

С.Э.ФРИШ и А.В.ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ
I

ФИЗМАТГИЗ · 1962

С. Э. ФРИШ и А. В. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ**

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебника для государственных
университетов*



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

| | |
|--|----|
| § 1. Физика; ее содержание, связь с другими науками и с техникой | 7 |
| § 2. Физические законы | 10 |
| § 3. Единицы измерения | 12 |

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Глава I. Кинематика

| | |
|--|----|
| § 4. Общие замечания | 15 |
| § 5. Прямолинейное равномерное движение | 17 |
| § 6. Прямолинейное неравномерное движение | 20 |
| § 7. Равнопеременное прямолинейное движение. Ускорение | 22 |
| § 8. Ускорение произвольного прямолинейного движения | 25 |
| § 9. Скорость и ускорение как векторы | 26 |
| § 10. Криволинейное движение | 29 |
| § 11. Ускорение при криволинейном движении | 32 |
| § 12. Кинематика твердого тела. Угловая скорость и ускорение | 37 |
| § 13. Угловая скорость как вектор | 41 |

Глава II. Динамика

| | |
|--|----|
| § 14. Первый закон Ньютона | 44 |
| § 15. Второй закон Ньютона. Сила и масса | 46 |
| § 16. Силы трения | 49 |
| § 17. Количество движения. Импульс силы | 52 |
| § 18. Единицы силы и массы. Примеры | 53 |
| § 19. Механический принцип относительности | 58 |
| § 20. Третий закон Ньютона. Сохранение количества движения | 59 |
| § 21. Силы, действующие при криволинейном движении | 64 |
| § 22. Ускоренные системы. Инерционные силы | 67 |
| § 23. Зависимость силы тяжести от широты местности | 71 |
| § 24. Силы Кориолиса | 73 |

Глава III. Работа и энергия

| | |
|--|-----|
| § 25. Работа и мощность | 78 |
| § 26. Кинетическая энергия механической системы | 84 |
| § 27. Потенциальная энергия механической системы | 89 |
| § 28. Законы сохранения и изменения механической энергии системы | 92 |
| § 29. Графическое представление энергии | 95 |
| § 30. Формулы размерности | 99 |
| § 31. Границы применимости классической механики | 102 |

Глава IV. Силы тяготения

- § 32. Силы тяготения 110
 § 33. Масса инерционная и тяготеющая. Работа силы тяжести 115

Глава V. Движение твердого тела

- § 34. Движение твердого тела 119
 § 35. Вращение твердого тела. Момент силы и момент инерции . . . 121
 § 36. Моменты инерции некоторых тел 125
 § 37. Момент количества движения 127
 § 38. Гироскопы 131
 § 39. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела 134

Глава VI. Движение жидкости

- § 40. Движение идеальной жидкости. Линии и трубки тока 139
 § 41. Применение закона сохранения количества движения к текущей жидкости 144
 § 42. Движение вязкой жидкости 148

ЧАСТЬ ВТОРАЯ**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА****Глава VII. Газы**

- § 43. Атомно-молекулярная теория строения вещества 157
 § 44. Законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Определение температуры 161
 § 45. Уравнение состояния идеальных газов. Плотность газов . . . 167
 § 46. Основные представления кинетической теории газов 170
 § 47. Парциальные давления в газовых смесях 176
 § 48. Внутренняя энергия газа. Число степеней свободы 178
 § 49. Теплоемкость газов 180
 § 50. Закон распределения скоростей Максвелла 182
 § 51. Распределение частиц с высотой 194
 § 52. Определение числа Авогадро 195
 § 53. Длина свободного пути молекул 199
 § 54. Опыты с молекулярными пучками 202
 § 55. Явления переноса в газах. Диффузия 205
 § 56. Внутреннее трение и теплопроводность газов 209
 § 57. Теплопроводность и внутреннее трение в газах при очень низком давлении 217
 § 58. Получение и измерение низких давлений 219
 § 59. Свойства газов при очень низких давлениях 225
 § 60. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса 227
 § 61. Более точный учет характера поправок Ван-дер-Ваальса . . . 231
 § 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса. Критическое состояние вещества . . 236
 § 63. Определение критических величин. Уравнение в приведенных величинах 241
 § 64. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля—Томсона 244
 § 65. Ожижение газов 247

Глава VIII. Основы термодинамики

- § 66. Молекулярно-кинетическое и энергетическое описание процессов 252
 § 67. Эквивалентность количества переданного тепла и работы . . . 253

| | |
|---|-----|
| § 68. Первое начало термодинамики | 256 |
| § 69. Круговые процессы (циклы) | 262 |
| § 70. Адиабатические процессы. Уравнение адиабаты | 268 |
| § 71. Работа при адиабатическом и изотермическом изменениях объема газа | 273 |
| § 72. Второе начало термодинамики | 277 |
| § 73. Цикл Карно. Коэффициент полезного действия тепловой машины | 278 |
| § 74. Технические циклы | 285 |
| § 75. Обратимые и необратимые процессы | 292 |
| § 76. Статистический смысл второго начала термодинамики | 294 |
| § 77. Неравенство Клаузиуса. Энтропия | 301 |

Глава IX. Молекулярные явления в жидкостях

| | |
|---|-----|
| § 78. Строение жидкости. Молекулярное давление | 308 |
| § 79. Поверхностное натяжение | 313 |
| § 80. Давление под изогнутой поверхностью жидкости | 316 |
| § 81. Давление под изогнутой поверхностью жидкости любой формы | 319 |
| § 82. Явления на границе жидкости и твердого тела. Капиллярность | 321 |
| § 83. Растекание капли по поверхности жидкости. Мономолекулярные пленки | 326 |
| § 84. Испарение жидкостей | 328 |
| § 85. Растворы. Осмотическое давление | 331 |
| § 86. Давление насыщенных паров под искривленной поверхностью и над раствором | 335 |

Глава X. Твердые тела

| | |
|---|-----|
| § 87. Кристаллические и аморфные тела | 340 |
| § 88. Энергия кристаллической решетки | 344 |
| § 89. Деформация твердых тел | 348 |
| § 90. Пределы упругости и прочности. Пластические деформации | 355 |
| § 91. Деформации с точки зрения кристаллической структуры твердых тел | 358 |
| § 92. Тепловое движение в твердых телах. Расширение твердых тел | 361 |
| § 93. Теплоемкость твердых тел | 363 |
| § 94. Плавление и испарение твердых тел | 367 |
| § 95. Квазикристаллическое строение жидкостей | 371 |
| § 96. Абсорбция и адсорбция газов твердыми телами | 373 |

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава XI. Гармоническое колебательное движение

| | |
|---|-----|
| § 97. Гармоническое колебание | 376 |
| § 98. Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении. Примеры | 381 |
| § 99. Энергия гармонического колебательного движения | 385 |
| § 100. Сложение колебаний, происходящих вдоль одной прямой | 387 |
| § 101. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний | 391 |
| § 102. Затухающие колебания | 395 |
| § 103. Вынужденные колебания | 399 |
| § 104. Представление негармонических колебательных процессов при помощи гармонических колебаний | 405 |
| § 105. Представление колебательных процессов с помощью комплексных чисел | 411 |

Глава XII. Волны

| | |
|---|-----|
| § 106. Распространение волн в упругой среде | 414 |
| § 107. Принцип Гюйгенса | 417 |
| § 108. Уравнение волны | 419 |
| § 109. Интерференция волн | 422 |
| § 110. Стоячие волны | 425 |
| § 111. Динамика распространения колебаний в упругой среде | 429 |
| § 112. Энергия волны | 432 |
| § 113. Явление Допплера | 436 |
| § 114. Групповая скорость | 438 |

Глава XIII. Акустические колебания

| | |
|---|-----|
| § 115. Звуковые колебания и их распространение | 442 |
| § 116. Интерференция звуковых волн | 445 |
| § 117. Восприятие звуков | 448 |
| § 118. Источники звуков. Получение ультразвуков | 453 |
| § 119. Отражение и поглощение звуковых волн | 457 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| <i>Алфавитный указатель</i> | <i>460</i> |
|---------------------------------------|------------|

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Физика; ее содержание, связь с другими науками и с техникой. Физика, наряду с другими естественными науками, изучает объективные свойства окружающего нас материального мира. По-гречески слово φύσις означает природу.

Физика изучает наиболее общие формы движения материи (механические, тепловые, электромагнитные и т. д.) и их взаимные превращения. Изучаемые физикой формы движения присутствуют во всех высших и более сложных формах движения (в химических, биологических процессах и др.) и неотделимы от них, хотя и никоим образом не исчерпывают их. Так, открытому физикой закону всемирного тяготения подчиняются все известные тела земные и небесные, независимо от того, являются ли они химически простыми или сложными, живыми или мертвыми. Установленному физикой закону сохранения энергии подчиняются все процессы, независимо от того, носят ли они специфически химический, биологический и т. д. характер. Высшие, более сложные формы движения являются предметом изучения других наук (химии, биологии и др.).

Границы между физикой и некоторыми другими естественными науками не могут быть установлены резко. Существуют обширные пограничные области между физикой и химией, возникли даже особые науки: физическая химия и химическая физика. Области знания, где физические методы применяются для изучения более или менее частных вопросов, также соединяются в особые науки: так возникают, например, астрофизика, изучающая физические явления, протекающие в небесных объектах, и геофизика, изучающая физические явления, протекающие в атмосфере Земли и в земной коре. Физические открытия часто давали толчок к развитию других наук. Изобретение микроскопа и телескопа ускорило развитие биологии и астрономии. Открытый физиками спектральный анализ стал одним из основных методов астрофизики и т. д.

Развитие физики и химии, наряду с другими естественными науками, сыграло крупную роль в развитии материалистического мировоззрения.

Последовательно развитая материалистическая философия, высшей ступенью которой является диалектический материализм, широко использовала для обоснования своих положений физические открытия,

Физика, проверяя свои теории непосредственным критерием опыта и практики, всегда шла по пути раскрытия объективных свойств мира, и этим объясняется то, что подавляющее большинство физиков фактически оказывались стихийными материалистами. Однако слабость стихийного материализма, заключающаяся в его бессознательности и неумении философски осмыслить опытные данные науки, вела к тому, что часть буржуазных ученых, под влиянием реакционной идеологии господствующих классов, неоднократно пыталась использовать физические открытия для обоснования идеалистических воззрений. Такие попытки встречаются особенно часто в периоды крупных открытий, когда старые положения подвергаются пересмотру, а новые еще недостаточно выяснены. Так, в самом конце XIX и в первых годах XX столетий, когда возникло учение об электронах и были открыты факты, легшие в основу теории относительности, появились многочисленные „обоснования“ идеализма, якобы базирующиеся на новых физических открытиях. Несостоятельность этих „обоснований“ была с исключительной последовательностью и полнотой вскрыта Лениным в его книге „Материализм и эмпириокритицизм“. По поводу высказываний ряда буржуазных философов, утверждавших, что новые открытия физики повели к представлению об исчезновении материи, Ленин писал: «„Материя исчезает“ — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются, как относительные, присутствующие только некоторым состояниям материи. Ибо *единственное* „свойство“ материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью*, существовать вне нашего сознания».¹

Сказанное Лениным около сорока лет тому назад по поводу кризиса физики того времени целиком применимо и к современному этапу развития физики, когда изучение внутриатомных процессов заставляет ограничить старые представления механики и электродинамики и ввести новые представления квантовой механики. Критический анализ, последовательно проведенный с точки зрения диалектического материализма, позволяет отделить ценное физическое содержание новых теорий от той идеалистической шелухи, в которую иногда облачают их авторы.

Толчком к развитию физики, как и всех других наук, послужили практические требования людей. Механика древних египтян и греков возникла непосредственно в связи с теми запросами, которые были поставлены тогдашней строительной и военной техникой. Также под влиянием развивающейся техники и военного дела были сделаны крупные научные открытия конца XVII и начала XVIII столетий.

¹ В. И. Ленин. Сочинения, 4-е изд., т. 14, стр. 247.

Основоположник русской физики и химии М. В. Ломоносов сочетал свою научную работу с требованиями практики. Его многочисленные и разнообразные исследования по природе твердых и жидких тел, оптике, метеорологии, атмосферному электричеству были связаны с теми или другими практическими задачами.

В начале XIX столетия применение паровых машин сделало необходимым решение вопроса о наиболее выгодном превращении тепла в механическую работу. Этот вопрос не мог быть решен при узкотехническом подходе. После того как в 1824 г. французский инженер Сади Карно в общем виде рассмотрел проблему о переходе тепла в работу, можно было действительно увеличить коэффициент полезного действия тепловых машин. Одновременно работа Карно послужила фундаментом для возникновения общего учения о передаче и превращении энергии, получившего впоследствии название термодинамики. Таким образом, требования практики приводят к новым физическим открытиям, а эти последние служат базой для дальнейшего развития техники. Нередко весьма теоретические и отвлеченные на первый взгляд физические открытия со временем находят самые разнообразные и важные технические применения.

Открытие в 1831 г. Фарадеем электромагнитной индукции сделало возможным широкое практическое использование электрических явлений.

Открытый в 1869 г. Д. И. Менделеевым периодический закон не только сыграл исключительную роль в развитии учения об атомах и природе химических явлений, но и является руководящим при решении огромного количества практических задач химии и физики.

В семидесятых годах прошлого столетия Максвелл создал общую теорию электромагнитных процессов. Исходя из этой теории, он пришел к выводу о возможности распространения электромагнитной энергии в виде волн. В 1888 г. Герц экспериментально подтвердил правильность этого вывода Максвелла. Несколькими годами позже открытие Максвелла — Герца было использовано А. С. Поповым для осуществления радиотелеграфии. В свою очередь развитие радиотехники открыло перед физиками новые, исключительно широкие экспериментальные возможности в изучении свойств природы.

Исследования А. Г. Столетова по „актино-электрическим“ явлениям (1888—1889) сыграли существенную роль в выяснении природы фотоэлектрического эффекта, широко применяемого в современной технике (телевидение, автоматика и т. д.).

Примеры взаимного влияния техники и физики в процессе их развития весьма многочисленны, и нет надобности их все приводить. Отметим только, что в настоящее время исключительно важные проблемы, которые способны в корне изменить технику, как, например, непосредственное практическое использование солнечной энергии или получение энергии за счет термоядерных реакций требуют для своего решения дальнейшего глубокого изучения физических явлений.

§ 2. Физические законы. Физические законы устанавливаются путем обобщения опытных данных, и их правильность проверяется на соответствии выводов из них с опытом. Физические законы выражают объективную внутреннюю связь между физическими явлениями и реально существующие зависимости между физическими величинами.

По большей части содержание физических законов выражается в математической форме как зависимость между численными значениями a и b данных физических величин A и B . Отсюда становится ясной принципиальная важность для установления физических законов измерения физических величин.

Измерить какую-либо физическую величину — значит определенным образом сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу. Например, измерение длины некоторого тела мы производим путем последовательного прикладывания к нему определенного другого тела, длина которого выбрана за единицу длины.

Очевидно, результат измерения никогда не может быть абсолютно точен; степень его точности зависит от развития техники измерения и от той тщательности, с которой измерение произведено. Поэтому результат любого измерения может быть дан лишь в следующем виде: численное значение a данной физической величины заключено между приближенными значениями a_1 и a_2 ; чем меньше разность $\Delta a = a_1 - a_2$ по отношению к a , тем точнее оказывается измеренной физическая величина A . Уже из одного этого следует, что устанавливаемые на основании опытов физические закономерности не могут быть абсолютно точными.

Таким образом, физические законы, выражающие в математической форме количественные связи между физическими величинами, не являются абсолютно точными; их точность всегда соответствует уровню развития науки и техники данного времени.

Рассмотрим, например, зависимость объема данной массы газа от давления при постоянной температуре.

Предположим, что мы имеем 8 л газа, находящегося под давлением $p = \frac{1}{2}$ ат при некоторой постоянной температуре. Будем менять давление, придавая ему определенные значения, например: $p = 1$ ат, $\frac{4}{3}$ ат, 2 ат и т. д., и измерим объемы газа V , соответствующие этим давлениям (при одной и той же температуре).

Тогда мы получим экспериментальные результаты, которые могут быть записаны в виде следующей таблички:

| | | | | | | |
|--|---------------|---|---------------|---|---|---------------|
| Давление газа p в атмосферах | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{4}{3}$ | 2 | 4 | 8 |
| Соответствующие объемы газа V в литрах | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Из этой таблички легко видеть, что для данной массы газа произведение из давления газа p на его объем V остается постоянным:

$$pV = \text{const.}$$

Этот результат представляет собою известный закон Бойля — Мариотта. Однако этот закон оказался установленным в результате измерений, произведенных лишь с ограниченной степенью точности и в ограниченном интервале давлений. Можно поэтому ожидать, что закон Бойля — Мариотта не окажется верен, если мы произведем измерения значительно более точно или распространим их на более высокие и более низкие давления. И, действительно, более точные измерения обнаруживают отступления от закона Бойля — Мариотта; эти отступления малы в тех интервалах давлений, к которым относились опыты, и велики при очень больших давлениях. Можно показать, что связь между давлением и объемом газа при постоянной температуре лучше выражается формулой, называемой *формулой Ван-дер-Ваальса*:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{const.},$$

где $\frac{a}{V^2}$ и b — некоторые поправки. Если объем газа V велик по сравнению с поправками $\frac{a}{V^2}$ и b , то членами $\frac{a}{V^2}$ и b можно пренебречь по сравнению с p и V , и тогда мы снова получим закон Бойля — Мариотта: $pV = \text{const.}$ Таким образом, формула Ван-дер-Ваальса не только лучше отображает реальные свойства газа, чем формула Бойля — Мариотта, но она вместе с тем и указывает, в каких пределах формула Бойля — Мариотта является достаточно хорошим приближением и где она уже не может применяться.

Подобные же рассуждения можно привести и по поводу других физических законов, в том числе и механических (см. § 4).

Приближенный характер физических законов не умаляет их объективного значения: физические законы, хотя и не абсолютно точно, но приближенно и относительно верно выражают объективные свойства материи, и степень их точности повышается в процессе познания окружающей нас природы. Наука на каждом данном историческом этапе своего развития дает нам приближенный „снимок“ с действительности, но со временем снимки эти улучшаются и полнее и лучше отражают объективные свойства мира, который в своей совокупности остается неисчерпаемым. „Признание теории снимком, приблизительной копией с объективной реальности, — в этом и состоит материализм“.¹

Часто забвение приблизительного характера физических законов, приписывание им абсолютной точности и экстраполяция их на те области, для которых их применимость не проверена, может повести к грубым ошибкам. Например, установив закон, по которому при

¹ В. И. Ленин. Сочинения, 4-е изд., т. 14, стр. 252.

температурах, близких к комнатной, всякий газ при понижении температуры на 1°C при постоянном давлении уменьшается в объеме на $\frac{1}{273}$ объема, который он занимал при 0°C (закон Гей-Люссака), мы можем, путем незаконной экстраполяции на очень низкие температуры, прийти к выводу, что при охлаждении до температуры -273°C вещество газа должно вовсе исчезнуть. На самом деле, значительно раньше, чем будет достигнута такая температура, газ перестанет подчиняться закону Гей-Люссака (см. § 44).

§ 3. Единицы измерения. Выбор единиц измерения может быть произведен произвольно. Исторически их выбор тесно связан с соображениями практического характера: например, такие единицы измерения, как старинная русская единица длины „локоть“ или английский „фут“ (по-английски foot — стопа), связаны с размерами человеческого тела.

В XVIII столетии французскими учеными была сделана попытка установить „абсолютную“ систему, связав единицы измерения с такими объектами, которые не могли бы с течением времени подвергнуться изменениям или быть утерянными. Так, за единицу длины было решено выбрать $\frac{1}{40\,000\,000}$ долю длины меридиана. Однако изготовление такой линейки неминуемо сопряжено с погрешностями. С аналогичными трудностями встретились попытки установить и другие „абсолютные“ единицы. Поэтому, начиная с конца прошлого столетия, единицы стали определяться образцовыми (эталонными) телами. Например, единица длины *метр* определялась как расстояние между двумя черточками на линейке из иридиевой платины, хранящейся в Международном бюро мер и весов. Однако в настоящее время используется в известном смысле „смешанная“ система, где часть единиц определяется эталонными телами, а часть — с помощью определенных, воспроизводимых физических явлений. Так, по *международной системе единиц* (сокращенно обозначается *MS*), принятой Международной конференцией в 1960 г., за единицу длины (*метр*) принимается длина, на которой укладывается $1\,650\,763,73$ длин световых волн оранжевой линии изотопа криптона 86 (Kr^{86}) в пустоте (см. т. III):

$$1\text{ м} = 1\,650\,763,73\ \lambda(\text{Kr}^{86}).$$

Определенный таким образом метр очень близок к старому метру, соответствующему расстоянию между черточками на эталонной линейке. Но по сравнению со старым метром он имеет то преимущество, что не может быть утерян и испорчен; со временем он не будет меняться, как может меняться длина эталонной линейки в результате „старения“ материала, из которого она сделана. Всегда можно вновь и вновь сравнить какую-либо длину с длиной световой волны оранжевой линии изотопа 86 криптона.

Для измерения таких длин, которые выразились бы слишком большим числом метров или слишком малой долей метра, употребляются

другие единицы, образованные из единицы длины — метра по десятичной системе:

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}; \quad 1 \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ м}; \quad 1 \text{ мм} = \frac{1}{1000} \text{ м};$$

1 *микрон* (сокращенно *мк*), равный $\frac{1}{1000}$ мм, и т. д.

За единицу массы в международной системе единиц принята масса тела из иридиевой платины, хранящегося в Международном бюро мер и весов и называемого *килограммом* (сокращенно *кг*). Масса килограмма близка к массе 1000 *см*³ чистой воды при 4°C. Единицы большие и меньшие килограмма устанавливаются также по десятичной системе:

$$1 \text{ тонна} = 1000 \text{ кг}; \quad 1 \text{ г} = \frac{1}{1000} \text{ кг} \text{ и т. д.}$$

За единицу времени принимается время, равное $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ доле тропического года на 1 января 1900 г. Под тропическим годом понимается промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца (в его видимом движении по эклиптике) через точку весеннего равноденствия. Таким образом, единица времени связана со временем обращения Земли вокруг Солнца. Эта единица времени носит название *секунды*.

Для всякой иной физической величины можно было бы установить свои собственные, вообще говоря, произвольно выбранные единицы измерения. Например, для единицы площади можно было бы выбрать площадь любого данного тела, без всякого отношения к уже выбранной единице длины. Однако такой способ выбора единиц был бы весьма неудобен. Поэтому, например, за единицу площади выбирают площадь квадрата с длиной стороны, равной единице длины. Аналогично поступают и с прочими физическими величинами, устанавливая для них единицы измерения на основании закономерных связей, которыми эти величины связаны с теми, единицы измерения для которых уже выбраны.

Поясним это примером. Пусть требуется установить единицу измерения для физической величины, называемой плотностью. Под плотностью d подразумевается такая физическая величина, характерная для данного однородного тела, которая прямо пропорциональна его массе m и обратно пропорциональна его объему V . Поэтому численное значение плотности d равно

$$d = k \frac{m}{V}, \quad (1)$$

где k — численный коэффициент, значение которого зависит от тех единиц, в которых измерены d , m и V .

Имея уже наперед установленными единицы измерения массы m и объема V , мы можем выбрать единицу плотности так, чтобы равенство (1) выполнялось при некотором определенном значении коэффициента k . Обычно для установления единицы вновь вводимой в рас-

смотрение физической величины принято полагать $k=1$. Тогда формула (1) примет вид:

$$d = \frac{m}{V}, \quad (2)$$

и для того, чтобы она численно оправдывалась, за единицу плотности мы должны выбрать плотность такого тела (независимо от того, существует оно в природе или нет), единица массы которого занимает единичный объем.

Таким же образом вводятся единицы измерения и других физических величин.

В международной системе единиц за основные единицы приняты шесть следующих:

| | |
|---------------------|--|
| единица длины | — 1 метр (1 <i>м</i>) |
| единица массы | — 1 килограмм (1 <i>кг</i>) |
| единица времени | — 1 секунда (1 <i>сек.</i>) |
| единица температуры | — 1 градус Кельвина (1°K) (см. § 44) |
| единица силы тока | — 1 ампер (1 <i>а</i>) (см. т. II) |
| единица силы света | — 1 свеча (1 <i>св</i>) (см. т. III) |

Единицы измерения других величин вводятся на основании физических закономерностей, связывающих эти величины с основными. В механике достаточно пользоваться, в качестве основных, единицами трех физических величин — длины, массы и времени. В международной системе за эти единицы, как сказано, принимаются: метр, килограмм, секунда. Сокращенно эта система может быть обозначена как *MKS*-система.

Однако можно строить и другие системы, иначе выбирая основные единицы. Например, в физике широко используется так называемая *CGS*-система, в которой за основные единицы принимаются:

| | |
|-----------------|------------------------------|
| единица длины | — 1 сантиметр (1 <i>см</i>) |
| единица массы | — 1 грамм (1 <i>г</i>) |
| единица времени | — 1 секунда (1 <i>сек.</i>) |

Очевидно, *CGS*-система является кратной от международной системы (*MS*).

Кроме того, применяется так называемая *техническая система*, в которой за основные единицы приняты единицы длины (1 *м*), времени (1 *сек.*) и силы, причем за единицу силы принята та сила, с которой земной шар притягивает тело с массой в 1 *кг* на уровне моря на широте 45° . Эта единица силы называется килограмм-сила (сокращенно обозначается 1 *кг*; подробнее см. § 17). Таким образом, в технической системе единиц основными единицами являются:

| | | |
|-----------------|--------------------|------------------|
| единица длины | — 1 метр | (1 <i>м</i>) |
| единица силы | — 1 килограмм-сила | (1 <i>кг</i>) |
| единица времени | — 1 секунда | (1 <i>сек.</i>) |

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

§ 4. Общие замечания. Механика есть учение о простейшей форме движения материи, которое состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга.

Механика, как и все остальные естественные науки, устанавливает свои положения в результате обобщения опытных данных. Опыты над перемещением тел относятся к простейшим. Человек наблюдает перемещение тел повседневно в обыденной жизни, при любых производственных процессах, — отсюда следует *наглядность* механических представлений. Этим же объясняется и то, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие. Основные законы механики были в значительной мере выяснены Галилеем (1564—1642) и окончательно сформулированы Ньютоном (1642—1727). Леонард Эйлер (1707—1783), работавший в течение многих лет в Петербургской Академии наук, впервые придал законам механики аналитический вид и сыграл большую роль в ее развитии. Однако механика Галилея — Ньютона, получившая название „классической“, возникла в результате наблюдения лишь над ограниченным типом движений, а именно, движений тел, сравнимых по размерам с размерами человеческого тела (брошенный камень) или очень больших по сравнению с ними (движение планет) и движущихся со скоростями, не очень большими. Отсюда — приближенный характер классической механики. Дальнейшее развитие науки показало, что классическая механика является прекрасным приближением к действительности только до тех пор, пока мы не имеем дело с движением тел, состоящих из большого числа атомов (*макроскопических тел*) и скорости которых малы по сравнению со скоростью света. Ленин писал: „...механика была снимком с медленных реальных движений, а новая физика есть снимок с гигантски быстрых реальных движений“.¹

Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, даются *теорией относительности*, установленной Эйнштейном.

¹ В. И. Ленин. Сочинения, 4-е изд., т. 14, стр. 252.

Законы классической механики перестают также быть справедливыми, когда мы переходим к движению отдельных атомов или элементарных частиц (*микроскопических тел*).¹ Законы движения микроскопических тел устанавливаются так называемой *квантовой механикой*. Ниже мы дадим границы применимости классической механики, пока же будем предполагать, что речь идет всегда о движении макроскопических тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Привычность механических явлений и их наглядность, а также успехи в объяснении некоторых физических явлений (например звуковых) с помощью чисто механических представлений привели к тому, что в XIX столетии для многих физиков *объяснить* какое-либо явление — означало свести его к явлениям механическим. Эта точка зрения соответствовала философскому *механическому материализму*. Однако все дальнейшее развитие физики, особенно развитие учений о свете и об электричестве, показало, что многие явления подчиняются своим собственным законам и не могут быть сведены к простейшему типу движения — механическому. Механический материализм должен был уступить место *диалектическому материализму*, рассматривающему более общие типы движения материи, учитывающему все разнообразие реального мира.

Энгельс писал по этому поводу: „У естествоиспытателей движение всегда отождествляется с механическим движением, перемещением... Движение, в применении к материи, — это *изменение вообще*. Из подобного же недоразумения вытекает и яростное стремление свести все к механическому движению..., чем смазывается специфический характер прочих форм движения“.²

Механическое движение может быть весьма различных видов и носить достаточно сложный характер. Поэтому механика разбивает реальные движения на более простые, а изучив их, переходит затем снова к более сложным движениям. Наиболее простым механическим движением является движение так называемой материальной точки. Под *материальной точкой* понимают в механике *такое тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данной задаче*. Одно и то же реальное тело, в зависимости от постановки задачи, часто рассматривается либо как материальная точка, либо как тело конечных размеров. Например, рассматривая задачу о полете артиллерийского снаряда, мы в первом приближении можем пренебречь его формой и размерами и рассматривать снаряд как материальную точку. Но если необходимо учесть влияние сопротивления воздуха на полет снаряда и роль вращения во время полета, то мы уже не вправе

¹ Слово „микроскопический“ здесь не означает, что частицу можно видеть в микроскоп, но что она представляет собою элементарную частицу — электрон, протон и т. д., или частицу, состоящую из небольшого числа элементарных частиц, например атом или отдельную молекулу.

² Ф. Энгельс, *Диалектика природы*, 1950, стр. 197.

рассматривать снаряд как материальную точку: мы должны учесть его форму, размеры и т. д. Наряду с этим, астрономы, рассматривая движение земного шара по орбите вокруг Солнца, могут считать земной шар за материальную точку.

Из определения механического движения как простого перемещения явствует, что это перемещение может происходить лишь *относительно* каких-либо других материальных тел. Поэтому для того, чтобы получить возможность характеризовать движение какого-либо тела, прежде всего следует условиться, относительно какого другого тела (или группы неподвижных друг относительно друга тел) мы будем отсчитывать перемещение данного тела. Это тело (или группа тел) образует *систему отсчета*. Таким образом, каждое движение должно рассматриваться относительно какой-либо определенной системы отсчета. В разных случаях система отсчета может выбираться различным образом, но определенно характеризовать данное движение мы можем, только твердо выбрав систему отсчета. Например, бросив какой-либо предмет, мы можем рассматривать его движение относительно комнаты; в этом случае систему отсчета образуют стены, пол и другие части комнаты. Мы можем, однако, рассматривать движение того же тела и относительно Солнца или какой-либо определенной звезды, только мы должны вперед точно условиться, относительно чего именно мы рассматриваем движение нашего предмета.

Практически для описания движения приходится связывать с телами, образующими систему отсчета, какую-либо координатную систему, например обычную прямолинейную прямоугольную систему координат. При рассмотрении движения относительно комнаты можно, например, поместить начало координат в одном из углов комнаты, а оси направить вдоль стен; или начало координатной системы можно поместить на Солнце, а оси провести в направлении определенных звезд.¹ В дальнейшем мы поставим вопрос о *выборе* системы отсчета, пока же будем подразумевать, что нам всегда дана система отсчета и твердо связанная с ней координатная система, которой мы будем пользоваться для характеристики движения.

Механику принято делить на две части: *кинматику*, рассматривающую лишь само перемещение в зависимости от времени, и *динамику*, учитывающую взаимодействия тел, ведущие к изменению их состояния движения.

§ 5. Прямолинейное равномерное движение. Рассмотрим движение тела, трактуемого как материальная точка, сводящееся к его равномерному перемещению вдоль некоторой прямой OD (рис. 1).

В любой данный момент времени t , когда движущееся тело находится в некоторой точке A , мы можем определить его положение

¹ Координатную систему можно связать также с какой-либо материальной сплошной средой. Например, можно рассматривать движение рыбы относительно воды, в которой она плавает.

отрезком s , отсчитанным от некоторой точки O , условно принятой за начало отсчета. Очевидно, s меняется со временем. Отрезок s

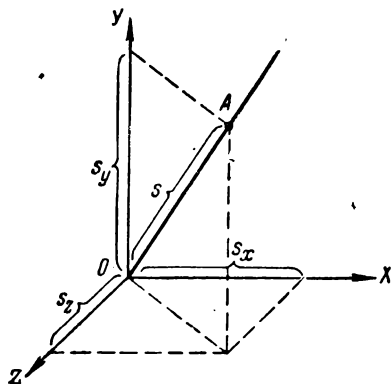


Рис. 1. Положение тела A при прямолинейном движении определяется либо отрезком s , либо его проекциями на координатные оси s_x , s_y и s_z .

совпадает с *путем*, фактически пройденным прямолинейно движущимся телом, если в начальный момент ($t=0$) тело находилось в точке O . Проводя координатную систему $OXYZ$, можно охарактеризовать также положение тела в каждый данный момент его координатами x , y и z . При сделанном на рис. 1 выборе координатной системы координаты тела x , y и z совпадают с проекциями пути s_x , s_y и s_z на координатные оси. Таким образом, положение движущейся точки можно характеризовать либо отрезком s , который будет некоторой функцией от времени t :

$$s = f(t), \quad (1)$$

либо ее координатами x , y и z , которые также будут функциями от времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (2)$$

Так как рассматриваемое движение происходит вдоль прямой, то оно носит название *прямолинейного*.

Движение называется *равномерным* в том случае, если движущееся тело в произвольные, но равные промежутки времени проходит одинаковые отрезки (пути).

Движения очевидным образом различаются друг от друга тем, что тела могут проходить за одинаковые промежутки времени разные пути, или (говоря другими словами) тем, что одинаковые пути могут быть пройдены за различные промежутки времени. Эти различия в движениях мы характеризуем, вводя понятие *скорости*. Под скоростью равномерного движения подразумевается физическая величина, тем большая, чем больший путь проходит тело за данный промежуток времени, или, другими словами, — физическая величина, тем большая, чем меньший промежуток времени необходим для прохождения данного пути. Таким образом, скорость равномерного движения v есть физическая величина, прямо пропорциональная пройденному пути и обратно пропорциональная тому промежутку времени, за который этот путь пройден.

Пусть положение прямолинейно движущегося тела в некоторый момент времени t_0 определяется отрезком s_0 , а в момент времени

t — отрезком s . Тогда за время $t - t_0$ тело проходит путь $s - s_0$, и математическое выражение для скорости v может быть записано в виде:

$$v = k \frac{s - s_0}{t - t_0}, \quad (3)$$

где k — коэффициент пропорциональности. В частном случае, если $t_0 = 0$ и $s_0 = 0$, то

$$v = k \frac{s}{t}. \quad (3a)$$

Здесь s представляет собою путь, пройденный за время t . Скорость равномерного движения есть величина постоянная. Пользуясь соотношением (3), можно измерять скорость v , отрезок s и время t в любых единицах. Если же заранее придать коэффициенту k какое-либо определенное значение, то, как указывалось в § 3, нельзя выбирать единицы измерения для всех трех физических величин v , s и t произвольно. Произвольно могут быть выбраны лишь единицы для двух величин, а для третьей величины единицы измерения должны быть выбраны так, чтобы соотношение (3) численно выполнялось при данном коэффициенте k . Так, положив $k = 1$ и, следовательно, переписав формулу (3) в виде:

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}, \quad (4)$$

можно лишь для двух из фигурирующих в ней величин выбирать произвольно единицы. Если мы выберем за единицу длины сантиметр (см), за единицу времени секунду (сек.), то, пользуясь формулой (4), мы обязаны взять в качестве единицы скорости скорость такого равномерного движения, при котором за 1 сек. проходится путь в 1 см. Это есть единица скорости в CGS-системе; сокращенно она обозначается см/сек. В других системах единиц за единицу пути берут метр (м) или километр (км), а за единицу времени — секунду (сек.) или час, тогда соответственно получаются единицы скорости м/сек и км/час.

Из формулы (4) имеем

$$s = s_0 + v(t - t_0). \quad (5)$$

Если $t_0 = 0$ и $s_0 = 0$, то формула (5) примет вид:

$$s = vt; \quad (5a)$$

здесь s — путь, пройденный телом за время t .

Сравнивая (5a) с (1), мы видим, что в случае равномерного движения тела его путь есть *линейная функция* от времени.

Можно изобразить линейную зависимость пути от времени графически. Отложим по оси абсцисс время t (рис. 2), а по оси

ординат — путь s . Тогда, в соответствии с формулой (5а), зависимость пути s от времени t выразится прямой OB , проходящей через начало координат. За некоторый промежуток времени t , изображаемый на оси абсцисс отрезком Ob , тело пройдет путь s , который изобразится отрезком Oa или равным ему отрезком bB .

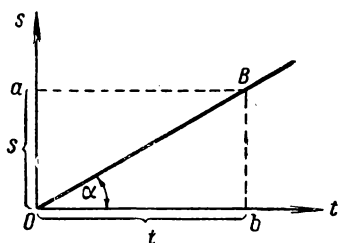


Рис. 2. При равномерном движении зависимость пройденного пути s от времени t изображается прямой OB .

Из рис. 2 имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{bB}{Ob} = \frac{s}{t} = v. \quad (6)$$

Таким образом, на нашем графике скорость v изобразится тангенсом угла α ; чем больше скорость v , тем больший угол α составит прямая OB с осью времени t .

§ 6. Прямолинейное неравномерное движение. При неравномерном движении за одинаковые промежутки времени тело проходит неравные пути. В этом случае можно ввести понятие о *средней скорости* движения. Средняя скорость неравномерного движения за данный промежуток времени $t - t_0$ равна скорости такого равномерного движения, при котором тело прошло бы тот же путь $s - s_0$ за тот же промежуток времени $t - t_0$, что оно проходит, двигаясь неравномерно. Таким образом, обозначая среднюю скорость движения через \bar{v} , имеем

$$\bar{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0}.$$

Значение средней скорости \bar{v} зависит от того промежутка времени, за который она берется. Поэтому средняя скорость является недостаточной характеристикой неравномерного движения. Например, при движении поезда на перегоне между двумя станциями нас может интересоваться не только его средняя скорость на всем перегоне, но и скорости, которые поезд имел на отдельных участках пути. Для этого мы должны, очевидно, разбить путь на отдельные участки Δs и измерить те промежутки времени Δt , в течение которых эти участки проходились, тогда

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

представит собою среднюю скорость на некотором данном участке пути Δs .

Мы получим тем более точную характеристику движения, чем короче выберем те промежутки времени Δt , для которых будем определять среднюю скорость \bar{v} . В принципе промежуток времени Δt может быть выбран настолько малым, что движение в течение этого промежутка времени можно будет практически считать равномерным.

Тогда средняя скорость \bar{v} за этот малый промежуток времени даст нам достаточную характеристику движения в данный момент времени; другими словами, она представит скорость v в данной точке пути.

Таким образом, *скоростью неравномерного движения в данной точке пути (или в данный момент времени) является предел, к которому стремится средняя скорость при бесконечном уменьшении промежутка времени Δt , за который она определяется.*

Математически это выражается следующим образом:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{v}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \quad (2)$$

Из дифференциального исчисления известно, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$ есть производная от пути по времени; таким образом, скорость численно равна производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2a)$$

Сказанное может быть пояснено графическим построением.

Графически зависимость пути от времени при неравномерном движении выразится кривой. Вид этой кривой различен для различных движений; для некоторого частного случая он изобразится кривой OAB , представленной на рис. 3.

Средняя скорость \bar{v} за промежуток времени Δt есть:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha'.$$

Вводя среднюю скорость \bar{v} , мы заменяем хордой AB действительную зависимость пути от времени, выражаемую за промежуток времени

Δt дугой \widehat{AB} , т. е. неравномерное движение заменяем равномерным. Бесконечно уменьшая промежуток времени Δt , по сказанному, получим скорость в данный момент времени t , причем секущая AB в пределе станет касательной AD , хорда AB и дуга \widehat{AB} сольются, т. е. неравномерное движение за бесконечно малый промежуток времени Δt будет совпадать с равномерным.

Таким образом:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между осью Ot и касательной к данной точке A кривой, изображающей зависимость пути от времени.

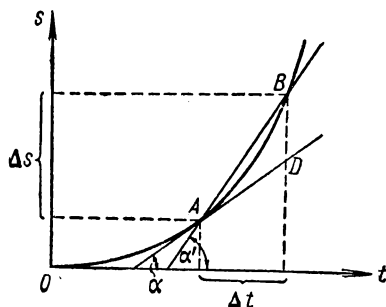


Рис. 3. Скорость неравномерного движения определяется тангенсом угла α , образованного касательной с осью Ot .

Посмотрим, как изобразится при неравномерном движении пройденный путь в зависимости от скорости.

Построим график, отложив по оси абсцисс время t , а по оси ординат скорость v . Кривая ABC , изображенная на рис. 4, соответствует тому частному случаю, при котором скорость, имевшая в начальный момент времени значение v_0 , сперва со временем уменьшалась, а затем стала возрастать.

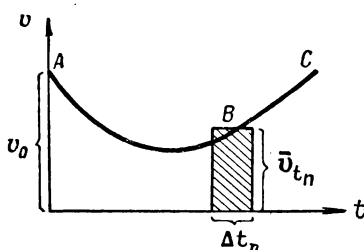


Рис. 4. Путь, проходимый за бесконечно малый промежуток времени Δt_n , изображается площадью заштрихованного столбика.

Разобьем все время движения t на очень большое число очень малых промежутков времени Δt . По формуле (1) путь, пройденный за n -й из этих промежутков, равен $\Delta s_n = \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta t_n$, где \bar{v}_{t_n} — средняя скорость за промежуток времени Δt_n . Графически он изобразится площадью узкого прямоугольника, заштрихованного на

рис. 4. Весь путь s , пройденный за все время t , равен сумме всех малых путей Δs_n , пройденных за отдельные промежутки времени Δt_n :

$$s = \sum_n \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta t_n \quad (3)$$

т. е. равен сумме площадей всех прямоугольников, на которые окажется разбитой фигура $OABC$ (рис. 5). В пределе при бесконечно малых промежутках времени Δt_n прямоугольники станут бесконечно узкими, и сумма их площадей совпадет с площадью фигуры $OABC$. Таким образом, весь путь s графически изобразится площадью, заключенной между кривой AB , дающей зависимость скорости от времени, и ординатами, соответствующими началу и концу отрезка времени t , за которое рассматривается путь.

§ 7. Равнопеременное прямолинейное движение. Ускорение.

Равнопеременным движением называется движение, при котором скорость v за равные и произвольно выбранные промежутки времени Δt меняется на одинаковую величину Δv . В том случае, когда Δv одного знака со скоростью, т. е. когда скорость возрастает по численному значению со временем, движение называется *равномерно-ускоренным*; в том случае, когда Δv обратного знака,

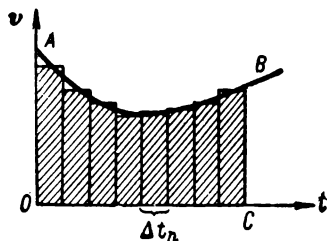


Рис. 5. Путь, проходимый за конечный промежуток времени t , изображается площадью фигуры $OABC$.

т. е. когда скорость убывает по численному значению со временем, движение называется *равномерно-замедленным*.

Для характеристики того, насколько быстро со временем меняется скорость, вводится физическая величина, называемая *ускорением*. Ускорение w равнопеременного прямолинейного движения есть физическая величина, прямо пропорциональная приращению скорости и обратно пропорциональная тому промежутку времени, за который произошло это приращение.

Пусть в момент времени t_0 скорость имела значение v_0 , а в момент времени t — значение v , тогда за время $t - t_0$ скорость изменилась на $v - v_0$, и математически ускорение w представится соотношением:

$$w = k \frac{\Delta v}{\Delta t} = k \frac{v - v_0}{t - t_0}, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, в которых измеряются скорость v и время t . Ускорение равнопеременного движения есть величина постоянная. Если положить коэффициент пропорциональности $k = 1$, то ускорение

$$w = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad (1a)$$

при этом в CGS-системе за единицу ускорения должно быть принято ускорение такого движения, при котором скорость меняется на 1 см/сек за каждую секунду; сокращенно эта единица ускорения обозначается 1 см/сек². В MKS-системе единиц за единицу ускорения применяется ускорение такого движения, при котором скорость меняется на 1 м/сек за каждую секунду (сокращенно 1 м/сек²).

Из формулы (1) при $k = 1$ имеем

$$v = v_0 + w(t - t_0). \quad (2)$$

Таким образом, при равнопеременном движении скорость меняется со временем линейно. Если $t_0 = 0$, то по (2):

$$v = v_0 + wt; \quad (2a)$$

наконец, если начальная скорость $v_0 = 0$, то

$$v = wt. \quad (26)$$

Ускорение w имеет тот же знак, что и изменение скорости Δv , поэтому при равномерно-ускоренном движении ускорение w положительно, а при равномерно-замедленном — отрицательно.

Определим путь, проходимый при равнопеременном движении.

Положим для простоты начальную скорость $v_0 = 0$, тогда по (26) графически зависимость скорости от времени (считаем $w > 0$)

изобразится прямой OA (рис. 6), а следовательно, по сказанному в предыдущем параграфе, путь s , пройденный за время t , изобразится площадью фигуры OAB ; так как в данном случае эта фигура есть треугольник, то ее площадь равна

$$\frac{AB \cdot OB}{2} = \frac{v \cdot t}{2}.$$

Отсюда путь s , пройденный за время t :

$$s = \frac{vt}{2}. \quad (3)$$

Подставляя сюда вместо скорости v ее значение через ускорение w и время t по (2б), получим

$$s = \frac{wt^2}{2}. \quad (4)$$

Если скорость в начальный момент не равнялась нулю и имела значение v_0 , то

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2}. \quad (4a)$$

Примером равнопеременного движения может служить свободное падение тел у поверхности Земли. В этом случае ускорение

$$w = g = 9,81 \text{ м/сек}^2.$$

Падение тел в воздухе можно считать равнопеременным только в тех случаях, когда роль сопротивления воздуха мала (камень, падающий с небольшой высоты); когда же роль сопротивления становится большой, падение тел в воздухе делается равномерным (см. § 16), так, например, мелкие капли воды, образующие туман, опускаются в воздухе равномерно, также равномерно опускается в воздухе парашютист с раскрытым парашютом.

Рассмотрим несколько примеров равнопеременного движения.

Пример 1. Камень брошен с башни высотой 20 м с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: сколько времени камень падает? С какой скоростью он подлетит к Земле?

Решение. Так как движение камня по условию может считаться равнопеременным, то пользуемся соотношениями, выведенными в данном параграфе.

Из формулы (4) определяем время, в течение которого камень падал:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{w}}, \quad (5)$$

где s — путь, пройденный камнем, т. е. высота, с которой он падал.

Пользуясь для ускорения значением $w = g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, найдем

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9,81}} \text{ сек.} \cong 2 \text{ сек.}$$

Скорость, приобретенная к концу движения:

$$v = wt = gt \cong 9,81 \cdot 2 \text{ м/сек} \cong 19,6 \text{ м/сек.}$$

Скорость v , приобретенную к концу пути s , можно выразить и алгебраически через пройденный путь s и ускорение w . Для этого подставляем в выражение $v = wt$ вместо t его значение по (5), тогда

$$v = wt = w \sqrt{\frac{2s}{w}},$$

откуда

$$v = \sqrt{2sw}. \quad (6)$$

Пример 2. Камень, брошенный вертикально вверх, достигает высоты 30 м. Через сколько времени он достигнет этой высоты и через сколько времени он упадет обратно на Землю? Какую начальную скорость надо ему сообщить?

Решение. Движение камня, брошенного вертикально вверх, будет в той своей части, где камень поднимается вверх, равномерно-замедленным, поэтому его ускорение $w = -g$ и высота его поднятия

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (7)$$

где v_0 — начальная скорость камня и t — время, в течение которого он поднимается вверх. Начальную скорость v_0 определим из условия, что скорость v_s в наивысшей точке равна нулю, т. е.

$$v_s = v_0 - gt = 0,$$

откуда

$$v_0 = gt \quad (8)$$

и, следовательно, по (7),

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

откуда искомое время поднятия камня на высоту s равно

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Сравнивая это время с временем, определяемым равенством (5), находим, что время поднятия камня на высоту s равно времени его свободного падения с той же высоты. Подставляя найденное значение t в (8), получим

$$v_0 = \sqrt{2sg}.$$

Следовательно [ср. с формулой (6)], и скорость, с которой камень надо бросить вертикально вверх, равна скорости, какую он приобретает, свободно падая с той же высоты s . Пользуясь выведенным соотношением и численным значением, данным в примере, находим:

$$v_0 = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 9,81} \text{ м/сек} \cong 24,2 \text{ м/сек};$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9,81}} \text{ сек.} \cong 2,48 \text{ сек.}$$

§ 8. Ускорение произвольного прямолинейного движения. В общем случае неравномерного прямолинейного движения можно ввести понятие о *среднем ускорении*. Среднее ускорение \bar{w} за данный промежуток времени Δt равно ускорению тела, движущегося равномерно и приобретающего за тот же промежуток времени Δt то же приращение скорости Δv , что и рассматриваемое тело:

$$\bar{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1)$$

Понятие об *ускорении в данный момент* вводится так же, как и понятие о скорости в данный момент. Мы уменьшаем промежуток времени Δt настолько, чтобы движение за этот промежуток времени можно было практически считать равнопеременным. Среднее ускорение \bar{w} за такой промежуток времени и даст нам ускорение в данный момент. Таким образом, под ускорением в данный момент подразумеваем предел, к которому стремится среднее ускорение \bar{w} при бесконечном убывании того промежутка времени Δt , за который оно берется:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{w}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right), \quad (2)$$

где Δv — бесконечно малое изменение скорости за бесконечно малый промежуток времени Δt .

Из дифференциального исчисления имеем

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}, \quad (2a)$$

т. е. ускорение численно равно производной от скорости по времени. Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то

$$w = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (26)$$

т. е. ускорение численно равно производной от пути по времени.

Эти соотношения так же, как и в случае скорости, мы можем пояснить графически. Пусть на рис. 7 кривая OAB представляет зависимость скорости от времени. Среднее ускорение \bar{w} за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ равно

$$\bar{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \operatorname{tg} \beta_1,$$

где β_1 — угол между осью Ot и секущей AB . Бесконечно уменьшая промежуток времени Δt , мы стремим секущую AB к касательной AC и, таким образом, в пределе:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол между осью Ot и касательной AC в данной точке A к кривой, изображающей зависимость скорости от времени.

Рис. 7. Ускорение неравномерного движения определяется тангенсом угла β , образованного касательной с осью Ot .

§ 9. Скорость и ускорение как векторы. Скорость характеризуется не только численным значением, но и направлением. Для описания движения тела недостаточно указать численное значение

его скорости, необходимо еще указать, в каком направлении оно движется.

Величины, характеризующие не только численным значением, но и направлением, называются *векторами*. Величины, для определения которых достаточно задать только их численное значение, называются *скалярами* (например, промежуток времени, масса, плотность и т. д.).

Вектор может быть изображен стрелкой, длина которой в некоторых произвольных единицах длины равна численному значению вектора, а направление совпадает с направлением вектора. Векторы принято обозначать жирными буквами, а их численные значения — теми же обычными буквами; например, буква **A** означает вектор, а *A* — его численное значение. Знак минус перед вектором означает, что вектор $-\mathbf{A}$ направлен в сторону, противоположную вектору **A**, будучи одинаковой с ним длины.

Опыты показывают, что физические величины, являющиеся векторами, складываются иначе, чем алгебраические величины. Способ сложения векторов определяется правилом параллелограмма: при сложении двух векторов **A** и **B** суммарный вектор **C** определяется диагональю параллелограмма, сторонами которого служат векторы **A** и **B** (рис. 8).

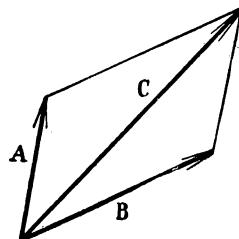


Рис. 8. При сложении двух векторов **A** и **B** результирующий вектор **C** изображается диагональю параллелограмма, сторонами которого служат векторы **A** и **B**.

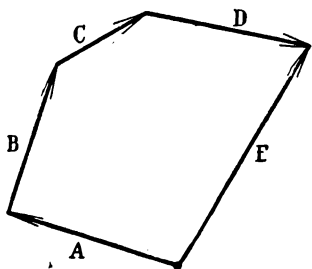


Рис. 9. Вектор **F**, являющийся суммой векторов **A**, **B**, **C**, **D**, изображается замыкающей ломаной линии, составляющие которой — векторы **A**, **B**, **C**, **D**.

При сложении более чем двух векторов можно найти суммарный вектор путем последовательного применения правила параллелограмма. Тот же результат получится, если построить ломаную, составляющие которой по величине и направлению совпадают со слагаемыми векторами **A**, **B**, **C**, **D** (рис. 9). Суммарный вектор **F** определится замыкающей, проведенной от начала ломаной к ее концу.

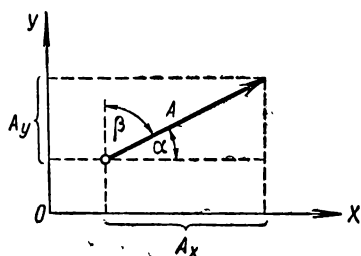
Разность двух векторов **A** и **B** можно определить, введя вектор $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$, тогда

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}'. \quad (1)$$

Построив вектор **B'**, численно равный вектору **B**, но направленный в противоположную сторону, найдем вектор **C**, являющийся суммой векторов **A** и **B'**. В силу равенства (1), вектор **C** представит одновременно и разность векторов $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Вектор можно определить либо непосредственно, задав его по величине и направлению, либо задав его проекции на координатные

оси. В случае плоской задачи и пользования прямоугольной системой координат (рис. 10) вектор A определится его проекциями на оси координат A_x и A_y . Из рис. 10 имеем



$$A_x = A \cos \alpha; \quad A_y = A \cos \beta = A \sin \alpha;$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (2)$$

Направление вектора A определится либо углом α , который он составляет с осью OX , либо углом β , который он составляет с осью OY .

Как видно из рис. 10:

Рис. 10. Отрезки A_x и A_y являются проекциями вектора A на оси OX и OY .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_y}{A_x}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{A_x}{A_y}. \quad (3)$$

Скорость прямолинейного движения есть *вектор*, направленный вдоль той прямой, по которой движется тело, и в ту сторону, куда оно движется. Представление о скорости как о векторе подтверждается совпадением результатов расчета движений, произведенных на основании векторного правила сложения скоростей, с результатом наблюдений над действительными движениями. Если тело участвует одновременно в двух прямолинейных равномерных движениях, происходящих со скоростями v_1 и v_2 (рис. 11), то его результирующее движение характеризуется вектором скорости v , получаемым из v_1 и v_2 в результате их векторного сложения.

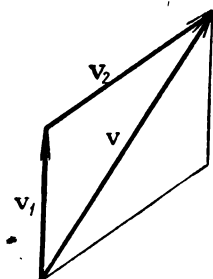


Рис. 11. Результирующая скорость v определяется диагональю параллелограмма, сторонами которого служат складываемые скорости v_1 и v_2 .

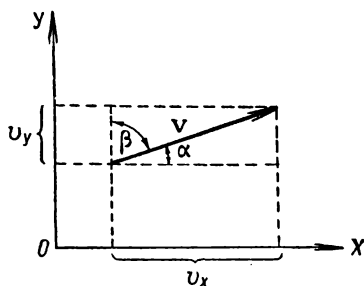


Рис. 12. Разложение скорости v на составляющие v_x и v_y .

Вектор скорости v можно разложить на его составляющие вдоль любых заданных направлений, например, в плоской задаче его можно разложить на составляющие вдоль осей координатной системы OXY (рис. 12). В этом случае формулы (2) могут быть переписаны в виде:

$$v_x = v \cos \alpha; \quad v_y = v \cos \beta = v \sin \alpha; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4)$$

Пример. Найти по величине и направлению относительно берега скорость v человека, движущегося поперек парохода со скоростью $v_1 = 2$ м/сек; пароход движется со скоростью $v_2 = 8$ м/сек.

Решение. Скорость v человека относительно берега является векторной суммой скоростей v_1 и v_2 (рис. 13). Ее численное значение $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4 + 64}$ м/сек $= \sqrt{68}$ м/сек $= 8,25$ м/сек. Направление скорости v определится углом α , который она составляет с направлением движения парохода; из рис. 13:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{8} = 0,25,$$

откуда $\alpha = 14^\circ 03'$.

Ускорение, как и скорость, есть *вектор*, так как оно характеризуется, кроме численного значения, еще и направлением.

В случае прямолинейного движения ускорение всегда направлено вдоль той же прямой, вдоль которой направлена скорость и вдоль которой совершается движение. При этом ускорение, как мы уже отмечали, может быть направлено либо в ту же сторону, что и скорость (ускоренное движение), либо в обратную (замедленное движение). Если ускорение направлено под некоторым углом к скорости, то скорость меняется не только по величине, но и по *направлению*. В этом случае тело движется криволинейно.

§ 10. Криволинейное движение.

Если линия, описываемая материальной точкой при ее движении, или как говорят, ее *траектория*, представляет собою кривую линию, то движение называется *криволинейным*. Для того чтобы определить вектор скорости при криволинейном движении, рассмотрим малый промежуток времени Δt ;

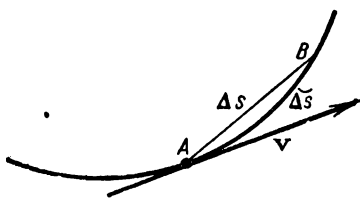


Рис. 14. Вектор скорости v направлен при криволинейном движении по касательной к траектории.

за этот промежуток времени материальная точка пройдет малую дугу Δs (рис. 14). Если мы будем бесконечно уменьшать промежуток времени, то и дуга Δs станет бесконечно уменьшаться и в пределе сольется со стягивающей ее хордой Δs . Криволинейное движение в пределе совпадает на бесконечно малом участке с прямолинейным. Поэтому скорость криволинейного движения в данной точке A численно окажется равной

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right), \quad (1)$$

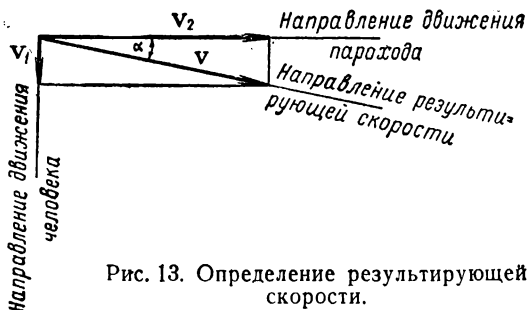


Рис. 13. Определение результирующей скорости.

а ее направление совпадет с направлением бесконечно малой хорды Δs , стягивающей бесконечно малую дугу Δs . Но так как бесконечно малая хорда в пределе совпадает по направлению с касательной к данной точке A , то *вектор скорости \mathbf{v} при криволинейном движении направлен в каждый данный момент по касательной к траектории тела, проведенной в направлении движения.*

Если скорость \mathbf{v} при криволинейном движении имеет постоянное численное значение, т. е. если за одинаковые и произвольно выбранные промежутки времени материальная точка проходит дуги одинаковой длины, то криволинейное движение называется равномерным. Однако надо помнить, что по направлению скорость и в этом случае непрерывно меняется: в каждой точке пути она направлена по касательной, а для криволинейного пути в разных точках касательная имеет разные направления.

Таким образом, *при криволинейном движении вектор скорости никогда не остается постоянным: он все время меняется.* В случае равномерного криволинейного движения он меняется только по

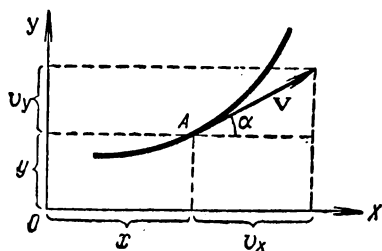


Рис. 15. Представление криволинейного движения с помощью его составляющих вдоль координатных осей.

направлению, сохраняя постоянное численное значение; в общем случае неравномерного криволинейного движения он меняется и по величине и по направлению.

Для рассмотрения криволинейного движения весьма удобно определять положение тела с помощью координат, например, в случае плоского движения — с помощью координат x и y (рис. 15).

Также вместо самого вектора скорости \mathbf{v} удобно рассматривать в каждый данный момент его проекции на координатные оси v_x и v_y , тогда численное значение вектора \mathbf{v} в плоской задаче определится значением:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (2)$$

а его направление — углом α между осью OX и прямой, вдоль которой направлен вектор скорости.

Из рис. 15 имеем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (3)$$

Вектору смещения тела Δs соответствуют проекции на координатные оси Δx и Δy . Согласно правилам дифференциального исчисления, проекциями скорости

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

будут величины

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{dy}{dt}. \quad (4)$$

Здесь dx/dt и dy/dt представляют собой производные координат по времени. Их можно вычислить, если координаты движущегося тела заданы в виде определенных функций от времени: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$.

Рассмотрим несколько примеров криволинейного движения.

Пример 1. Тяжелое тело брошено с начальной скоростью, численно равной v_0 и составляющей угол α с горизонтом. Найти: 1) вид траектории, 2) высоту наибольшего подъема, 3) дальность полета.

Решение. Вводя координатные оси, как показано на рис. 16, имеем следующие выражения для составляющих скорости тела (сопротивлением воздуха пренебрегаем):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где g — ускорение силы тяжести. Координаты x и y тела, как функции времени, выразятся:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Исключая из выражений для x и y время t , получим уравнение траектории:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Так как α есть заданный угол и v_0 — значение начальной скорости, то коэффициенты при x и x^2 являются постоянными величинами; обозначая их через a и b , получим

$$y = ax - bx^2,$$

что представляет собой уравнение *параболы*. Таким образом, тяжелое тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе.

В высшей точке траектории $v_y = 0$, откуда

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

и время t' поднятия на наибольшую высоту равно

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Наибольшая высота поднятия

$$y_{\max} = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (7)$$

Тело упадет на горизонтальную плоскость через время $t = 2t'$, откуда

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полета получим, подставляя это значение t в выражение для x :

$$x_{\max} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \quad (8)$$

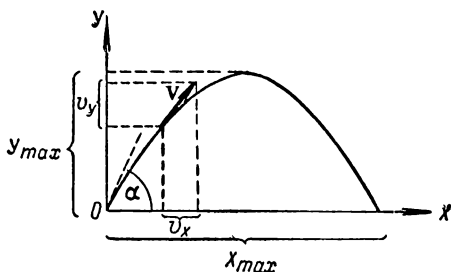


Рис. 16. Траектория тела, брошенного под углом α к горизонту.

Из последней формулы имеем, что при данном v_0 наибольшая дальность полета достигается при $\alpha = 45^\circ$.

Все полученные формулы справедливы лишь для движения тел в пустоте. При бросании тяжелых тел в воздухе существенную роль играет сопротивление воздуха.

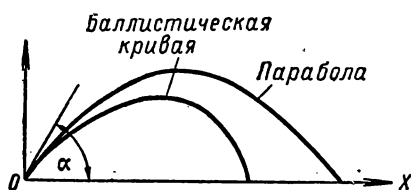


Рис. 17. Сравнение параболической траектории и баллистической кривой.

ной скорости $v_0 = 550$ м/сек и угле бросания 20° , дальность полета получается 19,8 км. Артиллерийский снаряд, имеющий вид цилиндра с конической передней частью, весом 82 кг, при тех же начальных условиях имеет дальность полета всего 8,1 км.

Пример 2. Тяжелое тело брошено с начальной скоростью, численно равной v_0 и составляющей угол α с горизонтом. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти по величине и по направлению скорости: 1) в высшей точке подъема, 2) в точке падения на горизонтальную плоскость.

Решение. Определим сперва направление вектора скорости \mathbf{v} в наивысшей точке подъема, для которой $v_y = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = 0, \text{ откуда } \alpha_1 = 0.$$

Таким образом, в наивысшей точке подъема скорость направлена горизонтально. Численно она равна:

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha} = v_0 \cos \alpha.$$

Определим теперь по направлению и по величине скорость в точке падения. Воспользовавшись выражениями для v_y и для времени t , через которое тело упадет, выведенными в предыдущем примере, получим, что в точке падения $v_y = -v_0 \sin \alpha$, откуда следует, что угол α_2 , определяющий направление скорости в этой точке, будет дан соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

откуда получаем: $\alpha_2 = -\alpha$, т. е. скорость тела в точке падения составляет угол с горизонтом, численно равный углу, который составляла с горизонтом начальная скорость, но только направлена она вниз (рис. 18).

Скорость в точке падения тела равна

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha} = v_0,$$

т. е. скорость в точке падения численно равна начальной скорости.

§ 11. Ускорение при криволинейном движении. Как было указано в предыдущем параграфе, при неравномерном криволинейном движении вектор скорости меняется и по величине, и по направлению.

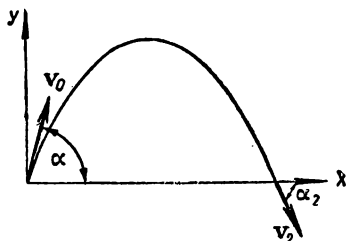


Рис. 18. Скорость v_2 , с которой тело падает, численно равна начальной скорости v_0 .

Изменение вектора скорости $\Delta \mathbf{v}$ за некоторый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ представится *векторной разностью* скоростей \mathbf{v}_2 и \mathbf{v}_1 , которые тело имело в моменты времени $t + \Delta t$ и t . Ускорение при этом численно будет равно

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \right), \quad (1)$$

где $|\Delta \mathbf{v}|$ — численное значение изменения вектора скорости \mathbf{v} ; направлено ускорение в ту сторону, куда направлено бесконечно малое изменение скорости $\Delta \mathbf{v}$. Таким образом, равенство (1) может быть записано также в векторном виде:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right). \quad (1a)$$

Раньше чем более подробно рассмотреть ускорение при криволинейном движении, разберем понятие о *кривизне* кривой линии.

В случае окружности кривизна определяется величиной $C = \frac{1}{R}$, где R — радиус рассматриваемой окружности. Если α есть центральный угол, соответствующий дуге окружности $\overset{\frown}{s}$, то, как известно, между R , α и $\overset{\frown}{s}$ имеет место соотношение:

$$\overset{\frown}{s} = R\alpha. \quad (2)$$

Кругом кривизны плоской линии в некоторой точке A называется предельное положение окружности, проходящей через точку A и две другие точки B_1 и B_2 при их бесконечном приближении к точке A (на рис. 19 кривая проведена сплошной линией, а круг кривизны — пунктирной). Радиус круга кривизны дает *радиус кривизны* рассматриваемой кривой в точке A , а центр этого круга — *центр кривизны* кривой для той же точки A .

Проведем в точках B_1 и B_2 касательные B_1D и B_2E к окружности, проходящей через точки B_1 , A и B_2 . Нормали к этим касательным B_1C и B_2C представят собой радиусы R окружности и пересекутся в ее центре C . Введем угол $\Delta\alpha$ между нормальными B_1C и B_2C ; очевидно, он равен углу между касательными B_1D и B_2E . По формуле (2):

$$R = \frac{\overset{\frown}{\Delta s}}{\Delta\alpha},$$

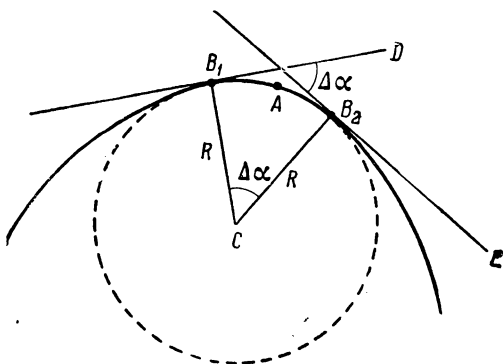
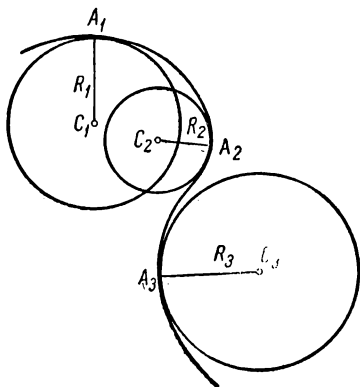


Рис. 19. Нахождение радиуса кривизны дуги $\overset{\frown}{\Delta s}$.

где через $\widetilde{\Delta s}$ обозначена дуга круга $\widehat{B_1AB_2}$. При $\widetilde{\Delta s} \rightarrow 0$, по сказанному, радиус окружности определяет радиус кривизны кривой в точке A . Таким образом, для радиуса кривизны кривой имеем



$$R = \lim_{\widetilde{\Delta s} \rightarrow 0} \left(\frac{\widetilde{\Delta s}}{\Delta \alpha} \right). \quad (2a)$$

Величина, обратная R , даст *кривизну* линии в данной точке: $C = \frac{1}{R}$.

Из рис. 20 видно, что в точке A_1 , где кривая проходит более полого, радиус кривизны имеет большее значение R_1 , а в точке A_2 , где кривая загибается круче, — меньшее значение R_2 . Для кривой в точке A_3 , где выпуклость обращена в другую сторону, чем в точках A_1 и A_2 , центр кривизны также лежит по другую сторону кривой.

Теперь рассмотрим более подробно ускорение тела, движущегося неравномерно по плоской кривой. Пусть \mathbf{v}_1 есть вектор скорости в точке A кривой (рис. 21), а \mathbf{v}_2 — вектор скорости в точке B . Вектор \mathbf{v}_2 отличается от \mathbf{v}_1 и по величине и по направлению. Проведем из точки A отрезок AC , равный и параллельный отрезку BD , изображающему вектор скорости \mathbf{v}_2 . Тогда отрезок EC , равный разности векторов \mathbf{v}_2 и \mathbf{v}_1 , представит изменение скорости $\Delta \mathbf{v}$ на пути AB . Приближая точку B к точке A , мы будем тем самым стремиться к нулю и промежуток времени Δt , который телу необходимо затратить, чтобы пройти от точки A до точки B . При этом по формуле (1a) мы получим для ускорения в точке A выражение:

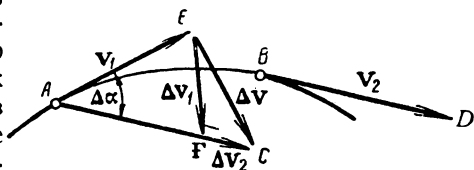


Рис. 21. Изменение скорости $\Delta \mathbf{v}$ при криволинейном движении.

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right).$$

Отложим вдоль AC отрезок $AF = v_1$ и разобьем $\Delta \mathbf{v}$ на две составляющие: $\Delta \mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}_2$. Тогда $\Delta \mathbf{v}_1$ характеризует изменение скорости по направлению, а $\Delta \mathbf{v}_2$ — изменение скорости по величине. Очевидно, $\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2$; подставляя это значение $\Delta \mathbf{v}$ в выражение для ускорения \mathbf{w} , получим

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t} \right).$$

Сложение здесь повсюду векторное. Величина

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} \right) \quad (3)$$

представляет собою ту часть ускорения, которая характеризует изменение скорости только по направлению.

