произведению  $IS$ , *магнитным моментом рамки*. В CGSM-системе считают,

что  $IS = p_m$ ,<sup>1</sup> тогда равенство (1) принимает вид:

$$M = H \cdot p_m. \quad (1a)$$

Магнитный момент контура  $p_m$  представляет собой величину векторную. За направление  $p_m$  принимается направление, совпадающее с направлением положительной нормали к контуру с током (см. рис. 177).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда плоскость контура образует произвольный угол с направлением магнитного поля. Условимся, как и раньше, положение контура характеризовать положением нормали  $N$  к плоскости контура; направление же нормали определим по-прежнему правилом буравчика: нормаль направлена в сторону поступательного движения буравчика, получающегося при вращении его рукоятки по направлению тока в контуре. По сказанному, направление нормали к контуру совпадает с направлением вектора магнитного момента контура  $p_m$ .

Пусть нормаль образует угол  $\alpha$  с направлением магнитного поля (рис. 203). Разложим вектор магнитной напряженности  $H$  на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых  $H_{\perp}$  перпендикулярна плоскости контура, другая  $H_{\parallel}$  лежит в плоскости контура, тогда

$$H_{\perp} = H \cos \alpha, \quad H_{\parallel} = H \sin \alpha.$$

По сказанному выше, вращательный момент создает только та часть напряженности, которая параллельна плоскости контура; нормальная составляющая вызывает только растяжение или сжатие контура. Следовательно, момент  $M$  получим, если в формулу (1) подставим вместо напряженности магнитного поля  $H$  ее составляющую  $H_{\parallel}$ , откуда

$$M = IHS \sin \alpha. \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что вращательный момент  $M$  имеет наибольшее значение при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , т. е. когда плоскость контура параллельна линиям напряженности; он равен нулю при  $\alpha = 0$ , т. е. при условии, что плоскость контура перпендикулярна напряженности.

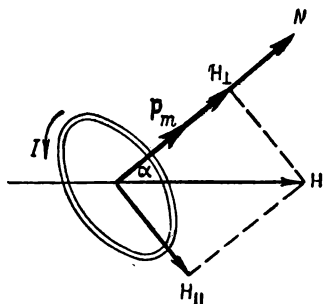


Рис. 203. Разложение напряженности поля  $H$  на две составляющие  $H_{\perp}$  и  $H_{\parallel}$ .

<sup>1</sup> В CGSE-системе принято считать  $p_m = \frac{1}{c^2} IS$ , тогда формула (1a) сохраняет неизменным свой вид в обеих системах (CGSM и CGSE).



Вводя вместо  $IS$  магнитный момент  $p_m$ , перепишем формулу (2):

$$M = Hp_m \sin \alpha. \quad (2a)$$

Если взять совокупность контуров в виде соленоида, то для момента действующей на него пары получим это же выражение, в котором магнитный момент соленоида надо положить равным  $p_m = NIS$ , где  $N$  — число витков соленоида.

Воспользовавшись понятием о векторе  $\mathbf{M}$  момента пары сил (§ 35, т. I), равенство (2a) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{H}].$$

2. Замкнутый контур с током в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим для простоты контур в виде круговой рамки в неоднородном магнитном поле, линии напряженности которого расходятся радиально. На рис. 204 представлено сечение этой

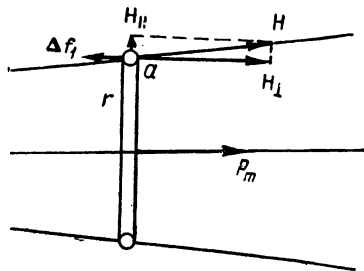


Рис. 204. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

рамки плоскостью рисунка. Пусть магнитный момент рамки  $\mathbf{p}_m$  совпадает по направлению с направлением напряженности поля  $\mathbf{H}$  в центре рамки. Условимся положительными считать направления слева направо. Рассмотрим силу  $\Delta f$ , действующую со стороны магнитного поля на элемент рамки  $\Delta l$ . Выберем элемент рамки  $\Delta l$  вблизи точки  $a$ ; он перпендикулярен к плоскости чертежа. Разложим напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  на две составляющие:  $H_\perp$  — перпендикулярную к плоскости рамки и  $H_\parallel$  — параллельную плоскости рамки. Составляющая  $H_\perp$  вызовет силу  $\Delta f_1$ , направленную от центра рамки. Совокупность таких сил, приложенных ко всем элементам рамки, будет лишь деформировать рамку, но не сообщит ей никакого вращательного или поступательного движения. Поэтому эти силы в дальнейшем нас не будут интересовать.

Составляющая поля  $H_\parallel$ , по правилу левой руки, поведет к возникновению силы  $\Delta f_1$ , направленной перпендикулярно к плоскости рамки. Эта сила равна

$$\Delta f_1 = -IH_\parallel \Delta l, \quad (3)$$

где  $I$  — сила тока, текущего по рамке. Знак минус означает, что сила направлена налево. Обозначим через  $\beta$  угол, который составляет вблизи точки  $a$  напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  с нормалью к плоскости рамки. Тогда  $H_\parallel = H \sin \beta$ . Считая угол  $\beta$  малым, приближенно положим  $H_\parallel = H\beta$ . Подставив это выражение  $H_\parallel$  в (3), получим

$$\Delta f_1 = -IH\beta \cdot \Delta l$$

Такие же силы  $\Delta f_1$  будут приложены ко всем остальным элементам рамки. Так как они все *направлены одинаково*, то результирующая сила  $f$ , действующая на всю рамку, выразится алгебраической суммой  $\Delta f_1$ :

$$f = \sum \Delta f_1 = -IH\beta \cdot \sum \Delta l. \quad (4)$$

Сумма всех элементов длины рамки, очевидно, равна длине контура всей рамки, т. е.

$$\sum \Delta l = 2\pi r,$$

где  $r$  — радиус рамки.

Подставляя это значение  $\sum \Delta l$  в (4), получим для силы  $f$ , действующей на рамку, выражение:

$$f = -2\pi r H \beta. \quad (5)$$

Таким образом, в неоднородном магнитном поле на рамку действует сила, стремящаяся ее переместить.

Преобразуем выражение (5), исключив из него угол  $\beta$ . Для этого рассмотрим число линий напряженности  $N$ , пересекающих плоскость рамки (рис. 205). Напряженность магнитного поля  $H$  в месте, где находится рамка, связана с  $N$  приближенным соотношением

$$H = \frac{N}{S}, \quad (6)$$

где  $S = \pi r^2$  есть площадь рамки, и значение  $\cos \beta$  в выражении потока взято приближенно равным единице.

Все эти линии напряженности пересекут площадь  $S'$ , отстоящую на  $\Delta x$  вправо от рамки. Напряженность поля  $H'$  в точках, отстоящих на отрезок  $\Delta x$  правее рамки, равна

$$H' = \frac{N}{S'},$$

а изменение напряженности поля  $\Delta H$  на отрезке  $\Delta x$

$$\Delta H = H' - H = \frac{N}{S'} - \frac{N}{S}.$$

Если  $\Delta x$  мало, то  $S'$  значительно отличается от  $S$ , и тогда приближенно

$$\Delta H = \frac{N(S - S')}{S^2}. \quad (7)$$

Продолжим мысленно линии напряженности налево до места их пересечения в точке  $O$ . Пусть точка  $O$  отстоит от рамки на отрезок  $x$ .

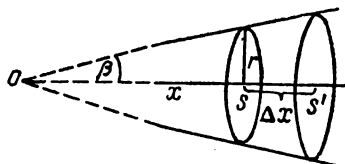


Рис. 205. К подсчету силы, действующей на контур с током в неоднородном магнитном поле.

Тогда, считая угол  $\beta$  малым, имеем  $r = x\beta$ , откуда

$$S = \pi x^2 \beta^2, \quad S' = \pi (x + \Delta x)^2 \beta^2 \cong S \left( 1 + 2 \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Подставив эти значения  $S$  и  $S'$  в (7), найдем

$$\Delta H = -2 \frac{N}{S} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

или, замечая, что, по (6),  $\frac{N}{S} = H$  и  $x = \frac{r}{\beta}$ :

$$\Delta H = -2H \frac{\Delta x}{r} \beta, \quad \text{откуда} \quad \beta = -\frac{1}{2} \frac{r}{H} \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right).$$

Подставляя это значение  $\beta$  в (5), получим для силы  $f$ , действующей на рамку:

$$f = \pi r^2 I \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right).$$

Произведение  $\pi r^2 I = SI$  представляет собой магнитный момент рамки  $p_m$ , откуда

$$f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right). \quad (8)$$

Величина  $\Delta H / \Delta x$  характеризует неоднородность магнитного поля — она показывает, как быстро меняется напряженность поля  $H$  от точки к точке: эта величина представляет градиент напряженности магнитного поля. Таким образом, по (8), сила  $f$ , действующая на рамку, пропорциональна магнитному моменту рамки  $p_m$  и градиенту напряженности магнитного поля  $(\Delta H / \Delta x)$ . Для однородного поля  $(\Delta H / \Delta x) = 0$ , и на рамку не действует никакая суммарная сила.

В рассматриваемом случае (магнитный момент  $p_m$  направлен по полю) сила  $f$  будет перемещать рамку туда, где поле сильнее. Если бы магнитный момент  $p_m$  был направлен против напряженности магнитного поля  $H$ , то рамка перемещалась бы в сторону, где поле слабее. Однако это последнее положение рамки неустойчиво.

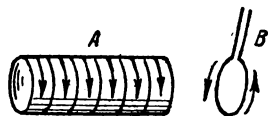


Рис. 206. Взаимодействие рамки с током и соленоидом.

В общем случае произвольно ориентированной рамки в неоднородном магнитном поле на рамку действует и сила  $f$  и вращающая пара с моментом  $M$ ; поэтому рамка, способная свободно поворачиваться и перемещаться в неоднородном магнитном поле, повернется так, чтобы ее магнитный момент  $p_m$  расположился вдоль линии напряженности, а затем втянется в область, где поле сильнее. Это обстоятельство может быть легко продемонстрировано. Вблизи конца длинного, неподвижно укрепленного соленоидов  $A$  (рис. 206) расположим рамку  $B$ , подвешенную на двух длинных и тонких

проводах. Как бы рамка ни была первоначально ориентирована, она всегда сперва повернется так, чтобы ток в ней протекал в том же направлении, что и в соленоиде, а затем притянется к соленоиду.

Выведенную нами формулу (8) легко обобщить на случай, когда момент рамки  $p_m$  составляет угол  $\alpha$  с направлением градиента напряженности поля  $\mathbf{H}$ , тогда

$$f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha. \quad (8a)$$

Таким образом, рамка с током ведет себя во внешнем магнитном поле аналогично тому, как электрический диполь ведет себя во внешнем электрическом поле: в однородном поле она испытывает лишь вращающий момент, в неоднородном, кроме того, — силу, пропорциональную градиенту поля.

**Пример.** Внутри соленоида, имеющего 10 витков на 1 см, по которому течет ток в 10 а, установлена рамка из 5 витков провода, охватывающего площадь  $S = 10 \text{ см}^2$ . С помощью пружины  $a$  (рис. 207) рамка удерживается, при отсутствии в ней тока, параллельно оси соленоида. На какой угол  $\varphi$  к оси соленоида она повернется при пропускании через нее тока в 1 а, если для закручивания пружины на угол  $\varphi$  требуется пара сил  $M = k\varphi$ , где  $k = 1 \text{ Г см/рад}$ ?

**Решение.** Напряженность магнитного поля  $H$  внутри соленоида, по формуле (4) § 195:

$$H = 4\pi In, \quad (9)$$

где  $n$  — число витков в соленоиде на единицу длины и  $I$  — сила тока в нем.

Рассматривая рамку как наложение контуров, получим, по формуле (2), что действующий на нее момент сил равен

$$M = n_1 I_1 S_1 H \sin \alpha,$$

где  $n_1$  — число витков в рамке,  $I_1$  — сила тока в ней,  $S_1$  — ее площадь. Подставляя сюда вместо  $H$  его значение по (9), получим

$$M = 4\pi n n_1 I_1 S_1 \sin \alpha.$$

Этот момент должен уравновешиваться крутящим моментом пружины  $k\varphi$ , откуда

$$4\pi n n_1 I_1 S_1 \sin \alpha = k\varphi.$$

Замечая, что  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  и обозначая  $4\pi n n_1 I_1 S$  через  $b$ , получим

$$b \cos \varphi = k\varphi, \quad \text{откуда} \quad \frac{\cos \varphi}{\varphi} = \frac{k}{b}.$$

Полагая приближенно  $\cos \varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ , получим относительно  $\varphi$  квадратное уравнение:

$$\varphi^2 + 2\frac{k}{b}\varphi - 2 = 0,$$

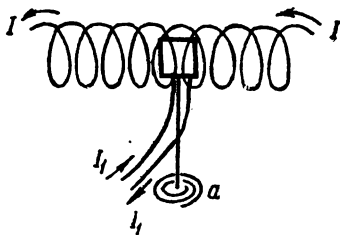


Рис. 207. Рамка с током внутри соленоида.

откуда

$$\varphi = -\frac{k}{b} \pm \sqrt{\frac{k^2}{b^2} + 2}.$$

Выражая  $I$  и  $I_1$  в CGSM-единицах и  $k$  в  $\text{дин} \cdot \text{см}/\text{рад}$ , получим

$$\frac{k}{b} = \frac{k}{4\pi n n_1 I I_1 S_1} = \frac{980}{4 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 10} \cong 1,56,$$

откуда

$$\varphi = -1,56 \pm 2,11.$$

Из двух решений следует взять то, которое дает  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , откуда  $\varphi = 0,55 \text{ рад}$ , или  $\varphi \cong 31^\circ$ .

**§ 198. Циркуляция вектора магнитной напряженности.** Магнитное поле может быть охарактеризовано некоторым общим соотношением, имеющим большое прикладное значение при расчете магнитных полей.

Напомним, что в § 129 нами было рассмотрено выражение циркуляции вектора электрической напряженности, а при разборе вопроса об электродвижущей силе мы вводили циркуляцию сторонних сил.

Аналогично с теми рассуждениями мы введем выражение для циркуляции вектора магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ .

Возьмем произвольный замкнутый контур  $L$ . Обозначим через  $H_l$  проекцию вектора  $\mathbf{H}$  на направление элемента  $\Delta l$  контура. Составим сумму выражений  $H_l \Delta l$  для всех элементов замкнутого контура:

$$\sum H_l \Delta l$$

и назовем эту сумму циркуляцией вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $L$ .

Можно показать, что в силу закона Био — Савара — Лапласа циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению  $4\pi$  на полную силу тока, пронизывающего контур, по которому берется циркуляция:

$$\sum H_l \Delta l = 4\pi I. \quad (1)$$

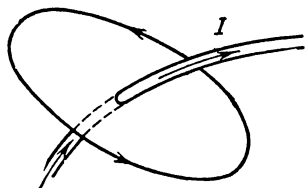


Рис. 208. Направление обхода тока при положительной циркуляции.

Знак циркуляции определяется направлением обхода контура: если направление обхода связано с направлением обходимого тока правилом буравчика, то циркуляция берется со знаком плюс, и, наоборот, циркуляция берется со знаком минус, если направление обхода контура при подсчете циркуляции противоположно тому, которое считается положительным по правилу буравчика. На рис. 208 указано направление обхода, дающее положительную циркуляцию.

Мы приведем доказательство соотношения (1) только для поля тока, текущего по бесконечно длинному прямому проводу.

Возьмем произвольный контур  $L$  (рис. 209), охватывающий бесконечно длинный прямой провод, по которому течет ток силы  $I$ . Покажем сперва, что циркуляция по контуру  $L$  равна циркуляции по контуру  $L_1$ , являющемуся проекцией контура  $L$  на плоскость, перпендикулярную току. Действительно, элемент  $\Delta l$  можно представить как геометрическую сумму элемента  $\Delta_1 l$ , лежащего в плоскости, перпендикулярной току, и элемента  $\Delta_2 l$ , параллельного току:

$$\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l.$$

Напряженность магнитного поля прямого тока в каждой точке контура равна

$$H = \frac{2I}{r}$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной току, будучи перпендикулярной к  $r$ , где  $r$  — расстояние точки  $A$  до тока. По теореме о проекции равнодействующей имеем:

$$H_l \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) + H \Delta_2 l \cos(H, \Delta_2 l).$$

Второй член этой суммы равен нулю, так как  $H$  перпендикулярно к  $\Delta_2 l$ . Таким образом, получаем

$$H_l \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) = H_{l_1} \Delta l_1.$$

Но  $\Delta l_1$  есть проекция элемента  $\Delta l$  контура  $L$  на плоскость, перпендикулярную току, т. е.  $\Delta l_1$  есть элемент контура  $L_1$ , представляющего проекцию контура  $L$  на плоскость, перпендикулярную току. Отсюда получаем:

$$\sum H_l \Delta l = \sum H_{l_1} \Delta l_1.$$

(по контуру  $L$ )      (по контуру  $L_1$ )

Следовательно, без ограничения общности, можно при доказательстве соотношения (1) полагать, что контур расположен в плоскости, перпендикулярной току.

На рис. 210 изображен контур в плоскости, перпендикулярной току. Из рисунка видно:

$$H_l \Delta l = H \Delta l \cos(H, \Delta l) = \frac{2I}{r} \Delta l \cos \alpha.$$

Рис. 210. К расчету циркуляции  $H$  по замкнутому контуру, охватывающему ток.

Но  $\Delta l \cos \alpha$  есть проекция  $\Delta l$  на перпендикуляр к  $r$ , где  $r$  есть расстояние от рассматриваемой точки до тока. Ввиду малости  $\Delta l$  можно положить

$$\Delta l \cos \alpha = r \Delta \varphi.$$

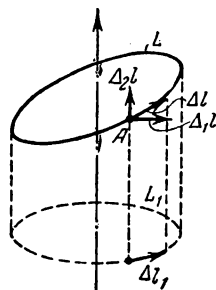


Рис. 209. К расчету циркуляции вектора магнитной напряженности  $H$ .

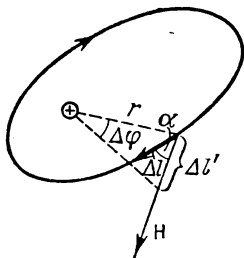


Рис. 210. К расчету циркуляции  $H$  по замкнутому контуру, охватывающему ток.

Для циркуляции получим

$$\sum H_l \Delta l = 2I \sum \Delta \varphi = 4\pi I.$$

Таким образом, мы получаем результат: циркуляция по произвольному контуру вектора магнитной напряженности равна произведению  $4\pi$  на силу тока, охватываемого контуром. Если ток не охватывается контуром (рис. 211), то, как легко видеть, контур можно разбить на парные элементы  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , для которых элементы циркуляции равны по величине и противоположны по знаку:

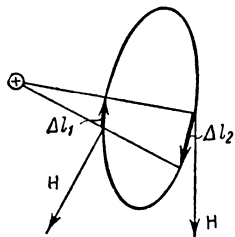


Рис. 211. К расчету циркуляции  $H$  по замкнутому контуру, не охватывающему ток.

$$H_l \Delta l_1 = -\frac{2I}{r} r \Delta \varphi = -2I \Delta \varphi,$$

$$H_l \Delta l_2 = \frac{2I}{r} r \Delta \varphi = 2I \Delta \varphi.$$

Таким образом, все члены суммы в выражении циркуляции попарно компенсируются, и мы получаем результат: циркуляция вектора  $H$  по контуру, не охватывающему ток, равна нулю:

$$\sum H_l \Delta l = 0.$$

Полученные результаты можно обобщить на поле произвольного тока, однако такое обобщение требует применения более сложных математических расчетов.

В терминах векторного анализа теорема о циркуляции напряженности магнитного поля принимает следующую форму:

$$\oint H_l dl = 4\pi I,$$

где интеграл берется по контуру, охватывающему ток  $I$ .

**§ 199. Применение выражения для циркуляции вектора магнитной напряженности.** Полученный в предыдущем параграфе результат представляет интерес по тем следствиям, которые из него вытекают. Так, во многих частных случаях он позволяет сравнительно просто найти напряженность магнитного поля. Перейдем к рассмотрению некоторых примеров.

1. Напряженность магнитного поля на оси тороида. Рассмотрим систему одинаковых круговых токов, одинаково направленных, наизнанную на общую торическую поверхность (рис. 182). Обозначим силу тока в витках через  $I$ , длину оси тороида — через  $l$ , общее число витков — через  $N$ . Предположим, что длина  $l$  велика по сравнению с радиусами окружностей токов. Соображения симметрии

позволяют заключить, что напряженность магнитного поля  $H$  на оси тороида постоянна и направлена по оси в такую сторону, глядя вдоль которой мы видим токи тороида идущими по часовой стрелке. Для расчета численного значения напряженности  $H$  составим циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$  по контуру, представляющему среднюю линию тороида:

$$\sum H_l \Delta l = \sum H \Delta l = Hl = 4\pi I \quad (H_l = H). \quad (1)$$

Здесь под  $I$  следует понимать полный ток, охватываемый контуром. Очевидно, что этот ток равен сумме токов, протекающих по всем виткам тороида:

$$I = N\mathcal{I},$$

подставляя в (1), получим

$$Hl = 4\pi N\mathcal{I},$$

откуда, сокращая на  $l$ , находим значение  $H$ :

$$H = 4\pi \frac{N}{l} \mathcal{I} = 4\pi n \mathcal{I}, \quad (2)$$

где  $n$  означает число витков на единицу длины тороида.

Таким образом, напряженность магнитного поля  $H$  на оси тороида пропорциональна числу витков на единицу длины тороида и силе тока  $\mathcal{I}$  в витке. Если радиус оси тороида бесконечно большой, то его можно считать эквивалентным бесконечно длинному соленоиду. Следовательно, формула (2) выражает вместе с тем напряженность магнитного поля на оси бесконечно длинного соленоида (§ 194).

2. Магнитное поле, создаваемое током, текущим по бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводнику. Предположим, что по цилиндрическому проводнику радиуса  $R$  течет ток силы  $I$ , равномерно распределенный по сечению проводника. Определим напряженность магнитного поля  $H$ , создаваемого током в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси. Предположим сперва, что точка  $A$ , в которой требуется вычислить напряженность, находится вне проводника, т. е.  $r > R$ . Соображения симметрии позволяют заключить, что напряженность  $H$  для всех точек, отстоящих на одинаковом расстоянии  $r$  от оси, будет одинакова. Так как цилиндрический ток можно представить как результат сложения элементарных прямолинейных токов, то вектор напряженности  $\mathbf{H}$  должен лежать в плоскости, перпендикулярной к оси проводника, и направлен перпендикулярно  $r$ .

Составим циркуляцию вектора  $\mathbf{H}$  по окружности с центром на оси цилиндра, проходящей через точку, в которой ищется



напряженность (см. рис. 212). Так как напряженность  $H$ , будучи перпендикулярной  $r$ , параллельна элементам окружности, то выражение циркуляции принимает вид:

$$\sum H_i \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I \quad (H_i = H). \quad (3)$$

Здесь, как и выше,  $I$  означает полный ток, охватываемый контуром, по которому взята циркуляция. Для точки, лежащей вне тока, под  $I$  в формуле (3) надо подразумевать силу тока во всем цилиндрическом проводнике. Учитывая это, получаем

$$H \cdot 2\pi r = 4\pi I,$$

откуда для  $H$  находим выражение:

$$H = \frac{2I}{r}.$$

Таким образом, напряженность, создаваемая цилиндрическим током во внешних точках, совпадает с напряженностью магнитного поля прямого тока равной силы, текущего по оси рассматриваемого цилиндра.

Для точки, лежащей внутри цилиндра, контур, по которому берется циркуляция, охватывает лишь часть тока. Обозначая, как и выше, через  $r$

Рис. 212. К определению напряженности магнитного поля тока, текущего по цилиндрическому проводнику.

расстояние рассматриваемой точки до оси, мы увидим, что ток, охватываемый контуром в этом случае, равен

$$I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (3), найдем

$$H = \frac{2Ir}{R^2}.$$

Отсюда видно, что напряженность магнитного поля возрастает по мере удаления от оси тока; на оси цилиндра магнитное поле равно нулю.

На рис. 213 представлена зависимость напряженности магнитного поля от расстояния до оси цилиндра.

Легко показать, что если ток идет лишь в узком слое у поверхности проводника, то магнитное поле вне проводника такое же, как если бы ток той же силы шел равномерно по всему сечению:

проводника. Но внутри проводника в этом случае напряженность магнитного поля равна нулю. Действительно, циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  внутри полости проводящего цилиндра, как и в предыдущем рассмотрении, равна

$$\sum H_i \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I.$$

Однако в этом случае контур циркуляции не охватывает тока, так что правая часть равенства равна нулю. Отсюда непосредственно для внутренних точек получим

$$H = 0.$$

Зависимость  $H$  от  $r$  в случае тока, текущего по поверхности цилиндрического проводника, изображена на рис. 213б.

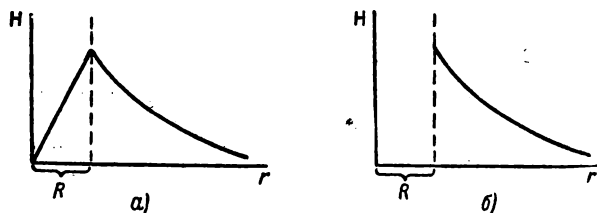


Рис. 213. Зависимость напряженности магнитного поля  $H$  от расстояния до оси цилиндра:  $a$  — для тока, текущего равномерно по сечению проводника;  $б$  — для тока, текущего по поверхности проводника.

**§ 200. Магнетики.** До сих пор мы рассматривали магнитное поле в пустоте, т. е. в пространстве, в котором нет в заметных количествах атомов, электронов или других элементарных частиц вещества. Рассмотрим теперь влияние на магнитное поле веществ, причем вещество, способное влиять на магнитное поле, назовем *магнетиком*.

Вспомним прежде всего, что мы говорили о влиянии диэлектриков на электростатическое поле. Под влиянием электростатического поля диэлектрик приходит в особое состояние, которое мы называли поляризацией. В результате поляризации на границах диэлектрика и в областях, где он неоднороден, возникают электрические заряды («связанные» заряды) с соответствующими поверхностями и объемными плотностями  $\sigma'$  и  $\rho'$ . Эти заряды создают свое электростатическое поле, которое складывается с первоначальным электростатическим полем (полем «свободных» зарядов).

Если напряженность первоначального электростатического поля равна  $E_0$ , а поля, возникшего в результате поляризации диэлектрика,

равна  $E'$ , то суммарная напряженность поля  $E$  равна их векторной сумме:

$$E = E_0 + E'.$$

Точно так же и всякий магнетик, находящийся в магнитном поле токов, текущих по проводам, приходит в особое состояние, — как говорят, он *намагничивается*. В состоянии намагничения магнетик дает добавочную напряженность магнитного поля  $H'$ , которая складывается с напряженностью  $H_0$  магнитного поля, вызванного текущими по проводам токами. Векторную сумму обеих этих напряженностей  $H_0 + H'$  по аналогии с теми названиями, которые введены для обозначения электрического поля в диэлектриках, следовало бы назвать напряженностью магнитного поля в магнетике. Однако, по причинам исторического характера, вектор

$$B = H_0 + H' \quad (1)$$

получил название *вектора магнитной индукции*. Таким образом, *вектор магнитной индукции  $B$  представляет собой напряженность полного магнитного поля, создаваемого как макроскопическими (внешними по отношению к среде), так и микроскопическими (созданными молекулами среды) токами*.

Опыт показывает, что в однородных магнетиках, целиком заполняющих пространство, где поле отлично от нуля, добавочная напряженность магнитного поля  $H'$  может быть направлена как в ту же сторону, что и напряженность первоначального поля  $H_0$ , так и в обратную. Вещества, для которых  $H'$  направлено в ту же сторону, что и  $H_0$ , называются *парамагнетиками*, вещества, для которых  $H'$  направлено обратно  $H_0$ , называются *диамагнетиками*. Напомним, что в однородных диэлектриках, целиком заполняющих все пространство, где поле отлично от нуля, напряженность добавочного поля  $E'$  направлена всегда в сторону, обратную напряженности поля свободных зарядов. Для всех диамагнитных тел и большинства парамагнитных напряженность поля  $H'$  весьма мала по сравнению с  $H_0$ . Существует, однако, группа тел, для которых  $H'$  может быть велико по сравнению с  $H_0$ . Кроме того, такие тела отличаются еще рядом других особенностей; они выделяются в особую группу *ферромагнитных* тел (к их числу принадлежит железо). Их свойства мы разберем ниже, пока же ограничимся рассмотрением обычных парамагнитных и диамагнитных тел.

По гипотезе, впервые высказанной Ампером, в молекулах парамагнитных веществ имеются круговые токи; эти токи принято называть *молекулярными токами*. При отсутствии внешнего магнитного поля оси этих токов расположены беспорядочно, и создаваемое ими магнитное поле в среднем равно нулю. Под влиянием внешнего магнитного поля эти круговые токи ориентируются, создаваемое ими магнитное поле в среднем дает отличную от нуля напряженность  $H'$ , которая

прибавляется к первоначальной напряженности магнитного поля  $H_0$ . Таким образом, объясняется увеличение суммарной напряженности магнитного поля в парамагнитном веществе. Намагничение парамагнетика сводится к определенной ориентации его молекулярных токов.

В настоящее время можно утверждать, что магнитные свойства магнетиков обусловлены не только молекулярными токами, но и магнитными свойствами элементарных частиц, входящих в состав атомов (электронов и ядер). Как будет разъяснено ниже, элементарные частицы обладают магнитным моментом, не зависящим от состояния их движения. Этот магнитный момент может быть обнаружен по действию магнитного поля на частицы (ср. § 199), однако модельного представления, объясняющего наличие магнитного момента элементарных частиц каким-либо движением зарядов, нет. Надо иметь в виду, что и ряд других свойств элементарных частиц не имеет объяснений, основанных на представлениях классической механики (см. т. III).

Основные свойства магнетиков можно качественно пояснить, основываясь на амперовом представлении о молекулярных токах.

В молекулах диамагнитных веществ отсутствуют постоянные круговые токи (или в каждой молекуле имеется несколько круговых токов, магнитные моменты которых компенсируют друг друга). Круговые токи в них возникают (индуцируются) лишь при возбуждении внешним магнитным полем. В гл. XVIII мы увидим, что направление этих индуцированных токов таково, что создаваемое ими магнитное поле направлено против внешнего магнитного поля. Этим объясняется уменьшение суммарной напряженности магнитного поля в диамагнитной среде.

Индукцированные токи обратных направлений возникают и в молекулах, в которых первоначально уже существовали круговые токи. Однако, если эти первоначальные токи достаточно сильны, то индуцированный ток лишь несколько ослабляет их. Таким образом, диамагнитный эффект всегда существует, но в парамагнетиках его превышает эффект, обусловленный ориентацией первоначальных токов. С электронной точки зрения появление в молекулах индукционных токов обратного направления объясняется возникновением во внешнем магнитном поле так называемой ларморовской прецессии (см. § 214).

В электростатике (§ 143) мы указывали на трудности, возникающие при попытках определить напряженность поля в диэлектрике  $E = E_0 + E'$  по силе, действующей на макроскопическое заряженное тело. Мы видели, что кроме сил, обусловленных напряженностью поля в месте расположения заряда (эта напряженность не совпадает с  $E$ ), на заряженное тело, погруженное в диэлектрик, действуют еще силы, вызванные механическими воздействиями со стороны поляризованного диэлектрика.

Совершенно аналогичные трудности возникают и при попытках определить вектор магнитной индукции  $B = H_0 + H'$  в магнетике.

Под влиянием магнитного поля в магнетике возникают механические изменения (*магнитострикция*; см. § 203), в результате которых на провод с током, помещенный в магнетик, действуют добавочные механические силы. Однако в случае, когда провода, по которым текут токи, погружены в *однородный безграничный магнетик*, силы магнитного взаимодействия между ними таковы, как если бы они определялись лишь действием суммарного магнитного поля  $H_0 + H'$ .

По формуле Ампера на элемент тока длиной  $\Delta l$  в пустоте со стороны внешнего магнитного поля напряженности  $H$  действует сила  $\Delta f$ , равная

$$\Delta f = I \cdot H \sin \alpha \cdot \Delta l, \quad (2)$$

где  $I$  — сила тока и  $\alpha$  — угол между направлением напряженности магнитного поля и направлением движения положительных зарядов в проводе.

При наличии однородного безграничного магнетика, по сказанному, мы получим силу  $\Delta f$ , заменив в формуле (2) напряженность магнитного поля  $H$  магнитной индукцией  $B$ :

$$\Delta f = IB \sin \alpha \cdot \Delta l. \quad (2a)$$

Таким образом, при наличии безграничного магнетика мы считаем, что *действие магнитного поля на ток определяется вектором магнитной индукции  $B$* .

Так как, по сказанному, магнитная индукция  $B$  есть сумма напряженностей  $H_0 + H'$ , то ее следовало бы измерять в тех же единицах, что и  $H_0$ , т. е. в CGSM-системе в эрстедах. Однако принято единице магнитной индукции в CGSM-системе давать особое название — *гаусс*. Фактически гаусс совпадает с эрстедом.

В § 195 было отмечено, что формула (2) справедлива в CGSM-системе, т. е. если сила тока  $I$  измерена в CGSM-единицах силы тока,  $H$  — в эрстедах,  $\Delta l$  — в сантиметрах и  $\Delta f$  — в динах. Формула (2a) также справедлива в CGSM-системе, т. е. при измерении  $I$  в CGSM-единицах силы тока и  $B$  — в гауссах.

Формула (2a) позволяет в принципе определить значение вектора магнитной индукции  $B$  в каждой данной точке поля по силе  $\Delta f$ , действующей на элемент провода. Очевидно, что такой провод должен быть достаточно тонок, чтобы поле в его пределах могло считаться однородным, и его внесение не должно изменить ни величину, ни конфигурацию токов, вызывающих поле, а также не должно вызвать добавочного намагничивания магнетика. Все эти требования, особенно в случае твердого магнетика, практически невыполнимы. Например, чтобы определить действие магнитных сил на рамку с током в твердом магнетике, необходимо в магнетике сделать полость.

Как и в случае электростатики, действие на рамку будет зависеть от формы этой полости. Более подробно о возможности определить вектор  $B$  мы скажем в § 207.

**§ 201. Магнитные моменты молекул, атомов и электронов.** Гипотеза Ампера о существовании молекулярных токов соответствует современным представлениям о строении атомов и молекул. Мы уже неоднократно отмечали, что атом представляет собой сложную электрическую систему и что электроны входят в него как составные части. По модели, предложенной Резерфордом, атом состоит из тяжелого положительно заряженного ядра и электронов, которые вращаются вокруг него по определенным орбитам. Электрон, вращающийся по замкнутой орбите, во всем подобен току, идущему по замкнутому контуру. Он создает магнитное поле, и внешнее магнитное поле оказывает на него ориентирующее действие.

Рассмотрим для простоты электрон, вращающийся внутри атома по круговой орбите радиуса  $r$ . Его механический момент количества движения  $P$  равен

$$P = mvr, \quad (1)$$

где  $m$  — масса электронов и  $v$  — его скорость. Вместе с тем, будучи подобен току, он обладает и магнитным моментом  $p_m$ . Определим этот магнитный момент. Если мы мысленно сделаем сечение орбиты, то при каждом обороте электрона через это сечение будет перенесен заряд  $e$ , равный заряду электрона. За единицу времени окажется перенесенным заряд  $ne$ , где  $n$  — число оборотов электрона по орбите в единицу времени.

Так как сила тока  $I$  численно равна заряду, переносимому в единицу времени, то вращающийся по орбите электрон эквивалентен току силой

$$I = ne.$$

Число оборотов  $n = \frac{v}{2\pi r}$ , откуда

$$I = \frac{v}{2\pi r} e.$$

По вышесказанному магнитный момент  $p_m$  контура с током силой  $I$  равен  $IS$ , где  $S$  — площадь контура.

Отсюда магнитный момент электрона, вращающегося по круговой орбите радиуса  $r$ , равен

$$p_m = IS = \frac{v}{2\pi r} e \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} vre. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} P, \quad (3)$$

т. е. магнитный и механический моменты  $p_m$  и  $P$  электрона, движущегося по замкнутой орбите, непосредственно связаны между собой. Формула (3) записана в электромагнитной системе единиц. Если в ней

пользоваться смешанной системой, а именно, измерять магнитный момент  $p_m$  в CGSM-единицах, а отношение заряда электрона к массе  $e/m$  — в CGSE-единицах, как это обычно делается, то надо ввести справа коэффициент  $\frac{1}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ сек/см}$ , тогда

$$p_m = \frac{1}{2c} \cdot \frac{e}{m} \cdot P. \quad (3a)$$

Если в атоме или молекуле имеется несколько электронов, движущихся по разным орбитам, то механические моменты  $P_i$  отдельных электронов векторно складываются в результирующий момент  $P$ ; так же магнитные моменты  $p_{mi}$  отдельных электронов складываются векторно в результирующий магнитный момент  $P_m$  всего атома или молекулы.

Существование внутри парамагнитного вещества молекулярных токов, связанных с определенными магнитными и механическими моментами, было экспериментально доказано в 1915 г. Эйнштейном и Де-Гаазом. При намагничивании стержня из парамагнитного вещества путем внесения его во внешнее магнитное поле магнитные моменты молекул поворачиваются по полю, что ведет также к изменению направления их механических моментов  $P$ . Но так как полный механический момент количества движения остается неизменным, то стержень в целом должен получить момент количества движения обратного направления, т. е. прийти во вращение. Это явление вполне аналогично чисто механическому явлению, описанному в т. I: человек, стоящий на подвижной скамеечке, поворачивает ось вращающегося колеса, которое он держит в руках, при этом он сам приходит во вращение.

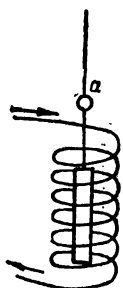


Рис. 214.  
Схема опыта  
Эйнштейна  
и Де-Гааза.

В опыте Эйнштейна и Де-Гааза железный стержень подвешивался на тонкой нити по оси вертикального соленоида (рис. 214). При изменении направления тока в соленоиде стержень перемагничивался и получал при этом вращательный импульс. Его поворот наблюдался с помощью светового луча, отражаемого от зеркала  $a$ , прикрепленного к нити. Для увеличения угла отклонения использовался принцип резонанса: ток в соленоиде менял направление с периодом, равным периоду собственных колебаний стержня, подвешенного к нити.

Направление поворота стержня соответствовало отрицательному знаку заряда электрона. Пользуясь формулой (3) и измеряя отношение между магнитным и механическим моментами, можно определить отношение заряда электрона к массе.

Результаты измерений дали, однако, значение для  $e/m$ , отличное от значения, полученного другими способами. Причины расхождения будут указаны в конце настоящего параграфа.

Существует также эффект, обратный только что описанному.

При вращении стержня из парамагнетика оси всех его молекулярных токов должны стремиться встать параллельно оси вращения стержня. Этот эффект вполне аналогичен гироскопическому эффекту, наблюдаемому в механике: если волчок расположен на подставке, которая сама вращается, то его ось стремится встать параллельно оси подставки. В результате, при вращении стержень должен намагнититься. Действительно, удается обнаружить намагничивание железного стержня при его быстром вращении. Таким образом, качественно и это явление подтверждается; что касается количественной стороны, то и эти опыты дают для отношения  $e/m$ , как и опыты Энштейна и Де-Гааза, значение, отличное от полученного другими методами.

Существование внутри парамагнитного вещества молекулярных токов, связанных с магнитными и механическими моментами, было также доказано несколько иным опытом, выполненным в 1917 г. А. Ф. Иоффе и П. Л. Капицей. Они воспользовались тем фактом, что так называемое остаточное намагничение постоянных магнитов пропадает при нагревании (§ 204). Намагниченный никелевый стержень подвешивался к тонкой нити. При нагревании возникало беспорядочное распределение магнитных моментов молекул по направлениям, их суммарный механический момент становился равным нулю. При этом, в силу закона сохранения момента количества движения, стержень приходил во вращение.

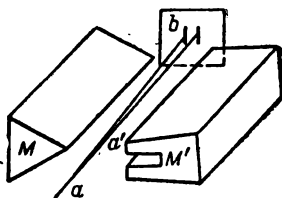


Рис. 215. Схема опыта Штерна и Герлаха.

Непосредственное измерение *магнитных моментов* атомов и молекул было осуществлено Штерном и Герлахом. Идея опытов Штерна и Герлаха основывается на том, что на частицу с магнитным моментом в неоднородном внешнем магнитном поле действует смещающая сила (см. § 197). Получаемый в высоком вакууме атомный луч  $aa'$  (рис. 215) пролетал между полюсами  $MM'$  электромагнита, которым придавалась такая форма, что магнитное поле было резко неоднородно в направлении, перпендикулярном к направлению атомного луча. Попадая на пластинку  $b$ , луч оставлял на ней след в виде узкой полоски. Сила, действующая на атом с магнитным моментом  $p_m$  (см. стр. 299), равна

$$\Delta f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha,$$

где  $(\Delta H/\Delta x)$  — градиент поля. Таким образом, величина силы  $\Delta f$  зависит от магнитного момента атома  $p_m$ , степени неоднородности магнитного поля и от угла  $\alpha$ , который направление момента  $p_m$  составляет с направлением градиента поля. Казалось бы, что из-за



теплового движения магнитные моменты атомов должны иметь всевозможные направления, благодаря чему разные атомы должны испытать различное отклонение, и атомный пучок, пройдя через неоднородное магнитное поле, должен размыться (см. рис. 216а). На самом деле опыты Штерна и Герлаха привели к иному результату: *атомный луч расщеплялся на несколько резких пучков*. В случае

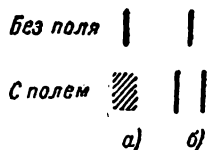


Рис. 216. *а* — ожидаемое расширение атомного луча в магнитном поле, *б* — наблюдаемое расщепление атомного луча серебра в магнитном поле.

серебра, а также натрия, калия и других щелочных металлов, он расщеплялся на два симметричных пучка (см. рис. 216б); атомы ванадия обнаружили расщепление пучка на четыре отдельных пучка, атомы марганца — на шесть, железа — на девять. Пучки из атомов ртути, магния и некоторых других атомов не расщепляются вовсе, — это показывает, что атомы этих элементов лишены магнитных моментов.

Расщепление атомного луча на отдельные резкие пучки указывает, что магнитные моменты атомов во внешнем магнитном поле ориентированы не как угодно, а лишь под определенными углами к направлению магнитного поля. Например, атомы натрия могут располагаться двумя способами: их магнитный момент направлен либо по полю, либо против поля; атомы ванадия ориентируются четырьмя способами относительно поля и т. д. Этот факт находит свое объяснение в квантовой механике (см. т. III).

Измерения отклонений показывают, что проекции магнитных моментов всех атомов являются рациональными дробями от вполне определенного магнитного момента  $p_0$ :

$$p_m = \frac{q}{r} p_0,$$

где  $q$  и  $r$  — целые числа; магнитный момент  $p_0$  называется *магнетонном Бора*; он равен

$$p_0 = 0,9272 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/гаусс.}^1$$

<sup>1</sup> Измерение магнитных моментов в единицах *эрг/гаусс* вытекает из следующего: момент сил  $M$ , действующий на контур с током, равен  $M = p_m B \sin \alpha$ , где  $p_m$  — магнитный момент тока, а  $B$  — магнитная индукция поля. Отсюда:

$$p_m = \frac{M}{B \sin \alpha}.$$

Так как  $M$  измеряется в *дин·см*, а  $B$  — в гауссах, то единица измерения  $p_m$  запишется  $\frac{\text{дин·см}}{\text{гаусс}}$ , но *дин·см* совпадает с эргом, откуда единица измерения  $p_m$  получает обозначение *эрг/гаусс*.

Максимальные значения проекций магнитных моментов некоторых атомов приведены в табл. XV.

Анализ этих опытов, как и характер строения атомных спектров (см. т. III), убеждает, что каждый электрон сам по себе обладает определенным магнитным моментом. Отсюда, естественно, в рамках классической электродинамики возникла гипотеза, что электрон находится в состоянии непрерывного вращения вокруг оси, проходящей через его центр; этому вращению соответствует наличие у электрона постоянного механического момента количества движения  $P_e$  (называемого *спином*, от английского слова spin, что значит вертеться) и связанного с ним постоянного магнитного момента  $p_m$ , равного одному магнетону Бора. Однако такая наглядная гипотеза оказалась слишком упрощенной и была заменена общими представлениями квантовой механики о свойствах электрона. При этом для согласования результатов теории с опытом пришлось предположить, что между магнитным и механическим моментами электрона имеет место следующее соотношение:

$$p_m = \frac{e}{m} P_e, \quad (4)$$

т. е. что отношение  $p_m/P_e$  для собственных моментов электрона вдвое больше, чем отношение орбитальных магнитного и механического моментов электрона, связь между которыми определяется равенством (3).

Полный магнитный момент атома (или молекулы) складывается как из магнитных моментов, возникающих в результате движения электронов по замкнутым орбитам, так и из собственных магнитных моментов электронов  $p_m$ . При этом внутри атома по законам квантовой механики магнитные моменты отдельных электронных орбит и самих электронов ориентируются друг относительно друга лишь под определенными углами. Связь между результирующими магнитным и механическим моментами оказывается более сложной, чем даваемая формулой (3), что и объясняет кажущееся противоречие результатов опытов Эйнштейна и Де-Гааза с теорией.

**§ 202. Вектор намагничения.** Степень намагничения среды принято характеризовать вектором, называемым *вектором намагничения* и равным магнитному моменту единицы объема среды. Обозначим через

Т а б л и ц а XV

**Максимальные проекции  
магнитных моментов атомов  
(в долях магнетона Бора)**

Атом	$p_{m\max}$
Водород . . . . .	1
Натрий . . . . .	1
Ванадий . . . . .	3/5
Хром . . . . .	6
Железо . . . . .	6
Индий . . . . .	1/3

$\sum \mathbf{p}_i$  геометрическую сумму магнитных моментов молекул, находящихся в объеме  $\Delta V$  магнетика. Тогда вектор намагничения  $\mathbf{P}$  однородно намагниченного магнетика определится равенством:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}. \quad (1)$$

Если магнетик намагничен не однородно, то вектор намагничения  $\mathbf{P}$  имеет различные значения в разных объемах; в этом случае под намагничением в данной точке подразумеваем предел, к которому стремится выражение (1) при неограниченном уменьшении объема  $\Delta V$ :<sup>1</sup>

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \right). \quad (2)$$

Как мы видели, напряженность магнитного поля внутри куска магнетика складывается из напряженности поля  $\mathbf{H}_0$  заданных внешних токов (намагничивающего поля) и из напряженности  $\mathbf{H}'$ , создаваемой молекулами намагниченного вещества. Результирующую напряженность

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}' \quad (3)$$

мы называли *магнитной индукцией*.

В случае однородного магнетика, целиком заполняющего пространство, где поле отлично от нуля, напряженность  $\mathbf{H}'$  поля, создаваемого молекулами, легко связать с вектором намагничения  $\mathbf{P}$ . Мы установим эту связь, пользуясь простым частным случаем. Пусть внутренность бесконечно длинного соленоида заполнена цилиндром из однородного магнетика. При прохождении по соленоиду тока магнетик однородно намагнитится. Будем считать, что намагничение его обусловлено наличием упорядоченных молекулярных токов. Плоскости этих молекулярных токов перпендикулярны к вектору намагничения, направленному параллельно оси цилиндра (рис. 217). Рассматривая молекулярные токи в сечении цилиндра, мы видим, что в толще цилиндра вблизи каждой точки сечения проходят два противоположно направленных тока. Они создают магнитные поля противоположных направлений, которые друг друга компенсируют. Некомпенсированными остаются лишь поля, создаваемые токами, текущими по боковой поверхности цилиндра. Эти токи подобны току в соле-

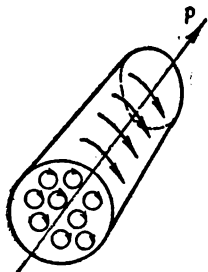


Рис. 217. Сложение молекулярных токов в намагниченной среде.

Рис. 217. Сложение молекулярных токов в намагниченной среде.

<sup>1</sup> Здесь, как и в других аналогичных физических задачах, неограниченное уменьшение объема  $\Delta V$  надо понимать условно: объем  $\Delta V$  при переходе к пределу берется настолько малым, чтобы данное физическое свойство (например, намагничение) оставалось в его пределах постоянным, но при этом объем должен оставаться большим по сравнению с объемом отдельной молекулы.

ноиде, а потому они создают внутри цилиндра магнитное поле, напряженность которого  $H'$  можно вычислить, пользуясь формулой (4) § 195.

Обозначая буквой  $I_0$  ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, получим, что  $I_0$  играет роль произведения силы тока на число витков на единицу длины  $n$ , откуда

$$H' = 4\pi I_0. \quad (4)$$

Легко установить связь между  $I_0$  и вектором намагничения. Вектор намагничения численно равен магнитному моменту единицы объема. Обозначая площадь сечения цилиндра через  $S$ , имеем, что объем участка цилиндра длиной  $l$  равен  $Sl$ . Следовательно, мы получим вектор намагничения  $P$ , если разделим магнитный момент участка цилиндра, равный  $I_0 Sl$ , на объем  $Sl$ , т. е.

$$P = \frac{I_0 Sl}{Sl} = I_0. \quad (5)$$

Таким образом, вектор намагничения  $P$  численно равен силе молекулярного тока, приходящегося на единицу длины. Направление вектора намагничения  $P$  совпадает с направлением напряженности  $H'$ . Отсюда, сравнивая формулы (4) и (5), получаем

$$H' = 4\pi P. \quad (6)$$

Подставляя это значение  $H'$  в выражение (3) для магнитной индукции  $B$ , получим

$$B = H_0 + 4\pi P. \quad (7)$$

Для неферромагнитных тел вектор намагничения  $P$  можно считать пропорциональным напряженности поля  $H_0$  заданных внешних токов (намагничивающего поля):

$$P = \kappa H_0. \quad (8)$$

Величина  $\kappa$ , характеризующая данный магнетик, называется *коэффициентом намагничения*, или магнитной восприимчивостью.

Для парамагнетиков вектор намагничения  $P$  направлен в ту же сторону, что и  $H_0$  (для них  $B > H_0$ ) и, следовательно,  $\kappa$  имеет положительное значение. Для диамагнетиков  $P$  и  $H_0$  направлены в противоположные стороны (для них  $B < H_0$ ) и  $\kappa$  отрицательно.

Подставляя значение  $P$  через  $H_0$ , по (8), в формулу (7), получим

$$B = (1 + 4\pi\kappa) H_0. \quad (9)$$

Постоянный множитель  $1 + 4\pi\kappa$  принято обозначать одной буквой  $\mu$ :

$$1 + 4\pi\kappa = \mu \quad (10)$$

и называть *магнитной проницаемостью среды*. Для парамагнитных сред  $\mu > 1$ , для диамагнитных сред  $\mu < 1$ , для пустоты  $\mu = 1$ .

Подставляя в формулу (9) вместо  $1 + 4\pi\chi$  магнитную проницаемость  $\mu$ , получим

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_0. \quad (9a)$$

Формулы (6), (7), (8), (9) и (9a) справедливы лишь для случая однородного магнетика, целиком заполняющего все пространство, где магнитное поле отлично от нуля. Для произвольного магнетика общую формулу для поля  $\mathbf{H}'$  дать нельзя. В каждом конкретном случае  $\mathbf{H}'$  подсчитывается на основании учета всех молекулярных токов.

Рассмотрим случай произвольного магнетика (т. е. неоднородного магнетика или отдельных кусков однородных магнетиков). В каждой данной точке такой среды коэффициент намагничения  $\chi$ , а вместе с тем и магнитная проницаемость  $\mu$  [формула (10)], имеют свое значение. Не останавливаясь пока на способе измерения вектора  $\mathbf{B}$ , будем считать, что он нам известен.

Введем вектор  $\mathbf{H}$ , определяемый в данной точке равенством

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (11)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды в этой точке. Вектор  $\mathbf{H}$  назовем *вектором напряженности магнитного поля в данном магнетике*.

Если магнетик однороден и целиком заполняет все пространство, где поле отлично от нуля, то, наряду с определением вектора  $\mathbf{H}$  по формуле (11), имеет место и формула (9a).

Из сравнения этих формул вытекает, что *в однородном магнетике, целиком заполняющем пространство, где поле отлично от нуля, напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  совпадает с напряженностью  $\mathbf{H}_0$ , создаваемой заданными (намагничивающими) токами*.

*Для произвольного магнетика вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  может и не совпадать с вектором  $\mathbf{H}_0$  (см. § 203).*

Для произвольного неферромагнитного тела вектор намагничения  $\mathbf{P}$  можно считать *пропорциональным напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля*.<sup>1</sup>

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{H}, \quad (12)$$

где  $\chi$  — коэффициент намагничения в рассматриваемой точке.

<sup>1</sup> Было бы логичнее (по аналогии с электростатикой) полагать вектор намагничения  $\mathbf{P}$  пропорциональным вектору результирующей напряженности магнитного поля, т. е. вектору индукции  $\mathbf{B}$ . Однако в силу исторических причин, принято пользоваться равенством (12).

Фактически между этими двумя точками зрения нет принципиальной разницы, так как векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ , по (11), пропорциональны друг другу. Указанное историческое отступление от вида соответствующих формул в электростатике ведет лишь к тому, что аналогичными оказываются не  $\epsilon$  и  $\mu$  [как было бы, если бы вместо (11) писалось:  $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$ ], а  $\epsilon$  и  $\frac{1}{\mu}$ ; не  $\chi_e$  и  $\chi_m$  [как было бы, если бы вместо (12) писалось:  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{B}$ ], а  $\chi_e$  и  $\chi_m/\mu$  (см. § 207).

Из формул (10), (11) и (12) следует, что

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{P}. \quad (13)$$

В частном случае однородного магнетика, целиком заполняющего все пространство, где поле отлично от нуля,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , и формулы (11), (12), (13) переходят соответственно в (9а), (8) и (7).

По сказанному в § 200, вектор  $\mathbf{B}$  определяет силы взаимодействия между токами при наличии магнетиков; это позволяет в принципе определить магнитную проницаемость по изменению силы взаимодействия между токами. Однако практически этот способ неприменим, так как  $\mu$  от единицы отличается весьма незначительно, так что указанное изменение силы взаимодействия между токами очень мало. Поэтому  $\mu$  определяется косвенно по магнитному моменту куска магнетика определенной формы.

Маленький шарик из исследуемого вещества вносится в сильное и неоднородное магнитное поле с известными значениями напряженности поля  $H_0$  и его градиента  $\Delta H_0 / \Delta x$ . Под влиянием поля он намагничивается. Если  $\mathbf{P}_m$  — его магнитный момент, то, так же как для контура с током (см. § 197, п. 2), он будет испытывать действие силы

$$f = P_m \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right), \quad (14)$$

пропорциональной градиенту поля.

Магнитный момент шарика  $\mathbf{P}_m$  может быть связан с вектором намагничения  $\mathbf{P}$ . Приближенно, в пределах шарика, намагничивающее поле  $\mathbf{H}_0$  можно считать постоянным. Тогда (как можно показать для шарика и эллипсоида) будет постоянным и вектор намагничения  $\mathbf{P}$ , равный магнитному моменту единицы объема. Следовательно,

$$P_m = \frac{4}{3} \pi r^3 P, \quad (15)$$

где  $r$  — радиус шарика. Для парамагнитного шарика магнитный момент  $\mathbf{P}_m$  направлен по полю, для диамагнитного — против. Поэтому парамагнитный шарик будет втягиваться в область, где поле сильнее, а диамагнитный — выталкиваться в область, где поле слабее.

Подставив формулу (15) в (14) и выразив вектор намагничения  $\mathbf{P}$  через напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в шарике [формула (12)], получим

$$f = \frac{4}{3} \pi r^3 \chi H \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right). \quad (16)$$

Соответствующий расчет показывает, что для шарика

$$H = \frac{3}{2 + \mu} H_0.$$

Так как для всех диа- и парамагнитных тел  $\mu$  очень мало отличается от единицы, то с большой степенью точности  $H = H_0$  и вместо формулы (16) можно написать:

$$f = \frac{4}{3} \pi r^3 \chi H_0 \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right). \quad (17)$$

Формула (17) позволяет определить  $\chi$  по величине силы, действующей на шарик.

Вместо шарика для определения коэффициента намагничивания  $\chi$  и магнитной проницаемости  $\mu$  употребляется также вытянутый эллипсоид вращения. Магнитный момент эллипсоида также может быть рассчитан теоретически. Такой эллипсоид в однородном внешнем магнитном поле испытывает момент сил  $M$ , поворачивающий его вдоль линии напряженности поля.

Значения магнитной проницаемости для ряда пара- и диамагнитных веществ приведены в табл. XVI.

Т а б л и ц а X V I

**Значения магнитной проницаемости**  
(газы взяты при атмосферном давлении)

Парамагнитные вещества		Диамагнитные вещества	
вещество	$(\mu - 1) \cdot 10^6$	вещество	$(1 - \mu) \cdot 10^6$
Азот . . . . .	0,013	Водород . . . .	0,063
Кислород . . . .	1,9	Медь . . . . .	8,8
Алюминий . . .	23	Каменная соль	12,6
Платина . . . .	360	Висмут . . . . .	176

**§ 203. Ферромагнетизм.** Как было указано в § 200, некоторые из парамагнитных веществ обладают свойством давать весьма большое добавочное поле  $H'$ , следовательно, они характеризуются большой магнитной проницаемостью  $\mu$ ; такие вещества называются *ферромагнитными*. К числу ферромагнитных веществ относятся железо, никель, кобальт, гадолиний и их сплавы (например, Fe—Ni, также Fe—Ni—Al и т. д.) и некоторые сплавы неферромагнитных веществ, например сплав из 61,5 % Cu, 23,5 % Mn и 15 % Al, сплав марганца — висмута, хрома — теллура и т. д.

Особенностью ферромагнитных веществ является не только большое значение  $\mu$ , но и следующее: 1) ферромагнитные вещества сохраняют намагничение и после того, как намагничивающее поле прекратило свое действие, и 2) магнитная проницаемость  $\mu$  (также коэффициент намагничивания  $\chi$ ) для них не является величиной постоянной, но зависит от напряженности намагничивающего поля  $H_0$ .

Кристаллические ферромагнетики, например монокристаллы железа, обнаруживают анизотропию магнитных свойств: в одних направлениях кристалл намагничивается легче, в других — труднее. То же вещество, имеющее мелкокристаллическую структуру, в магнитном отношении изотропно.

Зависимость намагничивания железа от напряженности внешнего поля была впервые подробно исследована профессором Московского университета А. Г. Столетовым, опубликовавшим в 1872 г. работу „Исследование функции намагничивания мягкого железа“. Экспериментальный метод Столетова был основан на явлении индукции (см. § 221). Здесь мы рассмотрим иной способ измерения вектора магнитной индукции в ферромагнетиках, которые являются твердыми телами. Предположим, что мы имеем соленоид в виде тороида, внутрь которого внесен сердечник из исследуемого ферромагнетика.

Полное магнитное поле внутри сердечника определяется вектором индукции  $\mathbf{B}$ , который представляет собой сумму напряженности  $H_0$  магнитного поля, создаваемого током соленоида, и напряженности  $H'$  поля, создаваемого молекулярными токами:

$$\mathbf{B} = H_0 + H'.$$

Если мы сделаем узкую поперечную щель в сердечнике соленоида (рис. 218), то в этой щели, поскольку она заполнена средой, для которой  $\mu = 1$  (практически воздухом, парамагнетизмом которого мы пренебрегаем), вектор индукции тождественен с вектором напряженности магнитного поля.

Будем характеризовать величины, относящиеся к щели, индексами „щ“, тогда для щели имеем:

$$B_{\text{щ}} = H_{\text{щ}}. \quad (1)$$

Вектор индукции  $\mathbf{B}$  внутри сердечника параллелен оси тороида; если щель внутри тороида очень узка, то, как мы увидим в дальнейшем (см. § 207), она заметно не меняет индукции; следовательно, индукция в области щели такая же, как внутри сердечника:

$$B_{\text{щ}} = B,$$

откуда в силу соотношения (1)

$$H_{\text{щ}} = B = H_0 + H',$$

т. е. напряженность  $H_{\text{щ}}$  внутри щели равна индукции внутри сердечника, другими словами, она равна сумме напряженностей  $H_0 + H'$ , создаваемых током в соленоиде и молекулярными токами сердечника.

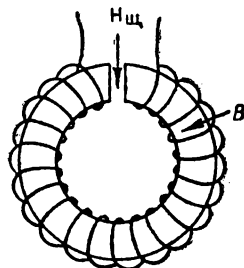


Рис. 218. Напряженность магнитного поля  $H_{\text{щ}}$  в щели равна магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в ферромагнетике.



Таким образом, сердечник благодаря намагничению увеличивает напряженность поля в щели. Измеряя напряженность  $H_{\text{щ}}$  в щели (например, по действию на контур с током), мы тем самым измерим значение индукции  $B$  в сердечнике.

Для ферромагнитных веществ мы будем так же, как для веществ пара- и диамагнитных, считать, что связь между вектором индукции  $B$  и напряженностью поля  $H$  дается выражением (11) § 202:

$$B = \mu H, \quad (2)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость ферромагнетика.

Таким образом, магнитную проницаемость  $\mu$  мы определим отношением

$$\mu = \frac{B}{H}. \quad (2a)$$

Воспользовавшись связью между  $\mu$  и коэффициентом намагничивания  $\chi$ , выражаемой формулой (10) § 202

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

получим для величины вектора намагничивания  $P$

$$P = \chi H = \frac{B - H}{4\pi}. \quad (3)$$

Так как сердечник заполняет практически все пространство, занятое полем (щель в сердечнике очень узка), то напряженность магнитного поля  $H$  в сердечнике, помещенном в тороид, равна напряженности  $H_0$  в тороиде без сердечника (см. § 202). Поэтому, как и для случая соленоида, она равна

$$H = H_0 = 4\pi In,$$

где  $n$  — число витков на единицу длины тороида. Вычислив, таким образом, значения  $H$  для различных сил тока  $I$  и найдя соответствующие им значения  $B$  по измерению напряженности магнитного поля  $H_{\text{щ}}$  в щели [формула (1)], можно определить  $\mu$  и  $P$  для данного ферромагнетика для разных напряженностей  $H$  магнитного поля в ферромагнетике, или, что то же самое, для разных напряженностей намагничивающего поля  $H_0$ .

Результаты измерения этих величин могут быть выражены графически. Остановимся сперва на зависимости намагничивания от напряженности поля  $H$  (рис. 219). Мы видим, что намагничение  $P$  сперва круто возрастает с увеличением  $H$ , а затем возрастание уменьшается, и, наконец, начиная с некоторого значения  $H$ , дальнейшее увеличение напряженности  $H$  не дает увеличения  $P$ , что соответствует горизонтальному участку графика. Это явление, открытое А. Г. Столетовым, носит название *магнитного насыщения*. Такой характер зависимости

$P$  от  $H$  можно объяснить тем, что первоначально под действием возрастающего намагничивающего поля увеличивается степень ориентации молекулярных магнитных моментов по полю, однако нарастание эффекта, обусловленного ориентацией, начинает замедляться по мере того,

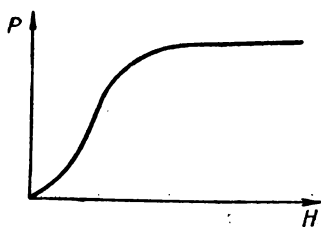


Рис. 219. Зависимость для ферромагнетика вектора намагничивания  $P$  от напряженности поля  $H$ .



Рис. 220. Зависимость для ферромагнетика магнитной индукции  $B$  от напряженности поля  $H$ .

как все меньше и меньше остается неориентированных моментов; наконец, когда все молекулярные моменты ориентированы по полю, дальнейшее увеличение  $P$  прекращается, наступает явление насыщения.

Зависимость магнитной индукции  $B$  от намагничивающего поля  $H_0 = H$  выражается сходным графиком, не имеющим, однако, горизонтальной части (рис. 220), так как  $B = H + H'$ . При насыщении  $H'$  остается постоянным, и  $B$  растет линейно с  $H$ .

Зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  (или коэффициента намагничивания  $\chi$ ) от  $H$  характеризуется тем, что  $\mu$  (или  $\chi$ ) сперва сильно возрастает с увеличением напряженности намагничивающего поля, а затем, достигнув максимума, начинает падать. При больших значениях намагничивающего поля  $H$  значение  $\mu$  стремится к единице, а  $\chi$  — к нулю. На рис. 221 приведена кривая Столетова для коэффициента намагничивания  $\chi$  железа как функции напряженности поля  $H$ . Стремление  $\mu$  к единице имеет место при столь больших напряженностях намагничивающего поля  $H$ , при которых в выражении

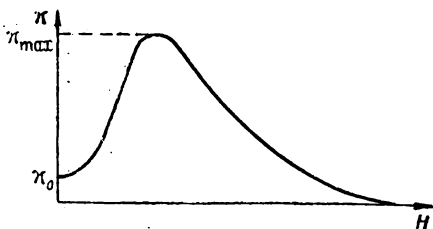


Рис. 221. Зависимость для ферромагнетика коэффициента намагничивания  $\chi$  от напряженности поля  $H$ .

$$B = H + H'$$

можно пренебречь напряженностью молекулярного поля  $H'$  по сравнению с  $H$ .

Весьма важной особенностью ферромагнетиков является так называемый *гистерезис*. Явление гистерезиса заключается в том, что намагниченность  $P$  (а следовательно, и магнитная индукция  $B$ ) зависит не только от значения напряженности намагничивающего поля  $H$  в данный момент, но и от того, какова напряженность была раньше. На рис. 222 приведен график зависимости  $P$  от  $H$ . Ветвь кривой  $Oa$  дает возрастание намагниченности  $P$  при увеличении поля  $H$  при условии, что намагничение производится первый раз. Точка  $a$  соответствует насыщению (намагниченность достигает максимального значения  $P_t$ ).

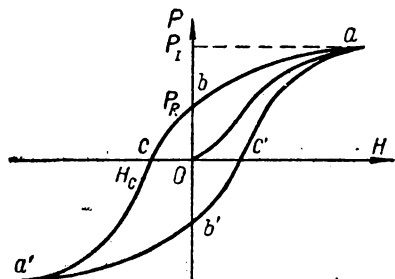


Рис. 222. Петля гистерезиса.

Если после того как насыщение достигнуто, начать уменьшать напряженность поля  $H$ , то намагниченность  $P$  будет спадать не по кривой  $aO$ , а по новой кривой  $ab$ ; тем же самым значениям  $H$ , проходящим в обратном порядке, соответствуют большие значения  $P$ . При  $H=0$  намагничение не пропадает, сохраняется *остаточное намагничение*  $P_R$ , выражаемое отрезком  $Ob$ . Чтобы вызвать дальнейшее уменьшение  $P$ , надо изменить направление намагничивающего поля  $H$  на обратное. При некотором определенном  $H=H_c$  намагничение  $P$  пропадает. Значение  $H_c$ , выражаемое отрезком  $Oc$ , называется *коэрцитивной силой*. При еще большем возрастании обратного по направлению поля  $H$  возникает намагничение обратного знака. Здесь может быть также достигнуто насыщение  $a'$ . Если затем заставить магнитное поле  $H$  возрасти, то зависимость  $P$  от  $H$  изобразится симметричной кривой  $a'b'c'a$  — петля гистерезиса, как говорят, будет замкнута.

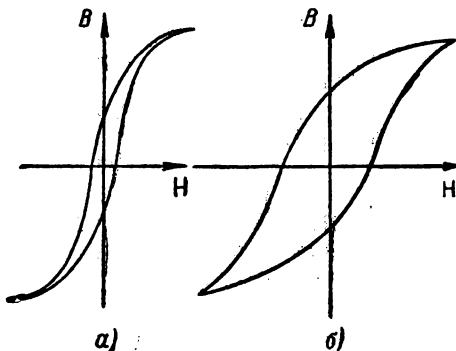


Рис. 223. Петля гистерезиса для:  $a$  — „мягкого“ материала,  $b$  — „жесткого“ материала.

В результате явления гистерезиса одному и тому же значению намагничивающего поля  $H$  могут соответствовать несколько значений намагниченности  $P$ . Например,  $H=0$  соответствуют: 1) отсутствие намагниченности (точка  $O$ ); 2) намагничение, выражаемое отрезком  $Ob$  (имеет место после намагничивания сердечника); 3) намагничение, выражаемое отрезком  $Ob'$  (имеет место после перемагничивания сердечника).

Различные ферромагнитные вещества дают разнообразные кривые гистерезиса. Для технических применений требуется различный тип гистерезиса. Принято различать „мягкие“ магнитные материалы, характеризующиеся малой коэрцитивной силой, и „жесткие“, характеризующиеся большой коэрцитивной силой. К числу первых принадлежат мягкое железо, кремневая сталь, сплавы железа с никелем (особенно сплав „пермаллой“, содержащий 78% Ni); такого рода материалы употребляются, например, для изготовления сердечников трансформаторов. К числу „жестких“ магнитных веществ относятся углеродистые и специальные стали (например, сплав „магнико“, содержащий Fe, Al, Si, Ni и Co). „Жесткие“ материалы употребляются для изготовления постоянных магнитов. На рис. 223 приведены типичные кривые гистерезиса для „мягкого“ (а) и „жесткого“ (б) материала.

В табл. XVII даны численные значения максимальной магнитной проницаемости  $\mu_{\max}$  максимального намагничения  $P_I$  и коэрцитивной силы  $H_c$  для нескольких типичных мягких магнитных материалов. При этом для максимального намагничивания приведены значения  $P_I$ , умноженные на  $4\pi$ , так как по формуле (7) § 202 магнитная индукция  $B$  (величина, непосредственно измеряемая) связана с  $P$  соотношением:  $B = H_0 + 4\pi P$ .

В табл. XVIII даны численные значения  $4\pi P_I$ , где  $P_I$  — максимальное намагничение, значения  $4\pi P_R$ , где  $P_R$  — остаточное намагничение, и коэрцитивной силы  $H_c$  для некоторых типичных жестких магнитных материалов.

Таблица XVII

## Свойства типичных „мягких“ магнитных материалов

Вещество	$\mu_{\max}$	$4\pi P_I$ в гауссах	$H_c$ в эрстедах
Железо (чистое) . . . . .	5 000	21 500	1,0
Кремнистое железо . . .	10 000	20 000	0,2
Пермаллой . . . . .	100 000	16 000	0,05
Супермаллой . . . . .	900 000	8 000	0,004

Таблица XVIII

## Свойства типичных „жестких“ магнитных материалов

Вещество	$4\pi P_R$ в гауссах	$4\pi P_I$ в гауссах	$H_c$ в эрстедах
Углеродистая сталь . . .	10 000	20 000	42
Вольфрамовая сталь . . .	10 500	16 500	65
Кобальтовая сталь . . .	9 000	16 300	250
„Магнико“ . . . . .	12 500	14 000	575

Процесс намагничивания ферромагнитных тел сопровождается изменением их линейных размеров и объема. Это явление носит название *магнитострикции*. Величина и знак эффекта зависят от напряженности магнитного поля и от угла, который направление поля составляет с кристаллической осью (в случае монокристаллических тел). Удлинение незначительно и составляет, вообще говоря, стотысячные доли от первоначальной длины.

**§ 204. Природа ферромагнетизма.** Ферромагнетизм специфически связан с твердой фазой вещества. Свободные атомы ферромагнитных элементов не обладают какими-либо особыми магнитными свойствами. Из табл. XV видно, что магнитные моменты атомов железа и хрома одинаковы, вместе с тем железо — типичнейшее ферромагнитное вещество, а хром — обыкновенный парамагнетик. Существуют ферромагнитные сплавы из неферромагнитных веществ.

Парамагнетики во всех достижимых магнитных полях находятся в состоянии, далеко от насыщения. Это показывает, что даже в наиболее сильных полях ориентация молекул неполная. Ферромагнетики, напротив, сравнительно легко достигают состояния насыщения.

Для всякого ферромагнетика существует такая температура  $T = \Theta$ , при которой его ферромагнитные свойства пропадают. Эта температура  $\Theta$  называется температурой или точкой Кюри (по фамилии французского физика П. Кюри, открывшего существование такой точки). При температурах, лежащих выше точки Кюри, ферромагнетик ведет себя как обычное парамагнитное тело. Коэффициент намагничивания  $\chi$  обычных парамагнетиков меняется с температурой по закону:

$$\chi = \frac{C}{T},$$

где  $C$  — постоянная для данного вещества (*постоянная Кюри*), а для ферромагнетиков при температурах выше точки Кюри:

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta}.$$

Для чистых железа и никеля точки Кюри соответственно лежат при 768 и 365°С; эти температуры значительно ниже температуры плавления указанных веществ (для железа температура плавления 1530°С). В точке Кюри наблюдается не только пропадание намагничивания тел, но и аномалия в ряде других их свойств, например аномалия в ходе теплоемкости, электропроводности и т. д.; пропадает магнитострикция. Простейшая теория ферромагнетизма, указывающая на существование точки Кюри, была разработана Вейссом.

Первая попытка объяснить ферромагнитные свойства тел была сделана в 1892 г. русским физиком Б. Л. Розингом, который допустил существование внутри ферромагнетиков добавочных „молекулярных магнитных полей“. Эти добавочные поля создаются само-

произвольно намагниченными малыми областями ферромагнетика. При отсутствии внешнего поля векторы намагничивания отдельных таких областей ориентированы случайным образом и в сумме компенсируют друг друга. При наличии внешнего поля векторы поворачиваются так, что усиливают друг друга и дают добавочное поле. Эта гипотеза была впоследствии (1907 г.) развита Вейссом; по современным воззрениям в ферромагнетиках имеются небольшие области (домены), самопроизвольно („спонтанно“) намагниченные до насыщения. При отсутствии внешнего магнитного поля эти „области самопроизвольного намагничивания“ ориентированы беспорядочно, в результате чего тело в среднем не намагничено. Внешнее поле ориентирует не отдельные молекулы, а „области самопроизвольного намагничивания“, и, таким образом, может вызвать сильное намагничение ферромагнетика вплоть до насыщения. Н. С. Акулов и М. В. Дехтяр с помощью магнитного порошка, наносимого на шлифованную поверхность, получили фигуры, выявляющие границы областей самопроизвольного намагничивания у размагниченного ферромагнетика (рис. 224).

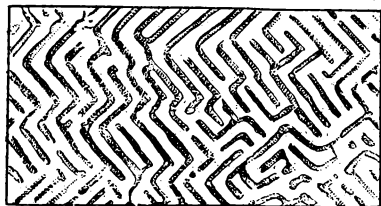


Рис. 224. Области намагничивания.

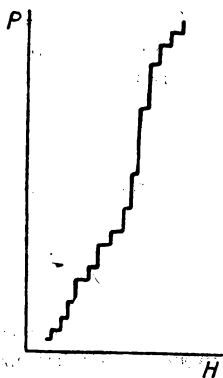


Рис. 225. Скачкообразное нарастание намагничивания ферромагнетика.

Существование областей самопроизвольного намагничивания доказывается также скачкообразным ходом кривых намагничивания в слабых полях. При медленном возрастании внешнего поля намагничение ферромагнетика в области крутого подъема кривой намагничивания возрастает скачкообразно (рис. 225). Это происходит благодаря внезапному изменению ориентации намагничивания отдельных областей. В. К. Аркадьев разработал простой акустический метод определения скачкообразного изменения намагничивания.

С точки зрения существования областей самопроизвольного намагничивания явление гистерезиса можно в общих чертах объяснить своего рода „трением“, мешающим изменению ориентации отдельных областей. При прекращении действия намагничивающего поля благодаря этому трению сохраняется некоторая ориентация областей самопроизвольного намагничивания. Вполне беспорядочной ориентации областей самопроизвольного намагничивания мешает „коэрцитивная сила“. Чтобы ее преодолеть, надо приложить магнитное поле обратного направления и таким образом размагнитить вещество.

Эта точка зрения подтверждается тем, что сотрясения способствуют размагничиванию. Остаточное намагничение пропадает также, как было сказано, при нагревании (в точке Кюри).

Существование „трения“, мешающего изменению ориентации намагниченных областей, ведет к зависимости магнитных свойств ферромагнетиков в переменном магнитном поле от частоты. Эта зависимость была подробно изучена В. К. Аркадьевым и группой его сотрудников вплоть до частот, соответствующих коротким электромагнитным волнам. Для частот в  $10^{10}$  гц и выше  $\mu$  перестает зависеть от частоты и становится равным единице.

Природа ферромагнетизма была в основном выяснена в связи с развитием атомной физики. В 1927 г. Я. Г. Дорфман в результате опытов по отклонению весьма быстрых электронов ( $\beta$ -частиц) в ферромагнитных телах показал, что силы, вызывающие самопроизвольное намагничение, не могут быть силами магнитного взаимодействия, вызванного движением электронов внутри атомов. В 1928 г. Я. И. Френкель впервые отметил, что самопроизвольное намагничение может быть обусловлено так называемыми „обменными силами“, рассматриваемыми в квантовой механике. При известных условиях эти силы стремятся установить собственные магнитные моменты электронов параллельно друг другу, что и ведет к возникновению областей самопроизвольного намагничения. Эта идея была подробно разработана Гейзенбергом.

Таким образом, выяснилось, что ферромагнитные явления могут быть поняты лишь на основе квантовой механики с учетом собственных магнитных моментов электронов.

Ферромагнитные свойства оказываются тесно связанными с кристаллической структурой вещества. Кривые намагничения (петли гистерезиса) реальных материалов зависят от их мелкокристаллической структуры и меняются под влиянием внешних воздействий (например, термической обработки, растяжения и т. д.). Само явление гистерезиса обладает сложной природой и частично связано со смещением границ между отдельными областями самопроизвольного намагничения.

Большую роль в современной технике играют магнитные вещества, получившие название *ферритов*. Это химические соединения типа:  $MeO \cdot Fe_2O_3$ , где Me — один (или два) из металлов: Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, например  $CuO \cdot Fe_2O_3$  или  $NiOZnO \cdot Fe_2O_3$  и т. д. Ферриты — мягкие ферромагнетики. Вместе с тем, по своим электрическим свойствам они полупроводники, обладающие высоким омическим сопротивлением — порядка  $10^3$  —  $10^8$  ом · см. Последнее обстоятельство важно при использовании ферритов в электротехнике, так как в них не возникает вредных вихревых токов (токов Фуко — см. § 231). Из ферритов изготавливают сердечники трансформаторов, стержни индукционных катушек и т. д.

Особой разновидностью магнетиков являются так называемые антиферромагнетики. Антиферромагнетики, находящиеся при температуре  $T$ , превышающей некоторую определенную для данного ферромагнетика температуру  $\Theta$ , являются обычными парамагнетиками, их коэффициент намагничения  $\chi$  возрастает с уменьшением температуры  $T$ ; ниже этой температуры  $\chi$  падает с уменьшением температуры и стремится к нулю при  $T \rightarrow 0$  (рис. 226). Температура  $\Theta$  лежит в области низких температур (порядка 20 — 30° К и ниже). Примером антиферромагнетиков могут служить соли  $\text{CoCl}_2$ ,  $\text{CrCl}_3$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  и др.

Теоретическое истолкование свойств антиферромагнетиков может быть получено только на основе квантово-механических положений.

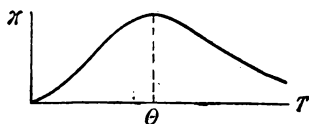


Рис. 226. Зависимость коэффициента намагничения  $\chi$  от температуры для антиферромагнетиков.

**§ 205. Постоянные магниты.** Возможность иметь в ферромагнитных веществах остаточное намагничение позволяет осуществить *постоянные магниты*, т. е. такие тела, которые без поддержания в них электрического тока за счет каких-либо внешних источников возбуждают в окружающем пространстве магнитное поле.

Изготавливаются постоянные магниты из ферромагнетиков с большим остаточным намагничением и большой коэрцитивной силой („жесткие“ стали).

Остаточное намагничение ферромагнитных тел обусловлено сохраняющейся ориентацией области спонтанного намагничения. Существование самих областей спонтанного намагничения, как мы указали в предыдущем параграфе, объяснимо при учете собственных магнитных моментов электронов. Однако для качественного описания свойств остаточного магнетизма можно рассматривать лишь движение электронов и возникающие в результате этого движения молекулярные токи. Тогда мы будем считать, что остаточное намагничение вызвано сохраняющейся ориентацией молекулярных токов, в результате чего суммарный

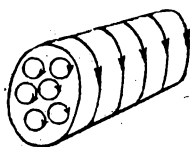


Рис. 227. Амперовы токи в постоянном магните.

молекулярный ток в среднем отличен от нуля и создает магнитное поле. На рис. 227 представлено сечение круглого прямого магнита. Рассуждая так же, как на стр. 314, мы можем считать, что в толще магнита круговые молекулярные токи компенсируют друг друга, но на его поверхности остается некомпенсированный результирующий ток (молекулярный ток). Этот ток обтекает магнит с поверхности и таким образом обуславливает *сходство прямого магнита с соленоидом*.

Линии магнитной напряженности поля прямого и длинного постоянного магнита вполне сходны с линиями напряженности вне соленоида



(рис. 228). Разница между магнитом и соленоидом заключается лишь в том, что в случае соленоида мы можем проследить ход линий напряженности и внутри самого соленоида и убедиться, что каждая линия образует замкнутую кривую. В случае постоянного магнита

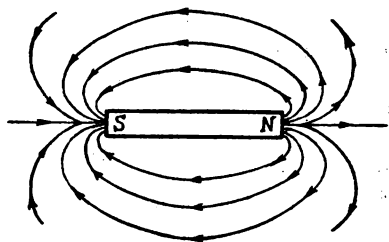


Рис. 228. Линии напряженности постоянного прямого магнита.

мы не можем непосредственно установить ход линий напряженности внутри тела магнита. Линии напряженности нам кажутся выходящими из одного конца магнита, называемого северным, и входящими в его другой конец (южный). Частным случаем прямого магнита является магнит в виде стрелки (*магнитная стрелка*).

Прямой магнит испытывает со стороны однородного магнитного поля ориентирующее действие, которое стремится повернуть магнит так, чтобы он расположился вдоль линий магнитной напряженности  $H$ . Когда магнит расположится вдоль линий напряженности, то момент действующих на него сил  $M=0$  — магнит находится в равновесии; момент сил  $M$  достигает максимального значения, когда магнит перпендикулярен к линиям напряженности.

Отсюда естественно предположить, что момент  $M$  определяется лишь составляющей напряженности поля  $H$ , перпендикулярной к оси магнита:

$$M = p \cdot H_{\perp},$$

где  $p$  — величина, зависящая лишь от свойств самого магнита. Из рис. 229 имеем:  $H_{\perp} = H \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью магнита и направлением поля; отсюда

$$M = p H \sin \alpha. \quad (1)$$

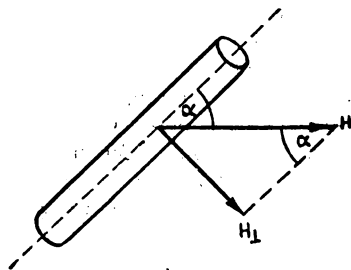


Рис. 229. Составляющая напряженности поля  $H$ , перпендикулярная оси магнита.

Сравнивая это выражение с выражением момента  $M$ , действующего на соленоид (см. § 192), видим их полное сходство. Величина  $p$  называется *магнитным моментом* магнита.

Таким образом, резюмируя, мы можем сказать, что момент пары сил, действующих со стороны внешнего магнитного поля на контур с током, соленоид или магнитную стрелку, выражается одной и той же формулой (1). Контур с током, соленоид и магнитная стрелка с одинаковыми магнитными моментами  $p$  испытывают одинаковое ориентирующее действие в данном магнитном поле. В случае контура

с током его магнитный момент определяется силой протекающего по нему тока  $I$  и площадью  $S$ ; магнитный момент  $p$  магнита зависит от его индивидуальных свойств — от его размеров и „степени намагничения“.

Силы, действующие на магнит, расположенный во внешнем магнитном поле, приложены ко всем его элементам. Если магнитную стрелку разломать пополам, то каждая ее половина будет испытывать во внешнем магнитном поле ориентирующее действие. Однако для рассмотрения ряда задач удобно локализовать эти силы. Такая локализация возможна на основании следующих рассуждений. Мы знаем, что момент пары сил равен произведению величины одной из сил  $f$ , образующих пару, на плечо пары  $l$ , причем все пары с одним и тем же моментом  $M$ , т. е. для которых равны произведения  $fl$ , эквивалентны по своему действию. Поэтому силы, приложенные ко всем элементам магнита, по своему суммарному моменту вполне эквивалентны двум равным по величине силам  $f$ , приложенным к его концам, одна из которых направлена по полю, другая — против поля (рис. 230), если только эти силы подобраны так, чтобы их момент был равен моменту сил, фактически действующих на магнит.

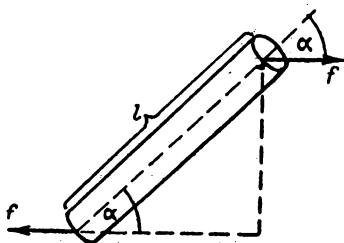


Рис. 230. К определению момента сил, действующего на магнит.

Таким образом, формально мы можем считать, что со стороны магнитного поля на магнит действуют две силы  $f$ , приложенные к его концам. Из рис. 230 видно, что плечо пары сил  $f$  равно  $l \sin \alpha$ , где  $l$  — длина магнита, откуда их момент  $M = fl \sin \alpha$ ; приравнявая этот момент к моменту сил, действующих по формуле (1) на магнит со стороны магнитного поля, получим:

$$fl \sin \alpha = pH \sin \alpha,$$

откуда

$$fl = pH. \quad (2)$$

Далее, мы можем провести некоторую аналогию между магнитным моментом  $p$  магнита и моментом электрического диполя  $p_q$ : Эта аналогия обусловлена тем, что прямой и длинный магнит создает в точке, достаточно удаленной от него, так же как и диполь, напряженность поля, пропорциональную его магнитному моменту и обратно пропорциональную кубу расстояния от него. Тем не менее эта аналогия имеет лишь внешний и формальный характер. Все же в ряде случаев она используется, так как упрощает вычисления. В § 124 мы видели, что момент электрического диполя равен произведению заряда  $q$

одного из двух тел, образующих диполь, на расстояние между телами:

$$p_q = ql.$$

Формально мы можем положить и момент магнита  $p$  равным произведению его длины  $l$  на воображаемый магнитный заряд  $m$  (или, как обычно говорят, *магнитную массу*), хотя реально магнитных зарядов не существует, т. е. положить

$$p = ml. \quad (3)$$

Места расположения таких воображаемых магнитных масс принято называть *полюсами*. Расположены полюсы, в соответствии с равенством (3), у концов магнита. В силу равенства (3) магнитная масса, расположенная у полюса, равна

$$m = \frac{p}{l} = p_0, \quad (4)$$

где  $p_0$  — магнитный момент, отнесенный к единице длины магнита.

Из соотношений (2) и (3) получаем:

$$fl = mHl, \text{ откуда } f = mH, \quad (5)$$

т. е. на воображаемый магнитный полюс магнита действует сила, численно равная произведению величины магнитной массы  $m$ , расположенной у полюса, на напряженность внешнего магнитного поля  $H$ . Конец прямого магнита, поворачивающийся в сторону вектора напряженности  $H$ , называется „северным“, а поворачивающийся в противоположную сторону — „южным“. Если считать магнитную массу  $m$ , расположенную у „северного полюса“ магнита, положительной и расположенную у „южного полюса“ — отрицательной, то равенство (5) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{H}. \quad (5a)$$

Введение в рассмотрение сил  $f$ , действующих на магнитные массы  $m$ , весьма упрощает разбор многих вопросов, например вопросов об ориентации и притяжении магнитных стрелок. Этим объясняется, почему понятие о магнитных массах до некоторой степени сохраняется в учении о магнетизме, хотя в действительности магнитных масс не существует. В однородном магнитном поле силы  $f$  стремятся установить стрелку по полю. Если стрелка установлена так, что ось ее совпадает с направлением магнитных линий, то момент пары, действующей на стрелку, равен нулю, — стрелка находится в положении равновесия. Однако это равновесие является устойчивым, только если направление от южного полюса к северному совпадает с направлением магнитных линий; действительно, в этом случае при выходе стрелки из положения равновесия силы возникающей при этом пары стремятся

возвратить стрелку в исходное положение (рис. 231а). Наоборот, если стрелка расположена параллельно полю так, что направление от южного полюса к северному противоположно направлению поля, то при выходе ее из этого положения возникают силы, способствующие ее дальнейшему отклонению (рис. 231б).

В однородном магнитном поле, как мы видим, на магнитную стрелку (а также соленоид или контур с током) действует лишь пара сил. Магнитная стрелка стремится только повернуться, расположившись осью по полю. Но если магнитное поле неоднородно, то на стрелку, кроме пары, будет еще действовать сила, которая сообщит ей поступательное движение, аналогично тому, как на рамку с током в неоднородном поле действует сила. Пусть магнитная стрелка расположена под углом  $\alpha$

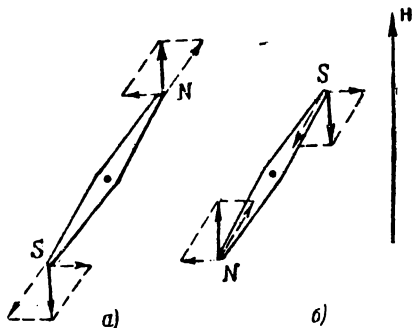


Рис. 231. Пары сил, действующие на магнитную стрелку во внешнем магнитном поле.

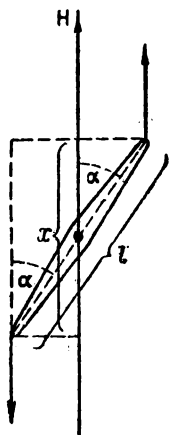


Рис. 232. Действие сил в неоднородном магнитном поле на магнитную стрелку.

к направлению напряженности внешнего магнитного поля (рис. 232). Предположим для простоты, что напряженность поля меняется в направлении, совпадающем с направлением самого поля. Пусть напряженность поля в месте, где находится южный конец стрелки, равна  $H$ ; тогда напряженность в месте, где находится северный конец стрелки, равна  $H' = H + \left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x$ , где величина  $\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)$  есть градиент поля. Силы, действующие на полюсы стрелки, соответственно будут равны

$$f_S = mH, \quad f_N = mH + m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

Пусть  $f_N > f_S$ , тогда на стрелку действует пара сил с моментом  $M = f_S l \cdot \sin \alpha = pH \sin \alpha$ , где  $p = ml$  — магнитный момент стрелки, и направленная вдоль поля сила:

$$\Delta f = f_N - f_S = m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

Из рис. 232 видно, что  $x = l \cos \alpha$ , откуда

$$\Delta f = ml\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) \cos \alpha \quad \text{или} \quad \Delta f = p\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) \cos \alpha. \quad (6)$$

Таким образом, в неоднородном магнитном поле на стрелку действует сила, пропорциональная ее магнитному моменту  $p$ , градиенту поля  $(\Delta H/\Delta x)$  и зависящая от косинуса угла  $\alpha$ .

Существенно отметить, что все результаты данного параграфа, полученные до сих пор, применимы не только для постоянного магнита, помещенного в пустоту, но и для *магнита, помещенного в магнетик*. При этом во всех формулах под  $H$  нужно подразумевать *напряженность магнитного поля в магнетике* в том месте, где расположен магнит. Объяснение этому будет дано в § 209.

Сила, действующая на магнит или соленоид, помещенный в неоднородное поле, объясняет взаимное притяжение или отталкивание магнитов, а также соленоида. В *однородном* магнитном поле магнит (или соленоид) испытывает лишь ориентирующее действие. Если же расположить два магнита (или соленоида) вблизи друг от друга, то каждый из них будет находиться в *неоднородном* поле другого и, следовательно, на него, кроме пары сил, будет еще действовать сила притяжения или отталкивания, в зависимости от того, в какую сторону возрастает поле.

Таким же образом объясняется притяжение магнитом (или соленоидом) кусков железа. Эти куски прежде всего намагничиваются в поле, а затем приобретают поступательное движение, обусловленное неоднородностью магнитного поля вблизи магнита (или соленоида).

**§ 206. Линии вектора магнитной индукции. Циркуляция вектора магнитной индукции и вектора магнитной напряженности. Граничные условия.** Аналогично тому, как в пустоте мы вводили в рассмотрение линии напряженности магнитного поля, введем в общем случае линии магнитной индукции. Под *линией магнитной индукции* подразумевается такая линия, касательная к каждой точке которой совпадает с направлением вектора индукции  $\mathbf{B}$  в данной точке. Направление линии в каждой данной точке совпадает с направлением вектора  $\mathbf{B}$  в данной точке.

Через единицу поверхности, нормальной к вектору индукции, проводим число линий индукции, равное численному значению магнитной индукции в пределах данной поверхности. Полное число линий индукции через нормальную к ним элементарную площадку  $\Delta S_0$  определит элементарный *поток*  $\Delta\Phi$  *магнитной индукции* через эту площадку:

$$\Delta\Phi = B\Delta S_0. \quad (1)$$

В случае произвольно ориентированной элементарной площадки  $\Delta S$  поток индукции  $\Delta\Phi$  через нее определится равенством:

$$\Delta\Phi = B\Delta S \cos \alpha = B_n \Delta S, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением вектора индукции  $\mathbf{B}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке  $\Delta S$ , а  $B_n$  — составляющая  $\mathbf{B}$ , нормальная к  $\Delta S$ .

Элементарный поток индукции  $\Delta\Phi$  через площадку  $\Delta S$ , как показывает соотношение (2), может быть как положительной, так и отрицательной величиной, в зависимости от того, острый или тупой угол  $\alpha$

образуют линии индукции  $\mathbf{B}$  с выбранным направлением нормали  $\mathbf{n}$ . Полный поток индукции  $\Phi$ , пронизывающий конечную поверхность, выражается алгебраической суммой элементарных потоков через все элементы поверхности, т. е.

$$\Phi = \sum \Delta\Phi = \sum B_n \Delta S. \quad (3)$$

Если поверхность замкнута, то положительным направлением нормали к поверхности будем считать направление внешней нормали, выходящей из объема; следовательно, линии, выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, дадут положительный поток, линии, входящие в объем, — отрицательный.

Опыт показывает, что *линии магнитной индукции* всегда замкнуты; следовательно, для любой замкнутой поверхности полное число входящих и выходящих линий индукции равно нулю, отсюда полный поток магнитной индукции для любой замкнутой поверхности равен нулю:

$$\Phi = 0. \quad (4)$$

Эта теорема аналогична теореме Остроградского — Гаусса в электростатике в случае отсутствия внутри объема зарядов (см. § 126) и соответствует тому факту, что никаких реальных магнитных зарядов не существует.

В § 192 мы показали, что в пустоте в магнитном поле всегда выполняется условие:  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . При наличии магнетиков поток вектора индукции  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0,$$

откуда следует, что в общем случае (при наличии магнетиков) магнитное поле всегда удовлетворяет условию:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4a)$$

Единицы, в которых измеряется поток индукции, зависят от выбора единиц индукции и площади. Если пользоваться CGSM-системой, т. е. индукцию измерять в гауссах, а площадь — в квадратных сантиметрах, то поток получается в единицах, называемых *максвеллами*; таким образом, CGSM-единица потока индукции равна потоку через  $1 \text{ см}^2$  поверхности, расположенной нормально к линиям индукции в равномерном магнитном поле с индукцией в 1 гс.

Рассмотрим циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$ . В § 198 было показано, что циркуляция вектора магнитной напряженности по произвольному замкнутому контуру равна  $4\pi I$ , где  $I$  — сила тока, охватываемого контуром. В магнетике полная напряженность магнитного поля, создаваемая как макроскопическими, так и микроскопическими токами, выражается вектором  $\mathbf{B}$ . Следовательно, циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по контуру равна

$4\pi(I + I_m)$ , где  $I$  и  $I_m$  означают силы токов макроскопических и молекулярных, охватываемых контуром:

$$\sum B_l \Delta l = 4\pi(I + I_m). \quad (5)$$

Подсчитаем молекулярный ток  $I_m$ . Очевидно, что некомпенсированный ток, протекающий внутри контура, будет создан теми молекулами, молекулярные токи которых пересечены линией контура. Рассмотрим, какой некомпенсированный ток создается теми молекулярными токами, которые пересечены элементом  $\Delta l$  контура. Представим себе, что молекулярные токи являются круговыми токами силы  $i$  и с площадью, обтекаемой контуром, равной  $S$ . Такому молекулярному току соответствует магнитный момент  $p_m$ , численно равный  $iS$ ; направление момента  $p_m$  образует угол  $\alpha$  с элементом контура  $\Delta l$  (рис. 233). Очевидно,  $\Delta l$  пересечет только те молекулярные токи, центры которых

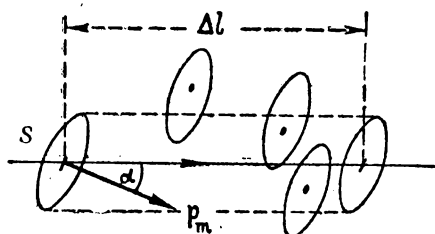


Рис. 233. К подсчету числа молекулярных токов.

падают внутрь цилиндра с основанием  $S$  и образующей  $\Delta l$ . Если  $n_0$  — число молекул в единице объема, то внутрь такого цилиндра попадет  $n_0 S \Delta l \cos \alpha$  центров молекулярных токов. Эти молекулярные токи образуют некомпенсированный ток, охватываемый контуром обхода на его участке  $\Delta l$ . Сила некомпенсированного тока на участке  $\Delta l$  равна:

$$in_0 S \Delta l \cos \alpha. \quad (6)$$

Силу молекулярного тока  $I_m$ , охватываемого всем контуром обхода, получим, просуммировав выражение (6) по всей длине контура:

$$I_m = \sum in_0 S \cos \alpha \Delta l. \quad (7)$$

Но, по сказанному,  $iS$  — это величина момента молекулярного тока  $p_m$ ; следовательно,  $in_0 S$  представит собой момент единицы объема, т. е. вектор намагничивания  $P_m$ . Таким образом, по (7):

$$I_m = \sum P_m \Delta l \cos \alpha = \sum (P_m)_l \Delta l,$$

где  $(P_m)_l$  — проекция вектора намагничивания на элемент  $\Delta l$ . Подставляя полученное значение  $I_m$  в выражение (5) для циркуляции вектора  $B$ , получим:

$$\sum B_l \Delta l = 4\pi \left[ I + \sum (P_m)_l \Delta l \right].$$

Перенесем в левую часть равенства члены, содержащие проекции вектора поляризации, тогда имеем:

$$\sum [B_t - 4\pi (P_m)_t] \Delta l = 4\pi I.$$

Как было сказано выше,  $\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{P}_m$  представляет собой вектор напряженности:

$$\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{P}_m = \mathbf{H}.$$

Следовательно, мы получаем выражение для циркуляции вектора магнитной напряженности:

$$\sum H_t \Delta l = 4\pi I.$$

Таким образом, циркуляция вектора магнитной напряженности и при наличии магнетика равна произведению  $4\pi$  на силу *макроскопического* тока, охватываемого контуром; величина молекулярного тока в выражение циркуляции вектора магнитной напряженности не входит.

Рассмотрим поведение линий индукции на границе двух веществ с разными магнитными проницаемостями. Предположим, что мы имеем границу веществ, магнитные проницаемости которых обозначим через  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Если мы возьмем малый участок  $\Delta S$  границы раздела, то его можно считать плоским, а поле вблизи него — с каждой стороны однородным. Значение вектора индукции в веществе с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  обозначим через  $\mathbf{B}_1$ , а в веществе с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  — через  $\mathbf{B}_2$ . Вблизи точек границы можно вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  разложить на две составляющие, из которых одна  $\mathbf{B}_n$  будет перпендикулярна к границе раздела, а другая  $\mathbf{B}_t$  — параллельна границе. Тогда:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1n} + \mathbf{B}_{1t}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{2n} + \mathbf{B}_{2t}.$$

Установим сперва связь между нормальными составляющими векторов магнитной индукции с двух сторон границы. Для этого рассмотрим поток магнитной индукции через замкнутую поверхность в виде ломаного цилиндра (рис. 234), основания которого  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  равны и параллельны участку  $\Delta S$  границы, а образующие параллельны линиям индукции в тех веществах, в которых расположена данная часть цилиндра. Полный поток через поверхность этого цилиндра, как через всякую замкнутую поверхность, равен, по (4), нулю.

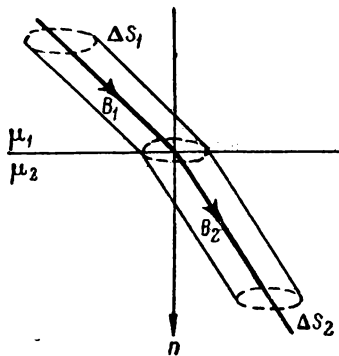


Рис. 234. Поток вектора индукции через площадки  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$ .



Этот поток складывается из двух частей — потока  $\Delta\Phi_1$  через основание  $\Delta S_1$  и потока  $\Delta\Phi_2$  через основание  $\Delta S_2$ , так как поток через боковую поверхность равен нулю, вследствие ее параллельности линиям индукции. Следовательно, имеем:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 0. \quad (8)$$

При направлении линий индукции, выбранном на рис. 234, поток  $\Delta\Phi_2$  положителен, поток  $\Delta\Phi_1$  — отрицателен. Направим нормаль  $\mathbf{n}$  к границе раздела от первого вещества ко второму, тогда для основания  $\Delta S_2$  это направление будет *внешней* нормалью, для основания  $\Delta S_1$  оно будет противоположно направлению внешней нормали, откуда для потоков  $\Delta\Phi_1$  и  $\Delta\Phi_2$  через основания  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  получим выражения:

$$\Delta\Phi_1 = -B_{1n}\Delta S_1, \quad \Delta\Phi_2 = B_{2n}\Delta S_2.$$

Знак минус в первом равенстве получается вследствие того, что  $B_{1n}$  представляет собой проекцию  $\mathbf{B}$  на направление, противоположное направлению внешней нормали к элементу поверхности  $\Delta S_1$ . Подставляя значения  $\Delta\Phi_1$  и  $\Delta\Phi_2$  в выражение (8) и замечая, что  $\Delta S_1 = \Delta S_2$ , имеем:

$$-B_{1n} + B_{2n} = 0,$$

откуда

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (9)$$

Таким образом, *нормальная составляющая вектора магнитной индукции не меняется при переходе из одного вещества в другое.*

Для выяснения соотношения между касательными составляющими векторов  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  обратимся к выражению циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ .

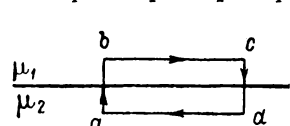


Рис. 235. Контур обхода у границы двух магнетиков.

В качестве контура, по которому берется циркуляция, выберем замкнутый контур  $abcd$  (рис. 235), стороны  $ad$  и  $bc$  которого параллельны границе раздела веществ, а стороны  $ab$  и  $dc$  бесконечно малы. Поскольку на границе веществ предполагается отсутствие токов, постольку циркуляция  $\mathbf{H}$  по этому контуру равна нулю. С другой стороны, эта циркуляция может быть выражена через

векторы  $\mathbf{H}$  в обеих средах. Будем обходить контур  $abcd$  по часовой стрелке и выберем за положительное направление касательной к границе раздела слева направо (рис. 235). Так как участки  $ab$  и  $dc$  предполагаются бесконечно малыми, то вся циркуляция выражается через члены, относящиеся к участкам  $bc$  и  $da$ . Обозначая через  $H_1$  и  $H_2$  напряженности в обоих веществах соответственно, получаем:

$$H_1 l_{bc} - H_2 l_{da} = 0.$$

Знак минус во втором члене получается вследствие того, что в нижней среде выбранное направление обхода противоположно положительному направлению касательной. Сокращая на  $bc = da$ , имеем:

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (10)$$

т. е. касательная составляющая вектора напряженности не меняется при переходе через границу раздела двух веществ. Переходя к вектору магнитной индукции, в силу соотношения  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , получим:

$$H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_1}, \quad H_{2t} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}.$$

Здесь  $B_{1t}$  и  $B_{2t}$  означают проекции векторов  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  на касательную к границе раздела. Подставляя эти значения  $H_{1t}$  и  $H_{2t}$  в (9), получим:

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (11)$$

Таким образом, касательные составляющие вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  с двух сторон границы веществ относятся, как магнитные проницаемости  $\mu$  этих веществ.

Соотношения (9) и (11) определяют изменение вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  при переходе через границу. Легко видеть, что в том случае, когда граница не перпендикулярна к линиям индукции, линии индукции претерпевают преломление. Разлагая векторы  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  на составляющие, параллельные границе и перпендикулярные к границе (рис. 236), мы получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\frac{B_{2t}}{B_{2n}}},$$

откуда, пользуясь соотношениями (9) и (11), найдем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (12)$$

т. е. тангенсы угла наклона векторов индукции к нормали в двух веществах относятся, как магнитные проницаемости веществ. При переходе из вещества с меньшим значением магнитной проницаемости  $\mu$  в вещество с большим значением магнитной проницаемости линии индукции отклоняются от перпендикуляра и сгущаются, т. е. число

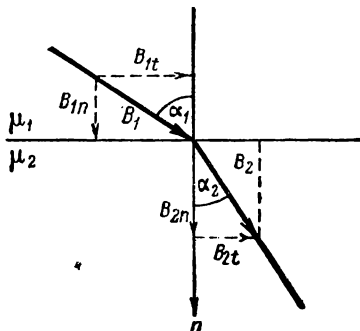


Рис. 236. Преломление линий магнитной индукции  $\mathbf{B}$  на границе двух магнетиков.

их, приходящееся на единицу нормальной к ним поверхности, становится большим. Если поверхность раздела перпендикулярна к линиям индукции в одном веществе, то линии индукции переходят в другое вещество без преломления, при этом в силу того, что  $B_{1t} = 0$  и  $B_{2t} = 0$ , векторы индукции будут равны своим нормальным составляющим:

$$B_1 = B_{1n}, \quad B_2 = B_{2n},$$

и из условия (9) мы получим:

$$B_1 = B_2,$$

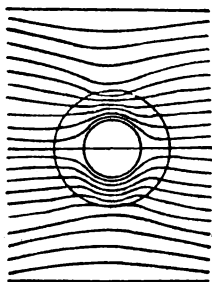


Рис. 237. Расположение линий магнитной индукции в теле с полостью.

т. е. вектор индукции в этом случае не меняется при переходе через границу двух веществ. Этим соотношением мы уже пользовались в § 203.

На законе преломления линий индукции основана так называемая *магнитная защита*. Магнитная защита обусловлена тем, что, благодаря преломлению линий индукции, внутри полости, находящейся в веществе с большим значением магнитной проницаемости, магнитное поле оказывается близким к нулю. На рис. 237 приведен пример расположения линий индукции в случае тела с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ , имеющего полость. Редкое расположение линий индукции внутри полости указывает на слабость магнитного поля внутри полости. Практически для магнитной защиты употребляются массивные железные футляры.

**§ 207. Аналогия между электростатическим и магнитным полями.** Исторически учение о магнетизме возникло первоначально как учение о постоянных магнитах. По преданию, пастухи Малой Азии близ древнего города Магнезия заметили, что находимые там куски железняка притягиваются друг к другу. От названия города Магнезия возникло слово магнит. Куски магнитного железняка ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) обладают заметным остаточным намагничиванием и, таким образом, представляют собой естественные постоянные магниты.

В конце XVIII столетия Кулон, установив закон взаимодействия между точечными электрическими зарядами, пытался установить аналогичный закон для взаимодействия магнитов. Он действительно обнаружил, что если взять два тонких и длинных магнита, то сила взаимодействия между их полюсами при условии, что расстояние между полюсами мало по сравнению с длиной магнитов и велико по сравнению с их поперечным сечением, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Кулон ввел понятие о „количестве магнетизма“, благодаря чему все дальнейшее учение о магнитном поле строилось по аналогии с учением о поле электростатическом. Эта аналогия нашла выражение в сходстве названий величин, характеризующих электростатическое и магнитное поля: мы говорим о на-

пряженности электростатического поля  $E$  и электростатической индукции  $D$ , о напряженности магнитного поля  $H$  и магнитной индукции  $B$ . Однако эти аналогии оказались далеко не всегда правильными и соответствующими природе электростатических и магнитных полей.

Мы видели, что между электростатическими и магнитными явлениями имеется глубокое различие. Существуют электрические заряды; линии напряженности электростатического поля начинаются на одних зарядах и оканчиваются на других или уходят в бесконечность. Магнитное же поле возникает около электрических токов, линии магнитной напряженности охватывают ток в виде замкнутых кривых или уходят в бесконечность; никаких магнитных зарядов реально не существует. Аналогия может быть проведена лишь между магнитным полем соленоида или прямого постоянного магнита (в области пространства, внешней по отношению к соленоиду или магниту) и полем электрического диполя.

Закон обратной пропорциональности сил квадрату расстояния между взаимодействующими телами (закон Кулона) соответствует полю, характеризуемому равномерным радиальным распределением линий напряженности. Электрически заряженные тела на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, дают именно такое распределение линий напряженности (см. рис. 16); в соответствии с этим силы взаимодействия между заряженными телами весьма точно выражаются законом Кулона, если только их размеры малы по сравнению с расстоянием между ними. Никакой же комбинацией токов или постоянных магнитов нельзя осуществить магнитное поле с равномерным радиальным распределением линий магнитной напряженности. Вблизи полюса длинного и тонкого магнита лишь в ограниченной области (обведенной пунктирной линией на рис. 238) линии напряженности расходятся радиально. В соответствии с этим, как мы только что указали, закон Кулона для взаимодействия магнитных полюсов имеет весьма ограниченный смысл.

В учении об электростатическом поле мы подразумевали под напряженностью электростатического поля в пустоте  $E$  величину, определяющую силу, действующую на заряд  $q$ :

$$f = qE. \quad (1)$$

В присутствии диэлектрика под влиянием его поляризации образуется добавочное поле  $E'$ , откуда:

$$E = E_0 + E', \quad (2)$$

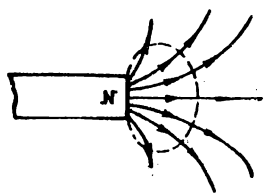


Рис. 238. Линии магнитной напряженности вблизи конца прямого и длинного магнита.

где  $E_0$  — напряженность поля, создаваемого данными („свободными“) зарядами. Под *электростатической индукцией*  $D$  мы подразумевали вектор, связанный с вектором напряженности поля  $E$  в данной точке соотношением

$$D = \epsilon E. \quad (3)$$

Состояние поляризованного диэлектрика мы определяли вектором поляризации:

$$P_e = \chi_e E. \quad (4)$$

Коэффициент поляризации  $\chi_e$  связан с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  соотношением  $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ ; на основании этого соотношения из формул (3) и (4) получаем:

$$D = E + 4\pi P_e. \quad (5)$$

В случае однородного диэлектрика, сплошь заполняющего пространство, занятое полем, напряженность добавочного поля для всех диэлектриков направлена против  $E_0$  и удовлетворяет равенству (см. § 142)

$$E' = -4\pi P_e. \quad (6)$$

В этом случае из сравнения формул (2) и (5) получаем:  $D = E_0$ , т. е. вектор электростатической индукции  $D$  в однородном диэлектрике, сплошь заполняющем пространство, занятое полем, совпадает с напряженностью поля  $E_0$  свободных зарядов в пустоте. В общем случае такое совпадение *не имеет места* (исключая особо симметричные случаи; см. сноску на стр. 80).

В области магнитных явлений, как мы видели (см. сказанное в § 196), сила, действующая на элемент тока в пустоте, равна

$$\Delta f = H_0 / \Delta l \sin \alpha, \quad (1a)$$

где  $H_0$  — напряженность магнитного поля в пустоте. При наличии магнетика полная напряженность (называемая магнитной индукцией  $B$ ) складывается из напряженности  $H_0$  магнитного поля, образованного токами, текущими по проводам, и добавочной напряженности  $H'$ , создаваемой намагниченным магнетиком:

$$B = H_0 + H'. \quad (2a)$$

Под *напряженностью магнитного поля*  $H$  в *магнетике* подразумевается вектор, связанный с вектором магнитной индукции  $B$  в данной точке соотношением:

$$H = \frac{1}{\mu} B. \quad (3a)$$

<sup>1</sup> Для различения соответственных электрических и магнитных величин мы будем употреблять индексы  $e$  и  $m$ .

Состояние магнетика характеризуется вектором намагничения:

$$\mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H} = \frac{\chi_m}{\mu} \mathbf{B}. \quad (4a)$$

Коэффициент намагничения  $\chi_m$  связан с магнитной проницаемостью  $\mu$  соотношением:  $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ . На основании этого соотношения из формул (3a) и (4a) получается:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{P}_m. \quad (5a)$$

В случае однородного магнетика, сплошь заполняющего пространство, занятое полем, напряженность добавочного поля  $\mathbf{H}'$  может быть направлена *как против* направления  $\mathbf{H}_0$  (диамагнитные тела), *так и по направлению*  $\mathbf{H}_0$  (парамагнитные тела). В обоих случаях имеет место равенство (см. § 202):

$$\mathbf{H}' = 4\pi\mathbf{P}_m. \quad (6a)$$

В этом случае из сравнения формул (2a) и (5a) получаем, что  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ . Однако надо иметь в виду, что такое *совпадение напряженности*  $\mathbf{H} = 1/\mu \mathbf{B}$  *магнитного поля в магнетике с напряженностью*  $\mathbf{H}_0$  *магнитного поля, вызываемого в пустоте токами, текущими по проводам, имеет место лишь для однородного магнетика, сплошь заполняющего пространство, занятое полем.*

В общем случае неоднородного магнетика такое совпадение не имеет места. Действительно, легко убедиться, что напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в неоднородном магнетике не совпадает с напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , вызванной токами, текущими по проводам, и находимой с помощью закона Био — Савара — Лапласа. В § 206 мы видели, что на границе двух магнетиков нормальная составляющая вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  удовлетворяет условию [см. формулу (6)]:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Воспользовавшись связью между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , выражаемой формулой (3a), получим:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

т. е. мы находим, что *на границе раздела двух магнетиков нормальная составляющая магнитной напряженности*  $H_n$  *терпит разрыв*; этим  $\mathbf{H}$  отлично от напряженности  $\mathbf{H}_0$ , линии которой проходят повсюду непрерывно. Также в неоднородном магнетике, свойства которого меняются непрерывно от точки к точке, происходит изменение  $\mathbf{H}$ , вызванное неоднородностью магнетика.

Из сравнения формул (2) и (2a) вытекает, что (вопреки названию) *магнитная индукция*  $\mathbf{B}$  *аналогична напряженности электростатического поля*  $\mathbf{E}$ . Разница заключается в том, что добавочное

магнитное поле  $\mathbf{H}$  может быть направлено как обратно по отношению к  $\mathbf{H}_0$  (диамагнитные тела), так и в ту же сторону, что  $\mathbf{H}_0$  (парамагнитные тела), отсюда магнитная индукция  $\mathbf{B}$  может быть как меньше, так и больше  $\mathbf{H}_0$ .

*Напряженность магнитного поля в магнетике  $\mathbf{H}$  аналогична электростатической индукции  $\mathbf{D}$* , как это следует из сравнения формул (3), (5) и (3а), (5а). Из сравнения тех же формул следует, что величина, обратная магнитной проницаемости,  $1/\mu$  аналогична диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Сравнение формул (4) и (4а) показывает, что  $\chi_m/\mu$  аналогично  $\chi_e$ . Мы видели также, что вектор электростатической индукции  $\mathbf{D}$  совпадает с вектором напряженности электростатического поля свободных зарядов  $\mathbf{E}_0$  только в случае однородного диэлектрика, сплошь заполняющего пространство, занятое полем; в общем случае вектор  $\mathbf{D}$  отличался от  $\mathbf{E}_0$ ; следовательно, и в этом отношении вектор  $\mathbf{D}$  аналогичен  $\mathbf{H}$ .

Диэлектрики подобны диамагнитным веществам. Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  для подавляющего большинства веществ не зависит от  $\mathbf{E}$ , в соответствии с этим большинство тел в электростатике не обнаруживает гистерезиса и остаточной электростатической поляризации. Исключение составляет сегнетова соль и некоторые соли титана (см. § 146), которые обнаруживают гистерезис и остаточную электризацию и в этом отношении аналогичны ферромагнитным веществам.

**§ 208. Определение векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  по силам, действующим на рамку с током.** В § 200 мы указали на трудности определения вектора  $\mathbf{B}$  по силам, действующим на провода, погруженные в магнетик. В твердом магнетике надо сделать полость; помещая внутрь нее рамку с током, можно определить напряженность магнитного поля в полости. Величина этой напряженности при прочих равных условиях зависит от размеров и формы полости.

Покажем, что можно выбрать такие форму и размеры полости, что значение измеренной в ней напряженности будет совпадать со значениями либо  $\mathbf{H}$ , либо  $\mathbf{B}$  для точек *внутри* магнетика. Внутри полости части магнетика, внешние по отношению к этой полости, создадут добавочную напряженность поля  $\mathbf{H}'$ , в результате чего действие на рамку определится напряженностью поля внутри полости  $\mathbf{H}_{\text{пол}}$ , равной

$$\mathbf{H}_{\text{пол}} = \mathbf{B} + \mathbf{H}'. \quad (1)$$

Значение  $\mathbf{H}'$  будет зависеть от размеров и формы полости.

Выделим внутри магнетика полость в виде узкого длинного цилиндра, ось которого параллельна вектору  $\mathbf{B}$ . Будем считать, что намагничение магнетика вызвано одинаковой ориентацией молекулярных токов. Тогда на границе полости (рис. 239а) возникает некомпенсированный ток  $I'$ ; если элементарные токи направлены по часовой стрелке, то ток  $I'$  направлен против часовой стрелки. Очевидно, этот

ток  $I'$  равен по величине и противоположен по направлению току  $I$  (рис. 239 б), возникающему в результате сложения элементарных токов на поверхности куска магнетика, совпадающего по размерам и форме с размерами и формой полости. На стр. 315 было показано, что такой ток  $I$  создает внутри обтекаемого им куска магнетика напряженность поля:

$$H' = 4\pi I = 4\pi P_m,$$

где  $P_m$  — численное значение вектора намагничивания. (Строго говоря, эта формула справедлива лишь для бесконечно длинного цилиндра. Для цилиндра конечной длины она выполняется в средней его части тем точнее, чем меньше радиус цилиндра по сравнению с его длиной.) Так как ток  $I'$  направлен противоположно току  $I$ , то, следовательно, он создает внутри полости напряженность

$$H'' = -H' = -4\pi P_m.$$

Отсюда, по (1), напряженность поля внутри полости указанной формы равна:

$$H_{\text{пол}} = B + H'' = B - 4\pi P_m$$

или, по (5а) § 207,

$$H_{\text{пол}} = H.$$

Следовательно, мы получаем, что напряженность поля в средней части полости в виде узкого длинного цилиндра, ось которого параллельна вектору  $\mathbf{B}$ , совпадает с напряженностью  $\mathbf{H}$  внутри магнетика, определяемой равенством (3а) § 207.

Если внутрь такой полости поместить рамку, то момент действующих на нее сил позволит измерить  $\mathbf{H}$ .

Если полость сделать в виде короткого широкого цилиндра, основания которого перпендикулярны к направлению вектора  $\mathbf{B}$ , то в средней части такой полости ток  $I'$  создаст лишь исчезающе слабое поле:  $H'' \cong 0$ ; следовательно, внутри такой полости:

$$H_{\text{пол}} = B.$$

Таким образом, в средней части полости в виде короткого широкого цилиндра, ось которого параллельна вектору  $\mathbf{B}$ , напряженность поля совпадает со значением вектора индукции  $\mathbf{B}$  в магнетике.

В § 145 мы видели, что напряженность электростатического поля в средней части полости, сделанной в диэлектрике в виде узкого длинного цилиндра, образующие которого параллельны линиям напряженности, совпадает с напряженностью поля  $\mathbf{E}$  в диэлектрике.

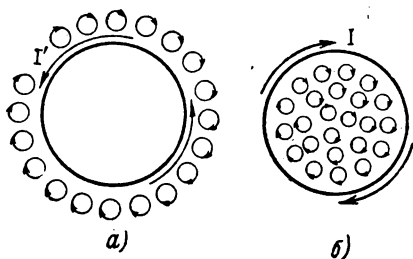


Рис. 239. Сложение молекулярных токов на поверхности полости.



Если же полость в диэлектрике имеет вид короткого цилиндра, основания которого перпендикулярны к линиям напряженности, то напряженность поля в средней части такой полости совпадает со значением вектора электростатической индукции  $\mathbf{D}$  в диэлектрике. Отсюда может показаться, что вопреки отмеченной нами аналогии следует считать вектор  $\mathbf{H}$  аналогичным  $\mathbf{E}$  и вектор  $\mathbf{B}$  — аналогичным  $\mathbf{D}$ . Однако это не так. В случае диэлектрика напряженность поля внутри узкого длинного цилиндра совпадает с  $\mathbf{E}$ , так как добавочные поверхностные заряды  $\sigma'$ , появляющиеся на поверхностях полости, не играют для точек внутри полости заметной роли. В случае же магнетика добавочные токи  $I'$ , возникающие на поверхности полости, не играют заметной роли для полости в виде короткого широкого цилиндра. При этом напряженность поля в полости совпадает с  $\mathbf{B}$ . Таким образом, снова получается, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  аналогичны друг другу. Также получается, что в силу диэлектрика заметную роль играют добавочные поверхностные заряды для полости в виде короткого и широкого цилиндра, а в случае магнетика — заметную роль играют добавочные токи для полости в виде узкого и длинного цилиндра. Отсюда, в соответствии со сказанным выше, получаем, что вектор  $\mathbf{D}$  следует сопоставлять вектору  $\mathbf{H}$ .

Наконец, укажем, что смысл вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  может быть выяснен и иным способом, а именно путем перехода к рассмотрению микроскопической структуры вещества.

Вместо того, чтобы пытаться определить вектор  $\mathbf{B}$  по действию на какой-либо макроскопический провод, по которому течет ток, мы можем определить вектор  $\mathbf{B}$  по силе, действующей на элементарный ток, вызванный движением какой-либо элементарной заряженной частицы. Например, мы можем рассматривать электрон, движущийся в определенном атоме по круговой орбите. Такой движущийся электрон эквивалентен круговому току, и он испытывает действие внешнего магнитного поля. Напряженность поля, определенная с помощью такого элементарного тока, сложится из напряженности  $\mathbf{H}_0$ , вызванной токами, текущими по макроскопическим проводам, и из напряженности магнитного поля, вызванного соседними молекулами. Обозначим напряженность этого суммарного поля через  $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ . Значение  $\mathbf{H}_{\text{микро}}$  получится различное, в зависимости от того, на каком расстоянии от той или другой молекулы мы расположим наш элементарный ток. Но в среднем для многих случайно выбранных точек получится значение  $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ , которое определится лишь значениями  $\mathbf{H}_0$  и того среднего добавочного поля  $\mathbf{H}'$ , которое существует внутри магнетика в результате упорядочения в ориентации его частиц. Таким образом,

$$\mathbf{H}_{\text{микро}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

т. е. значение  $\mathbf{H}_{\text{микро}}$  совпадает со значением вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

**§ 209. Различие между соленоидом и магнитом.** Указанные в предыдущем параграфе различия в физическом смысле векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  наиболее отчетливо проявляются в случае взаимодействия соленоидов и магнитов.

При помещении соленоида в какой-либо магнетик, этот *магнетик заполняет все пространство как вне соленоида, так и внутри него*. Провода, образующие соленоид, погружены в магнетик. Если магнетик однороден и безграничен, то на каждый элемент провода со стороны внешнего магнитного поля, по формуле (2а) § 200, действует сила

$$\Delta f = IB \sin \alpha \cdot \Delta l;$$

момент сил, действующих на соленоид в целом, определяется значением магнитной индукции  $B = \mu H$ , где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды. Заполнение пространства однородным безграничным магнетиком, при неизменности токов, вызывающих магнитное поле, ведет к увеличению момента сил, действующих на соленоид, в  $\mu$  раз.

Иначе обстоит дело с магнитом. Магнит представляет собою твердое тело, и часть пространства, занятая самим магнитом, не может быть одновременно занята другим магнетиком. Иными словами, *магнит всегда оказывается помещенным в полость внутри магнетика, и роль этой полости необходимо учитывать*.

На магнит будет действовать то поле, которое возникает внутри полости. Пусть прямой длинный магнит расположен в магнитном поле, созданном некоторыми токами, вдоль его линий напряженности. Тогда полость имеет вид узкого длинного цилиндра, ось которого параллельна линиям напряженности. Как мы видели в § 208, внутри такой полости напряженность поля равна  $H$ . В результате *на прямой длинный магнит действует со стороны магнитного поля тока сила, определяемая напряженностью поля  $H$* . Следовательно, наличие магнетика не меняет силы, действующей на магнит. В § 205 было показано, что сила, действующая на магнитный полюс  $m$ , равна

$$f = mH;$$

теперь мы видим, что эта формула справедлива как в пустоте, так и при наличии магнетика при условии, что мы рассматриваем прямой длинный магнит.

В пустоте прямой длинный магнит и соленоид вполне эквивалентны друг другу, если только равны их магнитные моменты. Но при наличии магнетика сказывается разница между магнитом и соленоидом. В самом деле, если мы имеем два соленоида и сила взаимодействия между ними в пустоте равна  $f$ , то при заполнении пространства магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  сила взаимодействия между ними становится равной  $\mu f$ . Если же мы рассматриваем взаимодействие соленоида и прямого длинного магнита, то сила взаимодействия

между ними останется прежней при заполнении пространства магнетиком. Таким образом, замена одного соленоида магнитом уменьшила силу в  $\mu$  раз. Если мы заменим оба соленоида магнитами, то необходимо будет учесть наличие в магнетике двух полостей. Оказывается, что сила взаимодействия между двумя прямыми длинными магнитами благодаря этому уменьшится еще в  $\mu$  раз. Таким образом, *если два прямых длинных магнита в пустоте взаимодействуют с силой  $f$ , то при заполнении пространства магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  сила взаимодействия между ними становится равной  $\frac{1}{\mu} f$ .*

Резюмируя все сказанное выше, получаем:

- 1) сила взаимодействия между токами прямо пропорциональна  $\mu$ ;
- 2) сила взаимодействия между прямым длинным магнитом и током не зависит от  $\mu$ ;
- 3) сила взаимодействия между двумя прямыми длинными магнитами обратно пропорциональна  $\mu$ .

Указанная зависимость сил взаимодействия для постоянных магнитов от  $\mu$  справедлива только для прямых длинных магнитов. Для магнитов произвольной формы никаких простых зависимостей сил от магнитной проницаемости  $\mu$  магнетика, в который погружен магнит, указать нельзя, так как роль магнетика, как сказано, зависит от формы той полости, которую образует в нем магнит.

**§ 210. Работа перемещения контура с током в магнитном поле.** В § 200 было показано, что на элемент тока, находящийся в магнитном поле, действует сила  $\Delta f = BI \Delta l \sin \alpha$ , направление которой определяется правилом левой руки.

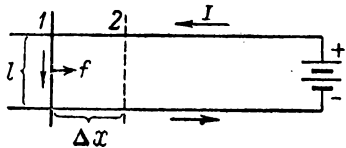


Рис. 240. Контур с током с подвижным прямолинейным участком  $l$ .

Отсюда следует, что перемещение участка с током в магнитном поле связано с работой, совершаемой этой силой. Найдем выражение для этой работы.

Предположим, что мы имеем контур с подвижным прямолинейным участком длиной  $l$  (рис. 240). Предположим, что этот контур находится в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости чертежа — за чертеж. Вектор индукции  $B$ , следовательно, постоянен и направлен перпендикулярно к участку  $l$ . Применяя правило левой руки, мы видим, что на подвижный участок контура  $l$  действует сила  $f$ , направленная направо. Так как  $\sin \alpha = 1$ , то величина этой силы равна

$$f = IBl.$$

Под действием этой силы участок будет двигаться направо. Силу тока  $I$  будем считать все время постоянной, тогда при перемещении

участка из положения 1 в положение 2, расстояние между которыми равно  $\Delta x$ , сила  $f$  совершит работу:

$$\Delta A = f \cdot \Delta x = IB l \Delta x.$$

Произведение  $l \Delta x$  равно площади  $\Delta S$ , перекрытой участком  $l$  при его движении, откуда

$$\Delta A = IB \Delta S. \quad (1)$$

Вводя в (1) поток магнитной индукции

$$\Delta \Phi = B \cdot \Delta S, \quad (2)$$

получим выражение для работы:

$$\Delta A = I \cdot \Delta \Phi. \quad (3)$$

Это же выражение справедливо и в том случае, если отрезок  $l$  перемещается не параллельно силе  $f$ . В этом случае

$$\Delta A = f \Delta x \cos \beta = IB l \Delta x \cos \beta.$$

Но  $l \Delta x \cos \beta$  снова представляет собой площадь, перекрытую участком  $l$ , откуда

$$\Delta A = IB \Delta S = I \cdot \Delta \Phi.$$

Таким образом: *механическая работа перемещения участка с током в магнитном поле равна произведению силы тока в участке на величину пересеченного потока магнитной индукции.*

Полученный результат легко обобщить на случай произвольного поля и произвольной взаимной ориентации участка контура и поля.

Возьмем малый участок  $dl$  контура с током и разобьем перемещение этого участка на малые смещения  $dx$ ; будем считать участки  $dl$  и  $dx$  столь малыми, что в их пределах вектор индукции постоянен. Пусть вектор  $\mathbf{B}$  образует произвольный угол  $\alpha$  с направлением  $dl$  (рис. 241). Сила  $df$ , действующая на участок  $dl$ , равна

$$df = IB \sin \alpha \cdot dl.$$

Направление силы  $df$ , которая перпендикулярна к  $\mathbf{B}$  и к  $dl$ , определяется правилом левой руки. При перемещении отрезка  $dl$  на величину  $dx$  отрезок перекрывает некоторую плоскую поверхность площади  $dS$ . На этом перемещении сила совершает работу:

$$dA = df_1 \cdot \cos \beta \cdot dx,$$

где  $df_1$  означает проекцию силы  $df$  на поверхность перемещения, а  $\beta$  — угол между  $df_1$  и  $dx$ . Так как сила, действующая на элемент тока в магнитном

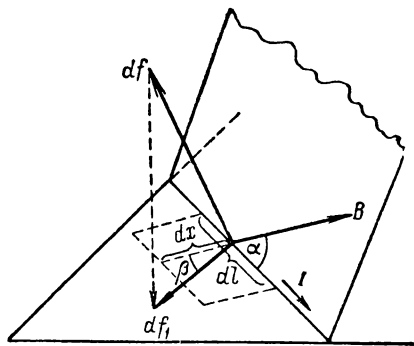


Рис. 241. К подсчету работы перемещения участка с током  $dl$  в магнитном поле.

поле, всегда перпендикулярна вектору магнитной индукции, то очевидно, что проекция силы  $df_1$ , лежащая в плоскости перемещения, создается перпендикулярной к плоскости перемещения составляющей вектора индукции, откуда получаем:

$$df_1 = IB_{\perp} dl,$$

где  $B_{\perp}$  — проекция вектора индукции на перпендикуляр к поверхности перемещения. Отсюда

$$dA = IB_{\perp} \cos \beta \cdot dl dx.$$

Но  $\cos \beta dl dx = dS$ , откуда

$$dA = IB_{\perp} dS.$$

Произведение площади пересеченной поверхности  $dS$  на проекцию вектора магнитной индукции на перпендикуляр к этой поверхности  $B_{\perp}$  представляет собой пересеченный элементом  $dl$  поток магнитной индукции  $d\Phi$ , откуда

$$dA = Id\Phi,$$

что совпадает по смыслу с формулой (3).

Полученный результат можно применить для подсчета работы перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле, при условии, что сила тока за все время перемещения контура поддерживается постоянной. Для этого, очевидно, надо мысленно разбить контур на отдельные участки и просуммировать работы сил, приложенных к этим участкам. На рис. 242 представлен контур с током, который перемещается из положения 1 в положение 2. Перемещение контура пусть происходит в плоскости чертежа, а магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости чертежа — за чертеж; ток в

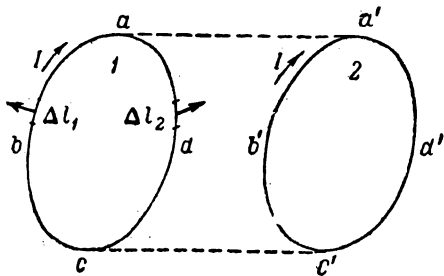


Рис. 242. К подсчету работы перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле.

контуре идет по часовой стрелке. В таком случае силы, приложенные к каждому элементу  $\Delta l_1$  половины контура  $abc$ , образуют тупой угол с направлением перемещения и, следовательно, совершают отрицательную работу. Полная работа сил, приложенных к участку  $abc$ , получится, если мы просуммируем работы для отдельных элементов. Работа перемещения каждого элемента равна произведению силы тока на пересеченный при его движении поток индукции, следовательно, сумма работ выразится произведением силы тока  $I$  на пересеченный участком  $abc$  поток индукции при перемещении участка в положение  $a'b'c'$ :

$$A_1 = -I\Phi_1.$$

Из рис. 242 видно, что  $\Phi_1$  представляет собой поток магнитной индукции через площадь фигуры  $abcc'b'a'$ . Работа перемещения участка  $adc$  в положение  $a'd'c'$  будет положительна, так как, согласно правилу левой руки, на элементы  $\Delta l_2$  этого участка действуют силы, образующие острый угол с направлением перемещения. Численное значение этой работы равно произведению силы тока  $I$  на пересеченный участком  $adc$  поток магнитной индукции; этот поток  $\Phi_2$ , очевидно, равен потоку через площадь фигуры  $adcc'd'd'a'$ .

Таким образом, получаем:

$$A_2 = I\Phi_2.$$

Результирующая работа  $A$  перемещения контура равна сумме рассмотренных работ:

$$A = A_1 + A_2 = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (4)$$

Легко видеть, что разность  $\Phi_2 - \Phi_1$  равна изменению потока магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром с током. Действительно: поток через поверхность  $adcc'b'a'$  входит как составная часть и в поток  $\Phi_1$  и в поток  $\Phi_2$ , и, следовательно, разность  $\Phi_2 - \Phi_1$  не содержит потока через эту поверхность. Остается разность потоков через поверхности  $a'b'c'd'$  и  $abcd$ . Окончательно имеем: *механическая работа, совершаемая при перемещении замкнутого контура, сила тока в котором постоянна, из одного положения в другое, равна произведению силы тока в контуре на разность потоков магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром в начальном и конечном положениях контура.* Следовательно, если поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром, не меняется, то работа перемещения равна нулю. Если, например, контур с током перемещается в однородном магнитном поле поступательно, то при этом поток индукции через площадь контура не меняется, и результирующая работа равна нулю.