Обозначим угол между AE и AC через $\Delta\alpha$; по построению это есть угол между векторами скоростей \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , а следовательно, и между касательными к нашей кривой в точках A и B . При малом угле $\Delta\alpha$, как видно из рис. 21, можно написать:

$$EF = AE \cdot \Delta\alpha,$$

но так как $EF = \Delta v_1$ и $AE = v_1$, то

$$\Delta v_1 = v_1 \Delta\alpha.$$

Воспользовавшись этим выражением для Δv_1 , получим по (3) для численного значения составляющей ускорения w_n :

$$w_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right).$$

Величину, стоящую под знаком предела, помножим и поделим на длину дуги $\Delta s = \widehat{AB}$; кроме того, заметим, что при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta s \rightarrow 0$. Тогда находим

$$w_n = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left(v_1 \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right).$$

Но $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v_1$, а по (2а) $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right) = \frac{1}{R}$. Воспользовавшись

этими выражениями, получим для w_n :

$$w_n = \frac{v_1^2}{R}, \quad (4)$$

где v_1 — скорость тела в точке A , а R — радиус кривизны кривой в той же точке. В пределе при $\Delta\alpha \rightarrow 0$ мы имеем, что $\angle AEF \rightarrow 90^\circ$ и, следовательно, вектор $\Delta \mathbf{v}_1$ располагается нормально к скорости \mathbf{v}_1 , которая направлена по касательной к кривой в точке A . Таким образом, \mathbf{w}_n , совпадающее по направлению с $\Delta \mathbf{v}_1$, оказывается расположенным нормально (перпендикулярно) к скорости и направленным к центру кривизны пути в данной точке. В соответствии с этим часть полного ускорения \mathbf{w}_n носит название *нормального* или *центростремительного ускорения*. Из приведенных рассуждений мы легко определим и направление второй части ускорения \mathbf{w}_t ; в самом деле, при $\Delta\alpha \rightarrow 0$ отрезок AC стремится по направлению к \mathbf{v}_1 , откуда $\Delta \mathbf{v}_2$, а следовательно, и \mathbf{w}_t оказываются направленными вдоль той же прямой, что и скорость \mathbf{v}_1 , т. е. вдоль касательной к кривой в точке A .

Поэтому часть ускорения w_t носит название *касательного* или *тангенциального ускорения*.

Резюмируя, мы можем сказать: *при криволинейном движении полное ускорение w может быть разбито на две составляющие: 1) тангенциальное ускорение w_t , характеризующее изменение скорости по величине, и 2) нормальное ускорение w_n , характеризующее изменение скорости по направлению*. При этом

$$w_n = \frac{v^2}{R}, \quad (5)$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке и v — значение скорости тела в этой точке; направлено нормальное ускорение по нормали к кривой (к центру кривизны).

Тангенциальное ускорение:

$$w_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right), \quad (6)$$

где Δv — изменение численного значения вектора скорости; направлено тангенциальное ускорение по касательной к траектории. Очевидно (рис. 22), нормальное ускорение w_n и тангенциальное w_t взаимно *перпендикулярны*, отсюда полное ускорение w численно равно

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2}. \quad (7)$$

Направление вектора полного ускорения w определится либо углом β , который w составляет с радиусом кривизны, либо углом α , который w составляет с касательной:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_t}{w_n}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_n}{w_t}. \quad (8)$$

Рис. 22. При криволинейном движении полное ускорение w разлагается на тангенциальное ускорение w_t и нормальное (центростремительное) w_n .

При равномерном движении по кривой $w_t = 0$ и $w = w_n$; таким образом, при равномерном криволинейном движении тангенциальное ускорение равно нулю, и полное ускорение, совпадая с нормальным, *направлено в каждой точке траектории по нормали к ней, к центру кривизны*. Оно выражает в этом случае тот факт, что скорость, оставаясь постоянной по величине, все время *меняет свое направление*.

Полученные нами формулы относятся к движению по плоской кривой, однако их легко обобщить и на случай неплоского криволинейного движения.

П р и м е р. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тяжелого тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью v_0 (пренебрегая сопротивлением воздуха).

Решение. Полным ускорением в данном случае будет ускорение силы тяжести g ; оно направлено вертикально вниз и постоянно по величине. Отсюда (рис. 23) имеем для нормального ускорения выражение

$$w_n = g \sin \alpha \quad (9)$$

и для тангенциального

$$w_t = g \cos \alpha. \quad (10)$$

Значение угла α определим из того соображения, что скорость нашего тела v направлена так же, как w_t , и что ось OY на рис. 23 направлена вертикально вниз; тогда

$$v_x = v_0; \quad v_y = gt,$$

откуда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

и

$$\sin \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

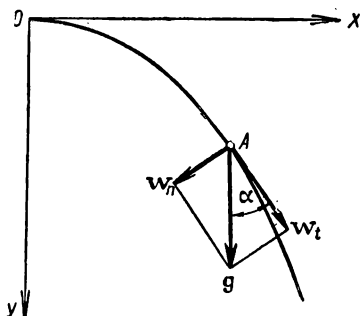


Рис. 23. Ускорение горизонтально брошенного тела.

Подставляя эти значения для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в (9) и (10), найдем

$$w_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}; \quad w_t = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

При $t=0$, т. е. в начальный момент, когда $w_t=0$ и $w_n=w=g$, нормальное ускорение совпадает с полным. По мере падения тела нормальное ускорение убывает (увеличивается радиус кривизны, траектория брошенного тела становится менее искривленной) и начинает возрастать тангенциальное ускорение. При $t \rightarrow \infty$ имеем: $w_t \rightarrow w=g$ и $w_n \rightarrow 0$.

§ 12. Кинематика твердого тела. Угловые скорость и ускорение. Все реально существующие твердые тела более или менее деформируются под влиянием приложенных к ним сил; отдельные их части могут смещаться друг относительно друга. Для того чтобы упростить рассуждение, введем понятие об *абсолютно твердом теле*. Под абсолютно твердым телом подразумевается такое воображаемое тело, которое вовсе не деформируется под влиянием приложенных к нему сил. В абсолютно твердом теле невозможны перемещения отдельных его частей друг относительно друга. Движение абсолютно твердого тела сводится к *поступательному* движению и к *вращению*.

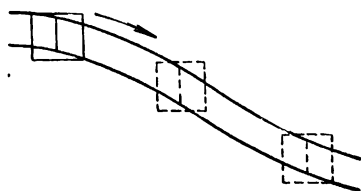


Рис. 24. Поступательное движение твердого тела.

Поступательное движение твердого тела — это такое движение, при котором любая прямая линия, проведенная в теле и неизменно связанная с ним, перемещается, оставаясь параллельной самой себе (рис. 24). При поступательном движении все точки твердого тела обладают одинаковыми скоростями v и одинаковыми ускорениями w .

Вращательное движение — это такое движение, при котором все точки твердого тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, являющейся *осью вращения* (рис. 25).

В общем случае твердое тело может одновременно совершать и поступательное и вращательное движения. Наконец, и сама ось вращения может менять свое положение относительно тела; в этом случае для каждого данного момента времени говорят о вращении вокруг мгновенной оси.

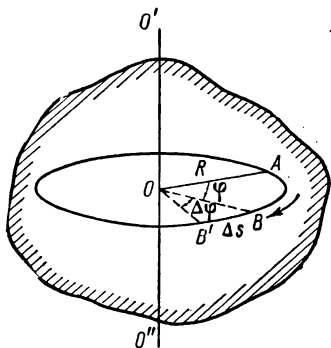


Рис. 25. Вращательное движение твердого тела.

Введем понятие об *угловой скорости*. Для этого определим положение некоторой точки B вращающегося тела (рис. 25) углом φ , который образован радиусом OB с некоторым начальным радиусом OA . При вращении тела угол φ непрерывно меняется. Угловой скоростью равномерно вращающегося тела называется физическая величина ω , пропорциональная углу $\Delta\varphi$, на который повернется радиус OB , и обратно пропорциональная промежутку времени Δt , за который радиус повернулся на этот угол $\Delta\varphi$:

$$\omega = k \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Если положить $k = 1$, то

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (2)$$

при этом, измеряя $\Delta\varphi$ и Δt в определенных единицах, мы должны выбрать для измерения ω такие единицы, чтобы равенство (2) выполнялось. Измеряя, как обычно, углы в радианах, а время в секундах, мы должны за единицу угловой скорости выбрать угловую скорость такого движения, при котором угол φ меняется на один радиан за одну секунду; эту единицу угловой скорости можно обозначить *радиан/сек*, обычно ее обозначают просто $\frac{1}{\text{сек}}$ или сек^{-1} .

Значение угловой скорости ω данного вращающегося твердого тела не зависит от выбора точки B , так как угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается за данное время Δt радиус OB , не зависит от положения точки B .

Найдем связь между линейной скоростью v точки B и угловой скоростью вращения тела ω .

Пусть при изменении угла на $\Delta\varphi$ точка B проходит по окружности дугу Δs , тогда ее линейная скорость численно равна

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

с другой стороны (см. рис. 25),

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot R,$$

или по (2)

$$v = \omega R, \quad (3)$$

где R — расстояние точки B от оси вращения. Чем дальше отстоит точка B от оси вращения, тем больше, при данной угловой скорости ω , ее линейная скорость v . Различные точки вращающегося твердого тела имеют различные линейные скорости.

Свяжем угловую скорость с *периодом обращения* тела T . За время $\Delta t = T$ тело совершает полный оборот, а угол φ возрастает на 2π , т. е. $\Delta\varphi = 2\pi$, откуда по (2):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

Наконец, введем в рассмотрение *число оборотов* n в единицу времени. Так как один оборот совершается за время T , то, следовательно, за единицу времени будет совершено оборотов:

$$n = \frac{1}{T}. \quad (5)$$

Отсюда по (4) получаем еще одно выражение для угловой скорости вращения тела:

$$\omega = 2\pi n. \quad (6)$$

Каждая точка вращающегося тела, двигаясь по окружности, имеет нормальное ускорение:

$$w_n = \frac{v^2}{R},$$

где v — ее линейная скорость, а R — расстояние от оси вращения. Подставляя сюда вместо линейной скорости v ее значение через угловую скорость ω по (3), найдем

$$w_n = \omega^2 R. \quad (7)$$

Так как все точки вращающегося твердого тела обладают одной и той же угловой скоростью ω , то из формулы (7) видно, что чем дальше от оси вращения отстоит рассматриваемая точка вращающегося твердого тела, тем большее нормальное ускорение она имеет.

Используя формулы (5) и (6), мы можем придать выражению (7) еще следующий вид:

$$\omega_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (8)$$

или

$$\omega_n = 4\pi^2 n^2 R. \quad (8a)$$

В случае *неравномерного* движения по окружности вводим понятие об угловой скорости ω в данный момент:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right). \quad (9)$$

При этом связь между угловой скоростью ω в данный момент и линейной скоростью v в данный момент сохраняется та же, что между ω и v при равномерном вращении [формула (3)].

При неравномерном вращении угловая скорость ω меняется со временем. Для характеристики этого изменения вводится *угловое ускорение* β , представляющее собою, в случае равнопеременного вращения, физическую величину, прямо пропорциональную изменению угловой скорости $\Delta \omega$ и обратно пропорциональную тому промежутку времени Δt , за который это изменение произошло. В общем случае неравномерного вращения угловое ускорение в данный момент равно

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right). \quad (10)$$

Из дифференциального исчисления имеем

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (9a)$$

и для углового ускорения

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (10a)$$

Пример 1. Определить угловую и линейную скорости точек на поверхности земного шара, а также их нормальное ускорение.

Решение. Угловая скорость:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ сек.}^{-1} \cong 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1};$$

она одна и та же для всех точек земного шара.

Линейная скорость точек на широте φ (рис. 26) равна

$$v = \omega R_1 = \omega R \cos \varphi,$$

где R — радиус земного шара. Подставляя вместо ω ее численное значение и зная, что $R = 6370 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, получим

$$v = 4,65 \cdot 10^3 \cos \varphi \text{ м/сек.}$$

Нормальное ускорение ω_n на широте φ равно

$$\omega_n = \omega^2 R_1 = \omega^2 R \cos \varphi.$$

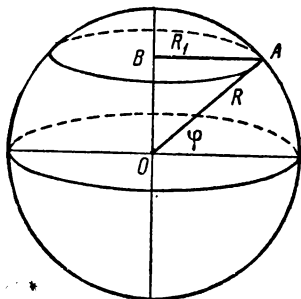


Рис. 26. Точка A , находящаяся на земном шаре на широте φ , описывает окружность радиуса R_1 .

Подставляя вместо ω и R их численные значения, получим

$$w_n = 3,4 \cos \varphi \text{ см/сек}^2.$$

Пример 2. Колесо радиуса $r = 10$ см вращается ускоренно так, что его число оборотов возрастает на $n_0 = \frac{1}{2}$ оборота за каждую секунду. Найти к концу второй секунды: 1) угловую скорость колеса, 2) линейную скорость точек на его ободе, 3) нормальное, тангенциальное и полное ускорения точек на ободе.

Решение. Число оборотов n к концу второй секунды будет

$$n = n_0 t = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{1}{\text{сек}} = 1 \text{ сек}^{-1}.$$

Угловая скорость ω к концу второй секунды:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi n_0 t = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \text{ сек}^{-1} = 6,28 \text{ сек}^{-1}.$$

Линейная скорость точек на ободе колеса к концу второй секунды:

$$v = \omega R = 6,28 \cdot 10 \text{ см/сек} = 62,8 \text{ см/сек} = 0,628 \text{ м/сек}.$$

Нормальное ускорение точек на ободе:

$$w_n = \omega^2 R = 6,28^2 \cdot 10 \text{ см/сек}^2 = 394,4 \text{ см/сек}^2.$$

Тангенциальное ускорение w_t найдем из того соображения, что

$$v = \omega R = 2\pi n_0 R t,$$

т. е. v возрастает равномерно со временем, следовательно, для него, как для случая равнопеременного движения, должно иметь место равенство $v = w_t t$, где w_t — искомое тангенциальное ускорение, откуда

$$w_t = 2\pi n_0 R = 6,28 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ см/сек}^2 = 31,4 \text{ см/сек}^2.$$

Полное ускорение

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = \sqrt{394,4^2 + 31,4^2} \text{ см/сек}^2 = 396,5 \text{ см/сек}^2.$$

Направление полного ускорения определим из рис. 22, откуда видно, что угол α , который оно составит с касательной к окружности, определится равенством:

$$\sin \alpha = \frac{w_n}{w} = \frac{394,4}{396,5} = 0,9965,$$

откуда $\alpha = 85^\circ 30'$. Таким образом, полное ускорение направлено под углом $85^\circ 30'$ к касательной, или, что то же самое, под углом $\beta = 4^\circ 30'$ к радиусу.

§ 13. Угловая скорость как вектор. Движение по окружности заданного радиуса R будет в том случае полностью охарактеризовано, если заданы: 1) *угловая скорость* ω (или линейная скорость v), 2) *плоскость*, в которой лежит окружность, и 3) *направление вращения*. Последняя характеристика необходима, так как движение по окружности, рассматриваемое с определенной стороны плоскости, может происходить либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки. Однако все эти три характеристики могут быть даны с помощью одного

вектора, если условиться проводить этот вектор перпендикулярно к плоскости и сопоставлять направлению вектора определенное направление вращения. Последнее делается по правилу буравчика: сопоставляем направление вектора с поступательным движением буравчика, а вращение — с направлением вращения ручки буравчика (рис. 27). Тогда для характеристики вращения

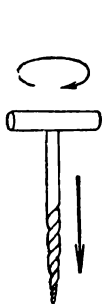


Рис. 27.
Правило
бурав-
чика.

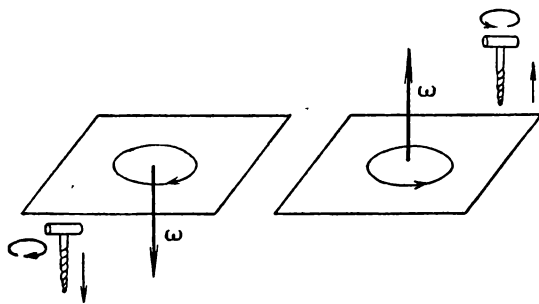


Рис. 28. Вектор угловой скорости проводится перпендикулярно к плоскости, в которой происходит вращение, и в такую сторону, что рассматриваемое с его конца вращение представляется происходящим против часовой стрелки.

вводим такой вектор ω , называемый *вектором угловой скорости*, что: 1) его численное значение равно численному значению угловой скорости ω , 2) проведен он нормально к плоскости, в которой лежит окружность, по которой происходит вращение, и 3) рассматриваемое с конца этого вектора вращение представляется происходящим против часовой стрелки (рис. 28). Изображение угловой скорости с помощью вектора оправдывается тем, что в случае, если тело принимает участие одновременно в двух вращениях, его результирующее вращение характеризуется вектором, получаемым сложением векторов угловых скоростей слагаемых вращений по правилу параллелограмма.

В векторном анализе вводится понятие о так называемом *векторном произведении*. Под векторным произведением векторов A и B подразумевается вектор C , численное значение которого равно:

$$C = A \cdot B \sin (\angle A, B),$$

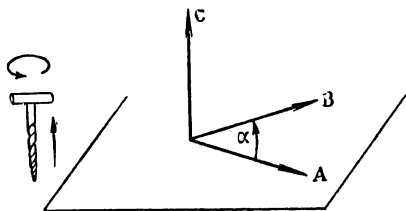


Рис. 29. Векторное произведение.

где A и B — численные значения векторов A и B , а $(\angle A, B)$ — угол между ними (угол α на рис. 29). Вектор C направлен перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы A и B , и в такую сторону, чтобы при рассмотрении с его конца вектор A мог быть совмещен с вектором B путем вращения против часовой стрелки (в сторону меньшего угла; см. рис. 29). Другими словами: при вращении ручки буравчика в направлении от A к B (в направлении меньшего угла) поступательное движение буравчика определит направление вектора C .

Векторное произведение обозначается символом:

$$C = A \times B.$$

Векторное произведение не обладает свойством коммутативности: векторы $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}' = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ совпадают лишь по численному значению, но направлены в противоположные стороны.

Введение представления об угловой скорости как о векторе позволяет удобно связать вектор линейной скорости \mathbf{v} с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и радиусом-вектором \mathbf{r} , определяющим положение материальной точки относительно оси вращения.

Как видно из рис. 30:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

т. е. \mathbf{v} является векторным произведением $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} .

При рассмотрении угловой скорости как вектора и угловое ускорение β должно рассматриваться как вектор, потому что в этом случае в равенстве

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} \right)$$

величина $\Delta \boldsymbol{\omega}$ представляет собою векторное изменение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

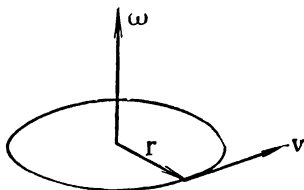


Рис. 30. Связь между векторами $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} и \mathbf{r} .

ГЛАВА II

ДИНАМИКА

§ 14. Первый закон Ньютона. До сих пор мы рассматривали лишь перемещение тел в зависимости от времени, т. е. рассматривали задачи кинематики. Вопросов же, связанных с взаимодействием тел, которое ведет к изменению состояния движения, мы не касались вовсе. Эти вопросы относятся к области *динамики*. Основные положения динамики были сформулированы Ньютоном в его „Математических началах натуральной философии“ (1687) в виде *трех законов движения*.

Первый закон Ньютона может быть сформулирован следующим образом: *всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Здесь тело рассматривается как материальная точка, т. е. из рассмотрения исключается вращательное движение. В § 35 мы увидим, что тело может без воздействия со стороны других тел находиться также в состоянии равномерного вращения.

Из первого закона Ньютона следует, что тело может только тогда изменить состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, когда на него *воздействуют другие материальные тела*.

Проверить первый закон Ньютона непосредственными опытами невозможно, так как в реально окружающей нас обстановке нельзя поставить тела в такие условия, когда на них вовсе не воздействуют другие тела. Однако путем обобщения ряда фактов мы убеждаемся в правильности первого закона Ньютона. Обычно наблюдаемое состояние покоя окружающих нас предметов обусловлено тем, что воздействия различных тел компенсируют друг друга, например, притяжение со стороны земного шара и реакция опоры или подвеса в случае покоящегося тяжелого тела. При движении тело тем дольше сохраняет свою скорость, чем слабее на него воздействуют другие тела: брошенный с некоторой начальной скоростью камень, скользящий по поверхности Земли, тем дольше движется, чем ровнее эта поверхность, т. е. чем меньше на него воздействие других тел.

Окончательно в справедливости первого закона Ньютона нас убеждает, косвенным образом, совпадение всех вытекающих из него следствий с опытными данными.

Останавливаясь более подробно на первом законе Ньютона, надо поставить вопрос: относительно какой системы отсчета (какой координатной системы) устанавливается тот покой или то равномерное и прямолинейное движение, о котором идет речь в первом законе Ньютона. Сам Ньютон подразумевал, что дело здесь идет о некотором абсолютном движении в абсолютном пространстве. Он писал: „Абсолютное пространство по всей своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным... Абсолютное движение есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое“. Такая точка зрения метафизична и не соответствует действительности. Свойства объективно существующего реального пространства определяются самой материей. Положение тел и их движение, как мы уже подчеркивали, могут быть определены лишь относительно других материальных тел; по отношению к различным телам одно и то же тело может двигаться по-разному.

Наблюдения показывают, что первый закон Ньютона справедлив не по отношению к каждой системе отсчета. Рассмотрим несколько примеров. Положим, что системой отсчета является прямолинейно и равномерно движущийся вагон. Тогда, если отвлечься от сотрясений, первый закон Ньютона выполняется: покоящиеся относительно вагона тела не приходят в движение без воздействия на них со стороны других тел и т. д. Но стоит вагону начать заворачивать, тормозить или ускорять ход, как появятся явные нарушения первого закона Ньютона: покоившиеся до того тела могут отклониться или упасть без видимого воздействия на них со стороны окружающих тел. Возьмем в качестве системы отсчета земной шар; в этом случае первый закон Ньютона выполняется гораздо точнее, чем в случае движущегося вагона, где даже при равномерном движении сказывается тряска, но и здесь достаточно тонкие наблюдения над некоторыми процессами (качание маятников, распространение воздушных и океанских течений и т. д.) выявляют отклонения от первого закона Ньютона или, вернее, от следствий из него. Но если мы выберем в качестве системы отсчета гелиоцентрическую систему, начало которой помещено на Солнце, а оси направлены на определенные звезды, то в такой системе первый закон Ньютона выполняется практически вполне точно. Система отсчета, по отношению к которой выполнен первый закон Ньютона, носит название *инерциальной системы*. Сам первый закон Ньютона иногда называется *принципом инерции*.

Как указано, инерциальной системой практически вполне точно является гелиоцентрическая система; инерциальной будет также и всякая система, движущаяся относительно нее равномерно и прямо-

линейно. Всякая же система, имеющая относительно одной из инерциальных систем ускорение, сама не будет инерциальной. Более подробно вопрос об ускоренных системах мы рассмотрим ниже.

§ 15. Второй закон Ньютона. Сила и масса. Второй закон в формулировке, данной самим Ньютоном, гласит: *изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит в том направлении, в каком действует сила.*

Таким образом, второй закон Ньютона вводит понятие о новой физической величине — *силе*.

Из первого закона Ньютона, как мы видели, следует, что только воздействие одних материальных тел на другие способно изменять состояние их движения. Это воздействие одних тел на другие, ведущее к изменению состояния их движения, и характеризуется физической величиной, называемой силой. Изменение состояния движения означает, что тело выходит из состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения, т. е. что *меняется его скорость*, что *тело приобретает ускорение*. Отсюда следует, что физическая величина — сила характеризует то воздействие одних тел на другие, в результате которого тела приобретают ускорение.

Возьмем какое-либо определенное тело и будем на него воздействовать каким-либо другим телом (или другими телами) так, чтобы оно приобретало различные ускорения w . Очевидно, чем сильнее воздействие, тем большее ускорение w приобретает тело. Отсюда естественно принять за силу, с которой другие тела воздействуют на рассматриваемое тело, физическую величину f , пропорциональную тому ускорению, которое данное тело приобретает:

$$f = k'w, \quad (1)$$

где k' — коэффициент пропорциональности.

Равенство (1) позволяет нам сравнивать между собою силы, действующие на какое-либо данное тело, по тем ускорениям, которые они ему сообщают. Так как ускорение имеет направление, то сила также должна быть величиной направленной. Опыты показывают, что при одновременном действии нескольких сил тело получает такое же ускорение, какое оно получает под действием одной силы, равной векторной сумме данных сил. Отсюда следует, что *сила есть вектор*; направлен вектор силы так же, как и вектор вызываемого им ускорения.

Таким образом, равенство (1) может быть записано в векторном виде:

$$\mathbf{f} = k'\mathbf{w}. \quad (1a)$$

Воздействие тел друг на друга не ограничивается только тем, что тела сообщают одно другому ускорения. Некоторые другие воздействия также характеризуются силой и могут быть, в свою очередь, использованы для уточнения понятия силы. Вообще говоря, тела, взаимо-

действуя друг с другом, вызывают изменения формы или, как говорят, *деформируют* друг друга. Эти деформации могут быть использованы для сравнения сил. Предположим, что тело A (рис. 31 a), действуя на тело B путем непосредственного соприкосновения, сообщает ему ускорение w (толкает тело B). Если мы поместим между телами A и B какое-либо упругое тело, например пружину p (рис. 31 b), то, когда тело A будет толкать тело B , пружина сожмется. При этом пружина сожмется тем сильнее, чем большее ускорение тело A сообщает телу B , т. е. чем с большей силой тело A воздействует на тело B . Измеряя эту силу по вызываемому ею ускорению по равенству (1), мы можем проградуировать пружину и дальше пользоваться ею для измерения сил. Пружина явится прибором для измерения сил; такой прибор принято называть динамометром.

Пользуясь указанным способом измерения сил с помощью пружинного динамометра, мы можем поставить такой опыт: воздействовать на *разные* тела одной и той же силой и сравнить те ускорения, которые они получают. Оказывается, что, вообще говоря, разные тела под влиянием одинаковых сил приобретают различные ускорения. Таким образом, ускорения, приобретаемые различными телами, определяются не только действующими на них со стороны других тел силами, но и некоторым собственным свойством тел. Это свойство тел характеризуется особой физической величиной, называемой *массой*.

Чем меньше ускорение приобретает тело под влиянием данной силы, тем больше его масса. Следовательно, мы можем положить, что массы различных тел обратно пропорциональны тем ускорениям, которые эти тела приобретают под влиянием равных сил:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{w_2}{w_1} \right|. \quad (2)$$

Масса тел зависит от размеров тел и от природы их вещества.

Масса является одной из самых основных характеристик тел. Ньютон считал, что масса есть мера количества материи в теле. Это определение, долго удерживавшееся в науке, носило неправильный метафизический характер. Также порочной была точка зрения тех физиков-идеалистов, которые приписывали массе лишь формальный характер некоторого „коэффициента“, фигурирующего в уравнениях механики.

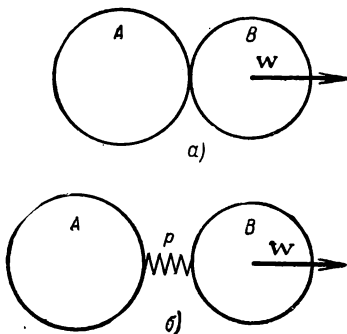


Рис. 31. Тело A , толкая тело B , сообщает ему ускорение w . При этом пружина, помещенная между телами, оказывается сжатой.

Диалектический материализм учит нас, что свойства материи неисчерпаемы и поэтому ни одна из физических характеристик движущейся материи не может служить ее полной мерой. Говоря о материи, как о философской, гносеологической категории, Ленин указывал, что нельзя смешивать философское понятие о материи с теми или другими конкретными характеристиками различных видов материи; он писал:¹ „Но совершенно непозволительно смешивать, как это делают махисты, учение о том или ином строении материи с гносеологической категорией, — смешивать вопрос о новых свойствах новых видов материи (например, электронов) с старым вопросом теории познания, вопросом об источниках нашего знания, о существовании объективной истины и т. п.“.

Понятие о массе, как и о всякой другой физической величине, может быть установлено лишь через совокупность объективных закономерных взаимосвязей этой величины с другими физическими величинами. По отношению к массе одна из таких взаимосвязей дается вторым законом Ньютона, который вводит понятие об инертности тел. При этом, говоря об инертности тел, имеют в виду, что тела различаются неким объективным свойством, проявляющимся в том, что они приобретают неодинаковые ускорения при одинаковых внешних воздействиях. Это свойство, присущее всем телам, характеризуется определенной физической величиной, которая и является массой. Соотношение (2) позволяет количественно сравнивать массы различных тел. Измеряемая таким образом масса может быть названа „инерционной массой“, поскольку она измеряется на основании инерционных явлений.

Более полное содержание понятия массы вскрывается в результате рассмотрения широкой совокупности фактов. Одним из наиболее основных из таких фактов является установленный М. В. Ломоносовым закон сохранения масс: масса изолированной системы тел остается постоянной при всех происходящих в ней изменениях. В § 17 мы укажем связь между массой и физической величиной, называемой количеством движения; эта величина, носящая векторный характер, также подчиняется закону сохранения. Кроме того, масса проявляется в гравитационных явлениях (закон всемирного тяготения, § 32 и 33). Наконец, теория относительности приводит к выводу о наличии глубокой взаимосвязи массы и энергии. При скоростях, приближающихся к скорости света в пустоте, масса тел не остается постоянной, но возрастает с увеличением скорости. Постоянной остается масса системы, полностью изолированной, т. е. такой, по отношению к которой не имеет место обмен не только веществом (атомами, молекулы и т. д.), но и энергией.

Сопоставляя равенства (1) и (2), мы приходим к выводу: *ускорение w , приобретаемое телом, прямо пропорционально силе f ,*

¹ В. И. Ленин. Сочинения, 4-е изд., т. 14, стр. 116.

действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела m :

$$w = k \frac{f}{m}, \quad (3)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Равенство (3) имеет векторный характер. Оно выражает точное содержание второго закона Ньютона.

При решении многих физических задач величина и направление действующей силы оказываются известными, например, в случае сил всемирного тяготения (§ 32) или упругих сил, подчиняющихся закону Гука (§ 89). Тогда равенство (3) позволяет найти ускорение и, следовательно, определить характер движения.

Равенство (3) является основным уравнением динамики.

§ 16. Силы трения. Наряду с силами, возникающими при деформациях тел (упругие силы), и силами тяготения существуют и другие силы, вызванные молекулярными взаимодействиями между соприкасающимися телами или отдельными частями одного и того же тела. Эти силы, проявляющиеся при относительном перемещении соприкасающихся тел или частей одного и того же тела друг относительно друга, носят название *сил трения*.

Силы трения, возникающие при соприкосновении различных тел, называются силами *внешнего трения*. Эти силы не пропадают и тогда, когда оба соприкасающихся тела неподвижны одно относительно другого (*трение покоя*). Силы, вызванные перемещением частей одного и того же тела друг относительно друга, называются силами *внутреннего трения* (наиболее часто они проявляются при движении жидкостей и газов).

Силы трения играют большую роль в нашей повседневной практике и в технике, поэтому уметь их учитывать существенно для правильного применения второго закона Ньютона во многих практически важных случаях.

Силы трения направлены тангенциально к соприкасающимся поверхностям тел и зависят от их относительных скоростей. Последним они существенно отличаются от упругих сил и сил тяготения. Силы трения могут возникать не только между соприкасающимися твердыми телами, но и между твердым телом и жидкостью или твердым телом и газом.

Так как при всяком реальном движении в земных условиях возникают те или иные силы трения, то для определения ускорения тела необходимо учитывать, кроме действующей на него заданной силы f , еще силу трения $f_{тр}$, которая возникает при наличии относительной скорости v .

Пусть некоторое тело A движется относительно другого тела, с ним соприкасающегося, с относительной скоростью v . Опыт показывает, что сила трения $f_{тр}$, действующая на тело A , всегда направлена в сторону, противоположную скорости v . Предположим, что на тело A ,

кроме силы трения $f_{\text{тр}}$, действует какая-либо другая сила f . Тогда ускорение w , приобретаемое телом A , определится суммарной силой $f + f_{\text{тр}}$.

По второму закону Ньютона:

$$w = \frac{k}{m} (f + f_{\text{тр}}), \quad (1)$$

где m — масса тела, k — коэффициент пропорциональности.

Для того чтобы в реальных условиях тело двигалось с постоянной скоростью v , к нему необходимо приложить силу f , уравновешивающую силу трения $f_{\text{тр}}$. Только тогда в равенстве (1) результирующая сила $f + f_{\text{тр}}$ равна нулю и, следовательно, равно нулю и ускорение w , т. е. тело движется равномерно.

Тело движется прямолинейно и равномерно, когда внешняя сила уравновешивает возникающую в результате движения силу трения.

Рассмотрим, например, пароход, движущийся прямолинейно под влиянием постоянной толкающей силы винта f , которую будем считать положительной. Как только пароход сдвинется с места, возникнет сила трения, зависящая от скорости парохода v . Так как сила трения направлена противоположно толкающей силе винта f , то обозначим ее через $-f_{\text{тр}}$. Пароход будет двигаться под влиянием результирующей силы $f - f_{\text{тр}}$. В начале движения, пока скорость v мала, результирующая сила $f - f_{\text{тр}}$ положительна, и пароход движется ускоренно. По мере возрастания скорости v возрастает по численному значению и сила трения, и ускорение становится меньше. Наконец, разность $f - f_{\text{тр}}$ примет значение нуль, и тогда пароход пойдет равномерно. Если толкающая сила винта по какой-либо причине уменьшится, то разность $f - f_{\text{тр}}$ может оказаться отрицательной, и тогда пароход начнет двигаться замедленно.

В качестве второго примера рассмотрим падение тяжелого тела в воздухе с учетом сопротивления воздуха. Если тяжелое тело начнет падать с нулевой начальной скоростью, то на него действует лишь сила тяжести P , и оно приобретает ускорение w , равное ускорению свободного падения g . По мере возрастания скорости падения появится сила трения о воздух, результирующая сила $P - f_{\text{тр}}$ окажется меньше силы тяжести, и ускорение w станет меньше ускорения свободного падения g . При дальнейшем возрастании скорости падения сила трения, наконец, уравновесит силу тяжести P , и тело будет падать равномерно с постоянной скоростью. Величина этой скорости равномерного падения зависит от формы и размеров падающего тела. Опыт, например, показывает, что для падающего человека эта скорость равна приблизительно 60 м/сек. Такой именно скорости достигают парашютисты при „затяжном прыжке“. После раскрытия парашюта сила сопротивления воздуха резко возрастает, и скорость падения („спуска“) снижается приблизительно до 5—6 м/сек.

Сила трения, возникающая при скольжении сухих поверхностей относительно друг друга, в большой степени зависит от состояния этих поверхностей (их шероховатости). Величина силы трения зависит и от нормальной составляющей F_n силы, сжимающей поверхности. При увеличении нормальной составляющей F_n сила трения возрастает приблизительно пропорционально F_n :

$$f_{\text{тр}} = \mu F_n \quad (2)$$

Коэффициент μ в формуле (2) называется *коэффициентом трения*. Значение коэффициента трения μ зависит не только от характера соприкасающихся поверхностей, но и от их относительной скорости v .

Величина силы трения (при данной нормальной составляющей силы F_n) для твердых соприкасающихся поверхностей в довольно широких пределах не зависит от величины соприкасающихся поверхностей.

Если, например, параллелепипед с одинаково обработанными поверхностями, скользящий по твердой поверхности, перевернуть на другую грань, имеющую другие размеры, то сила трения $f_{\text{тр}}$ при той же относительной скорости v останется неизменной.

Трение между соприкасающимися сухими поверхностями, как было сказано, не пропадает, когда относительная скорость v становится равной нулю. Чтобы тело начало скользить по какой-либо поверхности, к нему надо приложить внешнюю силу f , параллельную поверхности, и большую некоторого определенного для данного случая значения f_1 . Пока внешняя сила $f < f_1$, тело остается неподвижным, что означает, что между ним и поверхностью, с которой оно соприкасается, возникает сила $f_{\text{тр}}$, называемая *силой трения покоя*, уравновешивающая внешнюю силу.

Сила трения покоя может принимать любые значения, заключенные между 0 и f_1 , в зависимости от величины приложенной внешней силы. Максимальное значение силы трения покоя численно равно той силе f_1 , под влиянием которой тело начинает скользить. Оно удовлетворяет соотношению (2); при этом коэффициент μ называется *коэффициентом трения покоя*. Значение коэффициента трения покоя зависит только от природы соприкасающихся поверхностей. При соприкосновении сухих поверхностей дерева коэффициент трения покоя приблизительно равен 0,6; при соприкосновении стальной поверхности со льдом коэффициент трения покоя равен приблизительно 0,03.

Когда внешняя сила f превышает максимальную силу трения покоя, тело начинает скользить, и появляется сила трения при скольжении. Эта сила трения при скольжении сперва *меньше* силы трения покоя и с возрастанием относительной скорости v вначале продолжает убывать; затем с возрастанием относительной скорости v возрастает и сила трения. Графически зависимость силы трения от относительной скорости изображена на рис. 32. При $v = 0$ сила трения покоя может принимать любое значение между нулем и f_1 (отрезок OA по оси ординат) в зависимости от значения приложенной внешней силы. Дальнейшая зависимость силы трения от относительной скорости v представляется кривой ABC .

В технике между трущимися поверхностями вводят смазку, т. е. вязкую жидкость, которая образует тонкий слой между твердыми поверхностями. Теория смазки была впервые развита русским инженером Н. П. Петровым, который показал, что при наличии смазки мы имеем дело с внутренним

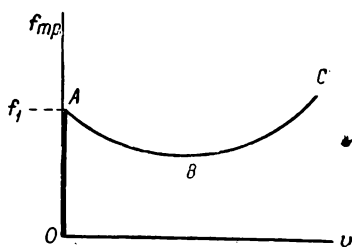


Рис. 32. Зависимость силы трения $f_{\text{тр}}$ от относительной скорости v .

трением. Ближайший к твердому телу слой смазывающей жидкости прилипает к нему; скольжение происходит лишь между слоями жидкости. В случае вала, расположенного соосно с подшипниками, сила трения пропорциональна вязкости смазочного вещества, числу оборотов вала в единицу времени и обратно пропорциональна ширине зазора между поверхностями вала и подшипника.

§ 17. Количество движения. Импульс силы. Рассмотрим вначале движение, происходящее под влиянием постоянной силы f , т. е. движение, характеризуемое постоянным значением вектора ускорения w . Пусть за промежуток времени Δt скорость тела меняется на величину $\Delta v = v_2 - v_1$, тогда

$$w = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t};$$

подставляя это значение ускорения w в выражение второго закона Ньютона:

$$w = k \frac{f}{m},$$

получим

$$\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = k \frac{f}{m} \quad \text{или} \quad \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = kf. \quad (1)$$

Следует иметь в виду, что $mv_2 - mv_1$ есть векторная разность величин mv_2 и mv_1 . Величину mv , равную произведению вектора скорости тела v на его массу, принято называть *количеством движения* K . Количество движения

$$K = mv \quad (2)$$

есть величина векторная, она имеет то же направление, что и вектор скорости v .

Вводя в выражение (1) количество движения, получим

$$\frac{K_2 - K_1}{\Delta t} = kf \quad \text{или} \quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = kf, \quad (3)$$

где ΔK есть изменение вектора количества движения. Равенство (3) означает: при равнопеременном движении *изменение количества движения за единицу времени пропорционально приложенной силе и происходит в том же направлении, в каком действует вектор силы*.

Пользуясь равенством (3), можно также дать следующее определение силы: сила есть векторная величина, численно пропорциональная вызываемому ею изменению количества движения за единицу времени и направленная в ту же сторону, в которую направлено изменение количества движения.

Обобщим выражение (3) на случай любых неравномерных движений, когда сила f меняется со временем. Тогда в равенстве (3)

мы должны подразумевать под Δt бесконечно малое изменение времени, т. е. писать:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta t} = k\bar{f}, \quad (3a)$$

где вектор \bar{f} есть значение силы в данный момент времени.

Равенство (3a) так же, как и равенство (3) § 15, выражает второй закон Ньютона.

С точки зрения приведенных рассуждений равенства (3) § 15 и (3a) настоящего параграфа вполне эквивалентны одно другому, так как второе из них было непосредственно выведено из первого; оба они выражают точное содержание второго закона Ньютона. Однако указанная эквивалентность имеет место при предположении, что масса тела m есть величина постоянная, не зависящая от его скорости. Это справедливо, пока скорости тел малы по сравнению со скоростью света. При движениях, происходящих со скоростями, сравнимыми со скоростью света, масса m не остается постоянной: она зависит от скорости v . Движения при таких скоростях подчиняются механике теории относительности. При этом, однако, выражение (3a) сохраняет смысл; таким образом, оно является более общей формулировкой второго закона Ньютона, чем равенство (2) § 15. Наряду со значением силы в данный момент времени мы можем рассматривать и среднее значение силы \bar{f} за некоторый конечный промежуток времени Δt , тогда вместо (3a) получим

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = k\bar{f}, \text{ или } \bar{f} \Delta t = k' \Delta K = k' (mv_2 - mv_1), \quad (4)$$

где $k' = \frac{1}{k}$.

Величина $\bar{f} \Delta t$, равная произведению из среднего значения силы \bar{f} на промежуток времени Δt , за который рассматривается ее действие, называется *импульсом силы*. Импульс силы есть величина векторная. Равенство (4) утверждает, что вектор импульса силы пропорционален по величине векторному изменению количества движения, происходящему за тот промежуток времени, за который берется импульс силы, и направлен в ту же сторону, куда направлено изменение количества движения.

§ 18. Единицы силы и массы. Примеры. Полагая в равенстве (3) § 15 коэффициент пропорциональности $k=1$, получим

$$w = \frac{f}{m}. \quad (1)$$

Этим соотношением можно воспользоваться для установления единиц для измерения силы f или массы m .

В системе CGS за единицу массы принят грамм (см. § 3), а за единицу ускорения 1 см/сек^2 ; отсюда, пользуясь равенством (1), мы должны в CGS-системе за единицу силы выбрать такую силу, под влиянием которой тело с массой в 1 г приобретает ускорение в 1 см/сек^2 . Эта единица силы называется *диной*.

Положив в формуле (см. § 17)

$$\bar{f}\Delta t = k'(mv_2 - mv_1)$$

коэффициент $k' = 1$, получим

$$\bar{f} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t},$$

откуда следует, что дина равна такой силе, под влиянием которой количество движения тела меняется на $1 \text{ г} \cdot \text{см/сек}$ за одну секунду.

В MKS-системе за единицу силы должна быть выбрана такая сила, под влиянием которой тело с массой в 1 кг приобретает ускорение в 1 м/сек^2 . Эта единица силы называется *ньютон*. Как легко сосчитать:

$$1 \text{ ньютон} = 0,001 \text{ стена} = 10^5 \text{ дин.}$$

В технической системе единиц единица силы выбирается как одна из основных единиц независимо от второго закона Ньютона. Очевидно, любая определенным образом фиксированная сила может служить единицей силы. В качестве такой силы в технической системе выбирается определенная сила тяжести. На все тела, находящиеся у поверхности Земли, действует со стороны Земли сила притяжения (сила тяжести, или *вес*, как ее называют). Сила тяжести различна для различных тел, и для данного тела она зависит от того, в каком месте земного шара и на какой высоте над поверхностью Земли находится это тело. Однако, если выбрать вполне определенное тело и фиксировать его положение на земной поверхности, то тем самым будет вполне определена и действующая на него сила тяжести (его вес), которая может быть выбрана за единицу. Так именно и поступают: *в технической системе за единицу силы принимают ту силу, с которой притягивается к земному шару гиря, служащая эталоном массы в 1 кг, расположенная на широте 45° и на уровне моря* (более точно за единицу силы в технической системе принимается сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение $g_0 = 9,80665 \text{ м/сек}^2$). Эта единица силы называется *килограмм*, т. е. называется тем же самым словом, что и единица массы килограмм; для избежания путаницы мы будем эти две единицы совершенно различных физических величин обозначать разными сокращениями: единицу массы в один

килограмм обозначим $\kappa\text{г}$, а единицу силы в один килограмм обозначим $\kappa\Gamma$. Сила, равная $\frac{1}{1000}\kappa\Gamma$, называется *Грамм* и обозначается Γ (в отличие от единицы массы грамма, обозначаемой $г$). Сила в $1000\kappa\Gamma$ называется *Тонна-сила* (обозначается T). Так как под влиянием силы в $1\kappa\Gamma$ тело с массой в $1\kappa\text{г}$ приобретает ускорение 981 см/сек^2 (ускорение силы тяжести), то

$$1\kappa\Gamma = 981\,000\text{ дин}, \quad 1\Gamma = 981\text{ дин}.$$

Так как изменения веса тел для различных точек поверхности земного шара невелики, то при решении задач по большей части можно считать, что на Земле тело с массой в $1\kappa\text{г}$ весит $1\kappa\Gamma$. Для широты 45° и уровня моря это соотношение, по определению, выполняется точно.

Выбрав в технической системе указанным определенным образом единицу силы и измеряя ускорение в м/сек^2 , мы не можем уже, пользуясь формулой (1) настоящего параграфа, произвольно устанавливать единицу массы. *За единицу массы в технической системе должна быть выбрана масса тела, которое под влиянием силы в $1\kappa\Gamma$ приобретает ускорение в 1 м/сек^2 .* Эта единица массы не имеет специального названия.

Так как масса в $1\kappa\text{г}$ под влиянием силы в $1\kappa\Gamma$, т. е. под влиянием собственного веса, приобретает ускорение свободного падения, равное $9,81\text{ м/сек}^2$, то, следовательно, техническая единица массы, которая под влиянием силы в $1\kappa\Gamma$ приобретает ускорение в 1 м/сек^2 , должна быть в 9,81 раза больше $1\kappa\text{г}$. Таким образом:

$$1\text{ техн. ед. массы} = 9,81\kappa\text{г}.$$

Остановимся еще несколько подробнее на соотношении между весом и массой тел. Вес некоторого тела P есть сила, с которой это тело притягивается к земному шару, следовательно, ускорение $w = g$, которое тело с массой m приобретает под влиянием собственного веса, по формуле (3) § 15 равно

$$g = k \frac{P}{m}, \text{ откуда } P = k' mg, \quad (2)$$

где k' — коэффициент пропорциональности.

Формула (2) дает общую связь между весом тела P и его массой m , независимо от выбора единиц, в которых измеряются вес тела P , его масса m и ускорение силы тяжести g ; численное значение коэффициента пропорциональности k' зависит от выбора этих единиц. Если мы положим $k' = 1$, тогда

$$P = mg, \quad (2a)$$

но в этом случае мы уже не вправе измерять P , m и g в произвольных единицах, а должны пользоваться какой-либо одной системой измерения. Например, в CGS-системе m измеряется в *граммах*, g — в см/сек^2 , P — в *динах*; в технической системе: m — в технических единицах массы, g — в м/сек^2 , P — в кг . В каждой из этих систем выполняется соотношение (2а). Но если мы воспользуемся смешанной системой единиц, например будем измерять m в килограммах массы (кг), g — в м/сек^2 и P — в килограммах веса (кг), то коэффициент пропорциональности k' уже нельзя положить равным единице; в этом случае он примет значение:

$$k' = \frac{1}{9,81}.$$

Тогда

$$P(\text{кг}) = \frac{1}{9,81} \cdot m(\text{кг}) \cdot g(\text{м/сек}^2).$$

Положив здесь $m = 1 \text{ кг}$, $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, получим: $P = 1 \text{ кг}$, как и следовало ожидать.

Ввиду важности соотношений, выведенных в § 15 и 17, и необходимости уметь правильно пользоваться системами единиц, приведем несколько примеров.

Пример 1. Вагон весом 16 T катится с начальной скоростью 5 м/сек . Определить среднее значение силы, действующей на вагон для трех случаев: а) вагон останавливается под влиянием сил трения в течение 1 мин.; б) вагон затормаживается в течение 15 сек.; в) вагон останавливается, натолкнувшись на препятствие, в течение 0,5 сек.

Решение. Находим среднее значение силы, действующей на вагон, из соотношения между импульсом силы и изменением количества движения (4) § 17:

$$\bar{f} \Delta t = m v_2 - m v_1, \quad \text{откуда} \quad \bar{f} = \frac{m v_2 - m v_1}{\Delta t}.$$

В наших случаях вагон останавливается, так что его конечная скорость $v_2 = 0$, откуда

$$\bar{f} = - \frac{m v_1}{\Delta t},$$

знак минус означает, что сила, действующая на вагон, направлена в сторону, противоположную направлению скорости вагона v_1 . Пользуясь технической системой единиц, имеем, что масса вагона $m = \frac{16\,000}{9,81}$ техн. ед. массы $\cong \cong 1632$ техн. ед. массы, откуда в случае а) численная величина среднего значения силы \bar{f} равна

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{60} \text{ кг} = 136 \text{ кг};$$

в случае б):

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{15} \text{ кг} = 544 \text{ кг};$$

в случае в):

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{0,5} \text{ кг} = 16\,320 \text{ кг}.$$

Таким образом, при одном и том же изменении количества движения сила зависит от времени, в течение которого это количество движения изменилось: при медленной остановке из-за сил трения эта сила оказалась равной всего 139 кг, при ударе о препятствие, когда количество движения изменилось до нуля за короткий промежуток времени в 0,5 сек., сила превысила 16 Т.

Пример 2. Мяч весом 200 Г ударяется о стену и отскакивает от нее без потери скорости, так что угол α , образованный траекторией мяча с нормалью к стене (рис. 33 а) до удара, равен углу, образованному траекторией с нормалью после удара. Скорость мяча 5 м/сек, продолжительность удара о стену $\Delta t = 0,05$ сек. Определить силу удара для $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Из формулы (4) § 17 имеем:

$$\bar{f} \Delta t = m(v_2 - v_1) = m \Delta v, \quad (3)$$

где $v_2 - v_1$ представляет собою векторную разность. Считая положительным направление нормали, внешней к стене (рис. 33 б), получим

$$\Delta v = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \alpha) = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha.$$

По условию задачи мяч отскакивает от стены без потери скорости, т. е.

$$v_1 = v_2 = v, \text{ откуда } \Delta v = 2v \cos \alpha;$$

направлено Δv по нормали к стене. Подставляя это значение Δv в (3), найдем, что среднее значение силы \bar{f} , действующей на мяч во время удара, равно

$$\bar{f} = \frac{2mv \cdot \cos \alpha}{\Delta t},$$

где Δt — время удара. Для численных значений, приведенных в примере, имеем

$$\bar{f} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}}{0,05} \text{ кг} \cong 2 \text{ кг}.$$

Пример 3. Через неподвижный блок (рис. 34) перекинута веревка, к концам которой подвешены грузы весом P_1 и P_2 . Предполагая, что движение происходит без трения, определить ускорение, с которым будут двигаться грузы.

Решение. На каждый из грузов действует сила тяжести и сила натяжения веревки f_H . Будем считать направление вниз положительным. Тогда

$$m_2 w = P_2 - f_H, \quad m_1 w = P_1 - f_H,$$

где m_1 и m_2 — массы грузов, w — численное значение их ускорения. Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$(m_1 + m_2) w = P_2 - P_1;$$

но силы тяжести P_2 и P_1 соответственно равны $m_2 g$ и $m_1 g$, где g — ускорение силы тяжести, откуда

$$w = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \quad (4)$$

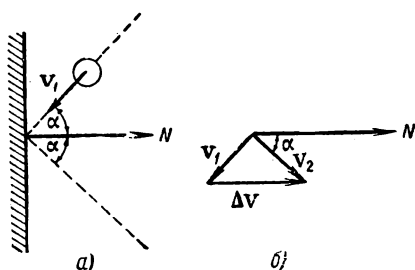


Рис. 33. Упругий удар мяча о стену.

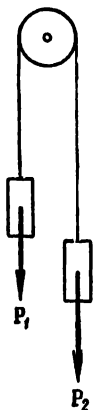


Рис. 34. Движение грузов, прикрепленных к веревке, перекинутой через блок.

Такого рода блок с перекинутой через него веревкой с двумя грузами представляет собой демонстрационный прибор („машина Атвуда“), служащий для иллюстрации второго закона Ньютона.

Если оба груза взять одинаковыми, то $m_2 = m_1$, и по (4) ускорение грузов $w = 0$. Подтолкнув в этом случае грузы, т. е. сообщив им некоторую скорость v , легко наблюдать при малом трении в блоке, что грузы будут двигаться равномерно. Взяв один груз немного тяжелее другого, получим, что $m_2 > m_1$ много меньше, чем $m_2 + m_1$, откуда по (4) ускорение грузов w будет невелико. В этом случае легко зарегистрировать пути, проходимые грузами за равные промежутки времени, и убедиться, что они соответствуют случаю равномерно-ускоренного движения.

§ 19. Механический принцип относительности. В § 14 мы видели, что первый закон Ньютона выполняется в инерциальной системе отсчета; то же относится и ко второму закону Ньютона. Первый закон Ньютона может, вообще, рассматриваться как частный случай второго закона; в самом деле, положив в выражении второго закона $f = mw$ силу $f = 0$, получим $w = 0$, что и означает, что тело, на которое не действуют никакие силы (т. е. не воздействуют никакие другие тела), имеет ускорение, равное нулю, т. е. пребывает в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения.

Нами также было указано, что всякая система, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, сама тоже является инерциальной системой.

Рассмотрим движение одного и того же тела относительно двух различных инерциальных систем; очевидно, это движение будет различаться лишь на некоторую постоянную разность скоростей: *ускорения одного и того же тела в различных инерциальных системах одинаковы*. Отсюда по второму закону Ньютона и силы, действующие на одно и то же тело, в обеих инерциальных системах одинаковы. Если мы находимся внутри прямолинейно и равномерно движущегося вагона, то для сообщения определенного ускорения относительно вагона какому-либо телу надо приложить к нему те же силы, какие надо приложить в том случае, когда вагон покоится. Другими словами, внутри прямолинейно и равномерно движущегося вагона все механические процессы происходят точно так же, как и в неподвижном вагоне. Это означает (отвлекаясь, конечно, от тряски и от возможности взглянуть в окно), что, находясь внутри равномерно и прямолинейно движущегося вагона, нельзя с помощью каких бы то ни было механических опытов определить скорость вагона и вообще установить факт его прямолинейного и равномерного движения. Эта невозможность определить с помощью механических опытов, проведенных внутри системы, ее прямолинейное и равномерное движение была впервые выяснена Галилеем. В 1632 г. Галилей, рассматривая явления, происходящие в закрытой каюте корабля, писал: „И вот (если только движение корабля равномерное), вы не заметите ни малейшей перемены во всех явлениях и ни по одному из них не в состоянии будете судить — движется ли корабль или стоит на месте: вы, прыгая, будете проходить по полу те же самые

пространства, как и при покое корабля, т. е. вы не сделаете — оттого, что корабль движется весьма быстро — больших прыжков к корме, чем к носу корабля, хотя в то время, когда вы находитесь в воздухе, пол, находящийся под вами, бежит в сторону, противоположную прыжку, и, бросая какую-нибудь вещь приятелю, вам не нужно будет с большей силой кидать ее, если он будет около носа корабля, вы же около кормы, чем если бы вы стояли наоборот; капельки из подвешенной к потолку кружки с водою будут падать вертикально на пол, и ни одна из них не упадет по направлению к корме, хотя, пока капля находится в воздухе, корабль уходит вперед. Мухи будут продолжать свои полеты безразлично во все стороны, и никак не случится, чтобы они (как будто уставши следовать за быстрым бегом корабля) собрались к той стороне, которая ближе к корме“.

Резюмируя, мы можем сказать: *никакими механическими опытами, произведенными внутри системы, нельзя решить — находится ли инерциальная система в состоянии покоя или она равномерно и прямолинейно движется*. С механической точки зрения все инерциальные системы совершенно эквивалентны. Любую из них можно положить покоящейся, а скорости всех остальных инерциальных систем определять относительно нее.

Это положение носит название *механического принципа относительности*, или *принципа относительности Галилея*.

Теория относительности Эйнштейна обобщает этот результат, утверждая, что вообще никакими опытами, произведенными внутри системы, будь то электрические, световые и т. д., нельзя установить прямолинейное и равномерное движение системы.

§ 20. Третий закон Ньютона. Сохранение количества движения. Третий закон Ньютона

дополняет содержание второго закона, он подчеркивает то обстоятельство, что воздействие тел, ведущее к изменению состояния их движения, носит характер *взаимодействия*; он гласит: *если тело В (рис. 35) воздействует на тело А с силой f_1 , то тело А, в свою очередь, воздействует на тело В с силой f_2 , численно равной силе f_1 и направленной в противоположную сторону*:

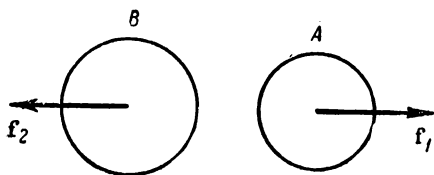


Рис. 35. Тело В воздействует на тело А с силой f_1 ; в свою очередь, тело А воздействует на тело В с силой f_2 , численно равной f_1 и направленной в противоположную сторону.

$$f_1 = -f_2. \quad (1)$$

Существенно подчеркнуть, что силы f_1 и f_2 , о которых идет речь в третьем законе Ньютона („действие“ и „противодействие“), *приложены к разным телам*.

Приведем несколько примеров: а) человек толкает вагонетку (рис. 36), при этом к вагонетке приложена направленная вперед сила f_1 ;

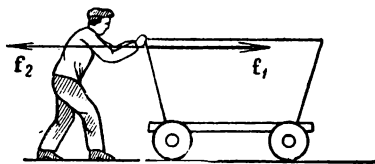


Рис. 36. Человек толкает вагонетку с силой f_1 ; сила f_2 , численно равная силе f_1 и направленная в противоположную сторону, приложена к рукам человека.

равная ей и направленная в противоположную сторону сила f_2 приложена к рукам человека; б) молоток ударяет о гвоздь: сила f_2 действует со стороны молотка на гвоздь; равная ей и направленная в противоположную сторону сила f_1 приложена к молотку; в) из колодца за веревку поднимается ведро: сила f_1 приложена к ведру и направлена вверх; равная ей и направленная вниз сила f_2 приложена к веревке.¹

Оба взаимодействующих тела приобретают ускорения. Если массы тел m_1 и m_2 , а приобретаемые ими ускорения w_1 и w_2 , то по второму закону Ньютона:

$$w_1 = \frac{f_1}{m_1}, \quad w_2 = \frac{f_2}{m_2},$$

откуда по (1)

$$w_1 = -\frac{m_2}{m_1} w_2, \quad (2)$$

т. е. взаимодействующие тела приобретают ускорения, направленные в противоположные стороны и обратно пропорциональные их массам.

Из третьего закона Ньютона вытекает весьма важное следствие. В случае взаимодействия двух тел A и B изменение количества движения тела A по формуле (3) § 17 равно

$$\Delta K_A = f_1 \cdot \Delta t_1, \quad (3)$$

где f_1 — сила, действующая на тело A со стороны тела B , а Δt_1 — время, в течение которого действует сила f_1 . При этом предполагалось, что сила f_1 постоянна в течение промежутка времени Δt_1 . Изменение количества движения тела B равно

$$\Delta K_B = f_2 \cdot \Delta t_2,$$

¹ Силу f_2 , которая по третьему закону Ньютона приложена к тому телу B , которое приводит в движение тело A , иногда называют *силой инерции*. Однако очевидно, что такое разделение сил f_1 и f_2 на „движущую“ силу f_1 и „силу инерции“ f_2 возможно лишь в том случае, если сами тела A и B по какому-либо признаку могут быть разделены на „двигаемое“ и „движущее“, как это имеет место в случае человека, опирающегося о землю, и сдвигаемой с места вагонетки. Стоит же представить себе случай столкновения двух одинаковых шаров, чтобы стало ясно, что оба тела A и B и обе силы f_1 и f_2 , фигурирующие в третьем законе Ньютона, вполне „равноправны“. Поэтому и термин „сила инерции“ в указанном смысле (в ньютоновом смысле) нет оснований удерживать, и мы им здесь не будем пользоваться.

О другом смысле термина „сила инерции“ см. § 22.

где \mathbf{f}_2 — сила, действующая на тело B со стороны тела A , а Δt_2 — время, в течение которого действует сила \mathbf{f}_2 . По третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1,$$

кроме того, время Δt , в течение которого тело B действует на тело A , очевидно, равно времени Δt_2 , в течение которого тело A действует на тело B , откуда $\mathbf{f}_1 \Delta t_1 = -\mathbf{f}_2 \Delta t_2$ и, следовательно,

$$\Delta K_A = -\Delta K_B. \quad (4)$$

Это равенство, которое мы получили для случая постоянной силы взаимодействия между телами, легко обобщить и на случай, когда сила \mathbf{f}_1 меняется. Для этого время взаимодействия между телами надо разбить на столь малые промежутки Δt_i , чтобы в течение каждого из них силу можно было считать постоянной. Для каждого отдельного бесконечно малого промежутка времени Δt_i будет выполнено равенство (4), а следовательно, оно будет выполнено и для всего времени взаимодействия. Таким образом, равенство (4) носит общий характер. Оно означает: *насколько в результате взаимодействия количество движения одного тела увеличилось, настолько количество движения другого тела уменьшилось*, т. е. произошла перемещение количества движения.

Формулу (4) можно переписать:

$$\Delta K_A + \Delta K_B = 0, \quad (5)$$

т. е. при взаимодействии двух тел общее изменение их количества движения равно нулю, откуда следует, что их общее количество движения $K = K_A + K_B$ остается постоянным. Этот результат может быть обобщен на любое число тел, образующих *замкнутую систему*, т. е. таких тел, которые взаимодействуют друг с другом, но не взаимодействуют ни с какими внешними по отношению к системе телами. Полагая, что система состоит из n тел, и обозначая их количества движения соответственно через $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$, получим

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n = \text{const}, \quad (6)$$

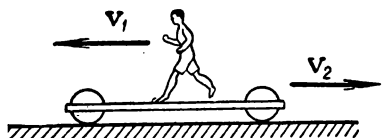
т. е. *полный вектор количества движения замкнутой системы, представляющий собою векторную сумму количеств движения тел, образующих замкнутую систему, остается постоянным во все время движения*.

Этот закон, носящий название *закона сохранения количества движения*, является одним из основных законов физики. Он справедлив не только в случае взаимодействия макроскопических тел, но и в случае взаимодействия микроскопических частиц, т. е. отдельных атомов, атомных ядер, электронов и т. д.

Для иллюстрации закона сохранения количества движения рассмотрим следующий пример: человек, масса которого m_1 , неподвижно

стоит на тележке, покоящейся относительно Земли; масса тележки m_2 . Их общее количество движения равно нулю. Если человек начнет бежать по тележке со скоростью v_1 по отношению к Земле (рис. 37), то он приобретет количество движения $m_1 v_1$; при этом тележка при отсутствии сил трения также приобретет количество движения $m_2 v_2 = -m_1 v_1$, так как общее количество движения $m_1 v_1 + m_2 v_2$

должно остаться равным нулю. Таким образом, тележка приобретает относительно Земли скорость, равную



$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1,$$

Рис. 37. Человек бежит по тележке со скоростью v_1 ; тележка откатывается в противоположную сторону со скоростью v_2 .

где знак минус означает, что скорость v_2 направлена в сторону, противоположную той, в которую бежит человек. Тележка будет

двигаться, пока бежит человек. Когда человек остановится на тележке, его количество движения станет снова равным нулю, тогда станет равным нулю и количество движения тележки: она остановится.

Рассмотрим еще неупругое столкновение шаров. Закон сохранения количества движения позволяет определить скорость v , которую приобретут после неупругого центрального (скорости шаров направлены по прямой, соединяющей их центры) удара два шара с массами m_1 и m_2 , имевшие до столкновения скорости v_1 и v_2 .

При неупругом ударе оба шара после столкновения движутся с одинаковой скоростью v . Кроме того, так как удар центральный, то все три скорости v_1 , v_2 и v направлены вдоль одной прямой.

Отсюда, в силу сохранения количества движения, имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Разберем теперь случай, когда на два тела A и B , кроме сил их взаимодействия \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 , действуют еще внешние силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 ; тогда для каждого из тел имеем:

$$\Delta K_A = \mathbf{f}_1 \Delta t + \mathbf{F}_1 \Delta t; \quad \Delta K_B = \mathbf{f}_2 \Delta t + \mathbf{F}_2 \Delta t.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что по третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0$, получим

$$\Delta(K_A + K_B) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \Delta t.$$

Вводя полное количество движения обоих тел $K = K_A + K_B$ и равнодействующую внешних сил $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, напомним

$$\Delta K = \mathbf{F} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Такое же равенство имеет место и для любого числа взаимодействующих тел. Таким образом, *изменение полного количества дви-*

жения системы тел определяется импульсом равнодействующей внешних сил. Если равнодействующая внешних сил равна нулю, то равно нулю и изменение полного количества движения, и, следовательно, полный вектор количества движения системы остается постоянным: равенство (7) снова ведет к равенству (6).

Называя силы взаимодействия между телами, образующими систему, *внутренними силами*, мы можем сказать: *под влиянием внутренних сил система не может изменить своего полного количества движения*. Под влиянием внутренних сил могут лишь прийти в движение отдельные части системы друг относительно друга. Например, паровоз под влиянием лишь сил, действующих со стороны пара на поршень, не может прийти в целом в движение; он приходит в движение оттого, что появляется *внешняя сила* в виде силы трения между колесами и рельсами. Сила, возникающая благодаря трению и приложенная к колесам, сдвигает паровоз. Равная ей сила, возникающая по третьему закону Ньютона и направленная в противоположную сторону, приложена к рельсам; она отталкивает рельсы в обратную сторону. Так как рельсы скреплены с земным шаром, то их смещение не играет роли. Количество движения, приобретенное паровозом, равно количеству движения, переданному земному шару. Так как масса земного шара чрезвычайно велика по сравнению с массой паровоза, то скорость, приобретенная земным шаром, ничтожно мала.

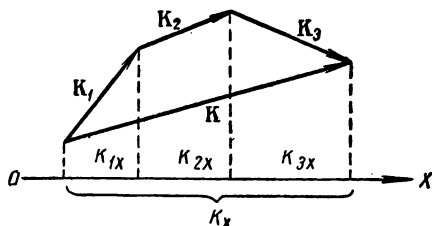


Рис. 38. Проекция K_x результирующего вектора K равна сумме проекций слагаемых векторов.

Так как проекция результирующего вектора на какое-либо направление (рис. 38) равна сумме проекций слагаемых векторов на то же направление, то из равенства (7) следует, что и изменение суммы проекций количества движения тел, образующих систему, на любое направление определяется суммой проекций импульсов внешних сил на то же направление. Если за такие направления мы примем оси OX , OY и OZ прямолинейной прямоугольной координатной системы, то получим для системы из n тел:

$$\sum_{i=1}^n \Delta K_{xi} = \sum_{i=1}^n F_{xi} \Delta t, \quad \sum_{i=1}^n \Delta K_{yi} = \sum_{i=1}^n F_{yi} \Delta t, \quad \sum_{i=1}^n \Delta K_{zi} = \sum_{i=1}^n F_{zi} \Delta t. \quad (8)$$

Переходя к бесконечно малым промежуткам времени и соответственно к бесконечно малым изменениям составляющих количества движения, получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{dK_{xi}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{xi}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{dK_{yi}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{yi}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{dK_{zi}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{zi}, \quad (8a)$$

т. е. сумма производных по времени от проекций количества движения на каждую из координатных осей равна сумме проекций внешних сил на ту же ось.

Если равна нулю сумма проекций внешних сил на одну из осей, то по равенствам (8) сумма проекций количеств движений тел, образующих систему, на ту же ось остается постоянной. При равенстве нулю суммы внешних сил остается постоянной сумма проекций количеств движения тел на каждую из осей:

$$K_x = \sum_{i=1}^n K_{xi} = \text{const}, K_y = \sum_{i=1}^n K_{yi} = \text{const}, K_z = \sum_{i=1}^n K_{zi} = \text{const}. \quad (6a)$$

§ 21. Силы, действующие при криволинейном движении. Связь между вектором силы \mathbf{f} и вызываемым им ускорением \mathbf{w} , выражаемая вторым законом Ньютона:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{w}, \quad (1)$$

является общей и справедлива для любого движения, как прямолинейного, так и криволинейного. Однако ввиду важности различных типов криволинейного движения, рассмотрим действующие при этом силы несколько подробнее. Равенство (1) показывает, что сила и ускорение в каждый данный момент имеют одинаковое направление.

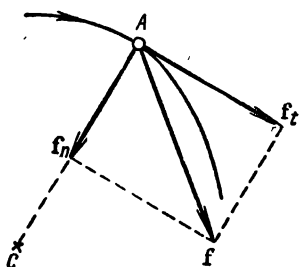


Рис. 39. Разложение силы на тангенциальную и нормальную составляющие.

При криволинейном движении, как мы видели в § 11, ускорение \mathbf{w} направлено не по касательной к траектории, но составляет с нею некоторый угол и может быть разложено на две составляющие: тангенциальную w_t и нормальную w_n . Отсюда следует, что и сила \mathbf{f} , действующая на тело, движущееся криволинейно, направлена в каждый данный момент под углом к направлению движения и может быть разложена на две составляющие: тангенциальную f_t и нормальную f_n .

Первая составляющая f_t направлена по касательной к траектории, вторая f_n — по нормали к ней, т. е. по радиусу кривизны, по направлению к центру кривизны (рис. 39), поэтому нормальную составляющую силы f_n называют также *центростремительной составляющей силы*.

Из рис. 39 видно, что численное значение полной силы f равно:

$$f = \sqrt{f_t^2 + f_n^2} \quad (2)$$

Тангенциальная и нормальная составляющие силы f_t и f_n связаны соответственно с тангенциальной и нормальной составляющими ускорения w_t и w_n соотношениями:

$$f_t = mw_t, \quad f_n = mw_n. \quad (3)$$

Так как по равенству (5) § 11 нормальная составляющая ускорения $w_n = \frac{v^2}{R}$, где v — линейная скорость тела, а R — радиус кривизны траектории в данной точке, то

$$f_n = m \frac{v^2}{R}. \quad (4)$$

При равномерном движении по кривой (скорость постоянна по величине, тангенциальная составляющая ускорения равна нулю) тангенциальная составляющая силы равна нулю, и вся сила есть сила центростремительная. Эта сила, действуя по нормали к траектории, заставляет тело непрерывно заворачивать, не изменяя его скорости по величине; если бы эта сила отсутствовала, то тело двигалось бы прямолинейно.

В случае движения по окружности можно в выражении (4) заменить линейную скорость v угловой скоростью ω или выразить ее через период обращения T или число оборотов n . Тогда, в силу соотношений $v = \omega R = 2\pi \frac{R}{T} = 2\pi n R$ (см. § 12), получим для центростремительной силы:

$$f_n = m \omega^2 R = 4\pi^2 m \frac{R}{T^2} = 4\pi^2 m n^2 R. \quad (4a)$$

По третьему закону Ньютона, наряду с центростремительной силой, приложенной к движущемуся по кривой телу, существует вторая сила, равная ей по величине, направленная в обратную сторону и приложенная к тому телу (к тем „связям“), которое заставляет движущееся тело заворачивать. Эта сила называется *центробежной*. Таким образом, центростремительная и центробежная силы — это те две силы, существование которых обусловлено третьим законом Ньютона; приложены они к разным телам. Например, в случае вращения камня, привязанного к веревке, центростремительная сила приложена к камню, а центробежная — к веревке; в случае трамвая, идущего по закруглению, центростремительная сила приложена к трамваю, а центробежная — к рельсам; в случае Луны, обращающейся вокруг Земли, центростремительная сила приложена к Луне, центробежная — к Земле.

О так называемой *инерционной центробежной силе* будет сказано ниже (§ 22).

Разберем несколько п р и м е р о в.

Для уменьшения бокового давления колес поезда на рельсы на закруглениях железнодорожное полотно делают несколько наклонным. Рассчитаем, на какой угол α надо наклонить к горизонту полотно железной дороги на закруглении радиуса кривизны R , чтобы вагон, идущий по закруглению со скоростью v , не оказывал бокового давления на рельсы.

Вагон не будет оказывать бокового давления на рельсы в том случае, когда неуравновешенная реакцией полотна составляющая f_1 силы тяжести P ,

направленная к центру кривизны (рис. 40), явится центростремительной силой, вызывающей заворачивание вагона. Отсюда должно быть выполнено условие:

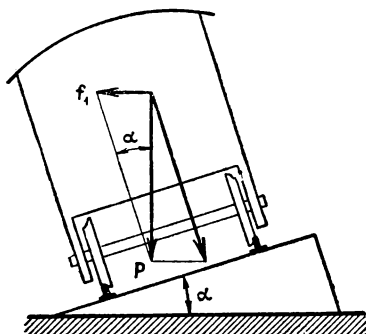


Рис. 40. Составляющая силы тяжести f_1 заворачивает вагон.