При выводе формул (3) и (4) мы предполагали, что сила тока  $I$  за все время перемещения остается постоянной. Впоследствии мы увидим (гл. XX), что явление *электромагнитной индукции* при известных условиях может менять силу тока в контуре во время его перемещения. Поэтому, если в этих случаях специально не предпринять мер по поддержанию тока  $I$  в контуре постоянным (например, с помощью дополнительных батарей и реостатов, подключаемых в нужные моменты времени), то формулы (3) и (4) будут верны *лишь для бесконечно малого перемещения контура, за время которого силу тока  $I$  можно считать постоянной.* Тогда работа конечного перемещения может быть определена путем интегрирования.

Выражение (4) дает не только величину, но и знак совершенной работы. Для этого нужно установить, какой поток индукции считать положительным. Будем считать, что положительный поток создает те

линии магнитной индукции, которые образуют острый угол с направлением положительной нормали к поверхности контура; положительное же направление нормали  $N$  связано правилом буравчика с направлением тока в контуре (рис. 243). Тогда, если поток индукции через площадь контура возрастает, то силы, действующие на элементы контура, совершают результирующую положительную работу; если поток через площадь, ограниченную контуром, убывает, результирующая работа сил, приложенных к контуру, отрицательна.

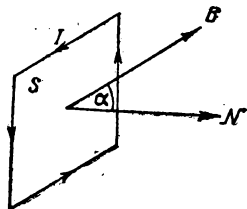


Рис. 243. К подсчету потока магнитной индукции через площадь рамки.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Работа поворота рамки в однородном магнитном поле. Рассмотрим плоскую рамку с площадью  $S$ , по которой течет постоянный ток  $I$ . Проведем нормаль  $N$  к плоскости рамки, сопоставив ее положительное направление с направлением тока в рамке по правилу буравчика.

Пусть нормаль  $N$  составляет угол  $\alpha$  с направлением линий индукции  $B$  магнитного поля, тогда поток индукции  $\Phi$  через площадь рамки (рис. 243) равен:

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

При поворачивании рамки совершится работа [см. формулу (4)]:

$$A = IBS (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (5)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — значения углов, которые составляла нормаль с направлением линий индукции соответственно до и после поворота. Замечая, что  $IS = p_m$  есть магнитный момент рамки, можно переписать выражение (5):

$$A = p_m B (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (6)$$

2. Работа вращения диска со скользящими контактами. Пусть металлический диск поставлен нормально к силовым линиям магнитного поля. Диск может вращаться вокруг оси  $O$  (рис. 244), проходящей через его центр параллельно силовым линиям. Ток подводится к диску с помощью скользящих контактов  $a$  и  $b$  и проходит по нему радиально.<sup>1</sup> Если магнитное поле направлено за чертеж и ток идет по радиусу диска сверху вниз, то на ток со сто-

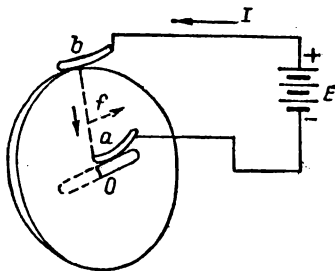


Рис. 244. Вращающийся диск со скользящими контактами.

<sup>1</sup> В действительности ток не будет течь только вдоль одного радиуса, но такое предположение может быть сделано для упрощения расчета.

роны поля действует сила, направленная направо, и диск придет во вращение. В этом случае поток индукции через контур тока  $EbaE$  остается постоянным, тем не менее работа совершается. Это происходит оттого, что здесь ток течет не по определенным проводам, а по различным радиусам непрерывно вращающегося диска. При повороте диска на бесконечно малый угол  $\Delta\varphi$  можно считать, что радиус, вдоль которого течет ток, повернется на угол  $\Delta\varphi$  и зачертит площадь

$$\Delta S = \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi,$$

где  $R$  — радиус диска. Поток индукции через эту площадь будет  $\Delta\Phi = B \Delta S$ . При непрерывном вращении диска все новые и новые радиусы будут подходить к контактам, и общая покрытая ими площадь выразится суммой

$$S = \sum \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi = \frac{1}{2} R^2 \sum \Delta\varphi;$$

для одного оборота диска  $\sum \Delta\varphi = 2\pi$ , откуда  $S = \pi R^2$  и изменение потока индукции  $\Phi_2 - \Phi_1 = BS = \pi R^2 B$ . По формуле (4) совершенная при этом работа окажется равной:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \pi R^2 IB.$$

Этот пример показывает, что формулой (4) надо пользоваться с осторожностью в случае, когда ток течет по сплошным подвижным проводникам при наличии скользящих контактов.

**§ 211. Законы магнитной цепи.** Совокупность магнетиков, по которым проходит поток магнитной индукции, называют *магнитной цепью*. Если поток переходит из среды в среду целиком, то говорят о *последовательном соединении* потоков магнитной индукции одной и другой среды; если поток разветвляется на отдельные части, которые затем опять сливаются, то говорят о *параллельном соединении* разветвленных частей потока.

Примером неразветвленной магнитной цепи может служить поток индукции  $\Phi$  через витки тороида. Рассмотрим тороид, число витков которого обозначим через  $N$ , длину оси — через  $l$ , поперечное сечение — через  $S$ . Предположим, что витки намотаны на сердечник, магнитная проницаемость материала которого равна  $\mu$ . Пусть в обмотке течет ток силы  $I$ . Напишем выражение для потока  $\Phi$ , пронизывающего поперечное сечение тороида. Считая поле однородным и направленным параллельно оси тороида, имеем:

$$\Phi = SB = \mu HS.$$

По формуле (1) § 199, напряженность магнитного поля  $H$  внутри тороида равна  $4\pi nI$ , где  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины тороида, откуда

$$\Phi = 4\pi \mu nIS.$$



Замечая, что  $n = \frac{N}{l}$ , получим:

$$\Phi = 4\pi\mu \frac{N}{l} IS,$$

что, очевидно, может быть переписано в виде:

$$\Phi = \frac{4\pi NI}{l/\mu S}. \quad (1)$$

Эта формула имеет формальное сходство с формулой Ома для неразветвленной цепи тока.

Действительно, если назвать выражение  $4\pi NI$ , стоящее в числителе формулы (1), *магнитодвижущей силой*  $\mathcal{E}_m$ , а выражение  $l/\mu S$ , стоящее в знаменателе, — *магнитным сопротивлением*  $r_m$ , т. е. положить

$$\mathcal{E}_m = 4\pi NI, \quad (2)$$

$$r_m = \frac{l}{\mu S}, \quad (3)$$

то формула (1) примет вид:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m}. \quad (1a)$$

Из формулы (1a) следует: *поток магнитной индукции численно равен отношению магнитодвижущей силы  $\mathcal{E}_m$  к магнитному сопротивлению  $r_m$  цепи*. Заметим, что магнитное сопротивление пропорционально длине цепи, обратно пропорционально поперечному сечению и магнитной проницаемости цепи. Магнитодвижущая сила пропорциональна произведению  $NI$ , которое представляет собой полную силу охватываемого магнитной цепью тока.

Если в формуле (1) выразить силу тока  $I$  в абсолютных электромагнитных единицах,  $l$  и  $S$  — соответственно — в сантиметрах и квадратных сантиметрах, то поток индукции  $\Phi$  получается в максвеллах. Если в формуле (1) силу тока измерять в амперах, а поток  $\Phi$ , по-прежнему, в максвеллах, то в нее надо ввести численный коэффициент, равный 0,1; тогда:

$$\Phi (\text{мкс}) = 0,1 \frac{4\pi NI (a)}{l/\mu S},$$

где  $l$  и  $S$ , как и раньше, выражены в сантиметрах и квадратных сантиметрах. Об единицах для магнитодвижущей силы  $\mathcal{E}_m$  и магнитного потока  $\Phi$  в международной системе единиц будет сказано ниже (§ 223).

Введение таких величин, как магнитодвижущая сила и магнитное сопротивление, оправдывается тем, что формальные аналогии между электрической и магнитной цепью идут дальше. Для того чтобы показать это, рассмотрим последовательно соединенные участки магнит-

ной цепи. Примером последовательного соединения потоков может служить рассмотренный тороид, если мы предположим, что в сердечнике длиной  $l_1$  с магнитной проницаемостью  $\mu$  имеется воздушный зазор длиной  $l_0$  с магнитной проницаемостью  $\mu_0$  (рис. 245). Этот зазор, как мы сейчас увидим, существенно меняет величину потока.

Для того чтобы найти поток в этом случае, воспользуемся выражением циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по контуру, который представляет среднюю линию тороида. Полный ток, который охватывается этим контуром, равен  $IN$  (ток во всех витках тороида), таким образом, получим

$$\sum H_l \Delta l = 4\pi IN.$$

Так как направление напряженности магнитного поля внутри тороида совпадает с направлением его средней линии, то, обозначая через  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}_0$  напряженности в сердечнике и в зазоре соответственно, получим

$$4\pi NI = Hl_1 + H_0 l_0$$

или, вводя вместо напряженностей  $H$  и  $H_0$  магнитные индукции  $B = \mu H$  и  $B_0 = \mu_0 H_0$ :

$$4\pi NI = \frac{B}{\mu} l_1 + \frac{B_0}{\mu_0} l_0. \quad (4)$$

Введем в это соотношение поток  $\Phi$ , который одинаков как в сердечнике, так и в зазоре.

Пусть  $S$  — поперечное сечение витков тороида, а  $S_0$  — поперечное сечение той части зазора, по которой проходит поток (полагаем, что сечение потока в зазоре постоянно), тогда

$$B = \frac{\Phi}{S}, \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0},$$

после чего формула (4) принимает вид:

$$4\pi NI = \Phi \left( \frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0\mu_0} \right). \quad (5)$$

Но  $4\pi NI$  представляет собой магнитодвижущую силу  $\mathcal{E}_m$ , а  $l_1/S\mu$  и  $l_0/S_0\mu_0$  могут быть соответственно обозначены как магнитное сопротивление сердечника  $r_m$  и зазора  $r_{m0}$ , откуда

$$\mathcal{E}_m = \Phi (r_m + r_{m0}), \quad \text{или} \quad \Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m + r_{m0}}.$$

Обозначая через  $R_m$  сумму сопротивлений  $r_m + r_{m0}$ , получим:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}. \quad (5a)$$

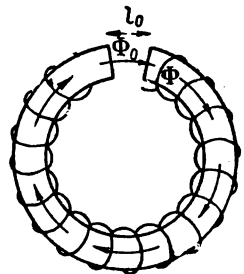
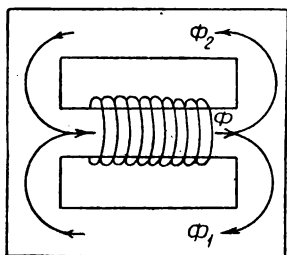


Рис. 245. Магнитный поток через зазор  $l_0$ .

Поток  $\Phi$  снова выражается отношением магнитодвижущей силы  $\mathcal{E}_m$  к магнитному сопротивлению  $R_m$ , причем *магнитное сопротивление цепи  $R_m$  равно сумме магнитных сопротивлений ее последовательно соединенных участков.*

Разберем теперь случай *параллельного* разветвления магнитной цепи. Схема такого разветвления изображена на рис. 246.

На средней части цепи имеется обмотка, обуславливающая возникновение магнитодвижущей силы  $\mathcal{E}_m = 4\pi NI$ . Поток индукции в средней части цепи  $\Phi$  разветвляется на потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в двух других частях цепи, следовательно,



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Для каждой из параллельно соединенных частей имеем соотношения:

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m1}}, \quad \Phi_2 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m2}},$$

Рис. 246. Параллельное разветвление магнитной цепи.

где  $r_{m1}$  и  $r_{m2}$  — магнитные сопротивления участков, по которым проходят потоки, а  $\mathcal{E}_m$  — общая магнитодвижущая сила. Так как  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , то

$$\Phi = \mathcal{E}_m \left( \frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}} \right) = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

откуда заключаем, что полное сопротивление  $R_m$  параллельно соединенных участков определяется из соотношения:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}}, \quad (6)$$

аналогичного соотношению для сопротивления параллельно соединенных проводников.

На указанных законах магнитной цепи основано устройство электромагнитов, т. е. приборов, позволяющих получать интенсивные магнитные поля. В электромагнитах магнитное поле возбуждается током, текущим по соленоиду; для усиления поля в соленоиды вводятся железные сердечники. Чтобы выяснить роль железного сердечника, разберем следующий случай. Пусть имеется тороид, длина которого по оси равна  $l$ , площадь поперечного сечения  $S$  и общее число витков  $N$ . Тогда при протекании тока силой  $I$  внутри тороида возбуждается поле напряженности

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I. \quad (7)$$

Введем теперь внутрь тороида железный сердечник так, чтобы он заполнял почти весь тороид; пусть незанятой железом остается лишь

узкая щель (рис. 245). Определим напряженность поля  $H_0$  внутри щели. Для этого найдем сперва поток индукции внутри тороида по формуле (5):

$$\Phi = \frac{4\pi Nl}{\frac{l_1}{S_\mu} + \frac{l_0}{S_0}}; \quad (8)$$

здесь  $l_1$  — длина железного сердечника,  $\mu$  — его магнитная проницаемость,  $l_0$  — ширина щели,  $S_0$  — площадь сечения потока в щели (магнитную проницаемость воздуха внутри щели  $\mu_0$  считаем равной 1). Если щель настолько узка, что  $l_0 \ll \frac{l_1}{\mu}$ , то в знаменателе формулы (8) членом  $\frac{l_0}{S_0}$  можно пренебречь по сравнению с  $\frac{l_1}{S_\mu}$ , и тогда

$$\Phi = 4\pi \frac{N}{l_1} l S_\mu.$$

Индукция в сердечнике  $B = \frac{\Phi}{S}$  будет равна

$$B = 4\pi \frac{N}{l_1} l \mu.$$

При узкой щели линии индукции проходят по нормали к границе, отделяющей сердечник от щели, поэтому индукция  $B_0$  внутри щели равна индукции  $B$  в сердечнике (см. § 206).

В области щели, где магнитная проницаемость  $\mu_0 = 1$ , напряженность магнитного поля  $H_0 = B_0$ ; отсюда, полагая приближенно  $l_1 = l$ , получим:

$$H_0 = 4\pi \frac{N}{l} l \mu.$$

Сравнивая это выражение с (7), видим, что в достаточно узкой щели напряженность поля оказывается в  $\mu$  раз больше напряженности, которая получалась в тороиде при отсутствии сердечника.

Такого рода тороид с сердечником представляет собой кольцевой электромагнит. Обычно лабораторным электромагнитам придают несколько иной вид, однако для того, чтобы употребление железного сердечника было эффективно, магнитная цепь должна быть почти замкнута и воздушный зазор невелик. На рис. 247 представлен один из употребительных типов лабораторных электромагнитов. Для

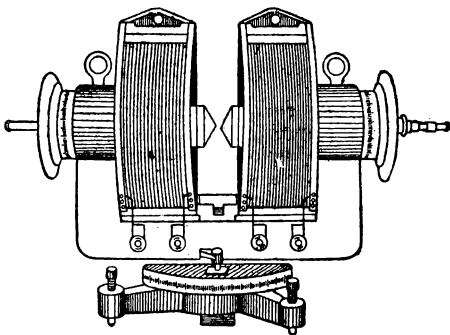


Рис. 247. Электромагнит.

правильной оценки роли сердечника в электромагнитах следует помнить, что для железа, из которого всегда делается сердечник, магнитная проницаемость  $\mu$  зависит от напряженности поля, а потому роль сердечника при разных напряженностях полей разная. При узкой щели в магнитной цепи электромагнита напряженность магнитного поля  $H_0$  в ней численно равна индукции  $B$  в сердечнике. Зависимость же  $B$  от напряженности поля  $H$  в сердечнике носит характер, изображенный на рис. 220. Напряженность поля  $H$  в сердечнике пропорциональна силе тока  $I$  в обмотке электромагнита. Отсюда зависимость  $B$ ,

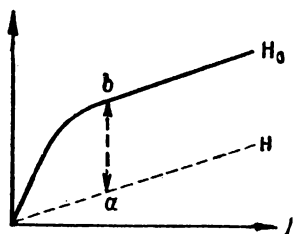


Рис. 248. Зависимость напряженности магнитного поля  $H_0$  между полюсами электромагнита от силы тока  $I$  в обмотке.

а следовательно, и напряженности поля  $H_0$  в щели от тока  $I$  в обмотке выразится кривой, сходной с кривой рис. 220. Для некоторого определенного электромагнита с сердечником из определенного сорта железа эта зависимость  $H_0$  от  $I$  дана на рис. 248. На том же рисунке изображена прямая, дающая возрастание  $H$  с силой тока  $I$ . Если бы в электромагните не было сердечника, то создаваемое им магнитное поле имело бы напряженность  $H$ . Как видно, вначале  $H_0$  возрастает с силой тока гораздо быстрее, чем  $H$ ; это имеет место пока не достигнуто насыщение и магнитная проницаемость железа  $\mu$  велика. После дости-

жения насыщения дальнейшее возрастание  $H_0$  носит линейный характер, напряженность поля  $H_0$  остается все время больше  $H$  на одну и ту же величину, определяемую отрезком  $ab$ .

Разберем следующий конкретный пример. Пусть длина железного сердечника тороида (рис. 245) равна  $l_1 = 60$  см, ширина щели  $l_0 = 0,1$  см, площадь поперечного сечения тороида  $S = 12$  см<sup>2</sup>, полное число витков  $N = 1000$ , и пусть по виткам идет ток силой в 1 а. Магнитная проницаемость  $\mu$  сердечника зависит не только от сорта железа, но, как мы указали, и от величины поля  $H$ , определяемого силой тока  $I$ . Предположим, что для условий данного примера  $\mu = 600$ .

Определим напряженность магнитного поля  $H_0$  в щели. Поток индукции в тороиде:

$$\Phi = \frac{0,4\pi N I a}{\frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0}},$$

где  $I_a$  — сила тока, выраженная в амперах. При узкой щели индукция в щели равна индукции в сердечнике, и  $S_0$  можно положить равным  $S$ . Напряженность поля  $H_0$  в щели, численно равная магнитной индукции, выразится, следовательно, через поток  $\Phi$  таким образом:

$$H_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{0,4\pi N I a}{\frac{l_1}{\mu} + l_0}.$$

Подставляя сюда приведенные значения, найдем

$$H_0 = \frac{0,4 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 1}{\frac{60}{600} + 0,1} \text{ э} \cong 6280 \text{ э.}$$

Если бы в тороиде отсутствовал железный сердечник, то напряженность поля оказалась бы равной

$$H = 0,4\pi \frac{N}{l} I_a = 0,4 \cdot 3,14 \cdot \frac{1000}{60} \cdot 1 \text{ э} \cong 21 \text{ э.}$$

Таким образом, при наличии сердечника в щели напряженность поля оказывается в 300 раз большей. При более широкой щели возрастание напряженности поля в щели будет меньше.

**§ 212. Уравнение Кирхгофа для магнитной цепи.** Расчеты сложной магнитной цепи производятся с помощью уравнений, аналогичных уравнениям Кирхгофа для электрической цепи.

На рис. 246 представлена цепь, имеющая участки, соединенные параллельно. В каждом месте, где поток разветвляется, величина подходящего потока равна сумме потоков отходящих; если условиться считать подходящие потоки положительными, а отходящие отрицательными, то для каждого места разветвления („узла“) будет выполнено условие, что алгебраическая сумма потоков у „узла“ равна нулю:

$$\sum \Phi = 0. \quad (1)$$

Уравнения, выражаемые равенством (1), аналогичны первым уравнениям Кирхгофа для цепи разветвленных токов.

Если мы выделим в магнитной цепи какой-либо замкнутый контур, то, применив к нему выражение для циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , получим:

$$\sum Hl = 4\pi \sum NI. \quad (2)$$

Здесь сумма распространена на все участки замкнутого контура:  $\sum NI$  означает сумму произведений из чисел витков, охватываемых контуром, на силу тока в них;  $NI$  следует считать положительным, если обход идет в направлении поля, создаваемого током  $I$ , и отрицательным в обратном случае. Выражая напряженность поля через поток

$$H = \frac{\Phi}{S\mu},$$

где  $S$  — поперечное сечение потока, а  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, перепишем выражение (2) в виде:

$$\sum \frac{\Phi l}{S\mu} = 4\pi \sum NI \quad (3)$$

или

$$\sum \Phi r_m = \sum \mathcal{E}_m.$$

Это отношение аналогично второй системе уравнений Кирхгофа: сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления для замкнутой цепи равна сумме магнитодвижущих сил, действующих в цепи.

Важно подчеркнуть, что сходство между законами магнитной цепи и электрической цепи чисто формальное, — никакой общности физических явлений в этих законах нет.

Для иллюстрации удобства применения рассмотренных соотношений разберем примеры расчетов магнитных цепей.

**Пример 1.** Дан электромагнит, сердечник которого имеет форму, изображенную на рис. 249. Определить напряженность магнитного поля в воздушном зазоре электромагнита, если число ампервитков  $NI_a = 1800$ , длина зазора  $l_0 = 2$  см и магнитное сопротивление зазора в 30 раз больше магнитного сопротивления каждого из участков  $a, b, c$  цепи; сопротивления участков  $a, b, c$  равны.

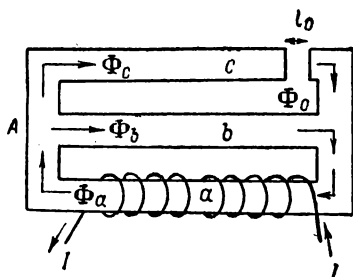


Рис. 249. Электромагнит с разветвленной магнитной цепью.

**Решение.** Обозначим потоки магнитной индукции в участках  $a, b, c$  через  $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c$ , поток в воздушном зазоре обозначим через  $\Phi_0$ . Так как магнитная проницаемость зазора равна единице, то искомая напряженность магнитного поля в зазоре равна:

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S}, \quad (4)$$

где  $S$  — поперечное сечение зазора.

Составим вторую систему уравнений Кирхгофа для замкнутого контура, проходящего по участкам  $a, c$  и воздушному зазору, и для контура, проходящего по участкам  $a$  и  $b$ :

$$\Phi_a r_m + \Phi_c r_m + \Phi_0 \cdot 30 r_m = 0,4 \pi N I_a; \quad (5)$$

$$\Phi_a r_m + \Phi_b r_m = 0,4 \pi N I_a. \quad (6)$$

Магнитодвижущая сила в обоих контурах одинакова и выражена в предположении, что ток  $I_a$  дан в амперах. Ввиду непрерывности потока магнитной индукции имеем:

$$\Phi_0 = \Phi_c, \quad (7)$$

так как весь поток из участка  $c$  переходит в воздушный зазор. Рассматривая разветвление в „узле“  $A$ , получаем уравнение Кирхгофа первого рода:

$$\Phi_a = \Phi_0 + \Phi_b. \quad (8)$$

Используя (7) и (8), перепишем уравнения (5) и (6) в виде:

$$\Phi_a r_m + 31 \Phi_0 r_m = 0,4 \pi N I_a; \quad (5a)$$

$$2 \Phi_a r_m - \Phi_0 r_m = 0,4 \pi N I_a. \quad (6a)$$

Умножая (5a) на 2 и вычитая из него почленно (6a), получим:

$$63 \Phi_0 r_m = 0,4 \pi N I_a. \quad (9)$$

Магнитное сопротивление воздушного промежутка равно  $l_0/S$ , а сопротивление участков по условию в 30 раз меньше, откуда:

$$r_m = \frac{l_0}{S \cdot 30}.$$

Подставляя это значение  $r_m$  в (9), получим для потока индукции:

$$\Phi_0 = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 r_m} = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \frac{l_0}{S \cdot 30}},$$

откуда искомая напряженность магнитного поля  $H_0$  в щели, по (4), равна:

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S} = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \frac{l_0}{30}} = \frac{0,4 \cdot 3,14 \cdot 1800}{63 \cdot \frac{2}{30}} \text{ э} \approx 540 \text{ э.}$$

**Пример 2.** Определить, чему будет равна напряженность поля  $H_0$  в щели кольцевого электромагнита, разобранный в примере на стр. 355, если ширину щели в нем увеличить до 0,2 см. Зависимость магнитной индукции  $B$  в железе сердечника от напряженности поля  $H$  дается кривой  $OC$ , представленной на рис. 250.

**Решение.** Обозначая поток в сердечнике через  $\Phi$ , поток в щели — через  $\Phi_0$  и магнитное сопротивление сердечника и щели — соответственно через  $r_m$  и  $r_{m0}$ , напомним для магнитной цепи электромагнита вторую систему уравнений Кирхгофа:

$$\Phi r_m + \Phi_0 r_{m0} = 0,4 \pi N I_a. \quad (10)$$

Считая по-прежнему площади сечения потоков в сердечнике и в щели одинаковыми и равными  $S$ , имеем:

$$\Phi = BS = \mu HS, \quad \Phi_0 = B_0 S,$$

$$r_m = \frac{l_1}{\mu S}, \quad r_{m0} = \frac{l_0}{S}.$$

Подставляя эти значения  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ ,  $r_m$  и  $r_{m0}$  в (10), получим:

$$H l_1 + B_0 l_0 = 0,4 \pi N I_a$$

или, подставляя сюда вместо  $l_1$ ,  $l_0$ ,  $N$  и  $I_a$  их значения:

$$60H + 0,2B_0 = 1256.$$

Так как магнитная индукция в щели  $B_0$  равна магнитной индукции  $B$  в сердечнике, то это соотношение можно переписать в виде:

$$60H + 0,2B = 1256. \quad (11)$$

Это уравнение содержит два неизвестных — напряженность поля  $H$  и индукцию  $B$  в сердечнике. Вторым уравнением служит связь между  $H$  и  $B$ , выражаемая кривой на рис. 250. Для совместного решения этих уравнений воспользуемся графическим методом, а именно — ищем точку пересечения  $a$  прямой  $bd$ , соответствующей уравнению (11), и кривой графика (рис. 250). Этой точке пересечения соответствует  $B = 4000$  гс. Так как  $B = B_0$ , а  $B_0$ , в свою очередь, численно равно напряженности поля  $H_0$  в щели, то искомая напряженность

$$H_0 = 4000 \text{ э.}$$

При ширине же щели 0,1 см напряженность  $H_0 = 6280$  э (стр. 357). Как видно, увеличение ширины щели ведет к значительному убыванию напряженности поля.

**§ 213. Измерительные приборы.** Взаимодействия между проводниками, по которым текут токи, или проводниками с током и постоянными магнитами могут служить для измерения сил токов. На таких

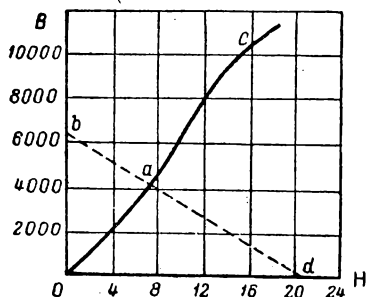


Рис. 250. Графический метод нахождения индукции  $B$  в электромагните.



взаимодействия основано устройство большого числа измерительных приборов, которые могут быть разбиты на три класса: 1) приборы, в которых взаимодействуют постоянные магниты и провода с током (магнитоэлектрические); 2) приборы, в которых части из мягкого железа втягиваются в катушки с током (электромагнитные); 3) приборы, в которых взаимодействуют две катушки с током (электродинамические).

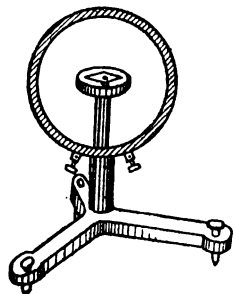


Рис. 251. Тангенс-гальванометр.

Простейшим прибором, относящимся к первому классу, является *тангенс-гальванометр*, состоящий из нескольких витков кругового проводника, в центре которого расположена магнитная стрелка (рис. 251), стрелка может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Стрелка должна быть настолько малой, чтобы напряженность магнитного поля витков кругового тока можно было считать постоянной в той области, где находится стрелка, и равной напряженности в центре витков. Тогда по сказанному в § 194:

$$H = \frac{2\pi nI}{R}, \quad (1)$$

где  $I$  — сила тока, протекающего по виткам,  $n$  — число витков на единицу длины кругового проводника,  $R$  — их радиус. При отсутствии тока стрелка располагается по направлению земного магнитного меридиана; если при этом плоскость витков расположена в плоскости меридиана, то стрелка окажется расположенной в плоскости витков. При включении тока магнитное поле  $H$  витков будет направлено перпендикулярно к плоскости витков, и магнитная стрелка расположится по направлению результирующей сил, действующих на нее со стороны магнитного поля, и горизонтальной составляющей земного магнитного поля. При этом, как видно из рис. 252, угол  $\varphi$ , который стрелка составит с плоскостью витков, определится соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{H_3},$$

где  $H_3$  — горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля Земли. Подставляя сюда вместо  $H$  его значение по (1), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi nI}{RH_3},$$

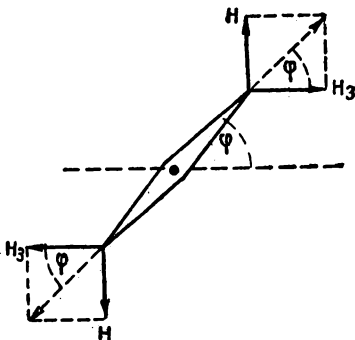


Рис. 252. К определению положения равновесия стрелки тангенс-гальванометра.

откуда

$$I = \frac{RH_3}{2\pi n} \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Если в этом соотношении горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля Земли  $H_3$  измерена в эрстедах, а  $R$  — в сантиметрах, то сила тока будет измерена в электромагнитных единицах силы тока. Величина  $RH_3/2\pi n$  постоянна для данного прибора, расположенного в данной точке земного шара, откуда

$$I = C \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (2a)$$

т. е. сила тока  $I$  пропорциональна тангенсу угла отклонения  $\varphi$ . Постоянную гальванометра  $C$  можно либо вычислить, зная значения  $R$  и  $H_3$ , либо определить, градуируя гальванометр путем пропускания через него тока известной силы.

Несколько видоизмененный тип измерительного прибора с подвижной системой магнитов представлен на рис. 253. Употребленная в нем система магнитов называется *астатической*. Она состоит из двух групп магнитов, в одной из которых северные полюсы всех магнитов направлены в одну сторону, а в другой — в противоположную. Благодаря такому расположению магнитов действие на них со стороны магнитного поля Земли компенсировано. Каждая из групп магнитов расположена внутри одной из двух катушек, по виткам которых протекает измеряемый ток. Ток в катушках проходит в противоположных направлениях, а потому действия катушек складываются. Упругие силы нити, на которой подвешена система магнитов, удерживают их, при отсутствии тока, в плоскости катушек. При прохождении тока через катушки система магнитов поворачивается, и угол ее поворота позволяет измерить силу тока. Путем создания весьма легкой системы магнитов, подвешенной на тонкой кварцевой нити, и наблюдения их отклонения по смещению светового луча, отраженного от зеркала, прикрепленного к нити, можно измерять очень малые токи, порядка  $10^{-12}$  а.

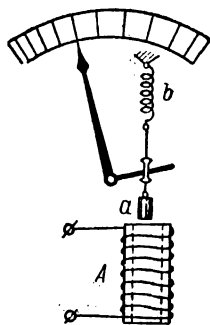


Рис. 254. Амперметр Доливо-Добровольского.

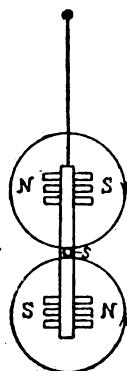


Рис. 253. Схема гальванометра с астатической системой магнитов.

К второму типу принадлежат менее чувствительные, но весьма распространенные приборы, действие которых основано на втягивании в катушку куска железа. Такой прибор был впервые предложен и построен русским электротехником М. О. Доливо-Добровольским. Схема прибора представлена на рис. 254, где  $A$  — катушка,

К второму типу принадлежат менее чувствительные, но весьма распространенные приборы, действие которых основано на втягивании в катушку куска железа. Такой прибор был впервые предложен и построен русским электротехником М. О. Доливо-Добровольским. Схема прибора представлена на рис. 254, где  $A$  — катушка,

по которой протекает измеряемый ток;  $a$  — железный стерженек, подвешенный на пружине  $b$ . Ток, протекающий по катушке, вызывает магнитное поле, под влиянием которого стерженек  $a$  намагничивается и втягивается в область, где магнитное поле сильнее, т. е. внутрь катушки. Стерженек соединен со стрелкой, которая при втягивании стерженька в катушку поворачивается.

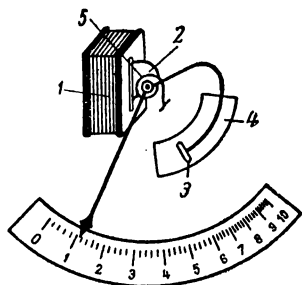


Рис. 255. Технический амперметр постоянного тока.

„успокоитель“, состоящий из поршня 3, ходящего внутри цилиндра 4.

К первому типу измерительных приборов относятся также *гальванометры с подвижной рамкой*. В них магнитное поле создается постоянным магнитом подковообразной формы. Полюсные наконечники  $N$  и  $S$  (рис. 256) обращены друг к другу вогнутыми цилиндрическими поверхностями одинаковых радиусов. Между полюсами неподвижно укреплен железный цилиндр несколько меньшего радиуса, благодаря которому магнитная цепь оказывается почти замкнутой, и линии индукции сконцентрированы в цилиндрическом зазоре между полюсами и цилиндром. В этом зазоре расположена легкая рамка  $ad$ , состоящая из нескольких витков провода, по которому протекает измеряемый ток. Тонкая пружина  $c$  удерживает рамку в определенном положении. При пропускании через рамку тока она поворачивается до тех пор, пока момент действующих на нее электромагнитных сил не окажется уравновешенным механическим моментом закрученной пружины. Легкая стрелка, соединенная с рамкой, указывает угол ее поворота. Вследствие радиальности магнитного поля в зазоре, в котором расположена рамка, угол ее поворота в широких пределах пропорционален силе тока.

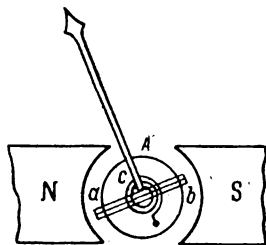


Рис. 256. Схема гальванометра с подвижной рамкой.

Гальванометры указанного типа весьма удобны благодаря постоянству их чувствительности и малой зависимости их показаний от внеш-

них полей. Лежащий в основе их устройства принцип используется при постройке большинства лабораторных и технических измерительных приборов постоянного тока. Их можно употреблять в качестве вольтметров и амперметров, включая либо последовательно с рамкой большое постоянное сопротивление, либо параллельно с рамкой шунт (см. сказанное в § 158).

Более чувствительные приборы изготавливаются путем подвешивания подвижной рамки с током к тонкой нити (рис. 257). Угол поворота рамки определяется по отклонению светового луча от прикрепленного к ней зеркала. Такой гальванометр называется *зеркальным*.

К типу измерительных приборов с подвижным проводником принадлежит также *струнный гальванометр*. Он состоит из очень тонкой проволоки  $ab$  (рис. 258), натянутой между полюсами сильного магнита. При пропускании по проволоке тока она смещается в соответствии с правилом левой руки (§ 196). Смещение проволоки наблюдается с помощью измерительного микроскопа, пропущенного сквозь сердечник магнита. Чувствительность струнного гальванометра может быть доведена до  $10^{-12}$  а. Вследствие малой инерции тонкой нити, струнный гальванометр пригоден для измерения и фотографической регистрации меняющихся во времени токов.

Предел чувствительности всех гальванометров ограничивается флуктуациями силы тока (§ 186).

Наконец, можно построить измерительный прибор третьего типа (электродинамический), в котором отсутствуют какие бы то ни было постоянные магниты и показания которого основаны на взаимодействии проводников с током. Простейшей схемой такого прибора будет рамка с током, подвешенная внутри соленоида (ср. сказанное в § 197). Величина вращательного момента, приложенного к рамке, пропорциональна как силе тока  $I_1$ , протекающего по рамке, так и силе тока  $I_2$ , протекающего по соленоиду; если и по рамке и по соленоиду

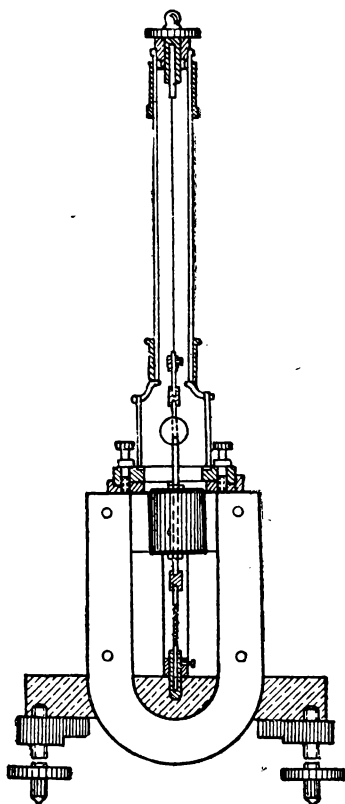


Рис. 257. Зеркальный гальванометр.

протекает один и тот же измеряемый ток  $I$ , то величина момента, вращающего рамку, пропорциональна  $I^2$ .

Взаимодействие между двумя катушками с током используется также для постройки *ваттметров*, т. е. приборов, измеряющих мощность, поглощаемую в данном участке цепи.

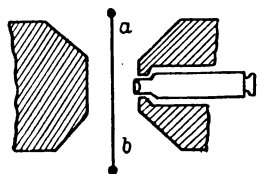


Рис. 258. Струнный гальванометр.

Напомним, что мощность, потребляемая в данном участке цепи, пропорциональна силе тока в ней и разности потенциалов на ее концах  $V_1 - V_2$ . Ваттметр состоит из двух взаимодействующих катушек, одна из которых имеет обмотку с малым сопротивлением и включена последовательно с участком цепи, а другая имеет большое сопротивление и включена параллельно с участком цепи. Тогда ток в первой катушке равен силе тока  $I$  в цепи, а ток  $I'$  во второй катушке пропорционален разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . К каждой из катушек приложен вращательный момент, величина которого пропорциональна  $II'$ , т. е. пропорциональна  $I(V_1 - V_2)$  или, другими словами, пропорциональна мощности  $W$ , потребляемой в участке цепи.

На таком же принципе использования двух катушек основано устройство *счетчика*, измеряющего потребленную за время  $t$  электрическую энергию.

## ГЛАВА XIX

### ОТКЛОНЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

**§ 214. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле.** В § 196 было указано, что по закону Ампера на участок проводника длиной  $\Delta l$ , по которому течет ток силой  $I$ , со стороны внешнего магнитного поля напряженности  $H$  действует сила:

$$f = I \Delta l H \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями тока и напряженности магнитного поля. Все входящие в эту формулу величины должны быть измерены в CGSM-системе. Направление силы  $f$  определяется правилом левой руки (см. § 196). Но всякий ток обусловлен перемещением заряженных частиц — электронов или ионов. Отсюда естественно заключить, что сила, действующая во внешнем магнитном поле на проводник, по

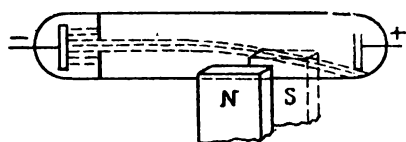


Рис. 259. Отклонение электронного пучка в магнитном поле.

которому течет ток, обусловлена силами, действующими со стороны магнитного поля на отдельные движущиеся заряженные частицы. Этот вывод может быть проверен непосредственным наблюдением: если трубку, в которой возникает электронный пучок, внести во внешнее магнитное поле, вызванное, например, постоянным магнитом

(рис. 259), то электронный пучок отклонится, что легко заметить по смещению того светящегося пятна, которое он образует на флуоресцирующем экране. В пустотной трубке электроны движутся свободно, и под влиянием сил, действующих на них со стороны магнитного поля, искривляются лишь их траектории. Если же электроны или другие заряженные частицы движутся внутри сплошного тела (твердого или жидкого), то благодаря их непрерывным столкновениям с атомами тела действующая на них сила передается этому телу. Такого рода передача силы может быть продемонстрирована с помощью вращающегося диска, изображенного на рис. 244. Здесь электроны движутся

внутри диска по одному из его радиусов. Магнитное поле, перпендикулярное к плоскости диска, отклоняет их в сторону. Благодаря непрерывным столкновениям электронов с атомами, сила, действующая на электроны, передается диску, и он приходит во вращение. Аналогичный опыт можно осуществить и в случае электролитической проводимости. Для этого берется кольцеобразный сосуд с металлическими боковыми стенками и дном, сделанным из изолирующего материала. Стенки сосуда служат электродами. Ток проходит радиально через электролит, находящийся между стенками. В электролите ток обусловлен движением ионов обоих знаков, причем ионы разных знаков

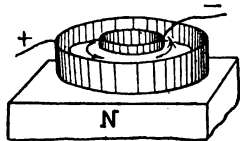


Рис. 260. Отклонение электролитических ионов в магнитном поле.

двигутся в противоположных направлениях. Пусть сосуд внесен в магнитное поле, направленное перпендикулярно к его дну. Это можно осуществить, поместив сосуд, например, на конец вертикально поставленного прямого магнита (рис. 260). Тогда на движущиеся ионы со стороны магнитного поля будут действовать силы, перпендикулярные к направлению их движения и направленные параллельно поверхности жидкости. Эти силы направлены одинаково для ионов обоих знаков, так как ионы разных знаков движутся в противоположных направлениях. Под влиянием этих сил ионы начнут отклоняться от своего пути и увлекут за собою жидкость, в которой возникнет круговое течение.

Найдем теперь выражение для силы, действующей со стороны магнитного поля на движущийся заряд. Для этого воспользуемся выражением (1) для силы, действующей на участок проводника, по которому течет ток, т. е. в котором движутся заряды. Сила тока  $I$  численно равна заряду, перенесенному в единицу времени через поперечное сечение проводника. Если величина отдельного заряда  $e$ , а число зарядов, перенесенных через поперечное сечение проводника в единицу времени, равно  $n$ , то  $I = en$ . Очевидно,  $n = n_0 v S$ , где  $n_0$  — число движущихся зарядов в единице объема,  $v$  — их скорость и  $S$  — площадь поперечного сечения проводника. Следовательно, для  $I$  получаем:

$$I = en_0 v S.$$

Подставляя это значение  $I$  в (1), получим:

$$f = en_0 v S \Delta l H \sin \alpha. \quad (2)$$

Эта сила действует на участок проводника длиной  $\Delta l$ , следовательно, она равна сумме сил, действующих на все заряды, движущиеся в рассматриваемом участке проводника; число этих зарядов равно  $n' = n_0 S \Delta l$ . Отсюда сила, действующая на один заряд, равна

$$\Delta f = \frac{f}{n'} = \frac{f}{n_0 S \Delta l}.$$

Подставляя сюда вместо силы  $f$  ее значение по (2), получим:

$$\Delta f = evH \sin \alpha. \quad (3)$$

Эта формула, носящая название *формулы Лоренца*, дает искомую силу, действующую на заряд, движущийся со скоростью  $v$  в магнитном поле напряженности  $H$ . При  $v=0$  по формуле Лоренца и  $\Delta f=0$ , что соответствует тому факту, что на покоящийся заряд (случай, имеющий место в электростатике) магнитное поле не действует. Под скоростью  $v$  в формуле Лоренца следует понимать скорость относительно системы координат, в которой измеряется сила  $\Delta f$  и измерена напряженность поля  $H$ . Направлена сила перпендикулярно как к скорости движения заряда  $v$ , так и к напряженности магнитного поля  $H$ , т. е. сила  $\Delta f$  направлена перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы  $v$  и  $H$ . В случае движения положительного заряда направление силы определяется правилом левой руки: если сложенные вместе пальцы направить по направлению движения заряда, а ладонь расположить так, чтобы линии напряженности магнитного поля вонзались в нее, то сила  $\Delta f$  будет направлена в сторону отставленного большого пальца. При движении отрицательного заряда эта сила направлена в противоположную сторону (рис. 261).

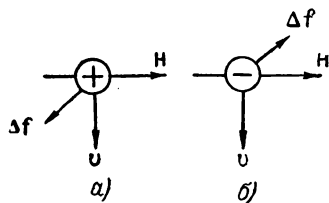


Рис. 261. Направление силы Лоренца  $\Delta f$ , действующей на заряд, движущийся со скоростью  $v$  в магнитном поле напряженности  $H$ .

Величина силы Лоренца зависит не только от значений скорости  $v$  и напряженности магнитного поля  $H$ , но и от  $\sin \alpha$ , т. е. от их относительных направлений. Сила максимальна при движении заряда в направлении, перпендикулярном к направлению напряженности магнитного поля  $H$ , и равна нулю, если заряд движется вдоль линии напряженности поля.

В формуле (3), в которую не введено никакого коэффициента пропорциональности, все входящие в нее величины должны быть измерены в CGSM-системе. Обычно пользуются смешанной системой единиц:  $e$  измеряют в CGSE-единицах, а напряженность поля — в эрстедах, тогда в формулу (3) надо ввести коэффициент пропорциональности

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH \sin \alpha, \quad (3a)$$

где

$$\frac{1}{c} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{\text{сек}}{\text{см}}.$$

Формулу (3a) можно переписать в векторном виде, заметив, что по направлению сила  $\Delta f$  совпадает с направлением векторного произведения  $[v \times H]$ ,



откуда:

$$\Delta f = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (36)$$

Если кроме магнитного поля существует еще электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}$ , то полная сила, действующая на заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ , складывается из электрической силы  $e\mathbf{E}$  и силы Лоренца (36):

$$\Delta f = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}. \quad (37)$$

Сила Лоренца действует не только на движущийся элементарный заряд (электрон или ион), но и на всякий макроскопический заряд, движущийся в магнитном поле. Так, если, например, зарядить шарик и начать его двигать в магнитном поле, то появится сила, действующая на него в направлении, перпендикулярном к направлению его движения и к направлению поля, и величина которой выразится формулой (3) или (3а). Однако, как легко видеть, при обычно достижимых зарядах, полях и скоростях эта сила будет мала. Так, например, если шарик радиусом 1 см зарядить до потенциала в 3000 в, то его заряд будет равен  $e = VC = \frac{3000}{300} \cdot 1 \text{ CGSE} = 10 \text{ CGSE}$ . При движении этого шарика в направлении, перпендикулярном к полю напряженности  $H = 1000$  э, со скоростью  $v = 10^8$  см/сек (скорость пули!) появится сила:

$$\Delta f = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 10 \cdot 10^8 \cdot 1000 \text{ дин} = \frac{1}{30} \text{ дин},$$

т. е., как видно, весьма незначительная сила. На первый взгляд может показаться, что этот результат находится в противоречии с тем обстоятельством, что на провода, по которым течет ток, действуют в магнитном поле значительные силы. Но дело заключается в том, что при токах обычной силы переносимые заряды весьма велики, достаточно вспомнить, что при силе тока в 1 а через поперечное сечение проводника за каждую секунду переносится заряд в 1 кулон, т. е.  $3 \cdot 10^9$  CGSE-единиц.

Рассмотрим еще действие магнитного поля на электрон, движущийся вокруг неподвижного положительного заряда по круговой орбите радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\omega$ . Движение электрона происходит под влиянием кулоновой силы  $f = \frac{eE}{r^2}$ , где  $e$  — заряд электрона, а  $E$  — величина положительного заряда. Обозначим через  $w_n$  центростремительное ускорение электрона, тогда по второму закону Ньютона:

$$mw_n = \frac{eE}{r^2}. \quad (4)$$

Предположим теперь, что имеется однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , перпендикулярное к плоскости орбиты электрона. Тогда к кулоновой силе  $f$  должна добавиться сила Лоренца:

$$\Delta f = \frac{e}{c} vH.$$

Вводя угловую скорость электрона  $\omega$ , получим  $v = \omega r$ , после чего выражение для силы Лоренца примет вид:

$$\Delta f = \frac{e}{c} r\omega H.$$

Направлена сила Лоренца вдоль радиуса и, следовательно, при наличии магнитного поля уравнение движения (4) заменится уравнением:

$$m\omega_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H.$$

Введем, далее, координатную систему, вращающуюся с постоянной угловой скоростью  $\Delta\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости орбиты электрона. Если мы хотим написать уравнение относительно этой вращающейся системы, то должны к действующей силе  $f + \Delta f$  прибавить еще центробежную инерционную силу  $mr\Delta\omega^2$  и силу Кориолиса  $2mr\omega\Delta\omega$  (см. т. I, § 24).

Таким образом, уравнение движения относительно вращающейся системы примет вид:

$$m\omega_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega + mr\Delta\omega^2.$$

Считая  $\Delta\omega$  малым, пренебрежем членом  $mr\Delta\omega^2$ , тогда

$$m\omega_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega.$$

Если подобрать  $\Delta\omega$  так, чтобы

$$\frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega = 0, \quad (5)$$

то уравнение движения по отношению к вращающейся системе примет вид:

$$m\omega_n = \frac{eE}{r^2}.$$

Сравнивая это выражение с (4), имеем: относительно вращающейся координатной системы, для которой выполнено условие (5), сохраняется прежний вид уравнения движения, а следовательно, и прежний вид траектории электрона. Отсюда получаем, что *относительно неподвижной координатной системы электрон в магнитном поле продолжает двигаться по кругу радиуса  $r$ , но с измененной угловой скоростью  $\omega + \Delta\omega$ .*

Для  $\Delta\omega$  из условия (5) находим:

$$\Delta\omega = - \frac{eH}{2mc}. \quad (6)$$

В общем случае, когда направление магнитного поля  $\mathbf{H}$  составляет произвольный угол с плоскостью орбиты, электрон сохраняет первоначальный вид траектории относительно координатной системы, вращающейся относительно вектора  $\mathbf{H}$  с постоянной угловой скоростью  $\Delta\omega$ . Такого рода возмущение орбиты носит название *прецессии*, а величина  $\Delta\omega$  — *угловой скорости прецессии*.

Полученный вывод справедлив при условии, что внешнее магнитное поле таково, что сила Лоренца мала по сравнению с кулоновой силой  $f$ , так как только в этом случае можно пренебречь членом  $mr\Delta\omega^2$ .

Благодаря отрицательному знаку заряда электрона при  $H > 0$ , по формуле (6) угловая скорость прецессии  $\Delta\omega > 0$ . Так как, с другой стороны, магнитный момент электрона, движущегося по круговой орбите, положителен при  $\omega < 0$  (см. § 201), то отсюда мы приходим к выводу: внешнее магнитное поле ведет к уменьшению по численному значению скорости обращения электрона по орбите, если магнитный момент этой орбиты был направлен по полю. В результате уменьшается и первоначальный магнитный момент вращающегося электрона. Таким образом, допуская внутри атомов и молекул существование вращающихся электронов, можно объяснить диамагнитный эффект.

§ 215. **Магнитное поле движущегося заряда.** Если внешнее магнитное поле действует на движущийся заряд, то, в свою очередь, движущийся заряд вызывает в окружающем пространстве магнитное поле. Это следует из того, что электрический ток, который представляет собой не что иное, как совокупность движущихся зарядов, вызывает в окружающем пространстве магнитное поле. Величину поля, создаваемого движущимся зарядом, можно определить, исходя из формулы Био — Савара — Лапласа (см. § 193), по которой элемент тока длиной  $\Delta l$  создает в точке, отстоящей от него на расстоянии  $r$ , магнитное поле напряженности:

$$\Delta H = \frac{I \Delta l}{r^2} \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями тока и радиуса-вектора  $r$ .

Подставляя снова вместо силы тока  $I$  ее значение через величину движущихся зарядов  $e$ , их число в единице объема  $n_0$  и их скорость  $v$ , т. е. полагая  $I = en_0 v S$ , получим:

$$\Delta H = \frac{en_0 v S \Delta l}{r^2} \sin \alpha,$$

где  $S$  — поперечное сечение проводника. Так как в рассматриваемом элементе проводника движется  $n' = n_0 S \Delta l$  заряженных частиц, то можно считать, что каждая из них создает поле напряженности:

$$\Delta H = \frac{ev}{r^2} \sin \alpha. \quad (1)$$

В этой формуле под скоростью заряда  $v$  подразумевается скорость относительно системы координат, в которой измеряется  $\Delta H$ .

Линии напряженности  $\Delta H$  магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом, перпендикулярны к плоскости, содержащей вектор скорости частицы  $v$  и радиус-вектор  $r$ .

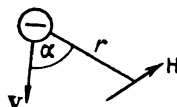
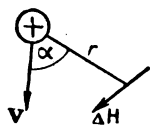


Рис. 262. Направление напряженности магнитного поля  $\Delta H$ , созданного зарядом, движущимся со скоростью  $v$ .

В случае движения положительного заряда направление напряженности  $\Delta H$  определяется правилом буравчика: если поступательное вращение буравчика сопоставить направлению скорости  $v$ , то направление вращения его головки даст направление  $\Delta H$ ; в случае движения отрицательного заряда, направление  $\Delta H$  будет противоположное (рис. 262). Фор-

мула (1), в том виде, в каком она приведена в настоящем параграфе, справедлива при измерении всех входящих в нее величин в одной и той же системе единиц, причем безразлично в *CGSM*- или *CGSE*-системе.

Это происходит потому, что формула Био — Савара — Лапласа без каких-либо численных коэффициентов справедлива как в *CGSM*-, так и в *CGSE*-системах. Формула же Ампера не содержит численного

коэффициента лишь в *CGSM*-системе (см. § 195), поэтому и формула Лоренца (§ 214) справедлива лишь в *CGSM*-системе; в *CGSE*-системе в ней справа должен стоять множитель  $1/c^2$ .

Если же пользоваться смешанной системой, измеряя заряд  $e$  в *CGSE*-единицах,  $\Delta H$  — в эрстедах,  $v$  — в *см/сек* и  $r$  — в сантиметрах, то необходимо ввести коэффициент  $1/c$  в правую часть формулы (1):

$$\Delta H = \frac{1}{c} \frac{ev}{r^2} \sin \alpha. \quad (1a)$$

Формула (1a) определяет напряженность магнитного поля в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от движущегося заряда. Однако даваемые ею значения  $\Delta H$  будут вполне правильны лишь в случае не слишком больших расстояний  $r$  и не слишком больших скоростей  $v$ ; в противных случаях надо принять во внимание конечную скорость распространения электромагнитного поля.

Формула (1a), как и формула Лоренца, может быть записана в векторном виде. Как следует из рис. 262, напряженность магнитного поля  $\Delta H$  имеет то же направление, что и векторное произведение  $[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]$ , отсюда:

$$\Delta H = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (2)$$

При одновременном движении двух зарядов между ними, кроме силы электрического взаимодействия, возникает еще сила магнитного взаимодействия, обусловленная тем, что каждый из зарядов вызывает в окружающем пространстве магнитное поле, а второй движется в этом магнитном поле. Сравним величину этих сил. Для этого рассмотрим два заряда одного знака  $e$  и  $e'$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга. Они взаимодействуют между собою по закону Кулона с силой

$$f_e = \frac{ee'}{r^2}. \quad (3)$$

В указанном виде закон Кулона не содержит коэффициента пропорциональности, отличного от единицы, т. е. он записан в предположении, что заряды  $e$  и  $e'$  измерены в *CGSE*-системе.

Предположим затем, что оба заряда движутся по параллельным прямым  $ab$  и  $a'b'$  (рис. 263) с одинаковыми скоростями  $v$ . Тогда заряд  $e$  образует, согласно формуле (1a), в месте, где расположен второй заряд, магнитное поле, напряженность которого в *CGSE*-системе равна:

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{ev}{r^2}.$$

Направлено это поле перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ .

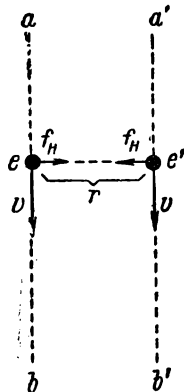


Рис. 263. К расчету взаимодействия движущихся зарядов.

По формуле Лоренца [(3а) § 214], оно будет действовать на заряд  $e'$  с силой

$$f_H = \frac{1}{c} e' v H = \frac{ee'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2, \quad (4)$$

причем эта сила будет направлена в сторону заряда  $e$ . С такой же по величине силой будет действовать заряд  $e'$  на заряд  $e$ . Таким образом, два заряда, движущиеся параллельно друг другу с постоянной скоростью, взаимодействуют, кроме кулоновой силы, еще с добавочной магнитной силой.

Сравнивая величины магнитной и кулоновой сил (4) и (3), получим:

$$\frac{f_H}{f_e} = \left( \frac{v}{c} \right)^2. \quad (5)$$

Так как отношение двух сил  $f_H/f_e$  есть величина безразмерная, то из формулы (5) особенно наглядно следует, что электродинамическая постоянная  $c$  имеет размерность скорости.

Как мы указывали (см. § 195), электродинамическая постоянная  $c$  численно равна скорости распространения электромагнитных возмущений в пустоте. Приняв это во внимание видим, что из формул (4) и (5) следует: величина силы магнитного взаимодействия зарядов определяется квадратом отношения их скорости  $v$  к скорости распространения электромагнитных возмущений  $c$ . Так как в большинстве случаев  $v \ll c$ , то и сила магнитного взаимодействия между зарядами обычно мала по сравнению с кулоновой силой.

Наличие магнитной силы взаимодействия между зарядами, выражаемой формулой (4), обуславливает притяжение двух параллельных проводов, по которым текут токи одного направления.

**§ 216. Экспериментальное изучение магнитного поля движущихся зарядов.** Исторически обнаружение на опыте магнитного поля движущихся зарядов сыграло существенную роль, так как оно подтвердило точку зрения, по которой электрический ток в проводниках представляет собой перенос зарядов. Кроме того, результаты изучения магнитного поля движущихся зарядов были важны по тому влиянию, которое они оказали на развитие теории электромагнитного поля, в частности на теорию эфира.

Электрический ток, обусловленный переносом какого-либо макроскопического заряженного тела, носит название *конвекционного тока*.

Магнитное поле конвекционного тока было наиболее полно изучено профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом в начале нынешнего столетия.

Схема опыта Эйхенвальда следующая. Круглая пластинка  $B$ , сделанная из изолирующего материала (рис. 264), оклеена по краю кольцеобразной станиолевой обкладкой  $a$ . Пластинка закреплена на вращающейся оси  $O$  со скользящим контактом, посредством которого

обкладка  $a$  заряжается от батареи до определенного постоянного потенциала. Обкладка  $a$  служит одной из пластин конденсатора; второй пластиной конденсатора служит неподвижная металлическая коробка  $AC$ , играющая одновременно роль электростатической защиты.

Диск  $B$  вместе с кольцом  $a$  приводился в быстрое движение. Таким образом, электрический заряд, сосредоточенный на кольце  $a$ , находился в движении и возбуждал в окружающем пространстве магнитное поле. Напряженность  $H$  этого поля измерялась с помощью магнитной стрелки  $b$ , подвешенной на длинной и тонкой нити. Поворот стрелки измерялся по смещению светового зайчика, отраженного от зеркальца  $s$ , прикрепленного к той же нити. Магнитная стрелка помещалась внутри металлического футляра для предупреждения возможных помех со стороны электрического поля. Измеренная таким образом напряженность магнитного поля оказалась в полном соответствии с вычисленной по формуле (1) § 215.

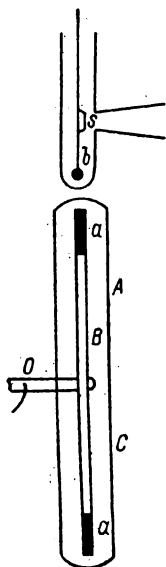


Рис. 264. Схема опыта Эйхенвальда.

Магнитное поле, вызванное при движении диэлектрика с поверхностными зарядами, появляющимися на диэлектрике при его поляризации, было также экспериментально исследовано проф. А. А. Эйхенвальдом. В одном из вариантов своего опыта Эйхенвальд приводил во вращение вокруг оси  $OO'$  (рис. 265) конден-

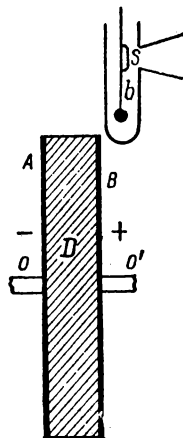


Рис. 265. Схема опыта Эйхенвальда по определению магнитного поля движущегося диэлектрика.

сатор, состоящий из двух круглых пластин  $A$  и  $B$  и диэлектрика  $D$  между ними. Весь конденсатор, вместе с диэлектриком, вращался как целое. Пусть магнитная стрелка  $b$  расположена так близко к одной из обкладок, что практически она измеряет магнитное поле, вызванное движением лишь этой обкладки и ближайшей поверхности диэлектрика. Предположим, что конденсатор заряжен до разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Тогда на его обкладке возникнут заряды с поверхностной плотностью:

$$\sigma = C(V_1 - V_2)\epsilon, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды между обкладками, а  $C$  — постоянная, зависящая лишь от размеров и геометрической формы конденсатора. На поверхности диэлектрика, примыкающей к пластине, возникнут поверхностные заряды обратного знака. По сказанному

в § 139, плотность  $\sigma'$  этих зарядов будет:

$$\sigma' = \frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon},$$

где  $\kappa$  — коэффициент поляризации. Так как коэффициент поляризации  $\kappa$  связан с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  соотношением:  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$ , то последнее выражение можно переписать в виде:

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma$$

или, подставляя вместо  $\sigma$  его значение по (1):

$$\sigma' = C(V_1 - V_2)(\epsilon - 1). \quad (2)$$

Плотности зарядов  $\sigma$  и  $\sigma'$  имеют противоположные знаки, поэтому при движении пластин и диэлектрика они вызывают магнитные поля, противоположно направленные. Результирующее значение напряженности магнитного поля  $H$  определится разностью плотностей зарядов  $\sigma - \sigma'$ .

По (1) и (2):

$$\sigma - \sigma' = C(V_1 - V_2).$$

Как видно, это значение разности плотностей  $\sigma - \sigma'$  не зависит от диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Таким образом, для конденсатора данных размеров и формы при заданной разности потенциалов  $V_1 - V_2$

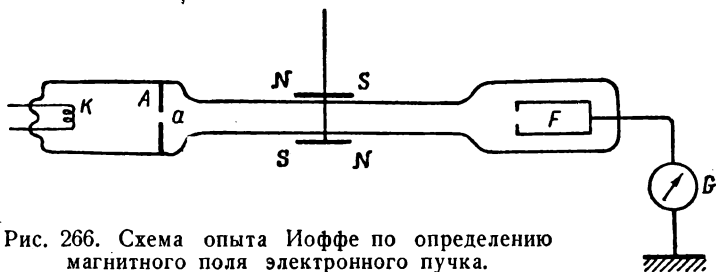


Рис. 266. Схема опыта Иоффе по определению магнитного поля электронного пучка.

благодаря поляризации диэлектрика, суммарный заряд, вызывающий магнитное поле, не зависит от природы диэлектрика. И действительно, Эйхенвальд наблюдал, что при вращении дисков  $A$  и  $B$ , заряженных до определенной разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , создаваемое ими магнитное поле не зависело от того, какой именно диэлектрик  $D$  был расположен между ними. Этим было доказано, что и связанные заряды поляризованного диэлектрика при своем движении вызывают в окружающем пространстве магнитное поле.

Наконец, магнитное поле свободных движущихся электронов было измерено акад. А. Ф. Иоффе. Горячий катод  $K$  (рис. 266) служил

источником электронов, которые затем ускорялись в пространстве между катодом  $K$  и анодом  $A$ . Далее, пролетев через отверстие  $a$ , электроны двигались равномерно, без столкновений. В конце пути они попадали внутрь фарадеева цилиндра  $F$  и отдавали ему свой заряд; обусловленный ими ток измерялся гальванометром  $G$ . Вблизи средней части трубки помещалась астатическая система магнитов. Магнитное поле, возбуждаемое потоком электронов, вызывало отклонение этих магнитов.

Пучок электронов мог быть заменен проволокой, по которой пропусклся электрический ток. Чтобы получить такое же отклонение магнитных стрелок, надо было пропускать по проволоке ток, равный по силе току, измеряемому гальванометром  $G$  при наличии электронного пучка. Таким образом, была доказана эквивалентность в смысле возбуждения магнитного поля электронного пучка и обычного тока проводимости.

Существенно отметить, что в формулах § 215 под скоростью заряда  $v$  надо подразумевать скорость *по отношению к координатной системе, в которой измеряется сила  $f$* . В конце прошлого столетия, когда предполагалось, что носителем электромагнитных процессов является эфир, заполняющий все пространство в виде сплошной среды, казалось, что магнитное поле должно возникать при движении зарядов *относительно эфира*. Поэтому можно было надеяться, что наблюдение магнитного поля зарядов позволит обнаружить движение относительно эфира. Поскольку эфир представлялся в виде среды, заполняющей все доступное нашим наблюдениям пространство, постольку такое движение должно было считаться абсолютным. По механическому принципу относительности (см. т. I, § 19) обнаружить абсолютное поступательное движение с помощью механических процессов невозможно.

В § 215 мы рассматривали два заряда  $e$  и  $e'$ , движущихся по параллельным траекториям с одинаковыми скоростями  $v$ . Такие заряды взаимодействовали, кроме силы Кулона, еще с магнитной силой:

$$f_H = \frac{ee'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2. \quad (3)$$

В этом случае особенно ясна альтернатива — обусловлено ли возникновение магнитного поля: 1) относительным движением заряда по отношению к координатной системе, в которой измеряется сила  $f$ , или 2) движением относительно эфира. В самом деле, в первом случае магнитные силы должны отсутствовать, если оба заряда неподвижны относительно данной координатной системы, хотя бы они вместе с ней и участвовали в общем переносном движении. Во втором случае магнитные силы должны существовать и тогда, когда заряды покоятся относительно координатной системы, которая сама находится в состоянии прямолинейного и равномерного движения. Пусть в лаборатории на земном шаре находятся неподвижные по отношению к нему заряды. Земной шар движется, совершая суточное и годичное движение и увлекаясь вместе со всей солнечной системой относительно других звезд. Спрашивается: существуют ли, кроме сил Кулона, еще добавочные магнитные силы взаимодействия между зарядами? При первом предположении, такого взаимодействия не должно быть, при втором — такая добавочная сила должна существовать. Непосредственно обнаружить эту силу невозможно: как видно из формулы (3), она отличается от силы Кулона множителем  $\left( \frac{v}{c} \right)^2$ , где  $v$  —



скорость зарядов, а  $c$  — электродинамическая постоянная, равная скорости распространения электромагнитных возмущений в пустоте или, что то же самое, скорости света. Ввиду того, что скорость света очень велика ( $3 \cdot 10^{10}$  см/сек), это отношение, как мы отмечали, обычно весьма мало. Тем не менее можно придумать такой вариант опыта, при котором наличие этих добавочных сил должно обнаружиться. Этот опыт был предложен и осуществлен Трутоном и Ноблем в 1904 г.

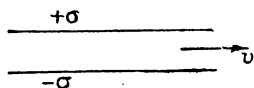


Рис. 267. Схема опыта Трутона и Нобля.

Рассмотрим плоский конденсатор, движущийся со скоростью  $v$ , направление которой параллельно обкладкам конденсатора (рис. 267). Если конденсатор заряжен, то каждая из его пластин создает в окружающем пространстве магнитное поле. По формуле (§ 215) можно сосчитать, что напряженность магнитного поля  $H$  в пространстве между пластинами конденсатора (при условии, что поверхностные плотности их зарядов соответственно равны  $+\sigma$  и  $-\sigma$  и магнитная проницаемость среды между ними  $\mu = 1$ ) равна

$$H = \frac{4\pi}{c} \sigma v.$$

Кроме того, между пластинами конденсатора имеется электрическое поле напряженности

$$E = 4\pi\sigma.$$

(Считаем диэлектрическую постоянную среды между пластинами  $\epsilon = 1$ .)

Вне конденсатора напряженность обоих полей равна нулю. В § 138 мы видели, что электростатическое поле обладает энергией с объемной плотностью  $ED/8\pi$ .

Отсюда получаем, что электрическая энергия всего конденсатора равна

$$W_e = 2\pi\sigma^2 V,$$

где  $V$  — объем пространства между пластинами конденсатора.

В § 227 мы увидим, что и магнитное поле обладает энергией с объемной плотностью  $HB/8\pi$ , откуда магнитная энергия конденсатора

$$W_m = 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V.$$

Следовательно, полная энергия конденсатора равна:

$$W = W_e + W_m = 2\pi\sigma^2 V + 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V.$$

или

$$W = W_e \left[ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]. \quad (4)$$

Если скорость  $v$  составляет угол  $\alpha$  с обкладками конденсатора, то следует взять лишь проекцию скорости на направление, параллельное обкладкам, в результате чего формула (4) примет вид:

$$W = W_e \left[ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cos^2 \alpha \right]. \quad (4a)$$

Таким образом, энергия конденсатора зависит от угла  $\alpha$  и обладает минимумом при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , т. е. когда конденсатор располагается перпендикулярно к направлению движения. Минимуму энергии соответствует наиболее устойчивое состояние, поэтому конденсатор будет стремиться вернуться

в положение, при котором  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Момент ориентирующей его пары равен взятой с обратным знаком производной от энергии по углу  $\alpha$ :

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = W_e \left( \frac{v}{c} \right)^2 \sin 2\alpha.$$

Трутон и Нобль пытались обнаружить наличие такого момента сил следующим образом. Небольшой конденсатор подвешивался на длинной и тонкой нити. Конденсатор заряжался до разности потенциалов в 3000 в. С помощью светового зайчика, отраженного от зеркальца, соединенного с конденсатором, они наблюдали его крутильные колебания. Отсюда они находили положение равновесия конденсатора. Это положение равновесия определялось упругими свойствами нити и наличием момента  $M$ . Направление и скорость движения Земли относительно эфира неизвестны. Но во всяком случае в течение суток, из-за вращения Земли вокруг своей оси, угол  $\alpha$  меняется и, следовательно, должно меняться положение равновесия конденсатора. Наблюдения показали, что никаких систематических отклонений в течение суток не обнаруживается. Суточные отклонения не превышали по величине тех, которые могли бы быть вызваны движением Земли относительно эфира со скоростью 12 км/сек. В действительности скорость орбитального движения Земли вокруг Солнца равна 30 км/сек. Опыты повторялись в различное время года, так что возможность случайной взаимной компенсации скоростей движения Земли и движения всей солнечной системы в пространстве отпадала. Впоследствии этот опыт не раз повторялся. В 1926 г. Томашек настолько повысил чувствительность метода Трутона и Нобля, что он мог бы обнаружить движение Земли относительно эфира со скоростью 0,5 км/сек. Все наблюдения Томашека также не обнаружили наличия момента  $M$ .

Таким образом, наблюдения с несомненностью показали, что магнитное поле зарядов обусловлено их движением относительно системы, в которой ведется измерение. Опыты над электромагнитными явлениями не позволяют, как и чисто механические опыты, обнаружить абсолютное равномерное движение системы в пространстве. Эфир не может служить системой отсчета (ср. со сказанным в § 152). Впоследствии мы увидим (т. III), что и наблюдения световых явлений также не позволяют обнаружить абсолютное равномерное движение. Все эти факты были обобщены теорией относительности Эйнштейна, полностью выявившей роль относительности движения.

Содержание теории относительности будет нами рассмотрено более подробно в т. III. Здесь только отметим, что утверждение о зависимости физических процессов от относительной скорости систем отсчета друг относительно друга ни в коей мере не связано с порочным философским релятивизмом, утверждающим относительность всех наших знаний. Теория относительности вскрывает, в конечном счете, независимость физических законов от того, относительно какой системы отсчета они формулируются (дает метод находить инвариантный или, как говорят, „ковариантный“ вид законов по отношению к переходу от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно).

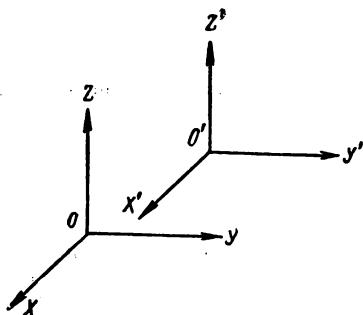


Рис. 268. Две системы координат.

Представим себе две системы отсчета:  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$  (рис. 268). Пусть система  $X'Y'Z'$  движется относительно  $XYZ$  с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ . Обозначим значения напряженностей электрического и магнитного полей, измеренные в системе  $XYZ$ , через  $E$  и  $H$ , а измеренные в системе  $X'Y'Z'$  — через  $E'$  и  $H'$ . Пусть в системе  $X'Y'Z'$  имеются источники электрических и магнитных полей, напряженности которых по отношению к этой координатной системе равны  $E'$  и  $H'$ . Тогда в системе  $X'Y'Z'$ , по формуле Лоренца, на заряд  $e$ , неподвижный в системе координат  $XYZ$ , действует сила:

$$\mathbf{f} = E'\mathbf{e} + \frac{1}{c} e [\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \quad (5)$$

По сравнению с формулой (3в) § 214 здесь изменен порядок множителей в векторном произведении, так как скорость заряда  $e$  относительно системы  $X'Y'Z'$  равна  $-\mathbf{v}$ .

Если скорость  $v$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ , то сила  $\mathbf{f}'$  равна силе  $\mathbf{f}$ , измеряемой в системе  $XYZ$ . Таким образом, в системе координат  $XYZ$  на заряд  $e$ , неподвижный относительно этой системы, действует сила

$$\mathbf{f} = E'\mathbf{e} + \frac{1}{c} e [\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \quad (5a)$$

В электростатике напряженность электрического поля измеряется отношением силы  $f$ , действующей на заряд, к величине заряда:  $f/e$ . Поэтому наличие силы  $f$ , даваемой формулой (5a), эквивалентно тому, как если бы в системе  $XYZ$  существовало электрическое поле напряженности:

$$\mathbf{E} = E' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \quad (6)$$

В той же координатной системе  $XYZ$ , кроме напряженности магнитного поля  $H'$ , существует еще добавочное магнитное поле, вызванное тем, что всякий заряд  $e'$ , неподвижный в системе  $X'Y'Z'$ , движется относительно системы  $XYZ$  со скоростью  $\mathbf{v}$ . Напряженности этого добавочного поля:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e'}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v} \times \frac{e'\mathbf{r}}{r^3} \right].$$

Но  $e'\mathbf{r}/r^3$  есть напряженность электрического поля  $E'$ , измеряемого в системе  $X'Y'Z'$  в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от заряда  $e'$ .

Таким образом:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}']$$

и, следовательно, полная напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в системе  $XYZ$  равна:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}']. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) указывают на связь между напряженностями электрического и магнитного полей, измеренными в двух системах, движущихся одна относительно другой. Они позволяют разобрать любой случай относительного движения.

Положим, например, что в системе  $X'Y'Z'$  имеется лишь заряд  $e'$ , неподвижный относительно этой системы. В этой системе в некоторой точке  $B$ , отстоящей от заряда на расстоянии  $r$ , напряженность электрического поля  $E' = \frac{e'\mathbf{r}}{r^3}$ . Никакого магнитного поля в системе  $X'Y'Z'$  не будет ( $H' = 0$ ). Следовательно, если поместить в точку  $B$  другой заряд  $e$ , тоже неподвиж-

ный относительно системы  $X'Y'Z'$ , то между зарядами никакой другой силы, кроме кулоновой, существовать не будет, хотя система  $X'Y'Z'$  движется относительно системы  $XYZ$  со скоростью  $v$ . Это соответствует условиям опыта Трутона и Нобля и его отрицательному результату.

В системе же  $XYZ$  должно, по формуле (7), наблюдаться, кроме электрического, еще магнитное поле напряженности

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v} \times \frac{e'\mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (8)$$

Это поле можно обнаружить, поместив в точку  $B$  магнитную стрелку. Такая схема соответствует опыту Эйхенвальда: заряд, движущийся относительно системы координат, вызывает в этой системе магнитное поле.

Наконец, в точку  $B$ , вместо магнитной стрелки, можно поместить заряд  $e$ . Если этот заряд неподвижен относительно системы  $XYZ$ , то на него, по (6), будет действовать лишь электрическое поле напряженности  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ . Это соответствует тому факту, что на неподвижные электрические заряды магнитное поле не действует. Если же заряд  $e$  заставить двигаться относительно системы  $XYZ$  со скоростью  $v_1$ , то, по формуле Лоренца, на этот заряд будет действовать еще сила:

$$f = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]. \quad (9)$$

Если вектор скорости  $\mathbf{v}_1$  сделать равным вектору  $\mathbf{v}$ , то заряд  $e$  станет неподвижным относительно заряда  $e'$ , но оба они будут двигаться относительно координатной системы  $XYZ$  по параллельным прямым с одинаковыми скоростями. Если для простоты положить еще, что скорость  $\mathbf{v}$  перпендикулярна к  $\mathbf{r}$ , то формула (8) примет вид:

$$H = \frac{1}{c} \frac{e'v}{r^2},$$

а формула (9) — вид:

$$f = \frac{ee'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2,$$

что совпадает с формулой (3) и соответствует случаю притяжения двух параллельных проводов, по которым текут токи одного направления.

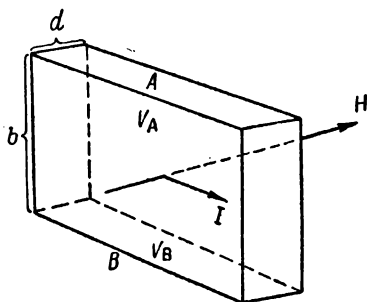


Рис. 269. Возникновение разности потенциалов  $V_A - V_B$  в магнитном поле.

Формулы преобразования полей (6) и (7) справедливы только для случая, когда скорость движения зарядов  $v$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ . Теория относительности дает общие формулы перехода от одной системы отсчета к другой, справедливые для любых скоростей.

**§ 217. Эффект Холла.** Существование силы Лоренца, действующей на электрический заряд, движущийся в магнитном поле, позволяет объяснить следующее явление: при протекании тока  $I$  вдоль проводящей пластинки, помещенной перпендикулярно к линиям внешнего магнитного поля  $H$  (рис. 269), между краями  $A$  и  $B$  пластинки возникает разность потенциалов  $V_A - V_B$ . Это явление носит название *эффекта Холла*.

Возникающая разность потенциалов  $V_A - V_B$  пропорциональна произведению силы тока на напряженность магнитного поля  $IH$  и обратно пропорциональна толщине пластинки  $d$ :

$$V_A - V_B = K \frac{IH}{d}, \quad (1)$$

где  $K$  является постоянной.

Если ток обусловлен переносом зарядов  $e$ , то в магнитном поле  $H$  на них действует сила Лоренца, отклоняющая их в направлении, перпендикулярном к направлению тока. В результате этого заряды начнут накапливаться у края пластинки  $A$  до тех пор, пока вызванное ими электрическое поле не уравнивает действие магнитной силы.

По формуле Лоренца [(3) § 214] сила, действующая на заряд, в нашем случае ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) равна:

$$f_H = e\bar{v}H,$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость движения зарядов в направлении распространения тока.

Напряженность электрического поля, вызванного появлением разности потенциалов  $V_A - V_B$ , будет:

$$E = \frac{V_A - V_B}{b},$$

где  $b$  — ширина пластины.

Следовательно, электрическая сила, действующая на заряд, равна:

$$f_e = e \frac{V_A - V_B}{b}.$$

Стационарное состояние наступит при равенстве сил:  $f_H = f_e$ , откуда получим соотношение:

$$e \frac{V_A - V_B}{b} = e\bar{v}H. \quad (2)$$

Среднюю скорость движения зарядов  $\bar{v}$  в проводнике получим, используя соотношение между силой тока  $I$ , числом зарядов в единице объема проводника  $n$  и скоростью их движения (см. § 214):

$$I = b dne\bar{v}, \text{ откуда } \bar{v} = \frac{I}{b dne}.$$

Подставляя это значение  $\bar{v}$  в (2), получим:

$$V_A - V_B = \frac{1}{ne} \cdot \frac{IH}{d}. \quad (3)$$

Таким образом, в соответствии с эмпирической формулой (1) величина  $V_A - V_B$  пропорциональна произведению  $IH$  и обратно пропорциональна толщине  $d$  пластины. Постоянная  $K$  оказывается равной:

$$K = \frac{1}{ne}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что знак постоянной  $K$  должен зависеть от знака заряда  $e$ . Положительный знак постоянной  $K$  указывает, что потенциал точки  $A$  (рис. 269) выше потенциала точки  $B$ .

По сказанному в § 161, электропроводность металлов обусловлена наличием свободных электронов, причем на каждый атом металла приходится приблизительно один свободный электрон. Таким образом, для металлов постоянная  $K$  должна быть отрицательной, и ее численное значение должно определяться зарядом электрона  $e$  и числом свободных электронов в единице объема металла  $n$ .

Вывод выражения (4) для постоянной  $K$  неточен. На самом деле, нельзя выражать силу  $f_H$ , действующую на заряд в магнитном поле, через среднюю скорость заряда  $\bar{v}$ . Если учесть, что на длине свободного пробега электрона его скорость в направлении распространения тока равномерно возрастает, то в выражение для  $K$  войдет еще численный множитель  $2/3$ ; тогда

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{ne}. \quad (4a)$$

Обозначим число атомов в единице объема металла через  $n_0$  и положим, что  $n = zn_0$ ; тогда  $z$  показывает, какое в среднем число свободных электронов приходится на один атом. Число атомов в единице объема  $n_0$  легко связать с числом Авогадро  $N$ . В самом деле, масса одного атома, с одной стороны, равна  $A/N$ , где  $A$  — атомный вес, а с другой, — равна  $\rho/n_0$ , где  $\rho$  — плотность. Отсюда

$$\frac{\rho}{n_0} = \frac{A}{N} \quad \text{или} \quad n_0 = \frac{N\rho}{A},$$

откуда

$$n = \frac{N\rho}{A} \cdot z.$$

Подставив это значение  $n$  в (4a), получим:

$$K = \frac{2}{3} \frac{A}{N e \rho z},$$

но  $N e = -F$ , где  $F$  — число Фарадея; отсюда для постоянной  $K$  для металлов получаем:

$$K = -\frac{2}{3} \frac{A}{F \rho z}. \quad (5)$$

Многие металлы действительно дают отрицательную постоянную  $K$  ожидаемой величины. Из найденного на опыте значения постоянной  $K$  можно найти величину  $z$ ; для ряда одновалентных металлов  $z$  получается близким к единице, — так, для натрия величина  $z = 0,65$ , для серебра  $z = 0,75$ , для золота  $z = 0,9$ . Для металлов с более высокой валентностью  $z$  получается больше, — например для алюминия  $z = 2,9$ . Однако существуют такие металлы (Zn, Cd, Pb, Fe и некоторые другие), которые дают положительное значение постоянной  $K$ .

Этот факт непонятен с точки зрения приведенной элементарной теории и может быть объяснен лишь на основе квантовой механики.

Эффект Холла наблюдается только в проводниках с электронной проводимостью. В электролитах с их ионной проводимостью заметный эффект отсутствует. Это объясняется тем, что тяжелые ионы имеют гораздо меньшие скорости, чем электроны.

В полупроводниках постоянная  $K$  сильно возрастает с понижением температуры, что соответствует быстрому снижению числа свободных электронов в единице объема с понижением температуры. Знак эффекта Холла у полупроводников позволяет судить, носит ли проводимость полупроводника электронный или „дырочный“ характер (§ 171). Для полупроводников со „смешанной“ проводимостью явление носит более сложный характер.

**§ 218. Определение удельного заряда электронов.** Выражение для силы Лоренца позволяет определить отношение заряда движущейся частицы  $e$  к ее массе  $m$ . Это отношение  $e/m$  принято называть *удельным зарядом*.

Представим себе пучок заряженных частиц, который движется с постоянной скоростью  $v$  в вакууме в плоскости, перпендикулярной к направлению напряженности внешнего магнитного поля  $H$  (рис. 270, напряженность поля  $H$  перпендикулярна к плоскости рисунка). Тогда угол между направлениями скорости частицы  $v$  и напряженности  $H$  равен  $\pi/2$ , и, по формуле (3а) § 214, на частицу действует постоянная сила:

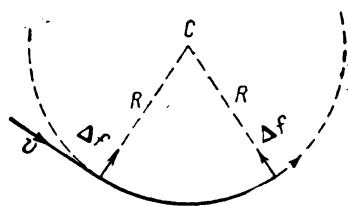


Рис. 270. Сила  $\Delta f$ , действующая на заряд, движущийся перпендикулярно к направлению магнитного поля.

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH. \quad (1)$$

Эта сила во все время движения направлена перпендикулярно к направлению вектора скорости частицы  $v$ . Так как при этом на частицу по условию не действуют никакие другие силы, то ее скорость  $v$  постоянна по величине, и, следовательно, траектория частицы представляет собой дугу круга. Если радиус этого круга  $R$ , то центростремительное ускорение частицы равно  $v^2/R$ , и по второму закону Ньютона связь между этим ускорением и силой  $\Delta f$  выразится соотношением:

$$\Delta f = \frac{mv^2}{R}.$$

Подставляя сюда вместо силы  $\Delta f$  ее значение по (1), получим:

$$\frac{1}{c} evH = \frac{mv^2}{R},$$

откуда для удельного заряда частицы находим:

$$\frac{e}{m} = \frac{cv}{RH}. \quad (2)$$

Радиус кривизны траектории частиц  $R$  и напряженность магнитного поля  $H$  могут быть непосредственно измерены. Таким образом, для определения  $e/m$  остается знать скорость частицы  $v$ . Скорость частицы  $v$  можно определить различными способами. Ее можно, например, определить по ускоряющей разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . При движении частиц в вакууме вся работа электрических сил  $e(V_1 - V_2)$  идет на увеличение их кинетической энергии  $mv^2/2$ , откуда:

$$\frac{mv^2}{2} = e(V_1 - V_2)$$

и, следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot (V_1 - V_2)}.$$

Подставив это значение  $v$  в (2) и возводя правую и левую части полученного равенства в квадрат, после преобразований получим:

$$\frac{e}{m} = \frac{2c^2}{R^2 H^2} (V_1 - V_2). \quad (3)$$

Томсон использовал иной способ для исключения скорости  $v$  из выражения для удельного заряда  $e/m$ . Для этого он заставлял пучок частиц одновременно двигаться в магнитном и поперечном к нему электрическом полях. Схема опыта Томсона, примененного им для определения удельного заряда электрона, изображена на рис. 271;  $K$  — катод, служащий источником электронов;  $A$  — диафрагма, выделяющая пучок электронов. Между  $K$  и  $A$  приложена разность потенциалов, сообщая электронам скорость  $v$ , с которой они затем и движутся в пространстве за диафрагмой. Пунктирным кругом указана область, где возбуждается магнитное поле напряженности  $H$ , перпендикулярное к плоскости рисунка. Это поле получается с помощью электромагнита, между полюсами которого располагается трубка.  $B_1$  и  $B_2$  — две параллельные пластины; между ними возбуждается электрическое поле.  $C$  — флуоресцирующий экран, на котором светящееся пятнышко определяет то место, в которое попадает катодный луч. Пусть направление магнитного поля таково, что пучок электронов отклоняется вниз. Тогда при наличии лишь магнитного поля электроны будут двигаться в области поля по дуге круга

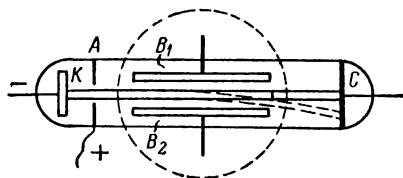


Рис. 271. Схема опыта Томсона для определения удельного заряда электрона.



(пунктирная линия), и светящееся пятнышко на флуоресцирующем экране сместится вниз. По величине этого смещения вычисляется радиус кривизны  $R$ . Затем одновременно с магнитным полем возбуждается между пластинами  $B_1$  и  $B_2$  электростатическое поле напряженности  $E$  и такого направления, чтобы электрическая сила  $eE$ , действующая на электрон, была направлена противоположно магнитной силе  $\Delta f$  (в нашем случае электрическая сила должна быть направлена вверх). Электрическое поле подбирается такой величины, чтобы пучок электронов вовсе не испытывал отклонения, что будет иметь место при равенстве по величине электрической и магнитной сил:

$$eE = \frac{1}{c} evH, \text{ откуда } v = \frac{cE}{H}.$$

Подставляя это значение  $v$  в (2), найдем:

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 E}{RH^2}.$$

Таким образом, по напряженности полей  $E$  и  $H$  и радиусу кривизны  $R$  определяется удельный заряд  $e/m$ .

Существует ряд видоизменений метода Томсона (см. мелкий шрифт), цель которых — повысить точность промеров. Как уже указывалось, для малых скоростей электронов:

$$\frac{e}{m} = 5,273 \cdot 10^{17} \frac{\text{CGSE-ед. заряда}}{g}.$$

Отсюда по известному значению заряда электрона  $e$  вычисляется масса электрона  $m$ .

При больших скоростях электронов сказывается зависимость массы от скорости в соответствии с принципом относительности, в результате чего отношение  $e/m$  убывает с увеличением скорости. Так как скорости электронов могут быть сделаны весьма большими, то убывание  $e/m$  с увеличением скорости оказывается вполне заметным и служит экспериментальным подтверждением зависимости массы от скорости. Тщательное экспериментальное исследование зависимости отношения  $e/m$  для электронов от скорости находится в очень хорошем соответствии с теоретическими выводами.

На рис. 272 точками изображены измеренные значения массы электрона для разных скоростей; сплошная кривая дает зависимость массы от скорости в соответствии с формулой теории относительности:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

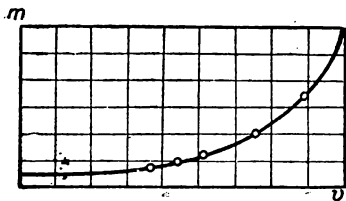


Рис. 272. Зависимость массы электрона от скорости.

где  $m$  — масса при данной скорости  $v$ ;  $m_0$  — масса при бесконечно малой скорости („масса покоя“) и  $\beta = \frac{v}{c}$ , где  $c$  — скорость света в пустоте. Как было указано на стр. 144, „масса покоя“ электрона

$$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

Когда была открыта зависимость массы от скорости, многие буржуазные ученые пытались использовать этот факт для обоснования порочного утверждения о том, что материя якобы исчезает. Разоблачая их, Ленин писал: <sup>1</sup> «„Материя исчезает“ — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются как относительные, присущие только некоторым состояниям материи.»

Рассмотрим теперь метод определения  $e/m$  путем *фокусировки пучка электронов продольным магнитным полем*. Пусть электрон летит с постоянной скоростью  $v$ , составляющей угол  $\alpha$  с направлением магнитного поля  $H$ . Мы легко определим вид траектории электрона в этом случае, если разложим его движение на две составляющих — одну вдоль магнитного поля и другую — перпендикулярную к нему. Составляющая скорости вдоль магнитного поля  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ , а составляющая, перпендикулярная к направлению магнитного поля,  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

Проекция пути электрона на плоскость, перпендикулярную к  $H$ , представляет собой окружность, радиус которой определится соотношением (2):

$$R = \frac{cv_{\perp} m}{eH}. \quad (4)$$

Проекция движения электрона на направление, параллельное  $H$ , окажется равномерным движением со скоростью  $v_{\parallel}$ , так как в магнитном поле нет составляющей силы, действующей на заряд вдоль поля. Таким образом, сама траектория электрона будет *винтовой линией*.

Время  $t$ , необходимое для того, чтобы электрон описал один оборот этой винтовой линии, равно:

$$t = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$$

Подставляя сюда вместо  $R$  его значение по (4), получим:

$$t = \frac{2\pi c}{\frac{e}{m} H}. \quad (5)$$

Таким образом, время  $t$  не зависит ни от величины, ни от направления скорости электрона  $v$ , а определяется только напряженностью магнитного поля  $H$  и удельным зарядом электрона  $e/m$ . На этом соотношении основан метод определения  $e/m$ , который заключается в следующем.

Электроны, испускаемые горячим катодом  $K$ , расположенным внутри откачанной трубки (рис. 272), проходят через отверстие в диафрагме  $A$ .

<sup>1</sup> В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1951, стр. 243.

Между катодом  $K$  и диафрагмой  $A$  прикладывается ускоряющее поле с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$ . Таким образом, создается пучок электронов, скорость которых  $v$  определяется из соотношения:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2). \quad (6)$$

Затем пучок электронов проходит между пластинами конденсатора  $C$ , между которыми возбуждается переменное электрическое поле напряженности  $E$ . Под влиянием этого переменного поля электроны в различные моменты времени отклоняются на различные углы  $\alpha$  по отношению к оси прибора. Между конденсатором  $C$  и флуоресцирующим экраном  $B$  возбуждается продольное магнитное поле с помощью соленоида, внутрь которого вставляется трубка. По сказанному, при этих условиях электроны двигаются по винтовой линии. За время  $t$ , в течение которого электроны описывают один оборот винтовой линии, они успевают пройти вперед отрезок:

$$l = v_{\parallel} t.$$

Подставляя сюда вместо времени  $t$  его значение (5), получим:

$$l = \frac{2\pi cv \cdot \cos \alpha}{\frac{e}{m} \cdot H}.$$

Если угол  $\alpha$  мал, то  $\cos \alpha \cong 1$  и

$$l \cong \frac{2\pi cv}{\frac{e}{m} H}. \quad (7)$$

Таким образом, отрезок  $l$  оказывается с достаточной степенью приближения не зависящим от того, на какой угол  $\alpha$  электроны были отклонены в конденсаторе  $C$ .

Так как за это же самое время  $t$  все электроны успевают сделать один оборот винтовой линии, то, следовательно, они все пересекут ось прибора

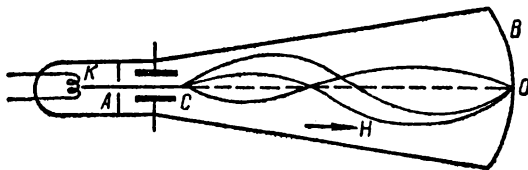


Рис. 273. Схема определения удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки (метод Буша).

на одинаковом расстоянии  $l$  от конденсатора  $C$ . На рис. 273 представлено несколько траекторий электронов. Видно, что все они пересекаются в одной точке  $O$ . Эта точка, по аналогии с местом пересечения оптических лучей, называется *фокусом электронов*. Положение фокуса меняется при изменении напряженности продольного магнитного поля  $H$ . Напряженность  $H$  может быть подобрана так, чтобы фокус пришелся как раз на флуоресцирующий экран  $B$ , что легко установить по резкости следа пучка на экране. При этом отрезок  $l$  равен расстоянию между конденсатором  $C$  и экраном  $B$  и, следовательно, может быть измерен. Зная же  $l$ , легко определить удельный заряд электрона  $e/m$ . В самом деле, из (7) имеем:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi cv}{lH}.$$

Подставив сюда вместо скорости  $v$  ее значение по (6), найдем:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 c^2 (V_1 - V_2)}{l^2 H^2}.$$

Здесь справа стоят величины, доступные непосредственному измерению. Таким образом, определится и  $e/m$ .

Другой точный метод определения удельного заряда электрона  $e/m$  носит название *метода фильтра скоростей*. В откачанной трубке (рис. 274) с помощью горячего катода  $K$  и диафрагмы  $A_1$  получается пучок электронов. Затем он проходит между пластинами двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ . Между конденсаторами располагается вторая диафрагма  $A_2$ , пропускающая лишь те электроны, которые не были отклонены в конденсаторе  $C_1$ . На пластины обоих конденсаторов подается синхронно переменная разность потенциалов, меняющаяся со временем по синусоидальному закону с периодом  $T$ . Тогда

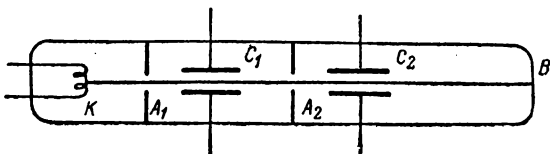


Рис. 274. Схема определения удельного заряда электрона методом фильтра скоростей.

через диафрагму могут проникнуть только те электроны, которые пролетали между пластинами конденсатора  $C_1$ , когда разность потенциалов между ними равнялась нулю. За время  $t$ , в течение которого электроны долетят до второго конденсатора, подаваемая на конденсаторы разность потенциалов успеет измениться, и электроны отклонятся. Отклонение будет отсутствовать только в том случае, если время  $t$  окажется кратным полупериоду  $T/2$ . В этом случае пучок электронов даст след в центре флуоресцирующего экрана  $B$ .

Таким образом, чтобы пучок не был отклонен ни тем, ни другим конденсатором, должно быть выполнено условие:

$$t = n \frac{T}{2}, \quad (8)$$

где  $n$  — целое число.

С другой стороны, время  $t$  определяется следующим образом: пусть  $l$  есть расстояние между конденсаторами, тогда  $t = \frac{l}{v}$ , где  $v$  — скорость электронов. Эта скорость может быть найдена по ускоряющей разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , приложенной между катодом  $K$  и диафрагмой  $A_1$ , из соотношения:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e (V_1 - V_2), \text{ откуда } t^2 = \frac{l^2}{v^2} = \frac{l^2 m}{2e (V_1 - V_2)}.$$

Воспользовавшись этим значением  $t^2$  и формулой (8), получим:

$$\frac{e}{m} = \frac{2l^2}{n^2 T^2 (V_1 - V_2)}. \quad (9)$$

Для выполнения измерения период  $T$  уменьшается, пока впервые пучок электронов не попадает в центр экрана  $B$ . Это соответствует  $n = 1$ , откуда, по (9), по известным  $l$  и  $V_1 - V_2$  находят удельный заряд  $e/m$ .

### § 219. Определение удельного заряда положительных ионов.

Указанные методы, основанные на отклонении частиц в электрическом и магнитном полях, в принципе пригодны для определения удельного заряда  $e/m$  не только электронов, но и любых ионов. Однако трудность их применения для определения удельного заряда  $e/m$  атомных или молекулярных ионов заключается в том, что источником ионов обычно служит не какой-либо твердый электрод, а газ, в котором происходит разряд. При этом ионы возникают в разных местах, в областях с различными потенциалами, в результате чего скорости их оказываются различными. Но при различных скоростях ионы получают в одних и тех же полях различные отклонения, что делает невозможным промер. Чтобы избежать влияния скорости, Томсон применил метод, получивший название *метода парабол*. Этот метод основан на применении электрического и магнитного полей, направленных в одну и ту же сторону.

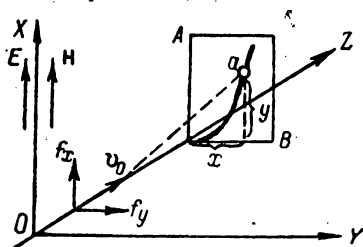


Рис. 275. Схема метода парабол.

Представим себе частицу, летящую вдоль оси  $OZ$  с начальной скоростью  $v_0$  (рис. 275). Пусть напряженности электрического поля  $E$  и магнитного поля  $H$  направлены обе вдоль оси  $OX$  и действуют на одном и том же участке пути частицы  $z$ . Со стороны электростатического поля на частицу с зарядом  $e$  действует постоянная сила, направленная вдоль оси  $OX$ :

$$f_x = eE. \quad (1)$$

Со стороны магнитного поля на ту же частицу действует сила Лоренца, направленная по правилу левой руки вдоль оси  $OY$ :

$$f_y = \frac{1}{c} e v_0 H. \quad (2)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля будут отклонять частицу во взаимно перпендикулярных направлениях, и она пересечет плоскость  $AB$ , параллельную плоскости  $XOY$ , в некоторой точке  $a$  с координатами  $x$  и  $y$ .

Пусть масса частицы равна  $m$ , тогда составляющая ее ускорения  $w_x$ , по (1), равна:

$$w_x = \frac{f_x}{m} = \left( \frac{e}{m} \right) E.$$

Так как эта составляющая ускорения постоянна, то смещение частицы вдоль оси  $OX$  носит характер равномерно-ускоренного движения, и за время  $\Delta t$ , за которое частица пролетит вперед на отрезок  $z$ , она

отклонится вдоль оси  $OX$  на величину:

$$x = \frac{1}{2} \omega_x \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{m} \right) \cdot E \Delta t^2,$$

но  $\Delta t = \frac{z}{v_0}$ , откуда:

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{m} \right) \cdot E z^2 \frac{1}{v_0^2}.$$

Величину  $\frac{1}{2} E z^2$ , постоянную для данных условий опыта, обозначим через  $C_1$ , тогда:

$$x = C_1 \left( \frac{e}{m} \right) \cdot \frac{1}{v_0^2}. \quad (3)$$

Точно так же по (2) найдем, что составляющая ускорения частицы  $\omega_y$  равна:

$$\omega_y = \frac{f_y}{m} = \frac{1}{c} \left( \frac{e}{m} \right) v_0 H.$$

Так как  $\omega_y$  тоже постоянно, то смещение частицы вдоль оси  $OY$  будет:

$$y = \frac{1}{2} \omega_y \Delta t^2 = \frac{1}{2c} \left( \frac{e}{m} \right) v_0 H \Delta t^2,$$

или, снова подставляя сюда вместо  $\Delta t$  его значение  $z/v_0$ , найдем:

$$y = \frac{1}{2c} \left( \frac{e}{m} \right) H z^2 \frac{1}{v_0}.$$

Обозначая величину  $\frac{1}{2c} H z^2$ , постоянную для данных условий опыта, через  $C_2$ , получим:

$$y = C_2 \left( \frac{e}{m} \right) \frac{1}{v_0}. \quad (4)$$

Формулы (3) (4) определяют координаты смещения частицы в электрическом и магнитном полях. Как видно, при данных условиях опыта координаты смещения определяются двумя факторами: удельным зарядом частицы  $e/m$  и ее скоростью  $v_0$ . Частицам с одинаковым удельным зарядом  $e/m$ , но различными скоростями  $v_0$ , соответствуют разные точки пересечения их траекторий с плоскостью  $AB$ . Все эти точки пересечения расположатся вдоль определенной кривой, уравнение которой получим, исключив из выражений (3) и (4) скорость  $v_0$ :

$$y^2 = \frac{C_2^2}{C_1} \left( \frac{e}{m} \right) x. \quad (5)$$

Как видно, — это уравнение параболы. Томсон помещал на пути частиц фотографическую пластинку, на которой получались следы

частиц в виде параболических кривых. Каждая парабола соответствует одному и тому же отношению  $e/m$ , но различным скоростям. Различные параболы соответствуют частицам с различными отношениями  $e/m$ . Находя для наблюдаемой параболы  $y^2 = px$  значение ее параметра  $p = \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{e}{m} \right)$  и зная  $C_1$  и  $C_2$ , можно найти отношения зарядов ионов к их массам.

В опытах Томсона наблюдались не только однозарядные, но и многозарядные ионы. Если эти ионы одинаковой природы (например,  $O^+$  и  $O^{++}$ ), то их удельные заряды  $e_1/m$  и  $e_2/m$  будут в точности относиться, как целые числа, так как заряды  $e_1$  и  $e_2$  могут быть только целыми кратными от заряда электрона  $e$ .

Если же речь идет об ионах с одинаковыми зарядами, но различной природы (например,  $H^+$  и  $O^+$ ), то их удельные заряды  $e/m_1$  и  $e/m_2$  будут относиться, как массы данных частиц  $m_2$  и  $m_1$ . Таким образом, метод парабол позволяет непосредственно сравнивать массы атомов или молекул между собою. Наблюдая параболы, соответствующие неону, Томсон обнаружил наряду с интенсивной параболой, отвечающей атомному весу неона 20, еще вторую, более слабую параболу, которой отвечало несколько иное отношение  $e/m$ ; измерения показали, что это отношение соответствует атомам с атомным весом 22. Таким образом, оказывается, что существуют два сорта атомов неона, обладающих одинаковыми зарядами, но несколько различными массами.

В настоящее время известно, что большая часть элементов представляет собой смесь двух или более изотопов, т. е. веществ, вполне сходных по своим физическим и химическим свойствам, но обладающих несколько различными атомными весами.

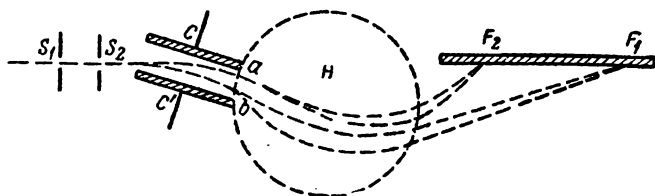


Рис. 276. Масс-спектрограф.

Метод сравнения масс ионов по их отклонению в электрическом и магнитном полях был усовершенствован Астоном. В методе Астона ионы последовательно проходят через области действия электрического и магнитного полей, вызывающих их отклонения в противоположных направлениях.

Схема прибора Астона представлена на рис. 276. Диафрагмы  $S_1$  и  $S_2$  выделяют узкий пучок ионов, который затем проходит между

параллельными пластинами  $C$  и  $C'$ . Пластинам  $C$  и  $C'$  сообщается определенная разность потенциалов, так что между ними образуется электрическое поле напряженности  $E$ . Выделим мысленно в пучке частицы с одним и тем же удельным зарядом  $e/m$ ; эти частицы обладают разными скоростями, поэтому они отклонятся на разную величину, и пучок расширится. Его краю  $b$  будут соответствовать наиболее медленные частицы, а краю  $a$  — наиболее быстрые. В области, обведенной пунктирным кругом, частицы попадают в магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа. Здесь они испытывают отклонение в сторону, противоположную той, в которую они отклонялись в электрическом поле. Частицы разных скоростей снова будут отклонены по-разному: наиболее медленные частицы  $b$  — сильнее всего, а наиболее быстрые частицы  $a$  — меньше всего. Благодаря этому траектории частиц разных скоростей пересекутся в одной точке  $F_1$ . Точно так же для частиц с иным удельным зарядом  $e/m$  получится пересечение траекторий частиц разных скоростей в некоторой точке  $F_2$ . Места пересечений траекторий частиц с другими отношениями  $e/m$  расположатся приблизительно вдоль прямой  $F_1F_2$ . Таким образом, если вдоль прямой  $F_1F_2$  расположить фотографическую пластинку, то на ней получатся резкие черточки — „изображения“ щелей, каждое из которых будет соответствовать частицам определенного удельного заряда  $e/m$ . В случае ионов одинакового заряда положение черточек определится лишь отношением их масс  $m$ . Промеряя относительное положение таких черточек, можно найти отношения масс  $m$ .



Рис. 277. Масс-спектрограмма.

Вид получаемой фотографии (рис. 277) напоминает вид линейчатого спектра, получаемого с помощью оптического спектрографа. Поэтому Астон назвал свой прибор *масс-спектрографом*.

С помощью масс-спектрографа можно с весьма большой точностью определять отношение масс различных изотопов.

Некоторые данные измерений масс изотопов приведены в табл. XIX.

Результаты опытов над изотопами, имеющие большое значение для теории строения атомов, разбираются в т. III.

Из других методов определения удельного заряда ионов укажем еще метод, основанный на фокусировке частиц определенной скорости в поперечном магнитном поле. На рис. 278 представлена схема прибора (на схеме для простоты не указана металлическая коробка, внутри которой располагается часть прибора и из которой откачивается воздух). Накаливаемая нить  $D$  служит анодом. На нее наносится тонкий слой соли, содержащей исследуемый элемент; при этих условиях проволока является источником положительных ионов. Ионы ускоряются электрическим полем с разностью потенциалов  $V_1 - V_2$ , приложенной между проволокой  $D$  и щелью  $S_1$ . Ионы, пролетевшие через щель, попадают в пространство, где на них действует



Т а б л и ц а. XIX

## Массы изотопов

Атом	Химический атомный вес	Массы изотопов, отнесенные к $O^{16}$
H . . .	1,00756	$\left\{ \begin{array}{l} 1,00812 \\ 2,01471 \end{array} \right.$
He . . .	4,00128	4,00391
Li . . .	6,940	$\left\{ \begin{array}{l} 6,0167 \\ 7,0180 \end{array} \right.$
O . . .	16,0000 (по определению)	$\left\{ \begin{array}{l} 16,0000 \\ 17,0046 \\ 18,0057 \end{array} \right.$
Cl . . .	35,457	$\left\{ \begin{array}{l} 34,9800 \\ 36,9775 \end{array} \right.$

перпендикулярное к плоскости чертежа однородное магнитное поле напряженности  $H$ . Под влиянием этого поля они движутся по окружности радиуса  $r$ , определяемого формулой (2) § 218:

$$r = \frac{cv}{H} \cdot \frac{m}{e}, \quad (6)$$

где  $m$  — масса ионов,  $e$  — их заряд,  $v$  — скорость.

Через щель  $S_1$  пролетают ионы, скорости которых, из-за конечных размеров проволоки  $D$ , имеют несколько различные направления. Сплошной линией изображена траектория ионов, летящих в пространстве между  $D$  и  $S_1$  перпендикулярно к плоскости щели  $S_1$ . Эти ионы пересекут вторично плоскость, содержащую щель  $S_1$ , в точке  $A$ , отстоящей от  $S_1$  на расстоянии  $2r$ .

Рис. 278. Схема отклонения частиц в поперечном магнитном поле.

Ионы, летящие между  $D$  и  $S_1$  под углом  $\alpha$  к рассмотренной траектории, пересекут плоскость, содержащую щель  $S_1$ , в точке  $B$ . В предположении малости угла  $\alpha$  (см. рис. 278) имеем:

$$AB = AS_1 - BS_1 = 2r - S_1C \cos \alpha$$

или, так как  $S_1C = 2r$ , то:

$$AB = 2r(1 - \cos \alpha) = 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Так как угол  $\alpha$  мал, то приближенно получим:

$$AB = r\alpha^2.$$

При малом угле  $\alpha$  величина  $r\alpha^2$  весьма мала по сравнению с  $r$ ; следовательно, все траектории ионов пересекут плоскость  $S_1A$  в пределах малого отрезка  $AB$ . В этом месте ставится щель  $S_2$ , а за ней цилиндр Фарадея  $F$ .

Этот цилиндр соединяется с электрометром и таким образом регистрирует попадающие в него ионы. Скорость ионов  $v$  определяется через разность потенциалов  $V_1 - V_2$  с помощью соотношения:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2). \quad (7)$$

Исключая из (6) и (7) скорость  $v$ , получим:

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{2} \left( \frac{rH}{c} \right)^2 \cdot \frac{1}{V_1 - V_2}.$$

Таким образом, при данном расстоянии  $2r$  между щелями  $S_1$  и  $S_2$  и данной напряженности магнитного поля  $H$  в цилиндр Фарадея попадают ионы с отношением  $m/e$ , обратно пропорциональным ускоряющей разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Меняя  $V_1 - V_2$ , можно регистрировать различные ионы. На рис. 279 представлена кривая, полученная при нанесении на анод  $D$  соли магния. По оси абсцисс отложены величины, обратные ускоряющей разности потенциалов  $V_1 - V_2$ , а по оси ординат — отклонения электрометра  $n$ . Кривая обнаруживает четыре пика. Самый правый из них соответствует молекулярным ионам азота ( $N_2^+$ ) с молекулярным весом 28. Три остальных пика соответствуют однозарядным ионам изотопов магния с атомными весами 24, 25 и 26.

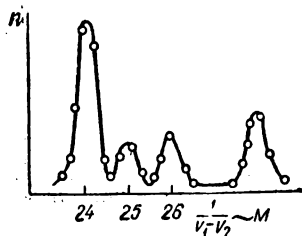


Рис. 279. Кривая для изотопов магния.

В последнее время методы определения масс изотопов были еще более усовершенствованы. Например, используется масс-спектрограф с двойной фокусировкой электрическим и магнитным полями. Разрешающая сила этого прибора настолько высока, что можно раздельно наблюдать следы ионов тяжелого изотопа водорода с атомным весом 2,01471 и молекулярного иона легкого изотопа водорода с молекулярным весом 2,01624.

**§ 220. Техническое применение электронного пучка.** В настоящее время электронный пучок используется для различных техниче-

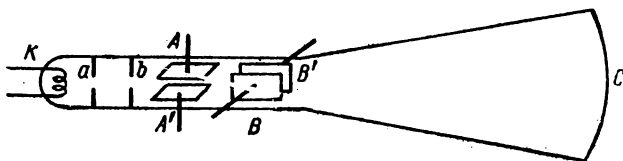


Рис. 280. Катодный осциллограф.

ских целей. Прежде всего опишем устройство *катодного осциллографа* — прибора, служащего для изучения быстропеременных во времени электрических процессов. Устройство катодного осциллографа схематически изображено на рис. 280. Внутри стеклянного сосуда, из которого откачан воздух, имеется накаливаемый катод  $K$ , служащий источником электронов. Электроны ускоряются постоянным полем. С помощью диафрагм  $a$  и  $b$  из них вырезается узкий пучок. Этот пучок пролетает через весь сосуд и на противоположной стенке  $C$ ,

покрытой флуоресцирующим веществом, образует светящееся пятнышко. По дороге электронный пучок пролетает между двумя парами пластин  $AA'$  и  $BB'$ , расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях. К пластинам  $AA'$  прикладывается та разность потенциалов  $V_1 - V_2$ , зависимость которой от времени желательно изучить. Обычно дело идет о разности потенциалов, меняющейся со временем периодически.

Между пластинами  $AA'$  возникает поле, напряженность которого  $E$  меняется со временем с тем же периодом, что и разность потенциалов  $V_1 - V_2$ . Под влиянием этого поля электронный пучок будет отклоняться, причем в результате весьма малой массы электронов практически его отклонения в точности следуют за полем. Светящееся пятнышко, образуемое электронным пучком на экране  $C$ , в результате отклонений пучка также начнет колебаться. При достаточно большой частоте, что в большинстве случаев имеет место, эти колебания не могут наблюдаться непосредственно глазом, — светящееся пятнышко растянется в сплошную полосу. Для того чтобы иметь возможность наблюдать колебания, между второй парой пластин  $BB'$  образуют поле  $E_0$ , меняющееся со временем известным образом. Например, между парой пластин  $BB'$  можно создать поле, меняющееся со временем по закону гармонических колебаний с известной циклической частотой  $\omega_0$ ; тогда:

$$E_0 = A_0 \cos \omega_0 t.$$

Если изучаемая разность потенциалов  $V_1 - V_2$  тоже меняется со временем гармонически:

$$V_1 - V_2 = A \cos (\omega t + \delta),$$

то электронный пучок будет участвовать в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движениях (см. т. I), и светящееся пятнышко на экране  $C$  будет описывать одну из фигур Лиссажу. Определив вид этой фигуры и зная частоту и амплитуду, характеризующие изменение со временем  $E_0$ , можно определить и характер изменения со временем изучаемой разности потенциалов  $V_1 - V_2$ . Если частоты  $\omega$  и  $\omega_0$  совпадают, то на флуоресцирующем экране образуется эллипс, который в частных случаях может перейти в круг или прямую. Фигуры, наблюдаемые на экране  $C$ , могут быть сфотографированы, и тогда получают так называемые *осциллограммы*.

В последнее время стала употребляться иная, более удобная „временная развертка“ колебаний электронного пучка, возникающих под влиянием переменного поля, возбужденного между пластинами  $AA'$ . Для этого между пластинами  $BB'$  создается поле, напряженностью  $E_0$  которого в течение некоторого промежутка времени возрастает со временем линейно:

$$E_0 = At.$$

Это достигается с помощью присоединения параллельно к пластинам  $BB'$  конденсатора, который в течение этого времени непрерывно заряжается. Тогда светящееся пятнышко на экране  $C$  непосредственно вычерчивает кривую, которую мы получили бы, откладывая по оси ординат значения  $V_1 - V_2$ , являющиеся некоторой функцией от времени  $f(t)$ , а по оси абсцисс — время  $t$  (рис. 281). Так как непрерывное возрастание поля  $E_0$  вывело бы пучок за пределы экрана  $C$ , то через некоторое время  $t = \tau$  значение  $E_0$  заставляют быстро спасть до нуля, после чего оно вновь возрастает линейно со временем. Такой внезапный спад напряженности  $E_0$  до нуля может быть, например, достигнут тем, что к зажимам конденсатора присоединяется разрядная трубка; пока разность потенциалов на пластинах конденсатора меньше потенциала зажигания, сопротивление трубки настолько велико, что наличие трубки не сказывается на процессе заряжения конденсатора. Как только разность потенциалов достигнет потенциала зажигания, трубка вспыхнет, и конденсатор разрядится через нее. Процессу разряжения конденсатора соответствует быстрое возвращение светящегося пятнышка в исходную точку (пунктирная прямая на рис. 281). После этого светящееся пятнышко снова начинает вычерчивать кривую. При чисто периодическом характере изменения изучаемой разности потенциалов  $V_1 - V_2$  со временем

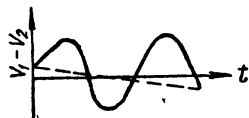


Рис. 281. Осциллограмма.

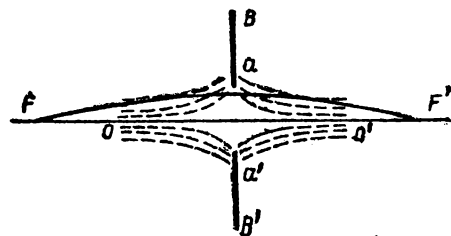


Рис. 282. Электростатическая электронная линза.

можно добиться, что новая кривая сольется с первоначальной.

Современные осциллографы позволяют изучать колебания с частотами до  $10^7 \text{ сек}^{-1}$  и дают отклонения светящегося пятнышка до 1 мм на 1 в.

Осциллографы находят широкое применение при изучении переменных токов (см. § 232).

Другое применение электронного пучка связано с его

отклонением в неоднородном электрическом или в магнитном поле. При этом оказывается возможным фокусировать электронный пучок. Этим устанавливается аналогия между отклонением электронных пучков и преломлением световых пучков в линзах. В связи с этим явления распространения электронных пучков в неоднородных полях получили название *электронной оптики*.

Простейшим примером „электронной линзы“ может служить неоднородное электрическое поле, возникающее вблизи круглого отверстия  $aa'$  в пластине  $BB'$  (рис. 282), равномерно отрицательно заряженной. Линии напряженности вблизи такого отверстия изображены

пунктиром. Электроны, летящие вдоль оси отверстия  $OO'$ , в силу симметрии поля не испытывают никакого отклонения. Всякий же электрон, летящий в направлении, пересекающем ось  $OO'$  в некоторой точке  $F$ , отклонится, и тем сильнее, чем ближе к краю отверстия  $aa'$  он будет пролетать.

Таким образом, за пластиной траектория электрона вновь пересекает ось  $OO'$  в некоторой точке  $F'$ .

Если через точку  $F$  проходит пучок траекторий, заключенных в пределах небольшого телесного угла, то все они вновь пересекутся в одной и той же точке  $F'$ , которая явится, таким образом, „изображением“ точки  $F$ . При более широких пучках не все траектории пересекутся в точке  $F'$ , т. е. будет наблюдаться явление, соответствующее сферической аберрации в оптике.

Методы электронной оптики основаны на формальном сходстве законов, которым подчиняется распространение электронных пучков в неоднородном электростатическом поле и распространение световых лучей в прозрачных веществах с переменным коэффициентом преломления. Поясним эту аналогию на простом примере. Пусть электроны движутся прямолинейно с постоянной скоростью  $v_1$  в области пространства  $A$  (рис. 283), где потенциал имеет постоянное значение  $V_1$ . Затем они попадают в область пространства  $C$ , где потенциал также постоянен, но имеет другое значение  $V_2$ . Здесь электроны снова движутся прямолинейно. В пограничной области  $B$  потенциал меняется от значения  $V_1$  до  $V_2$ , в результате чего в этой области имеется отличная от нуля напряженность поля  $E$  и, следовательно, на каждый электрон здесь действует сила, перпендикулярная к границам раздела областей. Под влиянием этой силы изменится нормальная составляющая скорости электрона

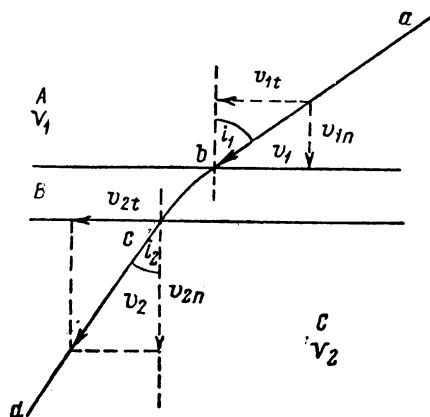


Рис. 283. Преломление электронного пучка.

$v_n$ , тангенциальная же составляющая скорости  $v_t$  останется неизменной. Обозначив через  $i_1$  и  $i_2$  углы, которые составляют траектории электронов  $ab$  и  $cd$  в обеих областях с нормальными к границам раздела, получим:

$$\sin i_1 = \frac{v_{1t}}{v_1}, \quad \sin i_2 = \frac{v_{2t}}{v_2}.$$

Так как  $v_{1t} = v_{2t}$ , то следует:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Это соотношение сходно с оптическим законом преломления:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — коэффициенты преломления двух прозрачных веществ.

Метод электростатической фокусировки находит широкое применение в современной технике. На рис. 284 указана фокусирующая система современного осциллографа, состоящая из ряда цилиндров и диафрагм с круглыми

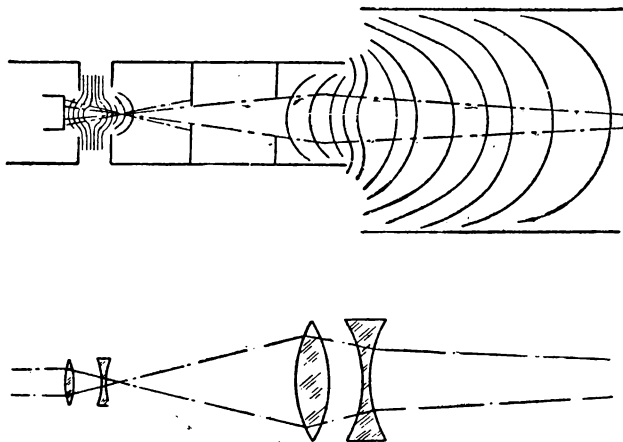


Рис. 284. Фокусирующая система осциллографа.

отверстиями. В нижней части рисунка представлена аналогичная ей система оптических линз.

На рис. 285 дана схема прибора, носящего название *электронно-оптического преобразователя*, получившего в последнее время широкое распространение. Здесь  $g$  — объект, действительное изображение которого отбрасывается с помощью оптической линзы  $L$  на прозрачную пластинку  $B$ . На поверхности пластинки  $B$  нанесен очень тонкий слой металла, служащего катодом  $K$ . Под влиянием световых лучей, испускаемых объектом  $g$ , из этого катода вырываются электроны (см. фотоэффект, т. III); поток этих электронов фокусируется с помощью электростатических линз  $A_1$  и  $A_2$  на флуоресцирующий экран  $E$ . Таким образом, на экране  $E$  вновь получается видимое изображение объекта  $g$ . Цель такого преобразования заключается в следующем: объект  $g$  может испускать ультрафиолетовые или инфракрасные лучи, невидимые глазом; электронно-оптический же преобразователь позволяет получить изображение объекта в видимых лучах, испускаемых флуоресцирующим экраном  $E$ . Кроме того, электронно-оптический преобразователь может играть роль „усилителя“: интенсивность излучения, даваемого объектом, может быть очень мала, излучение же флуоресцирующего экрана может оказаться значительно более ярким за счет большой энергии электронов, приобретаемой ими в ускоряющем электростатическом поле.

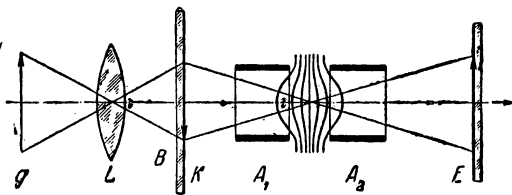


Рис. 285. Электронно-оптический преобразователь.

Фокусирующее действие магнитного поля было указано при описании метода определения удельного заряда электрона (§ 218). Электрон, попадающий в однородное магнитное поле с начальной скоростью,

составляющей острый угол  $\alpha$  с направлением поля, движется по винтовой линии. При малых углах  $\alpha$  шаг этой винтовой линии практически не зависит от значения  $\alpha$ . Благодаря этому пучок электронов, траектории которых лежат в пределах конуса небольшого угла раствора, собирается в точечный фокус магнитным полем, направленным по оси конуса. Таким образом, магнитное поле действует аналогично простой собирающей линзе в оптике. Фокусирующим действием обладает также и неоднородное магнитное поле, возникающее вблизи катушек с наконечниками специальной формы.

Возможность фокусировать электронные пучки позволяет построить *электронные микроскопы*. Пучок электронов, испускаемых катодом, пронизывает исследуемый объект, различные части которого более или менее задерживают электроны. С помощью системы электронных линз получается увеличенное „тенивое“ изображение этого объекта. Изображение обнаруживается либо с помощью флуоресцирующего экрана, либо с помощью фотопластинки, которая обладает способностью чернеть под влиянием удара быстрых электронов. На рис. 286 сопоставлены схемы электронного микроскопа с магнитными линзами и оптического микроскопа с фотокамерой. Аналогичные части обоих микроскопов отмечены одинаковыми буквами: для

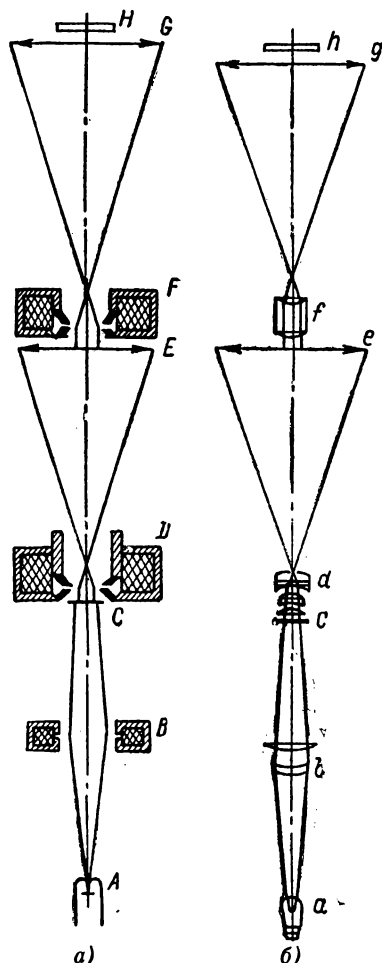


Рис. 286. Схемы электронного (а) и оптического (б) микроскопов.

электронного микроскопа прописными буквами  $A, B, C, \dots$  и для оптического — строчными  $a, b, c, \dots$ . В электронном микроскопе  $A$  есть источник электронов;  $B$  — магнитная конденсирующая линза, направляющая пучок электронов на объект  $C$ ;  $D$  — магнитный объектив;  $E$  — про-

межуточное изображение;  $F$  — проектирующая линза и  $G$  — окончательное изображение, попадающее на фотопластинку  $H$ . Все части электронного микроскопа заключены в герметически закрываемую трубу, из которой насосом откачивается воздух до столь низкого давления, при котором длина свободного пути электронов становится больше расстояния от источника до фотопластинки. В оптическом микроскопе:

$a$  — источник света,  $b$  — конденсор,  $c$  — объект,  $d$  — объектив,  $e$  — промежуточное изображение,  $f$  — проектирующая линза,  $g$  — окончательное изображение,  $h$  — фотопластинка. Современные электронные микроскопы позволяют достигать огромных увеличений в 40 000 раз и больше; эти увеличения значительно превышают увеличения, даваемые лучшими оптическими микроскопами (около 2000 раз). Таким образом, электронные микроскопы позволяют изучать объекты, недоступные изучению с помощью обычных оптических микроскопов. О при-

чинах, позволяющих получать с помощью электронных микроскопов увеличения большие, чем с помощью оптических, будет сказано в т. III.

На рис. 287 приведена фотография частиц распыленного  $ZnO$ , полученная с помощью электронного микроскопа. Частицы представляют собой чрезвычайно мелкие игольчатые кристаллы. Слева на фотографии указан масштаб, соответствующий длине в 1  $\mu k$ . Оригинальная конструкция электронного микроскопа разработана в Советском Союзе акад. А. А. Лебедевым и В. Н. Верцнером.

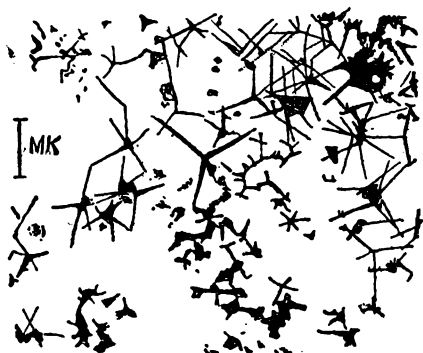


Рис. 287. Фотография частиц  $ZnO$ , полученная с помощью электронного микроскопа.



## ГЛАВА XX

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

**§ 221. Явление электромагнитной индукции.** Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 г. Это явление заключается в следующем: *во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через площадь, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток называется индукционным.*

Явление электромагнитной индукции можно наблюдать на следующих опытах.

1. Возьмем соленоид *A* рис. (288), замкнутый через гальванометр *G*, и будем приближать к одному из его концов постоянный магнит. При этом в соленоиде возникает электрический ток, который обнаружится по отклонению стрелки гальванометра *G*. Этот ток прекратится при прекращении движения магнита.

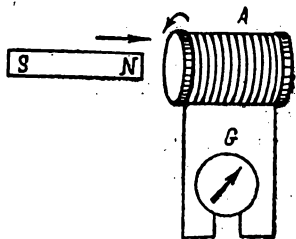


Рис. 288. Возбуждение в соленоиде индукционного тока при передвижении магнита.

Если мы начнем удалять магнит, то в соленоиде возникает снова ток, но в направлении, противоположном первоначальному. То же явление будет иметь место, если магнит оставить неподвижным, а перемещать соленоид. Наконец, вместо магнита можно взять второй соленоид, по которому течет постоянный ток; при его перемещении в первом соленоиде возникает ток.

2. Возьмем два неподвижных соленоида *A* и *C* (рис. 289). Соленоид *A* пусть снова замкнут через гальванометр *G* и соленоид *C* включен в цепь, содержащую гальванический элемент *B* и ключ *k*. При включении с помощью ключа *k* тока в соленоиде *C* — в соленоиде *A* возникает кратковременный ток, обнаруживаемый отбросом стрелки гальванометра *G*. При дальнейшем протекании по соленоиду *C* постоянного тока в соленоиде *A* никакого тока не наблюдается. В момент выключения тока в соленоиде *C* — в соленоиде *A* вновь возникает кратковременный ток, но в направлении, противоположном первоначальному.

Описанные опыты можно осуществить, взяв вместо соленоидов контуры из одного витка провода, но явление будет слабее.

Обсудим результаты этих опытов. В первом из них характерно то обстоятельство, что в соленоиде  $A$  идет ток, только пока магнит приближается или удаляется от соленоида, т. е. пока меняется магнитное поле вблизи соленоида или пока сам соленоид перемещается в неоднородном магнитном поле магнита. Как только прекращается движение магнита по отношению к соленоиду (или соленоида относительно магнита), магнитное поле вблизи соленоида делается постоянным, и ток в соленоиде прекращается. Во втором опыте явление вполне аналогично, — здесь изменяющееся магнитное поле создается возникающим или пропадающим в соленоиде  $C$  током. В обоих случаях вблизи проводящего контура меняется величина магнитного поля, а следовательно, *меняется и поток магнитной индукции* через площадь, охватываемую контуром. Что дело заключается именно в изменении *потока* магнитной индукции, вытекает из следующего: индукционный ток возникает и в том случае, если *поворачивать замкнутый проводящий контур в однородном магнитном поле*. В этом случае величина индукции магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, меняется только ее поток через площадь контура. Если замкнутый контур *двигать поступательно в однородном магнитном поле*, то поток индукции через него остается постоянным, и индукционный ток не возникает. Таким образом, оправдывается формулировка, приведенная в начале настоящего параграфа: индукционный ток возникает в замкнутом проводящем контуре при изменении потока индукции через площадь контура.

Следует, однако, заметить что из описанных опытов не видно, определяется ли возникновение индукционного тока изменением потока магнитной индукции  $B$  или напряженности  $H$ . При отсутствии магнетиков это обстоятельство не играет роли, так как магнитная индукция  $B$  и напряженность магнитного поля  $H$  равны друг другу, но при наличии магнетика должно сказываться различие между  $B$  и  $H$ . Практически трудно заполнить все пространство, в котором расположены проводящие контуры, магнетиком с достаточно большой магнитной проницаемостью  $\mu$ , так как такого рода магнетики (железо, никель и т. д.) представляют собой твердые тела. Однако можно осуществить опыт таким образом, что, хотя магнетик и будет заполнять лишь часть пространства, все магнитное поле окажется сосредоточенным только внутри магнетика. Для этого возьмем тороид  $A$ , охваченный проволоочным контуром  $C$  так, как охватывают друг друга

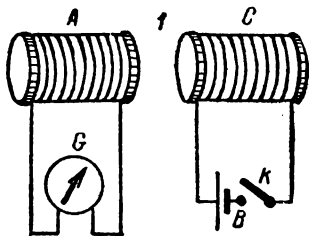


Рис. 289. Возбуждение в соленоиде индукционного тока при включении или выключении тока в соседнем соленоиде.

два соседних звена цепи (рис. 290). Пусть по тороиду  $A$  идет ток; создаваемое им магнитное поле сосредоточено только внутри тороида, и, следовательно, весь поток этого поля пронизывает контур  $C$ . Если мы выключим ток в тороиде  $A$ , то произойдет изменение потока (он исчезнет), и в контуре возникает индукционный ток. Заполним теперь внутреннюю часть тороида  $A$  железом. Магнитное поле тороида будет по-прежнему сосредоточено только внутри тороида. При этом напряженность поля  $H$  останется прежней, так как напряженность магнитного поля тока не зависит от наличия магнетика (если последний целиком заполняет пространство, где поле отлично от нуля),

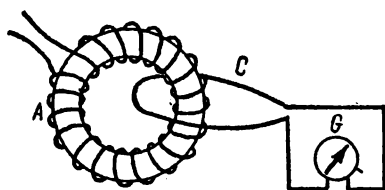


Рис. 290. Возбуждение индукционного тока в петле, охватывающей тороид.

но магнитная индукция  $B = \mu H$  возрастает в  $\mu$  раз. Выключая снова ток в тороиде  $A$  (первоначальную силу тока считаем прежней), мы обнаружим значительное возрастание индукционного тока в контуре  $C$ . Это доказывает, что возникновение индукционного тока обусловлено изменением потока индукции.

Выясним теперь направление индукционного тока. Профессор Петербургского университета Э. Х. Ленц в 1833 г., обобщая результаты опытов, дал следующее правило: *возникающий в замкнутом контуре ток имеет такое направление, что он создает через площадь, ограниченную контуром, собственный поток магнитной индукции, компенсирующий то изменение потока магнитной индукции, которое его вызывает.*

Разберем с точки зрения правила Ленца описанные опыты. В первом опыте при приближении к соленоиду северного полюса магнита в соленоиде возникает ток, направленный против часовой стрелки, если смотреть на соленоид со стороны подносимого магнита (рис. 288). В этом случае поток индукции, создаваемый магнитом, направлен внутрь соленоида и при приближении магнита возрастает. Магнитное поле индукционного тока в соленоиде будет направлено из соленоида наружу и, следовательно, будет компенсировать возрастание поля магнита. При удалении северного полюса магнита в соленоиде возникает ток, направленный по часовой стрелке, если снова смотреть на соленоид со стороны магнита. Поток индукции, создаваемый магнитом, по-прежнему направлен внутрь соленоида, но он теперь убывает. Магнитное поле индукционного тока в соленоиде на этот раз направлено внутрь соленоида и, следовательно, компенсирует убывание поля магнита. Таким образом, оба случая находятся в соответствии с правилом Ленца.