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}, \quad (5)$$

где m — масса вагона. Так как вес вагона $P = mg$, то по (5) искомый наклон пути определится углом α , удовлетворяющим равенству:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{Rg}. \quad (6)$$

В формулу (6), как видно, не входит масса вагона, а входят только радиус закругления R и скорость v . На железнодорожных путях наклон пути выбирается в соответствии с той средней скоростью, с какой поезда проходят закругление; тогда поезда, идущие более медленно, оказывают боковое давление на внутренний рельс, а идущие более быстро — на наружный.

В качестве второго примера рассмотрим действие центробежного регулятора паровой машины, схема которого представлена на рис. 41. К верхнему концу A вертикального стержня AB прикреплены шарнирно два стержня одинаковой длины l , на концах которых находятся тяжелые шары C_1 и C_2 . Со стержнями AC_1 и AC_2 соединены шарнирно два других стержня, нижние концы которых несут муфту S . Регулятор вращается вокруг вертикальной оси AB . При изменении скорости его вращения изменяется угол расхождения стержней AC_1 и AC_2 , что влечет за собой сдвиг муфты S ; муфта S соединена с механизмом, регулирующим впуск пара в цилиндр паровой машины.

Определим угол α расхождения стержней AC_1 и AC_2 при заданной угловой скорости вращения регулятора ω .

При отклоненном положении стержня AC_1 сила тяжести шара C_1 , равная $P = mg$ и направленная вертикально вниз, не уравновешивается реакцией стержня; разложим силу P на две составляющие: N' — вдоль направления стержня и f_1 — направленную горизонтально. Составляющая N' уравнивается реакцией стержня; составляющая f_1 явится той центростремительной силой, которая заворачивает шар, заставляя его двигаться по окружности вокруг стержня AB . Отсюда следует, что должно быть выполнено условие:

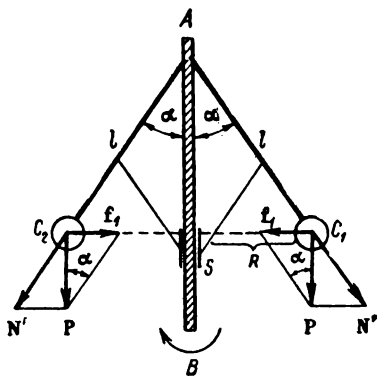


Рис. 41. Центробежный регулятор.

$$f_1 = m\omega^2 R. \quad (7)$$

Но из рис. 41 имеем

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad R = l \sin \alpha,$$

откуда по (7)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l\omega^2 \sin \alpha}{g}, \quad \text{или} \quad \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{l\omega^2}{g} \right) = 0.$$

Отсюда получаем два решения:

$$\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2} \quad (8)$$

и второе решение: $\sin \alpha = 0$, т. е. $\alpha = 0$. Это второе решение не представляет интереса, так как конструкция регулятора не допускает значения $\alpha = 0$; первое решение определяет искомое значение α : при возрастании ω возрастает и угол α .

§ 22. Ускоренные системы. Инерционные силы. Как мы видели, на основании рассуждений, приведенных в § 19, никакими механическими опытами, производимыми внутри некоторой системы отсчета, нельзя установить — движется ли система прямолинейно и равномерно или нет. Всякое же ускорение системы сказывается на происходящих в ней механических явлениях.

Рассмотрим теперь более подробно влияние ускорения системы на происходящие в ней процессы. Для этого снова обратимся к примеру движущегося вагона. Пусть первоначально вагон движется прямолинейно с постоянной скоростью v , в направлении, указанном стрелкой на рис. 42. У передней стенки вагона на горизонтальной полке лежит шар A с массой m . Полку будем считать абсолютно скользкой, так что между ней и шаром не возникает никаких сил трения. Рассмотрим явления, происходящие внутри вагона, по отношению к одной из двух следующих систем отсчета: 1) по отношению к системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, и 2) по отношению к системе отсчета, связанной с вагоном. При прямолинейном и равномерном движении в обеих системах на шар не действуют никакие силы (кроме уравновешивающих друг друга силы тяжести и силы реакции опоры). Предположим теперь, что вагон приобрел постоянное ускорение w , направленное в ту же сторону, куда направлена и скорость вагона v ; вагон начинает идти все скорее и скорее.

Как проявляется в этом случае движение шара по отношению к обеим указанным системам отсчета?

Выясним сперва характер движения шара по отношению к системе отсчета, связанной с полотном железной дороги. Относительно полотна шар продолжает двигаться с первоначальной скоростью v , так как никакие горизонтальные силы на него не действуют, но так как вагон начинает идти скорее, то шар отстает от вагона.

Таким образом, шар, ранее покоившийся относительно полки вагона, теперь начинает скользить по ней в направлении, обратном движению вагона. Отсюда следует, что относительно системы отсчета, связанной с вагоном, шар приобрел ускорение — w .

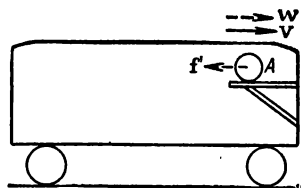


Рис. 42. Шар A отстает от ускоренно движущегося вагона.

Если допустить, что в системе отсчета, связанной с вагоном (которая не инерциальна), справедлив второй закон Ньютона, то появление в этой системе ускорения можно формально объяснить действием на шар силы

$$\mathbf{f}' = m(-\mathbf{w}),$$

где m — масса шара и $-\mathbf{w}$ — его ускорение относительно вагона, численно равное ускорению самого вагона. Эта фиктивная сила, которую приходится вводить в ускоренной системе отсчета, чтобы в ней выполнялся второй закон Ньютона, называется *инерционной силой* или *силой инерции*.

Предположим теперь, что шар, лежащий на полке, скреплен со стенкой вагона пружиной C (рис. 43). Тогда при ускорении вагона шар будет отставать от вагона лишь до тех пор, пока пружина не растянется настолько, что появившаяся, благодаря растяжению пружины, сила не окажется достаточной, чтобы сообщить шару ускорение \mathbf{w} , равное ускорению вагона. Другими словами: пружина *тянет* шар за вагоном с силой \mathbf{f} ; эта сила приложена к шару, *направлена в сторону ускорения вагона \mathbf{w}* и численно равна $m\mathbf{w}$, где m — масса шара. По третьему закону Ньютона существует вторая сила $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$, приложенная к пружине и направленная в сторону, обратную направлению ускорения вагона.

По отношению же к системе отсчета, связанной с вагоном, шар, после того как пружина растянулась, снова окажется относительно вагона в состоянии покоя. Следовательно, в этой системе отсчета, согласно второму закону Ньютона, сумма сил, приложенных к шару, должна равняться нулю. Этому требованию можно удовлетворить, если приложить к шару инерционную силу \mathbf{f}' и считать, что она уравнивает силу \mathbf{f} , с которой растянутая пружина тянет шар. Эта инерционная сила $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$; таким образом, силу \mathbf{f}_1 , появление которой обусловлено выполнением третьего закона Ньютона и которая приложена к пружине („связям“) в ускоренной системе отсчета, мы прилагаем к самому телу (шару A). Пользуясь ускоренной системой, связанной с вагоном, мы заменяем динамическую задачу задачей статической, задачей о равновесии шара. Для этого, как сказано, мы считаем приложенной к шару A не только действующую на него действительную силу \mathbf{f} , но и силу \mathbf{f}_1 , действующую на связь. Такая замена динамической задачи статической возможна для любого случая ускоренного движения.

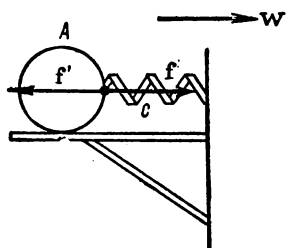


Рис. 43. Пружина тянет шар за ускоренно движущимся вагоном с силой \mathbf{f} ; с такой же силой \mathbf{f}' шар растягивает пружину.

Пусть на материальную точку с массой m действует сила f . Уравнение движения этой материальной точки выразится вторым законом Ньютона:

$$f = mw,$$

где w — ускорение, приобретенное материальной точкой. Это уравнение можно переписать:

$$f + (-mw) = 0.$$

Величина $f_1 = -mw$ по третьему закону Ньютона представляет собою силу, действующую на те тела, которые, воздействуя на рассматриваемую материальную точку, сообщают ей ускорение. Прилагая же мысленно силу $f' = f_1$ к самой материальной точке и называя ее *силой инерции*, мы получим

$$f + f' = 0,$$

т. е. в каждый данный момент сила инерции и сила, приложенная к материальной точке, уравновешиваются. Это положение носит название *начала Даламбера*.

Рассмотрим еще несколько примеров возникновения инерционных сил. Предположим, что на полу лифта лежит груз с массой m . Если лифт поднимается кверху с ускорением w , то такое же ускорение приобретает и груз. Груз приобретает это ускорение в результате давления со стороны пола, добавочного по отношению к тому давлению, которое уравновешивает вес груза. Сила этого давления $f = mw$. По третьему закону Ньютона груз в свою очередь давит на пол с добавочной силой $f_1 = -f$. Если груз лежит не прямо на полу, а на чашке пружинных весов (рис. 44), то эта сила f_1 давит на весы; пружина весов сожмется сильнее, и если весы при отсутствии ускорения лифта указывали вес груза P , то теперь они укажут вес $P' = P + f'$, где $f' = f_1$.

В случае, если лифт опускается с ускорением w , то с таким же ускорением будет двигаться вниз вместе с лифтом и груз. Часть силы тяжести, действующей на груз, будет сообщать ему ускорение. Эта часть силы равна $f = mw$, откуда давление груза на весы окажется равным $P' = P - f$.

В обоих случаях показания весов отличны от того показания (равного P), которое они дают при отсутствии ускорения у лифта, благодаря тому, что мы имеем дело с динамической задачей — с движением груза с ускорением w . По отношению же к системе отсчета, связанной неизменно с лифтом, груз продолжает в обоих случаях покоиться и изменение показаний весов может быть истолковано как

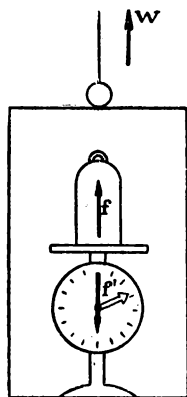


Рис. 44. Ускоренно движущийся вверх лифт ускоряет груз. На груз действует сила f ; с такой же силой f_1 груз давит на чашку весов.

изменение веса груза, вызванное тем, что к его истинному весу P прибавилась инерционная сила f' (направленная в ту же сторону, что и P , если ускорение лифта w направлено вверх, и направленная в сторону, противоположную P , если w направлено вниз).

Совершенно аналогичным образом объясняется возникновение инерционных сил во *вращающейся системе*. Пусть сидящий на карусели человек держит в руках камень с массой m (рис. 45). Для

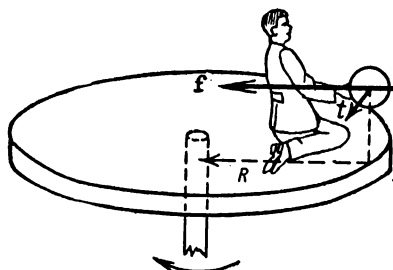


Рис. 45. Человек, сидящий на карусели, тянет к себе груз с силой f , чтобы заставить его заворачивать.

того чтобы камень двигался вместе с каруселью, т. е. описывал круг радиуса R (где R — расстояние от оси карусели до камня), необходимо камню сообщать *центростремительное* ускорение $w_n = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения карусели. Для этого к камню должна быть приложена *центростремительная* сила $f =$

$= m\omega^2 R$. Человек должен непрерывно тянуть камень к себе, чтобы заставить его заворачивать. Не будь силы f , камень начал бы двигаться по касательной t . По третьему закону Ньютона камень действует на руки человека с силой $f_1 = -f$; эта сила f_1 приложена к рукам человека и направлена от центра карусели наружу; в § 21 эта сила была названа *центробежной*.

Однако, если рассматривать весь процесс по отношению к системе отсчета, вращающейся вместе с диском, то камень остается при вращении неподвижным в этой системе и необходимость прилагать к нему силу f может быть истолкована как результат того, что к самому камню оказалась приложенной сила $f' = f_1$, направленная от центра карусели наружу. Это есть инерционная сила, совершенно аналогичная инерционным силам, рассмотренным нами в примерах с ускорениями вагона и лифта.

Инерционную силу, действующую во вращающейся системе, иногда называют *инерционной центробежной силой*. Ее не следует смешивать с той *действительной* центробежной силой, о которой шла речь в § 21.

В повседневной жизни нам часто приходится встречаться с инерционными силами. Например, когда трамвай начинает резко тормозить или поворачивать на большом ходу, мы оказываемся соответственно отброшенными, по отношению к трамваю, вперед или в сторону, наружную по отношению к завороту; это является следствием того, что мы сохраняем скорость, которую имели раньше, вагон же приобретает ускорение. По отношению же к системе отсчета, связанной

с вагоном, эти относительные смещения объясняются действием сил (инерционных сил). Эти инерционные силы приходится учитывать во всякой ускоренной системе, как добавочные по отношению к силам, действующим в инерционной системе.

Особое освещение вопросу о силах инерции пытался придать Эйнштейн в общей теории относительности. С точки зрения Эйнштейна силы инерции эквивалентны силам тяготения. Мы уже видели, что ускорение лифта ведет к тому же результату, как если бы груз становился тяжелее или легче (в зависимости от направления ускорения w), т. е. силы инерции оказываются эквивалентными силам тяжести.

Таким образом, выходит, что ускорение какой-либо системы эквивалентно появлению в этой системе сил тяготения. Однако, как показал В. А. Фок, такая эквивалентность несправедлива в пределах больших пространственных и временных масштабов. Инерциальная система отсчета, т. е. связанная с совокупностью неподвижных звезд, является преимущественной, и ускорение в этой системе не имеет того относительного характера, который имеет скорость.

§ 23. Зависимость силы тяжести от широты местности. Пользование инерционными силами весьма удобно для решения различных механических задач в ускоренной системе, в частности, во вращающейся системе. Такого рода вращающейся системой является, между прочим, земной шар, совершающий суточное вращение. Поэтому при точном рассмотрении различных механических процессов, происходящих на поверхности Земли, следует принимать во внимание инерционные силы, возникающие от суточного вращения. Эти силы невелики, поэтому во многих случаях мы можем ими пренебрегать и приближенно считать, как было указано, Землю за инерциальную систему отсчета. Однако в ряде случаев суточным вращением Земли пренебрегать нельзя.

Рассмотрим влияние суточного вращения Земли на силу тяжести. Пусть тяжелое тело A с массой m находится на широте φ (рис. 46). Решая задачу по отношению к координатной системе, вращающейся вместе с Землей, мы должны учесть инерционную силу

$$f = m\omega^2 R_1, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость вращения Земли и R_1 — расстояние от земной оси до тела. Сила f направлена перпендикулярно к земной оси. Эта сила f складывается с силой тяжести тела P_0 , направленной к центру Земли.

Отсюда кажущийся вес тела P_φ на широте φ равен

$$P_\varphi = P_0 + f. \quad (2)$$

В этом равенстве справа стоит векторная сумма.

Из рис. 46 имеем: $R_1 = R \cos \varphi$, где R — радиус Земли, откуда по (1)

$$f = m\omega^2 R \cos \varphi. \quad (3)$$

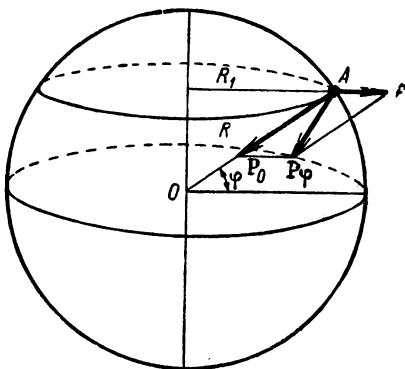


Рис. 46. Влияние суточного вращения Земли на силу тяжести.

Эта сила весьма мала по сравнению с силой тяжести. В самом деле, $P_0 = mg_0$, откуда

$$\frac{f}{P_0} = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos \varphi;$$

если подставить вместо ω , R и g_0 (истинное ускорение силы тяжести) их численные значения, то окажется, что $\frac{\omega^2 R}{g_0} = \frac{1}{289}$, косинус же угла φ

всегда ≤ 1 , т. е. действительно сила f много меньше силы тяжести P_0 . Поэтому для определения кажущегося веса P_φ по равенству (2) мы воспользуемся следующим приближенным расчетом. Разложим силу f на две составляющие: f_1 — направленную вертикально вверх (для данной точки земного шара), и f_2 — направленную горизонтально. Тогда приближенно можно считать, что составляющая f_2 изменяет силу тяжести лишь по направлению, а составляющая f_1 — лишь по величине. Отсюда приближенно:

$$P_\varphi = P_0 - f_1.$$

Но из рис. 47 имеем, что $f_1 = f \cos \varphi$, откуда

$$P_\varphi = P_0 - f \cos \varphi,$$

или по (3)

$$P_\varphi = P_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Вынося P_0 за скобку и замечая, что $P_0 = mg_0$, получим

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi \right). \quad (4)$$

Формула (4) дает зависимость кажущегося веса P_φ от широты местности φ . Величина $\frac{\omega^2 R}{g_0}$ есть постоянная, равная $\frac{1}{289}$,

так что

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi \right). \quad (4a)$$

Рис. 47.
Определение
веса тела P_φ
на широте φ .

На самом деле надо еще принять во внимание, что Земля не представляет собою правильной сферы, но приплюснута у полюсов, что ведет к увеличению у полюсов силы тяжести. Правильная зависимость веса тела от широты φ имеет вид:

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi \right).$$

На полюсе P_φ совпадает с P_0 ; на экваторе P_φ наиболее отличается от P_0 .

Угол α , который составляет направление кажущегося веса P_φ с земным радиусом, как видно из рис. 47, определится соотношением:

$$\sin \alpha = \frac{f_2}{P_\varphi}.$$

Заменяя приближенно P_φ через P_0 и замечая, что $f_2 = f \sin \varphi$, получим

$$\sin \alpha = \frac{f \sin \varphi}{P_0} = \frac{m\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi}{mg_0},$$

или

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos \varphi \sin \varphi. \quad (5)$$

Таким образом, кажущаяся сила тяжести P_φ направлена к центру Земли и на полюсе и на экваторе; наибольшее отклонение она имеет на широте $\varphi = 45^\circ$.

Если тело движется вдоль экватора с линейной скоростью v (отсчитанной в инерциальной системе координат, связанной с центром земного шара), то на него будет действовать инерционная сила f , направленная против силы тяжести и равная:

$$f = \frac{mv^2}{R}.$$

Эта сила окажется численно равной силе тяжести P_0 при условии

$$\frac{mv^2}{R} = mg_0,$$

откуда для v получаем значение:

$$v = \sqrt{g_0 R}.$$

Так как $g_0 = 981 \text{ см/сек}^2$ и $R = 6370 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^8 \text{ см}$, то

$$v = \sqrt{981 \cdot 6,37 \cdot 10^8} \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 7,91 \cdot 10^6 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \cong 7,9 \frac{\text{км}}{\text{сек}}.$$

Таким образом, при отсутствии силы трения со стороны воздуха, тело, брошенное горизонтально со скоростью $v = 7,9 \text{ км/сек}$, стало бы двигаться у поверхности Земли не падая, т. е. в виде спутника. Эта скорость носит название „первой космической скорости“.

При движении спутника над поверхностью Земли на высоте h по круговой орбите, как легко подсчитать, его скорость будет меньше. При $h = 250 \text{ км}$ получим $v = 7,76 \text{ км/сек}$, а при $h = 2000 \text{ км}$ — $v = 6,9 \text{ км/сек}$.

§ 24. Силы Кориолиса. Покажем, что во вращающейся системе на тело, *перемещающееся* относительно этой системы, действует, кроме центробежной, еще добавочная сила. Эта сила, носящая название *кориолисовой силы* (в честь французского математика Кориолиса, 1795—1843), зависит от скорости v' тела относительно вращающейся системы и от угловой скорости вращения системы ω .

Рассмотрим сперва частный случай. Пусть система представляет собою диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O (рис. 48) в направлении, указанном стрелкой. Пусть тело a перемещается равномерно из точки A вдоль радиуса OC со скоростью v' относительно диска. За время Δt тело a пройдет отрезок $\Delta l = AB = v' \Delta t$. За это время Δt в неподвижной системе координат радиус OC , благодаря вращению диска, повернется на угол $\Delta \varphi = \omega \Delta t$, и тело передвинется из A в D . В неподвижной системе координат тело a принимает одновременно участие в двух движениях: в движении относительно диска со скоростью v' и в движении вместе со вращающимся диском. Линейная скорость вращения диска различна для различных мест диска. Обозначим ее значение в точке A через v_r . Двигаясь лишь со скоростью вращения v_r , тело a

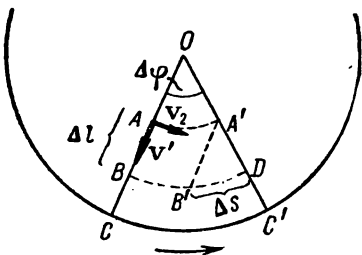


Рис. 48. Движение тела вдоль радиуса вращающегося диска.

описало бы дугу $\widehat{AA'}$ и пришло бы в точку A' . Двигаясь одновременно со скоростью v , и относительной скоростью v' , тело a должно было бы попасть в точку B' (отрезок $A'B' \parallel AB$). На самом деле тело a переходит в точку D . Это происходит за счет того, что линейная скорость вращения v , возрастает по мере удаления точки a от центра вращения. Таким образом, относительно *неподвижной системы координат* тело a , двигаясь вдоль радиуса, непрерывно меняет свою скорость: оно движется *ускоренно*. Величина этого ускорения ω может быть определена по тому добавочному пути $\Delta s = \widehat{B'D}$, который тело a прошло за время Δt . Из рис. 48 имеем:

$$\Delta s = A'B' \Delta \varphi,$$

или, так как $A'B' = \Delta l = v' \Delta t$ и $\Delta \varphi = \omega \Delta t$, то

$$\Delta s = v' (\Delta t)^2 \omega. \quad (1)$$

Следовательно, добавочный путь Δs возрастает пропорционально квадрату времени Δt . Но пропорциональность пути квадрату времени Δt имеет место при движении с постоянным ускорением ω (равномерно-ускоренном движении) при котором

$$\Delta s = \frac{1}{2} \omega (\Delta t)^2.$$

Сравнивая это выражение для Δs с (1), получим, что тело a испытывает ускорение

$$\omega = 2v'\omega. \quad (2)$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к относительной скорости v' , и в нашем случае — направо. Для того чтобы сообщить телу a это ускорение, к нему необходимо приложить силу f , направленную направо и равную $f = m\omega$, где m — масса тела. Не будь силы f , тело отклонилось бы во вращающейся вместе с диском системе координат от своего „прямолинейного“ движения вдоль радиуса диска.

Сила f_k , равная силе f , но направленная в противоположную сторону, будет действовать по третьему закону Ньютона на те связи, которые удерживают тело a при его движении на радиусе. Совершенно аналогично, как в ранее рассмотренных случаях ускоренных систем, пользуясь координатной системой, вращающейся вместе с диском, будем считать, что сила f_k приложена к самому телу a . Таким образом, во вращающейся системе к телу, движущемуся вдоль радиуса со скоростью v' , приложена „инерционная“ сила

$$f_k = 2v'\omega m, \quad (3)$$

направленная перпендикулярно к v' (в нашем примере налево, см. рис. 49).

Сила f_k и носит название *силы Кориолиса*.

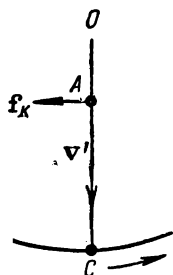


Рис. 49. Направление силы Кориолиса при движении тела вдоль радиуса вращающегося диска.

Покажем теперь, что сила Кориолиса существует и в том случае, когда тело a движется на диске по окружности с центром на оси вращения (рис. 50). При движении тела a относительно диска со скоростью v' полная скорость v неподвижной системе координат равна $v_r + v'$, где v_r — линейная скорость вращения диска в том месте, где находится тело a . Следовательно, на тело a действует центробежная сила

$$f_{\text{ц}} = \frac{m(v_r + v')^2}{R},$$

где R — расстояние от оси вращения до тела. Возводя в этой формуле сумму $(v_r + v')$ в квадрат, получим

$$f_{\text{ц}} = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m.$$

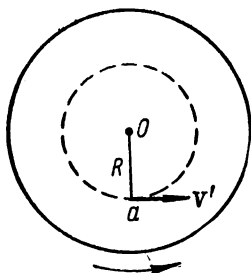


Рис. 50. Движение тела на вращающемся диске по окружности, концентрической с диском.

В координатной системе, связанной с диском, член $\frac{mv_r^2}{R}$ определяет инерционную центробежную силу, вызванную вращением диска с угловой скоростью ω ; член $\frac{mv'^2}{R}$ определяет центробежную силу, вызванную относительным движением тела по кругу радиуса R со скоростью v' ; член

$$f = 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m = 2v' \omega m$$

определяет добавочную силу, вызванную одновременным наличием как вращения диска, так и движения тела относительно диска.

Сила f_k , равная силе f , но направленная в противоположную сторону, даст для этого случая силу Кориолиса.

Эта сила совпадает по величине с силой, возникающей при движении вдоль радиуса [формула (3)], и направлена также перпендикулярно к относительной скорости.

Теперь рассмотрим случай, когда тело a движется с относительной скоростью v' , направление которой составляет угол β с радиусом OC (рис. 51).

В этом случае скорость v' можно разложить на две составляющие: на составляющую вдоль радиуса $v'_1 = v' \cos \beta$ и составляющую, перпендикулярную к радиусу, $v'_2 = v' \sin \beta$.

Составляющей v'_1 по формуле (3) соответствует кориолисова сила $f_{k1} = 2v'_1 \omega \cos \beta \cdot m$, составляющей v'_2 — сила $f_{k2} = 2v'_2 \omega \sin \beta \cdot m$;

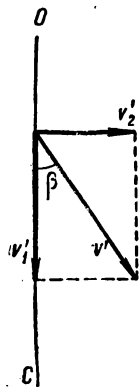


Рис. 51. Разложение относительной скорости на составляющую v'_1 вдоль радиуса и составляющую v'_2 , перпендикулярную к радиусу.

полная сила Кориолиса

$$f_k = \sqrt{f_{k1}^2 + f_{k2}^2} = 2v' \omega m.$$

Таким образом, и для произвольного направления относительной скорости v' для силы Кориолиса сохраняется выражение (3).

Наконец, рассмотрим самый общий случай, когда тело движется в направлении, составляющем угол α с осью вращения (рис. 52).

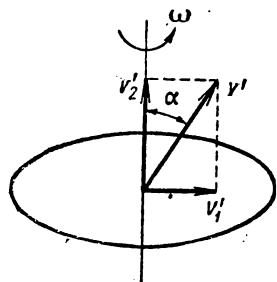


Рис. 52. Разложение относительной скорости на составляющую v_1' , перпендикулярную к оси, и составляющую v_2' — вдоль оси вращения.

Тогда разложим скорость v' на составляющую v_1' , перпендикулярную к оси вращения, и составляющую v_2' , параллельную оси вращения. Эта последняя составляющая не обуславливает никакого изменения расстояния от оси и, следовательно, не может вести к появлению добавочных ускорений и сил. Отсюда величина силы Кориолиса определяется лишь составляющей $v_1' = v' \sin \alpha$. Заменяя в формуле (3) v' через $v_1' = v' \sin \alpha$, получим общее выражение для силы Кориолиса

$$f_k = 2v' \omega \sin \alpha \cdot m. \quad (4)$$

Во всех случаях сила Кориолиса направлена перпендикулярно и к переносной скорости v' и к оси вращения. Для определения направления силы f_k введем в рассмотрение вектор угловой скорости ω (см. § 13). Тогда *кориолисова* сила f_k направлена перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы ω и v' (рис. 53), и так, что если сопоставить направление поворота головки буравчика от вектора v' к вектору ω (в направлении меньшего угла), то направление силы f_k определится направлением поступательного движения буравчика.

Если воспользоваться обозначениями векторного анализа, то f_k определится через векторное произведение векторов v' и ω (см. § 13):

$$f_k = 2 [v' \times \omega] m. \quad (4a)$$

Сила Кориолиса проявляется при движениях по поверхности земного шара, обладающего определенной угловой скоростью, благодаря суточному вращению. Предположим, например, что поезд идет в северном полушарии в меридиональном направлении на север (точка a на рис. 54). При этом вектор относительной скорости v' составляет острый угол α с вектором угловой скорости ω , и *кориолисова* сила f_k направлена касательно к земной поверхности направо, если встать лицом по ходу движения поезда. Поезд оказывает на правый рельс большее давление, чем на левый. В южном полушарии, при движении поезда к югу (точка a' на рис. 54), v' составит с ω тупой угол, и сила Кориолиса направ-

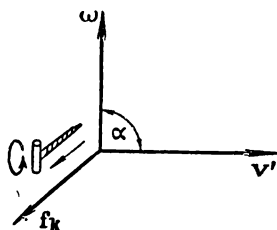


Рис. 53. Определение направления силы Кориолиса f_k .

лена налево относительно хода движения. Существованием силы Кориолиса объясняется подмывание реками в северном полушарии правого, а в южном — левого берегов (закон Бера), возникновение северо-восточных пассатов в северном полушарии и т. д.

Другим примером влияния сил Кориолиса на движение тел у поверхности земного шара являются: отклонение свободно падающих тел к востоку от вертикали и отклонение плоскости качаний маятника. Разберем последний случай несколько подробнее. Предположим для простоты, что маятник совершает колебания на северном полюсе. Тогда скорость груза маятника v' все время перпендикулярна к оси земного шара (при большой длине нити) и, следовательно, $v' \perp \omega$, где ω — по-прежнему вектор угловой скорости вращения Земли. В результате на груз маятника действует сила Кориолиса, численно равная $f_k = 2mv'\omega$, лежащая в горизонтальной плоскости и направленная вправо по отношению к вектору v' . Под действием этой силы груз маятника при каждом размахе отклоняется вправо. В результате плоскость качаний маятника будет поворачиваться относительно Земли в направлении часовой стрелки и повернется на угол 2π за сутки. В случае качаний маятника на широте φ плоскость качаний повернется в сутки на угол $2\pi \sin \varphi$.

Наблюдение отклонения плоскости качаний маятника было впервые проведено Фуко в 1851 г. и послужило прямым доказательством существования суточного вращения Земли.

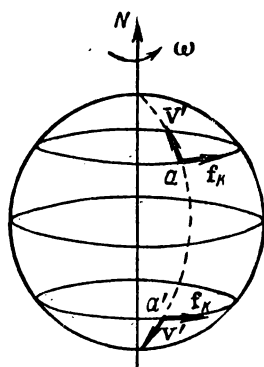


Рис. 54. Направление сил Кориолиса, действующих на тела, движущиеся по поверхности Земли.

ГЛАВА III

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 25. Работа и мощность. В окружающей нас обстановке мы имеем дело с телами, взаимодействующими друг с другом теми или иными силами (упругие силы, силы тяготения, силы трения и т. д.). Поэтому перемещения тел в таких условиях осуществляются лишь под влиянием сил. Отсюда, естественно, возникает потребность дать характеристику того действия сил, которое связано с перемещением тел. В механике за такого рода характеристику принимается величина, тем большая, чем больше составляющая сила вдоль направления перемещения и чем на больший отрезок перемещается точка ее приложения. Эта величина называется *работой*. Полностью физический смысл работы может быть выяснен после того, как будет установлена связь между совершаемой работой и изменением энергии.

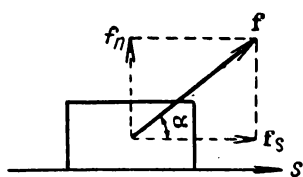


Рис. 55. Работу производит лишь составляющая силы f_s вдоль направления перемещения s .

Тогда становится ясным, что работа есть мера изменения энергии (§ 28).

В простейшем случае прямолинейного движения и постоянной силы, направленной вдоль перемещения, работа пропорциональна произведению силы f на перемещение s точки ее приложения:

$$A = kfs, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

В том случае, если сила, приложенная к телу, составляет угол α с направлением перемещения (рис. 55), разложим силу f на две составляющие: f_s — направленную вдоль перемещения, и f_n — перпендикулярную к нему.

По сказанному, работу совершает лишь составляющая f_s , поэтому

$$A = kf_s s,$$

или, так как $f_s = f \cos \alpha$, то

$$A = kfs \cos \alpha. \quad (1a)$$

Полагая коэффициент пропорциональности $k = 1$, получим

$$A = fs \cos \alpha. \quad (2)$$

Таким образом, в случае произвольно направленной силы, *работа численно равна произведению из силы f , перемещения s ее точки приложения и косинуса угла α между направлением силы и перемещением*.

Работа характеризуется лишь численным значением и поэтому представляет собою величину скалярную.

В векторном анализе скалярную величину C , равную произведению из численных значений векторов \mathbf{B} и \mathbf{D} и косинуса угла между ними, называют скалярным произведением:

$$C = B \cdot D \cos \alpha.$$

Из равенства (2) следует, что работа представляет собою скалярное произведение вектора силы \mathbf{f} и вектора перемещения \mathbf{s} .

Когда угол $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, и работа положительна; в этом случае составляющая силы f_s направлена в сторону перемещения. При $\alpha > 90^\circ$ имеем $\cos \alpha < 0$, работа в этом случае отрицательна; при этом составляющая силы f_s направлена в сторону, противоположную перемещению. Поясним сказанное примерами: 1) к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложена сила f , которая перемещает его по этой поверхности; сила f направлена вдоль перемещения и совершает положительную работу. Одновременно к телу приложена сила трения $f_{\text{тр}}$, она направлена в сторону, противоположную перемещению тела; совершаемая ею работа отрицательна; 2) подброшенное тяжелое тело летит вверх, сила тяжести направлена вниз, т. е. в сторону, противоположную направлению движения; работа силы тяжести отрицательна; 3) тяжелое тело падает вниз; в этом случае сила тяжести направлена в ту же сторону, куда происходит перемещение тела; работа силы тяжести положительна; 4) тело под влиянием центростремительной силы равномерно движется по окружности; в этом случае сила все время перпендикулярна к направлению движения ($\alpha = 90^\circ$), и работа по формуле (2) равна нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда сила не постоянна и движение происходит по криволинейному пути. Возьмем столь малую дугу $\widehat{\Delta s}$, чтобы ее можно было считать совпадающей с хордой Δs . Пусть f_s — составляющая силы \mathbf{f} вдоль касательной к дуге $\widehat{\Delta s}$. Тогда значение f_s на длине пути Δs можно считать постоянным, и элементарная работа ΔA , совершенная на этом пути, будет равна

$$\Delta A = f_s \cdot \Delta s. \quad (3)$$

Всю работу A , совершаемую на конечном пути s , получим, разбив путь s на отдельные бесконечно малые элементы $\widehat{\Delta s}$, определив элементарные работы ΔA и сложив их:

$$A = \sum f_s \Delta s. \quad (4)$$

Полную работу A можно представить графически. Отложим по оси абсцисс длину пути s (рис. 56), а по оси ординат — значение составляющей силы f_s . Пусть кривая AB представляет значения составляющих силы f_s для различных точек пути для некоторого частного случая. Разобьем всю длину пути, изображаемого отрезком OC , на элементарные отрезки Δs . Элементарная работа ΔA , совершаемая на одном из этих отрезков Δs , равна $f_s \Delta s$, т. е. изображается площадью густо заштрихованного столбика.

Рис. 56. Работа графически определяется площадью фигуры $OABC$.

Вся работа на пути s равна сумме всех элементарных работ ΔA , т. е. графически изображается площадью всей заштрихованной фигуры $OABC$.

Определим работу, совершаемую при одновременном действии на тело нескольких сил f_1, f_2, f_3 и т. д. (рис. 57). Элементарная работа ΔA равнодействующей равна

$$\Delta A = f \cos \alpha \Delta s,$$

где f — равнодействующая сил f_1, f_2, f_3 , а α — угол, который она составляет с направлением перемещения Δs . Величина $f \cos \alpha$ есть проекция f_s силы f на направление s . Но мы видели (см. § 20), что проекция результирующего вектора на некоторое направление равна сумме проекций его слагаемых на то же направление, откуда

$$f_s = f_{1s} + f_{2s} + f_{3s}$$

и, следовательно,

$$\Delta A = f_s \Delta s = f_{1s} \Delta s + f_{2s} \Delta s + f_{3s} \Delta s,$$

т. е. работа результирующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

Воспользовавшись этим положением, мы можем преобразовать выражение для работы. Разложим силу f , действующую в некотором направлении, на составляющие вдоль координатных осей f_x, f_y, f_z , тогда по доказанному:

$$\Delta A = f_x \cos \alpha_1 \Delta s + f_y \cos \alpha_2 \Delta s + f_z \cos \alpha_3 \Delta s,$$

где α_1, α_2 и α_3 — соответственно углы между составляющими силы f_x, f_y, f_z и направлением перемещения Δs . Но направление составляющих f_x, f_y, f_z совпадает с направлением осей X, Y, Z , откуда $\Delta s \cos \alpha_1 = \Delta x$, $\Delta s \cos \alpha_2 = \Delta y$, $\Delta s \cos \alpha_3 = \Delta z$, где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — проекции перемещения Δs на координатные оси. Отсюда

$$\Delta A = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z. \quad (5)$$

Для переменной силы следует брать бесконечно малое смещение ds с составляющими dx, dy, dz , тогда

$$dA = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \quad (5a)$$

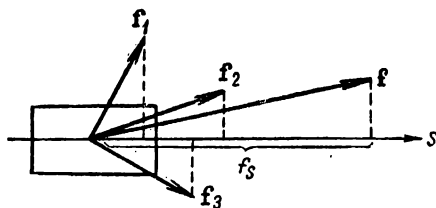


Рис. 57. Работа результирующей силы f равна сумме работ слагаемых сил f_1, f_2, f_3 .

Вся работа на конечном перемещении s выразится суммой элементарных работ dA , т. е. криволинейным интегралом:

$$A = \int_{B_1}^{B_2} (f_x dx + f_y dy + f_z dz), \quad (6)$$

где B_1 и B_2 — начальная и конечная точки пути s .

Практически часто весьма важно знать не только работу, совершенную силами, но и то время, за которое работа произведена. Очевидно, из двух механизмов, совершающих одну и ту же работу, ценнее тот, который совершает эту работу за меньший промежуток времени. Поэтому наряду с работой вводится в рассмотрение новая величина, называемая *мощностью*. *Мощностью* W называется *физическая величина, пропорциональная работе ΔA и обратно пропорциональная тому промежутку времени Δt , за который эта работа совершена*:

$$W = k \frac{\Delta A}{\Delta t}, \quad (7)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Полагая $k=1$, получим

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (7a)$$

Если сила меняется со временем, то мощность тоже не остается постоянной; в этом случае имеет смысл говорить о *мощности в данный момент*, подразумевая под ней тот предел, к которому стремится отношение $\Delta A/\Delta t$ при бесконечном убывании промежутка времени Δt :

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right). \quad (8)$$

Пользуясь обозначениями дифференциального исчисления, получим

$$W = \frac{dA}{dt}, \quad (8a)$$

т. е. мощность численно равна производной от работы по времени.

Так как элементарная работа $\Delta A = f_s \Delta s$, то по (8)

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_s \cdot \Delta s}{\Delta t} \right) = f_s \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right), \text{ но } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v,$$

где v есть значение скорости в данный момент. Отсюда

$$W = f_s \cdot v, \quad (9)$$

т. е. мощность в каждый данный момент пропорциональна произведению проекции силы на направление движения на скорость движения.

Ввиду практической важности величин работы и мощности исторически возникло большое количество единиц для их измерения. Приведем эти единицы.

1) *Единица работы в CGS-системе.* Пользуясь равенством (2), в котором полагаем $\alpha = 0$, получим: за единицу работы в CGS-системе принимается работа, совершаемая силой в 1 дину на пути в 1 см, при условии, что сила действует в направлении перемещения. Эта единица работы называется эрг.

Наряду с этим употребляется более крупная единица работы джоуль:

$$1 \text{ джоуль} = 10^7 \text{ эргов.}$$

2) *В MKS-системе за единицу работы принимается работа, совершаемая силой в 1 ньютон на пути в 1 м.* Так как $1 \text{ н} = 10^5 \text{ дин}$ и $1 \text{ м} = 10^3 \text{ см}$, то эта единица работы равна 10^7 эргов , т. е. 1 джоулю.

3) *В практической технической системе за единицу работы принимается работа, совершаемая силой в 1 кг на пути в 1 м.* Эта единица работы называется килограммометр (сокращенно кгм).

Так как $1 \text{ кг} = 981\,000 \text{ дин}$ и $1 \text{ м} = 100 \text{ см}$, то $1 \text{ кгм} = 981\,000 \cdot 100 \text{ эргов} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ эргов} = 9,81 \text{ джоуля}$;

$$1 \text{ джоуль} = \frac{1}{9,81} \text{ кгм} = 0,102 \text{ кгм.}$$

4) *Единица мощности в CGS-системе.* За единицу мощности в CGS-системе принимается мощность механизма, совершающего работу в 1 эрг за 1 сек. Эта единица мощности обозначается эрг/сек.

Наряду с единицей мощности эрг/сек употребляется более крупная единица мощности, называемая ватт:

$$1 \text{ ватт} = 10^7 \text{ эрг/сек} = 1 \text{ джоуль/сек.}$$

Таким образом, мощностью в 1 вт обладает механизм, совершающий работу в 1 дж за 1 сек.

100 ватт называются 1 гектоватт (сокращенно гвт),

1000 ватт называются 1 киловатт (сокращенно кВт).

5) *В MKS-системе за единицу мощности принимается мощность механизма, совершающего работу в 1 джоуль за 1 сек., т. е. 1 ватт.*

6) *В технической системе за единицу мощности принимается мощность механизма, совершающего работу в 1 кгм за 1 сек.* Эта единица мощности сокращенно обозначается кгм/сек.

Очевидно:

$$1 \text{ кгм/сек} = 9,81 \text{ ватта,}$$

$$1 \text{ ватт} = \frac{1}{9,81} \text{ кгм/сек} = 0,102 \text{ кгм/сек.}$$

Кроме того, исторически возникла единица мощности, называемая „лошадиной силой“, ¹ равная 75 кгМ/сек. Таким образом:

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кгМ/сек} = 736 \text{ ватт} = 0,736 \text{ киловатта.}$$

7) В современной практике весьма часто употребляют еще две следующие единицы работы:

а) равную работе, совершаемой механизмом с постоянной мощностью в 1 гектоватт за время в 1 час. Эта единица работы называется *гектоватт-час*:

$$1 \text{ гектоватт-час} = 100 \text{ ватт} \cdot 3600 \text{ сек.} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ джоулей;}$$

б) равную работе, совершаемой механизмом с постоянной мощностью в 1 киловатт за время в 1 час. Эта единица работы называется *киловатт-час*:

$$1 \text{ киловатт-час} = 1000 \text{ ватт} \cdot 3600 \text{ сек.} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ джоулей.}$$

Рассмотрим несколько примеров на определение работы и мощности.

Пример 1. Электропоезд весом 500 Т проходит равномерно путь в 3 км в гору с уклоном 4 м на 1 км пути. Коэффициент трения $\mu = 0,002$.

Определить: а) работу, совершенную поездом; б) мощность, развиваемую электропоездом, зная, что путь в 3 км был пройден за 5 мин.

Решение. Работа совершается против силы трения:

$$P_{\text{тр}} = \mu P_1,$$

где P_1 — давление, оказываемое поездом на путь (рис. 58), и против составляющей силы тяжести P_2 , параллельной пути. Таким образом, искомая работа A равна

$$A = (\mu P_1 + P_2) \cdot s. \quad (10)$$

Из рис. 58 имеем

$$P_1 = P \cos \alpha; \quad P_2 = P \sin \alpha,$$

где P — вес поезда и α — угол, под которым путь наклонен к горизонту.

Подставляя эти значения P_1 и P_2 в (10), получим

$$A = P (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) s. \quad (11)$$

Величины $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определим из условия, что подъем равен 4 м на 1 км пути, откуда

$$\sin \alpha = \frac{4}{1000} = 0,004 \text{ и } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,004^2} = 0,99992,$$

т. е. приблизительно единице. После этого по равенству (11) имеем

$$A = 5 \cdot 10^5 (0,002 + 0,004) \cdot 3000 \text{ кгМ,}$$

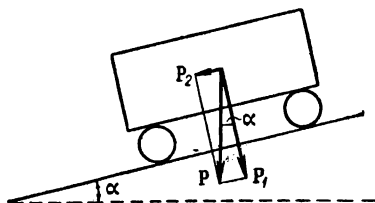


Рис. 58. Работа совершается против силы трения и против скатывающей назад силы P_2 .

¹ В среднем лошадь при длительной работе действительно дает мощность около 75 кгМ/сек, однако кратковременно лошадь может развить мощность в несколько „лошадиных сил“.

откуда

$$A = 9 \cdot 10^6 \text{ кгм} = 8,83 \cdot 10^7 \text{ дж} = 8,83 \cdot 10^4 \text{ кдж.}$$

Искомая мощность

$$W = \frac{A}{t} = \frac{8,83 \cdot 10^4}{300} \text{ квт} = 2,94 \cdot 10^2 \text{ квт}$$

или

$$W = \frac{2,94 \cdot 10^2}{0,736} \text{ л. с.} = 399 \text{ л. с.}$$

П р и м е р 2. Определить работу, совершаемую при сжатии пружины на 10 см, если известно, что сила пропорциональна сжатию пружины и что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 2 кг.

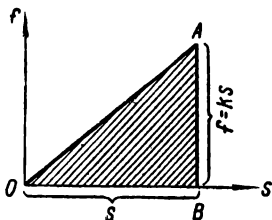


Рис. 59. Работа упругих сил растянутой пружины равна площади треугольника OAB .

Р е ш е н и е. Здесь мы имеем случай работы переменной силы; сила возрастает пропорционально сжатию пружины. Обозначив сжатие через s , имеем, что сила

$$f = ks, \quad (12)$$

где k — коэффициент, определяемый степенью жесткости пружины.

Графически зависимость силы f от сжатия s изображается прямой OA , проходящей через начало координат (рис. 59).

Если пружина сжата на величину s , то s и представляет собою тот путь, на котором рассматриваемая переменная сила совершала работу. По сказанному на стр. 80, работа изобразится площадью заштрихованной фигуры. Так как эта фигура есть треугольник, то ее площадь равна $\frac{AB \cdot OB}{2}$, но $OB = s$ и $AB = ks$, откуда искомая работа

$$A = \frac{ks \cdot s}{2} = \frac{ks^2}{2}. \quad (13)$$

Численное значение k определим по (12) из условия, что $f = 2$ кг при $s = 1$ см; однако желая воспользоваться технической системой, переведем s в метры, тогда $s = 0,01$ м и

$$k = \frac{f}{s} = \frac{2}{0,01} \text{ кг/м} = 200 \text{ кг/м.}$$

Подставляя это значение k в (13), получим

$$A = \frac{200 \cdot (0,1)^2}{2} \text{ кгм} = 1 \text{ кгм.}$$

§ 26. Кинетическая энергия механической системы. Тело, рассматриваемое как материальная точка, движущееся под действием силы, меняет свою скорость. Работа приложенной силы связана с изменением скорости тела. Эта связь выражается через физическую величину, называемую *кинетической энергией* материальной точки.

Для определения кинетической энергии материальной точки считаем, какую работу надо совершить для того, чтобы изменить скорость материальной точки с массой m от значения v_1 до значе-

ния v_2 . Для этого приложим к материальной точке постоянную силу f , параллельную вектору скорости v_1 , которая за некоторый промежуток времени t изменит скорость от значения v_1 до значения v_2 . За это время t материальная точка пройдет путь s , и сила f совершит работу

$$A = fs. \quad (1)$$

Ввиду постоянства силы движение будет равноускоренным, причем ускорение его

$$w = \frac{v_2 - v_1}{t},$$

а следовательно, сила

$$f = mw = m \frac{v_2 - v_1}{t}. \quad (2)$$

Путь, пройденный материальной точкой за время t , определим через среднюю скорость $\bar{v} = \frac{v_2 + v_1}{2}$, откуда получаем

$$s = \frac{v_2 + v_1}{2} t. \quad (3)$$

Подставляя найденные значения силы f и пути s по (2) и (3) в формулу (1), найдем

$$A = m \frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} t = m \frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2},$$

откуда

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (4)$$

Таким образом, *работа силы f численно равна приращению величины $\frac{mv^2}{2}$, которая называется кинетической энергией*. Обозначим кинетическую энергию через E_k :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Тогда равенство (4) можно переписать в виде:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. \quad (6)$$

Из равенства (4) следует, что для того, чтобы тело, движущееся со скоростью v , остановилось ($v_1 = v$, $v_2 = 0$), сила, приложенная к этому телу, должна совершить отрицательную работу, численно равную кинетической энергии тела $E_k = \frac{mv^2}{2}$; обратно, чтобы телу с массой m сообщить скорость v , приложенная сила должна совершить положительную работу, равную $\frac{mv^2}{2}$.

Если в выражении $\frac{mv^2}{2}$ все величины выражены в CGS-системе, т. е. m — в граммах, v — в см/сек, то энергия выражается в эргах. В технической системе v выражается в м/сек, m — в технических единицах массы (равных 9,81 кг); энергия получается в кгМ. На практике часто пользуются смешанной системой: скорость v выражают в м/сек, массу m — в кг, а энергию E_k желают получить в кгМ. Тогда в формулу (5) должен быть введен коэффициент пропорциональности k , который в данном случае будет иметь численное значение $\frac{1}{9,81}$, таким образом:

$$E_k(\text{кгМ}) = \frac{m(\text{кг}) [v(\text{м/сек})]^2}{9,81 \cdot 2}.$$

Соотношение (4) может быть легко получено и для случая переменной силы и криволинейного движения. Пусть за произвольный малый промежуток времени Δt тело проходит малый путь Δs (рис. 60). Тогда работа ΔA на этом пути равна

$$\Delta A = f \cos \alpha \cdot \Delta s, \quad (7)$$

где α — угол, который сила f составляет с направлением перемещения Δs .

По второму закону Ньютона $f = m \cdot w$, где w — ускорение, вызываемое рассматриваемой силой; направление вектора w совпадает с направлением силы f . Отсюда выражение (7) перепишем:

$$\Delta A = mw \cos \alpha \cdot \Delta s. \quad (8)$$

Величина $w \cos \alpha$ есть проекция вектора ускорения на малое перемещение Δs , которое совпадает по направлению с касательной к траектории. Таким образом, $w \cos \alpha$ есть касательная составляющая ускорения w_t , которая равна $\Delta v / \Delta t$, где Δv — изменение численного значения v . Подставляя это значение $w \cos \alpha$ в (8), получим

$$\Delta A = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta s.$$

Наконец, замечая, что $\Delta s = v \Delta t$, найдем

$$\Delta A = mv \Delta v. \quad (9)$$

Чтобы получить полную работу A , совершаемую на конечном пути s , надо просуммировать выражение (9):

$$A = \sum \Delta A = \sum mv \Delta v.$$

Вынося массу m , как величину постоянную, за знак суммы, получим

$$A = m \sum v \Delta v. \quad (9a)$$

Для того чтобы сосчитать эту сумму, положим изменение скорости бесконечно малым, тогда сумма заменится интегралом

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v dv,$$

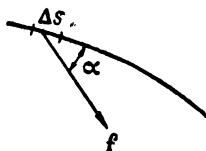


Рис. 60. Малый путь Δs , проходимый при криволинейном движении.

взятым в пределах от скорости v_1 , соответствующей началу пути, до скорости v_2 , соответствующей концу пути. Выполняя интегрирование, получим

$$m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Приведем несколько примеров на определение кинетической энергии.

Пример 1. Поезд весом 600 *Т* отходит от станции и через 5 мин. после отхода имеет скорость 60 *км/час*, пройдя путь 2,5 *км*. Какую среднюю мощность развивал паровоз, если коэффициент трения κ постоянен и равен 0,005.

Решение. Работа, совершенная паровозом, складывается из работы против силы трения и работы, идущей на сообщение поезду запаса кинетической энергии, откуда

$$A = f_{\text{тр}} \cdot s + \frac{mv^2}{2},$$

где $f_{\text{тр}} = \kappa P$ есть сила трения, m — масса поезда, v — его скорость в конце пути s .

Отсюда искомая мощность W равна

$$W = \frac{A}{t} = \kappa P \cdot \frac{s}{t} + \frac{mv^2}{2t},$$

или

$$W = 0,005 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot \frac{2,5 \cdot 10^3}{300} + \frac{6 \cdot 10^5 \cdot (16,7)^2}{9,81 \cdot 2 \cdot 300} = 5,3 \cdot 10^4 \text{ кгм/сек},$$

или

$$W = \frac{5,3 \cdot 10^4}{75} \text{ л. с.} \cong 700 \text{ л. с.}$$

Пример 2. Определить скорости, приобретаемые шарами после центрального упругого удара; массы шаров m_1 и m_2 и их скорости до удара v_1 и v_2 .

Решение. Обозначим скорости шаров после удара через v'_1 и v'_2 . Упругий характер удара означает, что сумма кинетических энергий шаров после удара должна равняться сумме их кинетических энергий до удара:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (10)$$

Кроме того, должен выполняться закон сохранения количества движения (см. § 20), по которому:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (11)^1$$

¹ Следует иметь в виду, что равенство (10) имеет скалярный характер; оно осталось бы справедливым и при не центральном ударе, т. е. когда скорости шаров v_1 и v_2 имеют разные направления. Равенство же (11) имеет векторный характер; в том виде, как оно приведено в тексте, оно справедливо лишь для центрального удара, когда все скорости v_1 , v_2 , v'_1 и v'_2 направлены вдоль одной прямой.

Решая два уравнения (10) и (11) относительно двух неизвестных v'_1 и v'_2 , найдем:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (12)$$

Пример 3. Определить потерю кинетической энергии при неупругом центральном ударе двух шаров. Массы шаров m_1 и m_2 , их скорости до столкновения v_1 и v_2 .

Решение. Кинетическая энергия шаров до столкновения:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

После неупругого удара оба шара катятся с одинаковой скоростью v' , равной (см. § 20):

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (13)$$

Изменение кинетической энергии при ударе равно

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Подставляя сюда v' по (13), найдем

$$\Delta E = - \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (14)$$

Таким образом, при неупругом столкновении шаров происходит уменьшение кинетической энергии. Это изменение энергии идет на работу, совершаемую при неупругой деформации шаров во время удара. В конечном счете эта работа ведет к нагреванию шаров.

Переходя от рассмотрения одной материальной точки к рассмотрению системы материальных точек, мы применим соотношение (4) к каждой точке системы:

$$A_i = \frac{m v_{i2}^2}{2} - \frac{m v_{i1}^2}{2}. \quad (15)$$

Здесь индекс i отмечает данную материальную точку, а A_i означает работу сил, приложенных к этой точке.

Кинетической энергией системы E_k называется сумма кинетических энергий всех материальных точек, образующих систему:

$$E_k = \sum_i \frac{m v_i^2}{2}. \quad (16)$$

Суммируя почленно равенства (15) для всех материальных точек, получим:

$$E_{k2} - E_{k1} = A, \quad (17)$$

где $A = \sum_i A_i$ есть сумма работ всех сил, приложенных ко всем материальным точкам, образующим систему. Равенство (17) выра-

жает один из основных законов механики: *изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил, приложенных к материальным точкам, образующим систему.*

§ 27. Потенциальная энергия механической системы. Предположим, что тело, рассматриваемое как материальная точка, *перемещается из одного места в другое*, взаимодействуя с окружающими телами. На тело, следовательно, действуют силы; в этом случае говорят, что тело перемещается в *силовом поле*. Характер сил, действующих на рассматриваемое тело, может быть весьма разнообразным, например, эти силы могут быть силами тяготения, силами трения, электрическими силами и т. д.

Рассмотрим работу, совершаемую при движении материальной точки в однородном поле силы тяжести. Такое поле силы тяжести существует вблизи поверхности Земли, где сила тяжести практически не зависит от высоты над поверхностью Земли (пока высота h мала по сравнению с радиусом земного шара R). Пусть материальная точка движется по некоторой кривой B_1B_2 (рис. 61). Разобьем эту кривую на элементарные отрезки, настолько малые, чтобы каждый из них можно было считать прямолинейным. Тогда элементарная работа ΔA , совершаемая при передвижении по отрезку Δs , будет $\Delta A = P \Delta s \cos \alpha$, где P — вес тела, а α — угол, который направление силы тяжести составляет с направлением перемещения. Из рис. 61 видно, что $\Delta s \cos \alpha = \Delta h$, где Δh — изменение высоты тела при перемещении на отрезок Δs .

Вся работа перемещения из точки B_1 в точку B_2 будет

$$A = \sum \Delta A = \sum P \Delta h = P \sum \Delta h,$$

но $\sum \Delta h$ дает отрезок h , указывающий, насколько точка B_1 лежит выше точки B_2 ; таким образом,

$$A = Ph, \quad (1)$$

т. е. работа силы тяжести при перемещении тела по любой кривой линии равна работе при перемещении вдоль вертикали на отрезок h , равный разности высот начальной и конечной точек пути тела. *Работа в поле силы тяжести не зависит от формы и длины пути, а только от того, насколько выше лежит конечная точка пути по отношению к начальной точке.* Оказывается, что в природе существуют и другие силы, кроме силы тяжести, обладающие тем же замечательным свойством: работа сил при перемещении материальной точки зависит только от положения начальной и конечной

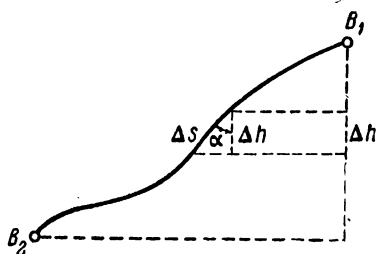


Рис. 61. Определение работы сил тяготения.

точек пути и не зависит ни от вида пути, ни от скорости движения. Такие силы носят название *потенциальных сил*. При движении материальной точки в поле потенциальных сил можно ввести понятие о *потенциальной энергии*, через разность которой будет определяться работа сил. Пусть материальная точка перемещается из некоторой точки пространства (1) в другую точку пространства (2) и пусть при этом действующие на нее силы совершают работу $A_{1,2}$. По сказанному, для потенциальных сил эта работа характеризуется только положениями начальной и конечной точек пути, т. е. положением точек (1) и (2). Это означает, что можно ввести такую величину E_p , характеризующую положение материальной точки в поле потенциальных сил, что работа $A_{1,2}$ будет равна разности значений E_{p1} и E_{p2} , которые величина E_p принимает в точках (1) и (2):

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{1,2}. \quad (2)$$

Величина E_p называется потенциальной энергией.

Равенство (2) определяет лишь *разность* потенциальных энергий в двух точках; саму потенциальную энергию можно определить, если условно принять за нуль значение потенциальной энергии в какой-либо точке пространства.

В качестве примера определим потенциальную энергию материальной точки в поле силы тяжести. По равенству (1) работа силы тяжести при перемещении тела между двумя точками пространства B_1 и B_2 , из которых вторая лежит на отрезок h ниже первой, равна $A = Ph$ или $A = mgh$, если через m обозначить массу тела, а через g — ускорение силы тяжести. Обозначим высоту точки B_1 , отсчитанную от некоторой нулевой высоты, через h_1 , а точки B_2 — через h_2 , тогда $h = h_1 - h_2$ и

$$A = mgh_1 - mgh_2.$$

С другой стороны, по формуле (2)

$$A = E_{p1} - E_{p2}.$$

Если условно принять за нуль значение потенциальной энергии материальной точки на высоте $h_2 = 0$, то из сравнения двух последних равенств получаем

$$E_{ph} = mgh. \quad (3)$$

Таким образом, потенциальная энергия тела с массой m , поднятого на высоту h , оказывается равной mgh . При этом потенциальная энергия тела, лежащего на поверхности Земли, условно принята равной нулю. Если тело падает с высоты h , то сила тяжести совершает положительную работу $A = Ph$. Потенциальная энергия при этом убывает. При поднятии тела на высоту h работа силы тяжести отрицательна. В этом случае из равенства (2) получим, что $E_{p1} - E_{p2} < 0$, т. е. что потенциальная энергия возрастает.

В качестве второго примера рассмотрим *потенциальную энергию сжатой пружины*. В примере 2 § 25 мы видели, что работа, которую необходимо затратить для сжатия упругой пружины на величину s , равна $A = \frac{ks^2}{2}$, где k — коэффициент жесткости пружины. На такую же величину возрастет потенциальная энергия пружины. Если потенциальную энергию не сжатой пружины мы положим равной нулю, то потенциальная энергия пружины, сжатой на величину s , окажется равной:

$$E_p = \frac{ks^2}{2}.$$

Здесь потенциальная энергия пропорциональна квадрату сжатия пружины.

Переходим к рассмотрению системы материальных точек. Предположим сперва, что система материальных точек изолирована, т. е. что ее точки взаимодействуют только друг с другом и не испытывают воздействия внешних по отношению к системе тел. Силы взаимодействия материальных точек пусть зависят от их расстояния друг от друга. Условимся называть *конфигурацией* системы определенное расположение материальных точек. Всякое перемещение материальных точек друг относительно друга ведет к изменению конфигурации системы. При переходе системы из какой-либо конфигурации (1) в другую конфигурацию (2) силы, действующие на все материальные точки системы, совершат работу, которую мы обозначим через $A_{1,2}$. Если все силы носят потенциальный характер, то работа $A_{1,2}$ будет зависеть *только от того, какова начальная и какова конечная конфигурация системы*. В этом случае работа $A_{1,2}$ может быть представлена как разность потенциальных энергий системы, находящейся соответственно в конфигурациях (1) и (2):

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (4)$$

Как и выше, соотношение (1) определяет лишь разность потенциальных энергий; для определения самой потенциальной энергии следует принять за нуль энергию какой-либо определенной конфигурации системы.

Разобранный выше пример с потенциальной энергией тела в поле силы тяжести Земли можно рассматривать и как пример на потенциальную энергию системы, образованной совокупностью: Земля и рассматриваемое тяжелое тело. В случае падения тяжелого тела с высоты h , первоначальной конфигурацией будет: Земля и тело на высоте h над ее поверхностью, конечной конфигурацией: Земля и тело на ее поверхности. Работа силы тяжести выразится через разность потенциальных энергий в этих двух конфигурациях:

$$A_{1,2} = E_{ph} - E_{p0}.$$

Отметим еще раз, что соотношение (4) имеет смысл только при условии, что работа сил не зависит от способа перемещения материальных точек при переходе системы из одной конфигурации в другую. Это условие не всегда выполнено. Не все силы, встречаемые в природе, потенциальны. Работа сил трения, например, зависит от длины пройденного пути. Поэтому при наличии сил трения нельзя выражать работу через разность потенциальных энергий.

§ 28. Законы сохранения и изменения механической энергии системы. Предположим, что мы имеем изолированную систему материальных точек, в которой действуют только потенциальные силы. *Состояние системы будет определяться ее конфигурацией и скоростями материальных точек, образующих систему.* При переходе системы из одного состояния в другое силы, приложенные к материальным точкам, образующим систему, совершают работу, которую мы снова обозначим через $A_{1,2}$, считая, что индекс 1 относится к начальному состоянию системы (1), а индекс 2 — к ее конечному состоянию (2). В каждом из этих состояний, различающихся скоростями материальных точек и их расположением, система будет характеризоваться соответственными значениями кинетической энергии E_{k1} и E_{k2} и потенциальной энергии E_{p1} и E_{p2} . Тогда работа $A_{1,2}$ может быть выражена двояким способом: либо через разность кинетических энергий

$$A_{1,2} = E_{k2} - E_{k1}, \quad (1)$$

либо через разность потенциальных энергий

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (2)$$

Из этих двух равенств имеем

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}. \quad (3)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной механической энергией* E :

$$E_k + E_p = E. \quad (4)$$

Тогда равенство (3) принимает вид:

$$E_1 = E_2, \quad (5)$$

т. е. мы получаем, что *полная энергия изолированной системы, в которой действуют только потенциальные силы, остается постоянной.* Это положение называется законом сохранения механической энергии. Оно является одним из наиболее важных следствий основных законов механики.

При переходе из одного состояния в другое могут меняться кинетическая и потенциальная энергии, взятые в отдельности, но их сумма остается постоянной. Если произошло, например, увеличение кинетической энергии на некоторую величину ΔE_k , то на такую же

величину $\Delta E_p = \Delta E_k$ должна уменьшиться потенциальная энергия. Следует, однако, помнить, что закон сохранения механической энергии изолированной системы только тогда имеет место, когда силы, действующие в системе, являются силами потенциальными. При наличии непотенциальных сил, например сил трения, сумма кинетической и потенциальной энергии системы не будет оставаться постоянной. Обобщение закона сохранения энергии на любые системы будет дано в § 68.

Рассмотрим случай падения тела, пренебрегая трением.

Пусть тело массы m поднято на высоту h , тогда его потенциальная энергия

$$E_p = mgh.$$

При падении тела с высоты h его потенциальная энергия убывает, но зато тело приобретает скорость, а следовательно, и запас кинетической энергии. В конце падения эта кинетическая энергия будет

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

где $v = \sqrt{2gh}$ — та скорость, с которой тело подлетает к Земле. Подставляя это значение v в выражение для кинетической энергии, найдем

$$E_k = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh,$$

т. е. к концу падения вместо потенциальной энергии возникло равное ей количество кинетической энергии. Энергия перешла из одного вида в другой, но общее ее количество осталось неизменным.

Для замкнутой механической системы ее полная энергия E , равная сумме кинетической энергии E_k и потенциальной энергии E_p , остается постоянной:

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

Убывание кинетической энергии ведет к увеличению потенциальной, и наоборот. Как и в случае падающего камня, в общем случае замкнутой механической системы процессы сводятся лишь к переходу энергии из кинетической в потенциальную и обратно.

Предположим, что в замкнутой механической системе все тела сперва покоятся, тогда $E_k = 0$ и потенциальная энергия $E_p = E$, т. е. представляет собой полный запас энергии. Так как кинетическая энергия E_k всегда положительна, то она может возникнуть лишь за счет убывания потенциальной энергии E_p . Отсюда мы получим: если в начальный момент потенциальная энергия E_p имеет *минимальное возможное значение*, и тела, образующие механическую систему, находились в покое ($E_k = 0$), то в последующие моменты времени они *не смогут прийти в движение*, так как

не сможет возникнуть, без внешних воздействий, кинетическая энергия E_k . Другими словами: *замкнутая механическая система, потенциальная энергия которой имеет минимальное значение и в которой отсутствуют движения тел, находится в состоянии равновесия*. Примером может служить тяжелый шар, неподвижно лежащий на дне ямы: его потенциальная энергия E_p имеет минимальное значение, и он находится в равновесии; без воздействия извне шар не может выкатиться из ямы.

Рассмотрим несколько частных примеров.

Пример 1. Камень весом 2 кг , падающий с высоты 5 м , вдавливается в мягкий грунт на 5 см . Чему равна средняя сила удара?

Решение. Камень, поднятый на высоту h , имел запас потенциальной энергии $E_p = Ph$, где P — вес камня. За счет этой потенциальной энергии совершилась работа вдавливании камня в грунт, откуда

$$\bar{f} \cdot s = Ph,$$

где \bar{f} — средняя сила удара и s — глубина вдавливании в грунт. Отсюда:

$$\bar{f} = P \cdot \frac{h}{s} = 2 \cdot \frac{5}{0,05} \text{ кг} = 200 \text{ кг}.$$

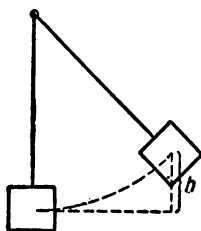


Рис. 62. Баллистический маятник.

Пример 2. Для измерения скорости пули пользуются баллистическим маятником. Это — ящик с песком, подвешенный на нити. Пуля, попадая в ящик, застревает в нем, но при этом ящик оказывается отброшенным на некоторую высоту (рис. 62). Определить скорость пули v по следующим данным: масса пули m_1 , масса ящика m_2 , высота подъема ящика h .

Решение. Когда пуля попадает в ящик, она начинает двигаться вместе с ящиком с общей скоростью v' , определяемой из условия, что столкновение между пулей и ящиком неупругое:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Кинетическая энергия ящика вместе с пулей

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2}.$$

Подставляя сюда значение v' , получим

$$E_k = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

При отклонении ящика на высоту h вся эта кинетическая энергия перейдет в потенциальную, откуда следует:

$$\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2) gh,$$

откуда получаем, что искомая скорость пули

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Так как обычно масса пули m_1 очень мала по сравнению с массой ящика m_2 , то приближенно

$$v = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Рассмотрим теперь неизолированную систему и допустим, что среди внутренних сил имеются и силы трения (непотенциальные силы). При этом мы ограничимся учетом только механических явлений и не будем принимать во внимание тепловые и другие немеханические явления, о которых речь будет ниже (§ 68). Разобьем силы, действующие на материальные точки, на три группы: 1) силы внутренние потенциальные, 2) силы трения (внутренние непотенциальные) и 3) внешние, вызванные воздействием со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему. Тогда и в равенстве (1) разобьем работу на три части, соответствующие этим трем группам сил, в результате чего получим

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{\text{внутр. пот}} + A_{\text{тр}} + A_{\text{внеш.}} \quad (6)$$

Изменение же потенциальной энергии будет связано лишь с работой потенциальных сил:

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{\text{внутр. пот.}} \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) получаем:

$$E_{k2} + E_{p2} - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр.}}$$

Но сумма кинетической и потенциальной энергий $E_k + E_p$ есть полная механическая энергия системы E , поэтому имеем:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{тр.}} \quad (8)$$

Из равенства (8) вытекает, что *изменение полной механической энергии системы равно сумме работ внешних сил и сил трения*. Следовательно, полная механическая энергия системы представляет собой такую физическую величину, изменение которой обусловлено работой внешних сил и сил трения. Энергия неизолированной механической системы возрастает, если сумма работ внешних сил и сил трения положительна, и убывает, если эта сумма отрицательна. Заметим, что работа сил трения всегда отрицательна, так как сила трения для каждой материальной точки направлена в сторону, противоположную ее скорости, т. е. против направления ее перемещения. Таким образом, сила трения всегда обуславливает уменьшение полной механической энергии системы.

§ 29. Графическое представление энергии. Потенциальная энергия тела весом P , поднятого над поверхностью Земли на высоту h , равна

$$E_p = Ph = mgh, \quad (1)$$

где m — масса тела.

Представим зависимость E_p от h графически, отложив по оси абсцисс значение h и по оси ординат значение E_p ; тогда, согласно формуле (1), зависимость E_p от h представится прямой OA (рис. 63), проходящей через начало координат; угол, составляемый этой прямой с осью абсцисс, тем больше, чем больше вес тела P .

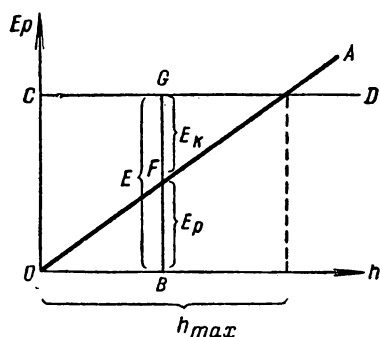


Рис. 63. Потенциальная энергия поднимаемого тела изображается прямой OA .

Пусть рассматриваемый процесс представляет собой подбрасывание камня весом $P=mg$ вертикально вверх. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то можно считать, что движение камня происходит без совершения внешних работ. Тогда полная энергия камня

$$E = E_k + E_p \quad (2)$$

постоянна; графически она представится прямой CD , параллельной оси абсцисс. Так как кинетическая энергия $E_k \geq 0$, то по (2) максимальное возможное значение потенциальной энергии будет $E_p = E$ (вся энергия перешла в потенциальную). Отсюда максимальная высота подъема камня h_{\max} определится абсциссой точки пересечения прямых OA и CD . Движение камня возможно лишь для значений h , заключенных между нулем и h_{\max} . Для некоторого определенного значения h , заключенного в этих пределах, отрезок BF изобразит потенциальную энергию камня и отрезок FG — его кинетическую энергию. График вполне наглядно показывает, как при поднятии камня кверху (h возрастает) возрастает потенциальная энергия камня E_p и убывает кинетическая E_k ; при падении камня (h убывает), наоборот, убывает E_p и возрастает E_k . Сумма их значений $E_p + E_k$ все время постоянна.

Максимальная высота поднятия камня h_{\max} определится через полную энергию:

$$h_{\max} = \frac{E}{mg}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия для некоторой высоты $h < h_{\max}$, изображаемая отрезком FG , равна

$$E_k = E - E_p = mgh_{\max} - mgh. \quad (4)$$

Обозначая скорость, которую камень будет иметь на высоте h , через v , имеем $E_k = \frac{mv^2}{2}$; получим по (4):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_{\max} - mgh, \quad \text{откуда} \quad v = \sqrt{2g(h_{\max} - h)}. \quad (5)$$

При поднятии камня эта скорость направлена вверх, при его падении — направлена вниз.

Эту же скорость можно выразить и через начальную скорость камня v_0 , тогда

$$E_k = E - E_p = \frac{mv_0^2}{2} - mgh, \text{ откуда } \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh,$$

и, следовательно,

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (6)$$

Тот же рис. 63 представляет и соотношения между энергиями в случае скольжения без трения тяжелого тела P по наклонной плоскости. Однако, в случае наклонной плоскости, в качестве независимой переменной мы можем выбрать не только h , но, например, и отрезок l (рис. 64), откладываемый по основанию наклонной плоскости от ее начала. В силу соотношения $h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, составляемый наклонной плоскостью с горизонтом, потенциальная энергия, как функция l , представится:

$$E_p = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot l.$$

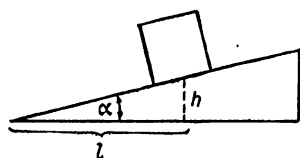


Рис. 64. Тяжелое тело на наклонной плоскости.

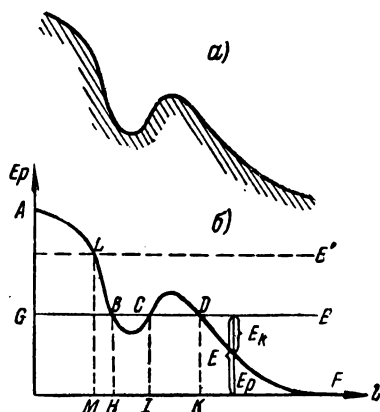


Рис. 65. Потенциальная энергия тела, скользящего по склону горы, изображается кривой $ABCD$.

изобразится кривой $ABCD$ (рис. 65б). Местам более крутого подъема горы соответствует более крутой подъем кривой на рис. 65б, яме на горе соответствует „потенциальная яма“ на кривой $ABCD$. Пусть полная энергия тела E изображается прямой GE . В силу соотношения $E_p \leq E$ из рис. 65б сразу видим, что в этом случае l может иметь значения, либо заключенные между точками H и I , либо заключенные между точкой K и бесконечностью. Это означает, что тело может при таком значении E либо скользить по склону

горы DF , либо двигаться внутри ямы BC . Если оно находится в яме, то ему мешает оттуда выбраться барьер CD . Условием равновесия тела является минимум потенциальной энергии (абсолютный или относительный).

При значении полной энергии E , изображаемой прямой, проходящей через точку L , тело может скользить по всему склону горы между точкой L и бесконечностью. Кинетическая энергия тела для каждого данного значения l определится отрезком, заключенным между прямой, изображающей полную энергию, и кривой, изображающей потенциальную энергию.

В качестве последнего примера рассмотрим движение тела с массой m , прикрепленного к пружине. При перемещении тела на отрезок s пружина сжимается ($s < 0$) или растягивается ($s > 0$), в результате чего возникает потенциальная энергия:

$$E_p = \frac{ks^2}{2}, \quad (7)$$

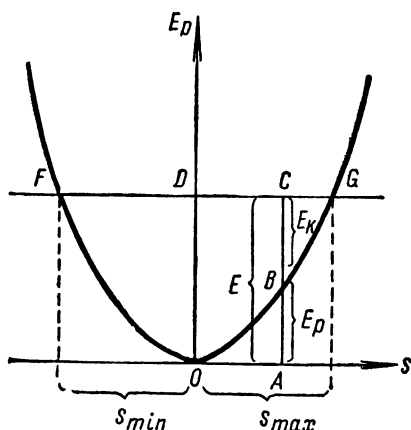


Рис. 66. Потенциальная энергия деформированной пружины изображается параболой FOG .

где k —жесткость пружины. Как функция смещения s потенциальная энергия E_p будет представлена параболой (рис. 66). Если полная энергия $E = E_p + E_k$ изобразится прямой FG , то потенциальная энергия для данного значения s изобразится отрезком AB , а кинетическая энергия тела—отрезком BC . Возможные значения смещения s лежат между s_{\max} и s_{\min} , определяемыми отрезками DG и DF ; из симметрии параболы имеем, что $s_{\min} = -s_{\max}$. Отсюда следует, что тело совершает колебания около положения равновесия, определяемого значением $s = 0$. Его кинетическая энергия, а следовательно, и его скорость достигают максимума при прохождении положения равновесия и достигают минимума (равного нулю) при максимальных отклонениях. Кинетическая энергия для некоторого значения s равна

$$E_k = E - E_p = E - \frac{ks^2}{2};$$

полная энергия $E = \frac{ks_{\max}^2}{2}$, откуда

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ks_{\max}^2}{2} - \frac{ks^2}{2};$$

отсюда получаем выражение для скорости тела, как функции смещения s :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} (s_{\max}^2 - s^2)}. \quad (8)$$

§ 30. Формулы размерности. Изученный нами в предыдущих параграфах материал позволяет поставить вопрос о так называемой *размерности физических величин* и о *формулах размерности*.

До сих пор единицу для измерения какой-либо физической величины мы устанавливали на основании закономерной связи этой величины с другими, для которых единицы измерения уже известны, полагая в соответствующей формуле коэффициент пропорциональности равным единице. Таким образом, устанавливалась определенная система единиц, связанная с некоторым определенным выбором *основных величин* и единиц для их измерения. Так, в CGS-системе за основные физические величины избрана длина, время и масса и за единицы их измерения, соответственно, — сантиметр, секунда и грамм. О возможном выборе других основных величин мы уже говорили в § 3.

При данном выборе основных физических величин возможен различный выбор единиц их измерения, и, таким образом, возникает вопрос, как зависят производные единицы от единиц основных величин. Остановимся на системах, где за основные величины выбраны длина, время и масса, и обозначим единицы их измерения соответственно через L , T и M .

Если производная единица A меняется пропорционально p -й степени единицы длины L , q -й степени единицы массы M и r -й степени единицы времени T , то говорят, что единица A имеет размерность p относительно единицы длины, размерность q — относительно единицы массы и размерность r — относительно единицы времени. Такую зависимость единицы A от единиц основных величин выражают символической формулой (формулой размерности):

$$[A] = L^p \cdot M^q \cdot T^r. \quad (1)$$

Например, если формула размерности для некоторой определенной единицы A имеет вид:

$$[A] = \frac{ML^2}{T^2},$$

что также может быть записано в виде:

$$[A] = ML^2 T^{-2},$$

то это означает, что данная производная единица A меняется пропорционально единице массы, пропорционально квадрату единицы длины и обратно пропорционально квадрату единицы времени. Например, если мы единицу массы увеличим в 1000 раз, единицу длины — в 100 раз и единицу времени — в 60 раз, то рассматриваемая производная единица A увеличится в $\frac{1000 \cdot 100^2}{60^2}$ раз, т. е. в $2,78 \cdot 10^3$ раза.

Если производная единица вовсе не зависит от какой-либо из основных единиц, то говорят, что она нулевой размерности относительно этой основной единицы.

Знание размерности физических величин существенно не только потому, что оно позволяет легко подсчитать, как меняется единица измерения данной физической величины при изменении единиц измерения основных величин, но и потому, что сравнение размерности величин позволяет контролировать правильность расчетов. Этот контроль основан прежде всего на следующем очевидном положении: *складывать, вычитать и связывать знаком равенства можно только величины одной размерности.*

В самом деле, нельзя складывать, например, массу с какой-либо длиной или утверждать, что площадь некоторой фигуры может равняться длине какого-либо отрезка и т. д.

Далее, можно указать, что *в показателе степени может стоять лишь число, т. е. величина, лишенная размерности.*

Определим размерность ряда уже известных нам физических величин.

Размерность скорости: исходя из соотношения $v = \frac{s}{t}$, видим, что единица скорости меняется пропорционально единице длины и обратно пропорционально единице времени, откуда

$$[v] = L \cdot T^{-1}. \quad (2)$$

Размерность ускорения: исходя из соотношения $w = \frac{v}{t}$, получаем

$$[w] = L \cdot T^{-2}. \quad (3)$$

Размерность силы: исходя из соотношения $f = mw$ и пользуясь уже найденной размерностью ускорения w , получим

$$[f] = ML T^{-2}. \quad (4)$$

Размерность работы: исходя из соотношения $A = fs$, получим

$$[A] = ML^2 T^{-2}. \quad (5)$$

Такую же размерность имеет и энергия.

Размерность мощности: исходя из соотношения $W = \frac{A}{t}$, получим

$$[W] = ML^2 T^{-3}. \quad (6)$$

Однако существуют такие физические величины, единицы измерения которых не зависят от единицы длины, времени и массы. Например, угол, измеряемый отношением длины дуги к длине радиуса, будет нулевого измерения относительно всех трех основных единиц L , M , T . За единицу для измерения угла выбирается центральный угол, стягивающий дугу, длина которой равна радиусу; эта единица измерения угла, называемая *радианом*, одна и та же во всех системах. Наряду с радианом, однако, углы измеряют также и в градусах; в этом случае за единицу угла выбран центральный

угол, стягивающий дугу, длина которой равна $\frac{1}{360}$ длины полной окружности. Поэтому для однозначности можно в формулы размерности вводить еще символ единицы угла.¹ Обозначим этот символ буквой Φ . В формулы размерности приведенных выше величин — скорости, ускорения, силы и т. д. — он не должен входить, так как все эти величины нулевой размерности относительно угла. Но если мы захотим написать размерность угловой скорости $\omega = \frac{\varphi}{t}$, то в нее можно ввести символ Φ , так как единица угловой скорости зависит от того, какой единицей для измерения угла мы пользуемся; таким образом:

$$[\omega] = \Phi \cdot T^{-1}.$$

Однако обычно принято указывать размерность лишь по отношению к единицам длины, времени и массы, тогда

$$[\omega] = T^{-1}. \quad (7)$$

Так же мы получим размерность углового ускорения

$$[\beta] = T^{-2}. \quad (8)$$

Из рассмотрения размерности величин иногда можно указать точный характер закономерности, если предварительно известен ее приближенный вид. Например, естественно положить, что скорость v , приобретаемая свободно падающим вблизи земной поверхности камнем, должна быть тем больше, чем больше высота падения h и чем больше ускорение силы тяжести g .

Таким образом, полагая что v должно быть пропорциональным g и h , взятым в некоторых степенях n_1 и n_2 , получим

$$v = k \cdot g^{n_1} \cdot h^{n_2},$$

где k — численный коэффициент. Размерность скорости $[v] = L \cdot T^{-1}$; такова должна быть и размерность $g^{n_1} \cdot h^{n_2}$. Но $[g] = L T^{-2}$ и $[h] = L$. Отсюда видно, что для того, чтобы размерности времени в обоих выражениях были одинаковы, должно $n_1 = \frac{1}{2}$. Но, при $n_1 = \frac{1}{2}$ и n_2 должно равняться $\frac{1}{2}$, так как иначе не совпадут размерности длины. Отсюда видим, что требование об одинаковости размерности величин, связанных знаком равенства, будет выполнено при $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$, т. е.

$$v = k (gh)^{1/2} = k \sqrt{gh}.$$

В самом деле, из формул равномерно-ускоренного движения (§ 7) мы получаем, что

$$v = \sqrt{2gh} \cong 1,41 \sqrt{gh}.$$

¹ Из других физических величин нулевой размерности относительно длины, времени и массы укажем температуру.

§ 31. Границы применимости классической механики. Как мы уже указывали в § 4, классическая механика применима лишь к макроскопическим телам, т. е. телам, состоящим из большого числа атомов и движущимся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Так как скорость света равна приблизительно 300 000 км/сек, то классическая механика применима ко всем обычным телам, движущимся с практически достижимыми скоростями. Однако весьма точные наблюдения над некоторыми небесными объектами (планета Меркурий, скорость которой при движении по орбите вокруг Солнца достигает 100 км/сек) позволяют заметить отклонения от следствий из классической механики. Эти отклонения объясняются механикой теории относительности. Весьма резко проявляются отклонения от классической механики при наблюдении отдельных атомов, электронов и других элементарных частиц.

Механика больших скоростей, т. е. скоростей, сравнимых со скоростью света, дается теорией относительности.

Теория относительности, как и всякая другая теория, ломающая старые представления, поставила на очередь решение ряда важных методологических вопросов. Многие буржуазные физики и философы пытались использовать теорию относительности для обоснования своих порочных идеалистических воззрений, в частности философского релятивизма. В действительности содержание теории относительности ни в коей мере не ведет к философскому релятивизму. Теория относительности изучает преимущественно явления, обнаруживающиеся при скоростях, близких к скорости света, существующие объективно и, следовательно, не зависящие от нашего произвола и в этом отношении не являющиеся „относительными“. Ленин, как

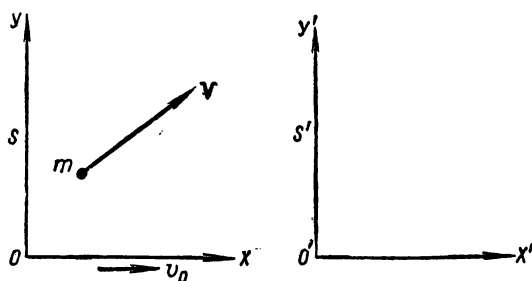


Рис. 67. Система S , движущаяся относительно системы S' со скоростью v_0 .

мы указывали в § 4, отметил, что новая физика (он подразумевал при этом теорию относительности) дает снимок с гигантски быстрых *реальных* движений, в то время как старая классическая механика была снимком с медленных движений.

Содержание теории относительности будет более подробно рассмо-

трено в т. III, здесь же мы лишь остановимся на некоторых следствиях теории относительности и используем их для определения границ применимости классической механики. Начнем с рассмотрения некоторых кинематических следствий теории относительности. Пусть в системе отсчета S (рис. 67) тело m движется со скоростью v относительно координатной системы OXY , неизменно

связанной с системой отсчета S . Пусть имеется вторая система отсчета S' ; с этой второй системой отсчета неизменно связана своя координатная система $O'X'Y'$, оси которой $O'X'$ и $O'Y'$ будем считать параллельными осям OX и OY . Предположим, что система S движется относительно системы S' в направлении положительной оси OX со скоростью v_0 .

В системе S тело m представляется движущимся со скоростью v , составляющие которой на координатные оси равны v_x и v_y . В системе S' скорость тела будет иной, так как система S движется относительно S' со скоростью v_0 .

Согласно классическим представлениям, составляющие скорости тела m по осям $O'X'$ и $O'Y'$ в системе S' равны

$$v'_x = v_x + v_0, \quad v'_y = v_y. \quad (1)$$

Эти формулы выражают собою обычное правило сложения скоростей.

По теории относительности правило сложения скоростей иное, а именно:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \quad (2)$$

где c — скорость света. Легко проверить, что когда скорости v_0 и v_x малы по сравнению со скоростью света, формулы теории относительности (2) переходят в классические формулы сложения скоростей (1).

Сравним результаты, даваемые формулами (1) и (2), для некоторых конкретных случаев.

Предположим, что в кабине аэроплана, летящего над Землей со скоростью $v_0 = 360 \text{ км/час} = 100 \text{ м/сек}$, делается в направлении полета аэроплана выстрел, причем скорость пули относительно аэроплана $v_x = 1000 \text{ м/сек}$. Тогда с точки зрения классической механики скорость пули относительно Земли равна

$$v'_x = v_x + v_0 = 100 \text{ м/сек} + 1000 \text{ м/сек} = 1100 \text{ м/сек}.$$

По теории относительности, согласно первой из формул (2):

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{1100}{1 + \frac{1000 \cdot 100}{(3 \cdot 10^8)^2}} \text{ м/сек} = \frac{1100}{1 + 1,1 \cdot 10^{-12}} \text{ м/сек},$$

или приближенно

$$v'_x = 1100(1 - 1,1 \cdot 10^{-12}) \text{ м/сек},$$

откуда видно, что теория относительности в этом случае дает результат, отличающийся от классического примерно на 10^{-12} -ю часть

суммарной скорости. Другими словами, результаты классической теории и теории относительности здесь практически полностью совпадают.

Если же каждая из складываемых скоростей v_0 и v_x равна половине скорости света c , то суммарная скорость по теории относительности равна

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}\frac{c^2}{c^2}} = \frac{4}{5}c,$$

вместо c , как это получается по классической формуле (1). Здесь различия между следствиями из обеих теорий заметны. Они еще больше, если, например, каждую из складываемых скоростей положить равной $0,9c$.

По теории относительности *скорость никогда не может превышать скорости света c в вакууме*. По формулам (2) мы получим результирующую скорость, не превышающую скорости света даже в том случае, когда каждая из складываемых скоростей сколь угодно близка к скорости света.

Существенно еще отметить, что по формулам теории относительности (2) в системе отсчета S' меняется не только составляющая скорости v_x , направленная в сторону движения системы S , но и составляющая v_y , нормальная к скорости v_0 системы S . По классическим формулам v_y одинаково для обеих систем. Если скорости v_0 и v_x малы по сравнению со скоростью света c , то влияние v_0 на составляющую v_y весьма мало.

В самом деле, обозначим $\frac{v_0}{c} = \beta$ и $\frac{v_x}{c} = \beta'$, тогда обе величины β и β' малы по сравнению с единицей, и формулу (2) приближенно можно переписать:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x + v_0}{1 + \beta\beta'} \cong (v_x + v_0)(1 - \beta\beta'), \\ v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta\beta'} \cong v_y \left(1 - \beta\beta' - \frac{1}{2}\beta^2\right); \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

таким образом, v'_x близко к сумме $v_x + v_0$, значение же v'_y отличается от v_y лишь на член второго порядка малости по отношению к величинам порядка β и β' .

Второе важное следствие теории относительности, которое мы рассмотрим, заключается в том, что в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v , масса этого тела больше, чем в системе отсчета, относительно которой тело покоится, а именно:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3)$$

где m — масса тела в системе отсчета, относительно которой оно движется, m_0 — в системе отсчета, относительно которой оно покоится (*покояющаяся масса*), величина $\beta = \frac{v}{c}$.

Изменение массы по формуле (3) мало, пока скорость v мала по сравнению со скоростью света, и становится большим, когда скорость v сравнима со скоростью света. При приближении скорости v к скорости c величина $\beta \rightarrow 1$, и масса m по формуле (3) бесконечно возрастает. Отсюда видно, что при непрерывном ускорении тела под влиянием некоторой силы масса тела возрастает, работа, которую надо совершать, чтобы далее ускорять тело, тоже возрастает: для сообщения телу скорости, равной скорости света, надо совершить бесконечно большую работу; таким образом, скорость, равная скорости света, для тел с покоящейся массой, отличной от нуля, не достижима.

Для оценки влияния скорости на массу, воспользуемся табл. I, где приведены значения m/m_0 для разных β .

Из табл. I видно, что вначале масса m возрастает со скоростью весьма медленно и начинает быстро возрастать лишь при скоростях, близких к скорости света. При $\beta = 0,01$, т. е. при скорости $v = 0,01 c = 3000 \text{ км/сек}$, масса m отличается от покоящейся массы m_0 всего на 0,005%. При скорости v , равной половине скорости света c , масса m приблизительно на 15,5% превышает покоящуюся массу m_0 . При скорости же $v = 0,9 c$ масса уже более чем вдвое превышает m_0 . Измерения массы быстро движущихся электронов (см. т. II) вполне точно подтверждают формулу (3).

Согласно динамике теории относительности, количество движения тела

$$K = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4)$$

При этом сила, по-прежнему, определяется как физическая величина, равная изменению вектора количества движения в единицу времени. Закон сохранения количества движения выполняется в точности, если количество движения выражать формулой (4).

Для скоростей v , малых по сравнению со скоростью света c , величина β мала по сравнению с единицей, и формулу (3) можно приближенно переписать:

$$m = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right). \quad (3a)$$

Таблица I
Зависимость массы
от скорости

| β | $\frac{m}{m_0}$ |
|---------|-----------------|
| 0,005 | 1,00001 |
| 0,010 | 1,00005 |
| 0,10 | 1,00504 |
| 0,50 | 1,1547 |
| 0,80 | 1,6666 |
| 0,90 | 2,2941 |
| 0,95 | 3,2025 |
| 0,98 | 5,0252 |
| 0,99 | 7,0888 |
| 0,995 | 10,0125 |
| 0,9995 | 31,6268 |

Помножим и поделим выражение для кинетической энергии тела $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$ на c^2 ; тогда оно примет вид:

$$E_k = \frac{1}{2} c^2 m_0 \beta^2 = c^2 \left[m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) - m_0 \right],$$

откуда по (3а)

$$E_k = c^2 (m - m_0). \quad (5)$$

В динамике теории относительности показывается, что эта формула (5), выведенная нами как приближенная для $v \ll c$, на самом деле в точности справедлива для любых скоростей, сколь угодно близких к скорости света. Формулу (5) можно переписать:

$$m = m_0 + \frac{E_k}{c^2}, \quad (5a)$$

т. е. масса движущегося тела m больше его покоящейся массы m_0 на величину E_k/c^2 . Это следствие допускает весьма важную интерпретацию: мы можем считать, что масса тела возросла потому, что у него появилась кинетическая энергия, что появление кинетической энергии E_k сопровождается увеличением массы тела на величину, равную E_k/c^2 . Теория относительности обобщает этот вывод, утверждая, что изменение всякой энергии на величину E связано с изменением массы на величину m , численно равную

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (6)$$

Обратно, при изменении массы системы на величину m возникает количество энергии $E = mc^2$.

Таким образом, каждому одному эргу энергии соответствует масса $m = \frac{1}{(3 \cdot 10^{10})^2} \text{ г} \approx 1,1 \cdot 10^{-21} \text{ г}$. Как видно, эта масса весьма мала: установка мощностью в 2 000 000 *квт* (мощность Куйбышевской электростанции) вырабатывает в 1 час примерно $7,2 \cdot 10^{19}$ *эргов* энергии, которой по формуле (6) соответствует масса $7,2 \cdot 10^{19} \cdot 1,1 \cdot 10^{-21} \text{ г} = 8,0 \cdot 10^{-2} \text{ г}$, т. е. около 0,080 г. Отсюда видно, что технически достижимым количествам энергии соответствуют совершенно ничтожные массы. Однако при процессах, связанных с превращением элементов, изменения массы, обусловленные изменениями энергии, вполне заметны (см. т. III).

Равенство (6) выражает общую взаимосвязь между энергией и массой. Содержание этого равенства подвергалось многочисленным идеалистическим извращениям: так, утверждалось, что якобы из него следует возможность „превращения“ массы в энергию и обратно, или что закон сохранения имеет место лишь для суммы массы и энергии системы, а что масса и энергия, взятые в отдельности, не сохраняются. Все эти выводы совершенно не верны и в конечном счете ведут к отрыву представления об энергии от представления о материи, т. е. к идеализму. В действительности физические вели-

чины масса и энергия являются одними из наиболее основных характеристик тех конкретных видов движущейся материи, с которыми имеет дело физика. Для полностью изолированной системы сохраняется как ее масса, так и ее энергия. Равенство (6) указывает на глубокую взаимосвязь между обеими этими величинами, оно указывает, что невозможно изменение одной из них без одновременного изменения в пропорциональном количестве другой.

Перейдем теперь к ограничениям представлений классической механики, обусловленным *размерами тел*. Как мы отмечали, для всех *макроскопических тел*, т. е. тел, состоящих из большого числа атомов, классическая механика приложима практически вполне точно. Однако отдельные *элементарные частицы*, например, отдельные электроны, проявляют свойства, отличные от тех, которые вообще могут быть приписаны „частице“ в том смысле, как мы употребляем слово „частица“ в механике. Говоря обычно о „частице“, мы подразумеваем, что по отношению к частице можно ответить на два вопроса: 1) где она находится? и 2) с какой скоростью она движется? Ответы на эти два вопроса, т. е. задание координат частицы x, y, z и вектора ее скорости v для каждого данного момента времени, определяют траекторию частицы и характер ее движения по этой траектории. Опыты же, как мы это впоследствии увидим (см. т. III), убеждают нас, что пучок электронов проявляет особое свойство (дифракцию), характерное, с точки зрения обычных представлений, для распространения волн. По отношению же к волновому процессу нельзя ставить вопроса о месте, где волна находится, в том смысле, в каком он ставится по отношению к частице. В самом деле, волны охватывают все пространство, где они распространяются, например всю поверхность моря; можно только говорить, где расположены гребни или впадины волн, причем для волн на поверхности моря это будут семейства линий, а не точки, определяемые тремя координатами. Отсюда — опытный факт, указывающий, что электрон (а также всякая другая элементарная частица) не есть „частица“ в обычном смысле слова, ведет к тому, что и понятия, применимые к частице, нельзя в точности прилагать к электронам. Анализ данных опытов, произведенный *квантовой механикой*, показывает, что одновременное указание координат электрона x, y, z (ответ на вопрос, где находится электрон) и его скорости v (ответ на вопрос, с какой скоростью и в какую сторону движется электрон) может быть дано лишь с известной степенью приближения. Чем с меньшей неопределенностью Δx определена координата электрона x , тем с большей неопределенностью Δv_x одновременно определена составляющая его скорости v_x . Степень возможного приближения определяется квантовой механикой, а именно квантовая механика утверждает, что между „допусками“ Δx и Δv_x существует соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{h}{m}, \quad (7)$$

где m — масса частицы, а h — постоянная, называемая *постоянной Планка* и равная

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг сек.}$$

Соотношение (7), носящее с точки зрения квантовой механики общий характер, называется *соотношением неопределенности*.

Физический смысл соотношения неопределенности будет более полно разобран в т. III. Здесь лишь отметим, что рядом буржуазных физиков из соотношения неопределенности делаются неправильные идеалистические выводы о том, что якобы невозможно объективное пространственно-временное описание свойств электронов. В действительности же речь идет не о невозможности объективного описания свойств электронов, а о том, что реальные свойства объективно существующих электронов отличны от свойств материальных точек („частиц“) классической механики. Электрон (а также любая другая элементарная частица) может лишь приблизительно трактоваться как „частица“ классической механики. Соотношение неопределенности указывает границы применимости представлений классической механики.

Ввиду малости постоянной Планка h неопределенность в координатах и скорости сказывается лишь на элементарных частицах. Рассмотрим сперва пылинку с массой $m = 10^{-12}$ г и предположим, что мы определяем ее координаты x с неопределенностью порядка $\Delta x = 10^{-6}$ см (т. е. 0,01 мк), тогда неопределенность в составляющей скорости Δv_x по соотношению (7) должна быть порядка:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m \Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{10^{-12} \cdot 10^{-6}} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \approx 10^{-8} \text{ см/сек},$$

т. е. неопределенность в скорости Δv_x совершенно ничтожна. Другими словами, координату и скорость весьма малой пылинки можно практически измерять сколь угодно точно; пылинка есть „частица“ в обычном смысле слова.

Рассмотрим теперь электрон, траекторию которого мы зафиксировали следующим образом: электрон пролетел через малое отверстие d в диафрагме, диаметр которого 0,01 см, и затем, попав на фосфоресцирующий экран, дал на нем вспышку (быстрые электроны способны вызвать такого рода вспышки — „сцинтилляции“), положение которой мы также отметили с точностью до 0,01 см.

Таким образом, в этом случае для электрона $\Delta x \cong 10^{-3}$ см, откуда по (7), зная, что масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, получим неопределенность в скорости:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m \Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-3}} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \cong 7 \cdot 10^3 \text{ см/сек.}$$

Здесь неопределенность в скорости в абсолютной мере значительна; однако если мы примем во внимание, что скорость самого электрона в такого рода опыте будет весьма значительна, а именно, порядка

10^8 см/сек, то мы увидим, что неопределенность, вытекающая из соотношения (7), составляет лишь приблизительно 0,001% от самой скорости. Другими словами: в указанных условиях электрон еще вполне может рассматриваться в виде „частицы“, положение и скорость которой можно одновременно определять практически с большой точностью. Опыты указанного типа и служили первоначально для выявления свойств электронов, поэтому первоначально об электроне было составлено представление, как о „частице“, к которой должны быть применимы классические представления.

Рассмотрим, наконец, электрон, движущийся внутри атома. Так как размеры самого атома представляют собою величины порядка 10^{-8} см, то, по крайней мере, с такой точностью должно быть зафиксировано и положение электрона:

$$\Delta x \cong 10^{-8} \text{ см.}$$

Отсюда по (7):

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \cong 7 \cdot 10^8 \text{ см/сек.}$$

Так как и сама скорость электрона в атоме есть величина порядка 10^8 см/сек, то полученный нами результат означает, что если зафиксировано положение электрона внутри атома, то при этом его скорость является неопределенной; другими словами: электрон внутри атома уже ни в коей мере не может рассматриваться как „частица“. И, действительно, попытки рассматривать движение электронов внутри атомов с точки зрения классической механики приводят к явным противоречиям. То же относится к целому ряду других явлений, где с классической точки зрения требовалось бы определять положение электрона с „атомной точностью“. Все эти явления описываются правильно квантовой механикой.

ГЛАВА IV

СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ

§ 32. Силы тяготения. Все тела взаимно притягиваются. Такие явления, как падение тел на Землю, движение Луны по замкнутой орбите вокруг Земли, планет — вокруг Солнца и т. д., происходят под влиянием сил всемирного тяготения. Закон, которому подчиняются силы тяготения, был впервые сформулирован Ньютоном в 1687 г. По закону всемирного тяготения Ньютона: всякие два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению из их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Обозначая массы тяготеющих тел через m_1 и m_2 , расстояние между ними — через r , получим

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

где k — определенная постоянная, так называемая *постоянная тяготения*; ее численное значение зависит от того, в каких единицах измеряются сила f , масса m и расстояние r .

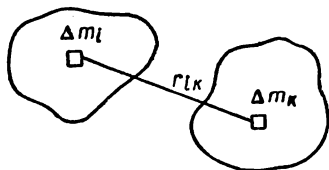


Рис. 68. Элементарные объемы тяготеющих тел.

Закон Ньютона в указанной формулировке справедлив лишь в том случае, если размеры тел весьма малы по сравнению с расстоянием r между ними.

В случае, если размеры тел сравнимы с тем расстоянием, на котором тела находятся друг от друга, каждое из тел следует разбить на элементы (рис. 68); для каждой пары элементов справедлив закон тяготения Ньютона, так что сила взаимодействия i -го элемента первого тела и k -го элемента второго тела будет равна

$$\Delta f_{ik} = k \frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^2}.$$

Полная сила взаимодействия выразится как векторная сумма всех элементарных сил Δf_{ik} :

$$\mathbf{f} = \sum_{i, k} \Delta \mathbf{f}_{ik}.$$

¹ Так как элементы, на которые разбиваются тела, должны быть взяты бесконечно малыми, то задача на самом деле сводится к интегрированию.

Результат такого вычисления имеет весьма разнообразный вид для тел разной формы; он особенно прост для случая тяготения однородных шаров: два однородных шара взаимно тяготеют друг к другу с силой $f = k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где m_1 и m_2 — массы шаров, а r — *расстояние между их центрами*. Это выражение, совпадающее с формулой (1), справедливо для любого расстояния между шарами.

В течение XVIII и XIX столетий многие физики придерживались неправильного, идеалистического взгляда на тяготение, как на некое „действие на расстоянии“ без всякой роли промежуточного пространства.

В действительности всякое тело вызывает в окружающем пространстве изменения, ведет к образованию *поля тяготения*, представляющего собой особый вид материи (ср. со сказанным в т. II об электромагнитном поле). Взаимное притяжение тел вызывается их взаимодействием с полями тяготения.

Из закона всемирного тяготения следует, что у поверхности Земли все тела должны падать с одинаковым ускорением. В самом деле, ускорение, приобретаемое телом с массой m :

$$w = \frac{f}{m},$$

где f — сила, с которой тело притягивается земным шаром. По закону тяготения Ньютона:

$$f = k \frac{mM_3}{R_3^2},$$

где M_3 — масса Земли и R_3 — радиус земного шара, отсюда

$$w = k \frac{mM_3}{R_3^2} \frac{1}{m} = k \frac{M_3}{R_3^2},$$

но так как масса Земли и ее радиус являются величинами постоянными, то, следовательно, мы получаем, что все тела у поверхности Земли, независимо от их массы, падают с одинаковым ускорением

$$g_0 = k \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (2)$$

Здесь речь идет о свободном падении тел при отсутствии сил сопротивления, в том числе сопротивления воздуха. Также не принимается во внимание зависимость силы тяжести от широты местности (см. § 23).

Сила, с которой какое-либо тело массы m притягивается к Земле, зависит от высоты h , на которой тело находится над поверхностью Земли. По закону тяготения Ньютона тело притягивается к Земле с силой:

$$f = k \frac{mM_3}{R^2},$$

где R — расстояние от центра Земли до тела; так как $R = R_3 + h$, то

$$f = k \frac{m \cdot M_3}{(R_3 + h)^2}.$$

Сила f представляет собою вес тела P_h на высоте h ; обозначая вес тела у самой поверхности Земли через P_0 , имеем

$$P_0 = k \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{P_h}{P_0} = \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2};$$

так как практически высота h всегда очень мала по сравнению с радиусом земного шара R_3 , то приближенно

$$\frac{P_h}{P_0} = \frac{1}{1 + 2 \frac{h}{R_3}} = 1 - 2 \frac{h}{R_3}.$$

Радиус земного шара $R_3 = 6370$ км, отсюда для высокой горы, высотой в 6,4 км, имеем

$$\frac{P_h}{P_0} = 1 - \frac{2}{1000} = 1 - 0,002,$$

т. е. вес тела на такой горе будет лишь на 0,2% отличаться от его веса на уровне моря. Хотя зависимость сил тяготения от расстояния и может быть замечена по наблюдениям над весом тела у поверхности Земли, но, ввиду малости этой зависимости, она не пригодна для точной проверки закона обратной пропорциональности сил тяготения квадрату расстояния между телами. Ньютон установил обратную пропорциональность сил тяготения квадрату расстояния между ними, рассматривая движение Луны. Ход рассуждений Ньютона следующий: если справедлив закон тяготения в том виде, в каком его дает формула (1), то сила, с которой Земля притягивает Луну, равна:

$$f = k \frac{M_{\text{Л}} \cdot M_3}{R^2},$$

где $M_{\text{Л}}$ — масса Луны и R — ее расстояние от Земли. Отсюда ускорение, испытываемое Луной и направленное к Земле, равно

$$w_n = \frac{f}{M_{\text{Л}}} = k \frac{M_3}{R^2}.$$

Вводя сюда выражение для g_0 по (2), получим

$$w_n = g_0 \frac{R_3^2}{R^2}.$$

Это ускорение представляет собою центростремительное ускорение Луны при движении ее вокруг Земли по круговой орбите. Из астрономических наблюдений известно, что расстояние от Земли до Луны в 60 раз больше радиуса Земли, откуда

$$w_n = \frac{g_0}{60^2} = \frac{981}{3600} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = 0,27 \text{ см/сек}^2.$$

С другой стороны, то же самое центростремительное ускорение Луны может быть вычислено кинематически:

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^3}{RT^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

где v — линейная скорость Луны на ее орбите, T — период ее обращения вокруг Земли, равный 27 суткам 7 часам 43. минутам, что составляет 2 360 580 сек. Пользуясь этими данными и тем, что $R = 60 \cdot R_3 = 60 \cdot 6370$ км, получим

$$w_n = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6370 \cdot 10^5}{(2\,360\,580)^2} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = 0,27 \text{ см/сек}^2.$$

Таким образом, оба способа вычисления центростремительного ускорения Луны дают вполне совпадающие результаты, что и служит подтверждением правильности формулы (1).

Значение постоянной тяготения k было впервые измерено Кэвендишем в 1798 г. с помощью крутильных весов. Прибор, которым пользовался Кэвендиш, схематически представлен на рис. 69. К горизонтальному коромыслу A на двух стержнях были прикреплены два свинцовых шара M_1 и M_2 , каждый из которых имел массу 158 кг. Под коромыслом к неподвижной головке B прикреплена тонкая проволока C , несущая легкий стержень l , к концам которого подвешены два небольших свинцовых шарика m_1 и m_2 ; массы этих шариков в опытах Кэвендиша брались по 730 г. При поворачивании коромысла A большие шары приближались к маленьким и притягивали их к себе; притяжение можно было заметить по повороту стержня l , несущего шарики m_1 и m_2 . Зная упругие свойства проволоки C , можно было измерить силу притяжения и отсюда определить значение постоянной тяготения k . Впоследствии опыты Кэвендиша неоднократно повторялись. В настоящее время для постоянной k принимается значение:

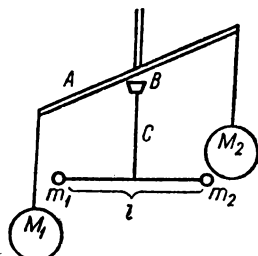


Рис. 69. Схема опыта Кэвендиша.

$$k = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г сек}^2;$$

отсюда следует по формуле (1), что два шарика, массой по 1 г каждый, расположенные так, что расстояние между их центрами равно 1 см, притягиваются с силой $6,685 \cdot 10^{-8}$ дин.

Постоянная k не есть просто число, но обладает размерностью; размерность k определим из соотношения:

$$k = \frac{f \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2},$$

отсюда

$$[k] = \frac{[f] \cdot [r^2]}{[m^2]} = \frac{MLT^{-2} \cdot L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2},$$

откуда следует, что в CGS-системе k измеряется в $\text{см}^3/\text{г сек}^2$.

Указанную размерность постоянной k мы получили, установив единицу силы и ее размерность с помощью второго закона Ньютона: $f = mw$. Однако можно поступить наоборот: положить в законе всемирного тяготения (1) постоянную $k = 1$ и считать ее величиной безразмерной, но зато ввести новую постоянную k' во второй закон Ньютона, написав его в виде:

$$f = k' mw. \quad (3)$$

Тогда, пользуясь CGS-системой, мы примем за единицу силы — силу, с которой шарик с массой в 1 г притягивает к себе другой шарик с массой также в 1 г, расположенный от него на расстоянии, отсчитанном между центрами шариков, в 1 см. Эта единица силы равна $6,685 \cdot 10^{-8}$ дин.

Размерность силы выразится при этом следующим образом:

$$[f] = \frac{[m] \cdot [m]}{[r^2]} = M^2 L^{-2},$$

вместо обычной размерности $[f] = MLT^{-2}$. Постоянная же k' во втором законе Ньютона (ее можно назвать „динамической постоянной“) будет обладать размерностью:

$$[k'] = \frac{[f]}{[m] \cdot [w]} = \frac{M^2 L^{-2}}{MLT^{-2}} = L^{-1} MT^2,$$

ее численное значение окажется равным

$$k' = \frac{1}{6,685 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{2 \text{ сек}^2}{\text{см}^3} = 1,496 \cdot 10^7 \text{ г сек}^2/\text{см}^3.$$

Таким образом, исходя из разных законов, мы можем получить различные CGS-системы единиц. Размерность одних и тех же физических величин может оказаться в различных системах различной. Обычная CGS-система может быть названа „динамической“, а система CGS-единиц, в которой единица силы и ее размерность устанавливаются на основании закона тяготения, — „гравитационной“. В этих обеих системах размерности скорости, ускорения и других кинематических величин одинаковы, но размерности силы, энергии, работы, мощности, момента сил и т. д. — разные. В механике употребительна лишь одна из систем — „динамическая“, в учении же об электричестве и магнетизме, как мы увидим в т. II, употребляют две различные CGS-системы — так называемые „электростатическую“ и „электромагнитную“ системы.

Знание постоянной k тяготения позволяет определить массу и плотность Земли, а также массу других небесных тел.

Воспользовавшись формулой (2), имеем

$$M_3 = \frac{g_0 R_3^3}{k},$$

откуда, зная численные значения ускорения силы тяжести g_0 , радиуса Земли R_3 и постоянной тяготения k , непосредственно определяем массу земного шара, для которой получается значение: $M_3 = 5,98 \cdot 10^{27}$ г.

Среднюю плотность земного шара найдем из соотношения

$$\bar{d} = \frac{M_3}{\frac{4}{3} \pi R_3^3},$$

откуда получается значение $\bar{d} = 5,5 \text{ г/см}^3$.

Масса центрального светила, вокруг которого обращается спутник, может быть определена следующим образом. Пусть M_c — масса центрального светила, M_i — масса спутника, R_i — расстояние между ними. Сила притяжения f создает центростремительное ускорение спутника

$$f = M_i \omega_n^2,$$

откуда

$$k \cdot \frac{M_i M_c}{R_i^2} = M_i \frac{4\pi^2 R_i}{T_i^3}, \quad (4)$$

где T_i — период обращения спутника. Отсюда имеем

$$M_c = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{R_i^3}{T_i^3},$$

т. е., зная радиус орбиты спутника и период его обращения, мы можем определить массу центрального светила. Так, по радиусу земной орбиты и продолжительности года находим массу Солнца $M_c = 1,98 \cdot 10^{33}$ г.

Из формулы (4) также следует:

$$\frac{R_i^3}{T_i^3} = \frac{k M_c}{4\pi^2};$$

величина, стоящая справа, имеет постоянное значение для всех спутников, обращающихся вокруг данного центрального светила. Отсюда: квадраты времен обращения спутников (планет) вокруг центрального светила (Солнца) относятся как кубы их расстояний от центрального светила (Солнца). Этот закон по отношению к планетам был установлен Кеплером и носит название *третьего закона Кеплера*.

§ 33. Масса инерционная и тяготеющая. Работа силы тяжести. Физическая величина масса входит в два основных и не зависящих друг от друга закона — во второй закон Ньютона: $f = m\omega$ и в закон всемирного тяготения: $f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Во втором законе Ньютона масса характеризует инерционные свойства тел. В законе всемирного тяготения масса характеризует способность тел создавать поля тяготения и испытывать действие полей тяготения.

Может быть поставлен вопрос: являются ли массы, фигурирующие в обоих законах, одной и той же физической величиной или это две разные величины, лишь как-то связанные между собой? Таким именно образом исторически возникли понятия о массе *инерционной*, фигурирующей во втором законе Ньютона, и массе *тяготеющей*, фигурирующей в законе всемирного тяготения. Опыты убеждают нас, что обе массы, если только вообще имеет смысл различать их, пропорциональны друг другу.

Прежде всего это вытекает из того факта, что ускорение g_0 свободного падения одинаково для всех тел. Точное измерение ускорения g_0 при действительно свободном падении тел затруднительно, но наблюдения над качанием маятников позволяют измерить g_0 с большой точностью. Еще самим Ньютоном было показано, что

пропорциональность между инерционной и тяготеющей массами выполняется с точностью до $\frac{1}{1000}$. Бессель производил опыты над маятниками из самых разнообразных веществ и пришел к тому же результату с точностью до $\frac{1}{60\,000}$. Впоследствии было показано, что та же пропорциональность выполняется и для радиоактивных веществ.

С весьма большой точностью пропорциональность между массами тяготеющей и инерционной была показана Этвешем в 1894 г. с помощью крутильных весов. Идея опытов Этвеша заключается в следующем: на поверхности земного шара направление силы тяжести P_Φ определяется как направление равнодействующей силы притяжения тела к центру Земли и инерционной центробежной силы (см. § 23). Первая сила обусловлена тяготеющей массой тела, вторая — его инерционной массой. Если обе эти массы не пропорциональны друг другу, то направление силы тяжести P_Φ должно быть несколько различным для разных тел. Этвеш укреплял на одном конце коромысла крутильных весов определенную платиновую массу, на другом — испытуемое тело. Прибор ориентировался так, что коромысло имело определенное направление, например, с востока на запад. Затем прибор поворачивался на 180° .

При поворачивании, в случае если инерционная и тяготеющая массы не пропорциональны друг другу, должна бы возникнуть пара сил и коромысло должно было бы несколько повернуться. На самом деле не наблюдалось отклонений, превышающих $6 \cdot 10^{-4}$ дуговых секунды; наблюдаемые весьма малые отклонения носили случайный характер. Пропорциональность обеих масс соблюдалась с точностью, достигающей одной двухсотмиллионной доли.

Таким образом, из всех опытов вытекает *невозможность различать массы — тяготеющую и инерционную: опыты убеждают нас, что мы имеем дело лишь с различными проявлениями одной и той же физической величины — массы*. Теория тяготения Эйнштейна подтвердила этот взгляд. Таким образом, в настоящее время вопрос о существовании якобы двух различных физических величин — массы инерционной и массы тяготеющей — имеет лишь исторический интерес.

Как было указано в § 32, всякое тело вызывает в окружающем пространстве поле тяготения. В частности, такое поле создаёт земной шар. Так как силы тяготения, вызванные земным шаром, называются силами тяжести, то поле, окружающее Землю, может быть также названо *полем силы тяжести*. Вблизи поверхности Земли сила тяжести практически постоянна; в этом случае поле силы тяжести называется однородным.

Как было показано в § 27, *работа в поле силы тяжести не зависит от формы и длины пути, а только от того, на-*

сколько в результате движения тела изменилась высота его поднятия.

Если мы из точки B пройдем в точку B' сперва по пути s' , а затем по пути s'' (рис. 70), то работы A' и A'' , совершенные в этих двух случаях, по сказанному, должны равняться друг другу: $A' = A''$; при движении из точки B' в точку B по пути s'' будет совершена работа $A''' = -A''$. Отсюда, если мы совершим замкнутый путь, пройдя сперва из точки B в точку B' по пути s' , а затем обратно из точки B' в точку B по пути s'' , то в сумме будет совершена работа:

$$A_{BB'B} = A' + A''' = A' - A'' = 0.$$

Тот же результат непосредственно получается из того соображения, что при возвращении обратно в точку B изменение потенциальной энергии оказывается равным нулю. Таким образом, при движении в поле силы тяжести по замкнутому пути суммарная работа равна нулю.

Вывод о том, что работа зависит лишь от положения начальной и конечной точек пути и не зависит от формы пути, справедлив и для неоднородного поля сил тяготения.

При рассмотрении двух тел с массами m_1 и m_2 , притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения:

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

можно показать, что их взаимная потенциальная энергия равна

$$E_p = -k \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (1)$$

Знак минус соответствует тому, что потенциальная энергия двух бесконечно удаленных одно от другого тел ($r = \infty$) условно положена равной нулю; при этом потенциальная энергия имеет наибольшее значение, так как для раздвижения тел надо совершать положительную работу внешними силами; при сближении тел их потенциальная энергия убывает, следовательно, она принимает значения, меньшие нуля, т. е. отрицательные.

Графически потенциальная энергия тяготеющих тел, выражаемая формулой (1), представится кривой, изображенной на рис. 71. Эта кривая — ветвь гиперболы.

Предположим, что взаимно тяготеют два тела 1 и 2; будем рассматривать движение тела 2 относительно тела 1. Если полная энергия тел равна E

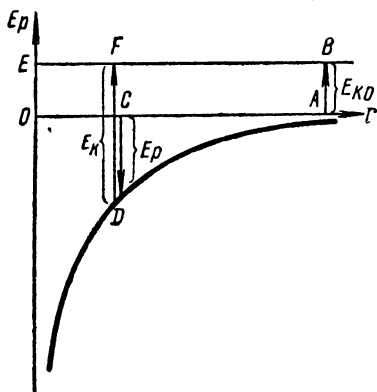


Рис. 71. Потенциальная энергия двух тел, притягивающихся по закону Ньютона, изображается гиперболой.

(рис. 71), то это означает, что тело 2, находясь на бесконечно большом расстоянии от тела 1, двигалось со скоростью v_0 , определяемой равенством:

$$E_{k0} = \frac{m_2 v_0^2}{2} = E, \quad \text{откуда} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_2}}.$$

Кинетическая энергия E_{k0} изображается отрезком AB . При уменьшении r (тело 2 приближается к телу 1) потенциальная энергия начинает убывать и принимает отрицательное значение; кинетическая энергия возрастает, вместе с тем возрастает и скорость тела 2. Для некоторого определенного расстояния r , представляемого отрезком OC , кинетическая энергия изобразится отрезком DF ; этот отрезок направлен снизу вверх, что соответствует положительному знаку кинетической энергии. Потенциальная энергия представляется отрезком CD ; этот отрезок направлен вниз, что соответствует отрицательному значению потенциальной энергии.

Сумма кинетической и потенциальной энергии $E_k + E_p$ во все время движения остается равной полной энергии E :

$$E_k + E_p = E. \quad (2)$$

Считая тело 1 неподвижным, получим, что $E_k = \frac{m_2 v^2}{2}$, где v — скорость второго тела относительно первого, когда расстояние между ними равно r . Пользуясь этим выражением для E_k из равенств (1) и (2) получим:

$$\frac{m_2 v^2}{2} - k \frac{m_1 m_2}{r} = E,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_2} + k \frac{2m_1}{r}} = \sqrt{v_0^2 + k \frac{2m_1}{r}}. \quad (3)$$

Если тело 2, находясь на бесконечном расстоянии от тела 1, имело скорость $v_0 = 0$, то:

$$v = \sqrt{k \frac{2m_1}{r}}. \quad (3a)$$

Рассмотрим случай тяжелого тела с массой m , падающего из бесконечности на Землю с начальной скоростью $v_0 = 0$. Тогда по формуле (3a) при достижении поверхности Земли оно будет иметь скорость

$$v = \sqrt{k \frac{2M_3}{R_3}},$$

где M_3 — масса Земли, R_3 — ее радиус. Подставляя сюда $k = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ см/г} \cdot \text{сек}^2$, $M_3 = 5,98 \cdot 10^{27} \text{ г}$ и $R_3 = 6,37 \cdot 10^8 \text{ см}$, получим:

$$v = \sqrt{6,685 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2 \cdot 5,98 \cdot 10^{27}}{6,37 \cdot 10^8} \frac{\text{см}}{\text{сек}}} = 11,2 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Таким образом, тело падающее на поверхность Земли из бесконечности под влиянием притяжения Земли достигает скорости 11,2 км/сек. Наоборот, чтобы тело брошенное с поверхности Земли вертикально вверх не упало обратно на Землю — (при пренебрежении сопротивлением воздуха), а улетело в бесконечность, ему надо сообщить скорость 11,2 км/сек. Эта скорость называется *второй космической скоростью*.

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 34. Движение твердого тела. Движение твердого тела определяется приложенными к нему *внешними* силами. Особенно характерными видами движения твердого тела являются поступательное движение и вращение (см. § 12). Можно показать, что к ним сводится любое сложное движение твердого тела. При поступательном движении все точки твердого тела двигаются с одинаковыми скоростями v и одинаковыми ускорениями w . Если мысленно разбить твердое тело на элементы с массами Δm_i , то для каждого из элементов по второму закону Ньютона имеет место соотношение:

$$\Delta m_i \cdot w = f_i + F_i, \quad (1)$$

где f_i — внутренняя сила (т. е. происходящая от других элементов того же тела), а F_i — внешняя сила, действующая на данный элемент. По третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил равна нулю, поэтому, суммируя выражения (1) по всем элементам, получим

$$\sum \Delta m_i \cdot w = \sum F_i, \text{ или } M \cdot w = F, \quad (2)$$

где $M = \sum \Delta m_i$ — масса всего тела, а $F = \sum F_i$ — векторная сумма всех внешних сил. Вектор F называется *главным вектором внешних сил*.

Уравнение (2) позволяет определить ускорение поступательного движения твердого тела по массе тела M и главному вектору внешних сил F . Таким образом, *рассмотрение поступательного движения твердого тела можно заменить рассмотрением движения одной материальной точки с массой, равной массе тела, и находящейся под действием силы, равной главному вектору внешних сил*.

При более сложном непоступательном движении твердого тела разные его точки обладают разными скоростями v_i и ускорениями w_i . Однако можно мысленно разбить тело на столь малые элементы, что в пределах каждого из них скорость и ускорение остаются постоянными. Тогда для каждого из элементов получим

$$\Delta m_i \cdot w_i = f_i + F_i.$$

Суммируя это равенство по всем элементам тела и замечая, что снова $\sum \mathbf{f}_i = 0$, получим

$$\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad (3)$$

где \mathbf{F} — по-прежнему главный вектор внешних сил. Однако равенство (3) нельзя непосредственно свести к уравнению вида (2), так как теперь ускорения \mathbf{w}_i разных элементов разные.

Введем некоторое ускорение \mathbf{w}_C , определяемое равенством

$$\mathbf{w}_C = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i}{M}, \quad (4)$$

где M — масса всего тела. Тогда, умножая левую и правую части равенства (4) на M и пользуясь равенством (3), получим

$$M \cdot \mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \quad (5)$$

Можно показать (см. мелкий шрифт), что \mathbf{w}_C есть ускорение некоторой точки C , координаты которой x_C, y_C, z_C определяются через координаты отдельных элементов тела x_i, y_i, z_i соотношениями:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta m_i}{M}. \quad (6)$$

Точка C называется *центром масс* тела (или центром инерции). Центр масс совпадает с центром приложения равнодействующей сил тяжести. Из уравнения (5) следует, что *центр масс тела движется так, как движется материальная точка с массой, равной массе тела, под влиянием силы, равной главному вектору внешних сил*. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то центр масс тела покоится или движется равномерно и прямолинейно. Внутренние силы не могут изменить скорости центра масс.

Покажем, что действительно центр масс, координаты которого даются равенствами (6), движется с ускорением, определяемым равенством (4). Для этого воспользуемся тем соотношением, что проекции ускорения на координатные оси выражаются вторыми производными по времени от координат той точки, ускорение которой рассматривается.

Беря вторые производные от x_C, y_C, z_C , получим, что проекции ускорения центра масс на координатные оси равны:

$$\left. \begin{aligned} w_{C_x} &= \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{xi}}{M}; \\ w_{C_y} &= \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{yi}}{M}; \\ w_{C_z} &= \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{zi}}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где w_{xi} , w_{yi} , w_{zi} — проекции ускорения i -го элемента на координатные оси. Так как само ускорение w_C есть геометрическая сумма его составляющих вдоль осей, то из равенств (7) следует, что w_C совпадает с выражением, даваемым формулой (4).

§ 35. Вращение твердого тела. Момент силы и момент инерции. При рассмотрении вращения твердого тела с динамической точки зрения наряду с понятием о силах вводится *понятие о моментах сил* и наряду с понятием о массе — *понятие о моменте инерции*. Для того чтобы выяснить содержание понятий — момент сил и момент инерции, рассмотрим сперва движение одной материальной точки A с массой m , удерживаемой на окружности радиуса r с помощью какой-либо связи (рис. 72). Пусть на точку A действует постоянная по величине сила f . Тогда точка A приобретает постоянное тангенциальное ускорение w_t , определяемое тангенциальной составляющей f_t :

$$f_t = f \cos \alpha = m w_t. \quad (1)$$

Нормальная составляющая силы f совместно с реакцией связи создает нормальное ускорение.

Введем угловое ускорение $\beta = \frac{w_t}{r}$, тогда равенство (1) заменится выражением:

$$f \cos \alpha = m r \cdot \beta;$$

умножим правую и левую части этого выражения на r , получим:

$$f r \cos \alpha = m r^2 \cdot \beta. \quad (2)$$

Произведение $r \cos \alpha$ равно длине перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (рис. 72). Величина

$$M = f r \cos \alpha, \quad (3)$$

численно равная произведению величины силы f на длину перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (центра вращения), называется *моментом силы относительно точки O* .

Величина

$$I = m r^2, \quad (4)$$

численно равная произведению массы m точки A на квадрат ее расстояния от точки O (центра вращения), называется *моментом инерции точки A относительно точки O* .

Вводя момент силы M и момент инерции I , перепишем равенство (2):

$$M = I \beta. \quad (5)$$

Сравнивая равенства (1) и (5), видим, что угловое ускорение β таким же образом связано с моментом силы M и моментом инерции

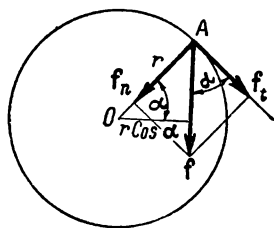


Рис. 72. Вращение точки A по окружности.

I , каким линейное ускорение w_i связано с силой f_i и массой m точки A . При описании вращательного движения с помощью углового ускорения β роль силы играет момент силы M , роль массы m — момент инерции I . Под влиянием сил с равными моментами точка A приобретает равные угловые ускорения β . Таким образом, различные силы f эквивалентны в смысле вызываемого ими вращения, если равны их моменты. Разные материальные точки получают под влиянием равных моментов сил одинаковые угловые ускорения, если одинаковы их моменты инерции. Таким образом, материальные точки с разными массами m эквивалентны в смысле приобретаемого ими углового ускорения, если равны их моменты инерции.

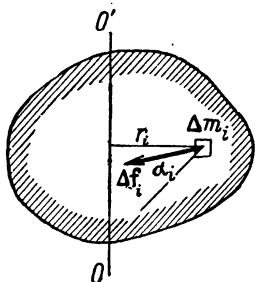


Рис. 73. Разбивка вращающегося твердого тела на элементарные части.

Перейдем теперь к рассмотрению твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OO' (рис. 73).

Для характеристики способности силы вызывать вращение вокруг данной оси вводится понятие о *моменте сил относительно оси*. Очевидно, что сила, действующая вдоль направления, пересекающегося с осью, вокруг этой оси не может вызвать вращения. Также очевидно, что и сила, параллельная оси, не вызовет относительно нее вращения. *Момент силы относительно оси создается только той составляющей силы, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси*. Поэтому, выделяя в твердом теле малый элемент с массой Δm_i , мы будем рассматривать только ту составляющую действующей на него силы, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения OO' . Обозначим эту составляющую через Δf_i .

Пусть сила Δf_i образует угол α_i с касательной к траектории массы Δm_i . Угол α_i считаем острым. Тогда для этого элемента можно написать равенство (2):

$$\Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \Delta m_i r_i^2 \beta,$$

где β — угловое ускорение элемента.

Такие же равенства мы можем написать для всех прочих элементов, а затем просуммировать их:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \beta;$$

угловое ускорение β постоянно для всех элементов, поэтому его можно вывести из-под знака суммы:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \beta \sum_i \Delta m_i r_i^2. \quad (6)$$

Величина $M = \sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i$ представляет собою сумму моментов сил, действующих на все элементы твердого тела, т. е. она представляет собою полный момент M сил, действующих на твердое тело, относительно оси вращения OO' . При этом нужно произведение $\Delta f_i r_i \cos \alpha_i$ брать со знаком плюс, если точка приложения силы Δf_i обходит ось в направлении действия силы Δf_i , и со знаком минус — в противном случае. Величина

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (7)$$

равная сумме моментов инерции отдельных элементов, на которые мы разбили тело, называется *моментом инерции тела относительно данной оси OO'* .¹ Вводя полный момент сил M и момент инерции I , перепишем равенство (6):

$$M = I\beta, \quad (6a)$$

т. е. для твердого тела справедливо равенство, совпадающее с равенством (5).

Угловое ускорение β , приобретаемое твердым телом:

$$\beta = \frac{M}{I},$$

т. е. оно прямо пропорционально приложенному моменту сил M и обратно пропорционально моменту инерции I . Сравнивая соотношение (6a) с равенством (1), выражающим второй закон Ньютона, видим, что для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет место соотношение, вполне аналогичное второму закону Ньютона, только роль линейного ускорения играет угловое ускорение, роль силы — момент силы и роль массы — момент инерции.

Из равенства (6a) следует, что если момент сил, действующих на тело, равен нулю, то и угловое ускорение $\beta = 0$, т. е. тело вращается с постоянной угловой скоростью ω , если только его момент инерции I остается постоянным.² В частном случае $\omega = 0$, т. е. тело покоится.

¹ На самом деле элементы массы должны быть взяты бесконечно малыми, тогда суммирование заменяется интегрированием, и для момента инерции тела мы получаем выражение:

$$I = \int r^2 dm.$$

Вводя плотность тела ρ , имеем: $dm = \rho dV$, где dV — элемент объема. Отсюда

$$I = \int \rho r^2 dV; \quad (7a)$$

интегрирование должно быть распространено на весь объем тела V .

² Момент инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, может меняться лишь в том случае, если отдельные части твердого тела связаны друг с другом не жестко. Для этого случая формула (6a)

Как мы видели (см. § 13), угловая скорость ω и угловое ускорение β могут рассматриваться как векторы. Момент силы f относительно точки может также рассматриваться как вектор, и равенству (6а) может быть придан векторный характер.

Рассмотрим силу f (рис. 74 а), момент которой относительно точки O мы хотим определить. Очевидно, полную характеристику момента составляют:

1) численное значение момента, равное $fr \cos \alpha$; 2) плоскость, в которой лежат сила f и точка O ; 3) направление, в котором действует сила. Все эти три характеристики могут быть выражены с помощью *одного вектора* M , если мы: 1) положим численное значение вектора M равным $fr \cos \alpha$, 2) проведем его перпендикулярно к плоскости, в которой лежат сила f и точка O , и 3) направим его так, чтобы это направление было некоторым однозначным образом связано с направлением силы. В качестве такой связи между направлениями выберем опять

„правило буравчика“ (ср. § 13 и рис. 28): направление вектора M определится поступательным движением буравчика, расположенного в точке O , если направление вращения его головки совпадает с направлением действующей силы. Тогда в случае, представленном на рис. 74а, вектор M будет направлен вверх, а в случае, представленном на рис. 74б — вниз. Вектор M является вектором момента силы.

Вводя в рассмотрение угол $\angle r, f$ между векторами r и f , получим $\alpha = \angle r, f - \frac{\pi}{2}$, откуда для численного значения момента силы f найдем:

$$M = f \cdot r \cdot \sin(\angle r, f).$$

Следовательно, если мы воспользуемся введенным в § 13 представлением о векторном произведении, то получим, что момент силы f выражается векторным произведением:

$$M = r \times f, \quad (3a)$$

где r есть радиус-вектор, проведенный из точки O , относительно которой берется момент, к точке приложения силы f .

Рассмотрим еще момент так называемой *пары сил*. Парой сил называются две равные и направленные в противоположные стороны силы, не действующие вдоль одной прямой (рис. 75). Будем брать момент пары относительно точки O , лежащей в плоскости сил. Момент пары не зависит от положения точки O , относительно которой он берется. Возьмем произвольно расположенную точку O (рис. 75). Тогда момент силы f_1 относительно точки O численно равен $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ и направлен перпендикулярно к плоскости рисунка вперед. Момент силы f_2 численно равен $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ и направлен перпендикулярно к плоскости рисунка за плоскость рисунка. Таким образом, моменты $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ и $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ направлены в противоположные стороны и, следовательно, суммарный момент обеих сил, образующих пару, равен

$$M = f_2 r_2 \cos \alpha_2 - f_1 r_1 \cos \alpha_1.$$

не применима, так как ее вывод предполагает, что составляющие сил, направленные по связям, компенсируются реакциями связей, а не вызывают перемещения одних частей твердого тела относительно других, как это будет иметь место при нежестких связях.

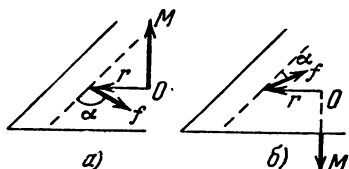


Рис. 74. Момент силы f относительно точки O определяется вектором M .

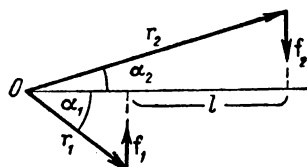


Рис. 75. Момент пары не зависит от положения точки O , относительно которой он берется.

Силы f_1 и f_2 численно равны друг другу; обозначим их общее значение через f , а разность $r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1$ обозначим через l (l есть расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы), тогда

$$M = fl; \quad (8)$$

l называется *плечом пары*. Момент пары M численно равен произведению из численного значения f одной из сил пары на плечо пары l . Направление вектора момента пары связано с направлением действия сил, образующих пару, правилом буравчика (рис. 76).

Вводя вектор момента сил, можно, как оказывается, переписать равенство (8а) в векторной форме:

$$M = l \cdot \beta. \quad (9)$$

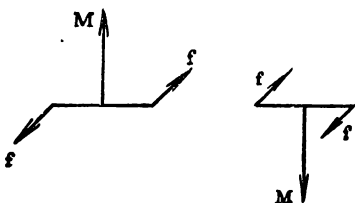


Рис. 76. Момент пары определяется вектором M .

При $M = 0$, т. е. при отсутствии момента сил, действующего на твердое тело, $\beta = 0$, что означает, что вектор угловой скорости ω постоянен, т. е. твердое тело не только вращается с постоянной по численному значению угловой скоростью, но что и направление оси вращения остается постоянным.

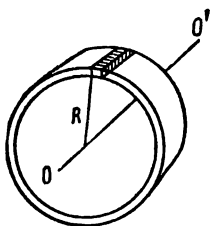


Рис. 77. Определение момента инерции полого цилиндра.

§ 36. Моменты инерции некоторых тел.

Рассмотрим моменты инерции некоторых тел относительно определенных осей. В качестве простейшего примера рассмотрим момент инерции *тонкостенного полого цилиндра* (кольца) (рис. 77) с массой m и радиусом R относительно его оси симметрии OO' . Разобьем цилиндр на элементы в виде полосок, ограниченных образующими цилиндра (одна такая полоска заштрихована на рис. 77). Ввиду малой толщины стенок цилиндра можно считать, что все части такой полоски лежат на одинаковых расстояниях R от оси OO' . Поэтому момент инерции отдельной полоски равен $\Delta I = \Delta m_i R^2$, где Δm_i — масса полоски. Момент инерции всего тонкостенного полого цилиндра:

$$I = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i,$$

но $\sum_i \Delta m_i$ представляет собою массу m всего цилиндра, откуда

$$I = mR^2. \quad (1)$$

Относительно какой-либо другой оси момент инерции того же цилиндра будет иной.

Моменты инерции некоторых других тел приводим без вычислений, так как эти вычисления потребовали бы интегрирования.

Момент инерции *сплошного цилиндра* (диска) относительно оси цилиндра (рис. 78):

$$I = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2)$$

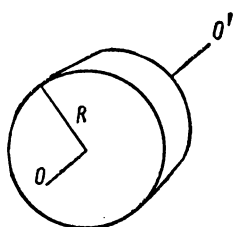


Рис. 78. Момент инерции цилиндра относительно оси OO' равен $\frac{1}{2} m R^2$.

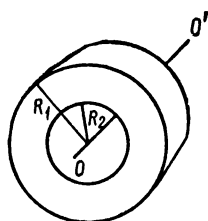


Рис. 79. Момент инерции *полого цилиндра* относительно оси OO' равен $\frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$.

Момент инерции *полого толстостенного цилиндра* относительно его оси (рис. 79):

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2). \quad (3)$$

где R_1 и R_2 — его внешний и внутренний радиусы.

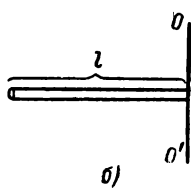
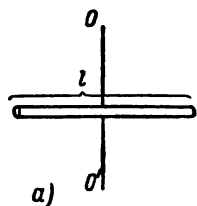


Рис. 80. Момент инерции *стержня* относительно оси OO' , проходящей через его середину, равен $\frac{1}{12} m l^2$ и относительно оси, проходящей через его конец, равен $\frac{1}{3} m l^2$.

Момент инерции *стержня* длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине (рис. 80а):

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \quad (4)$$

Момент инерции *стержня* длиной l относительно оси, проходящей у конца стержня перпендикулярно его длине (рис. 80б):

$$I = \frac{1}{3} m l^2. \quad (5)$$

Момент инерции *шара* относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (6)$$

Размерность момента инерции определяется из соотношения

$$I = m r^2,$$

откуда

$$[I] = [m] \times [r^2] = M L^2.$$

Таким образом, в CGS-системе момент инерции измеряется в гсм^2 , в технической системе — (техн. ед. массы) $\cdot \text{м}^2$.

В международной системе единиц (MKS) момент инерции выражают в кгм^2 , так как в ней за единицу массы принят килограмм, а за единицу длины метр.

Приведем пример на определение углового ускорения тела по заданным моменту сил и моменту инерции.

Пример. К колесу радиуса $R = 0,5 \text{ м}$ с моментом инерции $I = 20 \text{ кгм}^2$ приложен постоянный момент сил $M = 5 \text{ кгм}$. Найти: 1) угловое ускорение и 2) линейную скорость точек на ободе к концу 10-й секунды (начальную скорость считать равной нулю).

Решение. Угловое ускорение колеса

$$\beta = \frac{M}{I}.$$

Будем для расчета пользоваться технической системой единиц, тогда $I = \frac{20}{9,8}$ техн. ед., откуда

$$\beta = \frac{5 \cdot 9,8}{20} \text{ сек.}^{-2} = 2,45 \text{ сек.}^{-2}.$$

Угловая скорость через время t после начала движения будет

$$\omega = \beta t,$$

а линейная скорость точек на ободе

$$v = \omega R = 2,45 \cdot 0,5 \cdot 10 \text{ м/сек} = 12,25 \text{ м/сек}.$$

Если для какого-либо тела известен его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, то легко может быть найден и момент инерции относительно любой оси, параллельной первой.

Этот переход от одного момента инерции к другому производится по следующей теореме: *момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния центра тяжести тела от оси вращения.*

В качестве примера определяем момент инерции шара относительно одной из его касательных.

Согласно приведенной теореме:

$$I_t = I_C + ma^2,$$

где I_t — момент инерции относительно касательной, I_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, m — масса шара и a — расстояние от касательной до центра шара. Так как для шара $a = R$ и $I_C = \frac{2}{5} mR^2$, то

$$I_t = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2.$$

§ 37. Момент количества движения. Рассмотрим первоначально материальную точку с массой m , вращающуюся по окружности радиуса r (рис. 72). Для такой точки имеет место соотношение:

$$f \cos \alpha = m\omega r, \quad (1)$$

где f — сила, действующая на точку, а w_t — тангенциальная составляющая ее ускорения. Предположим, что сила f постоянна по величине и составляет один и тот же угол α с касательной к окружности во всех точках пути.

Тогда $w_t = \Delta v / \Delta t$, и равенство (1) принимает вид:

$$f \cos \alpha \cdot \Delta t = m \Delta v.$$

Умножая правую и левую части этого выражения на r , получим

$$fr \cos \alpha \cdot \Delta t = rm \Delta v. \quad (2)$$

Величина $fr \cos \alpha$ представляет собой момент M силы f относительно центра вращения O ; кроме того, ввиду постоянства массы m и радиуса r , выражение $rm \Delta v$ можно переписать в виде $\Delta(rmv)$.

Тогда равенство (2) примет вид:

$$M \Delta t = \Delta(rmv). \quad (3)$$

Если момент сил M непостоянен, то в выражении (3) следует брать столь малый промежуток времени Δt , чтобы в течение этого промежутка времени момент сил M мог считаться постоянным. Для конечного промежутка времени можно ввести в рассмотрение среднее значение момента сил \bar{M} и тогда

$$\bar{M} \Delta t = \Delta(rmv). \quad (3a)$$

Величина $p = rmv$ называется *моментом количества движения* материальной точки, вращающейся по окружности, а $\bar{M} \Delta t$ — *импульсом момента сил*. Равенство (3) утверждает, что *изменение момента количества движения численно равно импульсу приложенного момента сил*. Оно аналогично равенству (4) § 17, выражающему связь между изменением количества движения и импульсом силы.