Анализируя результаты этих двух случаев, можно прийти еще к иному выводу: при приближении северного полюса магнита к соле-

ноиду направление индукционного тока таково, что ближайший к магниту конец соленоида становится источником магнитных линий и, следовательно, магнит и соленоид отталкиваются, т. е. между ними возникает сила, *противодействующая* тому движению магнита, которое ведет к возникновению индукционного тока. При удалении магнита магнит и соленоид притягиваются, т. е. снова между ними возникает сила, противодействующая движению магнита.

Убедимся теперь, что и в случае второго из рассмотренных в начале этого параграфа опытов оправдывается правило Ленца. При включении тока в соленоиде  $C$  — в соленоиде  $A$  возникает ток *обратного направления*. При *размыкании* тока в соленоиде  $C$  — в соленоиде  $A$  возникает ток *того же направления*. Эти результаты как раз соответствуют правилу Ленца: пусть в соленоиде  $C$  при замыкании возникает ток, идущий против часовой стрелки, если смотреть на его конец  $I$  (рис. 289). Тогда поток магнитной индукции, создаваемый этим током, входит внутрь соленоида  $A$  и при включении тока возрастает. Поток магнитной индукции, создаваемый индукционным током в соленоиде  $A$ , выходит из него и, следовательно, компенсирует возрастание потока соленоида. Так же легко убедиться, что при размыкании тока в соленоиде  $C$  магнитное поле индукционного тока в соленоиде  $A$  компенсирует убывание потока соленоида  $C$ .

**§ 222. Определение электродвижущей силы индукции.** Возникновение индукционного тока в замкнутом контуре обусловлено появлением в этом контуре, под влиянием изменяющегося потока магнитной индукции, э. д. с. Величина этой э. д. с. была впервые связана со скоростью изменения потока магнитной индукции Фарадеем. Это соотношение, данное Фарадеем, вытекает из закона сохранения энергии.

Проведем энергетический подсчет на частном случае, воспользовавшись контуром с подвижной частью  $AC$  (рис. 291). Такой контур мы уже рассматривали при подсчете работы передвижения контура с током в магнитном поле (§ 210).

Пусть в контур включен гальванический элемент  $B$  с э. д. с.  $\mathcal{E}$ . Полная работа, совершаемая этой э. д. с. за время  $\Delta t$ , равна  $\mathcal{E}I\Delta t$ , где  $I$  — сила тока в контуре. Если контур находится вне магнитного поля, то вся эта работа идет на выделение ленц-джоулева тепла  $I^2R\Delta t$ . Сила тока при этом по закону Ома равна:

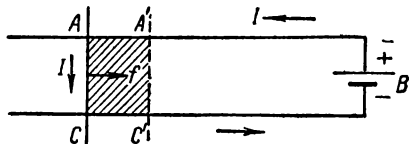


Рис. 291. К выводу выражения электродвижущей силы индукции.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что контур находится в магнитном поле, которое все время остается постоянным. Для простоты будем считать, что это поле однородно и направлено перпендикулярно к плоскости контура за чертеж. Тогда на подвижную часть  $AC$  действует сила  $f$ , направленная перпендикулярно к  $AC$  направо. Под влиянием этой силы подвижная часть контура  $AC$  придет в движение. Пусть за время  $\Delta t$  она передвинется в положение, отмеченное на чертеже пунктирной линией  $A'C'$ . По сказанному в § 210, при этом будет совершена механическая работа:

$$\Delta A = I \cdot \Delta \Phi,$$

где  $\Delta \Phi$  — поток магнитной индукции через заштрихованную часть контура  $ACA'C'$ , а  $I$  — та сила тока, которая будет иметь место в контуре во время рассматриваемого движения. Эта работа будет совершена за счет работы э.д.с. элемента  $B$ . Таким образом, теперь полная работа э.д.с. элемента  $\mathcal{E} I \Delta t$  идет не только на лентц-джоулево тепло, но и на работу перемещения участка контура  $AC$ :

$$\mathcal{E} I \Delta t = I^2 R \Delta t + I \Delta \Phi.$$

Вообще говоря, сила тока  $I$  может не оставаться постоянной за время  $\Delta t$ ; поэтому следует брать столь малый промежуток времени  $dt$ , чтобы за этот промежуток времени сила тока  $I$  не успевала заметно измениться. Тогда

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (2)$$

Здесь  $d\Phi$  — поток индукции через заштрихованную часть контура  $ACA'C'$ , который в этом случае имеет вид бесконечно узкой полоски. Решая равенство (2) относительно силы тока  $I$ , получим:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Сопоставляя это равенство с законом Ома для замкнутой цепи (1), мы видим, что теперь роль э.д.с. играет величина, состоящая из двух членов: из э.д.с.  $\mathcal{E}$  гальванического элемента и из величины  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Этот член представляет собой добавочную э.д.с. индукции, возникающую вследствие изменения потока индукции  $\Phi$  через площадь, ограниченную контуром. Обозначая ее через  $\mathcal{E}_i$ , имеем:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Соотношение (3) носит название *закона Фарадея*.

Закон Фарадея для э.д.с. индукции мы получили, рассматривая случай, когда поток индукции через контур менялся за счет изменения формы самого контура. Однако можно показать, что это соотно-

шение справедливо независимо от того, чем вызвано изменение потока индукции через контур: изменением его формы, его поворотом, перемещением в неоднородном поле или, наконец, изменением со временем магнитной индукции самого поля.

В равенстве (3) справа стоит производная от потока индукции  $\Phi$  через контур по времени. Это значит, что по численному значению *э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i$  пропорциональна скорости изменения потока индукции со временем.* Остается выяснить смысл знака (минус), стоящего в правой части равенства (3). Для этого выберем произвольное направление обхода контура за положительное. Направление тока будем считать положительным, если оно совпадает с положительным направлением обхода контура. Также э. д. с. будем считать положительной, если она создает в цепи падение потенциала в направлении положительного обхода. Проведем к плоскости контура нормаль, положительное направление которой свяжем с положительным направлением обхода контура правилом, указанным на стр. 348. Положительный поток индукции через площадь контура создадут линии индукции, идущие параллельно нормали или составляющие с ней острый угол.

Отрицательный поток индукции через площадь контура создадут линии индукции, направленные в сторону, обратную нормали, или составляющие с ней тупой угол. Тогда знак минус в правой части равенства (3) указывает на то, что *увеличение потока индукции ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) вызывает э. д. с., действующую в направлении отрицательного обхода контура; уменьшение потока индукции ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ) вызывает э. д. с., действующую в направлении положительного обхода контура.* Таким образом, выражение (3) дает одновременно и величину и направление э. д. с. индукции. Легко проверить, что это направление согласуется с правилом Ленца.

Остается рассмотреть вопрос об единицах, в которых измеряется э. д. с. индукции. Если поток индукции измеряется в максвеллах, т. е. в CGSM-единицах, и время  $t$  — в секундах, то формула (2), в которой отсутствует какой-либо коэффициент пропорциональности, определит CGSM-единицу э. д. с. Эта новая единица э. д. с. может быть обозначена как *мкс/сек* и численно равна э. д. с. индукции, возникающей в замкнутом контуре, при изменении потока магнитной индукции через площадь этого контура на 1 мкс за 1 сек:

Связь между CGSM-единицей э. д. с. *мкс/сек* и CGSE-единицей э. д. с. получим на основании следующих соображений. Величина  $I\mathcal{E}$  представляет собой мощность, и если измерять силу тока  $I$  и э. д. с.  $\mathcal{E}$  — обе в CGSE- или обе в CGSM-единицах, то в обоих случаях мощность получается в *эрг/сек*. Таким образом, должно выполняться соотношение:

$$I_{CGSE} \cdot \mathcal{E}_{CGSE} = I_{CGSM} \cdot \mathcal{E}_{CGSM}$$

где индексы *CGSE* и *CGSM* соответственно указывают, в каких единицах измерены *I* и  $\mathcal{E}$ . Отсюда:

$$\frac{\mathcal{E}_{CGSE}}{\mathcal{E}_{CGSM}} = \frac{I_{CGSM}}{I_{CGSE}}. \quad (4)$$

Но, по сказанному в § 195, *CGSM*-единица силы тока в *c* раз больше *CGSE*-единицы силы тока, где *c* есть скорость света, равная почти точно  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек. Следовательно, из соотношения (4) получаем:

$$CGSM\text{-ед. э. д. с.} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} CGSE\text{-ед. э. д. с.}$$

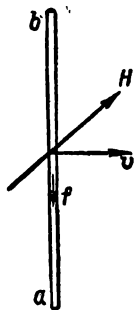


Рис. 292.  
Направление  
силы Лорен-  
ца, дейст-  
вующей на  
заряд при  
перемеще-  
нии провод-  
ника во  
внешнем  
магнитном  
поле *H*.

Разберем закон индукции с точки зрения электронных представлений. Пусть участок *ab* проводника помещен в магнитное поле, направленное за чертеж, напряженность которого равна *H* (рис. 292). Свободные электроны, находясь в беспорядочном тепловом движении, в магнитном поле испытывают действие силы Лоренца. Однако никакого тока эта сила в среднем не дает, так как направление сил, приложенных к разным электронам, распределено беспорядочно. Если теперь участок проводника *ab* начать перемещать, например, направо со скоростью *v*, то все электроны металла приобретут добавочную составляющую скорости, равную *v*. Следовательно, на электроны будет действовать добавочная сила Лоренца, одинаково направленная для всех электронов и равная:

$$f_{\text{Л}} = evH.$$

Если поле направлено за чертеж и участок *ab* перемещается направо, то сила, действующая на электрон (отрицательный заряд), будет направлена вниз. Электроны будут под действием этой силы перемещаться вниз, следовательно возникает ток, направленный вверх. Эквивалентная электрическая сила  $f = eE$ , которая бы давала такое же движение электронов, определится из соотношения

$$f = eE = evH.$$

Следовательно, эквивалентная напряженность электрического поля *E* равна:

$$E = vH$$

и направлена кверху.

Электродвижущая сила, возникающая в участке, измеряется разностью потенциалов, которую бы создала эквивалентная электрическая сила на концах участка. Так как напряженность выражается частным от деления разности потенциалов на концах участка на длину участка, то э. д. с. будет измеряться произведением напряженности эквивалентного электрического поля *E* на длину участка *l*, т. е.:

$$\mathcal{E}_i = lE = vHl. \quad (5)$$

Но произведение *vl* представляет собой площадь, перекрываемую участком в единицу времени при его движении, а следовательно, вся правая часть равенства (5) выражает поток напряженности *H*, пересекаемый участком проводника в единицу времени. Так как при отсутствии магнетиков поток напряженности совпадает с потоком индукции, то, следовательно,  $vHl = \frac{d\Phi}{dt}$ .

Отсюда для численного значения э. д. с. индукции получаем:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

что совпадает с формулой (3).

Направлена э. д. с. в сторону перемещения положительных зарядов, т. е. в случае рис. 292 кверху. Это направление удобно находить с помощью *правила правой руки*: если расположить правую руку с отставленным большим пальцем так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а большой палец указывал направление перемещения проводника, то остальные вытянутые пальцы укажут направление э. д. с. индукции. Для замкнутого контура это даст направление полной э. д. с. в соответствии с правилом Ленца.

Таким образом, возникновение индукционного тока *при перемещении проводника* во внешнем магнитном поле объясняется действием силы Лоренца на электроны проводника. Однако, как мы видели, индукционный ток возникает и в том случае, если проводящий контур остается неподвижным, а меняется лишь вблизи него величина магнитной индукции. На этот случай приведенное объяснение не распространяется. Для того чтобы и в этом случае объяснить возникновение индукционного тока, следует допустить, что *в каждой точке пространства при изменении величины магнитной индукции со временем возникает электрическая сила*. Это допущение лежит в основе теории Максвелла, которая разобрана ниже (§ 243, 244).

**§ 223. Количество электричества, перемещенного индукционным током.** Единицы магнитных величин в международной системе. При возникновении в контуре индукционного тока по проводнику происходит перемещение зарядов. Если  $\mathcal{E}_i$  — э. д. с. индукции, а  $R$  — полное сопротивление рассматриваемого контура, то сила возникшего в нем тока будет:

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}.$$

Электродвижущая сила индукции, по сказанному в § 222, по численному значению равна:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$I = \frac{d\Phi/dt}{R}. \quad (1)$$

Количество электричества  $dq$ , перемещенное за время  $dt$  через поперечное сечение проводника, равно  $I dt$ , откуда в силу соотношения (1):

$$dq = \frac{1}{R} d\Phi, \quad (2)$$

где  $d\Phi$  — изменение потока магнитной индукции через контур за время  $dt$ .

Пусть в начале некоторого конечного промежутка времени поток магнитной индукции через рассматриваемый контур равнялся  $\Phi_1$ , а в конце промежутка времени равнялся  $\Phi_2$ . Тогда полное количество



электричества  $q$ , протекающее через поперечное сечение проводника в результате возникновения индукционного тока, выразится соотношением, которое мы получим, заменив в формуле (2) бесконечно малое изменение потока индукции  $d\Phi$  его полным изменением  $\Phi_2 - \Phi_1$ :

$$q = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \quad (2a)$$

Формула (2a) позволяет по изменению потока магнитной индукции через площадь контура определить количество электричества, протекающее через поперечное сечение контура, или обратно, по этому количеству электричества  $q$  определить изменение магнитного потока  $\Phi_2 - \Phi_1$  через площадь контура.

Формула (2a) используется в международной системе единиц для установления единицы магнитного потока. За единицу магнитного потока  $\Phi$  принимается поток через замкнутый контур с сопротивлением в 1 ом, при убывании которого до нуля в контуре протекает под влиянием э. д. с. индукции количество электричества в 1 к. Эта единица потока называется *вебер*. Как легко подсчитать, 1 *вб* =  $10^8$  *мкс*. Единица магнитной индукции  $B$  в международной системе единиц устанавливается на основании соотношения:

$$B_n = \frac{\Phi}{S},$$

откуда за единицу магнитной индукции принимается *вб/м²*. Этой единице 11-я Генеральная Конференция по мерам и весам (1960 г.) присвоила название *тесла*. Между этой единицей магнитной индукции и гауссом имеет место соотношение:

$$1 \text{ тесла} = 10^4 \text{ гс}.$$

Легко видеть, что если в законе Фарадея (3) § 222 поток магнитной индукции  $\Phi$  измерять в веберах и время  $t$  — в секундах, то электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$  получится в вольтах. Таким образом, в международной системе единиц:

$$\mathcal{E}_i (\text{в}) = - \frac{d\Phi}{dt} \left( \frac{\text{вб}}{\text{сек}} \right). \quad (3)$$

Если измерить э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i$  в вольтах, а изменение потока индукции  $\frac{d\Phi}{dt}$  — в *мкс/сек*, то равенство (3) примет вид:

$$\mathcal{E}_i (\text{в}) = - 10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \left( \frac{\text{мкс}}{\text{сек}} \right). \quad (3a)$$

Рассмотрим численный пример: рамка, площадью  $S = 1000 \text{ см}^2$  и с омическим сопротивлением  $R = 0,5 \text{ ом}$  первоначально расположена параллельно линиям индукции магнитного поля Земли; затем рамка поворачивается так, что ее плоскость располагается перпендикулярно линиям магнитной

индукции. Какое количество электричества индуцируется в рамке, если магнитная индукция магнитного поля Земли  $B = 0,5$  гс?

**Решение.** Изменение потока индукции через площадь рамки равно в данном случае потоку через рамку во втором ее положении:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = BS.$$

Подставляя сюда  $B$  в гауссах, а  $S$  — в  $\text{см}^2$ , мы получим поток в CGSM-единицах. Для перевода его в международную систему единиц надо помножить это значение на  $10^{-8}$ :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^3 \text{ вб}.$$

Отсюда по формуле (2а) количество индуцированного электричества в кулонах будет:

$$q = \frac{10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,5} \text{ к} = 10^{-5} \text{ к}.$$

Количество электричества  $q$ , возникшее в результате *кратковременного* изменения потока магнитной индукции, может быть измерено с помощью прибора, носящего название *баллистического гальванометра*. В принципе устройство баллистического гальванометра совпадает с устройством обычных гальванометров. Его подвижная система состоит из рамки, помещенной между полюсами постоянного магнита. К рамке прикреплена стрелка; рамка удерживается в определенном положении пружинкой. При протекании по рамке индукционного тока  $I$  на нее действует момент сил:

$$M = HSIn,$$

где  $H$  — напряженность поля магнита,  $n$  — число витков провода рамки,  $S$  — ее площадь. Так как величины  $S$ ,  $n$  и  $H$  постоянны для данного прибора, то:

$$M = cI,$$

где  $c$  — постоянная величина, носящая название *динамической постоянной гальванометра*.

Под влиянием импульса момента сил  $M dt$  рамка начнет поворачиваться, и ее момент количества движения изменится на величину  $J d\omega$ , где  $J$  — момент инерции всей подвижной системы, а  $d\omega$  — изменение угловой скорости рамки. Так как изменение момента количества движения численно равно импульсу момента сил (см. т. I), то:

$$J d\omega = M dt = cI dt. \quad (4)$$

Если время  $t$ , в течение которого протекает ток  $I$ , мало по сравнению с периодом собственных колебаний подвесной системы гальванометра, то воздействие момента сил на подвесную систему носит характер толчка, в результате которого система приобретает угловую скорость  $\omega_0$ . Поэтому, интегрируя выражение (4) в пределах от нуля до  $t$ , получим:

$$\int_0^{\omega_0} J d\omega = \int_0^t cI dt \quad \text{или} \quad J\omega_0 = cq.$$

где  $q$  — количество электричества, протекшее за время  $t$ . Отсюда имеем:

$$\omega_0 = \frac{c}{J} q.$$

Под влиянием приобретенной угловой скорости  $\omega_0$  подвижная система начнет поворачиваться, причем конечный угол  $\varphi_0$ , на который она повернется („угол отброса“), может считаться пропорциональным начальной скорости:

$$\varphi_0 = k\omega_0 = \frac{kc}{J} q.$$

Таким образом, „угол отброса“ стрелки гальванометра  $\varphi_0$  оказывается пропорциональным количеству электричества, протекшему через гальванометр. Отсюда, обратно, по углу отброса  $\varphi_0$  можно определить  $q$ . Для того чтобы угол отброса был пропорционален  $q$ , параметры подвесной системы гальванометра должны быть подобраны так, чтобы период ее собственных колебаний оказался достаточно большим. Постоянную гальванометра  $kc/J$  обычно определяют эмпирически, градуируя его путем пропускания известных количеств электричества  $q$ , которые, например, можно получать, разряжая конденсаторы определенной емкости.

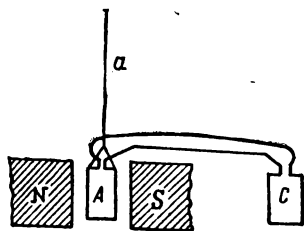


Рис. 293. Схема флюксметра.

Так как по равенству (2а) количество электричества  $q$ , протекшее в результате возникновения индукционного тока, пропорционально изменению потока магнитной индукции  $\Phi$ , то баллистический гальванометр может служить для измерения магнитных потоков. Баллистический гальванометр, специально приспособленный для измерения потока магнитной индукции, носит название *флюксметра*. Схема устройства употребительного типа флюксметра несколько отличается от схемы только что описанного баллистического гальванометра. На рис. 293  $N$  и  $S$  — полюсы постоянного магнита,  $A$  — расположенная между ними рамка. Эта рамка подвешена на столь длинной и мягкой нити  $a$ , что возникающий при поворотах рамки момент кручения исчезающе мал; рамка остается при любом положении между полюсами  $N$  и  $S$  в состоянии безразличного равновесия. Концы проводов рамки  $A$  присоединены к другой рамке  $C$ . Эта рамка  $C$  вносится в пространство, где желательно измерить значение потока магнитной индукции. Если рамка  $C$  первоначально была вне магнитного поля, то изменение потока магнитной индукции равно значению конечного потока  $\Phi_2 n_2$ , где  $\Phi_2$  — поток через площадь рамки, а  $n_2$  — число витков в ней. В результате изменения потока магнитной индукции через площадь рамки  $C$  в ней возникнет индукционный ток  $I_2$ , который пойдет и через рамку  $A$  и вызовет ее поворачивание в магнит-

ном поле магнита  $NS$ . Это поворачивание вызовет, в свою очередь, изменение потока магнитной индукции через рамку и, следовательно, появление индукционного тока  $I_1$ , направление которого по правилу Ленца будет таково, что магнитные силы начнут тормозить рамку  $A$ . В результате рамка  $A$  остановится. Момент сил  $M$ , действующих на рамку, равен:

$$M = HS_1 n_1 (I_1 + I_2),$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля между полюсами  $N$  и  $S$ ,  $n_1$  — число витков в рамке  $A$ ,  $S_1$  — ее площадь. Так как в начале и в конце рамка покоится, то полный импульс момента силы должен равняться нулю:

$$\int_0^t M dt = \int_0^t HS_1 n_1 (I_1 + I_2) dt = 0,$$

откуда

$$\int_0^t I_2 dt = - \int_0^t I_1 dt \quad \text{или} \quad |q_2| = |q_1|,$$

т. е. количества электричества, перенесенные индукционными токами  $I_2$  и  $I_1$ , численно равны друг другу. Но по формуле (2а):

$$q_2 = \frac{\Phi_2 n_2}{R}, \quad q_1 = \frac{\Delta \Phi_1 n_1}{R},$$

где  $\Delta \Phi_1$  — изменение потока магнитной индукции через рамку  $A$ , а  $R$  — полное сопротивление всей цепи. Отсюда:

$$|\Phi_2| n_2 = |\Delta \Phi_1| n_1.$$

При небольших углах поворота  $\alpha$  рамки  $A$  изменение потока  $\Delta \Phi_1$  пропорционально  $\alpha$ , откуда и  $|\Phi_2|$  пропорционально  $\alpha$ :

$$|\Phi_2| = k\alpha,$$

где величина  $k$  постоянна для данного прибора. Таким образом, по углу поворота рамки  $A$  можно измерять поток через рамку  $C$ . Очевидно, что отсюда можно определить и значение магнитной индукции  $B$  в том месте магнитного поля, куда вносится рамка  $C$ ; если рамку  $C$  расположить нормально к линиям индукции поля, то  $\Phi_2 = BS_2$ .

**§ 224. Определение электродвижущей силы индукции в частных случаях.** Пользуясь способом определения э.д.с. в контурах, рассмотрим ряд частных случаев.

1. Рассмотрим возникновение индукционного тока в рамке, вращающейся в однородном магнитном поле. Предположим, что в начальный момент рамка перпендикулярна к линиям индукции. Условимся характеризовать положение рамки направлением нормали  $N$  к плоскости рамки, которую направим параллельно линиям индукции в

начальном положении рамки (рис. 294а); при вращении рамки нормаль будет менять свое направление. В начальном положении рамки поток магнитной индукции через площадь  $S$ , ограниченную рамкой, равен:

$$\Phi_0 = BS.$$

Пусть рамка вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $OO'$ . Тогда в том положении рамки, при котором нормаль  $N$

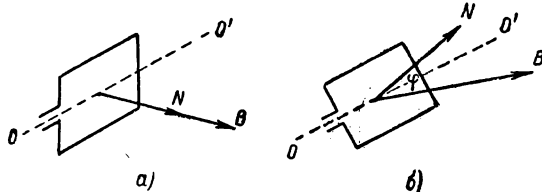


Рис. 294. Рамка, вращающаяся во внешнем магнитном поле.

образует угол  $\varphi = \omega t$  со своим первоначальным направлением (рис. 294б), поток индукции будет:

$$\Phi = BS \cos \omega t = \Phi_0 \cos \omega t.$$

Электродвижущая сила индукции определится по соотношению (3) § 222:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Мы видим, что наибольшая э.д.с. получается в тех положениях, при которых поток равен нулю  $\left[ \varphi = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ где } k — \text{целое число} \right]$ . В этих положениях быстрота изменения потока наибольшая. В тех положениях, в которых поток наибольший ( $\varphi = k\pi$ ), э.д.с. равна нулю. В этих положениях рамки скорость изменения потока равна нулю. Электродвижущая сила положительна, если  $\varphi$  заключено в пределах:

$$0 < \varphi < \pi.$$

Это означает, что в первую половину оборота в рамке идет ток, создающий магнитное поле, параллельное нормали  $N$ . Если  $\varphi$  заключено в пределах:

$$\pi < \varphi < 2\pi,$$

то э.д.с. индукции отрицательна, что означает, что индукционный ток создает магнитное поле, направленное против направления нормали  $N$ . Следовательно, за один оборот э.д.с. меняет знак два раза.

На рис. 295 даны графики изменения потока индукции (пунктирная линия) и э.д.с. (сплошная линия) в зависимости от угла поворота  $\varphi$ .

Получение э.д.с. при вращении витка в магнитном поле лежит в основе устройства динамомашины (см. § 235).

2. Рассмотрим случай возникновения э.д.с. во вращающемся диске со скользящими контактами. Пусть диск, расположенный нормально к линиям индукции магнитного поля, может вращаться вокруг оси  $O$ , проходящей через его центр (рис. 296). С помощью скользящих контактов  $a$  и  $b$  образована замкнутая цепь  $AbaA$ . Если диск привести во вращение, то в этой цепи возникает непрерывный ток. Направление индукционного тока определяется правилом Ленца: если

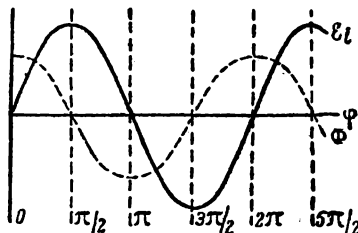


Рис. 295. Графики изменения потока индукции  $\Phi$  и электродвижущей силы индукции  $\mathcal{E}_i$  во вращающейся рамке.

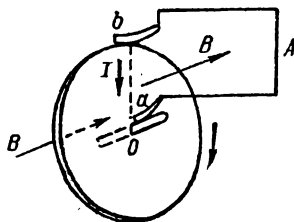


Рис. 296. Возникновение индукционного тока во вращающемся диске.

линии магнитной индукции направлены на читателя и диск вращается по часовой стрелке, то индукционный ток будет идти по диску от контакта  $b$  к  $a$ .

Этот опыт является непосредственным обращением опыта с вращением в магнитном поле диска, по которому идет ток (см. § 210). Как в том случае, так и здесь, поток индукции через контур тока  $AbaA$  остается постоянным. Из формального применения закона индукции следовало бы, что индукционный ток должен отсутствовать. На самом деле надо принять во внимание смещение в каждый данный момент того радиуса диска, который замыкает цепь между точками  $a$  и  $b$ . При повороте диска на бесконечно малый угол  $d\varphi$ , радиус поворачивается на угол  $d\varphi$  и зачерчивает площадь  $dS = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$ , где  $R$  — радиус диска. Поток индукции через эту площадь будет  $d\Phi = B dS$ , а скорость его изменения:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B \frac{1}{2} R^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Замечая, что  $d\varphi/dt$  есть угловая скорость диска  $\omega$ , получим:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \omega B.$$

Подставляя это значение  $d\Phi/dt$  в выражение (3) § 222, найдем для численного значения э.д.с. индукции:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{1}{2} \omega R^2 B. \quad (2)$$

Разобранная установка представляет собой схему простейшей динамомашины.

Рассмотрим еще несколько численных примеров.

**Пример 1.** Проволочный тороид (без сердечника) имеет число витков  $n = 25$  на  $1\text{ см}$ ; площадь поперечного сечения тороида  $S = 20\text{ см}^2$ . Тороид охватывает петля из одного витка провода (как на рис. 290). С помощью реостата достигается падение силы тока  $I$  в тороиде на  $20\text{ а}$  за  $1\text{ сек}$ . Чему равна э.д.с., возникающая в петле?

**Решение.** Магнитная индукция поля внутри тороида равна

$$B = 4\pi\mu In,$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды внутри тороида. Так как поле сосредоточено только внутри тороида, то поток индукции:

$$\Phi = 4\pi\mu InS,$$

а его изменение со временем:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4\pi\mu nS \frac{dI}{dt}.$$

Измеряя силу тока  $I$  в CGSM-единицах,  $S$  — в  $\text{см}^2$ ,  $n$  — в  $\text{см}^{-1}$ , получим изменение потока в  $\text{мкс/сек}$ . Значение э.д.с.  $\mathcal{E}_i$  в вольтах получим по формуле [(3а) § 222]:

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 4\pi\mu nS \frac{dI}{dt}.$$

Подставляя сюда  $\frac{dI}{dt} = 20\text{ а/сек} = 2\text{ CGSM/сек}$ ,  $S = 20\text{ см}^2$ ,  $n = 25\text{ см}^{-1}$ ,  $\mu = 1$ , получим:

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 12,56 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 20\text{ в} \cong 1,3 \cdot 10^{-4}\text{ в}.$$

**Пример 2.** Рамка с площадью сечения  $S = 100\text{ см}^2$ , с числом витков  $n = 50$ , вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1000\text{ гс}$ , делая  $50\text{ об/сек}$ . Ось вращения рамки перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальное значение э.д.с. в рамке.

**Решение.** По формуле (1) максимальная э.д.с. в рамке из одного оборота провода равна:

$$\mathcal{E}_{i\text{ max}} = \omega BS,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения рамки. Для рамки из  $n$  витков проволоки:

$$\mathcal{E}_{i\text{ max}} = \omega BS n.$$

Подставляя сюда  $B = 10^3\text{ гс}$ ,  $S = 100\text{ см}^2$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 50\text{ сек}^{-1} = 3,14 \cdot 100\text{ сек}^{-1}$ , получим:

$$\mathcal{E}_{i\text{ max}} = 10^{-8} \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 50\text{ в} \cong 15,7\text{ в}.$$

**Пример 3.** Медный диск, расположенный перпендикулярно к линиям индукции земного магнитного поля, вращается, делая  $50\text{ об/сек}$ . Радиус диска  $R = 50\text{ см}$ . Определить разность потенциалов между центром и краем диска. Магнитная индукция магнитного поля Земли  $B = 0,5\text{ гс}$ .

**Решение.** Между центром и краем диска возникает разность потенциалов, равная э.д.с.  $\mathcal{E}_i$ , определяемой формулой (2):

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{2} R^2 \omega B.$$

Подставляя сюда  $R = 50$  см,  $\omega = 2\pi \cdot 50$  сек<sup>-1</sup>  $= 3,14 \cdot 10^2$  сек<sup>-1</sup>,  $B = 0,5$  гс, получим:

$$V_1 - V_2 = 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 50^2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,5 \text{ в} \cong 2 \cdot 10^{-8} \text{ в.}$$

**§ 225. Явление самоиндукции.** Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, при которых меняется поток индукции через площадь, ограниченную проводником. При этом совершенно безразлично, чем создается изменение потока. Если в некотором замкнутом контуре течет непостоянный ток, то магнитное поле, создаваемое этим током, также непостоянно. Следовательно, меняется поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром самого этого тока. Изменение потока магнитной индукции поведет к возникновению в контуре э.д.с. Таким образом, изменение тока в контуре влечет возникновение э.д.с. индукции в этом же самом контуре. Это явление носит название *явления самоиндукции*.

Характерным примером явления самоиндукции служат так называемые экстратоки замыкания и размыкания. Представим себе, что мы замыкаем контур, в результате чего в нем возникает электрический ток. При этом магнитное поле тока возрастает, а следовательно, возрастает и поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром. Согласно правилу Ленца, возникающий индукционный ток будет создавать поток индукции, компенсирующий увеличение первоначального магнитного потока. Следовательно, индуцируется ток, создающий магнитное поле, направленное противоположно магнитному полю первоначального тока. Отсюда заключаем, что индукционный ток направлен противоположно замыкаемому току. Этот индуцируемый ток обратного направления называется *экстратокком замыкания*. Экстраток замыкания уменьшает ток, идущий в контуре.

Аналогичное явление мы наблюдаем при размыкании цепи. Если в контуре сила тока спадает, то при этом уменьшается поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром. В контуре индуцируется ток, создающий по правилу Ленца поток индукции, увеличивающий уменьшающийся поток, т. е. индуцируется ток в том же направлении, в котором шел основной ток. Этот индуцируемый ток называется *экстратокком размыкания*. Экстраток размыкания направлен в ту же сторону, что и основной ток.

Наличие экстратока замыкания приводит к тому, что нарастание тока в цепи при его включении происходит медленнее, чем при отсутствии экстратока. Если, например, включить электрическую лампочку в контур, характеризующийся значительным явлением самоиндукции, то лампочка разгорается медленнее, чем в случае, когда контур, в который она включена, заметного явления самоиндукции не дает.

Экстраток размыкания можно наблюдать с помощью схемы, представленной на рис. 297. Ток от батареи  $B$  идет по цепи, разветвляющейся в точке  $A$  на две части, одна из которых,  $ACD$ , характеризуется



свойством давать значительные токи самоиндукции. В другую ветвь,  $AGD$ , включен гальванометр  $G$ . Пусть ток идет в участках  $ACD$  и  $AGD$  слева направо, как это указано сплошными стрелками. Если разомкнуть ключ  $k$ , то в участке  $ACD$  возникнет экстраток размыкания, направленный так же, как и первоначальный ток. Он целиком замкнется через участок цепи  $DGA$ , так как другая часть цепи разомкнута. Очевидно, этот ток в участке  $DGA$  пойдет справа налево (пунктирная стрелка), что обнаружится по отклонению стрелки гальванометра в сторону, противоположную первоначальной.

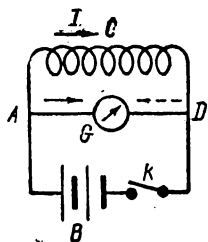


Рис. 297. Обнаружение экстратoka размыкания.

В рассмотренном опыте экстраток размыкания в основном возникает в участке  $ACD$ , представляющем собой проводник, согнутый в виде нескольких витков; экстраток, возникающий в прямолинейном участке  $AGD$ , не играет заметной роли. Это указывает на то, что проводники различной формы обладают различной способностью

обнаруживать явление самоиндукции. Свойство контура обладать более или менее выраженным явлением самоиндукции характеризуется физической величиной, называемой *коэффициентом самоиндукции*. Выясним смысл этой величины.

Возьмем произвольный замкнутый контур, по которому течет ток силы  $I$ . Согласно закону Био — Савара — Лапласа, напряженность магнитного поля, а следовательно, и вектор индукции, создаваемые этим током, пропорциональны в каждой точке силе тока. Отсюда следует, что поток индукции  $\Phi$ , пронизывающий площадь, ограниченную контуром тока, пропорционален силе тока  $I$ :

$$\Phi = LI. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется *коэффициентом самоиндукции контура*. Полагая в равенстве (1) силу тока  $I$  равной единице, мы видим, что *коэффициент самоиндукции численно равен потоку магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром, если по этому контуру идет ток, сила которого равна единице*.

Электродвижущую силу самоиндукции  $\mathcal{E}_{si}$  мы получим, воспользовавшись общим законом индукции, выражаемым формулой (§ 222, откуда:

$$\mathcal{E}_{si} = - \frac{d\Phi}{dt};$$

здесь  $\Phi$  — поток магнитной индукции через рассматриваемый контур, создаваемый током, текущим по этому самому контуру. Подставляя сюда вместо потока  $\Phi$  его выражение через коэффициент самоин-

дукции  $L$  и силу тока в контуре  $I$  по (1), получим, что в случае постоянной самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Это соотношение позволяет дать еще одно (динамическое) определение коэффициента самоиндукции: *коэффициент самоиндукции контура численно равен э.д.с., возникающей в контуре, если сила тока в нем в единицу времени меняется на единицу.*

Коэффициент самоиндукции определяется только геометрической формой контура и средой, в которой расположен контур.

Соотношения (1) или (2) позволяют установить единицу измерения коэффициента самоиндукции. Обычно употребляются две различные единицы коэффициента самоиндукции: абсолютная электромагнитная CGSM и единица международной системы. CGSM-единицей коэффициента самоиндукции принято, согласно соотношению (1), считать коэффициент самоиндукции такого контура, поток индукции через который равен одному максвеллу при силе тока в нем в одну электромагнитную единицу. Единица коэффициента самоиндукции в международной системе называется *генри*, она равна коэффициенту самоиндукции такого контура, через который получается поток индукции в  $10^8$  мкс при силе тока в нем в 1 а.

Легко определить, во сколько раз 1 гн больше CGSM-единицы самоиндукции. Для этого воспользуемся соотношением (1), в силу которого:

$$1 \text{ гн} \times 1 \text{ а} = 10^8 \text{ мкс}. \quad (3)$$

1 CGSM-ед. самоиндукции  $\times$  1 CGSM-ед. силы тока = 1 мкс.

Замечая, что 1 CGSM-ед. силы тока = 10 а, перепишем последнее выражение:

$$1 \text{ CGSM-ед. самоиндукции} \times 10 \text{ а} = 1 \text{ мкс}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получим:

$$1 \text{ гн} = 10^9 \text{ CGSM}.$$

Пользуясь соотношением (2), можем дать еще такое определение генри: *коэффициент самоиндукции равен 1 генри, если в нем возникает э.д.с. самоиндукции в 1 вольт при изменении силы тока на 1 ампер за 1 секунду.*

Пользуясь определением коэффициента самоиндукции, выведем его выражение для соленоида.

Возьмем соленоид, общее число витков которого равно  $N$ , сечение витка  $S$ , длина соленоида  $l$ ; пусть полость соленоида заполнена средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Вычислим коэффициент самоиндукции такого соленоида, считая, что соленоид настолько длинный,

что к нему с достаточной степенью точности можно применить формулу (4) § 194, по которой напряженность поля  $H$  внутри соленоида равна:

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I, \quad (5)$$

где  $I$  — сила тока, текущего по соленоиду.

Обозначая индукцию в соленоиде через  $B$ , имеем, что поток индукции через поперечное сечение соленоида равен:

$$\Phi' = BS = \mu HS.$$

Поток через все  $N$  витков соленоида будет:

$$\Phi = N \cdot \Phi' = \mu HSN.$$

Подставляя сюда вместо  $H$  его значения по (5), получим:

$$\Phi = 4\pi \mu \frac{N^2}{l} SI.$$

Введем сюда выражение для числа витков на единицу длины соленоида  $n = \frac{N}{l}$  и объем соленоида  $V = lS$ . Тогда:

$$\Phi = 4\pi \mu n^2 VI.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением (1), найдем, что коэффициент самоиндукции соленоида равен:

$$L = \frac{\Phi}{I} = 4\pi \mu n^2 V. \quad (6)$$

Таким образом, коэффициент самоиндукции соленоида пропорционален квадрату числа витков на единицу длины и пропорционален объему соленоида. Коэффициент самоиндукции, по его определению, не зависит от силы тока в обмотке; однако, если сердечник соленоида сделан из ферромагнитного вещества, то магнитная проницаемость  $\mu$  зависит от напряженности магнитного поля и, следовательно, от силы тока; при этом зависимость эта может быть очень значительной (см. § 203). Это обстоятельство следует иметь в виду при расчетах коэффициентов самоиндукции соленоидов с сердечниками.

Подсчитаем, какое численное значение имеет коэффициент самоиндукции соленоида при следующих численных данных: длина соленоида  $l = 50$  см, поперечное сечение  $S = 10$  см<sup>2</sup>,  $\mu = 1$ , полное число витков  $N = 3000$ .

По формуле (6) имеем:

$$L = 4\pi \left( \frac{3000}{50} \right)^2 \cdot 10 \cdot 50 \cong 2,3 \cdot 10^7 \text{ CGSM},$$

или, переводя в генри:

$$L \cong 0,023 \text{ гн}.$$

Это число будет, однако, преувеличенным по сравнению с действительным значением коэффициента самоиндукции соленоида такой длины и с таким числом витков, во-первых, за счет того, что здесь не была учтена конечность соленоида, затем не учтено то обстоятельство, что витки соленоида обычно будут образовывать слои, намотанные друг над другом, в силу чего поток индукции не будет целиком проходить через сечение каждого витка.

Из сказанного видно, что экстратоки замыкания сказываются тем сильнее, чем больше коэффициент самоиндукции рассматриваемой цепи. Последний же велик для проводов, намотанных в виде соленоидов, особенно если середина последних заполнена ферромагнитным веществом.

Для наблюдения экстратока размыкания мы использовали разветвленную цепь, изображенную на рис. 297. Однако существование экстратока размыкания проявляется и в неразветвленной цепи. В такой цепи в момент включения рубильника первоначальный ток резко спадает, что ведет к возникновению очень большой э.д.с. размыкания. Она может оказаться настолько большой, что произойдет пробой воздуха между полюсами выключателя, и между ними вспыхнет дуга.

Появление сильных искр или вспыхивание дуги между полюсами выключателя, обусловленное экстратоком размыкания, может вести к порче выключателя и потому представляет собой опасность, с которой приходится бороться в электротехнике.

**§ 226. Экстратоки размыкания и замыкания.** Разберем более подробно характер экстратоков размыкания и замыкания.

Для того чтобы выяснить характер экстратока размыкания, предположим, что в некотором контуре первоначально существовала э.д.с.  $\mathcal{E}_0$ , которая поддерживала в нем силу тока  $I_0$ . Затем в момент времени, для которого мы примем  $t=0$ , эта э.д.с. выключается, но контур остается замкнутым, причем полное сопротивление его равно  $R$ . Тогда в контуре ток прекратится не сразу, но будет продолжать еще идти некоторое время за счет э.д.с. самоиндукции.

По формуле (2) § 225, эта э.д.с. самоиндукции равна:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt},$$

где  $L$  — коэффициент самоиндукции рассматриваемого контура. Сила тока самоиндукции  $I$  определится законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{si}}{R} = -\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt, \quad (1)$$

что представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее зависимость силы тока самоиндукции  $I$  от времени  $t$ . Интегрируя правую и левую части уравнения (1), получим:

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln C, \quad (2)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Значение этой произвольной постоянной получим из условия, что  $I=I_0$  при  $t=0$ , откуда по (2):

$$\ln I_0 = \ln C.$$

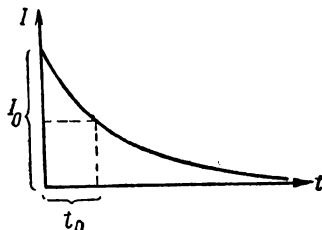
Таким образом, выражение (2) принимает вид:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t, \quad (3)$$

или

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (3a)$$

Это соотношение показывает, что *сила тока при выключении э.д.с. падает по показательному закону*, при этом падает тем медленнее, чем больше коэффициент самоиндукции  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ . Зависимость силы экстратoka размыкания от времени графически представлена на рис. 298.



Время  $t_0$ , в течение которого сила экстратoka размыкания падает до половины своей первоначальной величины, определится из соотношения (3a), если в нем положить  $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$ , откуда:

$$t_0 = \ln 2 \cdot \frac{L}{R}. \quad (4)$$

Рис. 298. Зависимость силы экстратoka размыкания от времени.

Так как  $\ln 2 \cong 0,7$ , то приближенно:

$$t_0 \cong 0,7 \frac{L}{R}. \quad (4a)$$

Так, например, время, в течение которого сила тока спадет при размыкании до половины первоначального значения в контуре с самоиндукцией  $L = 0,1$  гн и  $R = 0,7$  ом, будет по формуле (4a):

$$t_0 \cong 0,7 \cdot \frac{0,1}{0,7} \text{ сек} = 0,1 \text{ сек}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению экстратoka замыкания. Будем считать, что в контур заданного сопротивления  $R$  включается сторонняя э.д.с.  $\mathcal{E}_0$ . Тогда, благодаря явлению самоиндукции, полная э.д.с. в контуре будет:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{si} = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

откуда сила тока в контуре  $I$  окажется равной:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Замечая, что величина  $\mathcal{E}_0/R$  численно равна силе тока  $I_0$ , который протекал бы по контуру при отсутствии явления самоиндукции, перепишем последнее выражение в виде:

$$I_0 - I = \frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Так как  $I_0$  постоянно, то  $dI$  можно заменить через  $-d(I_0 - I)$ , тогда получим

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя обе части этого выражения, получим:

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}t + \ln C_1. \quad (5)$$

Произвольную постоянную  $\ln C_1$  определим из условия, что  $I=0$  при  $t=0$ , откуда  $\ln C_1 = \ln I_0$ , и выражение (5) принимает вид:

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t, \text{ откуда } I_0 - I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

или окончательно:

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (6)$$

Это выражение показывает, что при включении э.д.с. ток в цепи не сразу достигает значения  $I_0$ , но достигает его постепенно и тем медленнее, чем больше коэффициент самоиндукции контура  $L$  и чем меньше сопротивление контура  $R$ . Графически зависимость силы тока от времени при включении э.д.с. изображена на рис. 298. Теоретически ток должен достигнуть своего конечного значения  $I_0$  лишь через бесконечно большой промежуток времени. Практически для обычных значений коэффициента самоиндукции  $L$  ток достигает своего предельного значения весьма быстро.

Разберем численный пример: пусть коэффициент самоиндукции контура  $L = 0,1 \text{ гн}$  и его сопротивление  $R = 1 \text{ ом}$ ; определим, какую долю от конечного значения  $I_0$  примет ток через 0,01 сек и через 1 сек после момента включения в контур э.д.с.

По формуле (6) имеем:

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_0 (1 - e^{-10t}),$$

откуда для  $t = 0,01 \text{ сек}$ :

$$I = I_0 (1 - e^{-0,1}) \cong 0,1 I_0;$$

для  $t = 1 \text{ сек}$ :

$$I = I_0 (1 - e^{-10}) \cong 0,99995 I_0.$$

Таким образом, через 0,01 сек сила тока в данном случае будет составлять лишь 0,1 от конечной, а через 1 сек она будет отличаться от конечной лишь на 0,005 %, т. е. практически вполне совпадать с ней.

Существование экстратоков размыкания позволило обнаружить явление *сверхпроводимости* (см. § 154). При сверхпроводимости  $R=0$  и по формуле (3а) ток после выключения э.д.с. будет продолжаться в контуре сколько угодно долго не ослабевая. Опыты Каммерлинг-Оннеса, приведшие к открытию сверхпроводимости, производились следующим образом: соленоид, концы которого были соединены друг с другом, помещался между полюсами электромагнита, после чего соленоид охлаждался жидким гелием до температуры, при которой материал его провода становился сверхпроводящим. Затем магнитное поле электромагнита выключалось. При этом в соленоиде возникал индукционный ток. При обычных условиях он прекратился бы через весьма

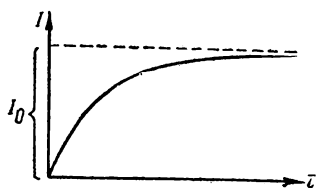


Рис. 299. Зависимость силы тока от времени при замыкании цепи с самоиндукцией.

малый промежуток времени, при наличии же сверхпроводимости он продолжал идти по соленоиду в течение многих часов, не обнаруживая заметного ослабления.

**§ 227. Взаимная индукция.** Переходим к рассмотрению явления *взаимной индукции*. Явление это было нами в основных чертах уже разобрано при рассмотрении опытов по электромагнитной индукции. Оно состоит в том, что при изменении силы электрического тока в каком-нибудь контуре меняющееся магнитное поле этого тока индуцирует э. д. с. в соседних контурах. Возьмем два контура 1 и 2 (рис. 300). Предположим, что сила тока в первом контуре равна  $I_1$ . Поток магнитной индукции  $\Phi$ , создаваемый этим током, пропорционален  $I_1$ . Обозначим через  $\Phi_{21}$  ту часть потока  $\Phi$ , которая пронизывает контур 2, тогда мы можем положить:

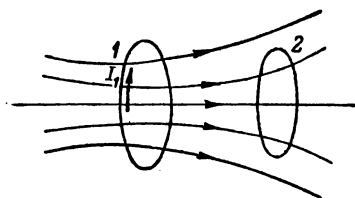


Рис. 300. Поток индукции, пронизывающий два контура.

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1. \quad (1)$$

На рис. 300 поток  $\Phi_{21}$  изображается теми линиями магнитной индукции, которые пронизывают оба контура (1 и 2).

При изменении силы тока  $I_1$  в первом контуре будет меняться поток  $\Phi_{21}$ , и во втором контуре возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_2$ , величина которой определяется соотношением (3) § 222:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Если размеры и положения контуров остаются неизменными, то коэффициент  $L_{21}$  в формуле (1) постоянен и

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

откуда

$$\mathcal{E}_2 = - L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2)$$

Коэффициент  $L_{21}$  называется *коэффициентом взаимной индукции контура 2 и контура 1*.

Очевидно, все сказанное можно повторить для того случая, когда меняется ток в контуре 2, а индуцируется ток в контуре 1. Тогда, обозначая силу тока во втором контуре через  $I_2$ , а возникающую э. д. с. в первом контуре через  $\mathcal{E}_1$ , получим:

$$\mathcal{E}_1 = - L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (2a)$$

Коэффициент  $L_{12}$  называется *коэффициентом взаимной индукции контура 1 и контура 2*.

Как будет показано ниже, всегда

$$L_{21} = L_{12}. \quad (3)$$

Таким образом, можно просто говорить о коэффициенте взаимной индукции двух контуров.

Пользуясь соотношением (1), мы можем формулировать: *коэффициент взаимной индукции двух контуров  $L_{12}$  численно равен потоку магнитной индукции, создаваемому единичным током в одном из контуров и пронизывающему второй контур*. Из соотношения (2) получим второе (динамическое) определение: *коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  двух контуров численно равен э. д. с. индукции, возникающей в одном из контуров при изменении силы тока в другом контуре на единицу силы тока за единицу времени*.

*Величина коэффициента взаимной индукции определяется только геометрической формой и размерами контуров и их относительным расположением*. Лишь при наличии ферромагнитных тел коэффициент взаимной индукции зависит от сил токов (благодаря зависимости  $\mu$  от напряженности магнитного поля  $H$ ).

Единицы коэффициента взаимной индукции носят те же названия, что и коэффициента самоиндукции. Абсолютной электромагнитной единицей коэффициента взаимной индукции служит взаимная индукция двух контуров, обладающих тем свойством, что если в одном из контуров идет ток в одну электромагнитную единицу силы тока, то он создает поток, пронизывающий второй контур, равный одному максвеллу. Практической единицей коэффициента взаимной индукции служит *генри*, равный  $10^9$  абсолютных электромагнитных единиц коэффициента взаимной индукции. Из динамического определения коэффициента взаимной индукции следует, что *генри* равен коэффициенту взаимной индукции таких контуров, в одном из которых возникает э. д. с. в 1 в, если в другом ток меняется на 1 а в 1 сек.

**§ 228. Энергия магнитного поля токов.** При протекании по проводам постоянного тока вся мощность, развиваемая источником э. д. с., идет на выделение ленц-джоулева тепла. Не так обстоит дело при непостоянных, возрастающих или убывающих токах. При возрастании тока в контуре возникает, как мы видели, э. д. с. самоиндукции, направленная против э. д. с., возбуждающей ток. В результате сила тока будет меньше, причем только часть работы, совершаемой внешней э. д. с., пойдет на выделение ленц-джоулева тепла. Наоборот, при падении силы тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции того же направления, что внешняя, ток оказывается сильнее, в цепи выделяется больше ленц-джоулева тепла, чем должно было бы выделиться при данной внешней э. д. с. Очевидно, что лишняя работа, затрачиваемая при возрастании тока, могла пойти лишь на создание какого-то вида энергии, которая затем, при убывании силы тока, выделилась обратно в цепи. Так как с усилением тока усиливается и создаваемое им магнитное поле, то, очевидно, что эта возникающая энергия является *энергией магнитного поля*.



Для подсчета магнитной энергии рассмотрим контур с самоиндукцией  $L$ , в котором сила тока возрастает от нуля до некоторого конечного значения  $I$ . При возрастании тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ . Работа против этой э. д. с. и идет на образование энергии магнитного поля. Если в данный момент сила тока в цепи равна  $I$ , то мощность, развиваемая э. д. с. самоиндукции, равна  $I\mathcal{E}_s$ , а следовательно, работа, совершаемая за малый промежуток времени  $dt$ , равна:

$$dA = I\mathcal{E}_s dt.$$

По сказанному в § 225, э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  численно равна  $d\Phi/dt$ , где  $\Phi$  — поток индукции, пронизывающий рассматриваемый контур. Отсюда элементарная работа  $dA$  за время  $dt$  численно равна:

$$dA = I \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt = I d\Phi.$$

При постоянном коэффициенте самоиндукции  $d\Phi = LdI$ , и выражение для элементарной работы  $dA$  можно переписать в виде:

$$dA = IL dI. \quad (1)$$

Чтобы подсчитать запас магнитной энергии  $W_m$ , равной работе, совершаемой при возрастании тока от значения нуль до некоторого определенного значения  $I$ , надо просуммировать все элементарные работы, т. е. проинтегрировать выражение (1) в пределах от 0 до  $I$ ; тогда получим:

$$W_m = \int_0^I IL dI,$$

или, выполняя интегрирование:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (2)$$

Здесь магнитная энергия выражена через параметры, характеризующие контур с током, — силу тока  $I$  и коэффициент самоиндукции  $L$ . Ниже мы увидим, что ту же энергию  $W_m$  можно выразить через параметры, характеризующие само поле, а именно — через напряженность магнитного поля  $H$ , магнитную индукцию  $B$  и объем пространства, занимаемого полем. Это позволяет локализовать магнитную энергию в той части пространства, где имеется магнитное поле, совершенно аналогично тому, как энергию электростатических зарядов мы могли локализовать в пространстве, в котором имеется электростатическое поле.

Обобщим наше рассмотрение, взяв два контура, в которых текут токи  $I_1$  и  $I_2$ . Энергия такой системы зависит не только от коэффициентов самоиндукции, но и от коэффициента взаимной индукции.

Чтобы показать это, подсчитаем работу образования токов. Пусть вначале оба контура разомкнуты. Затем первый контур замыкается, и э.д.с., включенная в этот контур, совершает работу, идущую на выделение ленц-джоулева тепла и на преодоление э.д.с. самоиндукции. Эта последняя часть работы, определяющая энергию магнитного поля тока, как было показано, равна:

$$A_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2,$$

где  $L_1$  — коэффициент самоиндукции первого контура. После создания тока в первом контуре замкнем второй контур, при этом включенная э.д.с. совершит во втором контуре работу, идущую на выделение ленц-джоулева тепла и на преодоление э.д.с. самоиндукции второго контура; работа, затраченная на преодоление э.д.с. самоиндукции, по предыдущему, равна:

$$A_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2,$$

где  $L_2$  — коэффициент самоиндукции второго контура. Этим работа, однако, не исчерпывается, так как при создании тока во втором контуре в первом контуре возникнет э.д.с. взаимной индукции, численно равная

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \quad (3)$$

где  $\Phi_{12}$  — поток магнитной индукции, вызванный током  $I_2$  во втором контуре и пронизывающий первый контур.

Для поддержания тока  $I_1$  постоянным э.д.с., включенная в первый контур, должна совершать добавочную работу преодоления э.д.с. взаимной индукции. Эта работа  $A_{12}$  может быть подсчитана следующим образом. Элементарная работа  $dA_{12}$  в течение малого промежутка времени  $dt$  равна:

$$dA_{12} = |\mathcal{E}_i| I_1 dt$$

или, подставляя вместо  $|\mathcal{E}_i|$  ее значение по (3):

$$dA_{12} = I_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} dt = I_1 d\Phi_{12},$$

Так как сила тока  $I_1$  поддерживается постоянной, то полная работа преодоления э.д.с. взаимной индукции равна:

$$A_{12} = I_1 \int_0^{\Phi_{12}} d\Phi_{12} = I_1 \Phi_{12},$$

где  $\Phi_{12}$  — конечное значение потока индукции.

Замечая, что  $\Phi_{12} = L_{12}I_2$ , где  $L_{12}$  — коэффициент взаимной индукции первого и второго контуров, получим:

$$A_{12} = L_{12}I_1I_2.$$

Энергия магнитного поля системы двух токов получится, если мы сложим работы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_{12}$ ; таким образом, получаем:

$$W_m = A_1 + A_2 + A_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2. \quad (4)$$

Очевидно, что ту же самую систему токов мы могли бы образовать в другой последовательности: сперва создать ток во втором контуре, затем ток в первом контуре. Повторяя рассуждения, приведенные выше, мы в этом случае получили бы для энергии системы выражение:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{21} I_1 I_2. \quad (4a)$$

Так как энергия системы токов не должна зависеть от последовательности их образования, то выражения (4) и (4a) должны быть тождественны, откуда получаем:

$$L_{21} = L_{12},$$

соотношение, которое нами было уже приведено на стр. 422.

Формула (2) дает энергию магнитного поля тока в виде функции от силы тока  $I$  и коэффициента самоиндукции  $L$ . Но мы уже указали, что этой формуле можно придать такой вид, что она представит энергию как функцию величин, характеризующих магнитное поле в окружающем пространстве. Проведем это преобразование на частном случае однородного магнитного поля внутри длинного соленоида.

Магнитная энергия тока, текущего по соленоиду, по формуле (2) равна:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2.$$

Коэффициент самоиндукции соленоида по формуле (6) § 225 равен:

$$L = 4\pi\mu n^2 V,$$

где  $V$  — объем соленоида,  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины, и  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, заполняющей внутреннюю часть соленоида.

Кроме того, сила тока  $I$  и напряженность магнитного поля внутри соленоида связаны соотношением:

$$I = \frac{H}{4\pi n}.$$

Подставляя эти значения  $L$  и  $I$  в (2), найдем:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 V \quad (5)$$

или, замечая, что  $\mu H$  равно магнитной индукции  $B$ , перепишем выражение (5):

$$W_m = \frac{1}{8\pi} HB V. \quad (6)$$

Так как магнитное поле можно считать сосредоточенным только внутри соленоида, т. е. в объеме  $V$ , то *плотность магнитной энергии*:

$$\varpi_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{8\pi} HB. \quad (7)$$

Таким образом, плотность магнитной энергии определяется произведением напряженности поля  $H$  и магнитной индукции  $B$ . Если в формуле (7) обе величины измерены в CGSM-системе, т. е. соответственно в эрстедах и гауссах, то  $\varpi_m$  получится в эрг/см<sup>3</sup>.

В случае неоднородного магнитного поля пространство можно разбить на столь малые участки, чтобы в их пределах векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  могли считаться постоянными. Тогда формула (7) дает плотность магнитной энергии в пределах такого участка. Энергия, приходящаяся на участок объемом  $dV$ , будет:

$$dW_m = \varpi_m dV = \frac{1}{8\pi} HB dV. \quad (7a)$$

Энергия же, заключенная в конечном объеме  $V$ , представится выражением

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V HB dV, \quad (8)$$

где интегрирование распространено на весь объем  $V$ .

### § 229. Работа перемagnetизации.

Намагничивание магнетика не является однозначной функцией напряженности намагничивающего поля. В § 203 нами было рассмотрено явление гистерезиса, которое показывает, что намагничивание при данном значении  $H$  зависит от того, каким путем это значение  $H$  было достигнуто.

Рассмотрим состояние магнетика, характеризующееся точкой  $a$  на рис. 301, на котором дана петля гистерезиса. Предположим, что, исходя из состояния  $a$ , мы перемagnetизуем магнетик соответственно обходу петли гистерезиса по пути  $abkfela$  и вновь приходим в состояние  $a$ . Покажем, что такой процесс перемagnetизации связан с затратой работы. Для этого воспользуемся выведенным в предыдущем параграфе соотношением, по которому элементарная работа  $dA$ , идущая на образование энергии магнитного поля контура, при увеличении потока индукции через контур на величину  $d\Phi$  (за счет увеличения

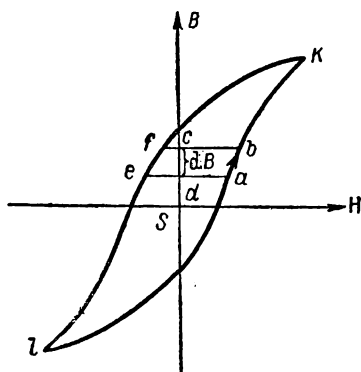


Рис. 301. К подсчету работы перемagnetизации.

силы тока), равна:

$$dA = Id\Phi, \quad (1)$$

где  $I$  — сила тока в контуре.<sup>1</sup>

Предположим, что рассматриваемый магнетик служит сердечником длинного соленоида. Пусть соленоид имеет всего  $N$  витков и пусть площадь поперечного сечения витков (и сердечника) равна  $S$ . Тогда полный поток индукции через  $N$  витков соленоида равен:

$$\Phi = NBS,$$

где  $B$  — индукция магнитного поля в сердечнике соленоида.

Сила тока в обмотке соленоида связана с напряженностью вызываемого им магнитного поля  $H$  соотношением (см. § 194):

$$I = \frac{H}{4\pi N/l},$$

где  $l$  — длина соленоида. Следовательно, по (1), элементарная работа, связанная с изменением потока индукции, равна:

$$dA = \frac{H}{4\pi N/l} d(NBS) = \frac{Sl}{4\pi} HdB.$$

Так как  $Sl$  представляет собой объем магнетика, то работа  $dA'$ , приходящаяся на единицу объема сердечника, равна:

$$dA' = \frac{1}{4\pi} HdB,$$

т. е. пропорциональна приращению  $dB$  вектора индукции.

Обращаясь к рис. 300, видим, что произведение  $H \cdot dB$  для некоторого участка  $ab$  кривой гистерезиса выражается площадью полосы  $abcd$ , так как этому участку соответствует приращение вектора индукции  $dB = dc$ . То же самое значение  $dB = cd$  соответствует и участку  $fe$  кривой гистерезиса, однако на этом участке  $dB$  отрицательно, так как на нем индукция уменьшается (переход от точки  $f$  к точке  $e$ ). Вектор  $H$  на участке  $fe$  тоже отрицателен; следовательно, произведение  $H \cdot dB$  положительно и выражается площадью полосы  $cdef$ . Таким образом, рассматриваемому значению  $dB$  при намагничении соответствует работа, пропорциональная площади полосы  $abcd$ , а при размагничении — работа, пропорциональная площади полосы  $cdfe$ . Учитывая обе работы вместе, можно сказать, что участкам кривой гистерезиса  $ab$  и  $ef$  соответствует работа, равная  $\frac{1}{4\pi} \times \times$  площадь  $(abfe)$ .

<sup>1</sup> Заметим, что пользоваться формулой (1) предыдущего параграфа в рассматриваемом случае ферромагнитных тел было бы неправильно, так как для них коэффициент самоиндукции  $L$  не есть постоянная величина и  $d\Phi \neq LdI$ .

Полный цикл перемагничивания может быть представлен как сумма таких участков; следовательно, полная работа перемагничивания единицы объема сердечника соленоида пропорциональна сумме площадей полосок, аналогичных полоске  $abfe$ , т. е. будет пропорциональна площади  $S_1$  петли кривой гистерезиса:

$$A' = \frac{1}{4\pi} S_1.$$

Работа, затрачиваемая на перемагничивание, должна или превратиться в дополнительную энергию магнитного поля соленоида, или перейти в тепло. Так как при возвращении в исходную точку  $a$  состояние магнитного поля не изменилось, то не могла измениться и его энергия. Отсюда заключаем, что перемагничивание при наличии гистерезиса должно вызывать нагревание сердечника, что и наблюдается на опыте. Для вычисления работы надо знать форму петли гистерезиса для данного магнитного материала.

Потери энергии при перемагничивании сердечников из ферромагнитных веществ приходится учитывать в различных технических задачах. Для определения работы при этом пользуются следующей эмпирической формулой, довольно хорошо оправдывающейся для многих магнитных материалов:

$$A' = \eta B_{\max}^{1.6},$$

где  $B_{\max}$  — максимальное значение магнитной индукции, достигаемой при данном цикле перемагничивания. Коэффициент  $\eta$  зависит от свойств данного материала; так, для трансформаторного железа

$$\eta = 0,0008 \text{ эрг/см}^3 \cdot (гс)^{1.6},$$

для жесткой стали

$$\eta = 0,08 \text{ эрг/см}^3 \cdot (гс)^{1.6}.$$

### § 230. Коэффициент самоиндукции кабеля.

В качестве примера применения выведенных в § 227 соотношений рассчитаем коэффициент самоиндукции участка бесконечно длинного цилиндрического кабеля. Под кабелем будем подразумевать два коаксиальных цилиндрических проводника, причем ток, текущий по внутреннему цилиндру, равен и противоположен току, текущему по внешнему цилиндру (рис. 302).

Обозначим радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно через  $R_1$  и  $R_2$ . Выделим участок кабеля длины  $l$ . Магнитная энергия тока, идущего по этому участку, может быть представлена двумя способами: во-первых, через коэффициент самоиндукции данного участка кабеля  $L$  по формуле (2) § 227:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (1)$$

и, во-вторых, через величины, характеризующие магнитное поле токов по формуле (8) § 227:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V \mu H^2 dV, \quad (2)$$

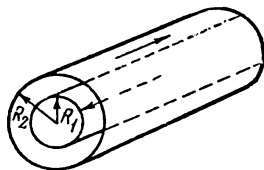


Рис. 302. Кабель из двух коаксиальных цилиндров.

где интеграл распространен на объем, в котором отлично от нуля магнитное поле, на протяжении длины  $l$  выделенного участка кабеля. Сравнение этих двух выражений позволит нам определить значение коэффициента самоиндукции. Вычислим сперва энергию  $W_m$  по формуле (2). Для этого вспомним (см. § 199), что напряженность магнитного поля, создаваемого током, текущим по полюсу цилиндрическому проводнику, внутри цилиндра равна нулю. Следовательно, внутри цилиндра радиуса  $R_1$  напряженность магнитного поля равна нулю, и эта область выпадает из интегрирования. Напряженность между цилиндрическими поверхностями определяется лишь током, текущим по внутреннему цилиндру, так как напряженность поля от внешнего цилиндра в этой области также равна нулю. Напряженность магнитного поля тока, текущего по цилиндрическому проводнику, по сказанному в § 199, вне цилиндра такая же, как напряженность, создаваемая линейным током такой же силы, текущим по оси цилиндра. Следовательно, в области между цилиндрами напряженность магнитного поля  $H$  равна:

$$H = \frac{2I}{r},$$

где  $r$  — расстояние от оси цилиндра. Во всех точках, лежащих вне обоих цилиндров, напряженность поля равна нулю, так как она равна сумме двух равных и противоположно направленных напряженностей, создаваемых двумя противоположными токами одинаковой силы, текущими по цилиндрическим проводникам с общей осью. Следовательно, интегрирование в формуле (2) нужно распространить лишь на участок цилиндрического слоя длиной  $l$ , заключенного между цилиндрами.

Для расчета разобьем весь объем на бесконечно тонкие слои объема  $dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l$ ; в пределах такого слоя напряженность магнитного поля  $H$  можно считать постоянной. Энергия, относящаяся к этому слою, будет равна:

$$w_m \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 dV = \mu I^2 l \frac{dr}{r}.$$

Полную энергию  $W_m$  мы получим, проинтегрировав это выражение по  $r$  в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$W_m = \mu I^2 l \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \mu I^2 l \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Сравнивая это выражение для энергии  $W_m$  с выражением (1), дающим ту же энергию через коэффициент самоиндукции  $L$ , получим, что коэффициент самоиндукции участка кабеля длиной  $l$  равен:

$$L = 2\mu l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Так как магнитная проницаемость  $\mu$  среды между цилиндрическими проводниками всегда близка к единице, то приближенно:

$$L = 2l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

**§ 231. Токи Фуко. Поверхностный эффект.** Индукционные токи возникают также в сплошных проводниках, которые нельзя рассматривать как линейные контуры. В этом случае они называются по имени их исследователя *токами Фуко*. Сплошной кусок металла, находящийся в переменном магнитном поле, представляет собой проводник

малого сопротивления, вследствие чего сила индукционных токов достигает в нем больших значений.