Понятие о моменте количества движения p материальной точки мы ввели для частного случая движения материальной точки по окружности, когда скорость ее все время перпендикулярна к радиусу r . В общем случае движения материальной точки под ее моментом количества движения относительно некоторого центра O подразумевается величина, численно равная произведению из количества движения точки mv на длину перпендикуляра, опущенного из центра O на направление скорости точки v (вектор v проводится из того места, где в данный момент находится материальная точка). Момент количества движения является вектором, направление которого определяется правилом буравчика: вектор p перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектор скорости v и центр O , и направлен в сторону поступательного движения буравчика при вращении его головки от вектора r (радиус-вектор точки) к вектору v . Таким образом, вектор момента количества движения определяется векторным произведением $p = r \times mv$ и равенство (3) в общем случае должно быть также переписано в векторном виде:

$$\Delta p = \Delta p,$$

где Δp — векторная разность моментов количества движения $p_2 - p_1$.

Соотношение (3) легко обобщить и на случай твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Для этого разобьем твердое тело на отдельные элементы с массами Δm_i , подобно тому, как это мы делали в § 35.

Для каждого такого элемента будет выполняться равенство:

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = r_i \Delta m_i \Delta v_i,$$

или, так как $\Delta v_i = \Delta \omega \cdot r_i$, то

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta \omega.$$

Суммируя эти выражения для всех отдельных элементов твердого тела, получим:

$$\sum_i \Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta \omega,$$

или, так как $\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = M$ — момент сил, действующих на твердое тело, а $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = I$ — момент инерции тела, то

$$M \Delta t = I \Delta \omega.$$

Если момент сил M непостоянен, то следует брать его среднее значение за промежуток времени Δt и тогда

$$\overline{M} \Delta t = I \Delta \omega.$$

Так как момент инерции твердого тела относительно данной оси есть величина постоянная, то последнее равенство можно переписать в виде:

$$\overline{M} \Delta t = \Delta (I\omega), \quad (4)$$

где справа стоит изменение величины $I\omega$. Величина $\overline{M} \Delta t$ называется *импульсом момента сил, приложенных к твердому телу*, а величина $I\omega$ — *моментом количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*. По равенству (4), изменение момента количества движения твердого тела численно равно импульсу момента приложенных к нему сил.

Равенство (4) мы вывели, положив момент инерции тела постоянным, но оно, как оказывается, справедливо и тогда, когда во время движения момент инерции каким-нибудь образом меняется. И в этом случае изменение момента количества движения $\Delta (I\omega)$ определяется импульсом момента приложенных сил.

Из формул (3) и (4) следует, что *при отсутствии момента сил ($M=0$) момент количества движения остается постоянным*. Это следствие известно под названием *закона сохранения момента количества движения*.

В частном случае движения материальной точки по окружности имеем из (3) при $M=0$:

$$mvr = \text{const.} \quad (5)$$

В общем случае движения материальной точки при $M=0$:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (6)$$

Для твердого тела из (4) при $M=0$ следует:

$$I \cdot \omega = \text{const.} \quad (7)$$

В случае неизменного момента инерции, при отсутствии внешних сил, угловая скорость вращающегося тела остается постоянной; этот результат мы уже получали непосредственно из формулы (6а) § 35.

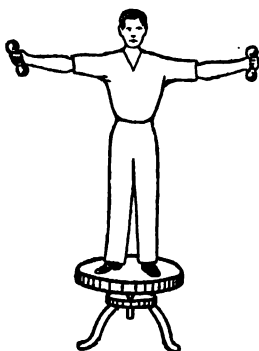


Рис. 81. При опускании рук с гири человек начинает вращаться скорее.

Если, при отсутствии внешних сил, меняется момент инерции, то начинает меняться и угловая скорость ω , так что произведение $I\omega$ остается постоянным: если момент инерции I возрастает, то угловая скорость ω убывает, и наоборот.

Сохранение момента количества движения может быть продемонстрировано с помощью человека, стоящего на скамеечке, могущей без трения вращаться вокруг вертикальной оси („скамья Жуковского“). Пусть человек, держащий в расставленных руках гири (рис. 81), приведен вместе со скамеечкой во вращение с угловой скоростью ω . При этом человек имеет определенный момент количества движения $I\omega$, который, при равенстве нулю момента внешних сил, должен сохраняться. Если человек опустит руки, то его момент инерции уменьшится, в результате этого возрастет угловая скорость его вращения ω . Если человек снова поднимет руки, то угловая скорость ω примет прежнее значение.

Момент количества движения $\mathbf{P} = I\omega$ есть величина *векторная*, имеющая то же направление, что и вектор угловой скорости ω . Отсюда и равенство (4) на самом деле носит векторный характер:

$$M \Delta t = \Delta \mathbf{P}, \quad (8)$$

где $\Delta \mathbf{P} = I\omega_2 - I\omega_1$ представляет собою *векторную разность* моментов количества движения $I\omega$. В таком виде оно совершенно аналогично равенству (4) § 17, выражающему для материальной точки связь между изменением вектора количества движения и вектором импульса сил. Равенство (8) применимо не только к случаю вращения твердого тела около неподвижной оси, но и к случаю произвольного движения твердого тела, если соответствующим образом

обобщить понятие момента количества движения. Равенство (8) применимо и к системе тел, только тогда под \mathbf{P} надо подразумевать вектор суммарного момента количества движения и под \mathbf{M} — вектор суммарного импульса сил.

Закон сохранения момента количества движения для системы, состоящей из двух тел, можно продемонстрировать, дав в руки человеку, стоящему на скамеечке, колесо с массивным ободом (рис. 82). Если человек со скамеечкой сперва покоился, а затем, держа ось колеса вертикально, привел колесо во вращение, то сам он вместе со скамеечкой начнет вращаться в противоположную сторону. Это произойдет оттого, что силы, которые человек прикладывает к колесу, являются внутренними, а потому общий момент количества движения, сперва равный нулю, таким и останется. Этот опыт аналогичен опыту с человеком, бегущим по тележке (§ 18), который демонстрирует сохранение количества движения системы.

Из равенства (8) следует, что при отсутствии внешних сил ($\mathbf{M} = 0$) момент количества движения \mathbf{P} сохраняется не только по величине, но и по направлению. Последнее может быть продемонстрировано снова с помощью человека, стоящего на скамеечке и держащего в руках вращающееся колесо: всякое изменение направления оси колеса (например, ее поворачивание на 90° или на 180°) при постоянстве числа оборотов колеса ведет к изменению угловой скорости вращения самого человека на скамеечке.

§ 38. Гироскопы. Свойство вращающегося твердого тела сохранять направление оси вращения, а также характер сил, действующих со стороны оси тела на опоры при внешних воздействиях, используется для различных технических целей. Применяемые в технике массивные симметричные тела, вращающиеся с большой угловой скоростью, носят название *волчков* или *гироскопов*.

Свойство гироскопа сохранять неизменной ось вращения, при равенстве нулю момента внешних сил, может быть продемонстрировано с помощью *карданова подвеса*.

Карданов подвес (рис. 83) состоит из двух колец, внешнее из которых свободно поворачивается вокруг оси, проходящей через острия AA' , а внутреннее — вокруг оси, перпендикулярной к ней, проходящей через острия BB' . Ось CC' гироскопа D опирается на внутреннее кольцо карданова подвеса, что обеспечивает ей возможность свободно поворачиваться в пространстве в любых направлениях. Если привести гироскоп в быстрое вращение, то при любом повороте подставки ось его вращения сохраняет неизменным свое направление.

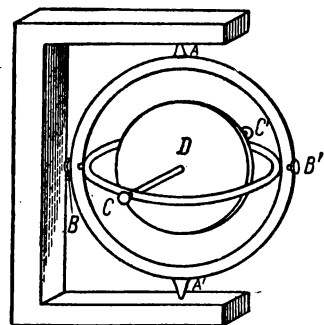


Рис. 83. Гироскоп на кардановом подвесе.

Если к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси его вращения, то он начнет поворачиваться около третьей оси, перпендикулярной к первым двум. Пусть, например, гироскоп D вращается около оси OO' в направлении, указанном стрелкой на рис. 84. Пусть к гироскопу приложена пара сил F и F' , перпендикулярных к плоскости рисунка и стремящихся



Рис. 82. При поворачивании колеса человек сам начинает вращаться в обратную сторону.

повернуть его около оси AA' , тогда верхний конец оси гироскопа O' отклонится направо, а нижний — налево (указано стрелками v' и v), т. е. гироскоп повернется около оси BB' , перпендикулярной к плоскости рисунка.

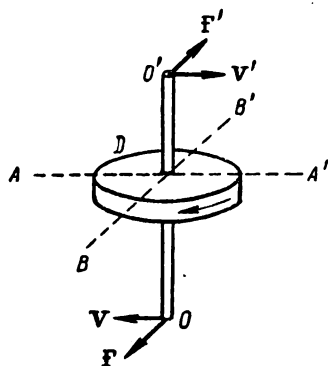


Рис. 84. При наличии пары сил F и F' , стремящихся повернуть гироскоп около оси AA' , гироскоп поворачивается около перпендикулярной к ней оси BB' .

Из рис. 84 видно, что в результате гироскопического эффекта гироскоп стремится расположить ось своего вращения таким образом, чтобы она образовывала возможно меньший угол с осью вынужденного вращения AA' и чтобы оба вращения совершались в одном и том же направлении.

Парадоксальные на первый взгляд указанные свойства гироскопа могут быть поняты на основании следующего рассмотрения.

Пусть имеется гироскоп, вращающийся в направлении, указанном на рис. 85, и на который действует пара сил F и F' , направленных так же, как и силы, приложенные к гироскопу, изображенному на рис. 84. Тогда вектор угловой скорости ω направлен вниз, а момент M пары сил F и F' (силы лежат в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка) направлен вдоль прямой AA' влево. По сказанному на стр. 125, между моментом пары сил M и угловым ускорением β , рассматриваемыми как векторы, имеет место соотношение:

$$\beta = \frac{M}{I},$$

где I — момент инерции тела, к которому приложена пара сил с моментом M ; следовательно, ускорение β направлено в ту же сторону, что и M . Отсюда получим, что за некоторый малый промежуток времени Δt изменение угловой скорости изобразится вектором $\Delta\omega$, параллельным вектору M , т. е. лежащим в плоскости чертежа и направленным налево. Это же означает, что ось вращения гироскопа повернется вокруг оси BB' по часовой стрелке.

Силы, приложенные к связям, удерживающим ось, равны силам F и F' , но направлены в противоположные стороны; они носят название *гироскопических сил*. Например, если конец O' гироскопа, вращающегося в направлении, указанном стрелкой на рис. 86, отодвигается назад за плоскость чертежа, а конец O — вперед, то ось оказывает на подшипники давление в направлении стрелок F_1 и F'_1 . Можно показать, что момент сил F_1 и F'_1 выражается через векторное произведение момента количества движения гироскопа $I\omega$ на вектор угловой скорости поворачивания его оси ω' :

$$M = I\omega \times \omega'. \quad (1)$$

Гироскопические силы проявляются при движении обычного волчка. При наклонном положении вращающегося волчка составляющая силы тяжести P_z (рис. 87) стремится наклонить ось волчка еще больше. Но благодаря гироскопическому эффекту, ось OO' отклоняется в перпендикулярном направлении (указано стрелкой v) и начинает двигаться („прецессировать“) так, что его ось движется по конической поверхности. В результате прецессии волчок не па-

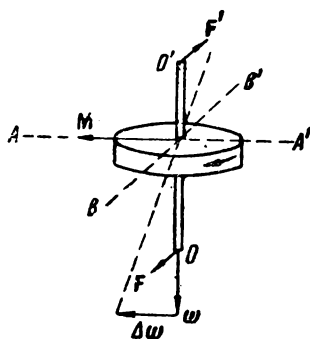


Рис. 85. К объяснению гироскопического эффекта.

дает. Действие гироскопических сил может быть также продемонстрировано с помощью так называемого рычажного гироскопа. Стержень B (рис. 88) может вращаться относительно стойки A как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. На конце стержня укреплен гироскоп D . Если гироскоп уравновешен грузом P , то равновесие сохраняется и при вращении гироскопа. Если же груз P тяжелее гироскопа, то он вызывает не наклонение стержня B , а его поворачивание в горизонтальной плоскости.

Гироскопы находят различные применения в физике и технике. В 1852 г. Фуко пытался использовать гироскоп для доказательства вращения Земли. Гироскопический эффект находит широкое применение в нарезных орудиях. Винтовые нарезы в стволе орудия сообщают вылетающему снаряду быстрое вращение вокруг оси и превращают его в гироскоп с большим собственным моментом количества движения. Благодаря этому момент сил, возникающий вследствие сопротивления воздуха, не ведет к опрокидыванию снаряда, а лишь вызывает прецессию снаряда вокруг направления касательной к траектории. Гироскопы используются также для регулирования движения мин (торпед). Гироскоп может быть использован и в качестве компаса.

Гироскопический компас представляет собою быстро вращающийся волчок (до 30 000 об/мин), плавающий в сосуде со ртутью. Благодаря суточному вращению Земли, ось гироскопа стремится расположиться параллельно оси вращения Земли, т. е. в плоскости меридиана. В настоящее время гироскопы используются в различных аэронавигационных приборах (например, „искусственный горизонт“). Большие гироскопы употребляются для уменьшения качки судов.

Гироскопические эффекты могут также оказывать, при наличии в механизмах быстро вращающихся массивных частей, вредное влияние. Например, турбина при поворачивании парохода оказывает, благодаря возникающим гироскопическим силам, добавочное давление на подшипники.

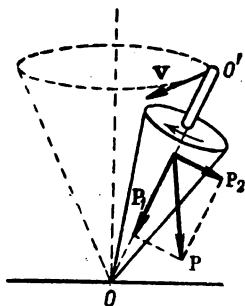


Рис. 87. Прецессия волчка.

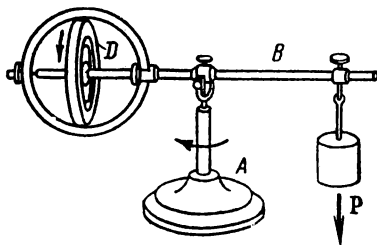


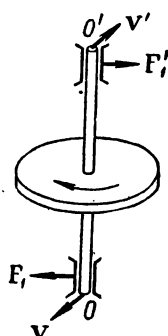
Рис. 88. Рычажный гироскоп.

Вектор угловой скорости разворота парохода ω' в этом случае перпендикулярен к вектору угловой скорости самой турбины ω , откуда численное значение момента гироскопических сил M' по формуле (1) равно

$$M' = I\omega\omega'.$$

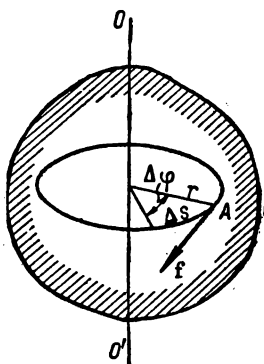
Если расстояние между подшипниками равно l , то $M' = F_1 l$, где F_1 — сила добавочного давления на подшипник. Отсюда

$$F_1 = \frac{I\omega\omega'}{l}.$$

Рис. 86. Гироскопические силы F_1 и F'_1 , приложенные к связям, удерживающим ось вращения гироскопа.

При большом моменте количества движения турбины ($I\omega$ — велико) и быстром развороте парохода (велико ω') силы F_1 могут достичь значений, достаточных для разрушения подшипников.

§ 39. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Определим теперь работу, совершаемую моментом сил M при поворачивании тела на определенный угол φ вокруг неподвижной оси OO' (рис. 89). Пусть к твердому телу приложена сила f , касательная к траектории точки приложения, момент



которой относительно оси OO' равен $M = fr$. При поворачивании тела на угол $\Delta\varphi$ точка приложения силы A переместится на длину дуги Δs , откуда работа, совершенная силой f , будет:

$$\Delta A = f \cdot \Delta s,$$

но $\Delta s = r \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — угол поворота тела, следовательно,

$$\Delta A = fr \cdot \Delta\varphi$$

или, так как $fr = M$ есть момент силы f ,

$$\Delta A = M \cdot \Delta\varphi; \quad (1)$$

Рис. 89. Работа силы, вызывающей вращение.

таким образом, работа, совершаемая при поворачивании тела на угол $\Delta\varphi$, численно равна произведению из момента силы на угол поворота.

В случае, если момент M постоянен, работа, совершаемая при поворачивании тела на конечный угол φ , будет:

$$A = M \cdot \varphi. \quad (2)$$

При переменном моменте силы M следует по формуле (1) определить элементарную работу ΔA , а полную работу A получить суммированием элементарных работ.

Рассмотрим теперь тело, вращающееся с данной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия его i -го элемента будет:

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2},$$

где Δm_i — масса этого элемента и v_i — его линейная скорость.

Так как $v_i = r_i \omega$, то

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращения всего тела равна сумме кинетических энергий его отдельных элементов:

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2.$$

но по формуле (7) § 35 $\sum \Delta m_i r_i^2 = I$ есть момент инерции тела (относительно оси вращения), откуда

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, кинетическая энергия вращения твердого тела вокруг неподвижной оси выражается формулой, совершенно аналогичной формуле, дающей кинетическую энергию материальной точки, только роль массы m играет момент инерции I , а роль линейной скорости — угловая скорость ω .

Мы рассмотрели случай вращения твердого тела около неподвижной оси OO' . Разберем теперь другой частный случай движения твердого тела, когда его ось вращения проходит через центр масс и перемещается, оставаясь параллельной самой себе. Пусть v_i — линейная скорость элемента объема тела с массой Δm_i и v_C — линейная скорость центра масс тела относительно той же координатной системы. Введем, кроме того, скорость v_i' элемента объема тела относительно центра масс, тогда

$$v_i = v_i' + v_C. \quad (4)$$

Кинетическая энергия элемента объема ΔE_{ki} равна

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{2},$$

или по (4)

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \Delta m_i (v_{Cx} v_{ix}' + v_{Cy} v_{iy}' + v_{Cz} v_{iz}').$$

Кинетическую энергию всего тела E_k получим, взяв сумму кинетических энергий всех его элементов:

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \sum \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \sum \Delta m_i (v_{Cx} v_{ix}' + v_{Cy} v_{iy}' + v_{Cz} v_{iz}'). \quad (5)$$

Первый из членов в правой части этого равенства представляет собою, как легко видеть, кинетическую энергию массы m , равной массе всего тела, движущейся вместе с центром масс: $\frac{mv_C^2}{2}$. Для второго члена на основании рассуждений, аналогичных приведенным в основном тексте, получим, что он равен кинетической энергии вращения твердого тела относительно оси вращения, проходящей через центр его масс $\frac{I\omega^2}{2}$. Третий член, как можно показать, равен нулю. Действительно, рассмотрим произведение $\Delta m_i v_{Cx} v_{ix}'$. Заметив, что по (4) $v_{ix}' = v_{ix} - v_{Cx}$, перепишем его в виде:

$$\Delta m_i v_{Cx} v_{ix}' = \Delta m_i v_{ix} v_{Cx} - \Delta m_i v_{Cx}^2. \quad (6)$$

Обозначим координаты центра масс через x_C, y_C, z_C и координаты i -го элемента тела — через x_i, y_i, z_i . Тогда $v_{Cx} = \dot{x}_C$ и $v_{ix} = \dot{x}_i$, где точки над буквами означают первую производную по времени. Воспользовавшись этим равенством, перепишем выражение (6):

$$\Delta m_i v_{Cx} v_{ix}' = \Delta m_i \dot{x}_C \dot{x}_i - \Delta m_i \dot{x}_C^2. \quad (7)$$

Суммируя (7) по всем элементам тела, получим

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \dot{x}_C \sum \Delta m_i \dot{x}_i - m \dot{x}_C^2.$$

Но по формуле (6) § 34 $\sum \Delta m_i \dot{x}_i = m \dot{x}_C$, откуда находим

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = 0.$$

Такое же равенство найдем и для двух других составляющих скоростей по осям, откуда следует:

$$\sum \Delta m_i (v_{Cx} v'_{ix} + v_{Cy} v'_{iy} + v_{Cz} v'_{iz}) = 0.$$

После этого равенство (5) принимает вид:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

т. е. полная кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии массы m , равной массе всего тела, движущейся вместе с центром масс, и кинетической энергии его вращения относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

Разберем несколько примеров на определение кинетической энергии вращающегося твердого тела.

Пример 1. Маховое колесо, имеющее вместе с валом момент инерции 200 кгм^2 , вращается, делая 180 об/мин. Через 2 мин. после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось под влиянием сил трения в подшипниках. Считая трение в подшипниках постоянным, определить момент сил трения.

Решение. Работа сил трения в подшипниках совершается за счет кинетической энергии вращающегося махового колеса:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = M\varphi,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость махового колеса, I — его момент инерции, φ — угол, на который повернется маховое колесо до остановки, M — искомый момент сил трения в подшипниках. Считая вращение колеса равномерно-замедленным, получим $\varphi = \frac{\omega_0}{2} t$, где t — время, в течение которого маховое колесо останавливалось, отсюда

$$M = \frac{I\omega_0}{t}.$$

Угловая скорость $\omega_0 = 2\pi n_0$, где $n_0 = 180 \text{ об/мин} = 3 \text{ об/сек}$, откуда

$$M = \frac{200 \cdot 2\pi \cdot 3}{9,8 \cdot 120} \text{ кгм} = 3,2 \text{ кгм}.$$

Пример 2. Какую часть от общей кинетической энергии составляет энергия вращения для катящихся: а) обруча, б) сплошного цилиндра, в) шара.

Решение. При качении без скольжения скорость на ободе тела равна его поступательной скорости v . Отсюда для обруча, для которого $I = mR^2$ и $v = \omega R$, получим, что кинетическая энергия его вращения при качении $E_{вр}$ равна

$$E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия E_k складывается из энергии вращения $E_{вр}$ и кинетической энергии поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$, следовательно:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + E_{вр} = mv^2, \text{ откуда } E_{вр} = \frac{1}{2} E_k. \quad (8)$$

Для сплошного цилиндра:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \text{ откуда } E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{4};$$

полная энергия

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + E_{вр} = \frac{3}{4} mv^2, \text{ откуда } E_{вр} = \frac{1}{3} E_k. \quad (9)$$

Для шара:

$$I = \frac{2}{5} mR^2, \text{ откуда } E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{5} mv^2;$$

полная энергия

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{5} mv^2 = \frac{7}{10} mv^2, \text{ откуда } E_{вр} = \frac{2}{7} E_k. \quad (10)$$

Пример 3. С наклонной плоскости высотой h скатываются: а) обруч, б) сплошной цилиндр, в) шар. Найти поступательные скорости, которые они будут иметь, скатившись до конца плоскости. Сравнить эти скорости со скоростью, которую имело бы тело, соскальзывающее по плоскости без трения.

Решение. Полная кинетическая энергия скатывающегося тела:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) v^2.$$

Так как кинетическая энергия возникает за счет потенциальной энергии $E_0 = mgh$, то

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) v^2 = mgh, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}},$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}. \quad (11)$$

Так как скорость тела, соскальзывающего без трения с наклонной плоскости высотой h , равна

$$v = \sqrt{2gh},$$

то видим, что для тела, скатывающегося без трения, эта скорость в $\sqrt{1 + \frac{I}{mR^2}}$ раз меньше, где I — момент инерции тела, m — его масса и R — его радиус.

Для обруча, для которого $I = mR^2$, имеем

$$v = \sqrt{gh},$$

т. е. скорость, которую он приобретает, скатываясь по наклонной плоскости, в $\sqrt{2} = 1,41$ раза меньше, чем для тела, соскальзывающего без трения.

Для *сплошного цилиндра* $I = \frac{1}{2} mR^2$, откуда

$$v = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}},$$

т. е. в $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1,23$ раза меньше, чем для соскальзывающего тела.

Для *шара* $I = \frac{2}{5} mR^2$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}},$$

т. е. в $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1,18$ раза меньше, чем для соскальзывающего тела.

ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

§ 40. Движение идеальной жидкости. Линии и трубки тока. До сих пор мы рассматривали движение тел, сводящееся к их перемещению относительно других тел или, в случае твердого тела, также к вращению вокруг определенной оси. Однако возможно движение, которое сводится к перемещению различных частей одного и того же тела друг относительно друга; при этом, если тело может рассматриваться как непрерывное и бесконечно большое, его называют *сплошной средой*. Сплошная среда может представлять собою упругое твердое тело, в этом случае в нем могут возникать сдвиги одних частей относительно других и колебания (волны); сплошная среда может представлять собою несжимаемую жидкость, в которой могут возникать течения; наконец, сплошная среда может быть сжимаемой жидкостью или газом, в которых возможно возникновение как течений, так и колебаний. Часть механики, занимающаяся изучением движения жидкости, называется *гидродинамикой*.

Рассматривая движение жидкости, в большинстве случаев можно с достаточной степенью приближения считать жидкость абсолютно несжимаемой и полагать, что перемещение в ней одних слоев относительно других не связано с возникновением сил трения (отсутствует внутреннее трение, или вязкость). Такая *абсолютно несжимаемая и абсолютно невязкая жидкость* называется *идеальной*. „Идеальная жидкость“ служит лишь более или менее хорошим приближением к реальным жидкостям.

Будем определять движение частиц жидкости относительно некоторой определенной системы отсчета. Тогда каждой частице соответствует свой вектор скорости. Вся жидкость представляет собою, как принято говорить, *поле вектора скорости*. В поле вектора скорости мы можем провести линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы жидкости в этой точке (рис. 90). Такие линии называются *линиями тока*. Принято проводить линии тока так, чтобы густота их была больше там, где

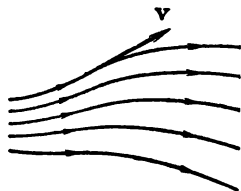


Рис. 90. Линии тока жидкости.

больше скорость течения жидкости, и меньше — там, где жидкость течет медленнее. В случае установившегося (стационарного) течения, скорость жидкости в каждой точке остается постоянной во времени. В этом случае линии тока также остаются неизменными и совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости. Линии тока в жидкости можно сделать видимыми, пустив в нее струю краски или подмешав какие-либо заметные взвешенные частицы. На рис. 91 *а, б, в* представлены линии тока, получаемые при обте-

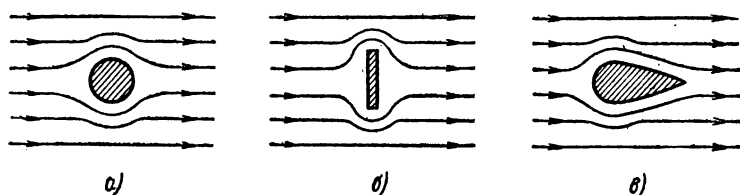


Рис. 91. Линии тока жидкости.

кании жидкостью круглого цилиндра, пластинки, поставленной перпендикулярно к потоку, и тела обтекаемого рыбовидного сечения.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока*. Все частицы, находящиеся в некотором сечении трубки тока, при движении продолжают двигаться внутри трубки тока и не выходят из нее. Также извне никакие частицы не проникают внутрь трубки тока. Возьмем трубку тока и выберем два каких-либо нормальных ее сечения ΔS_1 и ΔS_2 (рис. 92). За единицу времени через сечение ΔS_1 протечет объем жидкости, равный $\Delta S_1 v_1$, где v_1 — скорость течения жидкости в том месте, где произведено сечение ΔS_1 . Через сечение ΔS_2 за единицу времени протечет объем жидкости $\Delta S_2 v_2$, где v_2 — скорость течения жидкости в месте сечения ΔS_2 . Для несжимаемой жидкости через сечение ΔS_2 протечет такой же объем, какой протек через сечение ΔS_1 , откуда

$$\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2.$$

Так как это соотношение справедливо для любых двух сечений трубки тока, то мы можем вообще написать, что для трубки тока

$$\Delta S \cdot v = \text{const},$$

т. е. что произведение скорости течения несжимаемой невязкой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Это соотношение известно под названием *теоремы о неразрывности струи*.

При стационарном течении несжимаемой невязкой жидкости по какой-либо действительной трубе объем этой трубы совпадает с труб-

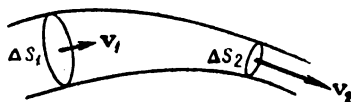


Рис. 92. Трубка тока жидкости.

кой тока. Отсюда, по теореме о неразрывности струи, в тех местах, где труба шире, жидкость течет медленнее, и в тех местах, где труба уже, жидкость течет быстрее.

Представим себе трубку тока, сужающуюся по направлению течения; поступая в более узкую часть трубки тока, жидкость начинает течь скорее, т. е. она приобретает ускорение. Следовательно, на жидкость, втекающую в более узкую часть трубки, действует со стороны жидкости, еще находящейся в широкой части трубки, некоторая сила. Такая сила, возникающая внутри объема жидкости, может возникнуть только за счет разности давлений в различных частях жидкости. Так как сила направлена в сторону узкой части трубки, то отсюда следует, что давление в широких местах трубки больше, чем в узких. В местах сужения трубки тока давление понижено.

Напомним, что под давлением p подразумевается величина, численно равная силе f , действующей нормально на некоторую площадку, деленной на величину этой площадки ΔS .

Выделим из текущей струи некоторую определенную массу Δm жидкости, протекающую сперва через сечение трубки тока ΔS_1 , а затем через сечение ΔS_2 (рис. 93). Скорость жидкости в месте сечения ΔS_1 обозначим через v_1 и давление — через p_1 , а скорость и давление в месте сечения ΔS_2 — соответственно через v_2 и p_2 . Предположим еще, что трубка тока расположена не горизонтально, но под некоторым наклоном; обозначим высоту, на которой расположено сечение ΔS_1 , через h_1 , а высоту, на которой лежит сечение ΔS_2 , — через h_2 . При протекании массы жидкости Δm совершается некоторая работа, так как на эту массу жидкости действует сила, обусловленная наличием в жидкости давления p .

Пусть E_1 — полная энергия массы жидкости Δm в том месте, где она протекает через сечение ΔS_1 , а E_2 — полная энергия массы жидкости Δm в том месте, где она протекает через сечение ΔS_2 . По закону сохранения энергии изменение энергии $E_2 - E_1$ равняется работе внешних сил, перемещающих массу Δm от сечения ΔS_1 к сечению ΔS_2 :

$$E_2 - E_1 = A. \quad (1)$$

Энергии E_1 и E_2 складываются из кинетических и потенциальных энергий массы жидкости Δm :

$$E_1 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot gh_1; \quad E_2 = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot gh_2.$$

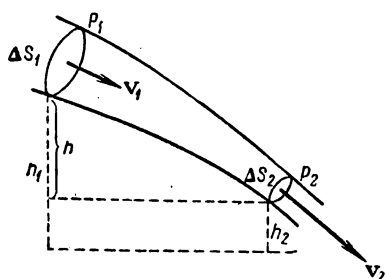


Рис. 93. Трубка тока жидкости.

Нетрудно убедиться в том, что работа A совпадает с работой, совершаемой при перемещении всего участка жидкости, заключенного между сечениями ΔS_1 и ΔS_2 , в течение такого времени Δt , за которое через эти сечения будет перенесена масса жидкости Δm . Для перенесения массы Δm в месте расположения первого сечения жидкость должна сдвинуться на отрезок $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$, а в месте расположения второго сечения — на отрезок $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$. Силы, действующие на оба конца выделенного участка жидкости, соответственно равны $f_1 = p_1 \Delta S_1$ и $f_2 = -p_2 \Delta S_2$. Первая сила положительна, так как она направлена в сторону течения жидкости; вторая отрицательна, так как она представляет собой силу, действующую на рассматриваемый участок со стороны жидкости, находящейся правее сечения, и, следовательно, направленную в сторону, противоположную течению жидкости. Окончательно находим

$$A = f_1 \Delta l_1 + f_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t.$$

Подставляя найденные значения E_1 , E_2 и A в (1), получим

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot gh_2 - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} - \Delta m \cdot gh_1 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot gh_1 + p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot gh_2 + p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t. \quad (2)$$

По закону неразрывности струи объем, занимаемый массой жидкости Δm , остается постоянным:

$$\Delta V = \Delta S_1 v_1 \Delta t = \Delta S_2 v_2 \Delta t.$$

Деля правую и левую части равенства (2) на этот объем ΔV и замечая, что $\Delta m / \Delta V$ есть плотность жидкости ρ , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2. \quad (3)$$

Это уравнение было впервые выведено выдающимся физиком и математиком, петербургским академиком Даниилом Бернулли (1700—1782) во время его работы в России. Оно называется *уравнением Бернулли*.

Для трубки тока, расположенной горизонтально ($h_1 = h_2$), уравнение Бернулли дает:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (3a)$$

Из формулы (3a) и теоремы о неразрывности струи видно, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужений, давление же

больше в широких местах. Последнее можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд манометрических трубок a , b , c (рис. 94). Высота уровня жидкости в этих трубках измерит давление p в трубе. В соответствии с законом Бернулли, опыт показывает, что в манометрической трубке b , прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках, прикрепленных к широким частям трубы.

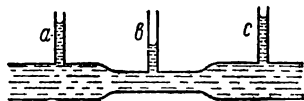


Рис. 94. Зависимость давления от ширины трубки.

Если в поток жидкости поместить неподвижную манометрическую трубку, загнутую нижним концом против потока („трубка Пито“, рис. 95), то линии тока изменятся вблизи такой трубки. Скорость жидкости перед отверстием будет равна нулю. Применяя к этому случаю формулу (3а) и полагая $v_2 = 0$, получим

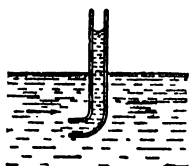


Рис. 95. „Трубка Пито“.

Манометрическая трубка с отверстием, обращенным навстречу потоку, измерит давление p_2 , которое, как видно, больше давления p_1 на величину $\frac{\rho v_1^2}{2}$.

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Зная p_1 , по измерению p_2 можно найти скорость потока v_1 . Величину $\frac{\rho v_1^2}{2}$ иногда называют „динамическим давлением“.

В узких частях трубки при больших скоростях течения давление p может стать отрицательным. В этом случае жидкость, протекающая по узким частям трубки, находится в состоянии всестороннего растяжения. Если давление в широкой части трубки атмосферное, то в узкой части оно меньше атмосферного. Струя будет тогда оказывать засасывающее действие. На этом засасывающем действии суженной струи основана работа целого ряда приборов, например, пульверизатора и водоструйного насоса. Схема водоструйного насоса представлена на рис. 96. Вытекающая с большой скоростью вода из суженного конца трубки A засасывает пузырьки воздуха и увлекает их с собою.

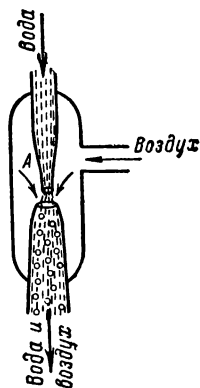


Рис. 96. Водоструйный насос.

При помощи уравнения Бернулли можно найти скорость истечения жидкости из отверстия. Если сосуд широкий, а отверстие мало (рис. 97), то скорости жидкости в сосуде малы и весь поток можно

рассматривать как одну трубку тока. Давление как в верхнем сечении (у поверхности AB), так и в нижнем сечении (у отверстия a) равно атмосферному p_0 . Поэтому уравнение Бернулли (3) принимает вид:

$$\frac{v_1^2}{2} + g(h_1 - h_2) = \frac{v_2^2}{2}. \quad (36)$$

Если мы рассмотрим случай вытекания струи при скорости $v_1 = 0$ и положим $h_1 - h_2 = h$ (рис. 97), то получим

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

т. е. скорость, приобретаемая струей при стекании с высоты h , равна скорости, приобретаемой телом, свободно падающим с той же высоты.

§ 41. Применение закона сохранения количества движения к текущей жидкости. К любому объему текущей жидкости, как и ко всякому другому движущемуся телу, применим закон сохранения количества движения (§ 20). Если количество движения объема жидкости изменяется на величину $\Delta K = m\Delta v$, то одновременно у

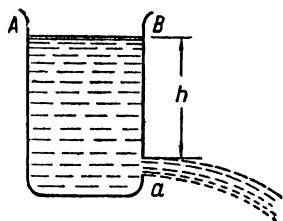


Рис. 97. Вытекание струи из бокового отверстия.

другого объема жидкости или у твердого тела, с которым жидкость соприкасается, должно произойти изменение количества движения на величину $\Delta K' = -\Delta K$. К движению жидкости применим также и закон сохранения момента количества движения (§ 37).

Применение этих законов позволяет решать ряд вопросов, например вопрос о реакции текущей жидкости на стенки сосуда.

Если струя жидкости вытекает из отверстия a в сосуде (рис. 97), то скорость ее возрастает и она приобретает некоторое количество движения. Если внешние силы отсутствуют, то общее количество движения системы сосуд—жидкость должно остаться неизменным. Поэтому сосуду будет передано количество движения, численно равное количеству движения, приобретенному струей. Сосуд должен прийти в движение в направлении, обратном движению жидкости в струе. Действительно, если сосуд поставить на тележку, чтобы он мог свободно перемещаться, то при вытекании струи сосуд с тележкой начнет двигаться в направлении, противоположном направлению вытекания струи.

Реакция вытекающей струи используется в качестве движущей силы в реактивных снарядах и реактивных двигателях.

На законе сохранения количества движения основано также действие гребных винтов. Винт парохода вызывает движение воды назад, причем струи отброшенной винтом воды приобретают некоторое количество движения. По закону сохранения количества движе-

ния равное количество движения приобретает пароход. На том же принципе действует пропеллер самолета, отбрасывающий назад струю воздуха; воздух при этом с механической точки зрения может рассматриваться как жидкость (сжижаемая).

Количество движения есть величина векторная, поэтому изменение количества движения некоторого объема жидкости имеет место не только когда скорость жидкости меняется по численному значению, но и когда она меняется по направлению.

При течении жидкости по изогнутой трубе (рис. 98) с постоянной по численному значению скоростью v , количество движения любого объема жидкости непрерывно меняется за счет загибания трубок тока жидкости. За время Δt через некоторое сечение S_1 трубы переносится масса жидкости $m = \rho S_1 v_1 \Delta t$, где ρ — плотность жидкости, а v_1 — численное значение ее скорости.

Количество движения этой массы жидкости равно

$$K_1 = \rho S_1 v_1 \cdot v_1 \Delta t;$$

здесь v_1 — вектор скорости жидкости, протекающей через сечение S_1 . У второго сечения трубы S_2 количество движения той же массы жидкости равно

$$K_2 = \rho S_2 v_2 \cdot v_2 \Delta t.$$

Пусть сечение трубы постоянно: $S_1 = S_2 = S$, тогда $v_1 = v_2 = v$ и для изменения количества движения получим

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \rho S v (v_2 - v_1) \Delta t. \quad (1)$$

Это изменение количества движения должно равняться импульсу сил, действующих на жидкость со стороны стенок трубы. Обозначая суммарную силу, действующую на жидкость, через F , имеем по (1):

$$F \cdot \Delta t = \Delta K = \rho S v (v_2 - v_1) \Delta t,$$

откуда

$$F = \rho S v (v_2 - v_1). \quad (2)$$

По третьему закону Ньютона сила F' , численно равная F , но направленная в противоположную сторону, будет действовать со стороны текущей жидкости на стенки трубы.

Таким образом, жидкость, текущая по изогнутой трубе, действует на трубу с силой реакции F' (рис. 98), направленной в сторону, противоположную направлению изгиба трубы.

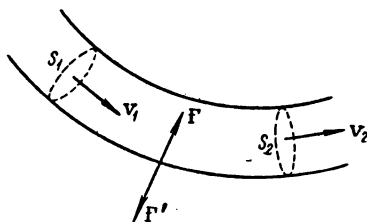


Рис. 98. Жидкость, текущая по изогнутой трубе, действует на трубу с силой реакции F' .

Реакция текущей жидкости на стенки изогнутой трубы используется в водяных и паровых турбинах. Струя жидкости или пара, протекая по искривленным каналам колеса турбины, создает силы реакции, момент которых и вызывает вращение колеса турбины.

В других конструкциях поток жидкости или пара вытекает из неподвижной трубы и попадает на лопатки колеса турбины. Лопатки отклоняют поток жидкости или пара, в результате чего поток изменяет свое количество движения. Сила реакции, действующая при этом на лопатки, вызывает вращение колеса турбины. Момент сил будет наибольшим, когда поток жидкости или пара сильнее всего меняет свое количество движения. Поэтому лопаткам колеса турбины придают такую форму, чтобы поток, протекая около лопаток (без удара о них), по возможности сильно терял свою скорость.

Реакция вытекающей струи используется в качестве движущей силы при реактивном движении, например, в ракетах или ракетных снарядах. В камере ракеты происходит сгорание взрывчатой смеси. Образующиеся при этом газы вытекают через специальное сопло a в задней части снаряда (рис. 99). Благодаря большой скорости вытекания, количество движения, приобретаемое газами, велико. Равное количество движения, направленное в противоположную сторону, приобретает ракета, что и вызывает ее движение вперед.

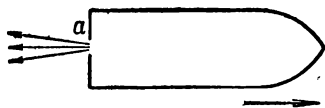


Рис. 99. Реактивный снаряд.

Для сообщения скорости ракете не требуется взаимодействия с другими телами или окружающей средой. Поэтому ракета может двигаться и в безвоздушном пространстве.

Пионером применения реактивного движения был выдающийся советский изобретатель К. Э. Циолковский (1857—1935), давший не только основы расчета реактивного движения, но и конструкции ракет для исследования высоких слоев атмосферы и космических пространств.

Современные искусственные спутники Земли и космические ракеты выводятся на орбиту с помощью многоступенчатых ракет, так как в случае одноступенчатой ракеты была бы слишком велика масса, которой надо сообщить космическую скорость. Принцип многоступенчатой ракеты был впервые выдвинут К. Э. Циолковским. Ракета использует химическое топливо, причем каждая ступень ракеты имеет свои баки для горючего и окислителя. Рассмотрим схему движения трехступенчатой ракеты. Сперва происходит сгорание топлива в двигателе первой ступени, при этом приводится в движение вся ракета, как целое. Когда топливо первой ступени оказывается использованным, она отделяется и дальнейший полет ракеты продолжается за счет работы двигателя второй ступени. По окончании работы двигателя второй ступени она отделяется в свою очередь и полет продолжает одна третья ступень, масса которой значительно меньше,

чем масса всей ракеты. Вследствие этого ускорение последней ступени, при той же реактивной силе, значительно больше и она может достичь большей скорости.

Наряду с указанным ракетным принципом в настоящее время используется другой принцип реактивного движения, применяемый в так называемых воздушно-реактивных двигателях. Схема пульсирующего воздушно-реактивного двигателя представлена на рис. 100.

В головной части двигателя расположен диффузор A , служащий для засасывания воздуха. Поступающий через диффузор воздух проходит через систему клапанов D и попадает в камеру сгорания B . Топливо впрыскивается в камеру сгорания через форсунки a и b ;

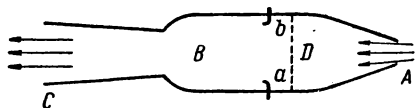


Рис. 100. Воздушно-реактивный двигатель.

клапаны при начале сгорания закрываются. Сгорая, топливо нагревает воздух, и смесь этого воздуха и газов, образовавшихся при сгорании топлива, вырывается через сопло двигателя C с большой скоростью. Общее количество движения струй, поступающих в двигатель и выходящих из него, возрастает. По закону сохранения количества движения сам двигатель приобретает количество движения, направленное вперед и равное увеличению количества движения струй.

В современных авиационных реактивных двигателях воздух, поддерживающий сгорание топлива, нагнетается специальными насосами. Насос приводится в движение турбиной, действующей за счет струи газа, вытекающего из камеры сгорания. Реактивное действие струи создает полезную тягу двигателя. Такой двигатель носит название турбореактивного. Авиационный турбореактивный двигатель отличается от простого реактивного двигателя, употребляемого на ракете, тем, что в нем для сгорания топлива используется кислород атмосферного воздуха, а не окислитель, который наряду с горючим несет в своих баках ракета. Благодаря этому общая масса горючего для турбореактивного двигателя значительно меньше, чем для реактивного. Это преимущество турбореактивного двигателя делает его более пригодным для самолетов, чем простой реактивный двигатель. Однако, турбореактивный двигатель не может работать на очень больших высотах, где плотность атмосферы слишком мала. Он не пригоден для полетов, выходящих за пределы земной атмосферы.

Большое практическое значение для расчета движения ракет имеют работы И. В. Мещерского (1859—1935), впервые разработавшего теорию движения тел, масса которых меняется со временем в результате присоединения или отделения от тела масс. И. В. Мещерский показал, что для тела переменной массы m , движущегося поступательно, имеет место следующее уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F + \frac{dm_1}{dt} \cdot v_1 - \frac{dm_2}{dt} \cdot v_2, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — скорость тела, \mathbf{F} — главный вектор внешних сил, m_1 — масса, присоединяющаяся к телу, m_2 — масса, отделяющаяся от тела, \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости этих масс. В случае если \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 равны нулю, это уравнение переходит в следующее:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

которое эквивалентно системе уравнений (8а) § 20.

При изучении реактивного движения (когда имеются только отделяющиеся массы) удобно уравнение (3) преобразовать к виду:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \frac{dm_2}{dt} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_2),$$

где \mathbf{w} — ускорение тела.

Это последнее соотношение показывает, что тело переменной массы удовлетворяет обычному уравнению движения, если к главному вектору внешних сил прибавить член $\frac{dm_2}{dt} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)$, равный произведению относительной скорости тела и выбрасываемой массы $\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$ на производную от выбрасываемой массы по времени.

§ 42. Движение вязкой жидкости. Во всех реальных жидкостях при перемещении одних слоев относительно других возникают более или менее значительные силы трения. Со стороны слоя, движущегося более быстро, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Наоборот, со стороны слоя, движущегося медленнее, на более быстрый слой действует задерживающая сила. Эти силы, носящие название *сил внутреннего трения*, направлены по касательной к поверхности слоев. Величина силы внутреннего трения f тем больше, чем больше площадка ΔS поверхности слоя, которую мы рассматриваем, и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости v при переходе от слоя к слою. Пусть два слоя (рис. 101), отстоящих друг от друга на расстоянии Δz , текут соответственно со скоростями v_1 и v_2 . Положим $v_1 - v_2 = \Delta v$. Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями Δz , перпендикулярно к скорости течения слоев. Величина $\Delta v / \Delta z$, которая показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою, носит название *градиента скорости*. Сила внутреннего трения f пропорциональна градиенту скорости, так что

$$f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \Delta S. \quad (1)$$

Величина η , зависящая от природы жидкости, называется *коэффициентом внутреннего трения* или *коэффициентом вязкости жидкости*. Чем больше коэффициент вязкости, тем сильнее жид-

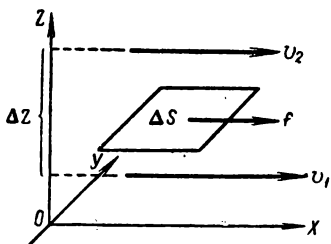


Рис. 101. Возникновение сил внутреннего трения.

кость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают.

Размерность коэффициента вязкости, как легко видеть, равна $L^{-1}MT^{-1}$. Таким образом, в CGS-системе вязкость измеряется в $см^{-1} г сек^{-1}$. Эта единица вязкости называется *пуазом* в честь французского ученого Пуазейля.

Вязкость жидкости весьма сильно зависит от температуры: она уменьшается с повышением температуры. Так, вязкость воды при $0^{\circ}C$ равна $\eta_0 = 0,01775 \text{ см}^{-1} г сек^{-1}$, а при $90^{\circ}C$ равна $\eta_{90} = 0,00320 \text{ см}^{-1} г сек^{-1}$. Особенно сильно зависит от температуры вязкость масел; например, вязкость касторового масла при повышении температуры от 18° до $40^{\circ}C$ падает почти в четыре раза. Ниже приведены значения коэффициентов вязкости для некоторых жидкостей:

| Жидкость | Коэффициент вязкости η в пуазах | | |
|--------------------|--------------------------------------|----------------------|----------------------|
| | $T = 0^{\circ}C$ | $T = 15^{\circ}C$ | $T = 99^{\circ}C$ |
| Вода | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | $1,1 \cdot 10^{-2}$ | $0,29 \cdot 10^{-2}$ |
| Ртуть | $1,7 \cdot 10^{-2}$ | $1,6 \cdot 10^{-2}$ | $1,2 \cdot 10^{-2}$ |
| Эфир | $0,29 \cdot 10^{-2}$ | $0,25 \cdot 10^{-2}$ | — |
| Глицерин | 46 | 15 | — |

Течение газов может также рассматриваться как течение жидкости, однако, во-первых, коэффициент вязкости у газов гораздо меньше и, во-вторых, нужно учитывать сжимаемость газов. С увеличением температуры вязкость газов не падает, как у жидкостей, а несколько возрастает, как это видно из следующей таблицы:

| Газ | Коэффициент вязкости η в пуазах | | |
|-----------------------|--------------------------------------|---------------------|---------------------|
| | $T = 0^{\circ}C$ | $T = 15^{\circ}C$ | $T = 99^{\circ}C$ |
| Водород | $86 \cdot 10^{-9}$ | $89 \cdot 10^{-9}$ | $106 \cdot 10^{-9}$ |
| Водяной пар | $90 \cdot 10^{-9}$ | $97 \cdot 10^{-9}$ | $131 \cdot 10^{-9}$ |
| Воздух | $171 \cdot 10^{-9}$ | $181 \cdot 10^{-9}$ | $220 \cdot 10^{-9}$ |
| Аргон | $210 \cdot 10^{-9}$ | $221 \cdot 10^{-9}$ | — |

П. Л. Капицей было открыто, что жидкий гелий при температуре около $-271^{\circ}C$ переходит в особое состояние „сверхтекучести“, при котором вязкость его практически равна нулю. Наблюдения над движением гелия, находящегося в состоянии сверхтекучести, через тонкие капилляры и щели показали, что, во всяком случае, его вязкость меньше 10^{-11} пуаза. Жидкий гелий, перешедший в состояние сверхтекучести, носит название „гелия II“. Переход из обычного ге-

лия („гелия I⁴) в гелий II представляет собой так называемый фазовый переход второго рода, когда некоторые свойства (например, вязкость) меняются скачкообразно, а другие (например, упругость пара) меняются постепенно. В состояние сверхтекучести переходит лишь основной изотоп гелия He⁴.

Сверхтекучесть ведет к появлению других специфических явлений: при наличии температурных градиентов в жидком гелии возникают весьма интенсивные потоки. При температуре в 2,19° К гелий представляет собой смесь сверхтекучей и нормальной модификаций, которые могут течь навстречу друг другу.

С явлением сверхтекучести связано существование так называемого *термомеханического эффекта*, заключающегося в том, что возникающее вдоль узкой щели или капилляра падение температуры вызывает появление дополнительной разности давлений. Так, если погрузить в гелий II капилляр и нагревать его верхний конец, то из капилляра начнет бить фонтан. Поэтому эффект, вызванный термомеханическим воздействием, называется также *эффектом фонтанирования*.

Гидродинамическая теория сверхтекучести наиболее подробно развита советским физиком Л. Д. Ландау. В этой теории каждому элементу объема жидкости сопоставляются два вектора скорости: вектор сверхтекучего и вектор нормального движения. Таким образом, предполагается, что гелий при очень низких температурах представляет собой смесь двух жидкостей, могущих двигаться независимо друг от друга. Одна из этих жидкостей (сверхтекучая) не обладает трением и может проникать в тончайшие зазоры и протекать через самые узкие капилляры. Так, П. Л. Капица наблюдал весьма быстрое протекание сверхтекучего гелия между двумя плоско-параллельными пластинками, зазор между которыми имел толщину в $5 \cdot 10^{-8}$ см. Другая составляющая гелия представляет собой нормальную жидкость, которая обладает заметной вязкостью и не может течь сквозь узкие капилляры и щели.

Теорией Ландау было предсказано еще одно новое явление — распространение тепловых волн. Это явление было экспериментально наблюждено и изучено В. П. Пешковым и получило название второго звука в гелии II.

Рассмотренное нами течение жидкости носит название *ламинарного* (по-латыни — слоистого), так как слои жидкости как бы скользят друг относительно друга. При движении жидкости по трубе с увеличением скорости течение теряет ламинарный характер и становится беспорядочным. Возникают составляющие скорости, перпендикулярные к оси трубы. В каждой точке жидкости происходят беспорядочные отклонения вектора скорости от его среднего значения. Такое движение носит название *турбулентного*. Переход от ламинарного к турбулентному движению в трубах или каналах ведет к резкому возрастанию сопротивления.

При обтекании вязкой жидкостью тел с увеличением скорости течение меняет свой характер и становится *завихренным*. Поток жидкости, отрывающийся от поверхности обтекаемого тела, распадается на отдельные *вихри*. Вихри, образующиеся позади тела (рис. 102), уносятся потоком и постепенно затухают.

Уравнение Бернулли, строго говоря, неприменимо к вязким жидкостям, так как часть энергии внутри трубки тока превращается, в результате работы сил трения, в тепло. Однако практически уравнение Бернулли неприменимо лишь к весьма вязким жидкостям. Для такой жидкости, как вода, уравнение Бернулли практически выполняется достаточно точно.

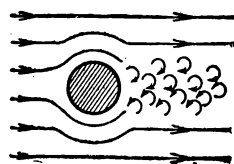


Рис. 102. Образование вихрей.

Роль трения характеризуется безразмерной величиной, называемой *числом Рейнольдса* R :

$$R = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где l — линейные размеры, характерные для рассматриваемого течения жидкости. В случае течения жидкости по трубе l — радиус трубы, v — средняя скорость. Отношение η/ρ называется *кинематическим коэффициентом вязкости*.

Для того чтобы пояснить роль числа Рейнольдса, рассмотрим элемент объема жидкости с длиной ребра l . Кинетическая энергия этого объема равна

$$E_k = \frac{\rho v^2}{2} l^3.$$

Сила трения, действующая на элемент объема жидкости, пропорциональна его поверхности l^2 , коэффициенту вязкости η и градиенту скорости. Полагая, что скорость падает до нуля на расстоянии, равном по порядку величины l (в случае течения по трубе — в радиальном направлении), получим, что градиент скорости равен v/l . Таким образом, сила трения

$$f = \eta l^2 \frac{v}{l} = \eta v l.$$

Работа этой силы на пути l равна:

$$A = fl = \eta v l^2.$$

Роль трения при течении жидкости мала, если работа A мала по сравнению с кинетической энергией объема жидкости E_k , т. е. если выполняется неравенство:

$$\eta v l^2 \ll \frac{\rho v^2}{2} l^3$$

или

$$\frac{\rho v l}{\eta} \gg 1.$$

Но $\frac{\rho v l}{\eta} = R$ есть число Рейнольдса. Таким образом, роль сил трения при течении жидкости мала при больших числах Рейнольдса.

При течении жидкости по трубе переход от ламинарного к турбулентному движению происходит при значении числа Рейнольдса, называемом критическим. Для течения воды по трубе $R_{кр} \approx 1200$.

Рассмотрим явления, возникающие при движении тела в жидкости. Вместо того чтобы считать тело движущимся, а жидкость неподвижной, можно ставить обратную задачу: рассматривать обтекание неподвижного тела равномерным потоком жидкости. Первоначально

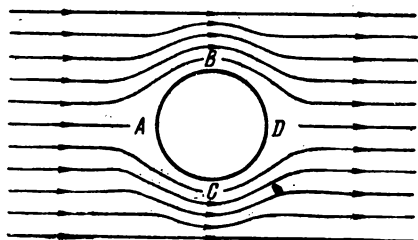


Рис. 103. Обтекание неподвижного тела равномерным потоком невязкой жидкости.

будем считать жидкость идеальной, т. е. лишенной вязкости. Пусть тело представляет собой бесконечный круговой цилиндр, ось которого перпендикулярна к невозмущенным линиям тока (рис. 103). Линии тока обходят цилиндр симметрично с двух сторон. В точках A и D скорость жидкости равна нулю. У точек B и C линии тока сгущаются и здесь скорость жидкости больше, чем в невозмущенном потоке. Поэтому давление в точках A и D будет больше

статического давления в жидкости p , а в точках B и C — меньше. Если v есть скорость в невозмущенном потоке, то по уравнению Бернулли [формула (3а), § 40] давление в точке A равно

$$p_A = p + \frac{\rho v^2}{2},$$

так как скорость жидкости у поверхности тела в точке A мы считаем равной нулю ($v_A = 0$). Таким образом, давление в точке A больше статического давления p . Такое же увеличенное давление будет и в точке D. На первый взгляд может показаться, что в точке D давление должно быть меньше p , но это неверно. В самом деле, вблизи точки A в потоке скорость частиц жидкости уменьшается, следовательно, на частицы жидкости действует сила, направленная влево, а на тело, по третьему закону Ньютона, в точке A действует сила, направленная вправо. Вблизи точки D скорость частиц жидкости возрастает, следовательно, на них действует сила, направленная вправо, а на тело в точке D действует сила, направленная влево.

Рассмотрим теперь давление на тело в точке B. Для его определения надо знать скорость жидкости вблизи поверхности тела в этом месте. Считая, что на расстоянии, равном примерно радиусу цилиндра, поток остается невозмущенным, получим, что скорость $v_B = 2v$ и тогда по уравнению Бернулли:

$$p_B + \frac{4\rho v^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2}, \text{ откуда находим } p_B = p - \frac{3\rho v^2}{2}.$$

Давление в точке B оказывается меньше статического давления p . Такое же давление будет в точке C . Как видно, уменьшение давления в точках B и C больше, чем увеличение давления в точках A и D . Благодаря симметрии сумма всех сил, действующих на тело со стороны обтекающей жидкости, будет равна нулю: $\sum f_i = 0$. Отсюда следует, что *при движении тела в невязкой жидкости оно вовсе не должно испытывать сопротивления*.

При движении тела в вязкой среде возникает сопротивление. Происхождение этого сопротивления двояко. При малых скоростях и удобообтекаемой форме тела, когда не возникает вихрей, сила сопротивления непосредственно обусловлена вязкостью жидкости. Слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердому телу, прилипает к его поверхности и увлекается им полностью. Следующий слой увлекается за телом с меньшей скоростью. Таким образом, между слоями возникают силы трения.

В этом случае *сила сопротивления по закону, установленному Стоксом, прямо пропорциональна первой степени скорости, коэффициенту вязкости и линейным размерам тела*.

Для шаров, движущихся в вязкой жидкости, по закону Стокса сила сопротивления:

$$f = 6\pi\eta r v, \quad (2)$$

где η — коэффициент вязкости жидкости, r — радиус шара, v — скорость его движения.

По формуле Стокса (2) можно определить скорость установившегося падения шара в вязкой жидкости. Тяжелый шар в вязкой жидкости лишь в самый первый момент начнет падать ускоренно; по мере же возрастания скорости его падения возрастает и сила трения f , которая начинает уравнивать силу тяжести P , действующую на шар. Когда такое уравнивание сил достигнуто, шар падает равномерно с постоянной скоростью v , определяемой по формуле (2) условием:

$$P = 6\pi\eta r v. \quad (3)$$

Сила P , действующая на шар, находящийся в жидкости, по закону Архимеда равна $P_0 - P_1$, где P_0 — действительный вес шара, а P_1 — вес жидкости в объеме шара, отсюда $P = P_0 - P_1 = (\rho - \rho')g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, где ρ — плотность шара, а ρ' — плотность жидкости. Подставляя это значение P в (3), найдем

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что скорость падения шара в вязкой жидкости пропорциональна квадрату его радиуса r . Чем меньше шар, тем медленнее он падает в данной жидкости. Формула Стокса при-

менима не только к падению шаров в жидкости, но и к падению маленьких шариков в газовой среде, которую в этом случае можно рассматривать как вязкую жидкость. Так, скорость падения в воздухе мелких капелек тумана весьма хорошо определяется формулой (4).

При характеристике обтекания шара вязкой жидкостью с помощью числа Рейнольдса под v подразумевается относительная скорость потока на бесконечном удалении от шара, а под длиной l — диаметр шара. Закон Стокса выполняется при малых значениях числа Рейнольдса.

Для динамического подобия обтекания жидкостью разных твердых тел необходимо равенство чисел Рейнольдса. При моделировании движения кораблей, самолетов и т. д., при уменьшенных размерах модели ($l_2 < l_1$), если коэффициент вязкости жидкости в модели и в натуре одинаков, скорость потока в модели должна быть больше: $v_2 > v_1$. Для того чтобы не переходить к слишком большим скоростям на моделях, следует брать жидкость с меньшим значением кинематического коэффициента вязкости.

Второй механизм сил сопротивления в вязкой жидкости, о котором было упомянуто, связан с образованием вихрей. Часть работы, совершаемой при движении тела в жидкости, идет на образование вихрей. Энергия вихрей, благодаря наличию внутреннего трения в жидкости, в конечном счете переходит в тепло. При малых скоростях вихри не образуются, и сопротивление, испытываемое телом, относительно мало. При увеличении скорости начинают образовываться вихри, и тогда сила сопротивления резко возрастает. При постройке судов и самолетов весьма существенно придать им такую обтекаемую форму, при которой вихри, по возможности, не образуются. Сила сопротивления, обусловленная образованием вихрей, при не очень больших скоростях пропорциональна квадрату скорости. При скоростях, близких к скорости звука в данной среде, она про-

порциональна кубу скорости, а при сверхзвуковых скоростях пропорциональна квадрату скорости.

В случае обтекания невязкой жидкостью несимметричного тела, сумма сил, приложенных к телу со стороны жидкости, не будет равна нулю. Рассмотрим для простоты тело в виде бесконечно длинного полуцилиндра (рис. 104). В этом случае линии тока параллельны плоской поверхности C , и давление на нее равно p . Давление в точке B , по сказанному выше, меньше: $p_B < p$. Поэтому возникает результи-

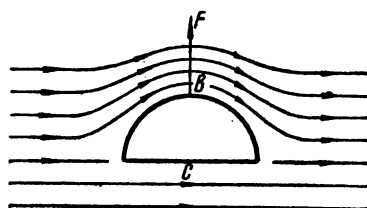


Рис. 104. Обтекание невязкой жидкостью несимметричного тела. Сумма сил, приложенных к телу со стороны жидкости, не равна нулю.

рующая сила $F = \sum f_i \neq 0$; эта сила перпендикулярна к линиям тока в невозмущенном потоке. Она не увлекает тело в направлении потока (для идеальной жидкости), а лишь стремится его сдвинуть в направлении, перпендикулярном к потоку.

При обтекании несимметричного тела вязкой жидкостью результирующая сила F , действующая на тело со стороны потока, не перпендикулярна к линиям тока. В этом случае ее можно разложить на две составляющие: $F_{\text{сопр}}$, направленную вдоль потока, и $F_{\text{п}}$, направленную перпендикулярно к потоку.

На наличии таких сил основано действие крыла самолета. Сила $F_{\text{сопр}}$ определяет лобовое сопротивление, а сила $F_{\text{п}}$ — его подъемную силу (рис. 105).

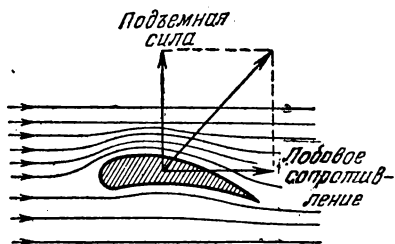


Рис. 105. Возникновение подъемной силы крыла самолета.

Теорию подъемной силы крыла самолета дал впервые Н. Е. Жуковский (1847—1921), основатель теоретической, технической и экспериментальной аэродинамики, „отец русской авиации“, как его назвал В. И. Ленин.

Рассмотрим еще вопрос о ламинарном течении вязкой жидкости по трубе. В этом случае, благодаря силам внутреннего трения, скорость течения жидкости наибольшая в центре трубы (рис. 106). У стенок она равна нулю. Рассмотрим участок трубы радиуса R и длиной l . Пусть жидкость течет слева направо под влиянием разности давлений $p_1 - p_2$.

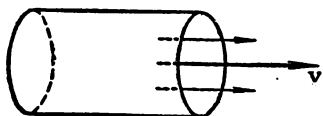


Рис. 106. Вязкая жидкость течет по оси трубы с наибольшей скоростью v .

Вырежем в жидкости мысленно цилиндрический слой (рис. 107) внутреннего радиуса r и толщиной dr . На этот слой с внутренней стороны действует сила внутреннего трения

$$f = \eta \frac{dv}{dr} S;$$

здесь S — боковая поверхность цилиндрического слоя, равная $2\pi r l$, откуда

$$f = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}. \quad (5)$$

С наружной стороны на слой действует сила $f_1 = f + df$, направленная в обратную сторону, чем сила f (сила f ускоряет слой, сила f_1 его задерживает).

Их сумма равна

$$-f_1 + f = -(f + df) + f = -df.$$

Выражая силу f по (5), имеем

$$-df = -2\pi l \eta d \left(r \frac{dv}{dr} \right).$$

Так как скорость жидкости в центре трубы наибольшая, то dv/dr отрицательно и сила $-df$ положительна. Эта сила при стационарном течении должна равняться силе, действующей на слой, благодаря разности давлений $p_1 - p_2$; так как эта последняя сила пропорциональна площади поперечного сечения слоя $S' = 2\pi r dr$, то

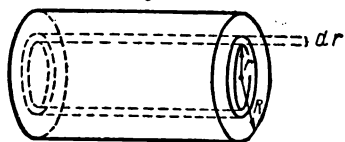


Рис. 107. В цилиндрическом слое радиуса r жидкость течет с одинаковыми скоростями.

$$-2\pi l \eta d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi r dr (p_1 - p_2), \quad \text{откуда} \quad d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{l \eta} r dr.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r^2 + C \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r + \frac{C}{r}.$$

Полагая $r=0$ и замечая, что на оси трубы, где скорость v имеет максимум, dv/dr также равно нулю, получим, что произвольная постоянная $C=0$. Отсюда получим дифференциальное уравнение, определяющее скорость течения жидкости v как функцию расстояния от оси трубы r :

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r dr.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int r dr = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} r^2 + C'.$$

Постоянную C' получим, положив $r=R$, тогда $v=0$, откуда

$$C' = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2,$$

после чего для v получаем

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2). \quad (6)$$

Эта формула дает скорость течения жидкости в зависимости от расстояния до оси трубы.

Теперь определим объем жидкости V , вытекающий из трубы за некоторое время t . Из цилиндрического слоя радиуса r и толщины dr (рис. 107) за время t вытечет жидкость объемом

$$dV = vt \cdot 2\pi r dr.$$

Подставляя сюда вместо v его значение по (6), получим

$$dV = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2l\eta} (R^2 r - r^3) dr.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до R , получим объем V жидкости, вытекающей через все поперечное сечение трубы:

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2l\eta} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr, \quad \text{откуда} \quad V = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2l\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right),$$

откуда

$$V = \frac{1}{\eta} \frac{\pi R^4}{8l} (p_1 - p_2) t. \quad (7)$$

Формула (7) носит название *формулы Пуазейля*; она указывает на весьма сильную зависимость количества протекающей жидкости от радиуса трубы (пропорционально R^4). Для турбулентного движения формула Пуазейля непригодна.

Пользуясь формулой Пуазейля можно по объему жидкости, протекающей через трубку заданных радиуса R и длины l , определить вязкость η . Приборы, служащие для определения вязкости, носят название *вискозиметров*.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ГЛАВА VII

ГАЗЫ

§ 43. Атомно-молекулярная теория строения вещества. Представление о строении вещества из обособленных частиц — атомов было высказано еще древними греками. Впервые широкое развитие атомная гипотеза получила в трудах М. В. Ломоносова. Ломоносов попытался построить всю физику на основе представления о том, что химически простое вещество состоит из большого числа вполне одинаковых обособленных частиц — атомов. В химически сложных веществах роль обособленных частиц играют молекулы. Опираясь на свой всеобщий закон сохранения материи и движения, Ломоносов впервые доказал справедливость представления о непрерывном тепловом движении атомов и молекул.

Со времен возникновения атомной теории в химии оказалось возможным установить на основании закона простых и кратных отношений относительные веса (или, вернее, массы) атомов, т. е. числа, которые показывают, во сколько раз масса данного атома больше или меньше массы какого-либо другого атома. В настоящее время имеются и физические способы (см. т. II) сравнивать массы (веса) отдельных атомов или молекул. *Относительные веса атомов* называют их *атомными весами*. *А. За единицу атомного веса принята 1/16 веса атома кислорода.* Таким образом, по определению, атомный вес кислорода равен 16,0000. Атомный вес самого легкого из атомов, водорода, равен 1,0078, что означает, что атом водорода имеет массу в $\frac{16,0000}{1,0078} = 15,8762$ раза меньшую массы атома кислорода. Также, например, атомный вес ртути, равный 200,61, указывает, что масса атома ртути в $\frac{200,61}{16,0000} = 12,538$ раза больше массы атома кислорода и в $\frac{200,61}{1,0078} = 199,06$ раза больше массы атома водорода.¹

¹ В настоящее время известно, что почти для всех элементов существует по несколько сортов атомов, отличающихся друг от друга массой (атомным весом). Атомы данного сорта называются *изотопами* данного элемента (см. т. II). Химические методы определения атомных весов дают средний атомный вес естественной смеси изотопов.

Относительный вес молекулы по отношению к той же единице, равной 1/16 веса атома кислорода, называется ее молекулярным весом μ .

Возьмем определенную массу, например m граммов водорода. Атомный вес водорода обозначим через A . В этих m граммах водорода содержится определенное число атомов водорода, которое мы обозначим через n . Возьмем другой элемент с атомным весом A' в таком количестве, чтобы оно также содержало n атомов. Масса n атомов этого элемента, очевидно, в $\frac{A'}{A}$ раз больше массы n атомов водорода. Следовательно, масса этого количества данного элемента равна $m' = m \frac{A'}{A}$. Отсюда, обратно, мы заключаем: если брать различные элементы в таких количествах, чтобы их массы относились как их атомные веса, то они будут содержать по одинаковому числу атомов.

Назовем граммом такое количество данного элемента, масса которого, выраженная в граммах, численно равна его атомному весу. Тогда на основании сказанного имеем: *граммом любого элемента содержит одно и то же число атомов.* Это число, обозначаемое через N , называется *числом Авогадро*.

Назовем граммолекулой такое количество данного вещества, масса которого, выраженная в граммах, численно равна его молекулярному весу. Так как молекулярные веса определяются по отношению к той же единице (1/16 веса атома кислорода), что и атомные веса, то граммолекула любого вещества содержит столько молекул, сколько атомов содержит грамматм. Отсюда: *граммолекула любого вещества содержит одно и то же число молекул, равное числу Авогадро.*

Грамммолекулу часто называют *молем*. Моль представляет собой единицу массы, имеющую особое значение для каждого данного вещества. Так, для молекулярного водорода моль представляет собой единицу массы, равную 2 г, а для молекулярного кислорода — равную 32 г.

В настоящее время существует большое количество способов, позволяющих определить число Авогадро; с некоторыми из них мы познакомимся ниже (§ 52), сейчас приведем численное значение числа Авогадро:

$$N = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Число Авогадро представляет собою число частиц в определенной массе вещества, а именно, в одном моле, поэтому оно имеет размерность $[N] = M^{-1}$ и измеряется в единицах, получающих обозначение $\frac{1}{\text{моль}}$ или моль^{-1} .

Знание числа Авогадро дает нам представление о масштабе микромира, т. е. мира атомов и молекул; оно позволяет нам

установить, насколько мелка та зернистая структура вещества, которую устанавливает атомно-молекулярная теория. Зная число Авогадро, мы можем подсчитать размеры молекул и их абсолютные массы. Возьмем 1 см³ воды; его масса 1 г, что составляет $\frac{1}{18}$ моля воды; следовательно, 1 см³ воды содержит $\frac{6,02}{18} \cdot 10^{23} = 3,34 \cdot 10^{22}$ молекул воды. Таким образом, в жидкой воде на долю одной молекулы приходится объем $\frac{1}{3,34 \cdot 10^{22}} \text{ см}^3 \cong 3 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$. Считая, что в жидкости молекулы расположены плотно друг к другу, находим, что линейные размеры молекулы воды представляют собою величину порядка $r = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23}} \text{ см} \cong 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Линейные размеры других атомов и молекул представляют собою также величины порядка 10^{-8} см . Чтобы более конкретно представить себе размеры атомов и молекул, приведем два следующих примера: 1) если все количество атомов, входящих в состав 1 см³ меди, расположить в одну линию, то образуется цепочка длиной почти в 14 миллиардов километров, что приблизительно в 90 раз превышает расстояние от Земли до Солнца; 2) электронный микроскоп позволяет наблюдать микро-кристаллы, линейные размеры которых составляют сотые микрона. Такой микро-кристалл содержит несколько сот тысяч атомов.

Несмотря на столь малые размеры атомов, современная физика имеет методы непосредственного доказательства прерывности (как говорят, *дискретности*) строения вещества и методы непосредственного наблюдения отдельных атомов; последнее возможно лишь в тех случаях, когда атомы несут достаточно большое количество энергии, т. е. движутся с очень большими скоростями.

Массу m одной молекулы (или одного атома) можно найти из соотношения:

$$m = \frac{\mu}{N}, \quad (1)$$

где μ — молекулярный вес (для элемента — атомный вес) и N — число Авогадро.

Из соотношения (1) для массы атома водорода получается $m_{\text{H}} = 1,675 \cdot 10^{-24}$ г. Отсюда же находим, что единица атомного веса, т. е. 1/16 массы атома кислорода, равна $1,662 \cdot 10^{-24}$ г. Таким образом, для абсолютной массы любого атома имеем:

$$m = 1,662 \cdot 10^{-24} \cdot A, \quad (2)$$

где A — атомный вес данного атома.

Заменяя в формуле (2) атомный вес A молекулярным весом μ , получим абсолютную массу данной молекулы.

Ряд наблюдений убеждает нас, что во всяком веществе *имеется непрерывное внутреннее движение. Это внутреннее движение пред-*

ставляет собою движение молекул, из которых состоит данное вещество. Это движение молекул беспорядочно, никогда не прекращается и зависит, как мы увидим дальше, лишь от температуры вещества.

В наличии такого движения нас убеждает, например, следующий опыт: если в двух сосудах *A* и *B* (рис. 108) имеются различные газы, например, в одном сосуде водород, а в другом азот, то через некоторое время после того, как кран *C* будет открыт, в обоих сосудах окажется совершенно равномерная смесь обоих газов. Газы сами собою полностью перемешаются. Такое перемешивание происходит и в том случае, когда водород находится в верхнем сосуде *A* и, следовательно, никакого стекания водорода, имеющего меньшую плотность, или вообще перемешивания обоих газов под влиянием силы тяжести быть не может.

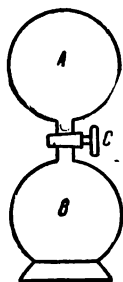


Рис. 108. При открытии крана *C* газы, находящиеся в сосудах *A* и *B*, начинают взаимно диффундировать.

Еще более непосредственно в существовании хаотического движения молекул убеждает явление, открытое Броуном в 1826 г. Броун заметил, что наблюдаемые в микроскоп весьма малые частицы, взвешенные в жидкости, находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения; чем меньше частица, тем интенсивнее она движется. Это движение, носящее название *броуновского движения*, никогда не прекращается, не зависит ни от каких внешних причин и является проявлением внутреннего движения вещества. Движущиеся молекулы жидкости при столкновении с каким-либо твердым телом передают ему некоторое количество движения. Если тело, находящееся в жидкости, велико, то число молекул, налетающих на него со всех сторон, также чрезвычайно велико, их удары в каждый данный момент компенсируются, и тело практически остается неподвижным. Но если тело достаточно мало, такая компенсация может оказаться неполной: случайно с одной стороны о тело ударит заметное большее число молекул, чем с другой, в результате чего тело придет в движение. Именно такого рода движение под влиянием беспорядочных ударов молекул и совершают броуновские частицы. Сами броуновские частицы в миллиарды раз больше по массе отдельных молекул, их скорости весьма малы по сравнению со скоростями молекул, но все же их движение таково, что оно может быть замечено в микроскоп.

На рис. 109 представлены положения отдельных броуновских частиц, отмеченные при наблюдении в микроскоп через определенные промежутки времени. Такое же броуновское движение совершают и частицы, взвешенные в газе.

Таким образом, вещество не только имеет зернистое строение — состоит из отдельных обособленных частиц, но оно состоит из частиц, находящихся непрерывно в состоянии движения. Отсюда

теория строения вещества представляет собою *молекулярно-кинетическую теорию*. Она впервые была развита для объяснения свойств вещества в различных агрегатных состояниях М. В. Ломоносовым. В дальнейшем молекулярно-кинетическая теория применялась преимущественно для объяснения свойств вещества в его простейшем агрегатном состоянии — газообразном. Однако раньше чем перейти к изложению основ молекулярно-кинетической теории, рассмотрим те эмпирические закономерности, которым подчиняются газы.

§ 44. Законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Определение температуры.

Газы обладают тем свойством, что они целиком заполняют весь сосуд, в котором заключены, и оказывают давление на ограничивающие сосуд стенки. Давление p представляет собою физическую величину, численно равную силе, действующей нормально на единицу площади. Таким образом, если сила, действующая нормально на площадь S , равна f_n , то

$$p = \frac{f_n}{S}. \quad (1)$$

В CGS-системе давление p измеряется в *барах* — единицах, равных давлению силы в 1 *дин* на перпендикулярную к силе площадку в 1 см^2 .

В международной системе единиц за единицу давления принимается давление, вызываемое силой в 1 *ньютон* на перпендикулярную к ней поверхность площадью в 1 м^2 . Эта единица обозначается н/м^2 ; очевидно, $1 \text{ н/м}^2 = 10 \text{ бар}$. Кроме того, для измерения давления употребляются еще следующие единицы: 1) *техническая атмосфера*, равная давлению силы в 1 кг на 1 см^2 ; 2) *физическая атмосфера* (сокращенно *ат*), равная давлению 1,033 кг/см^2 ; 3) *миллиметр ртутного столба* (сокращенно *мм Hg*), равный давлению, оказываемому весом ртутного столба высотой в 1 *мм*. Давление 760 *мм Hg* равно одной физической атмосфере. Для перевода этих единиц друг в друга можно пользоваться следующим соотношением:

$$1 \text{ физ. ат} = 1,033 \text{ техн. ат} = 1033 \text{ Г/см}^2 = 760 \text{ мм Hg} = \\ = 1033 \cdot 981 \text{ бар} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ бар}.$$

Некоторое количество газа характеризуется следующими четырьмя величинами: 1) его массой m , 2) занимаемым им объемом V , 3) да-

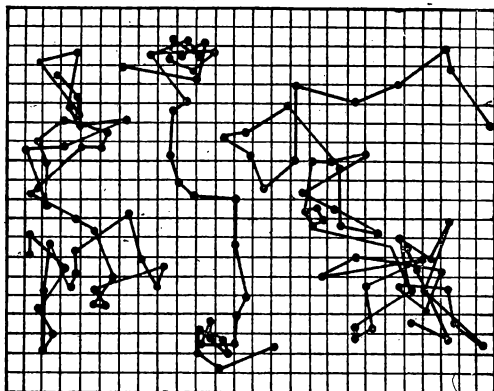


Рис. 109. Местонахождения трех броуновских частиц, отмеченные через каждые 30 сек.

влением p , 4) температурой t . Все эти величины зависят друг от друга; при изменении одной из них, вообще говоря, меняются все остальные. Формула, закономерно связывающая все эти величины, называется *уравнением состояния*.

Прежде чем дать выражение для общего уравнения состояния газа, приведем более простые эмпирические закономерности, относящиеся к случаю, когда две из указанных четырех величин поддерживаются постоянными.

Для данной массы газа при постоянной температуре (m и t постоянны) давление газа меняется обратно пропорционально его объему (закон Бойля—Мариотта):

$$pV = \text{const} \quad (\text{при данных } m \text{ и } t). \quad (2)$$

Графически зависимость p от V для данной массы газа m при постоянной температуре t выражается равнобокой гиперболой (рис. 110). Так как кривая, изображающая закон Бойля—Мариотта, относится к постоянной температуре, то она носит название *изотермы*.

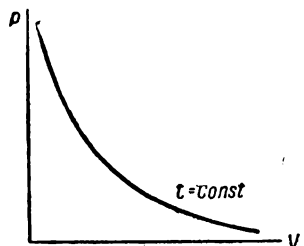


Рис. 110. Изотерма Бойля—Мариотта.

Закон Бойля—Мариотта является приближенным, как это уже отмечалось в § 2. Так, все газы при очень больших давлениях сжимаются меньше, чем это следует из закона Бойля—Мариотта. Однако большинство газов при температурах, близких к комнатным, и давлениях, не слишком отличающихся от атмосферного, подчиняются закону Бойля—Мариотта с достаточно большой точностью.

Следующие закономерности, о которых будет идти речь, связывают давление или объем газа с его температурой. Однако прежде надо установить, каким образом измеряется сама температура. Нагревание или охлаждение тел, т. е. изменение их температуры, влияет почти на все их физические свойства: меняются линейные размеры тел, изменяются их упругие свойства, их электропроводность и т. д. Любое из этих изменений может быть использовано для измерения температуры. Исторически, как известно, установился метод измерения температур по изменению объема ртути с помощью так называемых ртутных термометров. Однако обычно описываемый способ градуировки ртутного термометра, который сводится к делению шкалы на *равные части*, *наперед предполагает*, что объем ртути меняется с температурой t линейно. Если мы заполним термометр другой жидкостью и совместим для него две точки с двумя какими-либо точками ртутного термометра (например, точку „0“, соответствующую температуре таяния льда, и точку „100“, соответствующую температуре кипения воды), а затем также разделим шкалу на равные части, то показания такого термометра для средних температур

разойдутся (хотя и незначительно) с показаниями ртутного термометра. Таким образом, установленная шкала температур окажется зависящей от того тела („термометрического“ тела), по изменению объема которого мы измеряем температуру. Так как выбор самого тела (фактически ртути) случаен, то случайна и сама шкала температур. Не имея пока никакой теоретической основы для выбора термометрического тела, мы все же можем считать, что в качестве термометрического тела следует выбрать такое тело, которое в остальных своих свойствах подчиняется наиболее простым закономерностям. В качестве такого тела может быть выбран газ, наиболее хорошо подчиняющийся закону Бойля — Мариотта. По соглашению Международного комитета мер и весов в 1877 г. в качестве термометрического тела был выбран водород, и было решено измерять температуру с помощью водородного термометра, считая изменение температуры пропорциональным изменению давления водорода, объем которого поддерживается при его нагревании или охлаждении постоянным.

Таким образом, постулируется, что давление водорода меняется линейно с температурой:

$$p_t = p_0(1 + \alpha t), \quad (3)$$

где p_t — давление водорода при температуре t , p_0 — его давление при температуре нуль и α — постоянный коэффициент. Равенство (3), отнесенное к водороду, служит определением шкалы температур (так называемой эмпирической шкалы температур). Если положить температуру таяния льда равной 0° , а температуру кипения воды при атмосферном давлении 100° (шкала Цельсия), то коэффициент α имеет численное значение $\frac{1}{273,15} = 0,0036613 \text{ град}^{-1}$.

Установив способ измерения температур, мы можем поставить вопрос: как для всех газов зависят их давление и объем от температуры? Эти зависимости даются эмпирическими законами Гей-Люссака.

1. Давление данной массы газа при постоянном объеме меняется линейно с температурой:

$$p_t = p_0(1 + \alpha_p t). \quad (4)$$

2. Объем данной массы газа при постоянном давлении меняется линейно с температурой:

$$V_t = V_0(1 + \alpha_v t). \quad (5)$$

Коэффициент α_p называется термическим коэффициентом давления, α_v — термическим коэффициентом объемного расширения. Для всех газов соотношения (4) и (5) выполняются приблизительно [кроме водорода, для которого соотношение (4) выполняется, по определению, точно], при этом для всех газов приблизительно:

$$\alpha_v = \alpha_p = \alpha = \frac{1}{273} \text{ град}^{-1}. \quad (6)$$

В табл. II даны для некоторых реальных газов эмпирические значения произведения pV при постоянной температуре для различных давлений p . Газы взяты при 0°C

Таблица II

Значения произведения pV
для различных p при 0°C

| $p_{\text{атм}}$ | pV | | | |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------|
| | H_2 | N_2 | O_2 | воздух |
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 1,0690 | 0,9941 | 0,9265 | 0,9730 |
| 200 | 1,1380 | 1,0483 | 0,9140 | 1,0100 |
| 500 | 1,3565 | 1,3900 | 1,1560 | 1,3400 |
| 1000 | 1,7200 | 2,0685 | 1,7355 | 1,9920 |

в количестве 1 л при давлении в 1 атм. Таким образом, для каждого из газов при $p=1$ атм произведение pV равно единице. По закону Бойля—Мариотта оно должно было бы сохранять это значение для любых давлений.

Как видно из табл. II, в интервале давлений от 1 атм до 100 атм отступления от закона Бойля—Мариотта невелики: произведение pV сохраняет значение, близкое к единице.

Все же для водорода оно оказывается несколько больше единицы, а для N_2 , O_2 и воздуха—несколько меньше единицы. Это значит, что водород сжимается несколько меньше, чем это требует закон Бойля—Мариотта, а остальные газы—несколько больше.

При давлении в 1000 атм все газы дают сильное отступление от закона Бойля—Мариотта, достигающее для азота двух с лишним раз: все они сжимаются меньше, чем следует ожидать по закону Бойля—Мариотта.

Еще больше отступления при очень высоких давлениях. При давлении в 15 000 кг/см² объем азота более чем в 16 раз превышает тот, который он должен был бы иметь по закону Бойля—Мариотта.

Заметны отступления для реальных газов и от законов Гей-Люссака.

Как видно из табл. III, значения α_p и α_V для одного и того же газа не совпадают; для уголекислоты расхождение между α_p и α_V достигает 0,4%. Для разных газов несколько различны коэффициенты как α_p , так и α_V .

Наконец, для данного газа значения α_p и α_V получаются несколько разные, в зависимости от того, в каком температурном интервале они определены.

Согласно формулам (4) и (5), имеем

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}, \quad \alpha_V = \frac{V - V_0}{V_0 t},$$

Таблица III

Значения коэффициентов α_p
и α_V для газов

| Газ | $\alpha_p \cdot 10^7$ | $\alpha_V \cdot 10^7$ |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| H_2 | 36 613 | 36 600 |
| He | 36 601 | 36 582 |
| N_2 | 36 744 | 36 732 |
| CO_2 | 37 262 | 37 414 |
| Воздух | 36 750 | 36 760 |

здесь p_0 и V_0 — давление и объем при 0°C , а p и V — те же величины при температуре t . Измеряя p и V , например, для $t = 50^\circ$, мы найдем средние значения α_p и α_V для интервала температур от 0 до 50° . По закону Гей-Люссака значения α_p и α_V не должны были бы зависеть от того, какая взята температура t .

Как показывает табл. IV, относящаяся к воздуху, на самом деле и от этого требования закона Гей-Люссака наблюдаются небольшие отступления.

Как видно, отступления очень незначительны; особенно они малы для α_p . Тем не менее, газовый термометр, наполненный воздухом вместо водорода, дал бы некоторые отступления при измерении температур.

Газ, который вполне точно подчинялся бы законам Бойля — Мариотта и Гей-Люссака и характеризовался бы значениями $\alpha_p = \alpha_V = \alpha = \frac{1}{273,13} \approx \frac{1}{273}$, называется *идеальным газом*. Свойства „идеального газа“ являются лишь более или менее хорошим приближением к свойствам реальных газов.

Обозначая изменение давления газа $p_t - p_0$ через Δp , получим из формулы (4):

$$\Delta p = p_0 \alpha t, \quad (4a)$$

также из (5) для изменения объема ΔV найдем

$$\Delta V = V_0 \alpha t. \quad (5a)$$

Из формулы (4a) следует: давление идеального газа при повышении его температуры на 1°C увеличивается (при постоянном объеме) на $1/273$ давления, которое он имел при 0°C .

Также из (5a) имеем: объем идеального газа при повышении его

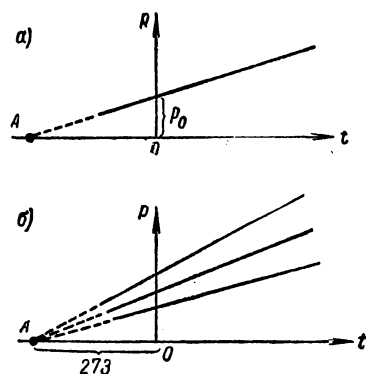


Рис. 111. а) Зависимость давления газа p от температуры изображается прямой (изохорой); б) изохоры, отнесенные к любому количеству газа, все пересекают ось абсцисс в одной точке А.

температуры на 1°C увеличивается (при постоянном давлении) на $1/273$ объема, который он имел при 0°C .

Графически зависимость давления газа от температуры при постоянном объеме выразится прямой, пересекающей ось ординат в точке, дающей значение p_0 (рис. 111a). Эта линия носит название *изохоры*, что означает, что она относится к постоянным объемам.

Таблица IV

Значения α_p и α_V для воздуха при $p = 1 \text{ ат}$ для разных температурных интервалов

| | Температурные интервалы | | | |
|-----------------------------|-------------------------|--------|--------|--------|
| | 0—50° | 0—100° | 0—150° | 0—200° |
| $\alpha_p \cdot 10^6 \dots$ | 3675 | 3675 | 3674 | 3674 |
| $\alpha_V \cdot 10^6 \dots$ | 3676 | 3674 | 3673 | 3672 |

Для разных масс газа p_0 будут иметь разные значения, и изохоры изобразятся семейством прямых, пересекающих ось ординат на разных высотах (рис. 111б); однако все эти прямые пересекают ось абсцисс в одной и той же точке A при значении $t = -\frac{1}{\alpha} \cong -273^\circ \text{C}$, так как по формуле (4) $p_t = 0$ при $t = -\frac{1}{\alpha}$ для любых значений p_0 .

Точно так же зависимость объема газа от температуры при постоянном давлении выразится прямой, пересекающей ось ординат в точке, дающей значение V_0 (изобарой).

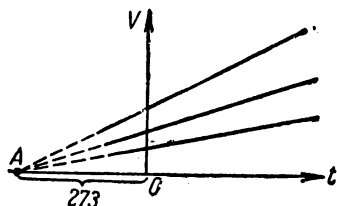


Рис. 112. Прямые, изображающие зависимость объема газа V от температуры t , отнесенные к любому количеству газа, все пересекают ось абсцисс в одной точке A .

Для разных масс газа мы получим семейство прямых, пересекающих ось ординат на разных высотах и пересекающихся в одной точке A , лежащей на оси абсцисс при $t = -\frac{1}{\alpha} \cong -273^\circ \text{C}$ (рис. 112).

Из рис. 111б и 112 явствует, что выражения для зависимости давления или объема газа от температуры упростятся, если перенести начало координат в точку A . В самом деле, введем новую шкалу температур (температуру в этой шкале будем обозначать T), где величина градуса та же, что и в шкале Цельсия, но где нуль располагается при -273°C , тогда

$$T = t + 273^\circ,^1 \quad (7)$$

откуда $t = T - 273^\circ = T - \frac{1}{\alpha}$, и по (4)

$$p_T = p_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right],$$

т. е.

$$p_T = p_0 \alpha T. \quad (8)$$

Так же получим, что

$$V_T = V_0 \alpha T. \quad (9)$$

Введенная шкала температур носит название *шкалы Кельвина* (градус в этой шкале обозначается $^\circ \text{K}$). Из (8) имеем, что давление газа при постоянном объеме прямо пропорционально температуре в шкале Кельвина. Также по (9) объем газа при постоянном давлении прямо пропорционален температуре в шкале Кельвина. При $T = 0$ по (8) и (9) соответственно получаем, что $p = 0$ и $V = 0$; однако на самом деле объем вещества никогда не может стать равным нулю.

¹ Точнее, $T = t + 273,15^\circ$.

Такое нелепое следствие получилось в результате незаконного экстраполирования законов Гей-Люссака на слишком низкие температуры; всякий реальный газ превратится в жидкость и затвердеет раньше, чем будет достигнута температура $t = -273^\circ \text{C}$. Тем не менее шкала Кельвина и значение нуля температуры в этой шкале имеют определенный физический смысл, как мы это увидим в дальнейшем. В связи с этим шкалу Кельвина часто называют *абсолютной шкалой*, а ноль в шкале Кельвина (лежащий при $-273,13^\circ$ в шкале Цельсия) — *абсолютным нулем температур*.

§ 45. Уравнение состояния идеальных газов. Плотность газов. Рассмотрим определенную массу газа m , которая занимает объем V_1 , имеет давление p_1 и находится при температуре T_1 . Пусть в другом состоянии та же масса газа характеризуется объемом, давлением и температурой: V_2, p_2, T_2 . Установим на основании законов Бойля — Мариотта и Гей-Люссака связь между V_1, p_1, T_1 и V_2, p_2, T_2 .

Для этого, исходя из состояния V_1, p_1, T_1 , сперва нагреем газ при постоянном давлении p_1 до температуры T_2 . Тогда он займет объем V' , причем по формуле (9) § 44:

$$V' = V_1 \frac{T_2}{T_1}. \quad (1)$$

В результате этого нагревания газ окажется в состоянии, характеризуемом объемом V' , давлением p_1 и температурой T_2 , поэтому в окончательное состояние V_2, p_2, T_2 его можно перевести изотермическим изменением объема, для которого по закону Бойля — Мариотта:

$$p_1 V' = p_2 V_2.$$

Подставляя сюда значение V' из (1), получим

$$p_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} = p_2 V_2 \quad \text{или} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

откуда следует, что при изменениях состояния данной массы газа величина $\frac{pV}{T}$ остается постоянной:

$$\frac{pV}{T} = B. \quad (2)$$

Уравнение (2) выведено французским инженером Клапейроном (1834 г.), который долгое время был профессором Петербургского института путей сообщения. Численное значение постоянной B в этом уравнении зависит от количества взятого газа и от тех единиц, в которых измеряются p, V и T .

По закону, установленному Авогадро, *граммолекулы различных газов занимают при одинаковых давлениях и температурах одинаковые объемы*. При $t = 0^\circ \text{C}$ и давлении $p = 1 \text{ ат}$ граммоллекула любого газа занимает объем 22,41 л.

Отсюда, если соотношение (2) относить не к произвольному количеству газа, а к одному молю, то постоянная B будет иметь одно и то же значение для всех газов.

Эта общая для всех газов постоянная обозначается буквой R и носит название *газовой постоянной*. Вводя в формулу (2) вместо объема V молярный объем V_0 (т. е. объем одного моля газа), получим

$$p V_0 = RT. \quad (3)$$

Молярный объем V_0 имеет размерность $L^3/\text{моль}$ и измеряется в $\text{л}/\text{моль}$ или $\text{см}^3/\text{моль}$. Формула (3) представляет собой уравнение состояния. В точности ей удовлетворяет лишь идеальный газ, для реальных газов она так же приближенна, как и законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака, из которых она вытекает.

Поэтому она является уравнением состояния идеального газа.

Уравнение (3), являющееся обобщением уравнения (2), было установлено Д. И. Менделеевым, который впервые доложил о нем на заседаниях Русского физико-химического общества в 1874 г. и опубликовал в 1875 г. В связи с этим мы будем называть формулу (3) формулой Менделеева — Клапейрона.

Численное значение R определим из условия, что при $t = 0^\circ \text{C}$, т. е. при $T = 273^\circ \text{K}$ и при $p = 1 \text{ ат}$, объем моля $V_0 = 22,4 \text{ л}/\text{моль}$, откуда

$$R = \frac{p V_0}{T} = \frac{1 \cdot 22,4}{273} \text{ л ат/град моль} = 0,082 \text{ л ат/град моль}. \quad (4)$$

Значение R в CGS-системе получим, переводя давление p в *бары* и молярный объем V_0 в $\text{см}^3/\text{моль}$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1033 \cdot 981 \cdot 22,4 \cdot 10^3}{273} \text{ бар см}^3/\text{град моль} = \\ &= 8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/град моль}. \end{aligned} \quad (4a)^1$$

Наименование единицы измерения газовой постоянной эрг/град моль вытекает из того, что $\text{бар} = \text{дин}/\text{см}^2$, откуда $\text{бар см}^3 = \text{дин см} = \text{эрг}$.

Формулу (3), справедливую лишь для одного моля газа, легко обобщить и на любую массу. Для этого обозначим через μ молекулярный вес газа; тогда, если при некоторых данных давлении и температуре один моль газа занимает молярный объем V_0 , то m граммов газа займут при тех же давлении и температуре объем $V = \frac{m}{\mu} V_0$. Отсюда следует, что для m граммов газа, при данных давлении и температуре, выражение pV/T также будет в m/μ раз больше газовой постоянной R , но так как pV/T остается постоянным

¹ Более точно

$$R = 8,313 \cdot 10^7 \text{ эрг/град моль} = 0,08204 \text{ л ат/град моль}.$$

при всех изменениях газа, то, следовательно, вообще для m граммов газа:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} R, \text{ откуда } pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (5)$$

Формула (5) представляет собою обобщение формулы Менделеева — Клапейрона, справедливое для любой массы m любого газа; при этом постоянная R одна и та же для всех газов и имеет численное значение, даваемое выражениями (4) или (4а).

Формула (5) связывает все четыре величины m , p , V и T , характеризующие данное количество газа. Зная три из этих величин, мы имеем возможность по формуле (5) вычислить четвертую.

Из формулы (5) непосредственно определяется *плотность газа*:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (6)$$

Таким образом, плотность газа оказывается прямо пропорциональной его молекулярному весу и его давлению и обратно пропорциональной абсолютной температуре.

Для газов часто рассматривают *относительную плотность*, подразумевая под ней отношение плотности данного газа ρ к плотности ρ_0 некоторого, выбранного за стандартный, газа, взятого при тех же давлении и температуре, что и рассматриваемый газ. Тогда имеем

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad \rho_0 = \frac{p\mu_0}{RT},$$

откуда относительная плотность ρ' равна

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (7)$$

Относительную плотность принято брать по отношению к водороду, для которого приближенно $\mu_0 = 2$, тогда относительная плотность:

$$\rho'_{\text{H}_2} = \frac{1}{2} \mu. \quad (7a)$$

Эта формула позволяет устанавливать путем измерения относительной плотности по отношению к водороду молекулярные веса газов.

Рассмотрим примеры на пользование формулой Менделеева — Клапейрона и на определение плотности газов.

Пример 1. Какой объем в литрах занимает 1 г азота ($\mu = 28$) при давлении 380 мм Hg и температуре 27° C?

Решение. Из формулы (5) имеем

$$V = \frac{mRT}{\mu p}.$$

Переводим давление p из мм Hg в атмосферы:

$$p = \frac{380}{760} \text{ ат} = 0,5 \text{ ат}.$$

Переводим температуру в шкалу Кельвина:

$$T = t + 273^\circ = 300^\circ,$$

и пользуемся для газовой постоянной значением

$$R = 0,082 \text{ л ат/град моль, тогда } V = \frac{1 \cdot 0,082 \cdot 300}{28 \cdot 0,5} \text{ л} = 1,75 \text{ л}.$$

Пример 2. Чему равна плотность водорода ($\mu = 2$) при 0°C и давлении в 1 ат?

Решение. По формуле (6):

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Если все величины, входящие в правую часть этого выражения, брать в CGS-системе, т. е. μ — в г/моль, p — в барах, R — в эрг/град моль, T — в градусах Кельвина, то ρ получится в г/см³.

Если же пользоваться следующей смешанной системой: R брать в л ат/град моль, μ — в г/моль, p — в атмосферах, T — в градусах Кельвина, то ρ получится в г/л, т. е. в такой системе, где за единицу плотности принята плотность такого тела, масса 1 г которого имеет объем 1 л.

Очевидно, от численного значения плотности в г/л мы перейдем к численному значению плотности в г/см³, поделив первое из них на 1000. Таким образом, настоящий пример можно решать двояким способом:

1) переводим давление в бары: $p = 1 \text{ ат} = 1033 \cdot 981 \text{ бар} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ бар}$, тогда имеем

$$\rho = \frac{2 \cdot 1,013 \cdot 10^6}{8,31 \cdot 10^7 \cdot 273} \text{ г/см}^3 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3;$$

2) пользуемся указанной смешанной системой, тогда

$$\rho = \frac{2 \cdot 1}{0,082 \cdot 273} \text{ г/л} = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ г/л} = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3.$$

§ 46. Основные представления кинетической теории газов.

Плотность газов при нормальных условиях (т. е. при 0°C и давлении в 1 ат) примерно в 1000 раз меньше плотности жидкостей. В жидкости молекулы расположены вплотную друг к другу, отсюда следует, что в газах молекулы находятся друг от друга на расстояниях примерно в $\sqrt[3]{1000}$, т. е. в десятки раз больших, чем их собственные размеры. Таким образом, можно считать, что газ представляет собою собрание молекул, разделенных достаточно большими промежутками. Молекулы беспорядочно движутся, свободно пробегая путь между двумя последовательными столкновениями друг с другом или со стенками сосуда, в котором заключен газ. Силы взаимодействия между молекулами, кроме моментов соударения, настолько малы, что ими можно пренебречь. Соударения молекул друг с другом и со стенками происходят без потери энергии по законам соударения упругих шаров. Такая механическая модель газа, как собрания

свободно и беспорядочно движущихся упругих молекул-шариков, является слишком упрощенной, но она позволяет объяснить основные свойства газов. Впоследствии мы увидим, каким образом эта модель должна быть развита, чтобы более точно учесть свойства реальных газов. Свойства реальных газов не могут быть объяснены, если исходить только из механических представлений. Учитывая сказанное в § 31 о границах применимости классической механики, мы вообще должны поставить вопрос, насколько возможно в указанной модели газа пользоваться представлением о молекулах как о частицах, движущихся по законам классической механики.

В § 31 нами было приведено соотношение, по которому неопределенности в координате Δx и в составляющей скорости Δv_x должны удовлетворять неравенству:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x > \frac{h}{m}.$$

Применим это соотношение к молекуле, движущейся в газе, находящемся при нормальных условиях. В качестве газа возьмем азот, масса молекулы которого $m = 4,7 \cdot 10^{-23}$ г. Как мы увидим дальше, молекулы при этом проходят в среднем без столкновения с другими молекулами путь порядка 10^{-5} см и обладают скоростью порядка 400 м/сек. Таким образом, для того, чтобы говорить о характере движения молекул, необходимо иметь возможность фиксировать их положение по крайней мере с точностью $\Delta x \sim 10^{-6}$ см. При этом по соотношению неопределенности неопределенность в скорости будет:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{4,7 \cdot 10^{-23} \cdot 10^{-6}} \text{ см/сек} \cong 1,4 \cdot 10^3 \text{ см/сек},$$

т. е. около $\frac{1}{3}\%$ самой скорости.

Таким образом, в пределах требуемой нами точности мы вправе рассматривать молекулу как частицу в обычном смысле слова. При очень больших давлениях, когда молекулы находятся значительно ближе друг к другу (необходимо брать для Δx меньшее значение), или при очень низких температурах, когда мала сама скорость молекул, такое рассмотрение не годится.

Модель газа как собрания свободно движущихся частиц прежде всего непосредственно позволяет объяснить свойство газов распространяться на весь предоставленный им объем, а также взаимно проникать друг в друга (диффундировать). Удары молекул обуславливают давление газа на стенки ограничивающего его сосуда.

Объяснение давления газа на стенки, как возникающего в результате удара отдельных молекул, было впервые выдвинуто петербургским академиком Даниилом Бернулли в 1738 г. В 1744—1748 гг. М. В. Ломоносов разработал развернутую теорию атомно-молекулярного строения вещества, впервые доказал справедливость молекулярно-кинетической теории теплоты и объяснил с этой точки

зрения многие явления. В дальнейшем молекулярно-кинетическая теория газов была развита лишь во второй половине XIX столетия рядом физиков, главным образом, Клаузиусом, Больцманом и Максвеллом.

Подсчитаем давление, возникающее в результате удара молекул о стенки сосуда. Представим себе сосуд в виде куба с длиной ребра Δl (рис. 113), в котором беспорядочно движется n молекул, собственными размерами которых мы пренебрегаем.

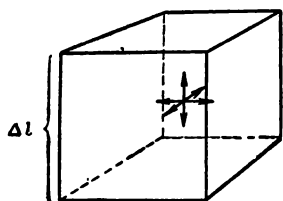


Рис. 113. Усреднение движения молекул в кубическом сосуде.

Ввиду полной беспорядочности движения молекул, результат их удара о стенки будет таков, как если бы $\frac{1}{3}$ всех молекул двигалась прямолинейно между передней и задней стенками куба, $\frac{1}{3}$ молекул — между верхней и нижней стенками и $\frac{1}{3}$ — между правой и левой стенками куба. Отдельная молекула, летящая перпендикулярно к одной из стенок, например к передней, со скоростью v , во время удара отскочит назад, в результате чего ее количество движения изменится на величину $m \cdot v - m(-v) = 2mv$, где m — масса молекулы; это изменение количества движения определит импульс силы, действующей со стороны стенки на молекулу во время удара:

$$\Delta f \cdot \delta t = 2mv,$$

где Δf — сила удара и δt — продолжительность удара. По третьему закону Ньютона сила, численно равная Δf , будет действовать на стенку. Отскочив от стенки, молекула полетит к противоположной стенке и, отскочив в свою очередь от нее, снова вернется к первой стенке через некоторое время Δt . Средняя сила $\Delta \bar{f}$, действующая на стенку за все время между двумя последовательными ударами молекулы, определится из того требования, что ее импульс $\Delta \bar{f} \cdot \Delta t$ должен численно равняться импульсу силы Δf , действующей во время удара δt , откуда

$$\Delta \bar{f} \cdot \Delta t = 2mv. \quad (1)$$

Величина Δt представляет собою время, которое потребно для того, чтобы молекула, отскочив от передней стенки куба, могла долететь до его задней стенки и вернуться назад, отсюда

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \Delta l}{v}.$$

Подставляя это значение Δt в (1), получим

$$\Delta \bar{f} = \frac{mv^2}{\Delta l}.$$

Это есть среднее по времени значение силы ударов одной молекулы. Разные молекулы движутся с различными скоростями v_1, v_2, v_3, \dots , и суммарная сила ударов молекул о переднюю стенку равна

$$\bar{f} = \frac{mv_1^2}{\Delta l} + \frac{mv_2^2}{\Delta l} + \frac{mv_3^2}{\Delta l} + \dots + \frac{mv_{n'}^2}{\Delta l},$$

где n' — число молекул, движущихся между передней и задней стенками. Вынося $m/\Delta l$, как величину постоянную, за скобки, деля и умножая правую часть на n' , получим

$$\bar{f} = \frac{n' \cdot m}{\Delta l} \cdot \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{n'}^2}{n'}.$$

Величина

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{n'}^2}{n'} = \bar{v}^2$$

представляет собою *среднее значение квадратов скоростей молекул*, или, другими словами, *квадрат средней квадратичной скорости*. Отсюда

$$\bar{f} = \frac{n' \cdot m}{\Delta l} \bar{v}^2.$$

Число молекул, движущихся между передней и задней стенками, может быть положено равным, как мы выяснили, $1/3$ от общего числа молекул n , откуда

$$\bar{f} = \frac{1}{3} \frac{n}{\Delta l} \cdot m \bar{v}^2.$$

Поделив правую и левую части этого равенства на Δl^2 , получим

$$\frac{\bar{f}}{\Delta l^2} = \frac{1}{3} \frac{n}{\Delta l^2} \cdot m \bar{v}^2, \quad (2)$$

но Δl^2 — площадь стенки куба, следовательно, $\bar{f}/\Delta l^2$ — давление p на стенку, а Δl^3 — объем куба, откуда получаем, что $n/\Delta l^3$ равно числу молекул n_0 в единице объема; окончательно равенство (2) принимает вид:

$$p = \frac{1}{3} n_0 \cdot m \bar{v}^2. \quad (3)$$

Таким образом, давление p , оказываемое газом на стенки сосуда, определяется: числом молекул n_0 в единице объема, массой молекул m и средним значением квадрата их скоростей \bar{v} . Формуле (3) можно придать иной вид, поделив и помножив ее правую часть на 2, тогда

$$p = \frac{2}{3} n_0 \left(\frac{m \bar{v}^2}{2} \right), \quad (4)$$

но

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = \bar{w}$$

есть средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, откуда

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w}, \quad (4a)$$

т. е. давление газа может быть также выражено через среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа.

Формула (3) или эквивалентная ей формула (4a) носит название *основной формулы кинетической теории газов*.

Помножим правую и левую части формулы (4a) на объем одного моля газа V_0 , тогда

$$p V_0 = \frac{2}{3} n_0 V_0 \bar{w},$$

но $n_0 V_0$ — число молекул в молярном объеме V_0 , т. е. число молекул в одном моле газа; это число равно числу Авогадро: $n_0 V_0 = N$, откуда

$$p V_0 = \frac{2}{3} N \cdot \bar{w},$$

но $p V_0 = R T$, где T — температура газа в шкале Кельвина и R — газовая постоянная, отсюда

$$p V_0 = \frac{2}{3} N \bar{w} = R T. \quad (5)$$

Формула (5) непосредственно связывает среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул \bar{w} с макроскопическими величинами, характеризующими газ: с его давлением, объемом и температурой. Из (5) имеем

$$\bar{w} = \frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N} T; \quad (6)$$

так как R и N представляют собой величины постоянные, то и величина

$$k = \frac{R}{N} \quad (7)$$

является величиной постоянной; она носит название *постоянной Больцмана*.

Численное значение постоянной Больцмана равно

$$k = \frac{8,31 \cdot 10^7}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ эрг/град} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}.$$

Подставляя в формулу (6) постоянную Больцмана, получим

$$\bar{w} = \frac{3}{2} k T. \quad (6a)$$

Формулы (6) и (6а) показывают, что *средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул зависит только от температуры, при этом она прямо пропорциональна абсолютной температуре T .*

Таким образом, абсолютная шкала температур (шкала Кельвина) приобретает непосредственный физический смысл. При абсолютном нуле температуры поступательное движение молекул, согласно формуле (6а), прекращается вовсе. Однако и при абсолютном нуле сохраняются некоторые виды движения внутри молекул и атомов, так что внутреннее движение материи не прекращается в целом и при абсолютном нуле. В дальнейшем мы увидим, что практически абсолютный нуль достигнут быть не может.

Приведенные выводы позволяют нам определить не только среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул, но и ряд других величин, характеризующих молекулярно-кинетическую природу газа.

Из формулы (6) получаем для среднего значения квадрата скорости молекул:

$$\bar{v}^2 = \frac{3RT}{mN},$$

но m — масса одной молекулы, N — число молекул в одном моле, откуда mN есть молекулярный вес μ , после чего для *средней квадратичной скорости поступательного движения молекул* получаем:

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (8)$$

т. е. средняя квадратичная скорость поступательного движения газовых молекул прямо пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры газа и обратно пропорциональна корню квадратному из его молекулярного веса.

Для числа молекул n_0 в единице объема из формулы (4а) получаем

$$n_0 = \frac{3p}{2\bar{w}},$$

подставляя сюда значение \bar{w} по (6а), найдем

$$n_0 = \frac{p}{kT}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что все газы содержат при одинаковых давлениях и температуре одно и то же число молекул в единице объема (этот результат также непосредственно вытекает из закона Авогадро). При нормальных условиях, т. е. при $p=1$ ат и $T=273^\circ\text{К}$, в 1 см^3 любого газа заключается:

$$n_0 = 2,683 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

молекул; это число носит название *числа Лошмита*.

Для того чтобы освоиться с порядком численных величин, характеризующих молекулярно-кинетическую теорию газов, приведем несколько численных примеров.

Пример 1. Сколько молекул газа должно находиться в единице объема, чтобы при температуре 27°C давление, оказываемое на стенки сосуда, равнялось одному бару?

Решение. По формуле (9):

$$n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{1}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 300} \text{ см}^{-3} = 2,42 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

т. е. в 1 см^3 должно находиться $2,42 \cdot 10^{13}$ молекул.

Пример 2. Найти среднюю квадратичную скорость молекул азота ($\mu = 28$) при: а) $t = 1000^\circ\text{C}$, б) $t = 0^\circ\text{C}$ и в) $t = -270^\circ\text{C}$.

Решение. Подставляя в формулу (8) $R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/град моль}$, $\mu = 28 \text{ г/моль}$ и $T = 1273^\circ\text{K}$, получим:

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 10^7 \cdot 1273}{28}} \text{ см/сек} = 1,06 \cdot 10^5 \text{ см/сек} = 1060 \text{ м/сек}.$$

Так же находим для двух остальных случаев: б) $\sqrt{\bar{v}^2} = 493 \text{ м/сек}$; в) $\sqrt{\bar{v}^2} = 51 \text{ м/сек}$. Таким образом, при не слишком низких температурах скорости газовых молекул чрезвычайно велики. При комнатных температурах они достигают скорости ружейной пули.

Пример 3. Чему равна в эргах средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа при: а) $t = 1000^\circ\text{C}$, б) $t = 0^\circ\text{C}$, в) $t = -270^\circ\text{C}$.

Решение. По формуле (6а) имеем при $t = 1000^\circ\text{C}$, т. е. при $T = 1273^\circ\text{K}$:

$$\bar{w} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 1273 \text{ эрг} = 2,63 \cdot 10^{-13} \text{ эрг};$$

так же для других случаев находим: б) $\bar{w} = 5,65 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}$ и в) $\bar{w} = 6,21 \cdot 10^{-16} \text{ эрг}$. Таким образом, несмотря на большие скорости, средние кинетические энергии отдельных молекул, даже при температурах в 1000°C , очень малы. Это происходит от весьма малой массы отдельной молекулы.

§ 47. Парциальные давления в газовых смесях. Согласно основной формуле кинетической теории газов [формула (4а) § 46], давление газа

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w}, \quad (1)$$

где n_0 — число молекул в единице объема и \bar{w} — средняя кинетическая энергия молекул при данной температуре T . При этом формула (1) не зависит от сорта молекул, так как все молекулы при данной температуре T имеют одну и ту же среднюю кинетическую энергию \bar{w} .

Предположим, что мы имеем дело не с однородным газом, но со смесью различных газов, причем число молекул в единице объема первого газа равно n_{01} , второго — n_{02} , третьего — n_{03} и т. д.

Тогда общее число молекул в единице объема n_0 равно

$$n_0 = n_{01} + n_{02} + n_{03} + \dots$$

и по формуле (1) давление, оказываемое на стенки сосуда всей смесью газов, равно

$$p = \frac{2}{3} n_{01} \bar{w} + \frac{2}{3} n_{02} \bar{w} + \frac{2}{3} n_{03} \bar{w} + \dots \quad (2)$$

но, очевидно,

$$p_1 = \frac{2}{3} n_{01} \bar{w}$$

представляет собой то давление, которое оказывал бы первый газ, если бы он один присутствовал в данном сосуде в том количестве, в котором он присутствует в смеси. Также

$$p_2 = \frac{2}{3} n_{02} \bar{w}$$

представляет собою то давление, которое оказывал бы второй газ, если бы он один присутствовал в сосуде в том количестве, в котором он присутствует в смеси, и т. д.

Давления p_1 , p_2 , p_3 и т. д. называются *парциальными давлениями*. Из формулы (2) получаем

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (3)$$

Формула (3) представляет так называемый *закон Дальтона*: в случае идеальных газов сумма парциальных давлений равна давлению всей газовой смеси.

Из закона Дальтона вытекает следующее: если различные идеальные газы, находящиеся при одинаковом давлении p и занимающие в отдельности объемы V_1 , V_2 , V_3 ..., привести в соприкосновение друг с другом путем удаления разделяющих их перегородок, то после того как произойдет полное смешение газов путем диффузии, их общее давление не изменится; другими словами: при смешении идеальных газов при постоянном давлении суммарный объем не меняется, т. е. объемы газов складываются аддитивно.

Это последнее обстоятельство может быть проверено путем непосредственного опыта. Измерение же парциальных давлений в смеси газов непосредственно затруднительно. Это измерение может быть проведено, если иметь в распоряжении перегородку, проницаемую для одного газа и непроницаемую для остальных (*полупроницаемую перегородку*). Например, пластинка из накалиной платины хорошо проницаема для водорода и плохо проницаема для других газов. Проникающий через полупроницаемую перегородку газ выравнивает свое парциальное давление по обе стороны перегородки.

Представим себе замкнутый сосуд B из платины (рис. 114), первоначально эвакуированный, а затем раскаленный. Пусть сосуд B

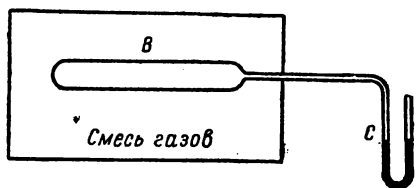


Рис. 114. Схема опыта для определения парциального давления водорода.

окружен газовой смесью из водорода и какого-либо другого газа, химически не активного по отношению к водороду (например, аргона). Тогда водород начнет проникать внутрь раскаленного платинового сосуда B , пока его давление на стенки сосуда не выравняется с обеих сторон. Это будет иметь место тогда, когда давление водорода внутри сосуда B станет равным парциальному давлению водорода с наружной стороны, где находится смесь газов. Таким образом, парциальное давление водорода может быть непосредственно измерено манометром C .

Опыт может быть проведен в несколько ином виде. Заполним первоначально как сосуд B , так и пространство, его окружающее, каким-либо определенным газом, например аргоном, при одинаковом давлении p_0 . Заменяем затем аргон, находящийся снаружи, смесью из аргона с водородом, причем давление смеси пусть также равно p_0 , парциальное же давление водорода в этой смеси пусть будет p_1 . Тогда, если раскалить стенки сосуда B , водород начнет проникать внутрь сосуда B , в то время как аргон не сможет проникать из него наружу. В результате получится разность давлений между газовой смесью вне сосуда B и внутри сосуда B . Установившееся давление внутри сосуда B окажется равным $p_0 + p_1$, т. е. будет больше давления p_0 на величину p_1 . Это „добавочное“ давление p_1 измерит парциальное давление водорода в смеси.

Для реальных газов и паров наблюдаются некоторые отступления от закона Дальтона, подробно исследованные в 1890 г. Б. Б. Голицыным.

§ 48. Внутренняя энергия газа. Число степеней свободы. Как было показано в § 46, молекулярно-кинетическая теория газов приводит к весьма важному следствию: молекулы газа совершают беспорядочное движение, причем средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы \overline{w} при температуре T равна

$$\overline{w} = \frac{3}{2} \left(\frac{R}{N} \right) T = \frac{3}{2} kT, \quad (1)$$

где R — газовая постоянная, N — число Авогадро, $k = \frac{R}{N}$ — постоянная Больцмана. Таким образом, средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул определяется исключительно температурой газа T , поскольку остальные величины, входящие в выражение (1), являются постоянными. *При нагревании или охлаждении газа, т. е. при сообщении ему или отнятии от него некоторого количества тепла, меняется энергия движения его молекул.*

Для идеального газа кинетическая энергия беспорядочного движения всех его молекул определяет его внутреннюю энергию. Для реальных газов, как мы увидим ниже, необходимо принять еще во внимание взаимную потенциальную энергию молекул, так что для реальных газов внутренняя энергия представляет собою сумму кинетической энергии движения молекул и их потенциальной энергии.

Кинетическая энергия движения молекул, вообще говоря, не исчерпывается кинетической энергией их поступательного движения: она может также складываться и из кинетических энергий вращения и колебания молекул.

Для того чтобы подсчитать энергию, идущую на все виды движения молекул, необходимо ввести понятие о числе степеней свободы.

Под числом степеней свободы тела подразумевается число независимых координат, которые необходимо ввести для определения положения тела в пространстве. Так, например, материальная точка обладает тремя степенями свободы, так как ее положение в пространстве определяется тремя координатами, например, координатами x , y , z прямоугольной прямолинейной системы координат.

Положение твердого тела (рис. 115) мы определим, если зададим: 1) положение его центра тяжести C в пространстве, 2) направление некоторой определенной оси OO' и 3) угол поворота твердого тела вокруг этой оси по отношению к некоторому начальному положению. Для определения положения центра тяжести нужно ввести три координаты x , y , z . Для определения направления оси OO' в пространстве надо задать еще две координаты, например, два угла θ и ϕ , которые она составляет с двумя из трех координатных осей. Наконец, угол поворота тела вокруг оси OO' определится еще одной координатой (угол φ на рис. 115).

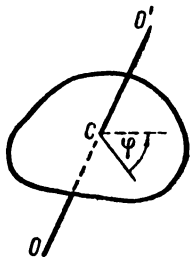


Рис. 115. Твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Таким образом, твердое тело обладает шестью степенями свободы.

Если отдельные части тела могут еще смещаться (колебаться) друг относительно друга, то для рассмотрения этих движений нужно ввести еще добавочные степени свободы, сверх указанных. Наоборот, если твердое тело по каким-либо причинам (например, полной симметрии) не приходит во вращение относительно одной определенной оси, то оно будет обладать числом степеней свободы меньше шести, а именно — пятью.

Сфера, которая не испытывает вращения, а лишь движется поступательно, может рассматриваться как материальная точка с тремя степенями свободы.

Каждая молекула газа обладает определенным числом степеней свободы, три из которых соответствуют ее поступательному движению в пространстве.

Основной предпосылкой молекулярно-кинетической теории газов является предположение о полной беспорядочности движения молекул; эта беспорядочность относится не только к поступательному движению, но и ко всем остальным видам движений молекул (вращению, колебанию). Ни один из типов движения не имеет преиму-

щества перед другим, отсюда естественно предположить, что на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится одно и то же количество энергии $\bar{\omega}$. Это положение известно под названием *положения о равнораспределении энергии по степеням свободы*. Исходя из этого положения, легко получить среднюю энергию $\bar{\omega}_0$, приходящуюся на одну степень свободы. На поступательное движение молекулы, которому соответствуют три степени свободы, приходится по (1) энергия:

$$\bar{\omega} = \frac{3}{2} kT,$$

отсюда на одну степень свободы приходится средняя энергия

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{N} \right) T. \quad (2)$$

Предположим, что газ состоит из одинаковых молекул, каждая из которых обладает i степенями свободы; тогда на каждую молекулу (на все виды ее движений) в среднем приходится энергия

$$\bar{\omega} = \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \left(\frac{R}{N} \right) T. \quad (3)$$

Полный запас внутренней энергии газа получим, умножив это значение $\bar{\omega}$ на число молекул, из которых состоит газ. Если мы отнесем внутреннюю энергию к *одному молю* газа, то получим ее значение U_0 , умножив $\bar{\omega}$ на число Авогадро N , откуда

$$U_0 = \frac{i}{2} RT. \quad (4)$$

Из формулы (4) мы видим, что внутренняя энергия газа выражается через число степеней свободы молекул i и абсолютную температуру газа T . Таким образом, внутренняя энергия данного количества идеального газа зависит только от его температуры T и не зависит от его объема, а следовательно, и давления. В случае реальных газов, полная внутренняя энергия, которая, как мы отмечали, складывается из кинетической энергии движения молекул и их потенциальной энергии, зависит от объема, занимаемого газом. При этом внутренняя энергия реального газа не исчерпывается механическими видами энергии (см. § 49).

§ 49. Теплоемкость газов. Пользуясь представлением о внутренней энергии, мы можем найти выражение для теплоемкости газов.

Под *удельной теплоемкостью* s какого-либо вещества подразумевают физическую величину, численно равную количеству тепла, которое надо сообщить единице массы этого вещества, чтобы поднять ее температуру на 1° .

Наряду с удельной теплоемкостью мы введем в рассмотрение *молярную теплоемкость* C . Под молярной теплоемкостью C какого-либо вещества подразумевается физическая величина, численно

равная количеству тепла, которое надо сообщить одному молю этого вещества, чтобы поднять его температуру на 1° . Очевидно, между молярной теплоемкостью C и удельной теплоемкостью c имеет место соотношение:

$$C = \mu c, \quad (1)$$

где μ — молекулярный вес данного вещества.

Для газов надо различать, *при каких условиях они нагреваются*, например, *при постоянном объеме V или при постоянном давлении p* .

Рассмотрим случай нагревания газа при постоянном объеме V .

В этом случае работа внешних сил равна нулю и все сообщаемое газу извне тепло идет целиком на увеличение его внутренней энергии U . Отсюда молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V численно равна изменению внутренней энергии одного моля газа U_0 при повышении его температуры на 1° . Так как по формуле (4) § 48 это изменение равно

$$\Delta U_0 = \frac{i}{2} R(T+1) - \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} R,$$

то для молярной теплоемкости газа при постоянном объеме имеем

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (2)$$

Для удельной теплоемкости, воспользовавшись соотношением (1), получим

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}. \quad (2a)$$

Из формулы (2) следует, что молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V определяется числом степеней свободы i его молекул и значением газовой постоянной R .

В § 45 мы приводили численные значения газовой постоянной R в *эрг/град моль* и в *л ат/град моль*; если воспользоваться этими значениями R , то мы и теплоемкость получим, соответственно, в тех же единицах. Однако обычно принято выражать теплоемкость через количество тепла, передаваемого телу. Единицей же количества тепла служит *калория*. Калория („малая“ или „граммкалория“) равна тому количеству тепла, которое необходимо сообщить 1 г чистой воды, чтобы повысить ее температуру от $19,5$ до $20,5^\circ\text{C}$.

Так как передача тепла является формой передачи энергии, причем по закону сохранения энергии определенному количеству переданного тепла эквивалентно определенное количество энергии,¹ то в калориях можно измерять не только количество тепла, но и энергию, а также работу. Отсюда возникает вопрос, в каком численном

¹ Подробнее см. гл. VIII „Основы термодинамики“.

отношении находится калория к другим единицам энергии. Наиболее точные измерения дают:

$$1 \text{ кал} = 4,182 \text{ дж};$$

приближенно мы будем считать $1 \text{ кал} = 4,18 \text{ дж}$. Пользуясь этим соотношением между калорией и джоулем, легко перевести численное значение газовой постоянной R из *эрг/град моль* в *кал/град моль*, а именно:

$$R = 8,313 \cdot 10^7 \text{ эрг/град моль} = \frac{8,313 \cdot 10^7}{4,182 \cdot 10^7} \text{ кал/град моль} = 1,9858 \text{ кал/град моль}.$$

Приближенно можно принять $R = 2 \text{ кал/град моль}$. Пользуясь этим значением газовой постоянной R , мы получим по формуле (2) теплоемкость газа C_V в *кал/град моль*.

Для вычисления C_V остается выяснить, какое число степеней свободы i следует приписать тем или другим молекулам. Однако раньше чем остановиться на этом вопросе, мы выведем выражение для молярной теплоемкости газа C_p при постоянном давлении.

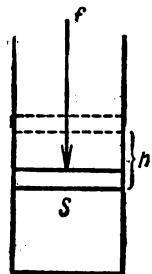


Рис. 116. Работа, совершаемая газом, равна $f \cdot h$.

При нагревании газа при постоянном давлении p газ расширяется; сообщаемое ему извне тепло идет не только на увеличение запаса его внутренней энергии U , но и на совершение работы A против внешних сил. Таким образом, теплоемкость C_p больше теплоемкости при постоянном объеме C_V на ту работу A , которую совершает один моль газа при расширении, происходящем в результате повышения его температуры T на 1° при постоянном давлении p :

$$C_p = C_V + A. \quad (3)$$

Для подсчета этой работы A , представим себе, что один моль газа, находящегося при температуре T и давлении p , заключен в цилиндр с поршнем (рис. 116). Внешняя сила, удерживающая поршень, $f = pS$, где S — площадь поршня. При нагревании газа при постоянном давлении p на 1° он расширится, и поршень будет поднят на высоту h ; газ совершит при этом работу

$$A = f \cdot h = p \cdot Sh,$$

но $Sh = \Delta V_0$, где ΔV_0 — увеличение объема газа, откуда

$$A = p \cdot \Delta V_0. \quad (4)$$

Увеличение объема газа найдем, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа. При температуре T и давлении p объем одного моля газа V_0 равен

$$V_0 = \frac{R}{p} T.$$

При температуре $(T+1)^\circ$ и том же давлении p объем V'_0 будет:

$$V'_0 = \frac{R}{p} (T+1),$$

следовательно, увеличение объема одного моля газа при повышении его температуры на 1° равно

$$\Delta V_0 = V'_0 - V_0 = \frac{R}{p} (T+1) - \frac{R}{p} T = \frac{R}{p}.$$

Подставив это значение ΔV_0 в (4), найдем работу A , совершенную одним молем газа при расширении, происходящем в результате нагревания газа на 1° при постоянном давлении p :

$$A = R.$$

Таким образом, искомая работа A численно равна газовой постоянной R . Подставив это значение A в (3), найдем соотношение между молярными теплоемкостями газа при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_v :

$$C_p = C_v + R. \quad (5)$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (2), находим выражение для C_p через число степеней свободы молекул газа

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (6)$$

Пользуясь соотношением (1) между удельными и молярными теплоемкостями, находим

$$c_p = c_v + \frac{R}{\mu} \quad (5a)$$

или

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu}. \quad (6a)$$

Из формул (2) и (6) или (2a) и (6a) получаем

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (7)$$

Отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме $C_p/C_v = c_p/c_v$ обозначим буквой γ ; это отношение зависит только от числа степеней свободы молекул, из которых состоит газ.

Для того чтобы приписать молекуле определенное число степеней свободы, надо исходить из определенной модели молекулы. До сих пор мы принимали молекулы за шары; если такую шарообразную молекулу считать неспособной вращаться, то ей надо приписать

число степеней свободы, равное трем, тогда, пользуясь значением $R = 1,9858$ кал/град моль, получим по (2), (6) и (7):

$$i = 3 \left\{ \begin{array}{l} C_V = \frac{3}{2} R = 2,979 \text{ кал/град моль} \cong 3 \text{ кал/град моль}, \\ C_p = \frac{5}{2} R = 4,965 \text{ кал/град моль} \cong 5 \text{ кал/град моль}, \\ \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \cong 1,67. \end{array} \right.$$

Как показывают результаты измерений, приведенные в табл. V, эти значения теплоемкостей оправдываются для газов гелия и аргона;

Таблица V

Наблюдаемые значения молярных теплоемкостей газов

| Газ | C_V | C_p | γ |
|---|-------|-------|----------|
| Гелий, He | 2,98 | 5,00 | 1,67 |
| Аргон, Ar | 2,98 | 5,07 | 1,65 |
| Водород, H ₂ | 4,87 | 6,87 | 1,41 |
| Азот, N ₂ | 4,96 | 6,84 | 1,41 |
| Кислород, O ₂ | 4,99 | 6,90 | 1,40 |
| Оксид углерода, CO | 5,01 | 7,01 | 1,40 |
| Пары воды, H ₂ O | 6,65 | 8,65 | 1,31 |
| Метан, CH ₄ | 6,51 | 8,51 | 1,30 |
| Хлороформ, CHCl ₃ | 15,2 | 17,2 | 1,13 |
| Этиловый спирт, C ₂ H ₅ O | 18,9 | 20,9 | 1,11 |

эти газы *одноатомны*, т. е. те частицы, из которых они состоят, представляют собою отдельные атомы, а не группы атомов, соединенных в молекулы. Таким образом для *одноатомных* газов вычисленные по кинетической теории газов и наблюдаемые значения теплоемкостей хорошо совпадают между собой, если число степеней свободы принять равным трем.

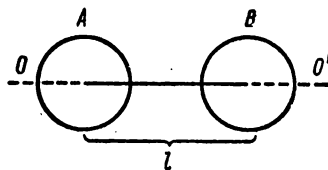


Рис. 117. Модель двуатомной молекулы.

Для *двуатомных* газов, какими являются водород, кислород, азот, оксид углерода и т. д., можно принять следующую модель: два атома A и B жестко соединены между собой так, что их центры находятся на неизменном расстоянии l друг от друга (рис. 117).

Так как каждый из атомов не приходит во вращение, то нужно считать, что такая молекула не вращается относительно оси OO' ,

проходящей через центры обоих атомов. Поэтому двуатомной молекуле надо приписать *пять степеней свободы*. Тогда по (2), (6) и (7):

$$i=5 \left\{ \begin{array}{l} C_V = \frac{5}{2} R = 4,965 \text{ кал/град моль} \cong 5 \text{ кал/град моль}, \\ C_P = \frac{7}{2} R = 6,951 \text{ кал/град моль} \cong 7 \text{ кал/град моль}, \\ \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,40. \end{array} \right.$$

Из табл. V видно, что эти данные хорошо совпадают с наблюдаемыми значениями теплоемкостей для водорода, азота, кислорода и окиси углерода; таким образом, *молекулам этих двуатомных газов действительно приходится приписать пять степеней свободы*.

Считая более сложные (*трехатомные и многоатомные*) молекулы за несимметричные твердые частицы, мы должны приписать им шесть степеней свободы.

Тогда для их теплоемкостей получаем:

$$i=6 \left\{ \begin{array}{l} C_V = \frac{6}{2} R \cong 6 \text{ кал/град моль}, \\ C_P = \frac{8}{2} R \cong 8 \text{ кал/град моль}, \\ \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{8}{6} = 1,33. \end{array} \right.$$

Из данных табл. V видно, что эти значения близки к экспериментальным данным для паров воды и метана; для таких же сложных молекул, как CHCl_3 и $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$, теплоемкости получаются гораздо большие.

Молекула в виде твердой частицы не может иметь более шести степеней свободы, поэтому для сложных молекул, имеющих молярную теплоемкость C_V больше шести, необходимо, наряду с поступательными и вращательными степенями свободы, принимать во внимание и колебательные степени свободы.

Развитая теория теплоемкостей, которая целиком основывается на классических представлениях, учитывающих лишь механические виды движения молекул, является приближенной. Из нее, например, следует, что все двуатомные газы с молекулами с пятью степенями свободы должны иметь в точности одинаковые теплоемкости C_V при постоянном объеме. Число степеней свободы может быть только целым, и изменение числа степеней свободы на одну должно вести к изменению теплоемкости на $\frac{1}{2} R = 0,993 \text{ кал/град моль}$. Из той же табл. V видно, что двуатомные газы имеют несколько различные теплоемкости. Эти различия превышают ошибки наблюдений и, следовательно, являются реальными. С другой стороны, они много

меньше $\frac{1}{2} R$. Такие различия не могут быть объяснены с точки зрения приведенной теории. Из рассмотренной теории следует также, что теплоемкость газов не зависит от температуры; *эксперименты же показывают, что на самом деле теплоемкости зависят от температуры: теплоемкость всех веществ при низких температурах меньше, чем при более высоких.* Например, для газообразного водорода мы имеем:

| | | | |
|--------------------------------|---------------|--------------|--------------|
| $T^{\circ}\text{K} \dots\dots$ | 197° | 90° | 40° |
| $C_V \dots\dots$ | 4,38 | 3,25 | 2,98 |

Как видно, при низкой температуре $T = 40^{\circ}\text{K}$, т. е. при $t = -233^{\circ}\text{C}$, теплоемкость водорода значительно меньше той, которую мы получили из классической теории, приписывая двуатомной молекуле водорода пять степеней свободы; она близка к $\frac{3}{2} R$. Наоборот, при очень высоких температурах теплоемкости окажутся выше вычисленных. Только для средних температур классическая теория теплоемкости дает хорошие результаты. Это объясняется неприменимостью классических представлений к отдельным атомам и молекулам. Правильная теория теплоемкости дается квантовой механикой.

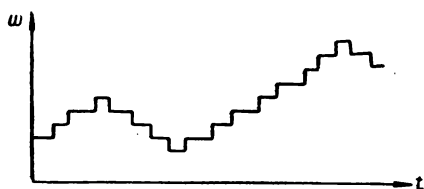


Рис. 118. Изменение энергии вращения (или колебания) молекулы: энергия меняется скачкообразно.

По классическим воззрениям энергия w_0 , приходящаяся на любую степень свободы, может меняться непрерывно. По квантовой теории энергия вращения молекул, а также энергия их колебаний могут меняться лишь скачками; графически изменение энергии вращения или колебания w со временем t изобразится ступенчатой линией (рис. 118). Для энергии вращения обычных двуатомных молекул (азот, кислород) эти ступеньки представляют собой величины порядка 10^{-15} эрг.

Средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы $\frac{1}{2} kT$ при $T = 300^{\circ}\text{K}$, равна $\bar{w} = 2,17 \cdot 10^{-14}$ эрг; таким образом, ступеньки энергии вращения молекул при комнатной температуре малы по сравнению со средней энергией, приходящейся на одну степень свободы. Благодаря этому теплоемкость может рассчитываться с классической точки зрения. При низких же температурах, когда сама энергия \bar{w}_0 сравнима с величиной ступеньки энергии, классические воззрения непригодны.

При этом оказывается, что энергия вращения молекул перестает изменяться с температурой. В результате теплоемкость всех газов при низкой температуре стремится к значению $C_V = \frac{3}{2}R$.

Кроме того, при низких температурах по квантовой теории иначе, чем по классической, рассчитывается среднее значение энергии (приходится принимать во внимание так называемое „вырождение“ газа).

Наконец, при очень низкой температуре газ замерзнет и превратится в твердое тело. Теплоемкость же твердых тел, как мы увидим в дальнейшем, стремится к нулю при приближении температуры к абсолютному нулю.

Что касается энергии колебаний, то ее ступеньки гораздо больше: для не очень сложных молекул они порядка $2 \cdot 10^{-13}$ эрг, т. е. приблизительно в 10 раз больше средней энергии $\bar{\omega}_0$, приходящейся на одну степень свободы при комнатных температурах. Благодаря этому при комнатных температурах энергию колебаний мы можем не рассматривать: она сказывается лишь при высоких температурах.¹ Для сложных молекул ступеньки энергии колебаний бывают меньше, и тогда роль энергии колебаний молекулы сказывается и при средних температурах.

На рис. 119 представлен ход теплоемкости двуатомного газа с температурой. При высокой температуре играют роль колебания (на них приходится две степени свободы, см. § 93) и теплоемкость $C_V = 7/2R$, при средних температурах $C_V = 5/2R$ и при очень низких $C_V = 3/2R$. Пунктирная часть кривой, стремящаяся к нулю, указывает ход теплоемкости после затвердевания газа.

При учете зависимости теплоемкости многоатомных газов от температуры при очень высоких температурах следует еще принимать во внимание диссоциацию молекул. Например, при диссоциации двуатомной молекулы возникнут два атома, каждый из которых имеет три степени свободы. При полной диссоциации двуатомный газ

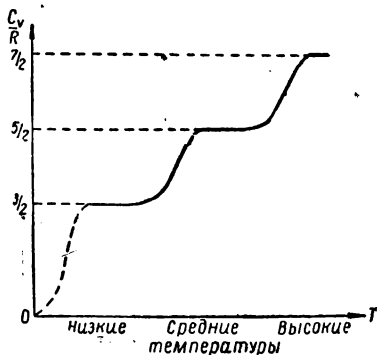


Рис. 119. Ход теплоемкости двуатомного газа с температурой.

¹ Квантовая теория молекул показывает, что в молекулах имеется так называемая нулевая энергия колебаний, которая не исчезает и при температуре, равной абсолютному нулю. Однако следующая за этой „нулевой“ ступенька энергии колебаний лежит настолько выше, что ее приходится принимать во внимание лишь при очень высоких температурах. Таким образом, хотя при низких и средних температурах колебания в молекулах и не отсутствуют вовсе, но они не зависят от температуры и, следовательно, не влияют на теплоемкость.

превратится в смесь двух одноатомных газов, сумма молярных теплоемкостей которых будет равна $6/2R$.

Поэтому ход теплоемкости двухатомного газа при высоких температурах будет в действительности отличаться от изображенного на рис. 119.

§ 50. Закон распределения скоростей Максвелла. В § 46 мы рассматривали лишь среднее значение квадрата скорости молекул. Однако на самом деле молекулы движутся с различными скоростями, при этом при каждой температуре T существует наиболее вероятная скорость v_b . Молекулы, скорости которых много больше или много меньше наиболее вероятной, встречаются редко.

Ввиду полной беспорядочности движения молекул, нельзя ставить вопроса о числе молекул, которые обладают точно заданной скоростью v , так как таких молекул в каждый данный момент вообще может не оказаться. Но можно поставить вопрос о числе молекул, скорости которых лежат в некотором определенном интервале скоростей, например, имеют значения, лежащие между некоторыми данными скоростями v_1 и v_2 . Закон распределения скоростей был впервые выведен Максвеллом. Максвелл, пользуясь теорией вероятности, подсчитал число молекул Δn , скорости которых лежат в интервале скоростей от некоторой заданной скорости v до $v + \Delta v$.

Закон Максвелла удобнее формулировать, введя относительную скорость

$$u = \frac{v}{v_b}, \quad (1)$$

где v — данная скорость, а v_b — наиболее вероятная для молекул данного газа при данной температуре. По закону Максвелла число молекул Δn_u относительные скорости которых лежат в интервале u , $u + \Delta u$, где Δu должно быть взято малым по сравнению с u , равно

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n \cdot e^{-u^2} \cdot u^2 \Delta u, \quad (2)$$

где n — полное число молекул рассматриваемого газа.

Наиболее вероятная скорость v_b по расчетам Максвелла равна

$$v_b = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (3)$$

где μ — молекулярный вес данного газа, T — его абсолютная температура, R — газовая постоянная. Так как $R = kN$, а $\mu = mN$, где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы данного газа, N — число Авогадро, то формуле (3) можно также придать вид:

$$v_b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (3a)$$

Откладывая по оси абсцисс значение относительной скорости молекул u , а по оси ординат — значение величины $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u}$ (эта

величина называется *функцией распределения*), получим кривую, представленную на рис. 120. Кривая имеет максимум при $u=1$, что соответствует значению скорости v , равной наиболее вероятной скорости v_v .

Относительное число молекул $\Delta n/n$, скорости которых лежат в данном интервале $u, u + \Delta u$, равно произведению ординаты кривой на Δu , т. е. изобразится площадью столбика, заштрихованного на рис. 121.

Для того чтобы составить более конкретное представление о законе Максвелла, приведем следующие данные. Наиболее вероятная скорость молекул азота ($\mu = 28$) при 148°C равна

$$v_v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 10^7 \cdot 421}{28}} \text{ см/сек} =$$

$$= 500 \text{ м/сек.}$$

При этом распределение молекул азота по областям скоростей будет следующее:

| Область скоростей в м/сек | Часть (в %) общего числа молекул азота ($T=421^\circ \text{K}$), имеющих скорости, заключенные в указанных пределах |
|---------------------------|---|
| $0 < v < 100$ | 0,6 |
| $100 < v < 300$ | 12 |
| $300 < v < 500$ | 30 |
| $500 < v < 700$ | 29 |
| $700 < v < 1000$ | 23 |
| $1000 < v$ | 5,4 |

Как видно, 59% от общего числа молекул имеют скорости, лежащие в области между 300 м/сек и 700 м/сек, т. е. в области, на которую приходится и наиболее вероятная скорость $v_v = 500 \text{ м/сек}$. Относительное число медленных молекул ($v < 100 \text{ м/сек}$) и очень

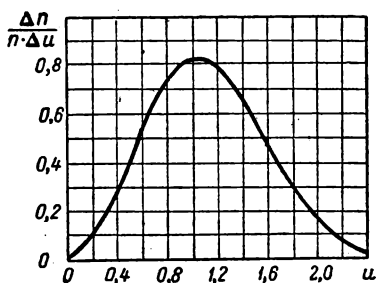


Рис. 120. Функция распределения Максвелла.