Так как э.д.с. индукции пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции, то величина токов Фуко тем больше, чем быстрее меняется то магнитное поле, в которое внесен данный проводник. Поэтому возникновение токов Фуко легче наблюдать, если внести проводник в полость соленоида, по обмотке которого пропускается быстро переменный ток, вызывающий также быстро меняющееся по величине магнитное поле. В этом случае токи Фуко в массивных хорошо проводящих телах достигают такой силы, что выделяющегося тепла оказывается достаточно, чтобы раскалить тело. Этот метод широко используется в вакуумной технике для прогрева внутри откачиваемого прибора металлических частей для их обезгаживания. Этот же способ употребляется для плавки металлов под вакуумом.

Однако во многих случаях нагревание, вызываемое токами Фуко, является вредным. К таким случаям относится нагревание сердечников трансформаторов (см. § 236) и вообще металлических сердечников всякого рода обмоток, по которым идет переменный ток. Чтобы избежать такого нагревания, сердечники делают слоистыми, отделяя слои друг от друга тонкой прослойкой изоляции, расположенной перпендикулярно к направлению токов Фуко.

Наблюдать возникновение токов Фуко можно еще с помощью следующей установки. Маятник, состоящий из куска металла, подвешенного на нити между полюсами электромагнита, выведенный из положения равновесия при отсутствии тока в электромагните, совершает слабо затухающие колебания. При включении тока колебания почти мгновенно затухают, и движение маятника до его остановки напоминает движение в вязкой среде. Это объясняется тем, что возникшие при движении маятника в магнитном поле токи Фуко имеют такое направление, что действующие на них со стороны магнитного поля силы тормозят движение маятника.

Токи Фуко могут возникать и в самом проводнике, по которому течет переменный ток. Появление таких токов ведет к особому *поверхностному эффекту* (называемому также *скин-эффектом* от английского слова *skin*, что значит кожа). Если переменный ток идет по цилиндрическому проводнику, то в моменты увеличения тока индукционные токи Фуко будут направлены как показано на рис 303. Эти токи направлены у поверхности проводника в направлении первичного электрического тока, а у оси проводника — навстречу току. В результате внутри проводника ток ослабнет, у поверхности увеличится. Таким образом, вследствие возникновения индукционных токов Фуко, ток будет распределен неравномерно по сечению проводника.

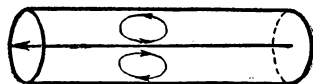


Рис. 303. Возникновение поверхностного эффекта.



При быстропеременных токах плотность тока вблизи оси проводника практически оказывается равной нулю, и весь ток идет по поверхности проводника. Вследствие этого и магнитное поле внутри проводника делается равным нулю. Это явление вызывает увеличение сопротивления проводника, так как по внутренним частям проводника ток не идет. Так как эти внутренние части оказываются бесполезными, то в целях экономии металла провода для быстропеременных токов делаются полыми. Токи Фуко приводят также к уменьшению коэффициента самоиндукции проводника. Это можно пояснить на примере цилиндрического проводника. Коэффициент самоиндукции  $L$  по формуле (§ 227) связан с магнитной энергией тока соотношением:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (1)$$

Энергия магнитного поля  $W_m$  зависит от напряженности магнитного поля. При скин-эффекте магнитное поле внутри проводника делается равным нулю, а поле вне проводника остается таким же при данной силе тока, как и при токе с постоянной плотностью по сечению проводника, — в результате энергия поля становится меньше, откуда по формуле (1) уменьшается коэффициент самоиндукции  $L$ .

В сплошных проводниках в результате скин-эффекта получается неравномерное выделение тепла: тепло выделяется преимущественно у поверхности проводника. Этот эффект использован В. П. Вологдиным для создания метода поверхностной закалки стали.

**§ 232. Переменный ток.** При действии в замкнутом контуре переменной э.д.с. в нем возникает переменный ток. Сила такого переменного тока может быть непостоянной в различных сечениях неразветвленного проводника. Это отступление от основного требования, которому удовлетворяет постоянный ток, обусловлено конечной скоростью распространения электромагнитных полей. Однако отступление окажется незначительным, если сила тока и распределение зарядов мало меняются за то время  $t$ , в течение которого электромагнитные возмущения пробегают расстояние, отделяющее наиболее удаленные части рассматриваемой электрической системы. Токи, подчиняющиеся этому условию, называются *квазистационарными*. В § 232 — 234 мы будем рассматривать только такие токи. Для квазистационарных токов в каждый данный момент выполняются законы Кирхгофа.

Мы видели (см. § 224), что при вращении контура в однородном магнитном поле поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром, меняется периодически, вследствие чего в контуре индуцируется периодически изменяющийся ток. Рассмотрим более подробно характер этого процесса.

Как было показано в § 224, при вращении рамки в магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$  поток магнитной индукции  $\Phi$ , прони-

зывают площадь, ограниченную контуром рамки, меняется со временем  $t$  по закону:

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $\Phi_0$  означает наибольшее значение потока через площадь контура. Электродвижущая сила, возникающая при этом в цепи, окажется равной:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Это будет простейший случай переменной э. д. с., меняющейся со временем по синусоидальному закону. Величина  $\mathcal{E}_0 = \omega \Phi_0$  называется *амплитудой* э. д. с. и представляет ее наибольшее значение.

Кроме внешней э. д. с.  $\mathcal{E}$ , в контуре будет действовать э. д. с. самоиндукции, так как сила тока в контуре меняется. Пусть  $L$  — коэффициент самоиндукции рассматриваемой цепи. Электродвижущая сила самоиндукции, как известно, равна:

$$\mathcal{E}_{si} = - L \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

Сумма э. д. с.  $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si}$  должна равняться, по закону Кирхгофа, произведению сопротивления контура на силу тока в нем  $I$ :

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{si}. \quad (4)$$

Подставляя в формулу (4) вместо  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_{si}$  их значения по (2) и (3), получим:

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (5)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее силу тока  $I$  в контуре с заданной э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  и заданными коэффициентом самоиндукции  $L$  и сопротивлением  $R$ . Частное решение этого уравнения для силы тока  $I$  будем искать, предполагая, что ток является периодической функцией от времени, период которой равен периоду э. д. с., т. е. ищем решение для  $I$  в виде:

$$I = I_0 \sin (\omega t - \varphi), \quad (6)$$

где  $I_0$  и  $\varphi$  — постоянные, которые мы должны определить. Подставляя это выражение в уравнение (5) и выполняя дифференцирование, получаем:

$$RI_0 \sin (\omega t - \varphi) + LI_0 \omega \cos (\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (5a)$$

или

$$RI_0 (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) + LI_0 \omega (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) - \mathcal{E}_0 \sin \omega t = 0.$$

Чтобы это равенство имело место в любой момент времени, необходимо, чтобы отдельно обращались в нуль коэффициенты при  $\sin \omega t$

и при  $\cos \omega t$ ; это условие дает два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} LI_0 \omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi &= 0, \\ LI_0 \omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

последнее из этих уравнений перепишем в виде:

$$LI_0 \omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_0. \quad (8)$$

Первое из равенств (7) после деления обоих его членов на  $RI_0 \cos \varphi$  дает:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}. \quad (9)$$

Возводя первое из равенств (7) и равенство (8) в квадрат и складывая их, получаем:

$$I_0^2 (L^2 \omega^2 + R^2) = \mathcal{E}_0^2,$$

откуда

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) определяют неизвестные постоянные  $I_0$  и  $\varphi$ . Воспользовавшись этими значениями  $I_0$  и  $\varphi$ , получим в силу соотношения (6) выражение для силы тока  $I$  в рассматриваемой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \sin \left( \omega t - \arctan \frac{L\omega}{R} \right). \quad (11)$$

Сравнивая эту формулу с выражением для э. д. с. индукции (2), мы видим, что и ток  $I$  и э. д. с.  $\mathcal{E}$  представляются синусоидами, но

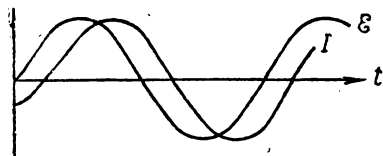


Рис. 304. Кривые изменения со временем э. д. с.  $\mathcal{E}$  и силы тока  $I$  в случае переменного тока в цепи с самоиндукцией.

сдвинутыми по фазе на угол  $\varphi$ . Ток и э. д. с. не одновременно проходят через наибольшие и наименьшие значения и не одновременно достигают значения нуль. На рис. 304 графически представлено изменение со временем э. д. с.  $\mathcal{E}$  и силы тока  $I$  для некоторого частного значения сдвига фаз  $\varphi$ . Соотношение (9) показывает, что сдвиг фаз между э. д. с. и силой тока при данной частоте  $\omega$  определяется

отношением  $L/R$ . Чем больше отношение  $L/R$ , тем больше значение  $\operatorname{tg} \omega$ , т. е. тем больше сдвиг фаз  $\varphi$ ; наибольшее значение  $\varphi$  принимает, когда при  $L \neq 0$  сопротивление цепи можно считать равным нулю, при этом  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , откуда:

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

т. е. ток отстает от э. д. с. на четверть периода.

Формула (10), определяющая зависимость амплитуды силы тока  $I_0$  от амплитуды э. д. с.  $\mathcal{E}_0$ , напоминает закон Ома, причем роль сопротивления играет величина:

$$z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}, \quad (12)$$

называемая *полным сопротивлением* (или кажущимся сопротивлением, или *импедансом* цепи). Величина  $L\omega$  называется *индуктивным сопротивлением*. Обозначая индуктивное сопротивление через  $R_\omega$ , имеем:

$$R_\omega = L\omega. \quad (13)$$

Амплитуда силы тока, как видно, зависит от полного сопротивления  $z$ , которое при данном омическом сопротивлении  $R$  тем больше, чем больше коэффициент самоиндукции  $L$  и чем больше частота  $\omega$ .

Для оценки роли индуктивного сопротивления определим силу тока, проходящего через соленоид, коэффициент самоиндукции которого был нами рассчитан в § 225. Пусть омическое сопротивление этого соленоида равно  $R = 20$  ом; его коэффициент самоиндукции нами был определен равным  $L = 0,023$  гн. Вычислим амплитуду силы тока  $I_0$ , проходящего через этот соленоид при амплитудном значении разности потенциалов  $V_1 - V_2$  на концах соленоида в 100 в и при числе периодов в секунду: а) 50, б) 250, в) 500. По формуле (10) амплитуда силы тока:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}.$$

Циклическая частота  $\omega$  для трех указанных случаев равна:

- а)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ сек}^{-1}$ ,
- б)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 250 = 1570 \text{ сек}^{-1}$ ,
- в)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 500 = 3140 \text{ сек}^{-1}$ .

Амплитуды силы токов равны:

- а)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 314)^2 + 20^2}} \cong 4,8 \text{ а}$ ,
- б)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 1570)^2 + 20^2}} \cong 2,4 \text{ а}$ ,
- в)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 3140)^2 + 20^2}} \cong 1,3 \text{ а}$ .

Постоянный ток, проходящий через тот же соленоид при разности потенциалов на его концах в 100 в, был бы равен:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = 5 \text{ а}.$$

Из сравнения полученных результатов видна роль частоты тока: при 50 периодах в 1 сек роль индуктивного сопротивления в данном случае невелика, но при 500 периодах в 1 сек сила тока оказывается почти в четыре раза слабее силы постоянного тока.

Формулу (5а) можно использовать для графического способа характеристики величин, определяющих переменный ток. Для этого перепишем (5а) в следующем виде:

$$RI_0 \sin(\omega t - \varphi) + LI_0 \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (5б)$$

Стоящие слева члены представляют сумму двух гармонических колебаний одного периода с разностью фаз  $\pi/2$ . Амплитуды этих колебаний равны  $RI_0$  и  $LI_0\omega$ . Для получения результирующего значения можно графически сложить амплитуды, как это было изложено в § 97 т. I. Для этого (рис. 305) отложим вектор амплитуды  $RI_0$  под углом  $\omega t - \varphi$  к оси  $OX$  и вектор амплитуды  $LI_0\omega$  под углом  $\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}$ . Геометрическая

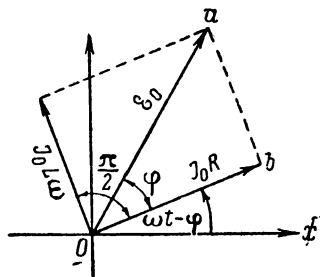


Рис. 305. Векторная диаграмма для цепи переменного тока с самоиндукцией.

сумма этих амплитуд дает, согласно (5б), вектор амплитуды э. д. с.  $\mathcal{E}_0$ . Из чертежа видно, что угол между амплитудой  $RI_0$  и амплитудой  $\mathcal{E}_0$  равен  $\varphi$ , так как:

$$\frac{LI_0\omega}{RI_0} = \frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Проекция вектора амплитуды  $\mathcal{E}_0$  на ось  $OX$  дает в каждый данный момент времени значение э. д. с. Проекции векторов  $RI_0$  и  $L\omega I_0$  на ту же ось дают соответственно падение потенциала в контуре вследствие омического сопротивления  $R$  и вследствие явления самоиндукции. Из треугольника  $Oab$  видно, что тангенс угла  $\varphi$  не зависит от значения  $I_0$ ; поэтому для графического нахождения сдвига фаз и полного сопротивления при известных омическом и индуктивном сопротивлениях можно построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны  $R$  и  $L\omega$ ; гипотенуза  $AB$  такого треугольника (рис. 306) равна полному сопротивлению  $z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ , а угол  $\varphi$  — сдвигу фаз между током и э. д. с.

До сих пор мы пользовались лишь частным решением уравнения (5). Полное решение уравнения (5) мы получим, если к частному решению (11) прибавим общее решение соответственного однородного уравнения

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

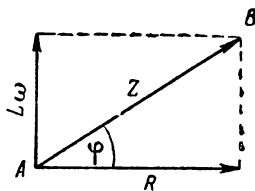


Рис. 306. Графическое определение полного сопротивления  $z$  в цепи переменного тока с самоиндукцией по омическому сопротивлению  $R$  и индуктивному сопротивлению  $L\omega$ .

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

где  $A$  — постоянная, определяемая по начальным условиям. Это решение дает часть тока, которая спадает с течением времени и обычно быстро делается равной нулю. Таким образом, интерес представляет лишь выражение для установившегося тока, которое и дается решением (11).

**§ 233. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.** Рассмотрим мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Мгновенное значение мощности мы получим, если возьмем произведение мгновенного значения силы тока на мгновенное значение э.д.с.:

$$M = I\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin (\omega t - \varphi). \quad (1)$$

В разные моменты времени это мгновенное значение мощности имеет различную величину, в частности оно равно нулю в те моменты, когда равно нулю  $I$  либо  $\mathcal{E}$ . Поэтому нас будет интересовать не мгновенное значение мощности, а среднее значение мощности за период. Чтобы подсчитать это среднее значение, преобразуем выражение (1) для  $W$  следующим образом:

$$W = \mathcal{E}_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)].$$

Таким образом, среднее значение  $\bar{W}$  за период представляется суммой средних значений членов  $\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi$  и  $-\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos (2\omega t - \varphi)$ . Первый член от времени не зависит; следовательно, его среднее значение равно ему самому; второй член меняется со временем вследствие изменения  $\cos (2\omega t - \varphi)$ . Среднее значение  $\cos (2\omega t - \varphi)$  за период, очевидно, равно нулю, так как за период  $\cos (2\omega t - \varphi)$  принимает так же часто положительные значения, как и равные им отрицательные. В результате среднее за период значение мощности, выделяющейся в цепи, будет равно:

$$\bar{W} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$\mathcal{E}_{\text{эф}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Величины  $\mathcal{E}_{\text{эф}}$  и  $I_{\text{эф}}$  называются *эффективной э.д.с.* и *эффективной силой тока*; подставляя их в (2), получим для среднего за период значения мощности:

$$\bar{W} = \mathcal{E}_{\text{эф}} I_{\text{эф}} \cdot \cos \varphi. \quad (2a)$$

Если сдвиг фаз между током и э. д. с. равен нулю, то средняя мощность будет выражаться произведением эффективной силы тока на эффективную э.д.с. Таким образом, эффективные значения силы тока и э.д.с. играют ту же роль, что сила тока и э.д.с. в случае постоянного тока.

Среднее значение мощности зависит от сдвига фаз. Наибольшего значения она достигает при сдвиге фаз, равном нулю, что имеет место при отсутствии в цепи самоиндукции. Если сдвиг фаз равен  $\pi/2$ , то среднее значение мощности оказывается равным нулю. Это получается вследствие того, что энергия, доставляемая источником за одну четверть периода, возвращается обратно в источник за другую четверть периода за счет электромагнитной энергии самоиндукции. Этот случай осуществляется только при условии равенства нулю омического сопротивления цепи, что практически никогда не выполняется.

Мощность, развиваемая током, выделяется в виде тепла. Поэтому полное количество тепла, выделяемое во всей цепи за время  $t$ , равно:

$$Q = \mathcal{E}_{\text{эф}} \cdot I_{\text{эф}} \cos \varphi \cdot t. \quad (4)$$

Так как по формуле (3) эффективные значения силы тока  $I_{\text{эф}}$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_{\text{эф}}$  отличаются от максимальных значений  $I_0$  и  $\mathcal{E}_0$  лишь постоянным множителем:

$$I_{\text{эф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \cong 0,707 I_0, \quad \mathcal{E}_{\text{эф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0 \cong 0,707 \mathcal{E}_0,$$

то между  $I_{\text{эф}}$  и  $\mathcal{E}_{\text{эф}}$  имеет место то же соотношение, что и между  $I_0$  и  $\mathcal{E}_0$  [см. формулу (10) на стр. 434]:

$$I_{\text{эф}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эф}}}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}.$$

Воспользовавшись этим соотношением, перепишем выражение (4) для тепла, выделяемого в цепи:

$$Q = I_{\text{эф}}^2 \sqrt{L^2 \omega^2 + R^2} \cdot \cos \varphi \cdot t,$$

или

$$Q = I_{\text{эф}}^2 \cdot R \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} \cos \varphi \cdot t. \quad (4a)$$

Разность фаз  $\varphi$  определяется [по формуле (9), стр. 434] равенством:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R},$$

отсюда

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}}.$$

Подставляя это значение  $\cos \varphi$  в (4a), найдем:

$$Q = I_{\text{эф}}^2 R t, \quad (5)$$

откуда следует, что количество тепла, выделяемое в цепи переменного тока с данным омическим сопротивлением  $R$ , выражается обычной формулой Ленца — Джоуля (см. § 157), если только под силой тока подразумевать эффективную силу тока.

Таким образом, количество выделяющегося тепла определяется лишь эффективной силой тока  $I_{\text{эф}}$  и омическим сопротивлением  $R$ . Индуктивное сопротивление  $L\omega$  непосредственной роли в процессе выделения тепла не играет. Поэтому оно иногда называется *безваттным сопротивлением*. Если омическое сопротивление цепи  $R$  очень мало, то мало и количество выделяемого в ней тепла; общее же сопротивление  $z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  такой цепи может быть велико, если только велика ее самоиндукция и значительная частота  $\omega$  того переменного тока, который через нее проходит.

Для измерения силы переменного тока можно воспользоваться тепловыми амперметрами (§ 158). Тепловой амперметр, градуированный для постоянного тока, даст для переменного тока эффективную силу тока. Максимальное значение силы тока определится по эффективной силе соотношением (3), по которому  $I_0 = I_{\text{эф}} \cdot \sqrt{2} \cong 1,41 I_{\text{эф}}$ .

О других способах измерения переменных токов см. § 237.

**§ 234. Цепь переменного тока, содержащая самоиндукцию и емкость.** Цепь переменного тока, в отличие от цепи постоянного тока, допускает последовательное включение конденсатора.

Если обкладки конденсатора присоединить к источнику постоянного тока, то в цепи пойдет ток лишь до тех пор, пока на обкладках конденсатора не возникнет разность потенциалов, компенсирующая э. д. с. источника. Если же обкладки конденсатора присоединить к источникам переменной э. д. с., то они непрерывно будут перезаряжаться, и в цепи все время будет идти переменный ток.

Пусть к зажимам  $S$  (рис. 307) приложена переменная э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Цепь состоит из *последовательно* соединенных емкости  $C$ , самоиндукции  $L$  и омического сопротивления  $R$  (омическим сопротивлением остальных проводов пренебрегаем). В части контура, обладающей самоиндукцией  $L$ , возникнет э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ , где  $I$  — сила тока в цепи. Полная э. д. с., действующая

в контуре, окажется равной  $\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}$ . В каждый данный момент она должна равняться сумме падений потенциалов вдоль цепи. Эти падения сложатся из разности потенциалов на обкладках конденсатора  $V = V_1 - V_2$  и падения потенциала  $IR$  вдоль части цепи с омиче-

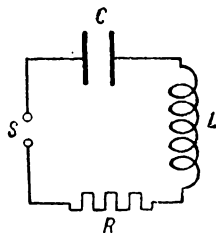


Рис. 307. Цепь с омическим сопротивлением  $R$ , самоиндукцией  $L$  и емкостью  $C$ .



ским сопротивлением  $R$ . Таким образом, получим:

$$IR + V = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

откуда, подставив вместо  $\mathcal{E}$  его значение  $\mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , получим:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + V = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора  $V$  связана с зарядом  $Q$ , сосредоточенным на обкладке конденсатора, соотношением:

$$Q = VC, \quad (2)$$

где  $C$  — емкость конденсатора. За время  $dt$  заряд  $Q$  увеличится на  $dQ = I dt$ , откуда в силу соотношения (2):

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt},$$

или

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} I. \quad (3)$$

Дифференцируя равенство (1) по времени, получим:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} = \mathcal{E}_0 \omega \cdot \cos \omega t.$$

Подставляя сюда вместо  $dV/dt$  его значение по (3), найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять сила тока в цепи с последовательно соединенными емкостью, самоиндукцией и сопротивлением:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega \cdot \cos \omega t. \quad (4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде периодической функции от времени того же периода, что и период э. д. с.:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

где  $I_0$  и  $\varphi$  — постоянные, которые нам надлежит определить. Составляя первую и вторую производные от  $I$  по времени, получим:

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t - \varphi), \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -I_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Подставляя эти значения  $dI/dt$ ,  $d^2 I/dt^2$  и  $I$  в уравнение (4) и сокращая правую и левую части на  $\omega$ , найдем:

$$RI_0 \cos(\omega t - \varphi) - \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (4a)$$

Представляя  $\cos(\omega t - \varphi)$  и  $\sin(\omega t - \varphi)$  через синусы и косинусы от

$\omega t$  и  $\varphi$ , получим:

$$RI_0 \cos \omega t \cos \varphi + RI_0 \sin \omega t \sin \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \sin \omega t \cos \varphi + \\ + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \cos \omega t \sin \varphi - \mathcal{E}_0 \cos \omega t = 0. \quad (5a)$$

Так как это равенство должно выполняться для любого момента времени, то множители при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  должны равняться нулю, откуда получим два уравнения:

$$R \sin \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \cos \varphi = 0, \quad (6)$$

$$R \cos \varphi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \sin \varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0}. \quad (7)$$

Из уравнения (6) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (8)$$

Возводя равенства (6) и (7) почленно в квадрат и складывая их, найдем:

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2},$$

откуда

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (9)$$

Равенства (5), (8) и (9) дают нам искомое решение: в цепи течет ток  $I$  того же периода, что и приложенная э.д.с.; амплитуда этого тока  $I_0$  определяется равенством (9). Ток  $I$  сдвинут по фазе относительно э.д.с.  $\mathcal{E}$  на угол  $\varphi$ , определяемый равенством (8).

Величина  $z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  носит характер полного сопротивления (импеданс), она зависит от значений  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и от частоты тока  $\omega$ . При  $\omega$ , удовлетворяющем соотношению:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad (10)$$

полное сопротивление достигает минимума; при этой частоте амплитуда силы тока достигает максимального значения:

$$I_{0\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Все явление прохождения переменного тока через цепь с емкостью и самоиндукцией напоминает явление механического резонанса: амплитуда силы тока зависит от частоты  $\omega$  и достигает максимума

при некотором определенном значении  $\omega_{\text{рез}}$ , называемом *резонансной частотой*, значение которой, по (10), равно:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (10a)$$

Резонансная кривая имеет тем более острый максимум, чем меньше омическое сопротивление  $R$ .

По формуле (8) при резонансе разность фаз  $\varphi = 0$ .

По  $\omega \rightarrow 0$  разность фаз  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ , т. е. ток опережает значение э. д. с.; при  $\omega \rightarrow \infty$  разность фаз  $\varphi \rightarrow +\pi/2$ ; в этом случае ток отстает от э. д. с. На рис. 308 кривая 1 дает изменение силы тока с частотой при заданной э. д. с. и постоянных  $L$  и  $C$ ; кривая 2 дает зависимость  $\varphi$  от частоты.

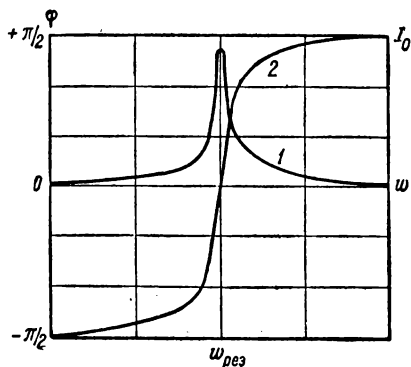


Рис. 308. Зависимость силы тока (1) и сдвига фаз (2) от частоты.

Если конденсатор заменить участком проводника, то в цепи не возникнет добавочной разности потенциалов  $V = \frac{Q}{C}$ . Следовательно, замена конденсатора проводником соответствует случаю  $C = \infty$ , и тогда формулы (8) и (9) переходят в формулы (9) и (10) § 232, относящиеся к цепи с самоиндукцией и сопротивлением, но без конденсатора.

С изменением  $\omega$  одновременно с силой тока меняется и падение потенциала в каждом участке цепи переменного тока. В цепи, изображенной на рис. 307, омическое сопротивление  $R$ , самоиндукция  $L$  и емкость  $C$  соединены последовательно. Обозначив разности потенциалов на концах каждого из этих участков цепи соответственно через  $V_R$ ,  $V_L$  и  $V_C$ , получим, что полное падение потенциала в цепи, совпадающее с э. д. с., действующей в цепи, может быть представлено в виде:

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t = V_R + V_L + V_C.$$

По сказанному на стр. 440:

$$\left. \begin{aligned} V_R &= IR = RI_0 \sin(\omega t - \varphi), \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или

$$V_L = L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (12)$$

Чтобы определить разность потенциалов на обкладках конденсатора, рассмотрим случай, когда цепь не содержит ни омического

сопротивления, ни самоиндукции ( $R=0$  и  $L=0$ ), тогда формула (9) дает:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{1/C\omega}.$$

Из этого соотношения видно, что конденсатор эквивалентен омическому сопротивлению, равному  $1/C\omega$ . При этом по (8)  $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$  и, следовательно,  $\varphi = -\pi/2$ , т. е. ток *опережает* значение э. д. с. на  $\pi/2$ . Отсюда получаем, что амплитудное значение разности потенциалов на обкладках конденсатора равно  $\frac{1}{C\omega} I_0$ ; значение разности потенциалов в каждый данный момент *отстает* от значения силы тока на  $\pi/2$ . Таким образом, для  $V_C$  мы можем написать:

$$V_C = \frac{1}{C\omega} I_0 \sin(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

или

$$V_C = -\frac{1}{C\omega} I_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (13)$$

Складывая выражения (11), (12) и (13), получим:

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t = RI_0 \sin(\omega t - \varphi) + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (14)$$

При резонансе, когда амплитуда силы тока достигает максимума,

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \varphi = 0.$$

При этих условиях формула (14) дает:

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t = RI_{0\text{max}} \cdot \sin \omega t,$$

т. е. полное падение потенциала в цепи совпадает с его падением на омическом сопротивлении  $R$ . Одновременно амплитуда каждого из падений потенциалов  $V_L$  и  $V_C$  достигает *максимальных значений*:

$$\mathcal{E}_{0L} = L\omega_{\text{рез}} \cdot I_{0\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\mathcal{E}_{0C} = \frac{1}{C\omega_{\text{рез}}} \cdot I_{0\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Но так как оба падения потенциалов меняются в противоположных фазах, то в сумме они равны нулю.

Рассмотренное явление называется *резонансом напряжений*.

Для определения роли конденсатора в цепи переменного тока рассчитаем, скольким омам эквивалентно сопротивление конденсатора емкостью в 1 мкф при прохождении через него переменного тока в 50 периодов в секунду.

Из сказанного выше следует, что при прохождении через конденсатор емкости  $C$  переменного тока с циклической частотой  $\omega$  конденсатор эквивалентен сопротивлению  $R = \frac{1}{C\omega}$ . Переводя в данном случае емкость в фарады и определяя циклическую частоту  $\omega = 2\pi\nu = 314 \text{ сек}^{-1}$ , получим:

$$R = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{314 \cdot 10^{-6}} \text{ ом} \cong 3200 \text{ ом}.$$

При большей частоте переменного тока тот же конденсатор будет эквивалентен меньшему омическому сопротивлению.

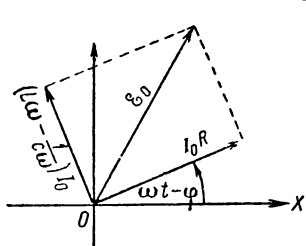
Явления в цепи переменного тока с емкостью и самоиндукцией могут быть также представлены с помощью векторной диаграммы, как это было сделано в § 232 для цепи с самоиндукцией. Для этого перепишем уравнение (4а) в виде:

$$RI_0 \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) - I_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \sin(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как существенна лишь разность фаз, а не сами начальные фазы, то это равенство можно заменить равенством:

$$RI_0 \sin(\omega t - \varphi) + I_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (15)$$

Оба члена, стоящие в левой части этого равенства, можно представить в виде взаимно перпендикулярных векторов амплитуд  $RI_0$  и



$I_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ , составляющих с осью  $OX$  соответственно углы  $\omega t - \varphi$  и  $\omega t - \varphi + \pi/2$  (рис. 309). Результирующая амплитуда изобразится вектором  $\mathcal{E}_0$ , длина которого определится равенством:

$$\mathcal{E}_0^2 = R^2 I_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_0^2,$$

Рис. 309. Векторная диаграмма для цепи переменного тока с самоиндукцией и емкостью.

откуда вытекает формула (9). Как легко видеть, вектор  $\mathcal{E}_0$  составляет с вектором  $I_0 R$  угол  $\varphi$ .

Решение уравнения (4) можно получить более просто, если воспользоваться указанным в т. I, § 105, способом описывать гармонические процессы с помощью комплексных чисел. Заменяя в уравнении (4)  $\cos \omega t$  через показательную функцию с комплексным показателем степени, получим:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega e^{i\omega t}. \quad (16)$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде:

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (17)$$

где  $I_0$  и  $\alpha$  — вещественные числа, подлежащие определению. Дифференцируя (17), получим:

$$\frac{dI}{dt} = iI_0\omega e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad \frac{d^2I}{dt^2} = -I_0\omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Подставляя эти значения  $dI/dt$  и  $d^2I/dt^2$  в (16), найдем:

$$-LI_0\omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)} + iRI_0\omega e^{i(\omega t + \alpha)} + \frac{1}{C}I_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \mathcal{E}_0\omega e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Поделив правую и левую части этого уравнения на  $I_0\omega e^{i(\omega t + \alpha)}$ , получим:

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} e^{-i\alpha}.$$

Заменяя  $e^{-i\alpha}$  через  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ , найдем:

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \cos \alpha - i \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \sin \alpha. \quad (19)$$

Как известно, два комплексных числа равны друг другу, если равны порознь их вещественные и мнимые части, поэтому из (19) следует:

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \cos \alpha, \quad R = -\frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \sin \alpha. \quad (20)$$

Деля почленно второе из этих равенств на первое, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}. \quad (21)$$

Возводя почленно равенства (20) в квадрат и складывая, найдем:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (22)$$

Выражения (17), (21) и (22) и представляют собой искомое решение. Легко видеть, что оно совпадает с найденным нами в основном тексте этого параграфа решением уравнения (4). В самом деле, вещественная часть выражения (17) дает:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha) \text{ или } I = I_0 \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Полагая

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = -\varphi,$$

получим

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

что, в соответствии с формулой (5), дает синусоидально меняющийся ток с циклической частотой  $\omega$  и амплитудой  $I_0$ , которая определяется формулой (22), совпадающей с формулой (9). Остается показать, что и для сдвига фазы  $\varphi$  мы получаем обоими способами одно и то же значение. Действительно, по (21):

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$

что совпадает с (8).

Для графического изображения процессов, происходящих в цепи переменного тока, нет надобности переходить от комплексных величин к вещественным. Для этого достаточно условиться сопоставлять комплексной величине  $ae^{ai}$  вектор длиной  $a$ , составляющий угол  $\alpha$  с заданной осью. Заметим, что при этом умножение на мнимую единицу  $i$  будет соответствовать повороту вектора на прямой угол. В самом деле:  $iae^{ia} = e^{i\frac{\pi}{2}} ae^{ia} = ae^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$ . Отсюда далее следует, что умножение на  $i^2 = -1$  соответствует повороту на  $\pi$ . Имея в виду эти замечания, перепишем равенство (18) в виде:

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi)} + RI_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi/2)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t},$$

или, заменяя  $\alpha$  через  $-\varphi - \frac{\pi}{2}$ :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} + RI_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Это выражение связывает между собой три вектора, длины и направления которых соответствуют рис. 309.

**§ 235. Динамомашины и электромоторы.** Динамомашин (или генераторы) представляют собой машины, служащие для получения токов путем использования явления электромагнитной индукции. Простейшей динамомашиной переменного тока является рамка, образованная од-

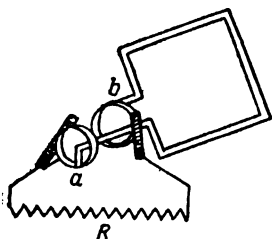


Рис. 310. Отведение тока от вращающейся рамки с помощью колец  $a$  и  $b$ .

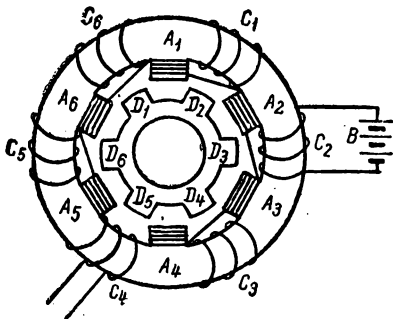


Рис. 311. Схема генератора переменного тока с неподвижными обмотками.

ним витком провода, вращающаяся в поле постоянного магнита. Возникновение переменного тока в такой рамке разобрано в § 224. На рис. 310 показано, как, пользуясь двумя кольцами и щетками  $a$  и  $b$ , можно отвести от такой вращающейся рамки ток во внешнюю часть цепи  $R$ . На практике пользуются, конечно, не одной рамкой, а значительным числом витков провода, намотанных на барабан (ротор). В технике также употребляются машины с неподвижными обмотками и электромагнитами вместо постоянных магнитов. Схема такой машины представлена на рис. 311. Катушки, в которых индуцируется ток, намотаны на выступы  $A_1, A_2, A_3, \dots$  железного сердечника. Сердечник намагничивается током, текущим по обмоткам  $C_1, C_2, C_3, \dots$  от небольшого постороннего источника тока  $B$ . Вращающаяся часть машины (ротор) имеет вид кольца с зубцами  $D_1, D_2, D_3, \dots$ . При вращении ротора зубцы перемещаются относительно выступов  $A_1, A_2, A_3, \dots$  и таким образом то более, то

менее замыкают магнитную цепь между соседними выступами. В результате меняется поток магнитной индукции через катушки, намотанные на выступы  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , и в них индуцируется ток.

Наряду с указанными генераторами переменного тока возможно построение *генераторов постоянного тока*. Если концы вращающейся рамки соединить с двумя изолированными друг от друга полукольцами (коллектором) (рис. 312), то щетки  $a$  и  $b$  будут попеременно касаться то

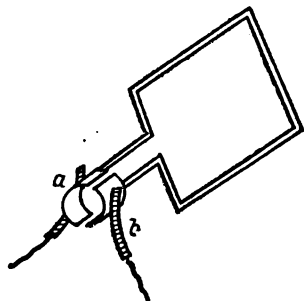


Рис. 312. Схема коллектора генератора постоянного тока.

одного, то другого полукольца, и во внешней цепи потечет ток все время в одном направлении, лишь меняющий свою силу. На рис. 313а графически изображена зависимость силы такого тока  $I$  от времени. Употребляя вместо одной рамки систему обмоток, концы которых присоединены к отдельным секциям сложного коллектора, можно получить постоянный ток, сила которого будет лишь

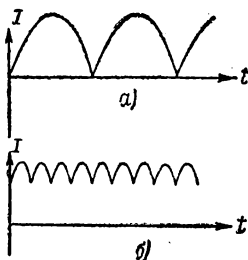


Рис. 313. Зависимость силы тока от времени:

$a$  — для генератора с коллектором из двух полукольцев,  $б$  — для генератора со сложным коллектором.

слегка пульсировать со временем (рис. 313б). Магнитное поле во всех сколько-нибудь значительных по размеру динамомашинах постоянного тока создается электромагнитом, причем обычно используется так называемый *принцип самовозбуждения*, сводящийся к тому, что электромагнит питается током, возбуждаемым в самой динамомашине. Возможны два основных типа питания электромагнита: 1) последовательное и 2) параллельное.

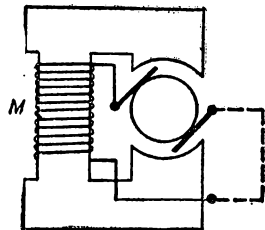


Рис. 314. Схема динамомашины с последовательным возбуждением.

В машинах с *последовательным возбуждением* обмотка электромагнита включена последовательно с внешней цепью (рис. 314). Такая машина начинает работать за счет остаточного намагничивания сердечника электромагнита, затем возникающий в ней ток целиком проходит через обмотку электромагнита  $M$  и ведет к усилению магнитного поля, в котором вращается ротор. При размыкании внешней цепи э. д. с. такой машины спадает до малого значения, обусловленного остаточным намагничиванием.

В машинах с *параллельным возбуждением* (шунтовые машины) обмотка электромагнита включена параллельно с внешней цепью (рис. 315). Сила

тока в обмотке может регулироваться реостатом  $C$ . Шунтовые машины являются наиболее распространенными. Употребляются также машины со смешанным возбуждением: они имеют две обмотки, одна из которых включена последовательно с внешней цепью, а другая — параллельно.

Всякую динамомашину постоянного тока можно превратить в электродвигатель: для этого надо пустить в ее ротор через щетки ток от постоянного источника. Тогда под влиянием сил взаимодействия между токами, текущими по обмоткам ротора, и магнитным полем ротор придет во вращение.



Практически действующий электромотор был впервые осуществлен Б. С. Якоби в России и применен для приведения в движение лодки на Неве.

При вращении ротора электромотора в его обмотке индуцируется ток обратного направления по отношению к направлению тока, вызывающего вращение. Поэтому сила тока, идущего через обмотку ротора от внешнего источника, будет падать. Если же внешняя э. д. с. достаточна, чтобы поддерживать при вращении электромотора ток необходимой силы, тогда в начальный момент при пуске электромотора ток может оказаться слишком большим и вызвать перегорание обмотки ротора. Чтобы избежать этого, последовательно с мотором включается реостат, носящий название *пускового реостата*. По мере того как число оборотов электромотора возрастает, пусковой реостат выводится.

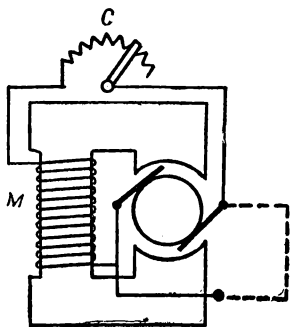


Рис. 315. Схема динамомашин с параллельным возбуждением.

Современные динамомашины и электромоторы представляют собой машины с весьма высоким к. п. д., достигающим для больших машин 95%. Неизбежные вредные потери на трение, лениндржоулево тепло, токи Фуко и гистерезис удается снизить до 5%.

**§ 236. Трансформаторы.** Для многих технических и лабораторных целей бывает необходимо иметь более высокие э. д. с., чем те, которые дают динамомашин. Особенно важно в технике иметь высокие э. д. с. при передаче электрической энергии по длинным проводам с одного места до другого (иногда потребитель отстоит на сотни километров от электростанции). Дело заключается в том, что полная мощность, развиваемая в цепи, равна произведению э. д. с. на силу тока  $\mathcal{E}I$ , откуда следует, что чем выше э. д. с.  $\mathcal{E}$ , тем меньше при той же мощности сила тока  $I$ . Потеря же энергии в передающих проводах на лениндржоулево тепло  $Q = RI^2$ , т. е. тем больше, чем больше сила тока. Поэтому для уменьшения вредных потерь выгодно иметь дело с большой э. д. с. и малой силой тока.

В случае переменного тока повышение э. д. с. (или, как говорят в технике, „напряжения“) легко осуществляется с помощью повышающих трансформаторов. Впервые трансформаторы были сконструированы и введены в практику русскими электротехниками П. Н. Яблочковым (1876 г.) и И. Ф. Усагиным (1882 г.). Трансформатор в простейшем виде (рис. 316) состоит из двух обмоток, намотанных на общий замкнутый железный сердечник. Первичная обмотка  $A_1$  состоит из небольшого числа витков толстого провода, вторичная обмотка  $A_2$  — из большого числа витков более тонкого провода. Первичный ток, проходящий через обмотку  $A_1$ , создает переменный поток магнитной индукции  $\Phi$ , который почти целиком сосредоточен лишь внутри сердечника и, следовательно, практически полностью пронизывает витки вторичной обмотки.

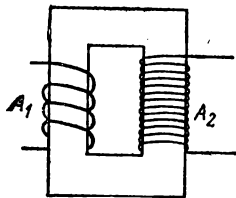


Рис. 316. Трансформатор.

При разомкнутой вторичной обмотке первичная обмотка является частью цепи с некоторым омическим и индуктивным сопротивлением. Если считать омическое сопротивление столь малым, что его ролью можно пренебречь, то э. д. с.  $\mathcal{E}_1$ , действующая в первичной обмотке, численно равна и обратна по знаку возникающей в ней э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_{si}$ :

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_{si}.$$

В каждом витке первичной обмотки возникает э. д. с. самоиндукции, равная  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , откуда

$$\mathcal{E}_{si} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $N_1$  — число витков первичной обмотки. Отсюда для э. д. с.  $\mathcal{E}_1$ , действующей в первичной обмотке, получаем:

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Так как тот же поток  $\Phi$  пронизывает вторичную обмотку, то в каждом ее витке возникает э. д. с. индукции  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , всего во вторичной обмотке возникает э. д. с.  $\mathcal{E}_2$ :

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

где  $N_2$  — число витков во вторичной обмотке. Сравнивая выражения (1) и (2), получим, что э. д. с. индукции, возникающая во вторичной обмотке, равна:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1. \quad (3)$$

Таким образом, трансформатор повышает э. д. с. в отношении числа витков вторичной обмотки к числу витков в первичной обмотке. Знак минус указывает, что э. д. с. в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Обычно у трансформаторов, при разомкнутой вторичной обмотке, коэффициент самоиндукции первичной обмотки велик. Это ведет к большому значению индуктивного сопротивления первичной обмотки. Благодаря этому при разомкнутой вторичной обмотке ток  $I_1$  в первичной обмотке слаб. Значение этого тока носит название *холостого тока*. При замыкании вторичной цепи в ней индуцируется ток, создающий свое магнитное поле, компенсирующее, по правилу Ленца, магнитное поле первичной обмотки. Это ведет к уменьшению индуктивного сопротивления первичной обмотки и возрастанию тока  $I_1$ . Таким образом, мощность, потребляемая в первичной цепи, зависит от мощности, которая берется во вторичной цепи.

При действии вторичной цепи соотношение (3) перестает быть верным. Оно хорошо оправдывается, пока ток в первичной цепи не слишком сильно отличается от холостого. Общая теория трансформатора, особенно учитывающая роль гистерезиса сердечника, сложна.

Вредные потери в трансформаторе идут на выделение ленин-джоулева тепла в обмотках, на утечку линий магнитной индукции, на токи Фуко в сердечнике и на работу перемагничивания, обусловленную гистерезисом сердечника.

Для уменьшения роли двух последних причин сердечники трансформаторов делают из наиболее мягких сортов железа и иритом из отдельных полос листового железа, разделенных изолирующими слоями. В больших современных трансформаторах потери удается снизить до 2% от общей мощности, и, таким образом, их к. п. д. достигает 98%.

Считая, что для таких трансформаторов мощности, развиваемые в первичной и вторичной цепях, практически равны, получим:

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2,$$

откуда в силу соотношения (3):

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1; \quad (4)$$

таким образом, силы токов в первичной и вторичной цепях обратно пропорциональны числу витков в первичной и вторичной обмотках.

Всякий трансформатор, работающий как повышающий, может быть использован и как *понижающий трансформатор*, для чего нужно первич-

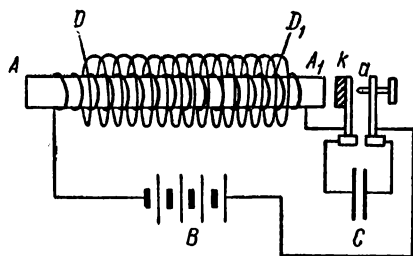


Рис. 317. Индукционная катушка.

ный ток пускать через более тонкую обмотку с большим числом витков. Тогда в другой обмотке возникает такой ток, что сила тока будет больше, а э.д.с. меньше, чем в первой обмотке. Обычно ток высокого „напряжения“, переданный по проводам от станции, у потребителя снова понижается с помощью понижающего трансформатора до более низкого „напряжения“.

Кроме указанных технических применений, трансформаторы находят широкое применение в лабораторной технике (как повышающие, так и понижающие). В зависимости от предъявляемых требований, лабораторным трансформаторам придают весьма различную конструкцию. Для получения высоких э.д.с., при небольших мощностях, пользуются так называемой *индукционной катушкой*. Она состоит из двух цилиндрических соленоидов, надетых на общий железный незамкнутый сердечник (рис. 317). Первичной обмоткой является обмотка внутреннего соленоида  $AA_1$ , делаемая из сравнительно небольшого числа витков толстой проволоки. Вторичной обмоткой служит обмотка внешнего соленоида  $DD_1$ , делаемая из весьма большого числа витков очень тонкой проволоки. Обычно первичную обмотку питают от источника постоянного тока, например от батареи аккумуляторов  $B$ . Для того чтобы первичная обмотка создавала переменное магнитное поле, ток в ней периодически прерывают и замыкают. Замыкание и размыкание производится с помощью автоматического прерывателя той или иной конструкции. Простейшим прерывателем является *молоточек*, который состоит из пружинки с железной насадкой  $k$  (рис. 317). Когда ток начинает идти по первичной обмотке, сердечник катушки намагничивается и притягивает к себе пружинку. В результате цепь размыкается в месте контакта между пружинкой  $k$  и штифтом  $a$ . Чтобы при разрыве контакта не образовывалась интенсивная искра, между  $k$  и  $a$  включается конденсатор  $C$ . Тогда ток от батареи  $B$  при разрыве цепи идет на зарядку конденсатора, и искра не образуется.

Ток в первичной обмотке, прерываемый молоточком или другим механическим приспособлением, не является синусоидальным переменным током. Кривая зависимости его силы от времени изображена на рис. 318а. После замыкания цепи он возрастает сравнительно медленно, что обусловлено явлением самоиндукции, а при разрыве цепи падает быстро. Так как э.д.с. во вторичной цепи пропорциональна скорости изменения силы тока в пер-

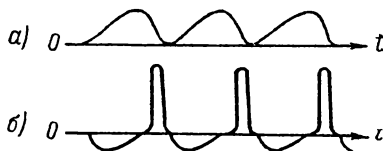


Рис. 318. Кривая зависимости силы тока от времени в индукционной катушке:  $a$  — в первичной обмотке,  $b$  — во вторичной обмотке.

вичной цепи со временем  $dI_1/dt$  (см. § 226), то в моменты размыкания она будет достигать гораздо больших значений, чем в моменты замыкания. Зависимость э. д. с. во вторичной цепи от времени изображена на рис. 318б. Отрицательное значение э. д. с. указывает, что возникающий под ее влиянием во вторичной обмотке ток имеет направление, обратное по отношению к току в первичной обмотке; положительное — что ток во вторичной обмотке направлен в ту же сторону, что и в первичной обмотке.

Если вторичную обмотку замкнуть накоротко, то в ней пойдет переменный ток несимметричной формы, но количества электричества, переносимые в обоих направлениях, будут одинаковы. Если же во вторичной цепи оставить значительный искровой промежуток, то э. д. с., возникающая при замыкании, может оказаться недостаточной, чтобы повести к пробое; тогда искра возникает лишь при размыканиях первичной цепи, и во вторичной цепи будет идти прерывистый ток, но каждый раз одного направления.

**§ 237. Выпрямление и измерение переменных токов.** Благодаря удобству генерирования и передачи переменные токи получили исключительно широкое техническое применение. Однако для потребления во многих случаях нужен постоянный ток, поэтому современная техника пользуется различными приемами *выпрямления* переменного тока.

Выпрямление тока может осуществляться различными способами, например, с помощью твердых полупроводниковых выпрямителей или электролитических выпрямителей (§ 178). Контакт между двумя полупроводниками или полупроводником и металлом, как было сказано в § 171, обладает очень различным сопротивлением в зависимости от направления тока. Поэтому в одном направлении ток проходит через контакт без заметного ослабления, в другом же направлении может пройти лишь очень слабый ток. В современной технике полупроводниковые выпрямители получили широкое распространение. В качестве примера можно указать на *германиевый выпрямитель*, состоящий из германиевой пластинки, к которой с одной стороны приварен шарик из индия, а с другой — из олова. Вблизи индиевого электрода возникает „дырочная“ проводимость, а дальше образуется область выпрямляющего  $p-n$ -перехода. Такой выпрямитель способен пропускать ток до сотни ампер на  $1\text{ см}^2$  контакта. В качестве другого полупроводникового выпрямителя укажем на *селеновый выпрямитель*, состоящий из тонкого слоя селена между двумя металлическими дисками.

Вместо твердых выпрямителей можно употреблять *кеноны*, которые также обладают тем свойством, что ток может идти в них в одном направлении, а именно — от анода к горячему катоду. Наконец, имеют большое распространение так называемые *ртутные выпрямители*. Они представляют собой разрядные трубки, в которых разряд происходит в парах ртути между поверхностью жидкой ртути и графитовым электродом; при этом разогревающаяся поверхность ртути преимущественно играет роль катода. В результате разряд зажигается каждый раз, когда ртуть является катодом, а графит анодом, и гаснет при обратном направлении тока. При включении твердого или иного выпрямителя в цепь переменного тока (рис. 319) в участке цепи  $ab$  пойдет ток одного направления. Однако сила этого тока, очевидно, не будет постоянной, а будет меняться со временем.

На рис. 320а показано изменение со временем силы синусоидального переменного тока, а на рис. 320б — тока, пропущенного через выпрямитель. Пользуясь трансформатором и двумя выпрямителями, можно использовать и „вторую половину“ переменного тока.

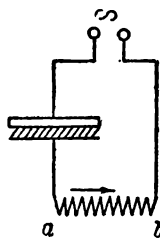


Рис. 319. Включение твердого выпрямителя в цепь переменного тока.

На рис. 321  $A_1$  представляет собой первичную обмотку трансформатора, включенного в цепь переменного тока,  $A_2$  — его вторичную обмотку. Два выпрямителя 1 и 2 присоединены к концам вторичной обмотки. От средней части вторичной обмотки сделан отвод  $ba$ . Тогда в одну половину периода работает часть  $C_1b$  вторичной обмотки, и ток проходит через выпрямитель 1. Во вторую половину периода работает часть обмотки  $C_2b$ , и ток проходит через выпрямитель 2. В участке цепи  $ab$  ток идет все

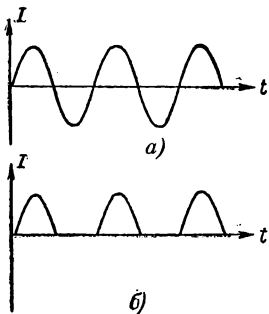


Рис. 320. Изменение со временем силы:  $a$  — переменного тока;  $б$  — тока, пропущенного через выпрямитель.

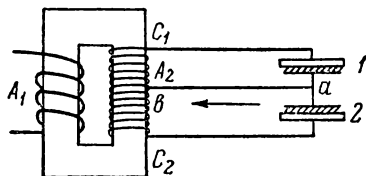


Рис. 321. Схема включения двух выпрямителей во вторичную обмотку трансформатора со средней точкой.

время одного направления. На рис. 322а снова представлен синусоидальный переменный ток, а на рис. 322б — ток, выпрямленный по описанной схеме. Колебания в его силе могут быть еще сглажены с помощью самоиндукции или емкости.

Для измерения переменных токов непригодны магнитоэлектрические приборы с подвижной рамкой, так как направление поворота рамки меняется с изменением направления тока. Как мы указывали в § 233, переменные токи могут измеряться с помощью тепловых приборов.

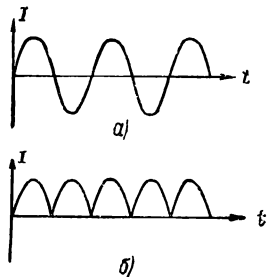


Рис. 322. Изменение со временем силы:  $a$  — переменного тока;  $б$  — тока, выпрямленного по схеме рис. 321.

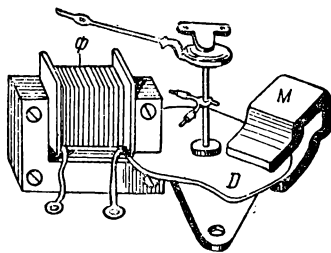


Рис. 323. Схема индукционного амперметра.

Для измерения переменных токов пригодны электродинамические приборы с двумя катушками и электромагнитные приборы, в которых в катушку втягивается кусок железа. В последних приборах втягиваемый стержень должен изготавливаться из сорта железа, обладающего возможно малым гистерезисом.

Кроме того, переменные токи могут измеряться с помощью так называемых индукционных (электродинамических) приборов. Принцип действия этих приборов следующий (рис. 323): переменный ток, сила которого измеряется, проходит по обмотке  $\Phi$  электромагнита и возбуждает между его полюсами переменное магнитное поле. Подвижная часть прибора  $D$  представляет собою пластинку, расположенную по отношению к этому переменному магнитному полю так, что она лишь частично экранирует поле. В пластинке возникают индукционные токи Фуко, на которые магнитное поле действует с силами, стремящимися выдвинуть пластинку из пределов поля. В результате пластинка поворачивается и поворачивает соединенную с ней стрелку. Постоянный магнит  $M$  служит для успокоения колебаний пластинки.

Наконец, переменные токи можно измерять и с помощью магнитоэлектрических приборов с подвижной рамкой, если к ним добавить выпрямители. Для этой цели обычно применяются твердые выпрямители (купроксы). На рис. 324 представлена схема включения амперметра  $A$  в цепь переменного тока с помощью четырех купроков  $a, b, c, d$ , обеспечивающих прохождение тока через амперметр  $A$  в одном направлении. Сопротивление  $R$  и самоиндукция  $L$  играют роль шунта.

**§ 238. Трехфазный ток.** Наряду с рассмотренным нами простым синусоидальным переменным током, в технике широко используется так называемый *трехфазный ток*. Трехфазным током называется ток, возникающий в разветвленной сети проводников с тремя переменными э. д. с., фазы которых отличаются одна от другой на  $\frac{2}{3}\pi$  (или, в градусной мере, на  $120^\circ$ ). Рассмотрим сперва три замкнутые несвязанные цепи  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$  и  $A_3B_3C_3D_3$  (рис. 325). Пусть э. д. с.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3}\pi \right)\end{aligned}$$

индуцируется соответственно в участках цепей  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$  и  $A_3D_3$ . Предположим, что в рассматриваемых цепях отсутствуют самоиндукции и что в каждой из них включены равные омические сопротивления  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .

Тогда, по сказанному в § 232, в этих цепях возникнут токи соответ-

$$\begin{aligned}I_1 &= I_0 \sin \omega t, \\ I_2 &= I_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \\ I_3 &= I_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3}\pi \right),\end{aligned}$$

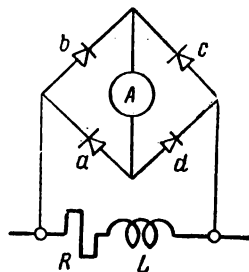


Рис. 324. Включение выпрямителей для измерения силы переменного тока.

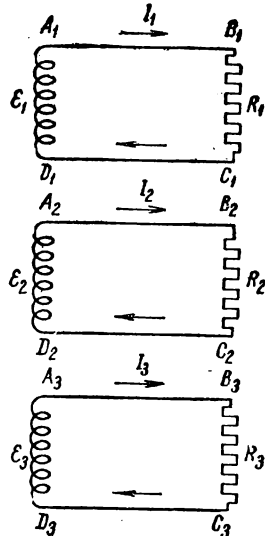


Рис. 325. Схема возбуждения трехфазного тока.

где общая амплитуда токов  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ . Соединим точки  $D_1, D_2$  и  $D_3$  трех цепей вместе. Тогда их потенциалы станут равными; потенциалы соответственных точек  $C_1, C_2$  и  $C_3$  также окажутся равными и их тоже можно соединить вместе, не меняя текущих по сопротивлениям токов  $I_1, I_2$  и  $I_3$ . При таком соединении провода  $D_1C_1, D_2C_2$  и  $D_3C_3$  могут быть заменены одним проводом  $F$ , и мы получим цепь, изображенную на рис. 326. По проводу  $F$ ,

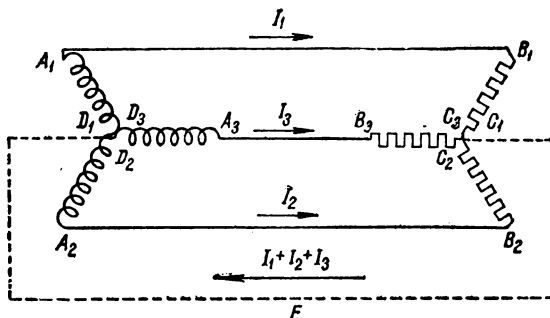


Рис. 326. Схема соединения звездой.

очевидно, потечет ток, равный сумме токов  $I_1 + I_2 + I_3$ . Легко видеть, что этот суммарный ток все время равен нулю.

Действительно:

$$I_1 + I_2 = I_0 \sin \omega t + I_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{1}{3} \pi \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= I_0 \sin \left( \omega t + \frac{1}{3} \pi \right) + I_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) = \\ &= 2I_0 \sin \left( \omega t + \frac{5}{6} \pi \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить путем графического сложения трех векторов амплитуд  $I_0$ , которые образуют замкнутую ломаную в виде равно-стороннего треугольника.

Так как суммарная сила токов  $I_1 + I_2 + I_3$  все время равна нулю, то провод  $F$  является лишним и его можно убрать. В результате оказывается, что три переменных тока  $I_1, I_2, I_3$ , сдвинутые друг по отношению к другу по фазе на  $120^\circ$ , можно передавать от места генерирования к сопротивлениям  $R_1, R_2, R_3$  по трем проводам, вместо трех пар проводов, которые потребовались бы при несвязанных цепях. Рассмотренная цепь трехфазного тока называется цепью, соединенной по *схеме звезды*.

Три независимые цепи, представленные на рис. 325, можно соединить по другой схеме, называемой *схемой треугольника* (рис. 327).

В этой схеме соединены вместе точки  $A_1D_3, A_2D_1, A_3D_2$  и  $B_1C_3, B_2C_1, B_3C_2$ . Такая схема также позволяет заменить три пары проводов тремя проводами без изменения токов, текущих по сопротивлениям  $R_1, R_2, R_3$ .

Равенство нулю суммы токов  $I_1 + I_2 + I_3$  имеет место лишь при равенстве сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$ . Если сопротивления не равны друг другу, то суммарный ток  $I_1 + I_2 + I_3$ , при условии неизменности разности фаз между ними, окажется отличным от нуля. В действительности же, так как

точки  $C_1, C_2, C_3$  (в схеме звезды) соединены, то они образуют узловую точку, для которой по закону Кирхгофа сумма притекающих и оттекающих токов должна равняться нулю. Таким образом, фактически и при неравенстве сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  сумма токов  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ . Это происходит за счет возникновения добавочных разностей фаз между точками  $B_1, B_2, B_3$ .

Удобство использования трехфазных токов заключается в том, что они позволяют создать так называемое вращающееся магнитное поле.

Рассмотрим кольцевую магнитную цепь с тремя парами полюсных наконечников, изображенную на рис. 328. Каждая пара полюсных наконечников создает свое магнитное поле, векторы напряженности которых  $H_1, H_2$  и  $H_3$  будут направлены по соответствующим

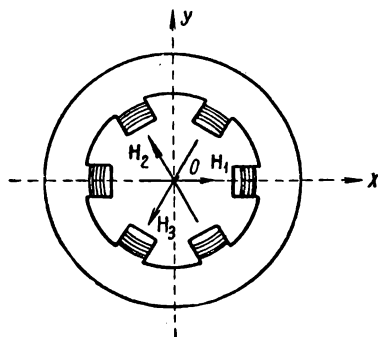


Рис. 328. Кольцевая магнитная цепь.

$$H_x = H_0 \sin \omega t + H_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \cos \frac{2}{3} \pi + H_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \cos \frac{4}{3} \pi,$$

$$H_y = H_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \sin \frac{2}{3} \pi + H_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \sin \frac{4}{3} \pi.$$

После соответственных преобразований найдем:

$$H_x = \frac{3}{2} H_0 \sin \omega t, \quad H_y = \frac{3}{2} H_0 \cos \omega t.$$

По сказанному в т. I, эти две составляющие определяют вектор  $\mathbf{H}$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в направлении часовой стрелки.

Вращающееся магнитное поле действует на проводник, расположенный в нем, с некоторой механической силой, так как в проводнике возникают индукционные токи, на которые магнитное поле и действует. Например, если во вращающееся магнитное поле поместить рамку с замкнутой обмоткой на оси, перпендикулярной направлению поля, то рамка придет во вра-

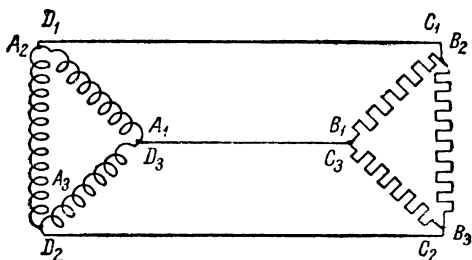


Рис. 327. Схема соединения треугольником.

будут направлены по соответствующим парам наконечников имеет обмотки, питаемые составляющими трехфазного тока. Тогда, если пренебречь явлениями гистерезиса в материале кольца, то получится, что напряженности магнитных полей  $H_1, H_2$  и  $H_3$  будут меняться со временем по закону:

$$H_1 = H_0 \sin \omega t,$$

$$H_2 = H_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$H_3 = H_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right).$$

Проведем координатные оси  $OXY$ , как показано на рис. 328, и найдем сумму проекций  $H_1, H_2, H_3$  на каждую из осей:



щение в направлении вращения вектора напряженности магнитного поля. Это позволяет осуществлять электромоторы, питаемые трехфазным переменным током. Впервые передача энергии с помощью трехфазного тока и использование электромотора с вращающимся магнитным полем были осуществлены русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1891 г. В настоящее время большинство электромоторов, используемых в технике, построено на принципе вращающегося поля.

---

## ГЛАВА XXI

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**§ 239. Колебательный разряд конденсатора.** Представим себе конденсатор  $C$  (рис. 329), обкладки которого замкнуты через самоиндукцию  $L$  и сопротивление  $R$ . Пусть в некоторый момент обкладкам конденсатора сообщена разность потенциалов  $V$ , после чего источник этой разности потенциалов снова отключен. При отсутствии самоиндукции по проводу, соединяющему обкладки конденсатора, потек бы ток, который продолжался бы до тех пор, пока потенциалы обкладок не выравнялись. При наличии же самоиндукции процесс пойдет иначе. В момент, когда потенциалы обкладок выравниваются, э.д.с. самоиндукции поддержит спадающий ток, и произойдет перезарядка обкладок. После этого снова возникает ток, но уже обратного направления, в результате перезарядки обкладок будет происходить периодически — в цепи из емкости и самоиндукции возникнут колебания. Так

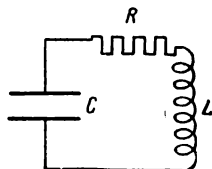


Рис. 329. Колебательный контур с емкостью  $C$ , омическим сопротивлением  $R$  и самоиндукцией  $L$ .

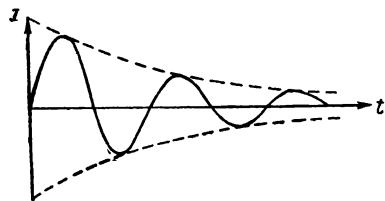


Рис. 330. Затухающие колебания.

как часть энергии тока тратится на выделение лэнц-джоулевого тепла в сопротивлении  $R$ , то колебания понемногу затухнут. Общий характер колебаний представлен на рис. 330. Затухание тем слабее, чем меньше сопротивление  $R$ ; в пределе при сопротивлении  $R = 0$  колебания должны превратиться в незатухающие.

Как будет показано ниже, разряд принимает колебательный характер при условии, что выполнено следующее неравенство:

$$L > \frac{CR^2}{4}. \quad (1)$$

Если значение коэффициента самоиндукции меньше значения, определяемого неравенством (1), то э.д.с. самоиндукции оказывается

недостаточной, чтобы вызвать перезарядку обкладок конденсатора: разряд становится аperiodическим.

При малом сопротивлении  $R$  период  $T$  колебательного разряда определяется формулой (вывод формулы см. ниже):

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (2)$$

Таким образом, чем меньше самоиндукция и емкость, тем меньше период, т. е. тем больше частота электрических колебаний. Обычно период электрических колебаний очень мал. Если мы возьмем даже сравнительно очень большие емкость и самоиндукцию, например  $C = 1 \text{ мкф}$ ,  $L = 1 \text{ гн}$ , то получим (приняв во внимание, что  $1 \text{ мкф} = 10^{-6} \text{ ф}$ ):

$$T = 2\pi \sqrt{10^{-6} \cdot 1} \text{ сек} \cong 0,0063 \text{ сек}.$$

Рассмотренные электрические колебания аналогичны механическим колебаниям, например колебаниям маятника. Отклоненный маятник по инерции проходит через положение равновесия, отклоняется в противоположную сторону и продолжает совершать колебательные движения, понемногу затухающие благодаря наличию сил трения.

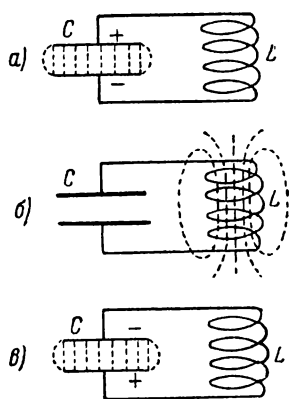


Рис. 331. Возникновение попеременно электрического и магнитного полей при периодическом разряде конденсатора.