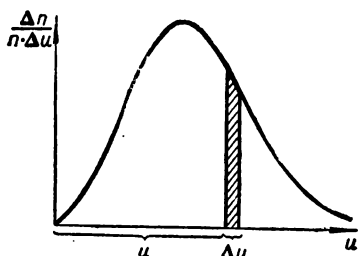


Рис. 121. Площадь заштрихованного столбика представляет относительное число молекул, скорости которых лежат в данном интервале скоростей Δu .

быстрых мало. Однако все же число молекул, скорости которых более чем вдвое превышают наиболее вероятную ($v > 1000$ м/сек), достигает 5,4%. Наиболее вероятная скорость молекул данного газа определяется его температурой: она тем больше, чем выше температура; однако в газе и при невысоких температурах в некотором количестве присутствуют молекулы, движущиеся со значительными скоростями; наличие таких „горячих“ молекул, как мы увидим в дальнейшем, играет весьма существенную роль для протекания многих процессов.

Кривая распределения скоростей Максвелла позволяет найти среднюю арифметическую скорость, для которой, как можно показать, получается значение:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (4)$$

Таким образом, сопоставляя три рассмотренные нами скорости:

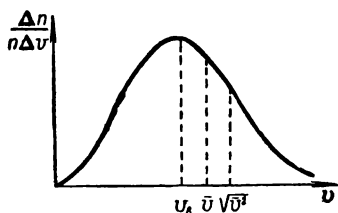


Рис. 122. Сравнение наиболее вероятной v_v , средней арифметической \bar{v} и средней квадратичной $\sqrt{\bar{v}^2}$ скоростей молекул.

1) наиболее вероятную

$$v_v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \cong 1,41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

2) среднюю арифметическую

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cong 1,60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

3) среднюю квадратичную

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \cong 1,73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

видим, что наименьшей из них является наиболее вероятная, а наибольшей — средняя квадратичная (рис. 122). Отношение между этими скоростями не зависит ни от температуры, ни от рода газа.

Приведем пример пользования формулой Максвелла. Пусть требуется определить, какая часть молекул водорода ($\mu = 2$) при $T = 300^\circ \text{K}$ обладает скоростями, лежащими в интервале от 1900 до 1905 м/сек.

Для этого прежде всего находим значение наиболее вероятной скорости молекул водорода при $T = 300^\circ \text{K}$:

$$v_v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 8,31 \cdot 10^7 \cdot 300}{2}} \text{ см/сек} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ см/сек}.$$

Отсюда значение относительной скорости, соответствующей скорости молекул водорода $v = 1900$ м/сек при данной температуре, будет:

$$u = \frac{v}{v_v} = \frac{1,9 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^5} \approx 1,2.$$

Значение Δu определим из соотношения $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_v}$; так как $\Delta v = 1905 \text{ м/сек} - 1900 \text{ м/сек} = 5 \cdot 10^2 \text{ см/сек}$, то

$$\Delta u = \frac{5 \cdot 10^2}{1,6 \cdot 10^5} = 0,0031.$$

Значение $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u}$, соответствующее $u = 1,2$, найдем из рис. 120, откуда имеем

$$\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u} = 0,78.$$

Отсюда относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей от $v = 1900$ м/сек до $v = 1905$ м/сек, равно

$$\frac{\Delta n}{n} = 0,78 \cdot 0,0031 = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

т. е. 0,25% всех молекул имеют скорости, заключенные в указанном интервале.

Для многих конкретных задач весьма важно знать число молекул, скорости которых больше некоторого заданного значения u . Число этих молекул изобразится на графике, дающем закон распределения Максвелла, площадью фигуры, заштрихованной на рис. 123. Эту площадь как функцию скорости u можно вычислить путем интегрирования формулы Максвелла; результат такого расчета может быть представлен в виде таблицы или графика. Обозначим через n_u/n число молекул, скорости которых больше данной u ; на рис. 124 представлена кривая значения n_u/n в зависимости от u . Значение ординаты этой кривой 1,0 для $u = 0$ означает, что все молекулы имеют скорости, заключенные между 0 и ∞ ; ордината 0,57 для $u = 1,0$ означает, что 57% всех молекул имеют скорости, превышающие наиболее вероятную, и т. д. Для больших u (практически для $u > 3$) величина n_u/n приближенно представляется следующей формулой:

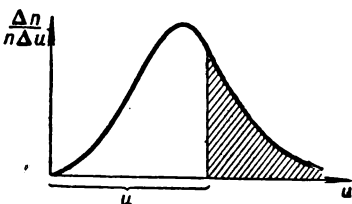


Рис. 123. Площадь заштрихованной фигуры дает относительное число молекул, скорости которых больше данного значения u .

$$\frac{n_u}{n} = 1,128 u \cdot e^{-u^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим еще несколько конкретных примеров.

Пример 1. Какая часть молекул газа имеет скорости, лежащие между $\frac{1}{2}v_v$ и $2v_v$?

Решение. Так как здесь интервал скоростей Δu велик, то нельзя непосредственно пользоваться формулой Максвелла (2). Поэтому пользуемся графиком, приведенным на рис. 124. Для скорости молекул, равной $\frac{1}{2}$ от наиболее вероятной, относительная скорость $u = \frac{1}{2}$; по графику рис. 124 этому значению u соответствует $\frac{n_u}{n} = 0,92$, что означает, что 92% всех молекул движется со скоростями, превышающими $\frac{1}{2}v_v$. Также имеем, что скорости $2v_v$ со-

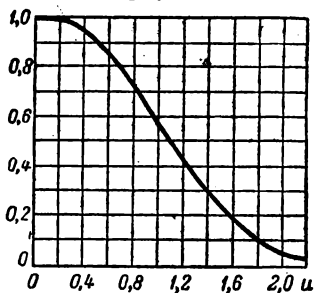


Рис. 124. Ординаты кривой дают относительное число молекул, скорости которых больше данного значения u .

ответствует $u = 2$; этому значению u соответствует по графику $\frac{n_u}{n} = 0,05$, что означает, что 5% всех молекул имеют скорости, превышающие удвоенную наиболее вероятную скорость. Из этих данных имеем, что число молекул, скорости которых лежат между $\frac{1}{2}v_v$ и $2v_v$, составляет $92\% - 5\% = 87\%$ от общего числа молекул.

Пример 2. Какая часть молекул имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую удвоенную среднюю кинетическую энергию поступательного движения?

Решение. Средней кинетической энергией обладает молекула, движущаяся со средней квадратичной скоростью. Поэтому скорость молекулы, кинетическая энергия которой равна удвоенной средней кинетической энергии, будет удовлетворять условию:

$$v = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\bar{v}^2}.$$

Относительная скорость u , соответствующая этому значению v , равна

$$u = \frac{v}{v_B} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{v}^2}}{v_B},$$

но

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ а } v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

откуда получаем

$$u = \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} = 1,73.$$

По графику рис. 124 значению $u = 1,73$ соответствует $\frac{n_u}{n} = 0,11$, откуда следует, что число молекул, кинетическая энергия которых превышает удвоенную среднюю кинетическую энергию, составляет 11% от общего числа молекул.

Формула Максвелла (2) дает число молекул, скорости которых лежат в данном интервале скоростей Δv , *независимо от направления скоростей*. Однако может быть поставлен и более частный вопрос: каково число молекул, скорости которых лежат в данном интервале скоростей и имеют некоторые определенные направления? Для этого введем в рассмотрение *вектор* скорости молекул \mathbf{v} , составляющие которого обозначим через v_x , v_y и v_z .

Число молекул, составляющие скоростей которых v_x лежат в интервале $v_x, v_x + \Delta v_x$, составляющие v_y — в интервале $v_y, v_y + \Delta v_y$, составляющие v_z — в интервале $v_z, v_z + \Delta v_z$, равно

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / kT} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (6)$$

или

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E_k}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (6a)$$

где

$$E_k = \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} \text{ — кинетическая энергия молекулы.}$$

Допуск, сделанный для составляющих скоростей v_x, v_y, v_z , ограничивает как интервал, в котором лежит численное значение скорости v , так и ее направление. В самом деле, введем координатную систему, в которой по

осям отложим значения v_x, v_y, v_z (рис. 125); вектор скорости \mathbf{v} в этой системе изобразится стрелкой, начало которой лежит в начале координат. Условие, что составляющие скоростей молекулы v_x, v_y, v_z лежат в интервале $v_x, v_x + \Delta v_x; v_y, v_y + \Delta v_y; v_z, v_z + \Delta v_z$, означает, что речь идет о всех тех молекулах, скорости \mathbf{v} которых изображаются на рис. 125 векторами, концы которых лежат внутри данного объема $\Delta\omega = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$.

Если ограничить вектор скорости молекулы лишь условием, чтобы его численное значение лежало в данном интервале скоростей $v, v + \Delta v$, то на рис. 126 эти скорости изобразятся векторами, имеющими всевозможные направления, но длина которых такова, что они оканчиваются внутри шарового слоя радиуса v и толщины Δv .¹ Число молекул, скорость которых удовлетворяет такому условию, выразится формулой (6), где $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ должно быть заменено объемом указанного шарового слоя

$$\Delta\omega = 4\pi v^2 \cdot \Delta v,$$

откуда по (6)

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \Delta v. \quad (7)$$

Легко видеть, что формула (7) переходит в формулу Максвелла (2), если в нее ввести относительную скорость $u = \frac{v}{v_b}$. Обе формулы (6) и (7) дают

распределение молекул по скоростям. Они отличаются лишь способом выбора тех групп молекул, об относительном числе которых идет речь.

Формуле (7) можно придать еще один вид, вводя вместо скоростей кинетическую энергию E_k . Дифференцируя равенство $E_k = \frac{mv^2}{2}$, получим

$$dE_k = mv dv.$$

Заменяя дифференциалы dE_k и dv через малые интервалы энергии и скорости ΔE_k и Δv , найдем

$$\Delta v = \frac{1}{mv} \Delta E_k.$$

Подставляя это значение Δv в (7) и замечая также, что $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$, получим

$$\Delta n = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E_k}{kT}} \cdot \sqrt{E_k} \cdot \Delta E_k. \quad (8)$$

Формула (8) указывает, какое число частиц Δn имеет кинетическую энергию, приходящуюся на данный интервал энергий.

¹) Для наглядности на рис. 126 представлено лишь сечение этого шарового слоя плоскостью YZ .

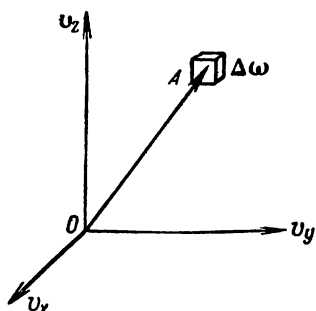


Рис. 125. Скорости, составляющие которых v_x, v_y, v_z ограничены данными интервалами $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$, изображаются векторами, концы которых лежат в объеме $\Delta\omega = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$.

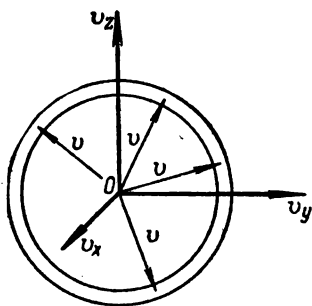


Рис. 126. Скорости, численные значения которых ограничены данным интервалом, изображаются векторами, концы которых лежат внутри шарового слоя.

Больцман обобщил закон распределения Максвелла (6) на случай, когда молекулы движутся в поле силы тяжести (в общем случае — в любом силовом поле). При этом кинетическая энергия E_k в формуле (6) должна быть заменена полной энергией молекулы $E = E_k + E_p$, где E_p — ее потенциальная энергия. Кроме того, так как потенциальная энергия, вообще говоря, зависит от координат, приходится говорить о числе молекул, для которых ограничены не только скорости определенным интервалом скоростей, но и координаты которых также ограничены определенным интервалом. Окончательно, вместо закона распределения (6) получается:



Рис. 127. График, соответствующий закону Больцмана.

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (8a)$$

Формула (8a) выражает закон распределения Больцмана. Графически зависимость $\Delta n/\Delta\omega$ от E , где $\Delta\omega = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z$, изображена на рис. 127.

§ 51. Распределение частиц с высотой. Формула распределения Больцмана позволяет получить закон убывания числа частиц с высотой в поле силы тяжести. Представим себе вертикальный столб газа, все части которого находятся при одинаковой температуре T . Скорости молекул и их распределение по скоростям при этом повсюду (и внизу и вверху) одинаковы и подчиняются закону Максвелла, которым мы будем пользоваться в виде, даваемом формулой (6) § 50.

Распределение частиц по энергиям дается формулой Больцмана (8a) того же параграфа:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1)$$

Полная энергия $E = E_k + E_p$, где E_k — кинетическая энергия и E_p — потенциальная; в данном случае потенциальная энергия есть энергия молекул в поле силы тяжести, т. е. $E_p = mgh$, где h — высота, на которой находится молекула. Отсюда (1) принимает вид:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E_k + mgh}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z,$$

или, переходя к числу частиц, приходящихся на единицу объема,

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_k}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z. \quad (2)$$

Распределение молекул по скоростям на любой высоте выражается формулой Максвелла (6) § 50:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n_h e^{-\frac{E_k}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (3)$$

где n_h — число частиц в единице объема на высоте h .

Формулы (3) и (2) можно согласовать, если считать, что число молекул в единице объема n_h на высоте h выражается соотношением:

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad (4)$$

где n_0 — число молекул в единице объема на высоте $h=0$. Эта формула n дает закон распределения числа молекул в единице объема с высотой: число молекул в единице объема n_h убывает с высотой экспоненциально (рис. 128).

Пользуясь формулой (4), легко получить выражение для зависимости давления газа от высоты.

Давление газа при данной температуре пропорционально числу частиц n в единице объема [формула (4) § 46], откуда закон убывания давления p с высотой h будет тот же, что и закон убывания числа частиц:

$$p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Замечая, что $\frac{m}{k} = \frac{\mu}{R}$, где μ — молекулярный вес газа, а R — газовая постоянная, перепишем последнюю формулу:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (5)$$

Формула (5) носит название *барометрической формулы*; она указывает, что давление газа убывает с высотой экспоненциально. Кроме того, из формулы (5) видно, что убывание давления газа с высотой зависит от молекулярного веса: чем больше молекулярный вес газа, тем скорее убывает с высотой его давление. Формулой (5) можно приблизительно пользоваться для определения атмосферного давления p_h на разных высотах постольку, поскольку температуру T можно считать одинаковой на разных высотах, что на самом деле не выполняется для значительных разностей высот.

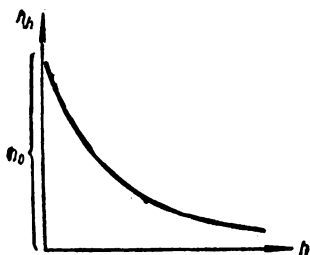


Рис. 128. Закон убывания числа частиц в единице объема с высотой h .

§ 52. Определение числа Авогадро. В газе, находящемся в поле силы тяжести, число молекул в единице объема убывает с высотой. Если число молекул в единице объема на нулевой высоте равно n_0 , то на высоте h оно равно

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad (1)$$

где m — масса молекулы, g — ускорение силы тяжести, k — постоянная Больцмана, T — температура в шкале Кельвина [обоснование формулы (1) см. в § 51].

Формула (1), дающая распределение числа молекул с высотой, была применена Перреном для броуновских частиц и использована для определения числа Авогадро N . Броуновские частицы (см. § 43) находятся под влиянием ударов молекул в беспорядочном движении. Исходя из общих соображений о характере беспорядочных ударов, можно показать, что *средняя кинетическая энергия $\bar{\epsilon}$ одной*

броуновской частицы равна средней кинетической энергии молекул при данной температуре T , т. е.

$$\bar{w} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \left(\frac{R}{N} \right) T. \quad (2)$$

Таким образом, совокупность броуновских частиц в точности воспроизводит модель молекулярно-кинетической структуры газа; только в этой модели „молекулы“ так велики, что их можно видеть в микроскоп, скорости же их движения малы из-за большой по сравнению с отдельной молекулой массы. Совокупность броуновских частиц подчиняется всем газовым законам, в том числе и закону (1), дающему убывание числа частиц с высотой.

Из формулы (2) мы имеем, что число Авогадро N равно

$$N = \frac{3}{2} \frac{R}{\bar{w}} \cdot T, \quad (3)$$

откуда видно, что, зная среднюю кинетическую энергию \bar{w} броуновской частицы при данной температуре T , можно непосредственно определить число Авогадро N . Однако попытки непосредственного определения средней кинетической энергии броуновской частицы $\bar{w} = \frac{m\bar{v}^2}{2}$ по массе броуновской частицы m и среднему значению квадрата ее скорости \bar{v}^2 не привели к желательным результатам. Дело в том, что из-за хаотического движения броуновской частицы невозможно путем измерения под микроскопом определить среднее значение квадрата ее скорости \bar{v}^2 . Поэтому Перрен пошел обходным путем, путем определения средней кинетической энергии \bar{w} из закона распределения частиц с высотой.

Броуновские частицы, взвешенные в какой-либо жидкости, не опускаются все со временем на дно сосуда, но распределяются, благодаря совершаемому ими движению, с плотностью, убывающей по высоте: у самого дна частиц будет больше всего, на некоторой высоте над дном — их будет мало. Закон распределения числа броуновских частиц n в зависимости от высоты h определится формулой (1). Это убывание числа частиц с высотой происходит чрезвычайно быстро (масса m броуновской частицы очень велика по сравнению с массой одной молекулы), оно заметно при изменении высоты h на доли миллиметра.

Подставляя в формулу (1) вместо температуры T ее значение через \bar{w} по (2), получим

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{3Ph}{2\bar{w}}}, \quad (4)$$

здесь P — вес броуновской частицы; из формулы (4) видно, что по закону убывания числа частиц с высотой, зная их массу m , можно определить среднюю кинетическую энергию \bar{w} ; знание же \bar{w} позволяет найти по (3) число Авогадро N .

Перреном была изготовлена из смолы *garcinia morel'*я (гуммигут) путем многократного центрифугирования весьма однородная эмульсия,

состоящая из шарообразных частиц одинакового размера, порядка микрона. Взвешенные в воде, эти частицы обнаруживали при наблюдении в микроскоп интенсивное броуновское движение. Число частиц в жидкости убывало с высотой. Это убывание происходило очень быстро.

Для наблюдения этого убывания применялся следующий метод: в предметном стекле (рис. 129) делалось цилиндрическое углубление; это углубление заполнялось эмульсией и закрывалось сверху покровным стеклом. Эмульсия рассматривалась в микроскоп с малой глубиной изображения. Фокусируя микроскоп на определенный слой эмульсии, можно было видеть броуновские частицы, находящиеся в этом слое; изображение частиц, расположенных выше и ниже, не попадало в фокус. Передвигая объектив микроскопа, его можно было фокусировать на различные слои эмульсии и таким образом замечать изменение числа частиц с высотой.

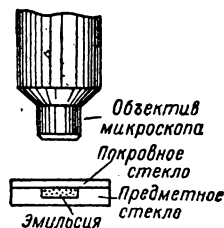


Рис. 129. Метод наблюдения броуновских частиц в микроскоп.

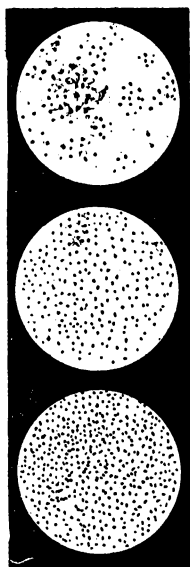


Рис. 130. Распределение броуновских частиц в слоях на разной высоте. Чем выше лежит слой, тем меньше в нем частиц.

На рис. 130 представлены мгновенные микрофотограммы с броуновских частиц, произведенные для различных слоев жидкости: в нижнем слое частиц много, а в верхнем — мало. Непосредственный подсчет числа частиц n'_h , видимых в микроскоп в слоях на различных высотах h , позволяет определить закон их убывания с высотой. Так как число частиц n'_h , видимых в поле зрения микроскопа, пропорционально их числу n_h в единице объема на той же высоте, то числа n'_h должны удовлетворять формуле (4).

Пусть число частиц в слое, лежащем на высоте h_1 , будет n'_{h_1} ; по формуле (4) оно равно

$$n'_{h_1} = n'_0 \cdot e^{-\frac{3}{2} \frac{P}{w} h_1};$$

аналогично для числа частиц n'_{h_2} , находящихся в слое на высоте h_2 , получим

$$n'_{h_2} = n'_0 \cdot e^{-\frac{3}{2} \frac{P}{w} h_2}, \text{ откуда } \frac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}} = e^{-\frac{3}{2} \frac{P}{w} (h_1 - h_2)}.$$

Логарифмируя это выражение и решая его относительно \bar{w} , получим

$$\bar{w} = \frac{3}{2} \frac{P(h_2 - h_1)}{\ln \frac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}}}. \quad (5)$$

Здесь n'_{h_1} и n'_{h_2} определяются путем непосредственного счета числа частиц, видимых под микроскопом, $h_2 - h_1$ — сдвигом объектива

микроскопа, который необходимо сделать, чтобы перейти от наблюдения числа частиц в слое, лежащем на высоте h_1 , к слою, лежащему на высоте h_2 . Этот сдвиг измеряется микрометрическим винтом. Остается для определения \bar{w} найти вес броуновской частицы m . Вес броуновских частиц Перрен измерял, применяя формулу Стокса (§ 42). Формула Стокса позволяет по скорости падения частицы в вязкой жидкости определять ее радиус r . Вес сферической частицы P непосредственно выражается через ее радиус r и плотность ρ вещества, из которого она состоит:

$$P = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho'),$$

где ρ' — плотность воды.

Скорость падения отдельных частиц, наблюдаемых Перреном, определить нельзя, так как они совершают броуновское движение. Однако можно поступить следующим образом: если размешать эмульсию, налитую в высокий узкий сосуд, так, чтобы частицы в ней распределились по высоте равномерно, а затем оставить ее в покое, то частицы начнут оседать; верхняя часть жидкости начнет просветляться. При этом образуется хотя и несколько размытая (из-за броуновского движения), но все же заметная для невооруженного глаза граница помутнения. Скорость опускания этой границы помутнения и даст скорость падения отдельных частиц. Таким образом могут быть найдены все величины, необходимые для определения средней кинетической энергии частицы \bar{w} . Зная же \bar{w} , определим, как отмечено, по (3) число Авогадро N .

Другой метод определения числа Авогадро N , примененный Перреном, основывается на наблюдении смещения броуновских частиц. Предположим, что мы наблюдаем проекцию смещения броуновской частицы на произвольным образом проведенную ось OX . Пусть за время наблюдения t проекция смещения на эту ось равна x . Если произвести измерения таких x для многих броуновских частиц, то, как показал Эйнштейн, среднее значение квадрата x удовлетворяет соотношению:

$$\bar{x}^2 = \frac{RT}{3\pi\eta r N} t,$$

где R — газовая постоянная, T — температура в шкале Кельвина, η — коэффициент вязкости среды, в которую погружены броуновские частицы, r — радиус броуновской частицы. Так как все величины, входящие в эту формулу, кроме N , доступны непосредственному измерению, то эта формула позволяет найти число Авогадро N .

Измерения, произведенные Перреном, показали, что число Авогадро есть величина порядка $6 \cdot 10^{23}$ частиц на моль. Более точных результатов методы Перрена дать не могут. В дальнейшем (см. т. II) мы приведем другие способы, которые позволяют определить число Авогадро более точно. Как уже упоминалось, в настоящее время для числа Авогадро принимается значение $N = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

§ 53. **Длина свободного пути молекул.** Молекулы, находясь в газе в состоянии непрерывного и хаотического движения, сталкиваются друг с другом; между столкновениями они проходят свободно некоторый путь λ . Длина этого пути между двумя столкновениями различна, но, благодаря большому числу молекул и беспорядочности их движения, можно говорить о средней длине свободного пути молекул. Подсчитаем эту среднюю длину свободного пути молекул $\bar{\lambda}$.

Рассмотрим некоторую определенную молекулу, которая движется со скоростью v ; молекулу представим себе в виде шарика радиуса r . После каждого столкновения молекула меняет направление скорости v , однако для простоты предположим, что молекула продолжает после столкновения двигаться в том же направлении, в каком она двигалась до столкновения. Кроме того, для простоты положим, что все другие молекулы, кроме рассматриваемой, неподвижны. Тогда молекула заденет на своем пути все те молекулы, центры которых лежат на расстоянии, не большем $2r$ (рис. 131) от прямой, вдоль которой она движется.

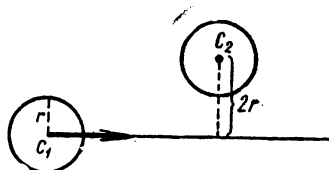


Рис. 131. Молекула задевает на своем пути все те молекулы, центры которых лежат на расстоянии, не большем $2r$ от прямой, вдоль которой она движется.

Следовательно, за единицу времени молекула заденет все те z молекул, центры которых лежат внутри цилиндра радиуса $R=2r$ и длины l , численно равной скорости молекулы v (рис. 132); число же молекул z , которые попадают внутрь такого цилиндра, равно

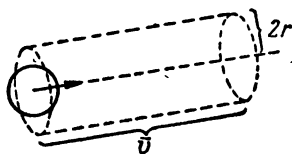


Рис. 132. Молекула задевает все те молекулы, центры которых лежат внутри цилиндра радиуса $2r$.

$$z = \pi R^2 v n_0,$$

где n_0 — число молекул в единице объема. Подставляя сюда $R=2r$ и подразумевая под v среднюю скорость движения молекул \bar{v} , получим выражение для *среднего числа столкновений молекул в единицу времени*

$$\bar{z} = 4\pi r^2 \bar{v} n_0. \quad (1)$$

Так как на самом деле другие молекулы тоже движутся, то для числа столкновений \bar{z} получается несколько большее значение, чем даваемое формулой (1).

Соответственные выкладки показывают, что \bar{z} в $\sqrt{2}$ раз больше:

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\pi r^2 \bar{v} n_0. \quad (2)$$

Размеры молекул являются величинами порядка $r \cong 10^{-8}$ см; число молекул в единице объема при нормальных условиях $n_0 \cong 3 \cdot 10^{19}$ и скорость молекул $\bar{v} \cong 5 \cdot 10^4$ см/сек, откуда мы получаем, что

число столкновений, испытываемых молекулами газа в единицу времени, по порядку величины

$$\bar{z} \cong 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3,14 (10^{-8})^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{19} \text{ сек.}^{-1} \cong 3 \cdot 10^9 \text{ сек.}^{-1}.$$

Таким образом, молекулы испытывают при нормальных условиях несколько миллиардов столкновений в секунду.

Среднюю длину свободного пути молекулы $\bar{\lambda}$ получим, поделив средний путь, проходимый ею за единицу времени, на число столкновений в единицу времени \bar{z} . Так как путь, проходимый в единицу времени, численно равен скорости \bar{v} , то средняя длина свободного пути молекулы

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}. \quad (3)$$

Подставляя сюда z по (2), получим

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4 \sqrt{2} \pi r^2 n_0} \quad (4)$$

или, если ввести вместо радиуса молекулы ее диаметр $\sigma = 2r$, то

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0}. \quad (4a)$$

Из формул (4) и (4a) видно, что средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна числу молекул в единице объема n_0 . Так как, при постоянной температуре, n_0 прямо пропорционально давлению газа, то получаем

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{p_2}{p_1}, \quad (5)$$

где $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ — соответственно длины свободных путей молекул, относящиеся к давлениям газа p_1 и p_2 . Из формулы (5) имеем: *длина среднего свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна давлению газа p при постоянной температуре.*

Абсолютное значение средней длины свободного пути молекул зависит от их диаметра σ . В дальнейшем мы увидим, что существуют методы определения численного значения $\bar{\lambda}$ для разных газов; по этим численным значениям $\bar{\lambda}$ по формуле (4a) определяются диаметры молекул σ . Надо иметь в виду, что найденные таким образом диаметры не представляют собою в точности действительных размеров молекул. Прежде всего, молекулы не являются правильными шарами; во-вторых, процесс столкновения молекул не похож на самом деле на соударение упругих шаров. Молекулы представляют собою сложные системы, состоящие из атомных ядер и электронов. Силы взаимодействия между ними, которые сказываются на малых расстояниях, носят сложный (отчасти электрический) характер. Процесс столкновения сводится к тому, что на малых расстояниях молекулы отталкиваются друг от

друга, причем силы отталкивания возрастают по мере уменьшения расстояния между ними (подробнее см. § 61). В результате действия этих сил скорости молекул меняют свое направление.

Таким образом, диаметр молекул σ , вычисленный в предположении, что молекулы являются упругими шариками, дает лишь некоторое приближенное представление о размерах молекул; величина σ является, как принято говорить, *эффективным диаметром молекулы*. Величина πr^2 называется *эффективным сечением молекулы*.

Приближенный характер расчетов, приводящих к формуле (4), сказывается в том, что средняя длина свободного пути молекул на самом деле несколько зависит от температуры, в то время как по формуле (4) она не должна зависеть от температуры при нагревании при постоянном объеме. С повышением температуры средняя длина свободного пути молекул несколько повышается. Если среднюю длину свободного пути, вычисляемую по (4), обозначить через $\bar{\lambda}_\infty$, то действительная средняя длина свободного пути $\bar{\lambda}$ при температуре T равна

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_\infty \frac{T}{C + T},$$

где C — величина, постоянная для данного газа; она носит название *постоянной Сэзерленда*, ее значения определяются из опытных данных.

Для азота, например, $C = 102,7^\circ$, откуда формула Сэзерленда дает при $T = 300^\circ \text{K}$ среднюю длину свободного пути $\bar{\lambda}$ на 12% больше, чем при $T = 200^\circ \text{K}$.

Приведем теперь некоторые численные данные.

В табл. VI даны средние длины свободных путей $\bar{\lambda}$ при нормальных условиях ($p = 1 \text{ ат}$, $t = 0^\circ \text{C}$) для некоторых газов и паров и вычисленные по этим $\bar{\lambda}$ эффективные диаметры σ .

Для воздуха при приближенных подсчетах среднюю длину свободного пути $\bar{\lambda}$ при нормальных условиях можно считать равной $\bar{\lambda} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ см}$.

Тогда для различных давлений воздуха, согласно формуле (5), получаем значения, приведенные в табл. VII.

Таблица VII

Длина свободного пути молекул воздуха при различных давлениях

| Давление в мм ртутного столба | 760 | 1 | 0,01 | 10^{-4} | 10^{-6} |
|--|-------------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| Средняя длина свободного пути $\bar{\lambda}$ в см | $7 \cdot 10^{-6}$ | $5 \cdot 10^{-8}$ | $5 \cdot 10^{-1}$ | $5 \cdot 10^1$ | $5 \cdot 10^3$ |

Таблица VI
Средняя длина свободных путей
и эффективные диаметры молекул
и атомов

| Газ (пар) | $\bar{\lambda} \cdot 10^8 \text{ см}$ | $\sigma \cdot 10^8 \text{ см}$ |
|----------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| Водород, H_2 | 1,123 | 2,3 |
| Азот, N_2 | 0,599 | 3,1 |
| Кислород, O_2 | 0,647 | 2,9 |
| Гелий, He | 1,798 | 1,9 |
| Аргон, Ar | 0,666 | 3,6 |

Из табл. VII видно, что средняя длина свободного пути $\bar{\lambda}$ газовых молекул, составляющая при нормальных условиях примерно соты-сячную долю сантиметра, в разреженном газе при давлении в 0,01 мм Hg достигает величины в 5 мм. В очень сильно разреженном газе (давление порядка 10^{-6} мм Hg) длина свободного пути молекул достигает огромной величины в несколько десятков метров.

Эти расчеты позволяют нам выяснить, что представляет собою газ в состоянии сильного разрежения, т. е. в таком состоянии, в каком он находится в сосудах, откачанных современными хорошими насосами. Так, технически не представляет труда откачать из сосуда воздух до давления $p \cong 10^{-4}$ мм Hg; при этом число молекул в 1 см³ будет еще приблизительно равно $4 \cdot 10^{13}$. Средняя же длина их свободного пути, по данным табл. VII, равна $\bar{\lambda} = 50$ см. Если размеры самого сосуда порядка 10 см, то это означает, что каждая данная молекула несколько раз пролетит через весь сосуд и отразится от его стенок раньше, чем она на своем пути случайно столкнется с другой молекулой.

Таким образом, несмотря на то, что в каждом 1 см³ сосуда находится еще количество молекул, выраженное двенадцатизначным числом, сосуд может считаться в достаточной мере „пустым“: молекулы свободно летают в нем от стенки к стенке.

§ 54. **Опыты с молекулярными пучками.** Возможность получать такие разрежения газа, что средняя длина свободного пути молекул

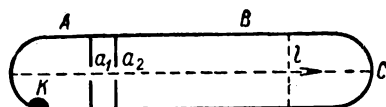


Рис. 133. Образование молекулярного пучка.

достигает десятков сантиметров или даже нескольких метров, позволяет поставить опыты, в достаточной мере непосредственно подтверждающие правильность основных выводов молекулярно-кинетической теории газов.

Представим себе сосуд, разделенный рядом перегородок (рис. 133).

В перегородках имеются малые круглые отверстия a_1 , a_2 , расположенные на одной прямой. Из всего сосуда выкачан воздух до такого давления, что средняя длина свободного пути молекул больше размеров сосуда. В часть сосуда A помещен легкоплавкий металл (например, натрий), и эта часть сосуда подогревается. Тогда металл K, испаряясь, дает пары, которые заполняют часть сосуда A при достаточно низком давлении. Те молекулы этого пара, которые имеют скорость, направленную по прямой, вдоль которой лежат отверстия a_1 , a_2 , пролетают через эти отверстия в часть сосуда B. Благодаря весьма низкому давлению остаточного газа в сосуде, молекулы движутся в части сосуда B прямолинейно и равномерно. Вся совокупность молекул пара металла, пролетевших через отверстия a_1 , a_2 , образует в части сосуда B прямолинейно распространяющийся пучок молекул. Отсюда описанный опыт носит название *опыта с молекулярным (атомным)*

пучком. Достигнув стенки C , атомы металла прилипают к ней, если только она достаточно холодна. Таким образом, на стенке C оседает видимый слой металла, который и указывает на то, что молекулярный пучок долетел до этой стенки. Форма осевшего на стенке C слоя воспроизводит форму отверстий a_1, a_2 ; если эти отверстия круглы, то и осевшее пятнышко металла круглое. Если по пути пучка поставить какое-либо препятствие, например натянуть проволочку l , то на пятне осевшего металла получится „тень“ от этой проволочки. Все эти опыты непосредственно убеждают нас в прямолинейном движении молекул в пучке.

Можно осуществить такое видоизменение опыта с молекулярным пучком, которое позволит оценить длину свободного пути молекул. При низком давлении остаточного газа молекулярный пучок, вылетающий из отверстия a (рис. 134), достигает противоположной стенки C ; на более близких боковых пластинках C_1, C_2, C_3, \dots металл не оседает. Если в сосуд добавить газ так, чтобы длина свободного пути уменьшилась, то молекулы, летящие в пучке, испытают столкновения, не долетев до стенки C . Столкнувшись с молекулами газа, они отклонятся в сторону и оседут на соответственной боковой пластинке C и на более далеких пластинках. Чем больше давление добавляемого газа, тем меньше длина свободного пути и тем на более близкие боковые пластинки попадают молекулы из пучка. Этот опыт позволяет оценить среднюю длину свободного пути при различных давлениях, причем получаются значения, совпадающие по порядку с вычисляемыми на основе молекулярно-кинетической теории газов.

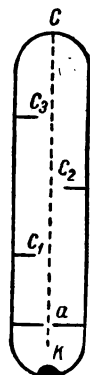


Рис. 134. Определение средней длины свободного пути молекул с помощью молекулярного пучка.

Если в молекулярном пучке в момент его вылета из отверстия a в единицу времени пролетало n_0 молекул, то на некотором расстоянии x от отверстия a их будет меньше, так как часть молекул, претерпев столкновение вышла из пучка в стороны.

Теоретический расчет показывает, что на расстоянии x от начала пучка в единицу времени в нем пролетит n_x молекул, определяемых формулой:

$$n_x = n_0 e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}},$$

где $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пути. Таким образом, число молекул в пучке убывает по экспоненциальному закону. Если положить $x = 2\bar{\lambda}$, то получим

$$n_{2\bar{\lambda}} = n_0 e^{-\frac{2\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}} = n_0 e^{-2} = 0,135 n_0,$$

т. е. только 13,5% от всех молекул в пучке пролетит путь, вдвое превышающий среднюю длину пути.

Наконец, отметим опыты с молекулярными пучками, позволяющие оценить скорость газовых молекул. Эти опыты были впервые произведены Штерном.

Идея опыта Штерна заключается в следующем: представим себе цилиндрический сосуд, по оси которого расположена проволока K (рис. 135). Проволока K окружена цилиндрической загородкой, в которой имеется щелевое отверстие a . Во всем сосуде получается высокий вакуум. В опытах Штерна употреблялась платиновая проволока, покрытая снаружи слоем серебра. При нагревании платиновой проволоки током серебро испарялось и давало молекулярный пучок, вылетающий из щели a и достигающий стенки сосуда в точке b . Если весь сосуд в целом привести во вращение вокруг оси, проходящей через проволоку K , то пучок начнет отставать от сосуда и даст след в смещенной точке b_1 . Легко связать это смещение s между точками b и b_1 со средней скоростью \bar{v} молекул в пучке. Пусть радиус сосуда R . Тогда среднее время \bar{t} , в течение которого молекулы летят от проволоки K до стенки сосуда, равно

$$\bar{t} = \frac{R}{\bar{v}}.$$

За это время \bar{t} каждая точка на стенке сосуда пройдет путь s , равный

$$s = \omega R \bar{t},$$

где ω — угловая скорость вращения сосуда. Из последнего равенства имеем

$$\bar{t} = \frac{s}{\omega R}.$$

Приравнявая оба выражения для времени t друг другу, получим

$$\bar{v} = \frac{\omega R^2}{s}.$$

Так как молекулы движутся с разными скоростями, то след в точке b_1 несколько размазан. Но измеряя смещение s до середины следа и зная радиус сосуда R и угловую скорость его вращения ω , определим среднюю скорость молекул \bar{v} . Измерения, сделанные для серебра, оказались в хорошем согласии со значением скорости, вычисленным по формулам кинетической теории газов.

Опыт Штерна впоследствии повторялся в различных вариантах, один из которых представлен на рис. 136.

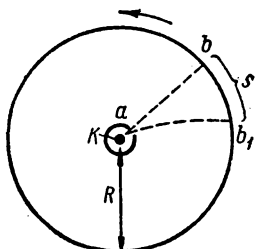


Рис. 135. Схема опыта Штерна для определения скоростей молекул.

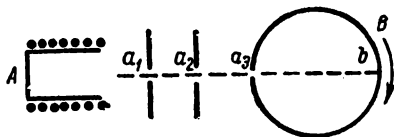


Рис. 136. Схема опыта для определения скоростей молекул.

В вакууме с помощью щелей a_1, a_2 выделяется атомный пучок висмута, испаряемого в печке А. На пути пучка вращается цилиндр В со щелью a_3 . Когда щель a_3 располагается против щелей a_1 и a_2 , в цилиндр влетают атомы. За время, пока эти атомы летят поперек цилиндра, он успевает повернуться на некоторый угол, поэтому атомы попадают не в точку b , расположенную против щели a_3 , но в точку, несколько смещенную относительно b . Более быстрые атомы оказываются при этом смещенными меньше, а более медленные — больше. Получается полоска осевшего металла с разной плотностью в разных местах. Измеряя плотность осевшего металла, можно найти закон распределения атомов по скоростям.

Закон распределения молекул по скоростям в молекулярном пучке несколько отличается от закона распределения молекул по скоростям в объеме самого газа. В объеме газа молекулы распределены по скоростям по закону Максвелла [формула (2) § 50]:

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-u^2} u^2 \Delta u. \quad (1)$$

В молекулярном же пучке больше быстрых молекул, чем в том газе, из которого он возник. Дело в том, что быстрые молекулы чаще прорываются через отверстие в диафрагме, чем медленные. Вычисления показывают, что если в газе относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей $u, u + \Delta u$, равно $\Delta n/n$, то в пучке относительное число молекул, имеющих скорости в том же интервале, равно

$$\frac{\Delta n'}{n'} = \frac{\Delta n}{n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot u,$$

где u — относительная скорость молекул. Отсюда закон распределения молекул по скоростям в пучке выразится не формулой (1), а формулой:

$$\Delta n' = 2n' e^{-u^2} u^2 \Delta u. \quad (2)$$

§ 55. Явления переноса в газах. Диффузия. Беспорядочное движение молекул в газе ведет к их непрерывному перемешиванию, отсюда два разнородных соприкасающихся газа взаимно проникают — диффундируют. Перенос молекул газа из одних мест в другие обуславливает также механизм явлений внутреннего трения в газах и теплопроводности. Все эти явления, связанные с движением молекул, носят название *явлений переноса*.

Во время развития кинетической теории газов против нее делалось возражение такого рода: если скорости движения молекул действительно порядка нескольких сот метров в секунду, как этого требует кинетическая теория газов, тогда взаимное проникновение должно происходить весьма быстро. Если, например, в какой-либо части комнаты открыть сосуд с пахучим веществом, то запах должен бы стать сразу заметным во всей комнате, так как молекулам вещества требуются лишь доли секунды, чтобы пролететь путь, равный размерам комнаты. На самом же деле известно, что диффузия газов при атмосферном давлении происходит медленно; в частности, медленно распространяются запахи. Ошибка в этих рассуждениях

заключается в неучете того, что молекулы, благодаря малой длине свободного пути при атмосферном давлении, непрерывно сталкиваются с другими молекулами, и, таким образом, „толкнутся“ на одном месте. Несмотря на большую скорость, молекула за одну секунду уходит лишь на очень небольшое расстояние от того места, где она находилась, путь ее представляет весьма сложную и запутанную ломаную линию.

Разберем прежде всего явление *диффузии*.

Наблюдения показывают, что при диффузии через некоторую площадку ΔS переносится тем большая масса газа ΔM , чем больше размеры площадки ΔS , чем за больший промежуток времени Δt наблюдается диффузия и чем скорее меняется в направлении, перпендикулярном к ΔS , парциальная плотность ρ диффундирующего газа. Проведем ось OX нормально к площадке ΔS ; пусть парциальная плотность рассматриваемого газа в двух точках, отстоящих друг от друга на отрезок Δx , отличается на $\Delta \rho$, тогда величина $\Delta \rho / \Delta x$ характеризует изменение плотности газа ρ на единицу длины в направлении оси OX ; эта величина называется *градиентом плотности*. По сказанному, ΔM пропорционально градиенту плотности $\Delta \rho / \Delta x$, величине площадки ΔS и времени Δt :

$$\Delta M = -D \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t. \quad (1)$$

Величина D , зависящая от сорта газа и от условий, при которых он находится, называется *коэффициентом диффузии*. Знак минус означает, что масса переносится в сторону убывания плотности.

Формула (1) характеризует явление диффузии с макроскопической точки зрения.

Рассмотрим теперь явление диффузии с точки зрения молекулярно-кинетической теории газов. Для простоты рассмотрим два различных, взаимно проникающих газа, со столь сходными молекулами, что их массы и эффективные сечения можно считать равными друг другу. Такие молекулы будут иметь при одинаковых условиях одинаковые длины свободных путей и одинаковые скорости.

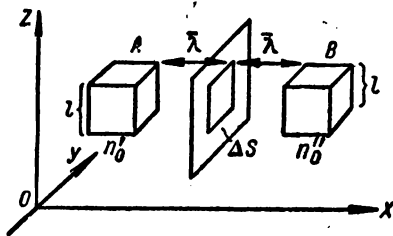


Рис. 137. Перенос молекул через площадку ΔS .

Подсчитаем число молекул одного из двух газов, пролетающих через площадку ΔS (рис. 137), перпендикулярную оси OX , вдоль

которой происходит изменение плотности газа ρ . Мысленно выделим справа и слева от площадки на расстояниях от нее, равных среднему значению длины свободного пути $\bar{\lambda}$, кубические объемы A и B . Тогда можно считать, что молекулы, вылетающие из любого из этих кубиков, будут без столкновений долетать до площадки ΔS .

Пусть боковые грани кубиков A и B параллельны площадке ΔS и равны ей по величине; длину ребра кубиков обозначим через l ; очевидно, $l^2 = \Delta S$. Обозначим число молекул рассматриваемого газа, находящихся в кубике A , через n_A . Ввиду полной беспорядочности движения молекул, как было выяснено в § 46, можно считать, что $1/3$ этих молекул движется вдоль оси OX , из них половина — в направлении положительной оси OX и половина — в направлении отрицательной оси OX . Таким образом, из числа молекул n_A , находящихся в кубике A , число молекул, равное $1/6 n_A$, летит по направлению к площадке ΔS . Так как площадка ΔS отстоит на \bar{l} от кубика, то все эти молекулы долетят до площадки ΔS без столкновений и пролетят через нее. Время δt , в течение которого эти $1/6 n_A$ молекул пролетят через площадку ΔS , равно тому промежутку времени, на который последние из молекул, вылетающие из кубика A в направлении площадки ΔS , пролетят позже первых; отсюда $\delta t = \frac{\bar{l}}{\bar{v}}$, где \bar{v} — средняя арифметическая скорость молекул. Таким образом, число молекул Δn_A , пролетающих через площадку ΔS за единицу времени слева направо, равно

$$\Delta n_A = \frac{1}{6} \frac{n_A}{\delta t} = \frac{1}{6} n_A \frac{\bar{v}}{\bar{l}}.$$

Обозначим через n'_0 число молекул, приходящихся на единицу объема в том месте, где находится кубик A , тогда $n_A = n'_0 l^3$, и выражение для Δn_A можно написать в виде:

$$\Delta n_A = \frac{1}{6} n_A \frac{\bar{v}}{\bar{l}} = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v} l^2 = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v} \Delta S. \quad (2)$$

Точно так же получим, что число молекул Δn_B , пролетающих через площадку ΔS за единицу времени справа налево, будет:

$$\Delta n = \frac{1}{6} n''_0 \bar{v} \cdot \Delta S, \quad (3)$$

где n''_0 — число молекул в единице объема в том месте, где находится кубик B . Отсюда разность между числом молекул, пролетающих через площадку ΔS слева направо и справа налево за некоторый произвольный промежуток времени Δt , равна

$$\Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} (n'_0 - n''_0) \Delta S \Delta t. \quad (4)$$

Массу ΔM , переносимую через площадку ΔS за время Δt слева направо (в направлении положительной оси OX), получим, умножив число перенесенных молекул Δn на массу одной молекулы m , откуда

$$\Delta M = m \cdot \Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} m (n'_0 - n''_0) \Delta S \Delta t. \quad (5)$$

Разность $n''_0 - n'_0$ равна скорости изменения числа молекул в единице объема в направлении OX , т. е. величине $\Delta n_0 / \Delta x$, умноженной на расстояние между кубиками A и B ; это расстояние равно $2\bar{\lambda}$, откуда

$$n''_0 - n'_0 = \frac{\Delta n_0}{\Delta x} \cdot 2\bar{\lambda}.$$

Подставив это значение $n''_0 - n'_0$ в (5), получим

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} m \cdot \frac{\Delta n_0}{\Delta x} \Delta S \Delta t, \text{ но } m \frac{\Delta n_0}{\Delta x} = \frac{\Delta (mn_0)}{\Delta x};$$

величина mn_0 равна массе рассматриваемого газа в единице объема, т. е. равна плотности ρ , откуда

$$m \frac{\Delta n_0}{\Delta x} = \frac{\Delta \rho}{\Delta x},$$

отсюда

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t. \quad (6)$$

Из этой формулы, в согласии с выражением (1), получаем, что переносимая масса ΔM прямо пропорциональна градиенту плотности $\Delta \rho / \Delta x$, площади ΔS и времени Δt . Формулы (6) и (1) совпадают между собою, если положить

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}. \quad (7)$$

Таким образом, коэффициент диффузии D оказывается связанным со средней скоростью движения молекул \bar{v} и средней длиной свободного пути $\bar{\lambda}$. Средняя скорость движения молекул \bar{v} пропорциональна $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, а длина свободного пути $\bar{\lambda}$ не зависит при постоянной плотности газа от его температуры. Отсюда следует, что для данного газа, при нагревании его при постоянном объеме, коэффициент диффузии $D \sim \sqrt{T}$. Для разных газов, но состоящих из молекул одинакового размера, при одинаковых давлениях и температурах $D \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$, как было показано в § 53, обратно пропорциональна давлению газа, поэтому и коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению газа p : $D \sim \frac{1}{p}$. Здесь p означает суммарное давление смеси обоих газов.

В разреженных газах диффузия происходит быстрее, чем в газах при больших давлениях.

Подставляя в формулу (7) вместо средней длины свободного пути $\bar{\lambda}$ его выражение по формуле (4а) § 53, получим

$$D = \frac{\bar{v}}{3 \sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0}. \quad (7a)$$

Таким образом, коэффициент диффузии оказывается непосредственно связанным с эффективным диаметром молекул σ .

В случае взаимной диффузии двух газов, молекулы которых различаются размерами, под σ можно подразумевать средний диаметр молекул обоих газов: $\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$.

§ 56. Внутреннее трение и теплопроводность газов. В § 42 мы ввели понятие о коэффициенте внутреннего трения (вязкости) η для жидкостей. То же определение пригодно и для газов.

При течении слоев газа с различными скоростями между слоями возникают силы: более быстрый слой ускоряет соседний с ним более медленный слой и, наоборот, более медленный слой задерживает более быстрый. Возникающие при этом силы внутреннего трения f касательны к слоям газа.

При обычных условиях внутреннее трение в газах гораздо меньше, чем в жидкостях, однако оно может быть обнаружено на ряде опытов. Схема одного из таких опытов представлена на рис. 138. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами A и B заполнено испытуемым газом. Цилиндр A насажен на ось O и приводится в быстрое вращение; цилиндр B подвешен на нити C , угол закручивания которой может измеряться. При вращении цилиндра A он увлекает ближайшие к нему слои газа; последние, благодаря наличию внутреннего трения, увлекают за собою следующие слои и т. д. В результате вращающий момент оказывается приложенным к цилиндру B , который поворачивается, пока упругая сила закрученной нити C не уравновесит момент сил, приложенных к цилиндру B .

Обозначим скорость течения слоев газа через u , в отличие от скорости молекул, обозначенной буквой v .

Тогда, аналогично тому, как это было сделано в § 42, мы можем написать для силы внутреннего трения f :

$$f = \eta \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \Delta S, \quad (1)$$

где η — коэффициент внутреннего трения, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ — градиент скорости, ΔS — площадка, к которой приложена сила f .

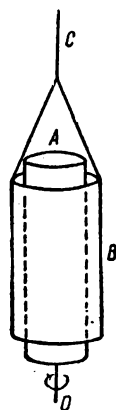


Рис. 138. Схема опыта для определения внутреннего трения в газах.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории газов, в текущем газе на скорость беспорядочного движения молекул \bar{v} наложена переносная скорость u , одинаковая для всех молекул данного слоя газа (текущего с определенной скоростью) и различная для различных слоев. Молекулы, перелетая, благодаря хаотическому движению, из более быстрого слоя в более медленный, приносят с собою бóльшую

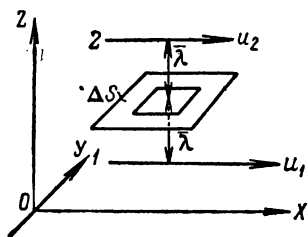


Рис. 139. Перенос количества движения.

составляющую количества движения mu и тем самым ускоряют более медленный слой. Обратное: молекулы, попадающие из более медленного слоя в более быстрый, имеют слишком малую составляющую количества движения mu , в результате чего они задерживают более быстрый слой.

Выделим в газе мысленно площадку ΔS (рис. 139), параллельную слоям, текущим с различными скоростями u . Пусть слой 1 лежит под площадкой ΔS на расстоянии средней длины свободного пути

молекул $\bar{\lambda}$. Тогда молекулы, летящие из слоя 1 по направлению к площадке ΔS , достигнут ее без столкновений. Из § 55 следует, что число этих молекул Δn_1 , пролетающих через площадку ΔS за время Δt из слоя 1, будет:

$$\Delta n_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t,$$

где n_0 — число молекул в единице объема. Эти Δn_1 молекул перенесут через площадку ΔS количество движения ΔK_1 , равное

$$\Delta K_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m u_1,$$

где u_1 — скорость течения слоя 1.

Точно так же из слоя 2, лежащего над площадкой ΔS на расстоянии $\bar{\lambda}$, через площадку ΔS за время Δt будет перенесено количество движения

$$\Delta K_2 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m u_2,$$

где u_2 — скорость течения слоя 2. Для обоих слоев число молекул в единице объема n_0 одно и то же, так как в рассматриваемом случае мы считаем плотность газа повсюду одинаковой.

В результате этих двух переносов количества движения, происходящих в противоположных направлениях, через площадку ΔS будет перенесено количество движения

$$\Delta K = \Delta K_2 - \Delta K_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t (m u_2 - m u_1).$$

Разность $mu_2 - mu_1$ может быть переписана в виде: $m(u_2 - u_1)$. Разность скоростей $u_2 - u_1$ равна градиенту скорости $\Delta u / \Delta z$, умноженному на расстояние между слоями 2 и 1; так как это расстояние равно $2\bar{\lambda}$, то

$$u_2 - u_1 = \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right) 2\bar{\lambda},$$

откуда

$$mu_2 - mu_1 = m \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right) 2\bar{\lambda}$$

и, следовательно,

$$\Delta K = \frac{1}{3} n_0 m \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right) \Delta S \Delta t;$$

замечая, что величина $n_0 m$ есть плотность газа ρ , получим

$$\Delta K = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right) \Delta S \Delta t,$$

откуда сила f , действующая со стороны более медленного слоя на более быстрый:

$$f = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right) \Delta S. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (2) и (1), видим, что они совпадают, если положить коэффициент внутреннего трения η равным

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}. \quad (3)$$

Таким образом, и коэффициент внутреннего трения η молекулярно-кинетическая теория газов позволяет выразить через величины, характеризующие молекулярную структуру газа: через среднюю длину свободного пути молекул $\bar{\lambda}$, их среднюю скорость \bar{v} и плотность газа ρ .

Формула (3) позволяет выяснить характер зависимости коэффициента внутреннего трения η от давления газа p . Из трех величин ρ , $\bar{\lambda}$ и \bar{v} , входящих в выражение (3), скорость молекул \bar{v} не зависит от давления, из двух же остальных величин плотность ρ прямо пропорциональна давлению газа p , а средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна p . Следовательно, произведение $\rho \bar{\lambda}$ не зависит от давления газа p , а значит, и коэффициент внутреннего трения газа η не зависит от давления газа p . Этот, на первый взгляд парадоксальный, результат обусловлен следующим: при понижении давления p уменьшается число частиц n_0 в единице объема, а следовательно, уменьшается и число частиц, переносящих количество движения из одного слоя в другой. Но зато возрастает длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$, благодаря чему молекулы попадают в данный слой без столкновений из более далекого слоя, движущегося с отличной скоростью u . В результате этих двух причин, действующих

в противоположных направлениях, количество движения, переносимое из слоя в слой, остается постоянным.

Вывод о независимости коэффициента внутреннего трения от давления хорошо подтверждается на опыте. Так, например, для углекислоты (CO_2) измерения дают следующие значения η для различных давлений:

| | | | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| p в мм Hg | 760 | 380 | 20 | 2 | 0,6 |
| η в г/см сек. . . . | $14,9 \cdot 10^{-5}$ | $14,9 \cdot 10^{-5}$ | $14,8 \cdot 10^{-5}$ | $14,7 \cdot 10^{-5}$ | $13,8 \cdot 10^{-5}$ |

Из этих данных видно, что при изменении давления от 760 мм до 2 мм Hg, т. е. при уменьшении в 380 раз, коэффициент внутреннего трения η меняется от $14,9 \cdot 10^{-5}$ г/см сек до $14,7 \cdot 10^{-5}$ г/см сек, т. е. практически остается постоянным. Лишь при более низких давлениях начинает сказываться зависимость η от давления; несколько ниже

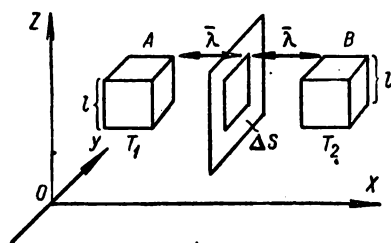


Рис. 140. Перенос молекулами энергии.

мы выясним условия, при которых η начинает зависеть от давления p .

Наконец, рассмотрим еще одно явление переноса, а именно, явление *теплопроводности в газе*. С макроскопической точки зрения явление теплопроводности заключается в переносе некоторого количества тепла ΔQ от более горячего слоя к более холодному. Если изменение температуры T происходит в направлении оси OX , то через площадку ΔS , перпендикулярную к оси OX (рис. 140), за время Δt будет перенесено количество тепла ΔQ тем большее, чем больше площадка ΔS , чем больше тот промежуток, времени Δt , за который наблюдается перенос тепла, и чем быстрее происходит изменение температуры T в направлении оси OX , т. е. чем больше градиент температуры $\Delta T/\Delta x$. Следовательно, мы можем написать:

$$\Delta Q = -\kappa \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t, \quad (4)$$

где κ — величина, зависящая от сорта газа и от условий, при которых он находится; эта величина называется коэффициентом теплопроводности. Знак минус означает, что количество тепла ΔQ переносится в сторону убывания температуры T .

Явление теплопроводности в газах обычно *осложняется переносом тепла путем конвекции*, т. е. переносом тепла струями газа,

возникающими благодаря различию в плотностях частей газа, находящихся при разных температурах. Для наблюдения теплопроводности в газах в чистом виде следует наблюдать перенос тепла через газ между двумя плоскими параллельными поверхностями, расположенными горизонтально, причем верхняя поверхность должна иметь более высокую температуру. Тогда более холодные, а следовательно, и более плотные слои газа расположатся ниже более горячих и менее плотных, и в газе не возникает конвекционных потоков.

С молекулярно-кинетической точки зрения процесс теплопроводности заключается в том, что молекулы из более горячего слоя, где они имеют большую среднюю кинетическую энергию \bar{w} , проникая в более холодный слой, передают молекулам этого слоя часть своей энергии. Наоборот, молекулы из более холодного слоя, попадая в более горячий, получают от молекул более горячего слоя некоторое количество кинетической энергии. В результате более горячий слой охлаждается, а более холодный нагревается. Перенос количества тепла ΔQ означает, с молекулярно-кинетической точки зрения, перенос через площадку ΔS определенного количества кинетической энергии беспорядочного движения молекул.

Введем в рассмотрение, как и при разборе явления диффузии, два кубика A и B (рис. 140), расположенных от площадки ΔS на расстояниях, равных средней длине свободного пути $\bar{\lambda}$. Число молекул, пролетевших через площадку ΔS из кубика A за время Δt , по сказанному в § 55, равно

$$\Delta n_A = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v}_1 \Delta S \Delta t.$$

Так как молекулы долетают из кубика A до площадки ΔS без столкновений, то каждая из них переносит через площадку ΔS ту кинетическую энергию w_1 , которую она имела в том месте, где лежит кубик A . Энергия w_1 складывается из энергии поступательного и вращательного движений молекулы, поэтому она в среднем равна $\frac{i}{2} k T_1$, где i — число степеней свободы молекулы, k — постоянная Больцмана, T_1 — абсолютная температура в том месте, где находится кубик A .

Отсюда находим, что количество тепла ΔQ_1 , перенесенное всеми Δn_A молекулами через площадку ΔS слева направо, равно

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v}_1 \Delta S \Delta t \cdot \frac{i}{2} k T_1.$$

Аналогично получим, что из кубика B за время Δt справа налево через площадку ΔS переносится количество тепла

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{6} n''_0 \bar{v}_2 \Delta S \Delta t \cdot \frac{i}{2} k T_2.$$

где T_2 — температура в том месте, где находится кубик B . В результате этих двух переносов количества тепла в двух противоположных направлениях, в одном ~~направлении~~, а именно слева направо (в сторону положительной оси OX), через площадку ΔS будет перенесено количество тепла

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2.$$

Подставляя сюда вместо ΔQ_1 и ΔQ_2 найденные для них значения, получим

$$\Delta Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{2} k (n'_0 \bar{v}_1 T_1 - n''_0 \bar{v}_2 T_2) \Delta S \Delta t.$$

Количество частиц в единицах объема n'_0 и n''_0 обратно пропорционально температурам T_1 и T_2 ; скорости же частиц \bar{v}_1 и \bar{v}_2 пропорциональны $\sqrt{T_1}$ и $\sqrt{T_2}$. Следовательно, произведения $n'_0 \bar{v}_1$ и $n''_0 \bar{v}_2$ обратно пропорциональны корням квадратным из соответствующих температур, т. е. при малой разности температур T_1 и T_2 отличаются друг от друга очень мало. Поэтому мы будем считать их равными:

$$n'_0 \bar{v}_1 = n''_0 \bar{v}_2 = n_0 \bar{v}.$$

После этого выражение для ΔQ примет вид:

$$\Delta Q = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) \Delta S \Delta t. \quad (5)$$

Разность температур $T_2 - T_1$ выражаем через градиент температуры $\Delta T / \Delta x$ и расстояние между кубиками A и B , равное $2\bar{\lambda}$:

$$T_2 - T_1 = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \cdot 2\bar{\lambda}.$$

Подставляя это значение $T_2 - T_1$ в (5), получим

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} n_0 \bar{v} \bar{\lambda} \frac{i}{2} k \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t.$$

Сравнивая это выражение с (4), найдем, что коэффициент теплопроводности κ равен

$$\kappa = \frac{1}{3} n_0 \bar{v} \bar{\lambda} \cdot \frac{i}{2} k. \quad (6)$$

Величину $\frac{i}{2} k$ преобразуем следующим образом: постоянная Больцмана $k = \frac{R}{N}$, где R — газовая постоянная, а N — число Авогадро; поэтому

$$\frac{i}{2} k = \frac{i}{2} R \frac{1}{N} = C_V \cdot \frac{1}{N},$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Воспользовавшись этим преобразованием, перепишем выражение (6) в виде:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{n_0}{N} \bar{v} \bar{\lambda} C_V.$$

Последнее выражение может быть еще преобразовано; величина n_0 дает число частиц в единице объема, а N — число частиц в одном моле газа, откуда n_0 относится к N , как масса единицы объема газа (равная плотности ρ) к молекулярному весу μ , т. е. $\frac{n_0}{N} = \frac{\rho}{\mu}$ и, следовательно:

$$\frac{n_0}{N} C_V = \rho \frac{C_V}{\mu} = \rho c_V,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Отсюда окончательно имеем, что коэффициент теплопроводности κ равен:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V. \quad (6a)$$

Коэффициент теплопроводности κ , как и коэффициент внутреннего трения η , не зависит от давления газа. Это вытекает опять из того, что плотность ρ прямо пропорциональна, а средняя длина пути $\bar{\lambda}$ обратно пропорциональна давлению p ; скорость же молекул \bar{v} и удельная теплоемкость газа c_V от давления не зависят. Однако при очень низких давлениях коэффициент теплопроводности κ начинает зависеть от давления p .

В выражения для коэффициента диффузии D , внутреннего трения η и теплопроводности κ входит значение средней длины свободного пути молекулы $\bar{\lambda}$; таким образом, по численным значениям любого из этих трех коэффициентов можно определить среднее значение длины свободного пути молекул $\bar{\lambda}$, а отсюда — и эффективный диаметр молекул σ . Однако если вычислить для какого-либо газа эффективные диаметры его молекул σ по численным значениям всех трех коэффициентов D , η и κ , то получатся несколько различные значения. Эти различия объясняются приближенным характером приведенных теорий.

Приближенный характер теорий проявляется еще в следующем: из формул (3) и (6a) следует, что отношение коэффициента теплопроводности κ к коэффициенту внутреннего трения η должно равняться удельной теплоемкости газа при постоянном объеме, т. е.

$$\frac{\kappa}{\eta} = c_V.$$

В действительности же отношение κ/η равно Kc_V , где K — множитель, зависящий от природы газа. Измерения показывают, что для всех одноатомных газов $K=2,50$, а для двухатомных — приблизительно $K=1,90$. Более подробная теория приводит к указанным значениям $K=2,5$ — для одноатомных газов и $K=1,9$ — для двухатомных.

Разберем пример на определение сил внутреннего трения в газе.

Пусть пространство между двумя коаксиальными цилиндрами A и B , изображенными на рис. 138, заполнено водородом при температуре 27°C . Радиус внутреннего цилиндра A равен $r_1 = 8 \text{ см}$, расстояние между цилиндрами $d = 0,2 \text{ см}$. Внутренний цилиндр вращается, совершая 10 об/сек. Рассматривая приближенно случай как плоский, определить касательную силу f , действующую на 1 см^2 поверхности внешнего цилиндра B . Диаметр молекул водорода σ считать равным $2,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

Решение. В результате внутреннего трения между слоями газа действует сила f , которая по формуле (1) равна

$$f = \eta \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) S.$$

Считая, что скорость газа у поверхности твердого тела совпадает со скоростью самой поверхности, получим, что такая же сила f действует на поверхность цилиндра B .

На единицу поверхности цилиндра B действует сила f/S . Для определения этой силы надо знать градиент скорости $\Delta u/\Delta x$ и значение коэффициента внутреннего трения η для водорода. Градиент скорости $\Delta u/\Delta x$ в данном случае равен

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{d},$$

где u_2 — скорость газа у поверхности внутреннего цилиндра, u_1 — его скорость у поверхности внешнего цилиндра. Эти скорости приравниваем скоростям самих поверхностей цилиндров A и B , тогда

$$u_2 = 2\pi r_1 n; \quad u_1 = 0,$$

где n — число оборотов внутреннего цилиндра в единицу времени, откуда

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2\pi \frac{r_1}{d} n.$$

Подставляя сюда численные данные, приведенные в условии примера, найдем

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{8}{0,2} \cdot 10 \text{ сек.}^{-1} = 2512 \text{ сек.}^{-1}.$$

Коэффициент внутреннего трения по формуле (3) равен:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda},$$

где \bar{v} — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda}$ — средняя длина их свободного пути и ρ — плотность газа. Подставляя сюда (см. § 45, 46, 50, 53)

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 n_0}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}, \quad \rho = \frac{\mu}{RT}, \quad n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{pN}{RT},$$

получим

$$\eta = \frac{\sqrt{8RT\mu}}{3 \sqrt{2\pi^3} \cdot \sigma^2 N}.$$

Здесь R — газовая постоянная, равная $8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/град моль}$, μ — молекулярный вес водорода, равный 2 г/моль , N — число Авогадро, равное $6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Пользуясь для T и σ значениями, данными в примере, найдем:

$$\eta = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ г/см сек.}$$

Воспользовавшись полученными численными значениями для градиента скорости $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2512 \text{ сек.}^{-1}$ и для коэффициента внутреннего трения $\eta = 8,6 \cdot 10^{-8} \text{ г/см сек.}$, получим для силы, действующей на единицу поверхности цилиндра B :

$$\frac{f}{S} = \eta \cdot \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = 8,6 \cdot 10^{-8} \cdot 2512 \text{ дин/см}^2 = 0,2 \text{ дин/см}^2$$

или

$$\frac{f}{S} \cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ Г/см}^2.$$

§ 57. Теплопроводность и внутреннее трение в газах при очень низком давлении. Разберем теперь причины зависимости коэффициентов теплопроводности и внутреннего трения от давления при очень низких давлениях. Рассмотрим сперва явление теплопроводности.

Пусть имеются две параллельные пластины A_1 и A_2 (рис. 141) на расстоянии d друг от друга, поддерживаемые при температурах T_1 и T_2 . Между пластинами имеется газ, который передает путем теплопроводности тепло от пластины A_1 (считаем $T_1 > T_2$) к пластине A_2 . Пока средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ мала по сравнению с расстоянием между пластинами d , действует разобранный механизм теплопередачи: молекулы, беспорядочно двигаясь, переносят из слоя в слой кинетическую энергию. При давлении настолько низком, что средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ равна или больше расстояния между пластинами d , механизм теплопередачи иной: молекула, ударившись о горячую пластину A_1 и приобретя кинетическую энергию \bar{w}_1 , соответствующую температуре T_1 этой пластины, без столкновений достигает пластины A_2 и отдает ей часть своей энергии \bar{w}_1 . Также молекула, отразившаяся от более холодной пластины A_2 и имеющая меньший запас энергии \bar{w}_2 , без столкновений достигает пластины A_1 и отнимает от нее часть энергии. При дальнейшем понижении давления число молекул n , осуществляющих перенос энергии от пластины к пластине, уменьшится, пути же их останутся без изменения, молекулы по-прежнему свободно пролетают от пластины к пластине. Таким образом, при дальнейшем уменьшении давления теплопроводность газа убывает. Окончательно имеем: *коэффициент теплопроводности газа зависит от давления, когда средняя длина свободного пути молекул одного порядка или больше расстояния d между теми телами, между которыми осуществляется теплопередача через газ.* При $\bar{\lambda} > d$ коэффициент теплопроводности прямо пропорционален давлению p .

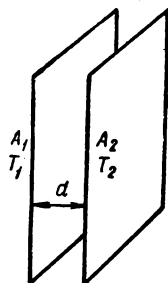


Рис. 141. Коэффициент теплопроводности начинает зависеть от давления, когда длина свободного пути молекул становится больше расстояния d между пластинами.

Совершенно аналогично объясняется указанная зависимость коэффициента внутреннего трения газов η от давления при очень низких давлениях. Если расстояние d между теми поверхностями, между которыми течет газ, обнаруживающий явление внутреннего трения, одного порядка или меньше средней длины свободного пути молекул $\bar{\lambda}$, то коэффициент внутреннего трения η начинает зависеть от давления p , убывая вместе с давлением.

Из сказанного видно, что абсолютное значение давления p , начиная с которого коэффициенты κ и η зависят от давлений, определяется расстоянием между теми телами, между которыми осуществляется перенос тепла или количества движения. Например, в случае двух очень близко расположенных друг к другу пластин, теплопроводность газа, заключенного между ними, начнет зависеть от давления при не слишком низком давлении p ; если те же пластины раздвинуть на большое расстояние d друг от друга, то потребуются гораздо более высокое разрежение газа, чтобы заметить зависимость теплопроводности от давления.



Рис. 142.
Устройство
дюаровского
сосуда (термоса).

Зависимостью теплопроводности от давления при низких давлениях пользуются при устройстве термосов (сосудов Дюара). Обыкновенный термос представляет собою стеклянный сосуд с двойными стенками (рис. 142). Воздух из пространства между стенками откачан до столь низкого давления, что длина свободного пути молекул значительно больше расстояния между стенками. При этих условиях теплопроводность между стенками меньше, чем если бы между стенками находился воздух при атмосферном давлении.

В качестве примера произведем следующий расчет. Расстояние между стенками дюаровского сосуда $d = 0,8$ см. Между стенками находится водород при температуре 27°C . Считая диаметр молекул водорода $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-8}$ см, определить, ниже какого значения должно быть давление водорода p , чтобы его теплопроводность была меньше, чем при атмосферном давлении.

Для того чтобы коэффициент теплопроводности водорода оказался меньше, чем при атмосферном давлении, средняя длина свободного пути молекул водорода $\bar{\lambda}$ должна быть больше расстояния между стенками сосуда d , т. е.

$$\bar{\lambda} > d.$$

Средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ по формуле (4а) § 53 равна

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0},$$

где n_0 — число молекул в единице объема. По формуле (9) § 46 число молекул в единице объема n_0 связано с давлением газа p соотношением:

$$n_0 = \frac{p}{kT},$$

где k — постоянная Больцмана и T — температура газа. Подставив это значение n_0 в выражение для $\bar{\lambda}$, получим

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p},$$

откуда из условия $\bar{\lambda} > d$ следует, что давление p должно удовлетворять соотношению:

$$p < \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}.$$

Подставив сюда приведенные численные значения, получим

$$p < \frac{1,37 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2,3 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 0,8} \text{ бар} = 22,0 \text{ бар}.$$

Переводя это давление в миллиметры ртутного столба, найдем

$$p < 0,015 \text{ мм Hg}.$$

Таким образом, давление остаточного газа между стенками дюаровского сосуда должно быть меньше 0,015 мм Hg, чтобы теплопроводность оказалась пониженной.