Из этого сравнения видно, что самоиндукция играет роль инерции, омическое сопротивление — роль механического сопротивления. Аналогия делается еще более глубокой, если перейти к энергетическим соотношениям. При колебаниях маятника потенциальная энергия отклоненного маятника переходит в кинетическую энергию движения, которая, в свою очередь, после прохождения маятником положения равновесия, переходит в потенциальную, и обратно. При зарядке конденсатора системе сообщается запас электрической (потенциальной) энергии. На рис. 331а линии, соединяющие обкладки конденсатора, изображают наличие между обкладками электрического поля. При разряде конденсатора возникает электрический ток, возбуждающий в соленоиде (самоиндукции) магнитное поле с его запасом энергии, аналогичной кинетической энергии движущегося маятника. На рис. 331б наличие магнитного поля внутри витков самоиндукции представлено пунктирными линиями. Далее происходит перезарядка конденсатора (рис. 331в) — „кинетическая“ энергия тока переходит в потенциальную энергию электрического поля конденсатора и т. д.

Рассмотрим более детально характер колебательного разряда конденсатора. Обозначим через  $Q$  заряд, сообщенный одной из обкладок конденсатора. Тогда сила тока в цепи будет численно равна изменению этого заряда за единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3)$$

Обозначим через  $V$  разность потенциалов на обкладках конденсатора в данный момент. Тогда полное падение потенциала в рассматриваемой цепи будет  $IR + V$ ; оно должно равняться э. д. с., действующей в цепи. Но в цепи действует лишь э. д. с. самоиндукции —  $L \frac{dI}{dt}$ , откуда:

$$IR + V = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора может быть выражена обычным способом через емкость конденсатора и заряд его обкладок:  $V = \frac{Q}{C}$ ; очевидно, что и заряд  $Q$  и разность потенциалов  $V$  будут величинами переменными. Подставляя это выражение для  $V$  в формулу (4) и пользуясь соотношением (3), получим:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0; \quad (5)$$

это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, решая которое мы сможем найти зависимость  $Q$  от времени. Решение такого уравнения было дано в т. I, при рассмотрении упругих затухающих колебаний материальной точки; воспроизводим его здесь еще раз. Перепишем соотношение (5), введя обозначения:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{CL} = \omega_0^2. \quad (6)$$

Тогда получим:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (5a)$$

Ищем решение уравнения (5a), введя новую переменную подстановкой:

$$Q = ze^{-\beta t}. \quad (7)$$

Дифференцированием по времени получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - \beta z e^{-\beta t}; \\ \frac{d^2Q}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 z e^{-\beta t}; \end{aligned}$$

подставляя эти значения  $Q$ ,  $dQ/dt$  и  $d^2Q/dt^2$  в уравнение (5а) и сокращая на общий множитель  $e^{-\beta t}$ , имеем:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z = 0.$$

Это уравнение, как легко проверить подстановкой, имеет для случая  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$  решение в виде:

$$z = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad (8)$$

$A$  и  $\varphi$  — постоянные, которые могут быть определены из начальных условий. Следовательно, по (7), для  $Q$  имеет место решение:

$$Q = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

Это решение представляет собой затухающее колебание. Величина  $A \cdot e^{-\beta t}$  выражает амплитуду, убывающую со временем по экспоненциальному закону; чем больше  $\beta$ , тем быстрее убывает амплитуда. Так как, по (6),  $\beta = \frac{R}{2L}$ , то затухание колебаний происходит тем быстрее, чем больше омическое сопротивление  $R$  и чем меньше самоиндукция. Период колебаний  $T$ , по (8), равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Подставляя сюда вместо  $\omega_0$  и  $\beta$  их значения по (6), получим:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \quad (8a)$$

Если омическое сопротивление цепи  $R$  очень мало, а коэффициент самоиндукции  $L$  не мал, то мы будем иметь случай весьма медленно затухающих колебаний, при этом в формуле (8a) в знаменателе можно пренебречь  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2$  по сравнению с  $\frac{1}{LC}$  и тогда для периода таких медленно затухающих колебаний получим:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (8б)$$

что и представляет собой формулу (2), приведенную в начале настоящего параграфа.

Сравнивая формулы (8a) и (8б), видим, что наличие сопротивления в цепи ведет к увеличению периода колебаний  $T$ .

Если сопротивление цепи или емкость конденсатора настолько велики, что:

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < 0, \quad \text{или} \quad L < \frac{CR^2}{4},$$

то решение (9) не имеет места, и мы получаем *апериодический* разряд, при котором не возникает электрических колебаний в цепи; этот случай нас в дальнейшем интересоваться не будет.

Колебательный процесс мы разобрали, характеризуя его зарядом  $Q$ , находящимся в каждый данный момент на обкладке конденсатора. В соответствии с формулой (9) величина этого заряда совершает колебания, меняя периодически знак и постепенно уменьшаясь. В конце концов заряд пропадает в результате того, что равные и противоположные заряды  $+Q$  и  $-Q$ , первоначально сообщенные обкладкам конденсатора, компенсируют друг друга. Очевидно, кроме заряда  $Q$ , системе можно характеризовать либо разностью потенциалов  $V$  на обкладках конденсатора, либо силой тока  $I$ , текущего в цепи.

В силу соотношения  $V = \frac{Q}{C}$  получим:

$$V = \frac{A}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

Таким образом, разность потенциалов также совершает затухающие колебания с тем же периодом  $T$ . Значение для силы тока найдем по (3), откуда:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi). \quad (11)$$

При отсутствии затухания  $\beta = 0$ , и тогда

$$I = -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \quad (11a)$$

Разность потенциалов  $V$  при этом:

$$V = \frac{A}{C} \cos(\omega t - \varphi). \quad (10a)$$

Таким образом, при отсутствии затуханий колебания силы тока и разности потенциалов сдвинуты по фазе относительно друг друга на  $\pi/2$ .

**§ 240. Вынужденные электрические колебания.** Рассмотренный нами в предыдущем параграфе колебательный разряд конденсатора аналогичен колебаниям маятника, который первоначально выводится из положения равновесия, а затем совершает затухающие колебания с собственным периодом колебаний. Однако маятник, как и всякая другая механическая упругая система, может совершать также и вынужденные колебания под влиянием внешней вынуждающей периодической силы. При этом имеет место характерное явление резонанса (см. т. I, § 103): амплитуда вынужденных колебаний становится особенно большой при некотором определенном значении частоты вынуждающей силы. Эта частота, называемая *резонансной*, при слабом затухании практически совпадает с частотой собственных колебаний системы.

Воздействуя на колеблющуюся систему внешней силой, можно непрерывно поддерживать колебания системы с неизменной амплитудой, т. е. получить незатухающие колебания. Примером может служить анкерный механизм маятниковых часов, который, периодически подталкивая маятник, заставляет его совершать незатухающие колебания. В этих случаях работа против сил трения непрерывно совершается за счет энергии внешнего источника.

Совершенно аналогично, подводя к контуру из емкости, сопротивления и самоиндукции внешнюю периодически меняющуюся э. д. с.,

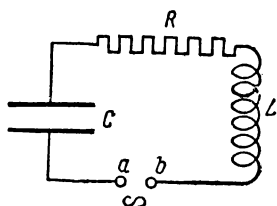


Рис. 332. Возбуждение вынужденных колебаний в цепи из емкости  $C$ , омического сопротивления  $R$  и самоиндукции  $L$ .

можно возбудить в контуре вынужденные электрические колебания. Пусть колебательный контур из емкости  $C$ , самоиндукции  $L$  и омического сопротивления  $R$  прерван в некотором месте, и к образовавшимся свободным концам  $a$  и  $b$  (рис. 332) подведены провода от источника внешней э. д. с.  $\mathcal{E}$ . Если мы положим, что вынуждающая э. д. с. является чисто периодической, т. е. меняется со временем по закону:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

то приходим к случаю, уже рассмотренному нами в § 234. Теперь рассмотрим результаты, полученные в § 234, с несколько иной точки зрения. В нашей цепи [см. формулу (5) § 234] будет циркулировать ток  $I$  той же частоты  $\omega$ , что и частота вынуждающей э. д. с.  $\mathcal{E}$ :

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (2)$$

Решение (2) представляет собой частное решение дифференциального уравнения, которому удовлетворяет сила тока  $I$  в рассматриваемом случае. Полное решение содержит еще член вида  $I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ ; однако этот член представляет собой затухающие колебания, которые практически скоро прекратятся, и тогда зависимость силы тока от времени выразится полностью формулой (2). При непрерывно действующей периодической вынуждающей силе (1) колебания силы тока  $I$ , по (2), будут продолжаться сколь угодно долго, т. е. система будет совершать незатухающие вынужденные колебания с частотой  $\omega$ . По формуле (9) § 234 амплитуда  $I_0$  этого тока равна:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}; \quad (3)$$

она достигает максимума при резонансной частоте:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (4)$$

Период собственных колебаний контура, по формуле (8а) § 239, равен:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

откуда видно, что резонанс наступает при частоте  $\omega_{\text{рез}}$  несколько большей, чем частота собственных колебаний  $\omega_0$ . При бесконечно малом омическом сопротивлении резонансная частота совпадает с частотой собственных колебаний.

При резонансной частоте амплитуда силы тока  $I_0$  принимает значение:  $I_{0\text{max}} = \mathcal{E}_0/R$ ; она тем больше, чем меньше омическое сопротивление  $R$ .

На рис. 333 приведено несколько резонансных кривых, соответствующих различным значениям омического сопротивления  $R$ . Чем меньше сопротивление  $R$ , тем острее максимум кривой. Таким образом, контур с малым затуханием дает острый резонанс. Это позволяет, в случае сложного характера вынуждающей э. д. с., „настраивать“ такой контур на отдельные гармонические составляющие э. д. с.

В самом деле, пусть вынуждающая э. д. с. может быть представлена в виде суммы синусоид:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + \mathcal{E}_{02} \sin(\omega_2 t - \varphi_2) + \mathcal{E}_{03} \sin(\omega_3 t - \varphi_3) + \dots$$

Подбирая емкость  $C$  и самоиндукцию  $L$  контура так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1,$$

получим, что условие резонанса будет выполнено для составляющей  $\mathcal{E}_{01} \sin(\omega_1 t - \varphi_1)$ ; обусловленные ею вынужденные колебания контура будут происходить с наибольшей амплитудой. Амплитуды вынужденных колебаний с частотами  $\omega_2, \omega_3, \dots$  будут малые, так как условия резонанса для них не выполнены. Меняя непрерывно емкость или самоиндукцию контура, можно заставить его последовательно „отзываться“ на все частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Таким образом возможно произвести гармонический анализ сложного колебания.

Кроме схемы, указанной на рис. 332, для получения незатухающих электрических колебаний можно воспользоваться также схемой, изображенной на рис. 334. Здесь мы снова имеем контур из емкости  $C$  и самоиндукции  $L$ . Омическое сопротивление  $R$  всей цепи для простоты положим равным нулю. Внешняя э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  подведена

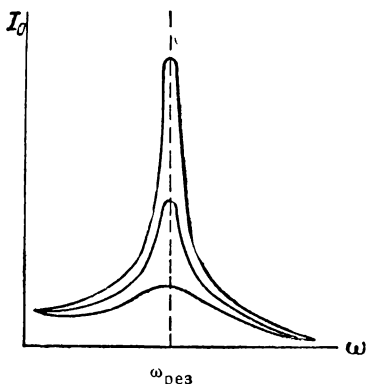


Рис. 333. Резонансные кривые силы тока  $I$ .



к точкам  $a$  и  $b$  контура. Таким образом, в этом случае между точками  $a$  и  $b$  цепь разветвляется: она состоит из двух параллельно соединенных участков. Один из этих участков содержит емкость  $C$ , другой — самоиндукцию  $L$ . Силу тока в каждом из этих участков

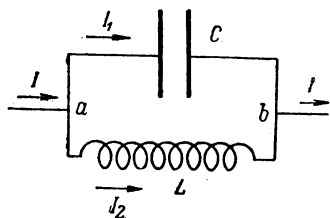


Рис. 334. Цепь из параллельно соединенных емкости  $C$  и самоиндукции  $L$ .

снова получим с помощью формул, выведенных в § 234, соответственно положив в них либо  $C = \infty$ , либо  $L = 0$ .

По формуле (5) § 234, в ветви  $aCb$  потечет ток

$$I_1 = I_{01} \sin(\omega t - \varphi_1). \quad (5)$$

Амплитуду  $I_{01}$  этого тока получим, положив в формуле (9) (на стр. 441)  $L = 0$  и  $R = 0$ , откуда:

$$I_{01} = \mathcal{E}_0 C \omega. \quad (6)$$

Начальная фаза  $\varphi_1$  этого тока по формуле (8) § 234 определится равенством:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty,$$

откуда

$$\varphi = (2k + \frac{3}{2})\pi, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots$$

По ветви  $aLb$  потечет ток:

$$I_2 = I_{02} \sin(\omega t - \varphi_2), \quad (7)$$

амплитуду которого получим по формуле (9) § 234, положив в ней  $C = \infty$  и  $R = 0$ , откуда:

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega}. \quad (8)$$

Начальная фаза  $\varphi_2$  определится равенством

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = +\infty, \quad \text{откуда } \varphi_2 = (2k + \frac{1}{2})\pi.$$

Таким образом, разность фаз токов в ветвях  $aCb$  и  $aLb$  равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т. е. фазы этих токов противоположны, и в проводах, подходящих к точкам  $a$  и  $b$ , течет ток с амплитудой

$$I_0 = I_{01} - I_{02}.$$

Подставляя сюда вместо  $I_{01}$  и  $I_{02}$  их значения по (6) и (8), получим:

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right). \quad (9)$$

Таким образом, ток в подводящих проводах слабее, чем токи в отдельных ветвях контура. Он равен нулю при

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0,$$

или при условии, что частота вынуждающей э. д. с. равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

т. е. как раз при условии резонанса. Равенство нулю этого тока получилось потому, что мы положили омическое сопротивление контура равным нулю, тогда для поддержания в нем колебаний не требуется никакого подвода энергии извне. При наличии омического сопротивления  $R$  разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  не будет равна  $\pi$ ; в соответствии с этим амплитуда тока  $I_0$  и при условии резонанса окажется отличной от нуля. Подводимая к контуру энергия пойдет на поддержание в нем незатухающих колебаний. Эта энергия тем меньше, чем меньше сопротивление  $R$ .

Так как при остром резонансе ток в подводящих проводах значительно слабее, чем токи, циркулирующие в самом контуре, то рассмотренное явление носит название *резонанса токов*.

### § 241. Возбуждение незатухающих колебаний с помощью катодной лампы.

Для создания переменной э. д. с., способной поддерживать *незатухающие колебания* в контуре, в настоящее время широко используются *катодные лампы*. Как мы видели в § 172, катодная лампа представляет собой откачанный сосуд, в который введены

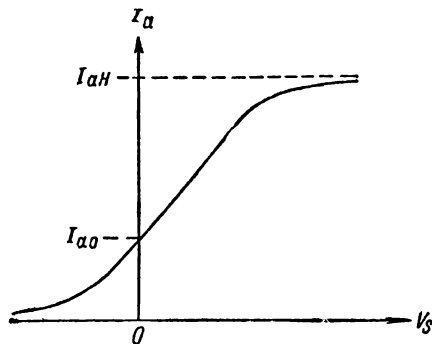


Рис. 336. Зависимость анодного тока  $I_a$  от сеточного напряжения  $V_s$ .

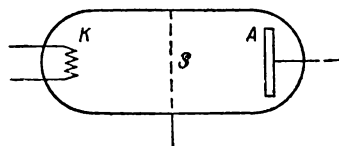


Рис. 335. Трехэлектродная лампа (триод).

два электрода: накаляемый катод  $K$  и анод  $A$ . Катод  $K$  испускает электроны, которые под влиянием ускоряющего поля летят по направлению к аноду, образуя электронный ток. Такая лампа называется *двухэлектродной*, или *диодом*. Для генерирования незатухающих колебаний употребляется обычно *трехэлектродная лампа*, или *триод*. Она состоит из катода  $K$ , анода  $A$  и введенной между ними сетки  $S$  (рис. 335). Электроны, вылетевшие из катода, могут пролетать через просветы сетки и таким образом достигать анода.

Если при заданной разности потенциалов между катодом  $K$  и анодом  $A$  приложить к сетке потенциал, задерживающий электроны, вылетающие из катода, то ток, достигающий анода („анодный ток“), ослабнет. Наоборот, если приложить потенциал, ускоряющий электроны, анодный ток усилится. Таким образом, величина анодного

тока зависит от потенциала сетки. На рис. 336 представлена зависимость силы анодного тока от „сеточного напряжения“  $V_s$ , т. е. от разности потенциалов между катодом  $K$  и сеткой  $S$ . При этом анодное напряжение  $V_a$  (разность потенциалов между катодом  $K$  и анодом  $A$ ) предполагается постоянным. При нулевом сеточном напряжении имеется некоторый анодный ток  $I_{a0}$ , обусловленный данным анодным напряжением  $V_a$ . Нужно приложить определенное задерживающее сеточное напряжение, чтобы анодный ток спал до нуля. При ускоряющем сеточном напряжении анодный ток возрастает и, наконец, достигает значения насыщения  $I_{an}$ . Характеристика анодного тока в средней части имеет линейный вид. В триоде анодный ток сильно меняется при малых изменениях сеточного напряжения. Это объясняется тем, что, из-за близкого расположения сетки к катоду сеточное напряжение создает достаточно большую напряженность поля вблизи катода. Большая часть линий напряженности, начинающихся на аноде, не доходит до катода, кончаясь на сетке. Поэтому анодное напряжение в триоде мало влияет на величину анодного тока. Часть электронов, испускаемых катодом, попадает на сетку и создает таким образом сеточный ток. Однако этот сеточный ток мал по сравнению с анодным током при условии, что площадь про- светов в сетке велика по сравнению

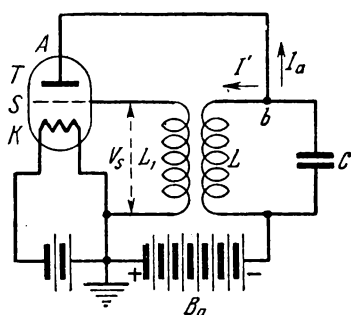


Рис. 337. Возбуждение незатухающих колебаний по схеме с обратной связью.

с площадью, закрываемой проволочками, из которых сделана сетка. Трехэлектродная лампа употребляется как для возбуждения (генерирования) незатухающих колебаний, так и для усиления колебаний.

Схема возбуждения незатухающих колебаний с помощью трехэлектродной лампы представлена на рис. 337. Принцип действия этой схемы аналогичен принципу действия механических автоколебательных систем, например часового маятника, где колебания поддерживаются незатухающими за счет толчков со стороны храпового механизма. Колебания в контуре, без подвода энергии извне, затухают вследствие постепенного излучения энергии, а также частичного перехода энергии в ленц-джоулево тепло из-за наличия омического сопротивления в контуре. В схеме на рис. 337 энергия подводится к контуру  $LC$  с помощью трехэлектродной лампы  $T$  от анодной батареи  $B_a$ .

Сетка лампы  $S$  соединена с катушкой  $L_1$ . Катушка индуктивно связана с самоиндукцией  $L$  колебательного контура  $LS$ . Такая связь носит название *обратной связи*, она-то и обуславливает возбуждение незатухающих колебаний. В самом деле изменение силы тока  $I'$  в колебательном контуре создает э.д.с. в катушке  $L_1$ , которая ведет

к изменению сеточного напряжения  $V_s$ . В результате изменения сеточного напряжения анодный ток, идущий через триод  $T$  от батареи  $B_a$ , будет изменяться с частотой, равной частоте колебаний в контуре  $LC$ . При соответствующем подборе фазы сеточного напряжения эти изменения анодного тока будут поддерживать колебания в колебательном контуре  $LC$ . Таким образом, колебания могут быть сделаны незатухающими за счет энергии, подводимой от батареи  $B_a$ . Можно показать, что при работе триода на среднем прямолинейном участке характеристики колебания, возбуждаемые в колебательном контуре, носят простой синусоидальный характер.

Составим уравнение колебаний схемы, изображенной на рис. 337. При разрядке конденсатора  $C$  возникающий в цепи ток  $I$  разветвляется в точке  $b$  на два: анодный ток  $I_a$  и ток  $I'$ , текущий через катушку. Считая токи квазистационарными (см. § 232), получим для точки  $b$  по первому закону Кирхгофа:

$$I = I' + I_a. \quad (1)$$

Обозначим через  $V$  разность потенциалов на обкладках конденсатора  $C$  и через  $R$  — омическое сопротивление катушки  $L$ ; сопротивлением соединяющих проводов пренебрежем. По второму закону Кирхгофа, сумма падений потенциала в контуре  $LC$ , равная  $R I' + V$ , должна равняться сумме э. д. с., действующих в этом контуре. В контуре  $LC$  действует лишь э. д. с. самоиндукции  $-L \frac{dI'}{dt}$ , откуда:

$$R I' + V = -L \frac{dI'}{dt}. \quad (2)$$

Разность потенциалов  $V$  на обкладках конденсатора в каждый момент связана с зарядом  $Q$  на одной из обкладок соотношением  $V = \frac{Q}{C}$ , где  $C$  — емкость конденсатора. На основании этого уравнение (2) можно переписать в виде:

$$L \frac{dI'}{dt} + R I' + \frac{Q}{C} = 0.$$

Дифференцируя левую часть этого уравнения по  $t$ , получим:

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + R \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Замечая, что  $\frac{dQ}{dt} = I$ , и пользуясь равенством (1), найдем:

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + R \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} (I' + I_a) = 0. \quad (3)$$

Сила анодного тока  $I_a$ , как сказано, зависит от сеточного напряжения  $V_s$ . Эта зависимость изображается кривой, приведенной на рис. 336. В области прямолинейной части графика зависимость эта линейна. Пренебрегая  $I_{a0}$ , мы можем в простейшем случае записать ее в виде:  $I_a = k V_s$ , где  $k$  — постоянная величина. Обозначая через  $L_{12}$  коэффициент взаимной индукции катушек  $L$  и  $L_1$ , получим:

$$V_s = -L_{12} \frac{dI'}{dt}, \quad \text{откуда} \quad I_a = k V_s = -k L_{12} \frac{dI'}{dt}.$$

Подставляя это значение  $I_a$  в уравнение (3), получим:

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + \left( R - \frac{kL_{12}}{C} \right) \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} I' = 0. \quad (4)$$

Множитель при  $dI'/dt$  представляет собой омическое сопротивление  $R$ , уменьшенное на величину  $kL_{12}/C$ . Если подобрать эту величину (меняя коэффициент  $L_{12}$ ) так, чтобы

$$R - \frac{kL_{12}}{C} = 0,$$

то уравнение (4) примет вид:

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + \frac{1}{C} I' = 0. \quad (5)$$

Легко проверить, что решением этого уравнения будет выражение:

$$I' = A \cos \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$

Таким образом, получим, что в контуре  $LC$  совершаются незатухающие колебания с амплитудой  $A$  и циклической частотой  $\omega$ . Получение такого рода незатухающих колебаний возможно при работе триода на линейной части характеристики, так как только в этом случае уравнение (3) переходит в уравнение незатухающих колебаний (5).

В современной радиотехнике используются различные типы ламповых генераторов, которые в основном отличаются друг от друга способами осуществления обратной связи. Эта связь может быть

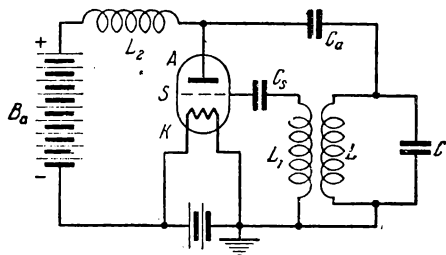


Рис. 338. Возбуждение незатухающих колебаний по схеме с параллельным анодным питанием.

индуктивной (как на рис. 337), емкостной или автотрансформаторной. Кроме того, генераторы бывают с последовательным анодным питанием, когда лампа и колебательный контур соединены последовательно с анодной батареей, и с параллельным питанием, когда лампа и контур подключены к батарее параллельно. Наконец, схемы могут отличаться друг от друга тем, что в них используется одна или две лампы. На рис. 338

приведена схема с индуктивной обратной связью и с параллельным анодным питанием. Конденсатор  $C_a$  включен, чтобы не допускать замыкания анодной батареи через катушку  $L$ ; одновременно он пропускает высокочастотный ток в колебательный контур  $LC$ . Роль индуктивности  $L_2$  заключается в том, что она не пропускает высокочастотные колебания к анодной батарее  $B_a$ .

**§ 242. Ток смещения.** Рассмотрим подробнее процессы, происходящие при прохождении переменного тока по цепи, содержащей конденсатор. В случае постоянного тока, как мы видели, линии тока

всегда замкнуты (§ 156). Не так обстоит дело для переменного тока. В диэлектрике между пластинами конденсатора заряды не могут перемещаться, в результате чего линии тока, подходящие к пластине конденсатора, *обрываются* у ее поверхности. Ток проводимости, текущий по проводнику, соединяющему обкладки конденсатора, оказывается *разомкнутым*.

Пусть в некоторый момент левая обкладка плоского конденсатора А (рис. 339) имеет положительный заряд, расположенный на ее поверхности с плотностью  $+\sigma$ , а правая — отрицательный заряд, расположенный с плотностью  $-\sigma$ . При разряде конденсатора через проводник, соединяющий обкладки, течет ток от левой обкладки к правой. Численное значение плотности этого тока  $i$  внутри обкладки получим, взяв производную по времени от плотности заряда (см. § 155):

$$i = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (1)$$

Ток такой плотности оттекает от левой обкладки А.

Рассмотрим теперь, что происходит в пространстве между пластинами конденсатора. Если ограничиться переменными токами не слишком большой частоты, то можно легко определить изменение электрического поля между обкладками. Действительно, в этом случае мгновенное значение поля внутри конденсатора можно вычислить по мгновенным значениям поверхностных плотностей зарядов. Как следует из § 144, значение вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  между обкладками конденсатора численно равно:

$$D = 4\pi\sigma.$$

Взяв производную по времени от правой и левой частей этого равенства, получим:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

или, обозначив производную по времени от электрической индукции через  $\dot{D}$ :

$$\frac{1}{4\pi} \dot{D} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (2)$$

В рассматриваемом случае вектор  $\dot{\mathbf{D}}$  направлен от обкладки В к обкладке А. Действительно, при разрядке конденсатора поле между

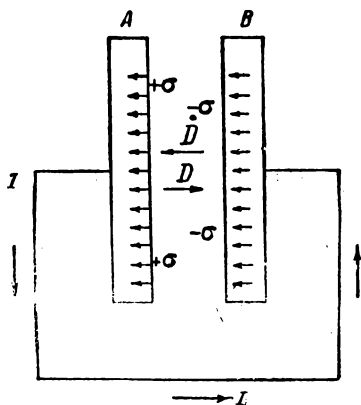


Рис. 339. Возникновение тока смещения между обкладками конденсатора.

его пластинами убывает, откуда следует, что производная по времени  $dD/dt$  отрицательна, т. е. вектор  $\dot{\mathbf{D}}$  направлен в сторону, противоположную вектору  $\mathbf{D}$ . Вектор же электрической индукции  $\mathbf{D}$  направлен между пластинами слева направо. Отсюда приходим к выводу: внутри пластины  $A$  налево направлены линии вектора плотности тока проводимости  $\mathbf{i}$ , в пространстве же между пластинами в том же направлении идут линии вектора  $\dot{\mathbf{D}}$ . По равенствам (1) и (2), численные значения векторов  $\mathbf{i}$  и  $\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$  равны друг другу. Таким образом, линии плотности тока  $\mathbf{i}$  и линии вектора  $\dot{\mathbf{D}}$ , деленного на  $4\pi$ , сменяют друг друга.

Введем обозначение:

$$\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_{\text{см}}. \quad (3)$$

Тогда оказывается: *линии плотности тока проводимости  $\mathbf{i}$  внутри проводящей пластины непрерывно переходят в линии вектора  $\mathbf{i}_{\text{см}}$  между пластинами.* Максвелл, впервые введший в рассмотрение величину  $\mathbf{i}_{\text{см}}$ , назвал ее плотностью *тока смещения*. Название „ток смещения“ возникло в результате потерявшего теперь значение представления, что появление электростатических сил связано с механическими деформациями упругой среды — эфира.

Таким образом, непрерывность линий тока формально оказывается восстановленной, если плотности тока проводимости  $\mathbf{i}$  в проводниках сопоставлять в диэлектриках плотность тока смещения  $\mathbf{i}_{\text{см}}$ , определяемого меняющимся по времени электрическим полем. Однако в действительности дело идет не только о формальной аналогии между током проводимости и током смещения. Дальнейшее развитие учения об электромагнитных явлениях показало, что ток смещения описывает некоторые реальные свойства электромагнитного поля. *Согласно гипотезе, высказанной Максвеллом, ток смещения создает в пространстве, его окружающем, магнитное поле такое же, как и магнитное поле эквивалентного тока проводимости.* Эта гипотеза в настоящее время полностью подтверждена многочисленными опытными проверками вытекающих из нее следствий.

Следует при этом иметь в виду, что ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности образовывать магнитное поле. Во всех других отношениях ток смещения не может быть уподоблен току проводимости; например, при прохождении тока смещения не выделяется лэнц-джоулево тепло.

Наряду с током проводимости и током смещения Максвелл ввел в рассмотрение *полный ток*, плотность  $\mathbf{u}$  которого определяется как геометрическая сумма плотности тока проводимости и плотности тока смещения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{i}_{\text{см}}. \quad (4)$$

*Полный ток*, как можно показать, является всегда замкнутым. В нашем примере в предположении, что частота колебаний не слишком велика, замкнутость полного тока вытекает из следующих простых рассуждений: в проводнике, соединяющем обкладки, полный ток можно считать равным току проводимости; между обкладками полный ток равен току смещения; так как у поверхности обкладок, согласно равенствам (1) и (2), плотности тока смещения и тока проводимости одинаковы и одинаково направлены, то полный ток у поверхностей не терпит изменений.

Строго говоря, ток смещения не равен нулю и внутри проводника. Его величину можно оценить следующим образом:

$$i_{\text{см}} = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\epsilon \dot{E}}{4\pi}.$$

Электрическая напряженность  $E$  для периодического разряда есть периодическая функция времени  $E = E_0 \sin \omega t$ , ее производная по времени  $\dot{E} = E_0 \omega \cos \omega t$ , откуда плотность тока смещения  $i_{\text{см}}$  равна:

$$i_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \epsilon \omega E_0 \cos \omega t.$$

Плотность тока проводимости выражается через напряженность  $E$  по закону Ома:

$$i = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t,$$

где  $\sigma$  — проводимость проводника.

Отношение амплитуд плотностей токов смещения и проводимости:

$$\frac{i_{\text{см}}}{i} = \frac{\omega \epsilon}{4\pi \sigma}.$$

Для металлических проводников  $\sigma$  — величина порядка  $10^{17}$  CGSE; на основании косвенных измерений следует, что диэлектрическая постоянная металлов есть величина не больше 10. Отсюда для  $\omega \cong 10^7$  сек отношение  $\frac{\omega \epsilon}{\sigma} = 10^{-9}$ , откуда видно, что в металлических проводниках током смещения вполне можно пренебречь по сравнению с током проводимости.

**§ 243. Электромагнитное поле.** По приведенной в предыдущем параграфе гипотезе Максвелла ток смещения образует, как и ток проводимости, магнитное поле. Но ток смещения, плотность которого

$$i_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \dot{D},$$

возникает каждый раз, когда отлична от нуля производная от вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  по времени, т. е. когда имеется меняющееся со временем электрическое поле. Таким образом, мы приходим



к следствию: *всякое меняющееся со временем электрическое поле связано с наличием магнитного поля.*

Электростатическое поле, т. е. поле неподвижных друг относительно друга и неизменных по величине электрических зарядов, действует только на электрические заряды; никаких магнитных действий оно не обнаруживает. Но если заряды движутся друг относительно друга или меняются по величине, то меняется и создаваемое ими электрическое поле, и тогда возникают наряду с электрическими и магнитные действия.

В частном случае можно себе представить равномерно возрастающее (или убывающее) электрическое поле, тогда ток смещения был бы постоянен и он создавал бы постоянное магнитное поле. Однако практически переменное электрическое поле всегда имеет переменную производную по времени, т. е. создает переменный ток смещения, откуда следует, что и возникающее магнитное поле тоже переменное по времени. Таким образом, вообще говоря, пространство, заполненное переменным электрическим полем, одновременно заполнено переменным магнитным полем.

Дальнейшие рассуждения показывают, что и переменное магнитное поле, в свою очередь, обуславливает образование электрического поля.

Пусть переменное по времени магнитное поле характеризуется вектором индукции  $\mathbf{B}$  и его производной по времени  $d\mathbf{B}/dt$ , которую мы обозначим через  $\dot{\mathbf{B}}$ . Предположим, что в этом поле находится неподвижный замкнутый проводящий контур. Тогда в силу переменности вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  поток магнитной индукции  $\Phi$  через площадь, ограниченную этим контуром, будет меняться, и в контуре возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_i$ . Величина этой э. д. с.  $\mathcal{E}_i$  по закону Фарадея численно равна производной потока индукции по времени  $d\Phi/dt$ , т. е. в нашем случае (контур неподвижен) определяется производной по времени от вектора индукции  $\dot{\mathbf{B}}$ . Возникновение э. д. с. в проводнике указывает на возникновение в нем электрической силы, заставляющей свободные заряды проводника двигаться в определенном направлении. Следовательно, мы приходим к заключению, что наличие переменного во времени магнитного поля обуславливает возникновение в области расположения проводника электрической силы. Максвелл, обобщая этот результат, высказал положение, что *электрическое поле возникает во всех точках пространства, в которых имеется меняющееся со временем магнитное поле, независимо от того, есть в них проводник или нет.* Согласно представлениям Максвелла, проводник, в котором появляется э. д. с., служит только тем объектом, в котором электрические силы себя проявляют.

Таким образом, мы можем резюмировать: *всякое меняющееся со временем магнитное поле связано с наличием электрического поля.*

Постоянное магнитное поле, т. е. поле постоянных токов, текущих по неподвижным друг относительно друга проводникам, или поле

постоянных неподвижных друг относительно друга магнитов, действует только на токи или магниты; никаких действий на неподвижные электрические заряды оно не оказывает. Но если магнитное поле меняется со временем, тогда возникают наряду с магнитными еще и электрические действия.

Практически мы всегда имеем такие переменные магнитные поля, при которых переменен не только вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , но и его производная по времени  $\dot{\mathbf{B}}$ . Но в этом случае будет возникать и переменное электрическое поле. Отсюда, вообще говоря, пространство, заполненное переменным магнитным полем, одновременно заполнено и переменным электрическим полем.

Оба переменных поля — электрическое и магнитное — неизменно связаны друг с другом и образуют *электромагнитное поле*.

Электромагнитное поле носит *вихревой* характер. Про поле какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  говорят, что оно вихревое, если в нем существуют две таких бесконечно близких точки, в которых вектор  $\mathbf{A}$  имеет противоположные направления. Например, при образовании в жидкости или газе вихрей около оси вихря, по двум противоположным сторонам от оси, движение происходит в противоположных направлениях.

Рассмотрим сперва вихревой характер магнитного поля. Магнитное поле, создаваемое током смещения, рассчитывается по тем же самым формулам, по которым рассчитывается магнитное поле тока проводимости (§ 193), лишь с заменой в них плотности тока проводимости плотностью тока смещения. В магнитном поле токов смещения линии магнитной напряженности имеют тот же вид, что и вблизи аналогичных токов проводимости, т. е. они всегда замкнуты и охватывают линии тока. Пусть в некоторой точке вектор плотности тока смещения изображается стрелкой  $\mathbf{i}_{\text{см}}$  (рис. 340). Магнитные линии напряженности вблизи  $\mathbf{i}_{\text{см}}$  образуют concentric окружности тем меньшего радиуса, чем ближе они к  $\mathbf{i}_{\text{см}}$ . Если в пределе мы перейдем к точкам, расположенным бесконечно близко к вектору  $\mathbf{i}_{\text{см}}$ , то кривизна линий магнитной напряженности будет бесконечно велика, и, следовательно, всегда можно будет найти две такие бесконечно близкие точки, в которых напряженность магнитного поля имеет прямо противоположные направления.

Электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем, тоже носит вихревой характер. Пусть в некоторой точке изменение вектора магнитной индукции со временем изображается стрелкой  $\dot{\mathbf{B}}$

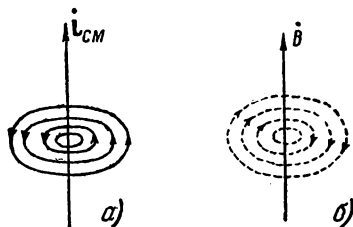


Рис. 340. Возникновение concentric круговых линий магнитной напряженности вокруг вектора плотности тока смещения  $\mathbf{i}_{\text{см}}$  (а) и электрической напряженности вокруг вектора  $\mathbf{B}$  (б).

(рис. 340б). Если мы окружим  $\vec{B}$  проводящим контуром, плоскость которого расположена перпендикулярно к  $\vec{B}$ , то возникающая в этом контуре э.д.с. индукции, по правилу Ленца, будет направлена, как показано на рис. 340, пунктирными стрелками. В каждой данной точке э.д.с. направлена перпендикулярно к нормали, опущенной из данной точки на направление вектора  $\vec{B}$ . По сказанному, возникновение э.д.с. индукции обязано существованию электрического поля, напряженность  $E$  которого в каждой точке направлена так же, как и э.д.с. Следовательно, линии электрической напряженности  $E$  образуют вокруг вектора  $\vec{B}$  concentрические окружности. Для точек, бесконечно близких к вектору  $\vec{B}$ , кривизна окружностей будет бесконечно велика, и, следовательно, будут существовать пары таких соседних точек, в которых векторы электрической напряженности направлены прямо противоположно. Таким образом, *электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем, носит вихревой характер*. Его линии напряженности всегда замкнуты. Этим оно существенно отличается от электростатического поля неподвижных зарядов, линии напряженности которого, как мы это не раз отмечали, не замкнуты: они начинаются на одних зарядах и кончаются на других. Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным (электростатическое поле), так и вихревым (электромагнитное поле). Магнитное поле всегда носит вихревой характер.

В § 129 нами было показано, что математическим выражением потенциального характера электростатического поля является соотношение:

$$\oint E_l dl = 0, \quad (1)$$

где интеграл распространен по замкнутому контуру.

Вихревой характер магнитного поля выражается соотношением § 198:

$$\oint H_l dl = 4\pi I. \quad (2)$$

Этому соотношению может быть придан несколько иной вид. Величина  $I$  представляет собой ток, протекающий через площадь  $S$ , охваченную контуром, вдоль которого берется интеграл  $\oint H_l dl$ . Если мы обозначим через  $i_n$  составляющую плотности тока, нормальную к площади  $S$ , то, очевидно,  $I$  может быть представлено в виде:

$$I = \int_S i_n dS,$$

где интеграл распространен на всю площадь  $S$ . Отсюда выражение (2) принимает вид:

$$\oint H_l dl = 4\pi \int_S i_n dS. \quad (2a)$$

По гипотезе Максвелла в общем случае в правой части соотношения (2а) должна стоять полная плотность тока, складывающаяся как из плотности тока проводимости  $\dot{\mathbf{i}}$ , так и из плотности тока смещения  $\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$ , откуда окончательно:

$$\oint H_l dl = \int_S (4\pi i_n + \dot{D}_n) dS. \quad (3)$$

Если интеграл  $\oint H_l dl$  берется по контуру, охватывающему поверхность, полный ток через которую не равен нулю, то интеграл, стоящий в правой части соотношения (3), не равен нулю и, следовательно,

$$\oint H_l dl \neq 0,$$

что равносильно утверждению, что магнитное поле носит вихревой характер. (Если в некоторой части пространства полный ток равен нулю, то в этой части пространства магнитное поле можно охарактеризовать потенциалом.)

Покажем, что аналогичное соотношение имеет место для вихревого электрического поля. В самом деле, предположим, что в области переменного магнитного поля расположен замкнутый проводящий контур. Тогда по закону индукции Фарадея в этом контуре возникает э. д. с. индукции:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  есть поток магнитной индукции через площадь  $S$ , ограниченную контуром. Обозначая через  $B_n$  составляющую вектора магнитной индукции, нормальную к площади  $S$ , получим:

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

откуда

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS = - \int_S \dot{B}_n dS, \quad (4)$$

где  $\dot{B}_n$  означает производную от  $B_n$  по времени, а интегрирование распространяется на всю площадь  $S$ .

По сказанному выше э. д. с. может быть представлена как циркуляция напряженности, т. е. э. д. с.  $\mathcal{E}_i$  равна:

$$\mathcal{E}_i = \oint E_l dl,$$

где интеграл распространен на весь рассматриваемый контур.

Следовательно, выражение (4) принимает вид:

$$\oint E_l dS = - \int_S \dot{B}_n dS. \quad (5)$$

По гипотезе Максвелла, изложенной в основном тексте этого параграфа, соотношение (5) имеет место независимо от того, имеется ли в рассматриваемом переменном магнитном поле проводящий контур или нет; в

последнем случае интеграл в левой части соотношения (5) берется по любому воображаемому замкнутому контуру.

Соотношение (5) аналогично соотношению (3) и выражает вихревой характер электрического поля возникающего в результате наличия переменного магнитного поля. При отсутствии магнитного поля или при его постоянстве  $\dot{B}_n = 0$ , и выражение (5) переходит в (1); в этом случае электрическое поле  $E$  может возникать только в результате наличия неподвижных и неизменных по величине электрических зарядов, и тогда оно потенциально.

**§ 244. Уравнения Максвелла.** Точный расчет электромагнитных полей производится с помощью уравнений, предложенных Максвеллом и базирующихся на учете указанных идей о природе электромагнитных явлений. Уравнения Максвелла представляют собой дифференциальные уравнения, связывающие производные по координатам и по времени от величин, характеризующих электромагнитное поле. Мы рассмотрим упрощенный расчет, приводящий к уравнениям Максвелла.

Уравнения Максвелла разбиваются на две системы. Первая система связывает пространственные производные проекций вектора магнитной напряженности с проекциями плотностей токов смещения и проводимости. Вторая

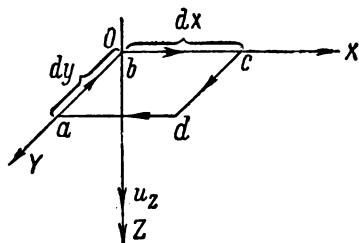


Рис. 341. К определению первой системы уравнений Максвелла.

система уравнений Максвелла связывает пространственные производные проекций вектора электрической напряженности с временными производными проекций вектора магнитной индукции.

Получим сперва первую систему уравнений Максвелла. Пусть в некоторый момент времени в некоторой малой области пространства плотность полного тока изображается вектором  $u$ . Эта плотность складывается из плотности тока проводимости  $i$  и плотности тока смещения  $\frac{1}{4\pi} \dot{D}$ , откуда

$$u = i + \frac{1}{4\pi} \dot{D}. \quad (1)$$

По гипотезе Максвелла оба тока — ток проводимости и ток смещения — играют одинаковую роль в образовании магнитного поля. Для определения магнитного поля, образованного этими токами, рассмотрим сначала проекцию вектора  $u$  на ось  $OZ$  (рис. 341). Так как напряженность магнитного поля, созданного током, всегда перпендикулярна к направлению тока (см. § 192), то проекция плотности тока  $u_z$  связана лишь с проекциями напряженности магнитного поля  $H_x$  и  $H_y$ .

Возьмем малый прямоугольный контур  $abcd$  со сторонами  $dx$  и  $dy$ , лежащий в плоскости  $OXY$ . Подсчитаем циркуляцию  $H$  на этом контуре. На участке  $ab$  имеем

$$A_{ab} = -H_y dy,$$

где  $H_y$  есть проекция напряженности магнитного поля  $H$ , определенная для того места, где расположен участок  $ab$ ; знак минус указывает, что перемещение производится в направлении отрицательной оси  $OY$ .

На участке  $bc$  получаем

$$A_{bc} = H_x dx,$$

где  $H_x$  — значение проекции  $H_x$  для того места, где расположен участок  $bc$ .

В случае неоднородного магнитного поля значение напряженности  $H$  в том месте, где расположен участок  $cd$ , иное, чем в области расположения

участка  $ab$ ; обозначим его через  $H'$ ; тогда на участке  $cd$  получим

$$A_{cd} = H'_y dy.$$

Очевидно, приращение проекции  $H_y$  на расстоянии между отрезками  $ab$  и  $cd$  можно представить в виде  $\frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot dx$ , откуда  $H'_y = H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$  и, следовательно,

$$A_{cd} = \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dy.$$

Точно так же получим для  $da$

$$A_{da} = - \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Полная циркуляция по замкнутому контуру  $abcd$  равна сумме:

$$A = -H_y dy + H_x dx + \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dx - \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Открывая скобки и сокращая подобные члены, получим

$$A = \left( \frac{dH_y}{dx} - \frac{dH_x}{dy} \right) dx dy. \quad (2)$$

С другой стороны, циркуляция должна численно равняться силе тока, протекающего через площадку  $abcd$  в направлении оси  $OZ$ , умноженной на  $4\pi$  (§ 198), т. е.

$$A = 4\pi I_z.$$

Считая проекцию плотности тока  $u_z$  в пределах площадки  $abcd$  постоянной, имеем

$$I_z = u_z dx dy, \quad \text{откуда} \quad A = 4\pi u_z dx dy.$$

По равенству (1) мы можем заменить  $u_z$  через сумму плотностей токов проводимости и смещения  $i_z + \frac{1}{4\pi} \dot{D}_z$ , откуда для  $A$  найдем

$$A = (4\pi i_z + \dot{D}_z) dx dy. \quad (3)$$

Сравнивая выражения (2) и (3), получим

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi i_z + \dot{D}_z.$$

Совершенно аналогичные уравнения мы получим для двух других составляющих плотности полного тока  $u_x$  и  $u_y$ , откуда вся *первая система уравнений Максвелла* имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi i_x + \dot{D}_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi i_y + \dot{D}_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi i_z + \dot{D}_z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, первая система уравнений Максвелла определяет связь между плотностью тока проводимости  $\mathbf{i}$ , производной по времени от индукции электрического поля  $\mathbf{D}$  и пространственными производными от напряженности вызванного токами магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Система уравнений (4) справедлива, если все входящие в нее величины измерять в какой-либо одной системе единиц, например все в электромагнитной системе. Если же измерять напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в CGSM-единицах, а  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{D}$  — в CGSE-единицах, то справа надо ввести множитель  $1/c$ , соответствующий переходу от электростатических к электромагнитным единицам. Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} i_x + \frac{1}{c} \dot{D}_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} i_y + \frac{1}{c} \dot{D}_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{4\pi}{c} i_z + \frac{1}{c} \dot{D}_z. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

К первой системе уравнений Максвелла следует прибавить уравнение, связывающее вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  с распределением плотности свободных электрических зарядов  $\rho$ . По сказанному в § 144, такое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (5)$$

Заметим, что вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  связан с напряженностью электрического поля соотношением:  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ . Магнитная проницаемость среды  $\mu$  в первую систему уравнений Максвелла не входит, так как напряженность магнитного поля, создаваемого токами, не зависит (для однородных магнетиков, целиком заполняющих пространство, где поле отлично от нуля) от магнитной проницаемости среды (см. сказанное в § 202).

Как известно из векторного исчисления, выражения, стоящие в левой части уравнений Максвелла (4) или (4a), являются составляющими „вихря“ вектора  $\mathbf{H}$ ; таким образом, в векторном виде первая система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}. \quad (46)$$

К ней добавляется записанное в векторном виде выражение (5):

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (5a)$$

Вторую систему уравнений Максвелла получим, используя обобщение закона индукции Фарадея, данное Максвеллом. Как было показано на стр. 472, согласно обобщению Максвелла, электрические силы возникают при изменении вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  вне зависимости от того, имеется ли проводящий контур или нет. Циркуляция  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру численно равна изменению со временем потока магнитной индукции через площадь, охватываемую контуром [формула (5) § 243]. Подсчитаем эту циркуляцию для малого прямоугольного контура, аналогичного тому, который мы рассматривали при определении первой системы уравнений Максвелла.

Пусть в некоторый момент времени в некоторой малой области пространства изменение магнитного поля характеризуется вектором  $\dot{\mathbf{B}}$ . Для определения электрического поля, создаваемого этим изменяющимся магнитным полем, рассмотрим сначала проекцию вектора  $\dot{\mathbf{B}}$  на ось  $OZ$  (рис. 342).

Так как величина индуцированной э. д. с. определяется изменением составляющей вектора магнитной индукции, нормальной к площади данного контура, то проекция  $\dot{B}_z$  будет связана лишь с проекциями напряженности электрического поля  $E_x$  и  $E_y$ .

Возьмем малый прямоугольный контур  $abcd$ , лежащий в плоскости  $OXY$ , со сторонами  $dx$  и  $dy$ . Подсчитаем циркуляцию  $\mathbf{E}$  по этому контуру:

$$A_{ab} = -E_y dy,$$

где  $E_y$  — проекция напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , определенная для того места, где расположен участок  $ab$ ; знак минус указывает, что перемещение производится в направлении отрицательной оси  $OY$ .

На участке  $bc$  аналогично найдем

$$A_{bc} = E_x dx.$$

Рассуждая совершенно аналогично тому, как мы рассуждали при подсчете циркуляции магнитной напряженности при определении первой системы уравнений Максвелла, получим, на участках  $cd$  и  $da$  соответственно:

$$A_{cd} = \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy, \quad A_{da} = - \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Отсюда полная циркуляция по всему замкнутому контуру  $abcd$  равна:

$$A = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6)$$

С другой стороны, циркуляция равна взятой со знаком минус производной по времени от потока магнитной индукции, пронизывающего контур  $abcd$ :

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Но так как поток  $\Phi$  через контур  $abcd$  равен  $B_z dx dy$ , то

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \dot{B}_z dx dy. \quad (7)$$

Сравнивая выражения (6) и (7), получим

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \dot{B}_z.$$

Аналогичным образом получим уравнения, содержащие две другие составляющие производной по времени от вектора индукции  $\dot{B}_x$  и  $\dot{B}_y$ . Окончательно вторая система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \dot{B}_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \dot{B}_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \dot{B}_z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

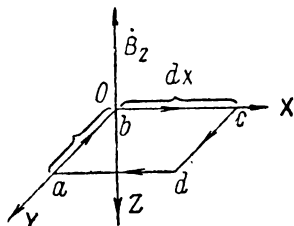


Рис. 342. К определению второй системы уравнений Максвелла.



Таким образом, вторая система уравнений Максвелла устанавливает связь между производной по времени от вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и пространственными производными от напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , вызванного изменением магнитного поля.

Система уравнений (8) справедлива, если все входящие в нее величины измерять в CGSM-системе. Если же измерять напряженность электрического поля  $E$  в CGSE-единицах, а магнитную индукцию  $B$  — в CGSM-единицах, то справа надо ввести множитель  $1/c$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \dot{B} \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Ко второй системе уравнений Максвелла следует прибавить уравнение, соответствующее тому, что линии вектора индукции всегда замкнуты. Это уравнение, по сказанному в § 200, имеет вид:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

В векторном виде вторая система уравнений Максвелла (8a) и соотношение (9) принимают вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad (8b)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (9a)$$

Первая и вторая системы уравнений Максвелла должны решаться совместно. Первая система уравнений позволяет по заданным плотностям токов  $\mathbf{i}$  и заданным объемным плотностям электрических зарядов  $\rho$  определить создаваемое ими магнитное поле; вторая система позволяет определить то вихревое электрическое поле, которое создает меняющееся со временем магнитное поле. При этом следует иметь в виду, что связь между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  определяется соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, а связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  определяется соотношением:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная.

В случае, когда среда неоднородна, на границах отдельных участков среды должны выполняться пограничные условия, полученные нами для вектора  $\mathbf{D}$  в § 144, а для вектора  $\mathbf{B}$  — в § 206:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2};$$

здесь индексы  $n$  и  $t$  указывают на то, что берется нормальная или тангенциальная составляющая соответственного вектора.

Наконец, если среда обладает проводимостью, то плотность тока проводимости  $\mathbf{i}$  удовлетворяет закону Ома:

$$\mathbf{i} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}'),$$

где  $\sigma$  — проводимость среды, а  $E'$  — напряженность поля, вызванная сторонними источниками.

**§ 245. Уравнения Максвелла—Лоренца.** В теории Максвелла свойства вещества характеризуются с помощью трех констант: диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , магнитной проницаемости  $\mu$  и проводимости  $\sigma$ . Магнитного аналога проводимости вещества не существует, так как не существует никаких магнитных зарядов. Электрические заряды задаются плотностью их распределения.

Электромагнитное поле вызывается наличием этих зарядов и их движением. Таким образом, теория Максвелла не входит в рассмотрение атомного строения вещества и формально описывает его влияние на электромагнитное поле с помощью констант  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ . Учет структуры вещества был дан в электронной теории Лоренца. С точки зрения теории Лоренца пространство, занятое веществом, отличается от пустого пространства тем, что в него вкраплены отдельные положительные и отрицательные заряды. Элементарные отрицательные заряды — это электроны, а элементарными положительными зарядами являются ядра атомов. Электроны вместе с ядрами образуют нейтральные атомы или ионы. Атомы и ионы могут входить в состав молекул. Электроны внутри атомов или молекул движутся по замкнутым орбитам, они способны также смещаться внутри атомов или молекул, вызывая их поляризацию. В проводниках часть электронов находится в свободном состоянии и, перемещаясь, создает ток проводимости. Электрическое и магнитное поля вызываются этими зарядами и их движением.

Ввиду микроскопического размера зарядов, поля заметно меняются от точки к точке на расстояниях, сравнимых с атомными размерами. Так, вблизи отдельного электрона или иона электрическое поле весьма велико, а посередине между двумя соседними электронами оно может оказаться равным нулю. Таким образом, рассматриваемые в теории Лоренца электрическое и магнитное поля носят микроскопический характер. Обозначим напряженность этих полей через  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  в отличие от макроскопических, усредненных величин, фигурирующих в теории Максвелла. Эти поля осуществляются в пространстве между отдельными зарядами, т. е. теория Лоренца рассматривает, по сути дела, лишь поля в пустоте. Поэтому в теории Лоренца рассматривается лишь одна пара векторов: напряженность электрического поля  $\mathbf{e}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{h}$  вместо двух пар векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$ , входящих в уравнения Максвелла.

Всякий электрический ток с точки зрения электронной теории Лоренца есть конвекционный ток, обусловливаемый движением элементарных зарядов. Плотность этого тока равна  $\Sigma \rho \mathbf{v}$ , где  $\rho \mathbf{v}$  есть ток, вызываемый одним элементарным зарядом, а сумма распространена на все элементарные заряды ( $\rho$  есть плотность одного заряда, равная нулю вне самого заряда, а  $\mathbf{v}$  — его вектор скорости).

Таким образом, для пустого пространства между зарядами уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \sum \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \Sigma \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rote} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (4)$$

В этом виде уравнения носят название *уравнений Максвелла — Лоренца*.

Входящие в уравнения Максвелла — Лоренца векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  недоступны непосредственному измерению, так как мы не можем промерить напряженности полей между атомами и внутри самих атомов и молекул. Поэтому,

для того чтобы перейти к измеримым величинам, необходимо усреднить величины, входящие в уравнения (1) — (4). Усреднение напряженностей  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$ , плотности зарядов  $\Sigma\rho$  и тока  $\Sigma\rho\mathbf{v}$  следует проводить для объемов, больших по сравнению с отдельными атомами, но настолько малых, чтобы все макроскопические величины в их пределах заметно не менялись; такое усреднение следует проводить для промежутков времени, больших по сравнению с периодами внутриатомных движений, но настолько малых, чтобы макроскопические величины за эти промежутки времени не успевали заметно меняться.

Обозначим усредненные таким образом величины через  $\bar{\mathbf{e}}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}$ ,  $\bar{\Sigma\rho}$  и  $\bar{\Sigma\rho\mathbf{v}}$ . Тогда уравнения Максвелла—Лоренца примут вид:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{h}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\Sigma\rho\mathbf{v}} + \frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{e}}}, \quad (1a)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{e}} = 4\pi \bar{\Sigma\rho}, \quad (2a)$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{e}} = -\frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{h}}}, \quad (3a)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{h}} = 0. \quad (4a)$$

Эти уравнения должны совпадать с уравнениями Максвелла.

Легко видеть, что уравнения (3a) и (4a) совпадают со второй системой уравнений Максвелла [(86) и (9a) § 244], если положить

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{h}}.$$

Отсюда, в соответствии со сказанным в § 145 и 208, получаем: *макроскопическая напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  является усредненной микроскопической напряженностью поля  $\mathbf{e}$  и магнитная индукция  $\mathbf{B}$  является усредненной микроскопической напряженностью магнитного поля  $\mathbf{h}$* . Это соответствует ранее отмеченному обстоятельству: при наличии диэлектрика напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  определяется как „внешними“, внесенными в диэлектрическую среду зарядами, так и поляризацией самой среды; при наличии магнетика магнитная индукция  $\mathbf{B}$  определяется как токами, так и „намагничиванием“ среды. Отсюда еще раз вытекает аналогия между напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ .

Однако при указанном сопоставлении векторов  $\bar{\mathbf{e}}$  и  $\bar{\mathbf{h}}$  с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  может показаться, что уравнения (1a) и (2a) не соответствуют первой системе уравнений Максвелла. Но более детальное рассмотрение показывает, что и здесь имеет место совпадение. Для этого, во-первых, необходимо принять во внимание, что вектор  $\Sigma\rho\mathbf{v}$  учитывает не только перенос свободных зарядов, обуславливающих появление плотности тока проводимости  $\mathbf{i}$ , но и внутриатомные движения зарядов и изменение со временем поляризации атомов и молекул. Во-вторых, макроскопическая плотность свободных зарядов  $\rho$  не совпадает со средней плотностью элементарных зарядов  $\bar{\Sigma\rho}$ , так как в нее не входит та часть  $\bar{\Sigma\rho}$ , которая сводится к поляризации диэлектрика.

**§ 246. Электромагнитные волны.** Как мы видели, образование переменного во времени электрического или магнитного полей вызывает возникновение соответственно вихревого магнитного или вихревого электрического поля. Если такое электромагнитное поле создается в некоторой ограниченной области пространства, то, как показывает опыт, оно распространяется в остальную часть пространства с конечной скоростью. Эта скорость весьма велика и в пустоте совпадает

со скоростью света ( $3 \cdot 10^{10}$  см/сек). В тех случаях, когда *создаваемое электромагнитное поле имеет периодический характер, распространение этого поля носит волновой характер*. Волновой характер распространения электромагнитного поля вытекает из общей теории электромагнитных явлений Максвелла, которая была дана в 1863 г. Впервые электромагнитные волны были экспериментально изучены Герцем в 1888 г.

Рассмотрим процесс образования электромагнитных волн сперва на примере простейшей теоретической схемы, а затем укажем технические способы их осуществления. Предположим, что мы имеем контур, в котором поддерживаются тем или иным способом электрические колебания. Пусть этот контур характеризуется емкостью  $C$  и коэффициентом самоиндукции  $L$ . Если колебания в нем происходят с периодом  $T$ , равным периоду собственных колебаний, то величина этого периода определяется формулой (2) § 239:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

В результате этих колебаний в области контура создаются переменные электрическое и магнитное поля. Например, если мы рассматриваем пространство между обкладками конденсатора, то в нем периодически, с периодом  $T$ , меняются напряженность электрического поля и величина тока смещения, вследствие чего создается переменное во времени вихревое магнитное поле. Чтобы распространение электромагнитных волн играло заметную роль, или, как говорят, чтобы система заметно излучала, надо создать такие условия, чтобы область, в которой образуется ток смещения и где отличен от нуля вектор  $\vec{B}$ , была, по возможности, менее обособленной от окружающего пространства.

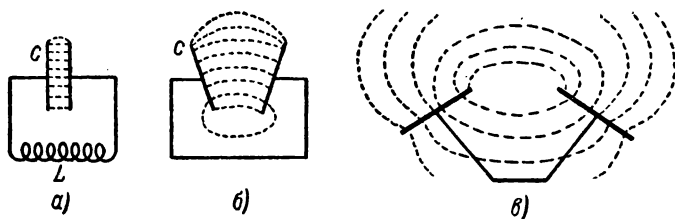


Рис. 343. Колебательные контуры различной степени открытости.

Если взять плоский конденсатор с малым расстоянием между обкладками и самоиндукцию в виде соленоида (рис. 343а) с плотно расположенными витками, то практически поле будет почти полностью сосредоточено между обкладками и внутри соленоида. Для того чтобы излучение возросло, следует увеличить расстояние между обкладками конденсатора и осуществить участок цепи, обладающий самоиндукцией не в виде катушки, а в виде более открытого контура. Увеличивая

расстояние между обкладками и заменяя соленоид линейным проводником, мы будем получать контуры типов, изображенных на рис. 343б и в. Очевидно, что емкость и самоиндукция при таком изменении контуров станут значительно меньше, чем в первоначальной схеме, а следовательно, станет меньше, чем в первоначальной схеме, и период собственных колебаний системы. Колебания в таких контурах поддерживаются путем подвода энергии к обкладкам конденсатора от какого-либо источника переменной э. д. с. Чтобы увеличить разность потенциалов, до которой первоначально заряжаются обкладки, можно в проводнике, соединяющем обкладки, сделать разрыв — так называемый искровой промежуток. Благодаря искровому промежутку цепь оказывается разомкнутой вплоть до того момента, пока разность потенциалов обеих

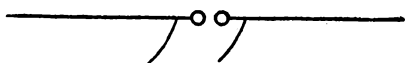


Рис. 344. Колебательный контур в виде двух стержней, разделенных искровым промежутком.

частей цепи не достигнет значения пробивного потенциала искрового промежутка. Когда произойдет пробой, в искровом промежутке возникнет искра, соединяющая обе части в один проводящий контур, в котором и возникнут

электрические колебания. Можно обкладки конденсатора устроить совсем и сделать колебательную систему из двух металлических стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 344). Такая колебательная система называется *диполем*. Устранение обкладок приведет к чрезмерному уменьшению емкости; чтобы увеличить емкость, стержни, образующие колебательную систему, можно снабдить у границ искрового промежутка сферическими утолщениями. Именно такой колебательный контур использовал в своих опытах Герц. На рис. 345 показан колебательный контур Герца, называемый *вибратором Герца*.

Колебания в вибраторе Герца возбуждаются присоединением его ко вторичной обмотке индукционной катушки. Колебательный процесс при этом носит следующий характер. Когда разность потенциалов достигает значительной величины и в искровом промежутке проскакивает искра, в вибраторе устанавливаются за-

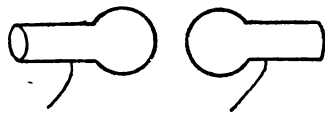


Рис. 345. Вибратор Герца.

тухающие колебания, период которых определяется емкостью и самоиндукцией вибратора. После многократной перезарядки обеих половин вибратора колебания затухают, так как энергия, полученная вибратором при его зарядке, расходуется на излучение и на лентжоулево тепло. После этого индуктор вновь заряжает вибратор, и процесс повторяется. Период заряжения вибратора от индуктора определяется периодом работы прерывателя индуктора; этот период значительно больше, чем период колебаний вибратора. В самом диполе при колебании течет ток высокой частоты (в опытах Герца частота

порядка  $10^8$  *гц*), который на концах диполя отражается и меняет направление на обратное: в диполе происходит интерференция бегущей и отраженной волн, в результате чего в нем устанавливаются стоячие волны. Это означает, что амплитуда тока в различных местах диполя имеет разное значение, при этом у концов диполя сила тока имеет узел, а в середине — пучность. Таким образом, в колеблющемся диполе в разных сечениях проводника сила тока в один и тот же момент времени имеет разное значение. Это — пример „не-квазистационарного“ процесса. Согласно теории Максвелла, полный ток, т. е. совокупность тока проводимости и тока смещения, остается одним и тем же для всех сечений диполя. Отсюда следует, что в тех местах, где ток проводимости равен нулю, ток смещения имеет максимальное значение. При периодическом процессе амплитуда тока смещения наибольшая в тех местах, где имеет наибольшее значение амплитуда электрической напряженности.

Таким образом, амплитуда напряженности максимальна в точках, где амплитуда тока проводимости равна нулю. Пучности электрической напряженности расположены у концов диполя, узел — посередине.

Распределение амплитуды силы тока и амплитуды электрической напряженности вдоль диполя дано на рис. 346.

Рассмотрим характер электромагнитного поля, возникающего в пространстве, окружающем диполь.

Схематически диполь можно представить, как два равных и разноименных заряда  $+q$  и  $-q$ , расстояние  $l$  между которыми периодически меняется. Как мы видели (§125), электрическое поле неизменного диполя характеризуется линиями напряженности, которые начинаются на одном заряде и кончаются на другом.

Не так, вообще говоря, обстоит дело, если заряды, образующие диполь, движутся. Это происходит из-за того, что поле распространяется в пространстве с конечной скоростью и, следовательно, значение напряженности  $E$  в какой-либо точке, удаленной от диполя, в определенный момент времени соответствует расположению зарядов диполя не в тот же, а в более ранний момент времени.

Поясним это графически. Будем исходить из состояния, когда заряды  $+q$  и  $-q$ , образующие диполь, раздвинуты на некоторое расстояние  $l$  (рис. 347а), и рассмотрим какую-либо линию напряженности, например линию  $abc$ . По мере сближения зарядов, линия напряженности изменит форму, так как, например, в точке  $b$  значение напряженности  $E$  соответствует не данному расположению зарядов, а их расположению в более ранний момент времени. Линия примет

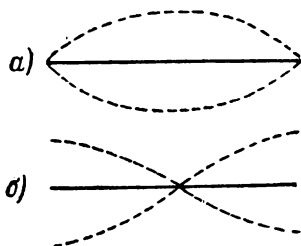


Рис. 346. Распределение амплитуды силы тока (а) и амплитуды электрической напряженности (б) вдоль диполя.

вид, изображенный на рис. 347б. Когда оба заряда совместятся, линия напряженности будет иметь форму петли (рис. 347в). При дальнейшем движении зарядов в поле образуется замкнутая линия напряженности

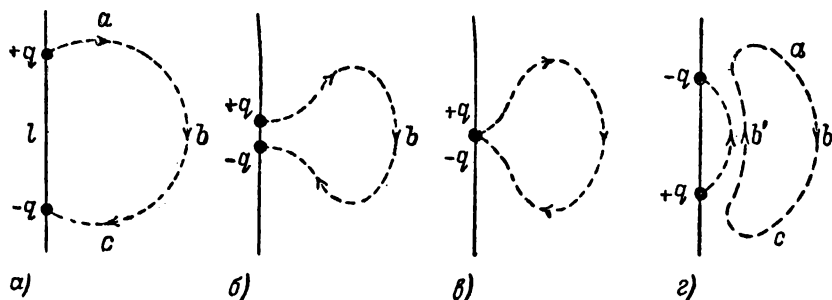


Рис. 347. Линии напряженности около диполя в различные моменты времени.

$abc b'$  (рис. 347г). Возникшее электрическое поле будет, таким образом, носить вихревой характер.

Образовавшиеся замкнутые линии переменного электрического поля поведут к возникновению по гипотезе Максвелла замкнутых линий переменного магнитного поля. Последние, в свою очередь, поведут к возникновению замкнутых линий электрической напряженности и т. д. Вокруг колеблющегося диполя образуется электромагнитная волна.

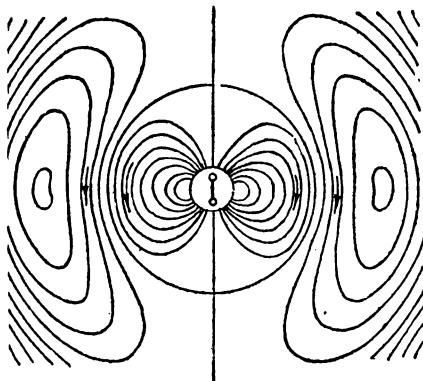


Рис. 348. Линии напряженности около диполя.

На рис. 348 представлено распределение линий электрической напряженности около диполя Герца в некоторый определенный момент времени.

Направление и относительную величину напряженности электрического и магнитного полей в волне, возникающей около диполя, можно вычислить, но можно их определить и экспериментально.

Электрическое поле можно исследовать, помещая в разные места „электрический резонатор“, способный реагировать на электрическую напряженность. Таким резонатором может служить прямолинейный провод с искровым промежутком  $ab$  (рис. 349), где слева от резонатора изображен излучающий вибратор. Если такой диполь не перпендикулярен линиям напряженности электрического поля, то между его концами возникает разность потенциалов, в результате которой в искровом промежутке

проскочит искра. Эта искра и будет служить индикатором наличия электрического поля. Искровой промежуток воспринимающего диполя должен быть мал, так как разность потенциалов на его концах невелика.

Магнитное поле можно изучать по его индукционному действию, помещая в различные места поля контур, в котором измеряется ток. Индукционный ток будет зависеть от места расположения контура и его ориентации. Индукционное действие переменного поля будет наибольшим, когда вектор магнитной индукции нормален к плоскости контура, так как в этом положении быстрее всего меняется магнитный поток через плоскость, ограниченную контуром. Относительная величина вектора напряженности в разных местах пропорциональна величине индукционного тока, возникающего в контуре, при условии, что контур ориентирован нормально к напряженности магнитного поля.

Такого типа опыты позволяют установить характер электромагнитного поля, окружающего диполь. Вблизи диполя поле носит сложный характер, но на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, в области, которая носит название *волновой зоны*, поле имеет сравнительно простой вид.

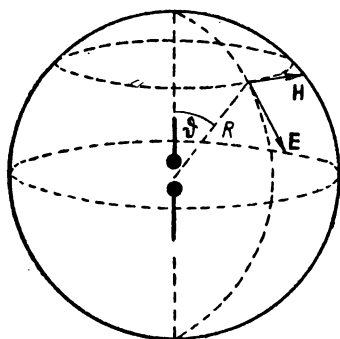


Рис. 350. Направление векторов  $E$  и  $H$  в волновой зоне диполя.

ности равны нулю; для точек, лежащих в экваториальной области, напряженности имеют наибольшее значение. В соответствии с этим и плотность потока излучаемой энергии зависит от угла  $\theta$ , который составляет направление излучения с осью диполя. Эта зависимость представлена в виде векторной диаграммы на рис. 351. С увеличением расстояния до диполя (т. е. с увеличением радиуса сферы) напряженности убывают. Существенно заметить, что *напряженность электрического поля  $E$  в данной точке перпендикулярна к напряженности*

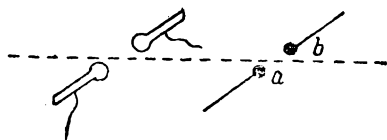


Рис. 349. Резонатор  $ab$ .



магнитного поля  $\mathbf{H}$  в той же точке, и оба вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны к радиусу сферы, т. е. к направлению распространения волны. Если э.д.с.  $\mathcal{E}$  в диполе меняется по закону:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

где  $\omega$  — циклическая частота колебаний, то и напряженность поля  $\mathbf{E}$  в каждой точке пространства меняется периодически с той же частотой  $\omega$ , но с запозданием по фазе.

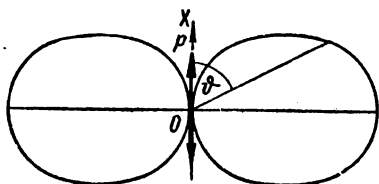


Рис. 351. Распределение интенсивности излучения по углам.

Запоздание по фазе тем больше, чем дальше от диполя расположена рассматриваемая точка. Это запоздание вызвано тем, что электромагнитное поле распространяется с конечной скоростью  $v$ . Таким образом, вокруг диполя возникает сферическая электромагнитная волна. Если через  $r$  обозначить расстояние от диполя

до данной точки, то колебания вектора  $\mathbf{E}$  представятся выражением:

$$E = \frac{E_0 \sin \vartheta}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{E_0 \sin \vartheta}{r} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

где  $T$  — период,  $\lambda$  — длина волны, а  $\vartheta$  — полярный угол (рис. 350).

В направлении распространения электромагнитную волну можно представить с помощью двух синусоид, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одна из них изображает колебания вектора электрической напряженности  $\mathbf{E}$ , а другая — вектора магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ . В пустоте амплитуды колебаний обоих векторов численно

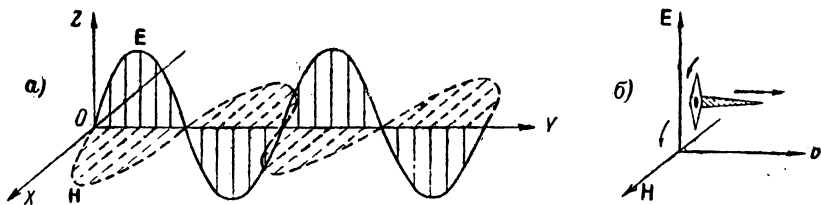


Рис. 352. Электромагнитная волна.

равны друг другу (если  $\mathbf{E}$  измерено в электростатической, а  $\mathbf{H}$  — в электромагнитной системе единиц); оба вектора колеблются в одинаковой фазе (рис. 352а). Направление распространения волны можно определить по правилу буравчика: если рукоятку буравчика поворачивать в направлении от вектора  $\mathbf{E}$  к вектору  $\mathbf{H}$ , то направление его поступательного движения определит направление распространения волны (рис. 352б).

В своих опытах Герц получал электромагнитные волны длиной около 60 см. Он наблюдал их отражение от металлических зеркал, преломление в призме из парафина, а также явление интерференции. Все эти опыты с несомненностью показали, что переменное электромагнитное поле может распространяться в виде волн с конечной скоростью.

**§ 247. Скорость распространения электромагнитных волн.** Ввиду большой величины скорости электромагнитных волн, непосредственное ее определение на опыте представляет трудности.

Герц определял эту скорость косвенным путем, измеряя длину электромагнитной волны  $\lambda$ ; тогда, зная период  $T$  колебаний, определяемый емкостью и самоиндукцией вибратора, Герц вычислял скорость  $v$  из соотношения:

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

Для измерения длины волны Герц пользовался стоячими электромагнитными волнами, получающимися при интерференции встречных волн. Получение встречных волн Герц достигал отражением бегущей волны от металлического зеркала.

Чтобы интенсивность стоячей волны была заметной, следует производить опыт с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль определенного направления. Такая „направленность“ электромагнитной волны особенно просто осуществляется с помощью схемы, показанной на рис. 353. Искровой промежуток диполя

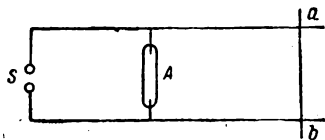


Рис. 353. Получение стоячих электромагнитных волн.

заклучается между двумя параллельными проводами, соединенными на концах, как показано на рисунке. Электромагнитное поле в основном заключено между проводами, а в проводах возникают токи проводимости. Участок провода  $ab$  играет роль зеркала, отражающего дошедшие до него волны. В результате в области, ограниченной проводами, устанавливаются стоячие волны, положение узлов и пучностей которых определяется на опыте. Помещая между проводами разрядную трубку  $A$  на подвижных контактах, можно, передвигая ее вдоль проводов, наблюдать ее прерывистое свечение. Наибольшее свечение имеет место в пучностях электрической напряженности; свечение отсутствует там, где находятся узлы электрической напряженности. Расстояние между соседними узлами или между соседними пучностями дает половину длины волны. Узлы и пучности магнитной напряженности можно обнаружить, перемещая вдоль проводов рамку, замкнутую на гальванометр, и наблюдая индукционное действие переменного магнитного поля, как это было указано выше. Эти наблюдения показывают, что пучности магнитной напряженности совпадают с узлами электрической напряженности, и обратно. В месте отражения  $ab$  наблюдаются узел

электрической напряженности и пучность магнитной. Отсюда следует, что отражение от металлической поверхности колебаний вектора электрической напряженности происходит с потерей полуволны, в то время как отражение колебаний вектора магнитной напряженности происходит без потери полуволны.

Определив по расстоянию между узлами длину волны  $\lambda$  и зная период колебаний  $T$ , можно найти по формуле (1) скорость распространения электромагнитных волн  $v$ . Период колебаний  $T$ , как было указано, можно вычислить по формуле (2) § 239. Но можно период колебаний определить и эмпирическим путем. Для этого наблюдают с помощью вращающегося зеркала искру, проскакивающую в искровом промежутке колебательного контура. При очень быстром вращении зеркала изображение искры получается прерывистым в соответствии с прерыванием и проскакиванием искры в течение каждого периода колебаний. Таким способом скорость распространения электромагнитных волн в пустоте была найдена равной  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек. Более точные современные измерения длины стоячих волн, а также измерения скорости света (свет представляет собой электромагнитные волны весьма малой длины) дают для  $c$  значение:

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Это значение весьма близко совпадает со значением электродинамической постоянной  $c$ , определяемой по отношению электромагнитной и электростатической единиц сил тока. Такое совпадение не случайно: теория Максвелла (см. мелкий шрифт) показывает, что электромагнитные волны в пустоте распространяются со скоростью численно равной электродинамической постоянной  $c$ .

Если провода, вдоль которых распространяются электромагнитные волны, погрузить в диэлектрик, то расстояние между узлами стоячих волн уменьшается; это указывает на уменьшение скорости распространения волн. По теории Максвелла, в веществе скорость распространения волн  $v$  равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (2)$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость вещества.

Разбирая систему уравнений Максвелла, можно показать, что ее решение носит для определенных условий волновой характер. Не имея возможности приводить способ решения уравнений Максвелла, мы ограничимся тем, что покажем, что волновое решение удовлетворяет уравнениям Максвелла, и выведем заключения о характере волны и скорости ее распространения.

Будем исходить из предположения, что электромагнитное колебание распространяется в виде волны определенного периода  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  в определенном

направлении, например вдоль оси  $OY$  (рис. 352). Для упрощения примем, что волна плоская, т. е. что во всех точках плоскости, перпендикулярной к направлению распространения колебаний, каждый из векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в один и тот же момент имеет данное значение. Эти предположения позволяют написать „уравнения волн“ для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right); \quad (3)$$

здесь  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  обозначают соответственно векторные амплитуды векторов электрической и магнитной напряженности,  $v$  — скорость распространения электромагнитной волны. Скорость волны  $v$  связана с периодом и длиной волны обычным соотношением

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Так как мы предположили, что волна плоская, то частные производные от проекций векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по координатам  $x$  и  $z$  равны нулю, ибо в *данный момент* величины  $E$  и  $H$  меняются только вдоль направления распространения колебаний, т. е. только вдоль оси  $OY$ . Таким образом, из уравнений Максвелла выпадают все члены, содержащие частные производные по  $x$  и  $z$ . Это нам даст системы уравнений Максвелла (стр. 477 и 479) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \frac{\epsilon}{c} \dot{E}_x, \\ 0 &= \frac{\epsilon}{c} \dot{E}_y, \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\epsilon}{c} \dot{E}_z; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\frac{\mu}{c} \dot{H}_x, \\ 0 &= \frac{\mu}{c} \dot{H}_y, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\mu}{c} \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы выполнялись вторые уравнения обеих систем Максвелла, необходимо, чтобы производные по времени проекций векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на направление оси  $OY$  равнялись нулю.

Из выражений (3) следует, что если производная по времени какой-либо проекции векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  равна все время нулю, то и сама эта проекция равна нулю. Отсюда вытекает, что:

$$E_y = H_y = 0. \quad (6)$$

Это нам дает важный результат: *векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоской электромагнитной волне расположены перпендикулярно к направлению распространения колебаний, электромагнитная волна поперечна.*

Предположим для определенности, что вектор  $\mathbf{E}$  колеблется, сохраняя свое направление неизменным; это направление пусть совпадает с направлением  $OZ$ . Такая волна, в которой вектор сохраняет свое направление, называется *плоскополяризованной*. Наше предположение заставляет заключить, что проекция  $\mathbf{E}$  на направление оси  $OX$  равна нулю, т. е.  $E_x = 0$ , откуда:

$$E_z = E. \quad (7)$$

Третье уравнение второй системы Максвелла (5) при этих условиях дает:

$$\dot{H}_z = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad H_z = 0.$$

Тем самым выполняется и первое уравнение системы (4). Таким образом, вектор магнитной напряженности колеблется параллельно оси  $OX$ , откуда

$$H_x = H.$$

Отсюда мы видим, что *вектор электрической напряженности* (направленной вдоль оси  $OZ$ ) и *вектор магнитной напряженности* (направленной вдоль оси  $OX$ ) *взаимно перпендикулярны*.

Используем третье уравнение первой системы (4) и первое уравнение второй системы (5), которые теперь примут вид:

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c} \dot{E}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \dot{H}.$$

Чтобы исключить из этих уравнений одно из неизвестных, например  $H$ , дифференцируем первое уравнение по времени:

$$-\frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c} \ddot{E};$$

подставляя сюда вместо  $\dot{H}$  его значение из второго уравнения, получим:

$$\frac{c}{\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\epsilon}{c} \ddot{E} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Очевидно, что, исключив  $E$ , мы получим аналогичное уравнение для  $H$ . Уравнение (8) есть волновое уравнение (ср. § 111, т. I). Убедимся, что ему действительно удовлетворяет решение вида:

$$E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right).$$

Для этого составляем вторые производные от  $E$  по времени  $t$  и по координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right) = -\omega^2 E; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right) = -\frac{\omega^2}{v^2} E. \end{aligned}$$

Подставив эти значения  $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$  в (6), получим:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2}, \quad (9)$$

соотношение, которому можно всегда удовлетворить. Таким образом, решение уравнения (8) представляет собой плоскую волну частоты  $\omega$ , распространяющуюся со скоростью  $v$ , которая по (9) равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (10)$$

Для пустоты  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , откуда скорость распространения электромагнитных волн в пустоте численно равна величине  $c$ , которая представляет собой отношение электромагнитной (CGSM) единицы силы тока к электростатической единице (CGSE).

**§ 248. Вектор Умова — Пойнтинга.** Распространение электромагнитной волны сопровождается переносом энергии, характеризующей электромагнитное поле. Выше было показано, что энергия электрического и магнитного полей распределена в пространстве с плотностями  $\epsilon E^2/8\pi$  и  $\mu H^2/8\pi$ . Можно показать, что *электромагнитное поле*

характеризуется суммарной энергией, распределенной с плотностью  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}.$$

(Эта формула справедлива как в электростатической системе единиц, так и в электромагнитной.) Поскольку энергия есть функция напряженностей поля, она передается в пространстве со скоростью  $v$  распространения поля. Распространение энергии можно описать, введя вектор плотности потока электромагнитной энергии. В общем виде и в применении к упругим волнам вектор плотности потока энергии был впервые получен профессором Московского университета Н. А. Умовым (см. т. I, § 112), а для частного случая электромагнитного поля применен Пойнтингом.

Если численное значение вектора Умова — Пойнтинга обозначить через  $S$ , то энергия, протекающая за время  $dt$  через единицу площадки, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны, выразится формулой:

$$S dt = \omega \cdot v \cdot dt, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость распространения волны.

Если векторы  $E$  и  $H$  взаимно перпендикулярны, как это имеет место для электромагнитной волны в пустоте и в изотропных средах, то численное значение вектора Умова — Пойнтинга определяется равенством:

$$S = \frac{c}{4\pi} EH, \quad (2)$$

справедливым в смешанной (гауссовой) системе единиц.

По величине и направлению вектор Умова — Пойнтинга  $S$  определяется векторным произведением векторов  $E$  и  $H$ :

$$S = \frac{c}{4\pi} (E \times H). \quad (3)$$

Покажем, что определенный по (2) и (3) вектор Умова — Пойнтинга удовлетворяет уравнению (1), т. е. действительно является вектором плотности потока энергии. Предположим, как выше, что волна, распространяющаяся вдоль оси  $OY$ , имеет электрический и магнитный векторы направленными соответственно по осям  $OZ$  и  $OX$  (рис. 352). Тогда  $E = E_z$  и  $H = H_x$  и вектор  $S$  направлен по оси  $OY$  — в направлении распространения волны.

Из первого уравнения системы (5) § 247, принимая во внимание формулу (3) того же параграфа, имеем:

$$\frac{\omega}{v} E = \frac{\mu\omega}{c} H;$$

подставляя сюда значение  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , получим:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H.$$

(Заметим, что  $E$  выражено в электростатических, а  $H$  — в электромагнитных единицах.) Следовательно, плотность электромагнитной энергии может быть выражена так:

$$w = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \quad (4)$$

Возьмем произведение численного значения вектора Умова — Пойнтинга на элемент времени  $dt$ :

$$S dt = \frac{c}{4\pi} E \cdot H \cdot dt = \frac{c}{4\pi} \frac{\sqrt{\epsilon E^2}}{\sqrt{\mu}} dt = \frac{c \epsilon E^2}{\sqrt{\epsilon \mu} \cdot 4\pi} dt$$

или, подставляя сюда  $w$  по (4) и заменяя  $c/\sqrt{\epsilon \mu}$  через  $v$ :

$$S dt = w \cdot v \cdot dt,$$

что совпадает с (1). Можно показать, что в общем случае мерой электромагнитной энергии, втекающей (или вытекающей) в некоторый объем за время  $dt$ , будет  $\int_S S_n dt ds$ , где интеграл берется по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Таким образом, из этого рассмотрения видно, что вектор  $S$  представляет собой вектор плотности потока электромагнитной энергии.

**§ 249. Радиотехника. Современные способы возбуждения и регистрации электромагнитных волн.** Первоначальный метод Герца возбуждать электромагнитные волны с помощью колебаний вибратора, изображенного на рис. 345, позволял получать волны длиной около 1 м. Опыты Герца позволили экспериментально изучить важные свойства электромагнитных волн: отражение, преломление и т. д. Эти опыты явились прямым подтверждением электромагнитной природы света. Впоследствии было сделано много попыток получить волны меньшей длины. В 1906 г. П. Н. Лебедев, изготовив весьма миниатюрные вибраторы, получил электромагнитные волны длиной около 3 мм. Позднее (1924 г.) М. А. Левитская получила волны длиной 0,2 мм. Профессоры Московского университета В. К. Аркадьев и А. А. Глаголева-Аркадьева разработали оригинальный метод генерирования коротких электромагнитных волн с помощью искр, проскакивающих между металлическими опилками, взвешенными в масле. Им удалось получить волны длиной около 0,1 мм. Эти волны значительно короче наиболее длинных инфракрасных волн (см. т. III). Одновременно разрабатывались методы получения значительно более длинных волн.

Опыты с электромагнитными волнами привели знаменитого русского физика А. С. Попова к открытию метода беспроволочной телеграфии. В 1895 г. А. С. Попов, используя свойство металлических порошков слипаться и тем самым повышать свою электропроводность под влиянием высокочастотных электрических колебаний, сконструировал первый чувствительный приемник электромагнитных волн.

На рис. 354 изображена схема приемника А. С. Попова. Его основной частью является так называемый *когерер*  $AB$ , представляющий собою стеклянную трубку с металлическими опилками. Когерер включен в цепь, состоящую из гальванической батареи  $P$  и реле  $CDE$ . Когда электромагнитные волны достигают прибора, электропроводность опилок повышается, и в цепи возникает ток, под влиянием которого якорь реле  $D$  притягивается электромагнитом и замыкает контакт  $E$ . Благодаря этому оказывается замкнутой вторая цепь, также питаемая батареей  $P$ , в которую включен электрический звонок  $HG$ . Молоточек звонка при обратном движении ударяет о трубку когерера, под влиянием толчка сопротивление опилок восстанавливается. Таким образом, приемник автоматически перестает действовать, как только электромагнитные волны больше не достигают его.

Годом позже, в марте 1896 г., А. С. Попов продемонстрировал на заседании Физико-химического общества передачу первой в мире радиогаммы. Радиогамма передавалась на территории Петербургского университета из здания Химического института на расстояние 250 м в здание, где происходило заседание Общества. Открытие А. С. Поповым беспроволочного телеграфа привело к величайшему перевороту в технике.

Дальнейшее развитие радиотехники было направлено на то, чтобы заменить искровые генераторы, дающие возможность получать лишь затухающие колебания, на генераторы незатухающих колебаний. Последнее обстоятельство позволило перейти от передачи сигналов к передаче речи, музыки, изображения. Поэтому в двадцатых годах нынешнего столетия радиотехника перешла к генерированию с помощью электронных ламп.

Схема такого рода генератора описана в § 241. Для целей радиопередачи колебательный контур индуктивно связывается с антенной. В самом простейшем виде антенна представляет собой прямой вертикальный провод, заземленный с нижнего конца. Длина провода подбирается так, чтобы в нем установилась стоячая волна с пучностью силы тока на его нижнем конце и узлом силы тока на верхнем конце. Такая антенна аналогична половине вибратора Герца и обеспечивает излучение колебаний в виде возникающих вокруг нее электромагнитных волн (рис. 355).

Обнаружение электромагнитных волн производится с помощью приемной антенны и усилительной системы. Колебательный контур  $LC$

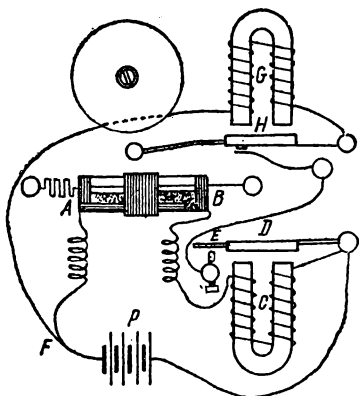


Рис. 354. Схема приемника А. С. Попова.



такой системы (рис. 356) индуктивно связан с антенной (на рисунке антенна не изображена). В контуре под влиянием электромагнитной волны возникают вынужденные колебания. Их амплитуда будет наибольшей при условии резонанса, однако все же она, вообще говоря,

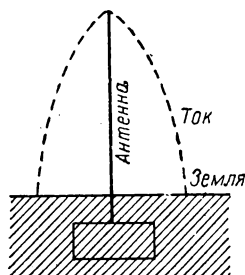


Рис. 355. Свободные колебания простейшей вертикальной антенны.

слишком мала для того, чтобы можно было непосредственно измерить возникающие токи. Чтобы их измерение стало возможным, их усиливают с помощью специальной *усилительной схемы*. В простейшем виде, изображенном на рис. 356, эта схема состоит из одной трехэлектродной лампы. Колебательный контур индуктивно связывается с сеткой лампы  $S$ . При возникновении электрических колебаний в контуре  $LC$  „сеточное напряжение“ (см. § 241) меняется, и, следовательно, меняется сила тока, проходящего через лампу от батареи  $B_1$ . Условия работы лампы подбирают таким образом, чтобы она работала на прямолинейном участке характеристики (рис. 357). Если эта прямолинейная часть идет кверху достаточно круто, то небольшому изменению сеточного напряжения  $\Delta V_s$  соответствует значительное изменение анодного тока  $\Delta I_a$ . Таким образом, слабые колебания в резонирующем контуре  $LC$  поведут к гораздо большим колебаниям силы анодного тока в цепи лампы. В рассмотренной усилительной схеме источником энергии в цепи лампы служит батарея  $B_1$ ; колеба-

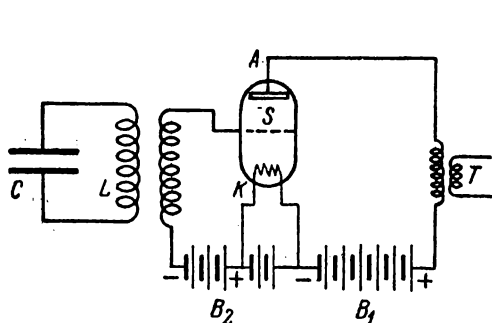


Рис. 356. Схема усиления электромагнитных колебаний.

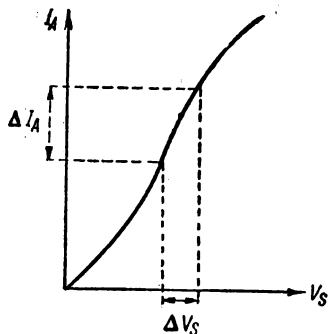


Рис. 357. Характеристика трехэлектродной лампы.

ния контура  $LC$ , вызванные падающей электромагнитной волной, лишь воздействуют на лампу и вызывают изменения силы тока от батареи  $B_1$ . Колебания анодного тока могут быть с помощью трансформатора  $T$  переданы на регистрирующую аппаратуру или на сетку второй лампы для вторичного усиления.

Для передачи звуков электромагнитные колебания *модулируются*, т. е. их амплитуда меняется в такт со звуковыми колебаниями. Тогда огибающая высокочастотных электромагнитных колебаний представляет собой колебания с звуковыми частотами (рис. 358). Эти изменения амплитуды и позволяют на приемной станции с помощью громкоговорителя снова получить звуки.

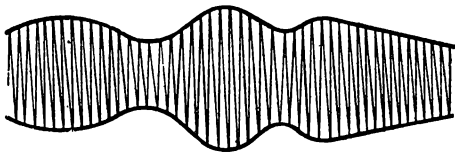


Рис. 358. Огибающая высокочастотных колебаний.

Простейшая схема модулирования представлена на рис. 359. Здесь изображена часть генерирующей схемы, соответствующая рис. 338, и справа антенна  $A$ , с которой генерирующая часть связана индуктивно.

В верхней части рисунка  $M$  означает микрофон. Колебания напряжения, возникающие в микрофоне, усиливаются в трансформаторе  $T$  и подаются к пластинам сеточного конденсатора  $C_s$ . Высокочастотные колебания, возникающие в катушке  $L_1$ , легко проходят через конденса-

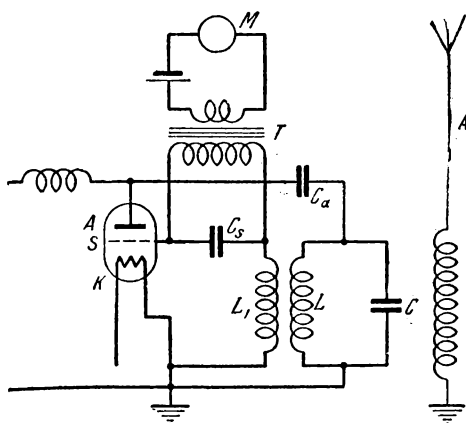


Рис. 359. Схема модулирования высокочастотных колебаний.

тор  $C_s$  и подаются на сетку лампы  $S$ . Вместе с тем, из-за большой индуктивности обмотки трансформатора  $T$  они не ответвляются в цепь микрофона. Таким образом, генерирующая система работает так же, как если бы микрофон к ней не подключался. Колебания, возникающие в микрофоне, имеют звуковую частоту, т. е. гораздо более низкую, чем частота, возбуждаемая ламповым генератором. Поэтому конденсатор  $C_s$  представляет для токов от трансформатора  $T$  большее сопротивление, чем для токов от генератора. В результате, на пластинах конденсатора  $C_s$  возникает лишь добавочная разность потенциалов, которая меняет сеточное напряжение  $V_s$ , чем и достигается модулирование колебаний.

Общая схема передающей и приемной радиостанций представлена на рис. 360. На передающей станции генератор высокочастотных колебаний  $G$  дает гармонические незатухающие колебания определенной частоты  $\omega$ . Эти колебания модулируются с помощью модулятора  $M$ , в соответствии со звуковыми колебаниями, поступающими от микрофона  $МФ$ . Затем колебания усиливаются усилительной

Общая схема передающей и приемной радиостанций представлена на рис. 360. На передающей станции генератор высокочастотных колебаний  $G$  дает гармонические незатухающие колебания определенной частоты  $\omega$ . Эти колебания модулируются с помощью модулятора  $M$ , в соответствии со звуковыми колебаниями, поступающими от микрофона  $МФ$ . Затем колебания усиливаются усилительной

ламповой системой  $У_1$  и подводятся с помощью индуктивной связи к антенне  $A_1$ , которая излучает электромагнитные волны. Достигнув антенны  $A_2$  приемной станции, волны вызывают в ней вынужденные колебания. Антенна  $A_2$  связана индуктивно с резонансным контуром  $РК$ . Возникающие в резонансном контуре вынужденные колебания усиливаются ламповой усилительной схемой  $У_2$ . Усиленные колебания выпрямляются с помощью выпрямителя (детектора)  $Д$ ; выпрямленный ток  $I_0$ , воспроизводящий по своей зависимости от времени ток в микрофоне передающей станции, подается после низкочастотного усилителя (не изображенного на схеме) на громкоговоритель  $Г$ .

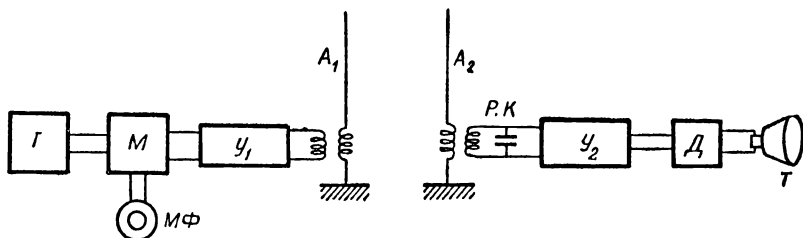


Рис. 360. Схема передающей и принимающей радиостанций.

Распространение радиоволн происходит не в свободном пространстве, а вдоль земной поверхности, которая является хорошим проводником. Поэтому вокруг антенны отправляющей станции не образуется сферических волн, аналогичных рассмотренным нами в § 246. Волны, излучаемые антенной, испытывают направляющее действие поверхности Земли и, таким образом, огибают земной шар. Задача о распространении волн вдоль поверхности Земли была полностью решена акад. В. А. Фоком. При распространении коротких электромагнитных волн играют также большую роль высокие слои атмосферы, где присутствуют в большом числе ионы (образующиеся, главным образом, под действием ультрафиолетового излучения Солнца). Эта часть атмосферы носит название *ионосферы*. Короткие электромагнитные волны отражаются от ионосферы, что сильно влияет на характер их распространения вдоль поверхности земного шара.

В настоящее время у нас в Советском Союзе, наряду с радиотелеграфией, радиотелефонией и телевидением, широко разрабатываются и другие применения электромагнитных волн. Существенным успехом в развитии радиотехники явился переход к коротким электромагнитным волнам (метровым и сантиметровым), позволяющим получать с помощью антенн специальной формы направленные радиосигналы.

Электромагнитные волны, встречая на своем пути различные преграды, могут частично задерживаться ими, а частично отражаться и

рассеиваться от них. А. С. Попов еще в 1897 г. при опытах по радиотелеграфированию на море обнаружил, что корабль оказывает экранирующее действие, за ним образуется „радиотень“. На явлении отражения радиоволн от металлических тел основан способ обнаружения предметов на больших расстояниях и определения их положения. Этот способ, получивший название *радиолокации*, впервые в СССР был разработан Д. Н. Рожанским и Ю. Б. Кобзаревым. Сущность этого метода сводится к следующему: с помощью генератора и специальной системы антенн получается направленный пучок радиоволн; после отражения от объекта (корабль, самолет) волны достигают приемного устройства и регистрируются. Для того чтобы отправленные сигналы не мешало их приему, сигналы посылаются прерывистыми. Каждый сигнал длится всего несколько миллионных долей секунды, перерывы же между сигналами в десятки или сотни раз больше. Прием отраженных волн производится в перерывы между сигналами. По времени между отправкой и возвращением отраженного сигнала определяется расстояние до наблюдаемого объекта. Устройства, позволяющие определять таким образом положение объектов с помощью радиосигналов, получили название *радаров*.

Советскими учеными Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси разработан метод весьма точного определения расстояний с помощью радиосигналов, основанный на определении сдвига фаз между отраженными волнами.

Область применения радиотехнических методов развивается в настоящее время весьма быстро и в этом развитии советским ученым принадлежит ведущее место.

На коротких волнах поддерживается связь не только со спутниками, но и с космическими ракетами до расстояний в несколько миллионов километров.

---

## СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

В различных частях курса мы вводили те или другие единицы для измерения электрических и магнитных величин. Резюмируем все сказанное.

В физике принята CGS-система, которая устанавливается следующим образом (см. § 3 т. I). В качестве основных единиц выбираются единицы длины — сантиметр, массы — грамм и времени — секунда; единицы для всех остальных физических величин устанавливаются на основании их закономерной связи с длиной, массой и временем, причем в соответственных формулах коэффициенты пропорциональности полагаются равными единице. Однако этот способ неоднозначен. Нами уже было отмечено (т. I, § 32), что, например, единица силы может быть установлена двумя способами: 1) на основании второго закона Ньютона  $f = mw$ , в котором коэффициент пропорциональности положен равным единице; 2) на основании закона всемирного тяготения  $f = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ , в котором также коэффициент пропорциональности полагается равным единице. В первом случае мы обязаны писать закон всемирного тяготения в виде:

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где „гравитационная постоянная“  $k = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2$ . Во втором случае мы обязаны писать второй закон Ньютона в виде:

$$f = k' mw,$$

где „динамическая постоянная“  $k' = 1,496 \cdot 10^7 \text{ г} \cdot \text{сек}^2/\text{см}^3$ .

Таким образом, возможно построение двух CGS-систем измерения механических величин: 1) „динамической“ и 2) „гравитационной“. Как известно, обычно употребляется лишь динамическая система.

Аналогично в учении об электромагнитных явлениях мы строим две CGS-системы, основываясь либо на законах электростатических взаимодействий зарядов (CGSE-система), либо — магнитных взаимодействий токов (CGSM-система).

1. Абсолютная электростатическая система (CGSE). В этой системе единица количества электричества  $q$  устанавливается из закона Кулона, отнесенного к пустоте, в котором коэффициент пропорциональности полагается равным единице:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1)$$

Сила  $f$  в формуле (1) измеряется в динах, расстояние  $r$  — в сантиметрах (подробнее см. стр. 17). Для диэлектриков:

$$f = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная — представляет собой *число отвлеченное* [для пустоты, по (1),  $\epsilon = 1$ , для прочих сред  $\epsilon > 1$ ].

Исходя из CGSE-единицы количества электричества, устанавливают CGSE-единицы напряженности поля, разности потенциалов, сопротивления и т. д.

Для установления в этой системе единицы для измерения напряженности магнитного поля исходим из следующего соотношения: напряженность магнитного поля  $H$  на расстоянии  $r$  от бесконечно длинного прямого тока полагается равной (см. стр. 279):

$$H = \frac{2I}{r}, \quad (3)$$

где  $I$  — сила тока.

Измеряя  $I$  в CGSE-единицах силы тока, установим CGSE-единицу напряженности магнитного поля.

Момент силы  $M$ , действующей в магнитном поле напряженности  $H$  на плоский контур площадью  $S_1$ , по которому течет ток силой  $I_1$ , по сказанному в § 191, пропорционален произведению  $HI_1S_1$ :

$$M \sim HI_1S_1.$$

В CGS-системе  $M$  измеряется в динах  $\times$  сантиметры,  $S_1$  — в квадратных сантиметрах; для  $H$  и  $I_1$  мы выбрали CGSE-единицы. Таким образом, оказывается, что мы уже выбрали единицы измерения для всех четырех величин  $M$ ,  $S_1$ ,  $H$  и  $I_1$ , откуда следует, что, переходя к равенству между  $M$  и произведением  $HI_1S_1$ , мы уже не можем положить коэффициент пропорциональности равным единице, а обязаны вводить некоторый коэффициент, который полагает равным  $1/c^2$ :

$$M = \frac{1}{c^2} HI_1S_1; \quad (4)$$

численное значение коэффициента  $c$  может быть определено из опыта. По измерениям величина  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$  см/сек; она носит название *электродинамической постоянной*. Как мы видели, величина  $c$  по численному значению и по размерности совпадает со скоростью распространения электромагнитного поля в пустоте.

Единицу измерения для магнитной индукции  $B$  в  $CGSE$ -системе устанавливают, определяя момент сил  $M$ , действующий на контур с током, соотношением:

$$M = BI_1 S_1. \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем, что для пустоты:

$$B = \frac{1}{c^2} H. \quad (6)$$

Для вещества полагаем:

$$B = \mu H. \quad (6a)$$

Величина  $\mu$  обладает размерностью  $L^{-2} T^2$  и ее численное значение в  $c^2$  раз меньше обычных значений магнитной проницаемости. Из формул (6) и (6a) видно, что в  $CGSE$ -системе векторы  $B$  и  $H$  обладают разной размерностью.

Выражение (6a) можно сохранить и для пустоты, написав:

$$B = \mu_0 H. \quad (6b)$$

Сравнение с формулой (6) показывает, что при этом должно быть выполнено равенство:  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ . Величину  $\mu_0$  иногда называют „магнитная проницаемость пустоты“, хотя такое название не имеет никакого физического смысла. Мы видели (§ 201), что магнитная проницаемость веществ  $\mu$  связана с их способностью намагничиваться, которая, в свою очередь, обусловлена наличием магнитных моментов у атомов и молекул (постоянных или индуцированных). Под „пустотой“ мы подразумевали (ср. со сказанным в § 152) часть пространства, в котором имеется лишь электромагнитное поле, т. е. особый вид материи, не состоящий из атомов и молекул. Электромагнитное поле обладает определенными физическими свойствами, в том числе свойством передавать электромагнитное возмущение со скоростью, равной  $c$ . Таким образом, электродинамическая постоянная  $c$  выражает определенные объективные свойства электромагнитного поля, а не вещества, состоящего из атомов и молекул. Поэтому величина  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  не имеет никакой аналогии с магнитной проницаемостью  $\mu$  вещества.

$CGSE$ -единицы измерения магнитных величин употребляются редко.

2. Абсолютная электромагнитная система ( $CGSM$ ). В этой системе единица силы тока  $I$  устанавливается на основании выражения для силы взаимодействия двух прямых параллельных бесконечно длинных проводов с токами при условии, что между ними находится пустота (см. § 196):

$$f = \frac{2I_1 I_2}{r} l, \quad (7)$$

где  $f$  — сила, действующая на участок длины  $l$  одного из токов;  $r$  — расстояние между токами. Единица напряженности магнитного

поля  $H$  устанавливается через  $CGSM$ -единицу силы тока на основании соотношения (3). Эта единица напряженности магнитного поля носит название *эрстед*.

Единица магнитной индукции  $B$  определяется соотношением

$$B = \mu H,$$

где магнитная проницаемость  $\mu$  есть величина безразмерная и указывает, во сколько раз возрастают силы взаимодействия между токами при погружении проводов, по которым они текут, в данное вещество.  $CGSM$ -единица магнитной индукции  $B$  носит название *гаусс*. Гаусс по величине и размерности совпадает с эрстедом.  $CGSM$ -единица потока магнитной индукции  $\Phi$ , устанавливаемая с помощью соотношения

$$\Phi = B_n S,$$

носит название *максвелл*.

Единица количества электричества  $q$  устанавливается в  $CGSM$ -системе через силу тока  $I$  на основании соотношения  $q = It$ . Таким образом, единица количества электричества оказывается выбранной *независимо* от электростатических взаимодействий зарядов. Поэтому оказывается, что в законе Кулона (1) все три входящие в него физические величины  $f$ ,  $q$  и  $r$  уже имеют единицы измерения. Следовательно, в закон Кулона должен быть введен коэффициент пропорциональности, обладающий определенным численным значением и определенной размерностью. Значение этого коэффициента легко подсчитать: в  $CGSM$ -системе единица измерения заряда  $q$  в  $c$  раз больше единицы в  $CGSE$ -системе, единицы же измерения силы  $f$  и расстояния  $r$  те же самые. Поэтому, чтобы значение силы  $f$  получилось то же, что и при пользовании  $CGSE$ -системой, надо ввести в правую часть закона Кулона множитель, равный  $c^2$ :

$$f = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (8)$$

Для диэлектриков в  $CGSM$ -системе закон Кулона пишется, как и в  $CGSE$ -системе, в виде:

$$f = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (8a)$$

При этом диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  будет иметь размерность  $L^{-2} T^2$  и ее численные значения будут в  $c^2$  раз меньше численных значений  $\epsilon$  в  $CGSE$ -системе. Выражение (8a) можно в  $CGSM$ -системе формально сохранить и для пустоты:

$$f = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Из сравнения этой формулы с (8) видно, что при этом должно выполняться равенство:  $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ . Величину  $\epsilon_0$  иногда называют



„диэлектрической постоянной пустоты“. Это название так же не имеет физического смысла, как и указанное выше название „магнитной проницаемости пустоты“ для величины  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  в системе *CGSE*.

Напряженность электрического поля определяется в *CGSM*-системе равенством:

$$E = \frac{f}{q}, \quad (9)$$

откуда для размерности напряженности  $E$  находим:  $[E] = \frac{[f]}{[q]} = = L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$ . Единица электростатической напряженности  $E$  в *CGSM*-системе в  $c$  раз меньше единицы электростатической напряженности в *CGSE*-системе.

Электростатическая индукция  $D$  определяется равенством:

$$D = \epsilon E. \quad (10)$$

Так как  $\epsilon$  в *CGSM*-системе величина размерная, то размерность вектора электростатической индукции  $D$  в *CGSM*-системе отличается от размерности вектора электростатической напряженности. Действительно,  $[D] = [\epsilon] \cdot [E] = L^{-3/2} \cdot M^{1/2}$ .

Численное значение электростатической индукции  $D$  в пустоте в *CGSM*-системе в  $c^2$  раз меньше значения напряженности поля  $E$ .

3. Абсолютная гауссова система  $a$ . В этой системе единицы для всех электрических величин совпадают с *CGSE*-единицами, а единицы для магнитных величин совпадают с *CGSM*-единицами. Диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  и магнитная проницаемость  $\mu$  в этой системе являются величинами безразмерными, причем для пустоты

$$\epsilon = 1 \text{ и } \mu = 1.$$

При пользовании гауссовой системой единиц во все формулы, содержащие одновременно электрические и магнитные величины, войдут численные коэффициенты, выражаемые через электродинамическую постоянную  $c$ , например закон Био — Савара — Лапласа примет вид:

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2};$$

выражение для силы, действующей на элемент тока  $\Delta l$  в магнитном поле, примет вид:

$$\Delta f = \frac{1}{c} I B \sin \alpha \cdot \Delta l.$$

Закон индукции Фарадея примет вид:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Уравнения Максвелла в гауссовой системе выражаются уравнениями (4а) и (8а) § 244.

В табл. XX приведены размерности основных электрических магнитных величин в *CGSE*-, *CGSM*- и гауссовой системах, в табл. XXI — отношения единиц в этих трех системах.

Таблица XX

Размерности основных электрических и магнитных величин  
в абсолютных системах единиц

Величина	Системы		
	<i>CGSE</i>	<i>CGSM</i>	гауссова
Диэлектрическая постоянная $\epsilon$	безразмерна	$L^{-3}T^3$	безразмерна
Электрический заряд $q$ . . . . .	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Напряженность электрического поля $E$ . . . . .	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-3}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Индукция электрического поля $D$ . . . . .	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Потенциал $V$ . . . . .	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Сила тока $I$ . . . . .	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$T^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$
Сопротивление $R$ . . . . .	$L^{-1}T$	$LT^{-1}$	$L^{-1}T$
Емкость $C$ . . . . .	$L$	$L^{-1}T^3$	$L$
Магнитная проницаемость $\mu$ . .	$L^{-2}T^3$	безразмерна	безразмерна
Напряженность магнитного поля $H$ . . . . .	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-3}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Индукция магнитного поля $B$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Поток магнитной индукции $\Phi$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Коэффициент самоиндукции $L$	$L^{-1}T^3$	$L$	$L$

4. Международная система единиц. Система единиц, принятая Международной конференцией по мерам и весам в 1960 г., основывается на следующих четырех основных единицах: *метр, килограмм, секунда, ампер* (см. т. I). В этой системе за единицу силы принят 1 *ньютон* =  $10^5$  *дин*, за единицу работы — 1 *джоуль* =  $10^7$  *эрг* и за единицу мощности — 1 *ватт* =  $10^7$  *эрг/сек*. Единица силы тока — ампер — устанавливается по силе взаимодействия между параллельными бесконечно длинными проводниками (см. § 196): ампер равен силе тока, который, протекая по двум параллельным бесконечно длинным проводам, расположенным на расстоянии 1 *м* друг от друга в пустоте, вызывает между ними силу взаимодействия, равную  $1 \cdot 10^7$  ньютонов на каждый метр длины. В силу этого определения 1 *а* = 0,1 *CGSM*-ед. силы тока. Остальные электрические единицы вводятся на основании соотношений:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ ампер} \times 1 \text{ сек} &= 1 \text{ кулон}, \\
 1 \text{ ампер} \times 1 \text{ вольт} &= 1 \text{ ватт}, \\
 1 \text{ ампер} \times 1 \text{ ом} &= 1 \text{ вольт}, \\
 1 \text{ фарада} \times 1 \text{ вольт} &= 1 \text{ кулон}.
 \end{aligned}$$

Таблица XXI

## Отношения единиц в абсолютных системах

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \cong 3 \cdot 10^{10}$$

Величина	1 CGSE-единица равна CGSM-единицам	1 гауссова единица равна:	
		CGSM-единицам	CGSE-единицам
Диэлектрическая постоянная $\epsilon$	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Электрический заряд $q$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Напряженность электрического поля $E$ . . . . .	$c$	$c$	1
Индукция электрического поля $D$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Потенциал $V$ . . . . .	$c$	$c$	1
Сила тока $I$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Сопротивление $R$ . . . . .	$c^2$	$c^2$	1
Емкость $C$ . . . . .	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Магнитная проницаемость $\mu$ . . . . .	$c^2$	1	$1/c^2$
Напряженность магнитного поля $H$ . . . . .	$1/c$	1	$c$
Индукция магнитного поля $B$	$c$	1	$1/c$
Поток магнитной индукции $\Phi$	$c$	1	$1/c$
Коэффициент самоиндукции $L$	$c^2$	1	$1/c^2$

Магнитные единицы вводятся на основании закона индукции, а именно: за единицу магнитного потока  $\Phi$  принимается поток через замкнутый контур с сопротивлением в 1 *ом*, при убывании которого до нуля в контуре протекает под влиянием э.д.с. индукции количество электричества в 1 *к*. Эта единица потока называется *вебер*. Как легко подсчитать, 1 *вб* =  $10^8$  *мкс*.

Единица магнитной индукции  $B$  устанавливается на основании соотношения:

$$B_n = \frac{\Phi}{S},$$

откуда за единицу магнитной индукции принимается индукция в той области пространства, где однородный магнитный поток в 1 *вб* пересекает нормальную к нему площадку в 1 *м*<sup>2</sup>. Эта единица магнитной индукции называется *тесла*. Между этой единицей магнитной индукции и гауссом имеет место соотношение:

$$1 \text{ тесла} = 1 \text{ вб/м}^2 = 10^4 \text{ гс}.$$

В международной системе единиц используется так называемая „рациональная“ система записи формул. Она основана на таком выборе единиц измерения, чтобы уравнения Максвелла (4б) и (5а) (стр. 478)

и (8б) и (9а) (стр. 480) приняли вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  дается соответственно формулами:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

При этом законы Кулона и Био — Савара — Лапласа принимают соответственно вид:

$$f = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r^2}, \quad (11)$$

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}. \quad (12)$$

Для пустоты закон Кулона (11) можно переписать следующим образом:

$$f = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2},$$

где  $\epsilon_0$  — „диэлектрическая постоянная пустоты“. Как легко подсчитать, „диэлектрическая постоянная пустоты“  $\epsilon_0$  в международной системе получается величиной размерной и равной:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}},$$

где  $c$  — скорость распространения электромагнитных волн в пустоте, выраженная в м/сек, т. е.  $c = 2,998 \cdot 10^8$  м/сек.

Из закона Био — Савара — Лапласа, написанного в форме (12), вытекает, что напряженность магнитного поля  $H$  на расстоянии  $r$  от прямого длинного провода равна:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

На основании этого равенства устанавливается указанная на стр. 293 единица измерения напряженности магнитного поля „ампер на метр“, равная напряженности, возникающей на расстоянии  $r = \frac{1}{2\pi}$  м от прямого длинного провода, по которому течет ток в один ампер.

Из сравнения единиц для  $B$  и  $H$  вытекает, что в практической системе „магнитная проницаемость пустоты“  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (безразмерное число).

Международная система единиц совпадает с принятой в последнее время в СССР „практической системой“, которая обозначалась как MKSA-система. Единицы измерения основных электрических и магнит-

ных величин в международной системе приведены в табл. XXII. Размерности величин в международной системе совпадают с размерностями в *CGSM*-системе и все электрические и магнитные единицы международной системы являются кратными от единиц *CGSM*-системы.

Таблица XXII

***MKSA*-система единиц**

Величина	Название	Размерность	1 <i>MKSA</i> -единица равна <i>CGSM</i> -единицам
Диэлектрическая постоянная $\epsilon$ . . . . .	—	$L^{-2}T^2$	$4\pi 10^{-7} \cong 1,26 \cdot 10^{-6}$
Электрический заряд $q$ . . . . .	кулон	$L^{1/2}M^{1/2}$	$10^{-1}$
Напряженность электрического поля $E$ . . . . .	вольт на метр	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$10^6$
Индукция электрического поля $D$ . . . . .	кулон на кв. метр	$L^{-2/2}M^{1/2}$	$4\pi 10^{-1} \cong 1,26$
Потенциал $V$ . . . . .	вольт	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$10^8$
Сила тока $I$ . . . . .	ампер	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^{-1}$
Сопротивление $R$ . . . . .	ом	$LT^{-1}$	$10^9$
Емкость $C$ . . . . .	фарада	$L^{-1}T^2$	$10^{-9}$
Магнитная проницаемость $\mu$ . . . . .	—	безразмерна	$\frac{10^7}{4\pi} \cong 7,96 \cdot 10^5$
Напряженность магнитного поля $H$ . . . . .	ампер на метр	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$4\pi 10^{-2} \cong 1,26 \cdot 10^{-2}$
Индукция магнитного поля $B$ . . . . .	тесла	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^4$
Поток магнитной индукции $\Phi$ . . . . .	вебер	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^8$
Коэффициент самоиндукции $L$ . . . . .	генри	$L$	$10^9$

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аккумулятор 222  
 — железоникелевый 224  
 — свинцовый 223  
*Акулов Н. С.* 325  
 ампер 120, 508  
 — международный 508  
 Ампера закон 288  
 — ток 306  
 ампервиток 353  
 амперметр 137, 362  
 — тепловой 137  
 ампер-час 224  
 амплитуда силы тока 435, 441  
 — электродвижущей силы 433  
 анион 207  
 анод 195  
 антенна 495  
*Аркадьев В. К.* 325, 494  
*Аркадьева-Глаголева А. А.* 494  
 астатическая система магнитов 361  
  
 Барьер потенциальный 177  
 батарея 171  
 Био—Савара—Лапласа закон 277  
*Боголюбов Н. Н.* 125  
 Богуславского—Ленгмюра формула 196, 245  
 буравчика правило 271, 288  
  
 Валентность 208  
 ваттметр 364  
*Верцнер В. Н.* 399  
 весы крутильные 15  
 Видемана—Франца закон 149  
 вихрь вектора магнитной напряженности 478  
 — — электрической напряженности 480  
 возбуждение колебаний 461  
 волн электромагнитных возбуждение 494  
 — — регистрация 494  
 волна плоскополяризованная 491  
 — электромагнитная 482

вольт 40  
 вольт-амперная характеристика 265  
 Вольта ряд 175  
 вольтметр 137  
 — электростатический 107  
*Вул Б. М.* 100  
 выпрямитель германиевый 451  
 — ртутный 451  
 — селеновый 451  
 — твердый 189  
  
 Гальванометр 360  
 — баллистический 409  
 — зеркальный 363  
 — струнный 363  
 — тепловой 135  
 гальванопластика 225  
 генератор переменного тока 446  
 — постоянного тока 447  
 генри 417  
 Герца вибратор 484  
 гистерезис 99, 322  
 гидратирование ионов 207  
 градиент напряженности магнитного поля 298  
 — потенциала электрического поля 46  
  
*Давыдов Б. И.* 193  
 Даниэля элемент 156, 183, 222  
 движение электрона в магнитном поле 382, 385, 368  
 — — в электрическом поле 384, 386  
*Дехтяр М. В.* 325  
 диамагнитное тело 306  
 диаметр эффективный 238, 253  
 дивергенция вектора магнитной индукции 480  
 — — электрической индукции 478  
 — — напряженности 49  
 динамомашинa 446  
 — с параллельным возбуждением 446  
 — с последовательным возбуждением 446  
 диполь 20, 55

диссоциация 210  
 — электрическая 210  
 диэлектрик 12, 13, 73  
 диэлектрик дипольный 96  
 диэлектрическая постоянная 70  
 длина свободного пути электрона 249  
 — средняя 250  
*Доливо-Добровольский М. О.* 8, 456  
*Дорфман Я. Г.* 326  
 дуга Петрова 265

Единиц система абсолютная гауссова 282, 507

— — международная 508  
 — — электромагнитная (CGSM) 282, 285, 505  
 — — электростатическая (CGSE) 283, 504

единица абсолютная электромагнитная (CGSM) индукции магнитной 306

— — количества электричества 286  
 — — напряженности магнитной 286  
 — — потока индукции 233  
 — — самоиндукции 417  
 — — силы тока 285  
 — — электродвижущей силы 405  
 — — электростатическая (CGSE) заряда 17  
 — — индукции магнитной 505  
 — — напряженности магнитной 286, 504

— — напряженности электрической 19

— — электростатическая разности потенциалов 40

— — силы тока 120

— — сопротивления 121

— — емкости 59

— практическая заряда 17

— индукции магнитной 505

— коэффициента взаимной индукции 422

— напряженности магнитной 283, 504

— разности потенциалов 40

— силы тока 120

— сопротивления 121

— емкости 59

емкость 58

— аккумулятора 224

— конденсатора 60

Запирающий слой 125

заряд свободный 76

— связанный 76

заряд точечный 15

— удельный иона 388

— — электрона 382

— электрический 9

— электрона 111

защита магнитная 338

— электростатическая 52

зона проводимости 191

зонная теория проводимости 191

Изолятор 12

изотоп 390

импеданс 435

индукционная катушка 450

индукция взаимная 422

— магнитная 308

— электромагнитная 400

— электростатическая 87

ион 13

ионизационный потенциал 254, 255

ионизация 254

ионосфера 498

*Иоффе А. Ф.* 193, 311, 374

искра 265

искровой промежуток 266

*Капица П. Л.* 311

катион 207

катод 195

кенотрон 451

Кирхгофа закон второй 166

— — для магнитной цепи 357

— — первый 165

колебания вынужденные 461

— незатухающие 461, 465

— резонансные 461

компенсации метод 173

конденсатор 60

— переменной емкости 106

— плоский 60

— со слоями диэлектрика 104

— с охранным кольцом 108

— сферический 105

— цилиндрический 105

— электролитический 225

конденсаторов соединение параллельное 103

— — последовательное 102

контактная разность потенциалов 174,

контур тока 267

— — в неоднородном магнитном поле 296

— — в однородном магнитном поле 293

коэффициент взаимной индукции 422

коэффициент диссоциации 211  
 — молизации 211  
 — намагничения 316  
 коэффициент полезного действия  
 аккумулятора 224  
 — самоиндукции 416  
 — — кабеля 429  
 — — соленоида 417  
*Кубецкий* 200  
 кулон 17  
 Кулона закон 16, 84  
 Кюри постоянная 324  
 Кюри точка 324

**Лампа** катодная 195  
 — трехэлектродная 465  
*Ландау Л. Д.* 124  
*Лебедев А. А.* 399  
*Лебедев П. Н.* 8, 494  
*Левитская М. А.* 494  
 левой руки правило 289  
 Лекланше элемент 156, 222  
*Ленин В. И.* 9, 116, 385  
*Ленц Э. Х.* 131, 403  
 Ленца—Джоуля закон 131  
 Ленца правило 403  
 линза электронная 395  
 линии магнитной индукции 332  
 — — напряженности 271, 279, 337  
 — тока 129  
 — электростатической индукции 87, 90  
 — — напряженности 23, 44  
*Ломоносов М. В.* 10  
 Лоренца формула 367  
*Лукирский П. И.* 226  
 луч катодный 342  
 — электронный 342

**Магазин сопротивлений** 140  
 магнетик 305  
 магнетон Бора 312  
 магнит постоянный 327  
 магнитная проницаемость 315  
 магнитной цепи законы 350  
 магнитодвижущая сила 352  
 магнитострикция 324  
 максвелл 506  
 Максвелла гипотеза 470  
 Максвелла—Лоренца уравнения 481  
 — уравнения 476  
*Мандельштам Л. И.* 499  
 масса магнитная 330  
 — электрона 144, 385  
 масс-спектрограф 391  
 мегаом 122  
 мерцание анодного тока 248

метод натекания 229  
 — парабол 388  
 — постоянного отклонения 230  
 микроскоп электронный 398  
 микрофарада 59  
 молекула дипольная 75  
 молизация 211  
 момент магнитный 269, 295  
 — — атома 311  
 — — магнита 330  
 — — молекул 311  
 — — рамки 269  
 — — электрона 309  
 — электрический диполя 21  
 — — молекулы 96  
*Мотт* 193  
 мощность переменного тока 437  
 — постоянного тока 161

**Намагничивание** остаточное 322  
 намагничения вектор 320  
 напряженность поля магнитного 270  
 — — бесконечного прямого тока 279  
 — — — в центре кругового тока 279  
 — — — на оси кругового тока 280  
 — — — на оси соленоида 281  
 — — — на оси тороида 302  
 — — — тока, текущего по цилиндрическому проводнику 303  
 — — электростатического 18, 45  
 — — бесконечной плоскости 31  
 — — — вблизи проводника 54  
 — — — в диэлектрике 78  
 — — — двух бесконечных плоскостей 32  
 — — — диполя 20  
 — — — равномерно заряженной сферы 33, 79  
 — — — сферы, заряженной по поверхности 33  
 — — — точечного заряда 19  
 — — — цилиндра 35  
 насыщение магнитное 320  
 непроводник 12

**Ома закон** 120, 144, 148  
 — — для замкнутой цепи 158  
 — — для неоднородной цепи 163  
 оптика электронная 395  
 Остроградского—Гаусса теорема 27  
 — — — для потока магнитной индукции 333  
 — — — для потока электростатической индукции 93  
 — теоремы применения 30  
 осциллограмма 295



осциллограф катодный 393  
относительности теория 377

**Падение катодное** 263

— потенциала нормальное 263

*Папалекси Н. Д.* 144, 499

парамагнитное тело 306

Пельтье явление 187

период колебательного разряда 458, 460

пермаллой 323

*Петров В. В.* 265

плазма 264

Планка постоянная 244

плотность магнитной энергии 427

— тока 125

— электрических зарядов объемная 30

— — — поверхностная 30

— электрической энергии 67

поверхности уровня потенциала 42

поверхностный эффект 431

пограничные условия для вектора

магнитной индукции 336, 337

— — — — напряженности 337

— — — — электростатической индукции 90

— — — — электростатической напряженности 89

подвижность ионов 216, 232, 235, 239

— электронов 257

позитрон 12

поле магнитное 267, 271

— — — вращающееся 455

— — — движущихся зарядов 370, 372

— — — постоянного магнита 327

— — — соленоида 281

— — — токов 275, 282

— электромагнитное 471

— электростатическое 115

полупроводник 13, 125

полюс магнитный 330

поляризации вектор 75

— коэффициент 72

поляризация диэлектрика 14, 72

— молярная 98

— электродов 219

*Попов А. С.* 495, 499

потенциал 37

— выделения 221

— ионизационный 254

— системы точечных зарядов 39

— точечного заряда 38

— электростатического поля 37, 42

потенциала градиент 46

— измерение 107

— падение 158

— связь с объемным зарядом 49

потенциала уровень 42

потенциалов разность 40

поток вектора индукции 88

— — — магнитной индукции 333

— — — — — через замкнутую поверхность 333

— напряженности 26, 274

примесь акцепторная 192

— донорная 192

пробой диэлектрика 14, 226

проводимость 122

— несамостоятельная 228, 230

— полупроводников 188

— самостоятельная 228, 261

— твердых тел 225

— электролитическая 204, 215, 225

проводник 12

— второго рода 12

— первого рода 12

проводники в электростатическом поле 49

проницаемость магнитная 315

пучок электронный 242, 374

пьезоэлектрическая постоянная 101

пьезоэлектрический эффект 100

**Работа вращения диска** 350

— выхода 177

— на замкнутом пути 39

— перемагничивания 427

— перемещения контура 346

— поворота рамки 350

— сил электростатического поля 41

радар 499

радиолокация 499

разряд аperiодический 461

— колебательный 457

— тлеющий 262

реакция вторичная 206

резонанс 442, 462

резонансная частота 472

рекомбинация 230

реостат 139

— пусковой 448

*Рихман Г. В.* 10

*Розинг Б. Л.* 324

**Самеоиндукция** 415

сверхпроводимость 123, 133

связь обратная 466

сегнетова соль 99

сечение эффективное молекул 252

сила коэрцитивная 322

— Лоренца 367

— тока 119

сила тока эффективная 437  
 силы взаимодействия между токами 267, 290  
 — действующие на ток в магнитном поле 287  
 скин-эффект 431  
 скорость света 490, 504, 510  
 — электромагнитных волн 489, 492  
 — электронов 243  
*Славянов Н. Г.* 8, 265  
 слой запорный 125, 193  
 соединение проводников параллельное 134  
 — — последовательное 133  
 соленоид 271  
 сольват 215  
 сопротивление 121, 139  
 — внешнее 156  
 — внутреннее 156  
 — индуктивное 435  
 — магнитной цепи 352  
 — полное 435  
 — удельное 121  
 сопротивления зависимость от температуры 122  
 сохранение зарядов 128  
 спин 313  
 спонтанное намагничение 325  
*Столетов А. Г.* 320  
 столкновение электронов с атомами и молекулами 253  
 Стюарта и Толмена опыт 144  
 схема звезды 154  
 — треугольника 454  
 Тангенс-гальванометр 360  
 температура электронная 364  
 термобатарея 187  
 термопара 185  
 термостолбик 186  
 термоэлектрическое явление 184  
 термоэлектродвижущая сила 184  
 термоэлемент 186  
 — вакуумный 186  
 тесла 509  
 ток анодный 195  
 — индукционный 402  
 — квазистационарный 432  
 — конвекционный 372  
 — короткого замыкания 162  
 — молекулярный 306  
 — насыщения 196  
 — переменный 432, 437, 439, 451  
 — постоянный 119  
 — смещения 470  
 — трехфазный 453

ток холостой 449  
 — электрический в газах 227  
 — электронный в вакууме 195, 242, 245  
 тока линия 129  
 — плотность 126  
 тороид 302  
 трансформатор 448  
*Трапезникова О. Н.* 226  
 Трутона и Нобля опыт 118, 377  
 Удельный заряд положительных ионов 388  
 удельный заряд электрона 382  
 Уитстона мостик 168  
 Умова — Пойнтинга вектор 493  
*Усагин И. Ф.* 448  
 Усижительная лампа 496  
 Фазы сдвиг 434, 438, 442, 464  
 фарада 59  
 Фарадея закон индукции 404  
 — — электролиза второй 208  
 — — — первый 207  
 — темное пространство 262  
 — цилиндр 51  
 — число 209  
 феррит 326  
 ферромагнетизм 318, 324  
 ферромагнитные тела 306  
 флуктуации силы тока 247  
 флюксметр 410  
*Фок В. А.* 226, 498  
 фокус пучка электронов 397  
 Франка и Герца опыт 256  
*Френкель Я. И.* 326  
 Фуко токи 430  
 Химический эквивалент 208  
 Холла постоянная 380  
 — эффект 379  
 Цепь магнитная 351  
 — переменного тока 432  
 — постоянного тока 154  
 циркуляция вектора напряженности электрической 42  
 — — — магнитной 300  
 — — — сторонних сил 160  
*Шальников А. И.* 124  
*Шоттки* 193  
 Штерна и Герлаха опыт 311  
 шунт 136  
*Щукарев С. А.* 226  
 Эйнштейна и Де-Гааза опыт 310  
*Эйхенвальд А. А.* 373

Эйхенвальда опыт 373  
эквивалент химический 208  
— электрохимический 208  
эквивалентная концентрация 216  
эквипотенциальная поверхность 42  
экстраток замыкания 415, 419  
— размыкания 415, 419  
электризация наведением 11  
— трением 9  
электрический шум 248  
электричества количество 16  
электродвижущая сила 157  
— — индукции 403, 411  
— — самоиндукции 416  
— — поляризации 220  
— — эффективная 437  
электродвижущей силы амплитуда 433  
электродинамическая постоянная 504  
электроемкость 58  
электролиз 204, 222  
электролит 204  
электролитическая проводимость 204, 215  
электрометаллургия 224  
электрометр 10  
— квадрантный 110  
— струнный 110  
электромотор 446, 456  
электрон 12, 114  
— положительный 114  
электрона заряд 114  
— магнитный момент 309  
— масса 113  
— свободный пробег 249  
— удельный заряд 384  
электрон-вольт 177

электронная теория проводимости 144  
электроны свободные в проводниках 141  
электропроводности теория 144, 151  
электропроводность 122, 148  
— дырочная 192  
— смешанная 192  
— эквивалентная 217  
— электронная 192  
электроскоп 9  
электростатика 7  
электрострикция 76, 101  
элемент гальванический 156, 181  
— нормальный 174  
— поляризационный 220  
элементов соединение параллельное 172  
— — последовательное 171  
эмиссионная постоянная 198  
эмиссия вторичная электронная 199  
— термоэлектронная 200  
энергии плотность 67, 427, 493  
энергия в цепи постоянного тока 161  
— диполя 66  
— заряженного проводника 64  
— ионизации 254  
— ионов в электролите 212  
— конденсатора 64, 73  
— магнитного поля 423  
— системы зарядов 61  
— электростатического поля 66  
*Эпикус* 12  
эрстед 506

*Яблочков П. Н.* 8, 265, 448  
*Якоби Б. С.* 8, 225, 448

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
«ФИЗМАТГИЗ»

---

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГИ:

Абрикосов А. А., Методы квантовой теории поля в статистической физике.

Книга, написанная группой учеников академика Л. Д. Ландау, содержит систематическое изложение новых методов статистической физики и получаемых с их помощью результатов. В настоящее время подобной книги нет ни в одной стране.

Бардин Дж. и Шриффер Дж., Новое в изучении сверхпроводимости, перевод с английского под ред. чл. корр. АН СССР В. Л. Гинзбурга и докт. ф.-м. наук Л. П. Горькова, Серия «Современные проблемы физики».

Книга является единственным в мировой литературе современным обзором как теории, так и экспериментальных данных в области сверхпроводимости, где недавно были достигнуты очень крупные успехи в значительной степени благодаря работам указанных авторов, а также ряда советских физиков.

---

Книги могут быть приобретены в книжных магазинах, а также высланы почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».

*Фриш Сергей Эдуардович  
и Тиморева Александра Васильевна*

Курс общей физики, том II

Л., Физматгиз, 1962 г., 516 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Орлова*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов*

Корректор *В. С. Иванова*

---

Сдано в набор 11/I 1962 г. Подписано к печати 17/IV 1962 г.  
Бумага 60×90<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 32,25. Усл. печ. л. 32,25.  
Уч.-изд. л. 33,95. Тираж 100 000 экз. Т-04722.  
Цена книги 1 р. 12 к. Заказ № 1132.

---

Государственное издательство физико-математической  
литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградский Совет народного хозяйства.  
Управление полиграфической промышленности.  
Типография №1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького.  
Ленинград, Гатчинская, 26.

1р. 12к.