§ 58. Получение и измерение низких давлений. Получение низких давлений (как принято говорить, „вакуума“) в настоящее время играет большую роль как в лабораторных исследованиях, так и в технике. Применение вакуума для различных электротехнических и радиотехнических целей (электровакуумных приборов — кенотронов, радиоламп и т. д.) дало мощный толчок для развития вакуумной техники. Различного рода вакуумные насосы с применением некоторых добавочных приемов позволяют получать давления в 10^{-6} мм Hg и ниже. При таких давлениях длины свободных путей газовых молекул достигают десятков метров.

Простейший воздушный поршневый насос совпадает по своему устройству с водяным поршневым насосом, отличаясь от него лишь более точной подгонкой частей и их уплотнением. В настоящее время, однако, поршневые насосы совершенно вытеснены насосами, в которых неудобное, с механической точки зрения, движение поршня взад и вперед заменено вращательным движением лопастей. Такого рода вакуумный насос изображен в разрезе на рис. 143.

В цилиндрической полости внутри массивного металлического корпуса насоса помещен эксцентрически металлический цилиндр. Две

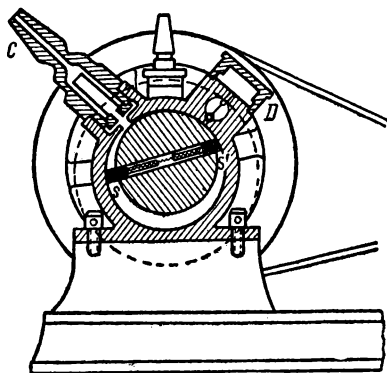


Рис. 143. Вакуумный насос (разрез).

лопасти S и S' , вставленные в разрез в цилиндре и раздвигаемые помещенной между ними пружиной, разделяют на две части пространство между цилиндром и стенкой полости. Действие насоса ясно из схематических рис. 144 $a, б, в, г$, изображающих последовательные положения лопастей S и S' при поворачивании цилиндра в направлении, указанном стрелкой. В положении a газ из откачиваемого сосуда, присоединенного к трубе C , поступает в область I . По мере пово-

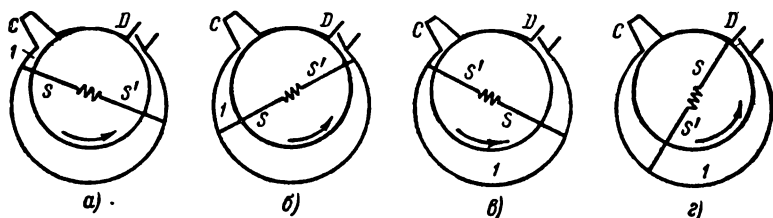


Рис. 144. Схема действия вакуумного насоса: лопасти S и S' при поворачивании засасывают воздух через трубу C и выталкивают его через клапан D .

рачивания цилиндра лопасть S отходит (положение $б$), пространство I увеличивается, и газ засасывается через трубу C . При дальнейшем поворачивании цилиндра лопасть S' отключает пространство I от трубы C (положение $в$), после чего лопасть S' (положение $г$) начинает вытеснять порцию газа, заключенного в пространстве I , через клапан D наружу. При вращении цилиндра этот процесс засасывания газа через трубу C и вытеснения его через клапан D непрерывно повторяется.

Вращение цилиндра осуществляется электромотором. Для избежания просачивания газа под лопастями и в других местах насоса производится непрерывная автоматическая смазка всех его частей маслом. Ввиду этого такого рода насос носит название *масляного насоса*. Часто весь насос целиком погружается в масляную баню. Насосы, построенные на этом принципе, позволяют достигать давлений 10^{-4} мм Hg.

Обозначим объем откачиваемого сосуда через V и первоначальное давление газа в нем — через p_0 . При первом отходе лопасти S образуется область, объемом ΔV , которая заполняется газом из откачиваемого сосуда. В результате этого давление в откачиваемом сосуда падает до значения

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + \Delta V}.$$

После второго образования области ΔV давление упадет до значения

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^2.$$

Продолжая рассуждение, найдем, что после того как образуется n раз область ΔV , давление в откачиваемом сосуде упадет до значения

$$p_n = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n. \quad (1)$$

При постоянном числе оборотов лопастей число актов откачивания n прямо пропорционально времени откачивания, откуда можно положить

$$n = n_0 t.$$

Подставляя это значение n в выражение (1), найдем

$$p_t = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^{n_0 t},$$

где p_t — давление, полученное в откачиваемом сосуде через время t . Последнее выражение можно переписать:

$$\frac{p_0}{p_t} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{n_0 t}. \quad (2)$$

Отношение p_0/p_t возрастает по мере убывания давления p_t в откачиваемом сосуде и служит характеристикой работы насоса. Логарифмируя равенство (2), получим

$$\lg \frac{p_0}{p_t} = n_0 t \cdot \lg \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right).$$

Так как величины n_0 , V и ΔV постоянны для данного насоса и данного откачиваемого сосуда, то, следовательно,

$$\lg \frac{p_0}{p_t} = C t, \quad (3)$$

где C — постоянная величина. Для характеристики действия насоса удобно воспользоваться графиком, откладывая по оси абсцисс время откачки t , а по оси ординат $\lg \frac{p_0}{p_t}$. Зависимость $\lg \frac{p_0}{p_t}$ от времени t изобразится на таком графике прямой. На самом деле, из-за существования вредных пространств, не идеальной работы клапанов и т. д. насосы не могут дать бесконечно большого разрежения. Для каждого насоса существует некоторое минимальное давление p_{\min} , ниже которого он не может дать разрежения. Поэтому графическая зависимость $\lg \frac{p_0}{p_t}$ от времени t представляется в виде прямой, лишь пока p_t остается заметно больше p_{\min} (рис. 145). При приближении p_t к p_{\min} насос начинает качать все медленнее и медленнее. Поэтому

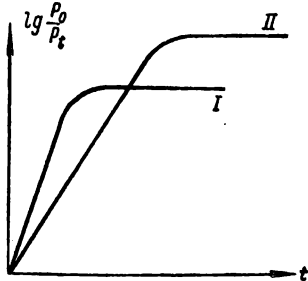


Рис. 145. Графическая характеристика действия насосов.

для реальных насосов зависимость $\lg \frac{p_0}{p_t}$ от времени изображается кривой, идущей при больших t параллельно оси абсцисс. Для того чтобы сравнивать действие различных насосов, следует брать откачиваемые объемы одинаковыми. Тогда скорость действия данного насоса определится значением постоянной C . Кривые, приведенные на рис. 145, относятся к двум разным насосам. Из способа построения этих кривых видно, что кривая I относится к насосу,

качающему более быстро, но неспособному создать хороший вакуум. Кривая // относится к насосу, способному создать значительно лучший вакуум, но качающему медленно.

В тех случаях, когда откачиваемый сосуд соединен с насосом трубой, скорость откачки зависит еще от размеров этой трубы, а именно от ее длины и диаметра. Узкие и длинные соединительные трубы могут в высшей степени понижать скорость откачки. При больших давлениях, когда газ течет по трубе как вязкая жидкость, объем протекающего газа определяется формулой Пуазейля (§ 42), по которой протекающий объем прямо пропорционален диаметру трубы в четвертой степени и обратно пропорционален ее длине. При низких давлениях, когда средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ сравнима с диаметром и длиной трубы, формула Пуазейля непригодна. В этом случае масса газа ΔM , протекающего за единицу времени по трубе диаметром d и длиной l , при разности давлений Δp , выражается следующей формулой:

$$\Delta M = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \cdot \frac{d^3}{l} \sqrt{\frac{\mu}{T}} \Delta p, \quad (4)$$

где R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес, T — абсолютная температура газа.

Как видно, и в этом случае количество протекающего по трубе газа очень сильно зависит от диаметра трубы. Таким образом, во всех случаях следует пользоваться как можно более широкими и короткими соединительными трубами.

Для получения более низких давлений, чем те, которые получаются с помощью масляных насосов, в настоящее время употребляются преимущественно *диффузионные*, или, как их иногда называют, *конденсационные насосы*. Эти насосы не способны откачивать газ из сосудов, начиная с атмосферного давления, но способны создавать добавочную разность давлений. Поэтому их употребляют совместно с масляными насосами описанного типа. Масляный насос дает предварительное разрежение (*форвакуум*), которое затем улучшается диффузионным насосом. Простейший тип ртутного диффузионного насоса изображен на рис. 146. Ртуть, налитая в сосуд A , подогревается электрической печью. Пары ртути, поднимаясь по трубе B , вырываются из сопла L , затем конденсируются на охлаждаемых водяной рубашкой стенках C и стекают по трубе M обратно в сосуд A . Струя паров ртути, вырывающаяся из сопла L , увлекает с собою молекулы газа, которые поступают из откачиваемого сосуда через трубу D и затем откачиваются форвакуумным насосом через трубу N .

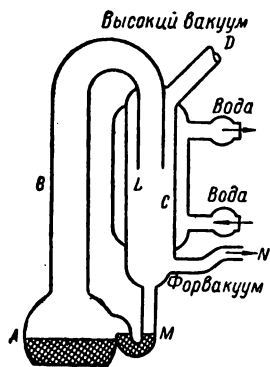


Рис. 146. Схема простейшего диффузионного насоса.

Указанный принцип увлечения молекул газа струей конденсирующихся паров ртути используется в настоящее время в различных

вариантах; существуют многочисленные конструкции стеклянных и металлических диффузионных насосов. Весьма часто употребляют так называемые многоступенчатые насосы, в которых несколько сопел расположены последовательно друг за другом. Такие многоступенчатые диффузионные насосы дают лучший вакуум и работают при худшем форвакууме.

В последнее время в диффузионных насосах заменяют ртуть труднолетучими органическими жидкостями (тяжелыми погонями нефти и некоторыми другими жидкостями); такого рода насосы носят название паромасляных.

Диффузионные ртутные насосы имеют тот недостаток, что из них попадают в откачиваемый сосуд пары ртути. Давление насыщенных паров ртути при комнатной температуре (20°C) равно $0,00131 \text{ мм Hg}$. Таким образом, сами по себе диффузионные ртутные насосы не могут создать давлений ниже $0,0013 \text{ мм Hg}$. Для избежания этого недостатка между диффузионным ртутным насосом и откачиваемым сосудом располагают специально изогнутое колено соединительной трубки („ртутную ловушку“), которую охлаждают жидким воздухом. При температуре кипения жидкого воздуха (-184°C) ртуть находится в твердом состоянии, и упругость ее насыщенных паров исчезающе мала.

Весь агрегат представлен на рис. 147: *A* — масляный форвакуумный насос, приводимый во вращение электромотором, *C* — диффузионный насос, *D* — ртутная ловушка, *E* — откачиваемый сосуд. *B* представляет собою так называемый форвакуумный баллон; он ставится для того, чтобы избежать непрерывной работы масляного насоса *A*. После того как масляный насос *A* создал в баллоне *B* достаточный форвакуум, кран *b* может быть закрыт, насос *A* остановлен; диффузионный насос откачивает тогда газ из сосуда *E* в форвакуумный баллон *B*.

Паромасляные насосы могут работать без ловушек, охлаждаемых жидким воздухом, и даже без водяного охлаждения, так как используемые в них жидкости имеют при комнатной температуре упругость насыщающих паров много ниже упругости паров ртути при той же температуре.

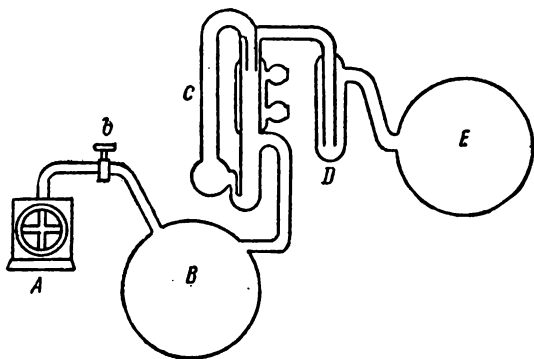


Рис. 147. Схема соединения форвакуумного насоса с диффузионным насосом.

Второй вопрос, связанный с вакуумной техникой, — это измерение низких давлений. Обычно U-образный ртутный манометр (рис. 148) позволяет измерять давления не ниже нескольких долей миллиметра ртутного столба.

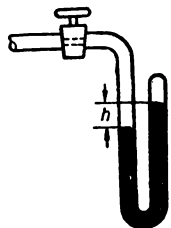


Рис. 148. Ртутный манометр.

В лабораторной практике широко применяется для измерения более низких давлений *манометр Мак-Леода* (рис. 149). Конеч манометра *D* соединяется с сосудом, в котором измеряется давление. Пусть это измеряемое давление равно p . Тогда газ при давлении p заполняет все части манометра, в том числе и сосуд *E*. При поднятии сосуда *A*, соединенного с остальной частью манометра резиновой трубкой, ртуть поднимается и разобьёт резервуар *E* и капилляр *B* с сосудом, давление в котором измеряется. Затем ртуть поднимается выше, пока не дойдет в капилляре *B* до определенного места. Пусть при этом свободный объем, оставшийся над поверхностью ртути в капилляре *B*, равен ΔV .

Обозначим объем сосуда *E* вместе с капилляром *B* через V . Тогда газ, бывший при давлении p , оказывается сжатым до давления

$$p' = p \frac{V}{\Delta V}.$$

При достаточно большом отношении $V/\Delta V$ давление p' много больше исходного давления p и может быть измерено по разности уровней ртути в капиллярах *B* и *C*. Измерив p' и зная численное значение отношения $V/\Delta V$, найдем значение измеряемого давления p .

Для измерения очень низких давлений, а также для измерения давления легко конденсирующихся паров, манометр Мак-Леода непригоден. Для измерения весьма малых давлений применяются различные другие манометры. В качестве примера мы укажем на *тепловой манометр*, основанный на том принципе, что теплопроводность газов при очень низких давлениях зависит от давления и при этом, практически, зависит линейно (см. § 57). Тепловой манометр представляет собою колбу, в которой помещена металлическая нить, накаливаемая током. При данной силе тока температура, до которой нагревается нить, зависит от ее теплоотдачи, последняя же, в свою очередь, зависит при низких давлениях от давления окружающего газа. Таким образом, температура, до которой нагревается нить, может служить для измерения давления окружающего газа. Температура нити обыкновенно измеряется по ее сопротивлению.

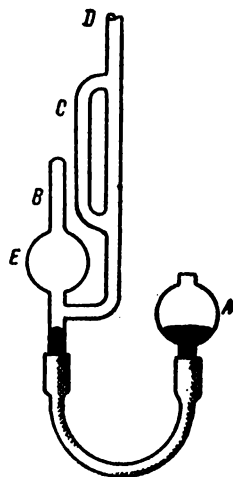


Рис. 149. Манометр Мак-Леода.

§ 59. Свойства газов при очень низких давлениях. При столь низких давлениях, при которых средняя длина свободного пути молекул $\bar{\lambda}$ становится одного порядка с размерами сосуда, в котором заключен газ, свойства газа отличаются от его свойств при больших давлениях. Такое состояние газа называется *состоянием ультраразрежения*. В состоянии ультраразрежения более непосредственно сказывается молекулярно-кинетическая природа газа, чем при больших давлениях.

Рассмотрим два сосуда A и B , соединенных короткой и прямой трубкой a (рис. 150).

При обычных условиях давления газа в сообщающихся сосудах одинаковы; это имеет место и тогда, когда температуры обоих сосудов T_1 и T_2 различны.

В состоянии ультраразрежения, когда длина свободного пути молекул больше, чем длина трубки a , молекулы без столкновений пролетают через всю трубку, что ведет, как мы сейчас покажем, к равенству давлений p_1 и p_2 в обоих сосудах. Условие равновесия заключается в том, что число молекул, пролетающих через трубку a из сосуда A в сосуд B и в обратном направлении — из сосуда B в сосуд A , должно быть равно друг другу. При состоянии ультраразрежения число молекул, пролетающих через трубку, пропорционально числу молекул в единице объема n_0 и их средней скорости \bar{v} . Отсюда условие равновесия запишется:

$$n_{01} \cdot \bar{v}_1 = n_{02} \cdot \bar{v}_2, \quad (1)$$

где n_{01} — число молекул в единице объема сосуда A , n_{02} — число молекул в единице объема сосуда B и \bar{v}_1 и \bar{v}_2 — средние скорости молекул в сосудах A и B соответственно. Так как $n_0 = \frac{p}{kT}$, то соотношение (1) может быть переписано:

$$\frac{p_1}{T_1} \cdot \bar{v}_1 = \frac{p_2}{T_2} \cdot \bar{v}_2;$$

наконец, имея в виду, что скорости v_1 и v_2 соответственно пропорциональны $\sqrt{T_1}$ и $\sqrt{T_2}$, окончательно получим условие равновесия в следующем виде:

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}},$$

откуда

$$p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (2)$$

Таким образом, при ультраразреженном состоянии газов давления в двух сообщающихся сосудах при равновесном состоянии отличны друг от друга, если только различны температуры сосудов. При больших плотностях газов давления в сообщающихся сосудах выравниваются за счет течения газа, как сплошной среды, из сосуда с большим давлением в сосуд с меньшим давлением.

Рассмотрим еще одно явление, характерное для ультраразреженного газа. Пусть в сосуде расположены параллельно друг другу две пластины 1 и 2 (рис. 151). Температура пластины 1 пусть равна температуре стенок сосуда T_1 ; температуру пластины 2 обозначим через T_2 . При условии ультраразрежения молекулы летают свободно, не сталкиваясь друг с другом.

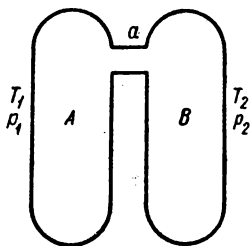


Рис. 150. При условии ультраразрежения при разных температурах T_1 и T_2 в сосудах A и B устанавливаются различные давления p_1 и p_2 .

Рассмотрим газ, заключенный между пластинами 1 и 2. Так как молекулы не сталкиваются, то они и не обмениваются энергиями между собой. Обмен энергий происходит лишь при столкновениях молекул с пластинами 1 и 2, температуры которых равны T_1 и T_2 . Поэтому можно считать, что газ между пластинами как бы состоит из двух газов, молекулы одного из которых имеют средние скорости \bar{v}' , соответствующие температуре T_1 , а молекулы другого — средние скорости \bar{v}'' , соответствующие температуре T_2 . Обозначим числа молекул в единице объема для этих двух групп молекул соответственно через n'_0 и n''_0 .

Давление p' , оказываемое на пластину 1 со стороны газа, находящегося между пластинами, сложится из давления, оказываемого обеими группами молекул:

$$p' = \frac{1}{3} n'_0 m \bar{v}'^2 + \frac{1}{3} n''_0 m \bar{v}''^2, \quad (3)$$

Рис.151. Схема абсолютного манометра.

где m — масса молекулы.

Обозначим число молекул в единице объема в сосуде вне пластин через n_0 ; скорость этих молекул равна \bar{v}' , так как температура стенок сосуда, поверхность которых значительно больше поверхности пластин, совпадает с температурой первой пластины. Давление, которое они оказывают на пластину 1, равно

$$p = \frac{1}{3} n_0 m \bar{v}'^2. \quad (4)$$

Условие равновесия при ультраразрежении заключается в том, что числа молекул, летящих через какую-либо площадку в одном и другом направлениях, должны быть равны друг другу.

Поэтому в пространстве между пластинами 1 и 2 должно быть выполнено условие:

$$n'_0 \bar{v}' = n''_0 \bar{v}''. \quad (5)$$

Рассмотрим далее боковую поверхность объема, заключенного между пластинами. Через какую-либо площадку этой поверхности изнутри объема вылетают молекулы обеих групп, движущиеся со скоростями \bar{v}' , и \bar{v}'' ; внутрь объема попадают лишь молекулы, движущиеся со скоростью \bar{v}' , число которых в единице объема равно n_0 . Следовательно, для условия равновесия между газом, заключенным между пластинами 1 и 2, и газом, находящимся в сосуде вне пластин:

$$n'_0 \bar{v}' + n''_0 \bar{v}'' = n_0 \bar{v}'. \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) находим:

$$n'_0 \bar{v}' = n''_0 \bar{v}'' = \frac{1}{2} n_0 \bar{v}',$$

после чего выражение (3) для p' может быть переписано:

$$p' = \frac{1}{6} n_0 m \bar{v}' (\bar{v}' + \bar{v}''), \quad \text{или} \quad p' = \frac{1}{6} n_0 m \bar{v}'^2 \left(1 + \frac{\bar{v}''}{\bar{v}'} \right).$$

Используя формулу (4) и замечая, что

$$\frac{\bar{v}''}{\bar{v}'} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad \text{получим} \quad p' = \frac{p}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right).$$

Отсюда разность давлений, испытываемых пластиной 1:

$$\Delta p = p' - p = \frac{p}{2} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right). \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что пластина 1 испытывает силу, отталкивающую ее от пластины 2, если $T_2 > T_1$, и приближающую, если $T_2 < T_1$. Численное значение этой силы пропорционально давлению газа p в сосуде. Основываясь на этом явлении, можно сконструировать манометр, позволяющий в условиях ультраразрежения определять абсолютное значение давления p . В принципе устройство такого манометра совпадает со схемой, изображенной на рис. 151. Пластина 1 делается подвижной; действующая на нее сила измеряется по углу ее отклонения. По этой силе и по температуре T_1 и T_2 по формуле (7) вычисляется давление p .

§ 60. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Рассмотренная нами в § 46 молекулярно-кинетическая модель газа представляет газ состоящим из беспорядочно движущихся молекул, уподобляемых упругим шарам. Силы между молекулами действуют лишь в момент удара, причем это — упругие силы отталкивания. Размеры молекул считаются настолько малыми по сравнению со средним расстоянием между молекулами, что ими можно пренебречь. Эта модель соответствует идеальному газу, т. е. такому газу, который в точности подчиняется законам Бойля—Мариотта и Гей-Люссака. Однако реальные газы, как мы указывали, подчиняются этим законам лишь приближенно. При больших давлениях все газы явно отступают от закона Бойля—Мариотта.

Считая молекулы шарами, мы должны принять для их радиусов величины порядка 10^{-8} см. Отсюда объем одной молекулы

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \cong 4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3.$$

В 1 см³ газа при нормальных условиях находится число молекул $n_0 \cong 3 \cdot 10^{19}$, откуда собственный объем всех молекул, находящихся в 1 см³, равен $V' = n_0 v \cong 10^{-4}$ см³, т. е. при давлении газа в 1 ат и температуре 0° С лишь приблизительно одна десятитысячная объема газа приходится на собственный объем молекул. При давлении же в 5000 ат по закону Бойля—Мариотта объем, первоначально равный 1 см³, должен уменьшиться до $2 \cdot 10^{-4}$ см³, при этом половина объема, занимаемого газом, придется на собственный объем молекул. Очевидно, в этом случае указанная модель газа непригодна, и отступления свойств действительных газов от закона Бойля—Мариотта понятны. Таким образом, причины отступления свойств газов от свойств идеального газа должны быть, во-первых, обусловлены наличием собственных размеров молекул, во-вторых, тем, что характер сил взаимодействия между молекулами значительно более сложен, чем для упругих шаров.

Обе эти причины были учтены Ван-дер-Ваальсом. Первая причина — собственные размеры молекул — сказывается в том, что молекулы движутся в сосуде, в котором заключен газ, менее свободно, чем если бы они были точечными. Объем, предоставленный для свободного движения молекул, меньше геометрического объема сосуда V на некоторую величину b . Эту величину b , связанную с собственным объемом молекул, можно считать постоянной для данного количества

газа; поэтому объем V в уравнении состояния должен быть заменен величиной $V - b$.

Для одного моля идеального газа имеет место уравнение

$$pV_0 = RT. \quad (1)$$

Как было сказано, мы должны, учитывая роль собственных размеров молекул, заменить объем моля V_0 величиной $V_0 - b$:

$$p(V_0 - b) = RT. \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что при $p \rightarrow \infty$ объем газа $V_0 \rightarrow 0$, т. е. при бесконечном сжатии газа объем его стремится к нулю, что невозможно: сжатие газа происходит за счет уменьшения свободного пространства между молекулами, отсюда при очень больших давлениях молекулы расположатся вплотную, после чего сжимаемость газа должна быть весьма малой. По формуле (2) при $p \rightarrow \infty$ объем газа $V_0 \rightarrow b$; таким образом, величина b представляет собой тот объем, к которому стремится объем моля V_0 при очень больших давлениях; он равен объему, занимаемому всеми молекулами, входящими в состав одного моля, при их плотной упаковке.

Вторая причина — наличие сил взаимодействия между молекулами — сводится к тому, что молекулы, находясь на некотором расстоянии друг от друга, взаимно притягиваются. Эти силы притяжения лишь при очень малых расстояниях между молекулами (в момент удара) сменяются более интенсивными силами отталкивания. В результате сил притяжения между молекулами газ занимает объем V , меньший, чем это следует из закона Бойля—Мариотта, как если бы он находился под большим давлением p' , чем то внешнее давление p , которое на него оказывают стенки сосуда. Таким образом, в выражении (2) внешнее давление p должно быть заменено величиной $p' = p + p_i$, откуда получаем:

$$(p + p_i)(V_0 - b) = RT. \quad (3)$$

Величина p_i называется *внутренним давлением газа*.

Роль указанных сил притяжения между молекулами по-разному сказывается на молекулах, находящихся внутри объема газа и находящихся вблизи стенок. Хотя силы притяжения между молекулами и убывают с расстоянием медленнее, чем силы отталкивания, все же они проявляются лишь на небольших расстояниях. Поэтому в газе на каждую данную молекулу действуют силы притяжения лишь со стороны близких молекул. Внутри газа каждая молекула со всех сторон окружена другими молеку-

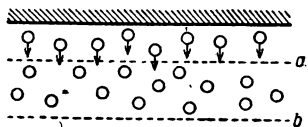


Рис. 152. Взаимодействие молекул газа между собою.

лами и, в среднем, действующие на нее силы притяжения компенсируют друг друга. Вблизи же стенки (рис. 152) газовые молекулы

находятся в иных условиях: их притягивают лишь те газовые молекулы, которые находятся дальше от стенки. Вообще говоря, газовые молекулы, находящиеся вблизи стенки, должны взаимодействовать и с молекулами вещества, из которого состоит стенка. Однако при температурном равновесии и при условии, что не имеет места прилипание молекул к стенке, средняя энергия молекул, отлетающих от стенки, равна средней энергии молекул, подлетающих к стенке. Поэтому, в среднем, явление протекает так, как если бы удары молекул о стенку были вполне упругими. Отсюда следует, что влияние стенки можно отбросить.

Ввиду достаточно быстрого убывания сил притяжения между молекулами, можно считать, что на молекулы, находящиеся у стенки, действуют лишь те молекулы, которые находятся не далее некоторого расстояния r от них, т. е. те, которые находятся внутри слоя ab (рис. 152). Число молекул внутри этого слоя пропорционально числу молекул в единице объема n_0 . Таким образом, действие сил притяжения, оттягивающих молекулы от стенки, пропорционально n_0 . Кроме того, и число молекул, ударяющихся о стенку, также пропорционально n_0 . В результате сила, действующая на молекулы, находящиеся у стенки, и *направленная внутрь газа*, пропорциональна n_0^2 . Эта сила, отнесенная к единице площади, и определяет внутреннее давление p_i .

Величина внутреннего давления p_i также зависит и от природы взаимодействующих молекул, откуда следует, что

$$p_i = a' n_0^2,$$

где a' — постоянная, зависящая от сорта молекул. Так как $n_0 = \frac{N}{V_0}$, где N — число Авогадро, а V_0 — объем моля газа, то выражение для p_i можно переписать:

$$p_i = \frac{a' N^2}{V_0^2}$$

или, обозначая $a' N^2$ через a , получим

$$p_i = \frac{a}{V_0^2}. \quad (4)$$

Подставляя значение внутреннего давления p_i по (4) в выражение (3), получим уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT. \quad (5)$$

Поправки Ван-дер-Ваальса a и b со значительной степенью точности постоянны для данного газа. Для различных газов они различны; их численные значения определяются из эмпирических данных. Постоянная R в уравнении Ван-дер-Ваальса имеет значение прежней газовой постоянной.

При очень большом молекулярном объеме V_0 можно поправкой b пренебречь по сравнению с V_0 и величиной $\frac{a}{V_0^2}$ пренебречь по сравнению с p , тогда уравнение Ван-дер-Ваальса переходит в уравнение (1).

Таким образом, сразу выявляется приближенный характер формулы Менделеева—Клапейрона: она дает хорошее приближение к действительности лишь при малых давлениях p (больших объемах V_0);

Таблица VIII

Сравнение эмпирических данных
и данных по формуле Ван-дер-Ваальса
для 1 л азота при 0° С

| Давление p в ат | pV в ат л | $\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$ в ат л |
|----------------------|----------------|---|
| 1 | 1,0000 | 1,000 |
| 100 | 0,9941 | 1,000 |
| 200 | 1,0483 | 1,009 |
| 500 | 1,3900 | 1,014 |
| 1000 | 2,0685 | 0,893 |

при больших давлениях p необходимо принимать во внимание роль поправок a, b , т. е. пользоваться формулой Ван-дер-Ваальса (5).

Формула Ван-дер-Ваальса также не абсолютно точна, но она является гораздо лучшим приближением к действительности, чем формула Менделеева — Клапейрона. В табл. VIII приведены результаты сравнения данных формул Менделеева—Клапейрона и Ван-дер-Ваальса

с опытными данными для азота вплоть до давлений в 1000 ат. Если бы азот в точности подчинялся уравнению состояния идеального газа, то произведение его давления p на значение объема V , получаемого из экспериментальных измерений, должно было бы оставаться при данной температуре T постоянным для всех давлений. На самом деле, как было уже указано в § 44, это произведение pV не остается постоянным и принимает значения, приведенные в третьем столбце табл. II (§ 44), которые мы вновь приводим в табл. VIII. При больших давлениях азот менее сжимаем, чем это следует из закона Бойля—Мариотта. При давлении в 1000 ат действительный объем азота более чем вдвое превышает тот, который вычисляется по уравнению состояния идеального газа.

В третьем столбце табл. VIII приведены значения

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b'),$$

полученные для того же азота при 0° С в результате подстановки в это выражение эмпирических значений V . Поправки a' и b' отнесены к данному количеству азота (см. мелкий шрифт). Для них взяты значения $a' = 1,65 \cdot 10^{-3}$ ат л² и $b' = 1,36 \cdot 10^{-3}$ л. При постоянной температуре T это выражение по формуле Ван-дер-Ваальса должно оставаться постоянным для всех давлений p .

Данные табл. VIII показывают, что формула Ван-дер-Ваальса во всем интервале давлений от 1 ат до 1000 ат гораздо лучше передает

эмпирические данные, чем формула Менделеева—Клапейрона. Для азота отступления от формулы Ван-дер-Ваальса не превышают 2%, в то время как отступления от уравнения состояния идеального газа при $p = 1000 \text{ ат}$ больше 100%.

Уравнение Ван-дер-Ваальса, выражаемое формулой (5), относится к одному молю газа. Посмотрим, как его следует изменить, чтобы оно годилось для любой массы газа m . Согласно введенному обозначению, V_0 есть объем газа, взятого в количестве одного моля. Обозначим через V объем газа массы m , тогда при данных температуре и давлении:

$$V = \frac{m}{\mu} V_0, \quad (6)$$

где μ — молекулярный вес газа.

Подставим в уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT.$$

вместо V_0 его значение через V по (6), тогда

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT. \quad (7)$$

Выражение (7) и представляет собою уравнение Ван-дер-Ваальса, отнесенное к газу с любой массой m , причем поправки a и b имеют то же численное значение, что и для одного моля газа.

§ 61. Более точный учет характера поправки Ван-дер-Ваальса. Рассмотрим роль собственных размеров молекул несколько подробнее.

При выводе основных соотношений кинетической теории газов в § 46 мы считали, что молекулы свободно летают от стенки к стенке. Время Δt , через которое данная молекула, ударившись о стенку, вновь возвращается к ней, мы полагали равным времени, необходимому для пролета молекулы поперек сосуда вперед и назад. Если принять во внимание соударения молекул, то окажется, что некоторые молекулы, претерпев соударение с другими молекулами, вернутся к стенке раньше, некоторые же, наоборот, пройдя из-за столкновений ломаный путь, вернутся позже. В среднем время Δt остается таким, как если бы соударений не было. Однако дело обстоит так, пока мы пренебрегаем собственными размерами молекул. Рассмотрим некоторую молекулу диаметра σ , которая, отскочив от стенки, ударяется о другую молекулу и снова возвращается к стенке (рис. 153). При этом ее центр подойдет к стенке во время удара не вплотную, но будет находиться на расстоянии, равном ее радиусу $r = \frac{\sigma}{2}$.

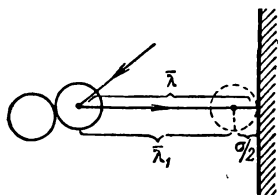


Рис. 153. Столкновение молекулы со стенкой.

На таком же расстоянии $r = \sigma/2$ будет находиться ее центр и от другой молекулы во время столкновения. Благодаря этому,

свободный путь окажется уменьшенным на величину $r + r = \sigma$. Однако, если принять во внимание косые соударения, то это уменьшение будет не столь значительным. Соответственный расчет показывает, что оно равно $\sigma/2$.

Таким образом, длина свободного пути $\bar{\lambda}$ окажется уменьшенной на величину $\sigma/2$, т. е. будет равна $\bar{\lambda}' = \bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}$. Отсюда средняя длина свободного пути молекул, соударяющихся со стенкой, окажется уменьшенной в отношении $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}'$, число же столкновений молекул со стенкой, а следовательно, и давление окажутся увеличенными в отношении $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}'$.

Отсюда получаем, что произведение pV_0 , при данном молярном объеме V_0 , будет равно не величине RT , как этого требует уравнение состояния идеального газа, но величине в $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}'$ раз большей.

$$pV_0 = RT \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} \quad (1)$$

Так как

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}}.$$

Воспользовавшись для средней длины свободного пути $\bar{\lambda}$ выражением (4а) § 53, получим

$$\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi n_0 \sigma^3},$$

где n_0 — число молекул в единице объема. Так как мы рассматриваем один моль газа, объем которого равен V_0 , то $n_0 = \frac{N}{V_0}$, где N — число Авогадро, откуда

$$\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi \frac{N}{V_0} \sigma^3}.$$

Вводя обозначение

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^3 N = b, \quad (2)$$

получим

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{b}{V_0}}.$$

Подставив это выражение $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}'$ в (1), найдем

$$pV_0 = RT \frac{1}{1 - \frac{b}{V_0}} \quad \text{или} \quad p(V_0 - b) = RT.$$

Таким образом, мы приходим к формуле (2), выведенной нами в § 60 менее строго. Приведенный вывод связывает значение константы b с размером молекул σ [формула (2)]. Замечая, что объем одной молекулы ν равен

$$\nu = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi \sigma^3,$$

получим по (2)

$$b = 3 \sqrt{2} \cdot \nu N \cong 4\nu \cdot N. \quad (2a)$$

Так как νN представляет собой объем всех молекул, содержащихся в одном моле газа, то из (2a) мы имеем: *Ван-дер-Ваальсова поправка на объем молекул b равна приблизительно учетверенному собственному объему молекул.*

Соотношение (2) позволяет по числовому значению поправки Ван-дер-Ваальса b определить диаметр молекул σ . В самом деле, из (2) имеем

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{b \sqrt{2}}{\pi N}} \cong \sqrt[3]{\frac{1,4b}{\pi N}}.$$

Например, для кислорода $b = 31,6 \text{ см}^3/\text{моль}$, откуда для диаметра молекулы кислорода (ее эффективного диаметра) получаем

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{1,4 \cdot 31,6}{3,14 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} \text{ см} = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

что хорошо совпадает со значениями σ , полученными другими способами.

Вторая Ван-дер-Ваальсова поправка a связана с характером сил взаимодействия между молекулами.

Разберем характер этих сил несколько подробнее. Молекулы представляют собой сложные электрические системы, подчиняющиеся законам квантовой механики. Силы взаимодействия между ними носят отчасти характер кулоновых сил (притяжение между разноименными зарядами и отталкивание между одноименными зарядами), отчасти иной характер, получающий объяснение лишь в квантовой механике. Вообще говоря, можно положить, что между молекулами (рассматриваемыми обычно как электрические диполи) одновременно существуют и силы притяжения f_1 и силы отталкивания f_2 .

Обозначим расстояние между двумя молекулами A и B через r .

Обе силы — силу притяжения f_1 , которую мы считаем отрицательной, и силу отталкивания f_2 , которую мы считаем положительной, —

можно считать обратно пропорциональными расстоянию между молекулами r , взятому в некоторых степенях α_1 и α_2 :

$$f_1 = -\frac{C_1}{r^{\alpha_1}}, \quad f_2 = \frac{C_2}{r^{\alpha_2}},$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины.

Если $\alpha_2 > \alpha_1$, то сила отталкивания f_2 скорее убывает с расстоянием, чем сила притяжения f_1 . В этом случае суммарная сила $f = f_1 + f_2$ на больших расстояниях является силой притяжения, а на малых расстояниях — силой отталкивания.

Силам f_1 и f_2 соответствуют потенциальные энергии E_{p1} и E_{p2} , равные

$$E_{p1} = -\frac{C'}{r^{k_1}}, \quad E_{p2} = \frac{C''}{r^{k_2}}, \quad (3)$$

где C' и C'' — новые постоянные, а показатели степени k_1 и k_2 равны: $k_1 = \alpha_1 - 1$; $k_2 = \alpha_2 - 1$. Силе притяжения f_1 соответствует

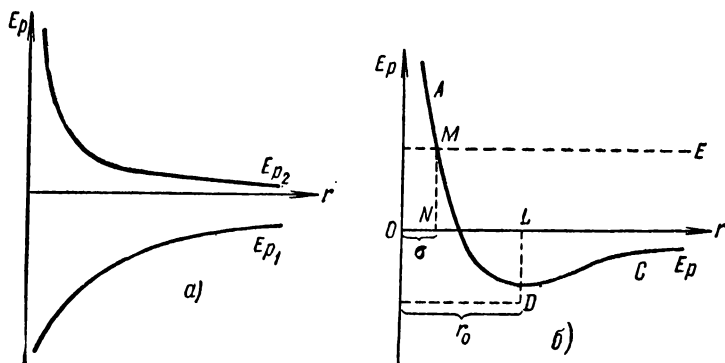


Рис. 154. а) Ход потенциальной энергии притяжения между молекулами E_{p1} и отталкивания E_{p2} ; б) ход суммарной потенциальной энергии взаимодействия между молекулами.

отрицательная потенциальная энергия (ср. § 33), а силе отталкивания f_2 — положительная. Представим потенциальные энергии E_{p1} и E_{p2} графически, в зависимости от расстояния между молекулами r (рис. 154 а). При $k_2 > k_1$ кривая, изображающая потенциальную энергию E_{p2} сил отталкивания, поднимается при малых r вверх более круто, а кривая, изображающая потенциальную энергию сил притяжения E_{p1} , опускается при малых r менее круто. Суммарная кривая, дающая полную взаимную потенциальную энергию двух молекул $E_p = E_{p1} + E_{p2} = -\frac{C'}{r^{k_1}} + \frac{C''}{r^{k_2}}$, изображена сплошной кривой на рис. 154 б. Ниспадающая ветвь этой кривой CD соответствует

тому, что суммарная сила взаимодействия между молекулами $f = f_1 + f_2$ является при больших расстояниях r силой притяжения. Восходящая ветвь DA соответствует тому, что при малых r суммарная сила f есть сила отталкивания. При расстоянии между молекулами $r_0 = OL$ обе силы — сила отталкивания f_2 и сила притяжения f_1 — численно равны друг другу. В этой точке суммарная сила f равна нулю. Точке L соответствует самое глубокое место потенциальной ямы D . Это место является местом равновесия. Однако расстояние r_0 даст действительно равновесное расположение молекул A и B друг около друга только в том случае, если полная энергия молекул E меньше „глубины“ потенциальной ямы D . Так как в пределах ямы потенциальная энергия E_p отрицательна, то две первоначально находящиеся на большом расстоянии друг от друга, а затем сближающиеся молекулы всегда будут иметь запас энергии больший, чем „глубина“ потенциальной ямы D , а потому они не смогут под влиянием Ван-дер-Ваальсовых сил сцепиться вместе и образовать более сложную молекулу. Соединение молекул в одну более сложную возможно лишь при тройном ударе, когда третья молекула унесет избыток энергии. Но и в этих случаях при не слишком низких температурах T , когда средняя энергия $\frac{1}{2} kT$, приходящаяся на одну степень свободы, будет больше значения потенциальной энергии E_p в яме, образовавшаяся сложная молекула не удержится Ван-дер-Ваальсовыми силами и снова распадется.

Обозначим через E_k кинетическую энергию. Пусть полная энергия $E = E_k + E_p$ изображается пунктирной прямой, проведенной на рис. 154 б. Будем считать молекулу A неподвижной, а движение молекулы B рассматривать относительно молекулы A . Тогда (ср. способ рассуждений из § 33) молекула B , начиная с больших r , вплоть до расстояния r_0 , движется к молекуле A со все возрастающей скоростью из-за наличия на этом участке сил притяжения. В точку L , соответствующую равновесному расстоянию r_0 между молекулами, молекула B придет с запасом кинетической энергии $E_k = E - E_p$; благодаря этому запасу кинетической энергии, она пройдет через положение равновесия L и будет дальше приближаться к молекуле A против сил отталкивания, пока вся кинетическая энергия ее не перейдет в потенциальную энергию, изображаемую отрезком NM . Потеряв при $r = \sigma$, где $\sigma = ON$ есть абсцисса точки M , всю свою кинетическую энергию, молекула B под влиянием сил отталкивания начнет удаляться от молекулы A , проходя все разобранные этапы движения в обратном порядке. Расстояние $ON = \sigma$ определяет то наименьшее расстояние, на которое приближаются центры молекул друг к другу во время столкновения. Отрезок $\sigma = ON$ представляет эффективный диаметр (сумму „радиусов“) молекул. Как видно, значение σ зависит от значения полной энергии E , т. е. от той скорости, с которой молекула B летит по направлению к молекуле A , находясь на большом расстоянии r от нее. Чем больше E , тем выше

пересекает прямая, изображающая полную энергию E , кривую, изображающую потенциальную энергию E_p , и, следовательно, тем меньше σ . Таким образом, эффективный диаметр молекул σ не есть величина постоянная: она зависит от скорости сталкивающихся молекул. Однако если на участке вблизи точки M потенциальная кривая поднимается очень круто, то при увеличении энергии E отрезок $ON = \sigma$ меняется мало, т. е. зависимость эффективного диаметра σ от скорости сталкивающихся молекул в этом случае невелика.

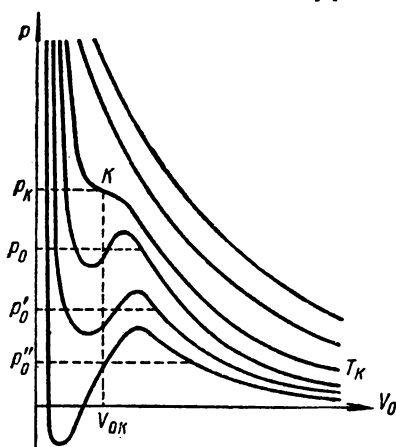


Рис. 155. Изотермы Ван-дер-Ваальса.

Разбираемый характер сил показывает, что процесс столкновения молекул вовсе не похож на процесс столкновения упругих шаров. „Столкновение“ молекул есть результат наличия между молекулами сил отталкивания, зависящих от расстояния r между ними и быстро возрастающих при уменьшении r .

§ 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса. Критическое состояние вещества. Уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT \quad (1)$$

есть алгебраическое уравнение третьей степени относительно V_0 .

Поэтому оно дает либо одно, либо три различных значения молекулярного объема V_0 в зависимости от значений p и T .¹ Нанося графически зависимость p от V_0 из уравнения Ван-дер-Ваальса для различных T , мы получим ряд изотерм (рис. 155). Каждая из кривых рис. 155 (изотерм) соответствует определенной температуре T : чем выше температура T , тем правее и выше лежат на рис. 155 изотермы. Из рисунка видно, что только при больших температурах T изотерма возрастает с уменьшением V_0 монотонно, напоминая изотерму, соответствующую закону Бойля — Мариотта. На такой изотерме каждому значению давления p соответствует одно значение молярного объема V_0 , так же как это имеет место при подчинении газа формуле Менделеева — Клапейрона. При более низких температурах изотермы дают в определенной области давлений и объемов горбы. В этой области, вообще говоря, каждому давлению p соответствуют три значения объема V_0 .

¹ Алгебраическое уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами и свободным членом всегда имеет три решения, однако два из них могут быть комплексными. Так как объем V_0 представляет собою величину вещественную, то для V_0 мы имеем либо одно, либо три разных решения.

Для того чтобы выяснить смысл этой, на первый взгляд весьма странной, зависимости, надо обратиться к опыту. На рис. 156 пред-

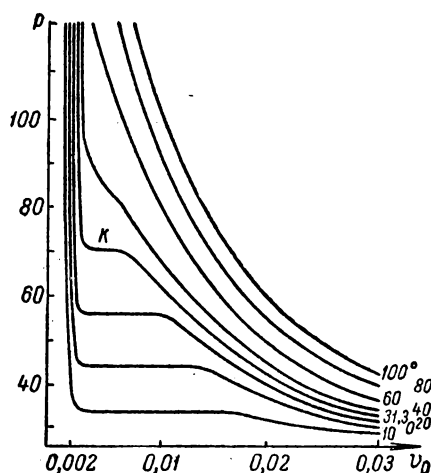


Рис. 156. Экспериментальные изотермы углекислоты (CO_2).

ставлены экспериментально полученные изотермы для углекислоты (CO_2). При высоких температурах T изотермы углекислоты напоминают изотермы идеального газа. При более низких

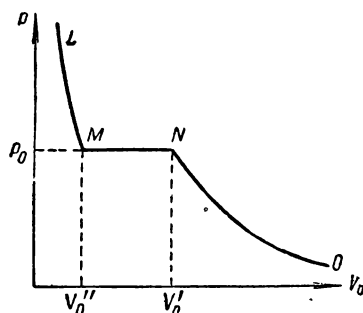


Рис. 157. Экспериментальная изотерма.

температурах характер изотерм совсем иной. Схематически изотерма, относящаяся к такой более низкой температуре, изображена на рис. 157.

Для ясности наметим схему опыта, на котором определялась для углекислоты зависимость молярного объема V_0 от давления p . Схема этого опыта (рис. 158) следующая: в толстостенном цилиндре A под поршнем B заключен один моль углекислоты, температура которой T во все время опыта поддерживается постоянной. Объем V_0 , занимаемый углекислотой при различных положениях поршня, может быть измерен. Давления, соответствующие этим различным объемам, измеряются манометром C .

При больших объемах V_0 с опусканием поршня B давление углекислоты возрастает монотонно; этой части процесса соответствует ветвь ON изотермы, изображенной на рис. 157.

Здесь свойства углекислоты аналогичны свойствам идеального газа, хотя она и обнаруживает несколько большую сжимаемость, чем этого требует закон Бойля — Мариотта. При достижении же некоторого определенного давления p_0 , которому соответствует объем V_0' (точка N изотермы), поведение углекислоты резко меняется: при дальнейшем опускании поршня давление p_0 остается постоянным, на-

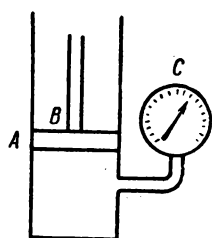


Рис. 158. Схема опыта по определению изотерм.

чинается процесс *ожижения углекислоты*. Чем дальше опускается поршень, тем большее количество газа (который при этих условиях принято называть *насыщенным паром*) переходит в жидкость. Точка изотермы M , характеризующая давлением p_0 и объемом V''_0 , соответствует полному переходу всего количества углекислоты, бывшей под поршнем, в жидкое состояние. При этом под поршнем окажется только жидкость; дальнейшее продвижение поршня потребует весьма больших усилий, так как жидкость мало сжимаема. Ветвь изотермы ML соответствует жидкому состоянию углекислоты.

Давление p_0 , при котором происходит *ожижение*, носит название *упругости насыщенных паров при данной температуре T* . При давлении p , равном упругости насыщенных паров p_0 , данное количество вещества может иметь любые молярные объемы, заключенные между V'_0 и V''_0 . В этой области вещество одновременно существует в виде двух *агрегатных состояний* (как говорят, в двух *фазах*) — жидкого и газообразного. Чем ближе значение объема к V''_0 , тем большая часть вещества находится в жидком состоянии и тем меньшая его доля приходится на газ (пар).

Совершенно аналогичные изотермы получаются и для всех прочих веществ в области тех температур, при которых они могут быть переведены из газообразного состояния в жидкое путем сжатия.

Сравнение экспериментальных изотерм с теоретическими изотермами Ван-дер-Ваальса показывает, что область горбов на изотермах Ван-дер-Ваальса относится к переходу вещества из газообразного состояния в жидкое или обратно. При этом, однако, переход вещества из газообразного состояния в жидкое и обратно в действительности происходит не по кривой с перегибами, а по прямой при постоянном давлении p_0 (прямая MN на рис. 157).

Таким образом, изотермы Ван-дер-Ваальса не только более точно, чем изотерма идеального газа, передают поведение газа, но охватывают собою и процесс *ожижения газов*, а также выражают то свойство жидкости, которое проявляется в ее малой сжимаемости.

По мере повышения температуры область горбов на изотермах Ван-дер-Ваальса делается уже, т. е. убывает разность объемов V'_0 и V''_0 , где V'_0 — объем, соответствующий тому случаю, когда при давлении p_0 вещество целиком находится в газообразном состоянии (в виде пара), а V''_0 — когда оно при том же давлении p_0 целиком переведено в жидкое состояние. На рис. 159 сопоставлены реальные изотермы для различных температур. Незаштрихованная область относится к газообразному состоянию вещества; область, отмеченная пунктиром, — к состоянию вещества в двух фазах: газообразной и жидкой; заштрихованная область — к жидкому состоянию.

Среди изотерм Ван-дер-Ваальса есть такая изотерма, которая отделяет изотермы с горбами от изотерм, не имеющих горбов. Эта изотерма называется *критической*, а соответствующая ей температура —

критической температурой T_k (см. рис. 155 и 159). Критическая изотерма вместо горбов имеет лишь точку перегиба K ; в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс. Точка K называется *критической точкой*, а соответствующие ей объем V_k и давление p_k — *критическим объемом* и *критическим давлением*. Для каждого данного вещества его критические температура, молярный объем и давление имеют определенные значения.

Понятие о критической температуре было впервые введено Д. И. Менделеевым в 1861 г. В своем исследовании Менделеев назвал критическую температуру температурой абсолютного кипения жидкости и рассматривал ее как ту температуру, при которой исчезают силы сцепления между молекулами жидкости и жидкость превращается в пар независимо от давления и удельного объема.

Это понятие о критической температуре вполне соответствует современному представлению о переходе из жидкого состояния в газообразное.

Действительно, из рассмотрения рис. 159, на котором разграничены газообразное и жидкое состояния и область ожижений, явствует:

1) при температуре выше критической T_k вещество может существовать только в газообразном состоянии. Газ, температура которого T выше критической температуры T_k , не может быть никаким сжатием переведен в жидкое состояние. При температурах ниже критической вещество может существовать в зависимости от давления либо в газообразном, либо в жидком состоянии, либо одновременно в виде двух фаз: жидкости и насыщенного пара;¹

2) упругость насыщенного пара p_0 не может иметь значения большего, чем критическое давление данного вещества p_k ;

3) объем вещества в жидком состоянии не может иметь значения большего, чем критический объем данного количества этого вещества.

Критические температуры большого числа жидкостей и их смесей были изучены М. П. Авенариусом и его учениками А. И. Надеждиным, В. И. Зайончевским и др. В частности, А. И. Надежин

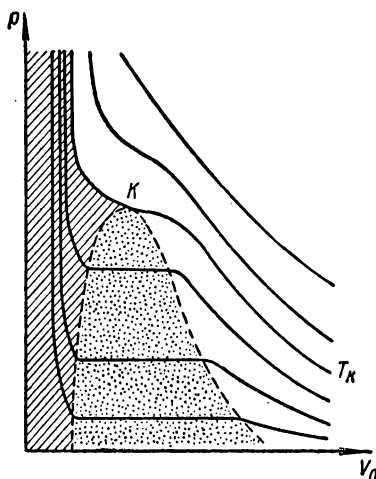


Рис. 159. Ход экспериментальных изотерм.

¹ Впоследствии мы увидим, что возможно и одновременное существование трех фаз: газообразной, жидкой и твердой.

впервые в 1885 г. определил критическую температуру воды (374°C). Знаменитый русский физик А. Г. Столетов также занимался критическим состоянием вещества. Он разобрал имевшийся экспериментальный материал и полностью сопоставил его с теоретическими данными.

Построим график (рис. 160), в котором по оси абсцисс отложим температуру, а по оси ординат — удельные объемы (т. е. объемы единицы массы) жидкости и находящегося в равновесии с ней насыщенного пара. Так как жидкость при нагревании расширяется, то

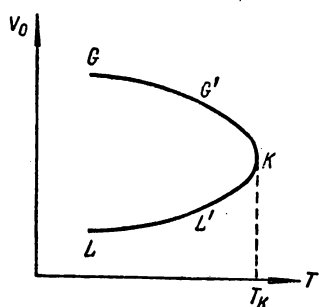


Рис. 160. LL' — кривая зависимости удельного объема жидкости от температуры; GG' — кривая зависимости удельного объема насыщенных паров от температуры. Обе кривые сходятся при критической температуре T_K .

кривая LL' , изображающая удельный объем жидкости в зависимости от температуры, поднимается. По мере повышения температуры объем жидкости увеличивается быстрее, ее коэффициент расширения непостоянен, но возрастает с температурой. Поэтому кривая LL' изогнута вверх. Удельный объем насыщенного пара в зависимости от температуры изображается кривой GG' . При повышении температуры часть жидкости испаряется, и плотность паров над ней возрастает. Но повышение плотности паров означает уменьшение их удельного объема, поэтому кривая GG' загибается вниз. В некоторой точке K обе кривые сливаются. Так как эта точка соответствует максимальному удельному объему жидкости, то, следовательно, она является критической точкой, и соответ-

ствующая ей температура есть критическая температура T_K . Отсюда мы видим, что в критической точке удельные объемы жидкости и пара совпадают. *В критической точке пропадает всякое различие между жидкостью и паром.* Переход из газообразного состояния в жидкое в критической точке происходит непрерывно. Теплота парообразования жидкости при критической температуре равна нулю. Также при критической температуре равен нулю и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Вблизи критической точки во всем объеме газа образуются и вновь распадаются местные центры сгущения; благодаря этому вещество вблизи критической точки дает помутнение, известное под названием *опалесценции*.

Рассмотрим более подробно различие между экспериментальными изотермами и теоретическими изотермами Ван-дер-Ваальса. На экспериментальной изотерме область горбов заменена прямой MN , еще раз представленной на рис. 161. Однако оказывается, что ряд точек, попадающих в область горбов, может быть, при известных условиях, экспериментально осуществлен. Так, в обеспыленном и свободном

от электрических зарядов в пространстве можно получить пары при давлении p , большем упругости насыщенных паров p_0 при данной температуре. Такие пары называются *пересыщенными*. Состояние пересыщенных паров изображается частью изотермы Na , попадающей в область горба. В естественных условиях в верхних слоях атмосферы часто образуются большие массы пересыщенных паров. Появление в пространстве, где находятся пересыщенные пары, отдельных пылинок, капелек или электрически заряженных частиц вызывает их конденсацию, что ведет к появлению тумана.

Вещество в жидком состоянии может быть получено под давлением, меньшим упругости насыщенных паров при данной температуре, без того, чтобы оно переходило в парообразное состояние; этому состоянию соответствует часть изотермы Mb . Среди изотерм Ван-дер-Ваальса существуют такие, часть которых попадает ниже оси абсцисс, т. е. в область отрицательных давлений (см. рис. 155). Эти состояния представляют собою растянутую жидкость, они могут быть экспериментально осуществлены. Например, жидкую ртуть можно заставить держаться в барометрической трубке при высоте более 760 мм, т. е. когда давление ртути не целиком уравнивается атмосферным давлением. Такой ртутный столб растянут силой собственного веса, тем не менее он не разрывается.

Этот опыт указывает на наличие в реальных жидкостях внутренних сил сцепления.

Вовсе не могут быть осуществлены ниспадающие участки изотерм ab (рис. 161); нужно считать, что они соответствуют совершенно неустойчивому состоянию вещества.

§ 63. Определение критических величин. Уравнение в приведенных величинах. Рассмотрение уравнения Ван-дер-Ваальса (5) (§ 60) позволяет установить связь между значением критических температуры, молярного объема и давления T_k , V_{0k} и p_k и поправками a и b .

Преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT, \quad (1)$$

умножив правую и левую части на V_0^3/p , раскрыв скобки и собрав члены, содержащие V_0 в одинаковых степенях, тогда получим

$$V_0^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)V_0^2 + \frac{a}{p}V_0 - \frac{ab}{p} = 0. \quad (2)$$

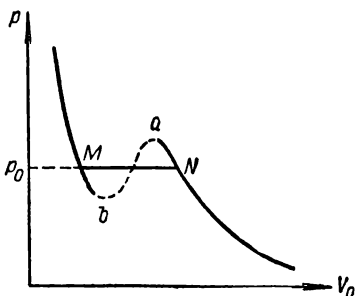


Рис. 161. Сравнение теоретической и экспериментальной изотерм.

Отсюда непосредственно видно, что уравнение Ван-дер-Ваальса представляет собою уравнение третьей степени относительно V_0 .¹

Уравнение Ван-дер-Ваальса для критической температуры $T = T_K$

$$V_0^3 - \left(\frac{RT_K}{p_K} + b \right) V_0^2 + \frac{a}{p_K} V_0 - \frac{ab}{p_K} = 0 \quad (4)$$

имеет в критической точке K (рис. 152) перегиб. Поэтому в этой точке оно имеет один тройной корень V_{0K} и может быть представлено в виде:

$$(V_0 - V_{0K})^3 = 0$$

или, если выполнить возведение в степень,

$$V_0^3 - 3V_{0K}V_0^2 + 3V_{0K}^2V_0 - V_{0K}^3 = 0. \quad (5)$$

Уравнения (5) и (4) должны совпадать тождественно, что возможно при равенстве коэффициентов при одинаковых степенях V_0 , откуда имеем:

$$\frac{RT_K}{p_K} + b = 3V_{0K}, \quad \frac{a}{p_K} = 3V_{0K}^2, \quad \frac{ab}{p_K} = V_{0K}^3.$$

Решая эти три уравнения относительно трех неизвестных T_K , V_{0K} и p_K , получим

$$T_K = \frac{8a}{27bR}, \quad V_{0K} = 3b, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}. \quad (6)$$

Таким образом, критические величины T_K , V_{0K} и p_K непосредственно выражаются через Ван-дер-Ваальсовы поправки a и b .

Пользуясь соотношениями (6), можно преобразовать уравнение Ван-дер-Ваальса. Введем в рассмотрение *приведенные давления, объем и температуру* π , ω и τ , подразумевая под ними отношения давления, молярного объема и температуры вещества к его соответственным критическим величинам:

$$\pi = \frac{p}{p_K}, \quad \omega = \frac{V_0}{V_{0K}}, \quad \tau = \frac{T}{T_K}. \quad (7)$$

Тогда, пользуясь равенствами (6), найдем

$$p = \frac{a}{27b^2} \pi, \quad V_0 = 3b\omega, \quad T = \frac{8a}{27bR} \tau.$$

Подставив эти значения p , V_0 и T в уравнение Ван-дер-Ваальса (1), получим после соответственных алгебраических преобразований:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3\omega - 1) = 8\tau. \quad (8)$$

¹ В алгебре доказывается, что всякое уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами c_1 , c_2 и вещественным свободным членом c_3 :

$$x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0, \quad (3)$$

имеет три корня x_1 , x_2 , x_3 , из которых либо все три, либо один вещественны. Пользуясь значениями корней уравнения (3) x_1 , x_2 , x_3 , можно представить уравнение (3) в виде:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0. \quad (3a)$$

Оба выражения (3) и (3a) тождественно совпадают между собой. В частном случае все три корня уравнения (3) могут совпадать между собою: $x_1 = x_2 = x_3 = x_K$ (тройной корень), тогда уравнение (3a) принимает вид

$$(x - x_K)^3 = 0.$$

Уравнение (8) заменяет уравнение Ван-дер-Ваальса, отнесенное к одному молю; оно называется *уравнением в приведенных величинах*.

Кроме приведенных давления, объема и температуры π , ω и τ , уравнение (8) содержит только числа. Однако такое кажущееся выпадение констант, характерных для данного газа, обусловлено тем, что в уравнении (8) стоят приведенные давление, объем и температура, т. е. отношения давления, объема и температуры к соответственным критическим величинам *данного* газа.

Воспользовавшись уравнением в приведенных величинах (8), можно более точно указать критерии, при которых уравнение состояния идеального газа должно являться хорошим приближением к действительности. Положим, что молярный объем газа V_0 велик по сравнению с его критическим объемом $V_{0к}$, тогда по определению приведенный объем ω велик по сравнению с единицей, откуда уравнение (8) приближенно можно переписать

$$\pi\omega = \frac{8}{3}\tau.$$

Подставляя сюда вместо π , ω и τ их значения по (7), получим

$$pV_0 = \frac{8}{3} \frac{p_k V_{0к}}{T_k} T, \quad (9)$$

но, пользуясь соотношениями (6), легко видеть, что

$$\frac{8}{3} \frac{p_k V_{0к}}{T_k} = R,$$

где R — газовая постоянная, откуда (9) принимает вид

$$pV_0 = RT,$$

что представляет собою формулу Менделеева — Клапейрона, отнесенную к одному молю. Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса переходит в формулу Менделеева — Клапейрона для всех тех случаев, когда объем газа велик по сравнению с его критическим объемом.

Из уравнения в приведенных величинах вытекает так называемая теорема о *соответственных состояниях*. Смысл ее заключается в следующем: если два разных газа взяты в таких состояниях, что отношения двух из трех величин p , V_0 , T к соответственным критическим величинам p_k , $V_{0к}$, T_k для них одинаковы, то одинаковы будут и отношения третьих величин к соответственным критическим. Например, если два газа взяты в таких состояниях, что $\frac{p_1}{p_{k1}} = \frac{p_2}{p_{k2}}$ и $\frac{T_1}{T_{k1}} = \frac{T_2}{T_{k2}}$, то и $\frac{V_{01}}{V_{0к1}} = \frac{V_{02}}{V_{0к2}}$. Эта теорема непосредственно вытекает из уравнения (8), так как, например, при одинаковых π и τ для двух газов одинаковы будут для них и ω .

Теорема о соответственных состояниях для химически сходных веществ, критические температуры которых не очень разнятся между собою, оправдывается с большей точностью, чем та точность, с которой формула Ван-дер-Ваальса количественно совпадает с опытными данными для каждого из веществ в отдельности. Это указывает, что отступления от формулы Ван-дер-Ваальса, обнаруживаемые такими веществами, носят одинаковый характер.

Количественные отступления от формулы Ван-дер-Ваальса, обнаруживаемые реальными веществами, делаются особенно заметными вблизи критической точки. Из формулы (6) легко получить, что между критическими величинами p_k , $V_{0к}$ и T_k имеет место соотношение:

$$p_k V_{0к} = \frac{3}{8} RT_k \quad (10)$$

или

$$\frac{RT_k}{p_k V_{0к}} = \frac{8}{3} = 2,667. \quad (10a)$$

Соотношение (10) заменяет вытекающее из уравнения состояния идеального газа соотношение $p_k V_{ок} = RT_k$. Расхождения между данными формулы Ван-дер-Ваальса и формулы Менделеева — Клапейрона достигают почти 2,7 раза. Однако и данные формулы Ван-дер-Ваальса далеко не точно сходятся с опытными данными. Отношение $K_k = \frac{RT_k}{p_k V_{ок}}$, которое по формуле (10а) должно иметь для всех веществ одно и то же значение 8/3, на самом деле принимает для разных веществ разные значения, заметно отличные от 8/3. Значения величин K_k (так называемых *критических коэффициентов*) для некоторых газов приведены в табл. IX.

Т а б л и ц а IX

Значения критических коэффициентов K_k для некоторых газов

| Газ . . . | He | H ₂ | N ₂ | Ar | O ₂ | CO ₂ | H ₂ O |
|-------------|------|----------------|----------------|------|----------------|-----------------|------------------|
| K_k . . . | 3,13 | 3,03 | 3,42 | 3,43 | 3,42 | 3,486 | 4,46 |

Особенно велико отступление для воды, что объясняется ассоциацией молекул воды вблизи критической точки в более сложные группы.

§ 64. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля — Томсона. Как было показано в § 48, внутренняя энергия идеального газа U представляет собою кинетическую энергию движения его молекул $E_k = \sum \bar{\omega}_k$; она не зависит для данного количества газа ни от его объема, ни от давления, а определяется только его температурой T ; для одного моля идеального газа $U = E_k = C_V T$, где C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме (см. § 49).

В реальном же газе, как мы видели, существенную роль играют силы взаимодействия между молекулами. Поэтому внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии движения его молекул и их взаимной потенциальной энергии:

$$U = E_k + E_p. \quad (1)$$

Взаимная потенциальная энергия молекул зависит от их среднего расстояния друг от друга, поэтому E_p должно зависеть от объема газа. При изменении объема газа без обмена энергией с окружающими телами полный запас внутренней энергии U остается постоянным, и поэтому из равенства (1) следует:

$$\Delta E_p = - \Delta E_k, \quad (2)$$

т. е. за счет изменения потенциальной энергии при изменении объема реального газа должна измениться и кинетическая энергия движения его молекул. Так как и для реального газа теплоемкость при постоянном объеме C_V определяется лишь кинетической энергией

движения его молекул, то равенство $E_k = C_V T$ (для одного моля) остается в силе, и из выражения (2) вытекает:

$$\Delta E_p = - C_V \Delta T. \quad (3)$$

Отсюда мы получаем: при изменении объема без совершения внешних работ и без обмена теплом с окружающими телами температура реального газа меняется. Явление такого рода впервые пытался обнаружить Джоуль. Он помещал два сосуда A и B , соединенных трубкой с краном C (рис. 162), в калориметр с водой. Из сосуда B воздух откачивался, в сосуде A воздух находился при некотором давлении p . При открытии крана C воздух устремлялся из сосуда A в сосуд B , расширяясь без совершения внешней работы. При этом никакого изменения температуры калориметра Джоуль не наблюдал. Отсюда он сделал вывод, что при изменении объема газа его внутренняя энергия не меняется.

Рис. 162. Опыт Джоуля.

Несколько позже этот опыт был повторен в другом более чувствительном варианте Джоулем совместно с Томсоном. В соединительную трубку между сосуда A и B помещалась пробка из пористого вещества C (рис. 163). Трубка окружалась теплоизолирующим веществом. В сосудах A и B давления газа p_1 и p_2 поддерживались постоянными. Газ протекал по трубке с перепадом давлений в месте, где расположена пробка. По обоим сторонам пробки помещались чувствительные термометры. При этом была обнаружена незначительная разность температур, показываемых обоими термометрами. Для большинства газов температура с той стороны пробки, куда газ расширялся, была несколько ниже. Для водорода изменение температуры оказалось обратным: при расширении водород нагревался. Этот эффект, заключающийся в изменении температуры газа при расширении (без теплообмена и совершения внешней работы), носит название *эффекта Джоуля — Томсона*. Он является следствием отступления свойств реальных газов от свойств идеального газа.

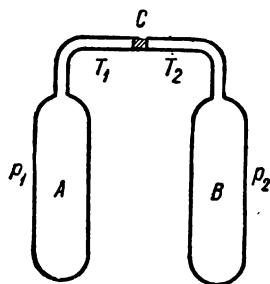


Рис. 163. Опыт Джоуля — Томсона.

Эффект Джоуля — Томсона, сводящийся к охлаждению газа при его расширении, принято называть *положительным*, а сводящийся к нагреванию — *отрицательным*. Впоследствии было выяснено, что знак эффекта Джоуля — Томсона зависит от того, какая из поправок, a или b , уравнения Ван-дер-Ваальса играет большую роль.

Связь между эффектом Джоуля — Томсона и поправками a и b уравнения Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT$$

можно установить путем рассмотрения потенциальных кривых, приведенных в § 61.

Для простоты рассмотрим в отдельности два случая: 1) газ, для которого поправкой a в уравнении Ван-дер-Ваальса можно пренебречь; 2) газ, для которого можно пренебречь поправкой b .

Мы видели, что поправка a уравнения Ван-дер-Ваальса связана с наличием сил притяжения между молекулами. Поэтому в первом случае следует считать силы притяжения между молекулами исчезающе малыми и учитывать лишь силы отталкивания. Тогда потенциальная энергия взаимодействия молекул E_p , как функция расстояния между ними r , представится кривой, изображенной на рис. 164а.

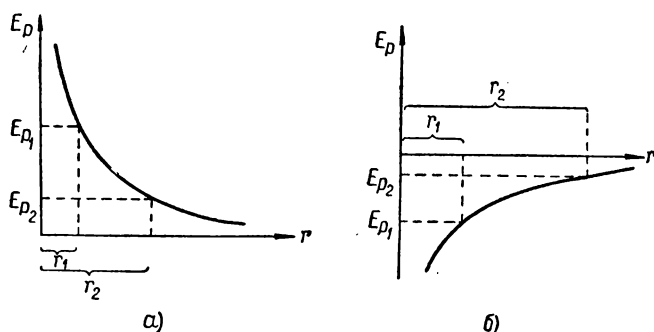


Рис. 164. Потенциальные энергии взаимодействия молекул: а) при наличии сил отталкивания; б) при наличии сил притяжения.

Большему давлению газа p_1 соответствуют меньшие средние расстояния между молекулами r_1 ; меньшему давлению p_2 соответствуют большие средние расстояния r_2 . Отсюда, как видно из рис. 164а, с уменьшением давления внутренняя потенциальная энергия убывает:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} < 0.$$

Но при $\Delta E_p < 0$ из равенства (3) получается: $\Delta T > 0$.

Таким образом, мы приходим к выводу: газ, для которого можно пренебречь поправкой a уравнения Ван-дер-Ваальса, но для которого поправка b играет заметную роль, нагревается при расширении.

Второй случай относится к столь малым размерам молекул, что их можно считать за точечные. Это означает, что между молекулами на сколько-нибудь значительных расстояниях друг от друга не существует заметных сил отталкивания. Приходится принимать во внимание

(кроме моментов столкновения) лишь силы притяжения, которым соответствует зависимость потенциальной энергии E_p от расстояния r , изображенная на рис. 164б.

Теперь потенциальная энергия отрицательна и с увеличением r ее численное значение уменьшается, поэтому

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} > 0.$$

Отсюда, на основании (3), получаем: $\Delta T < 0$. Газ, для которого можно пренебречь поправкой b уравнения Ван-дер-Ваальса, но для которого поправка a играет существенную роль, охлаждается при расширении.

Реальный газ дает отрицательный эффект Джоуля—Томсона, если для него главную роль играет поправка b на собственные размеры молекул; реальный газ дает положительный эффект Джоуля—Томсона, если для него главную роль играет поправка a на силы притяжения между молекулами.

Для одного и того же газа, в зависимости от его температуры и давления, может играть большую роль то поправка b , то поправка a . Поэтому один и тот же реальный газ в зависимости от внешних условий дает то положительный, то отрицательный эффект Джоуля—Томсона. При очень высоких давлениях для всякого газа преимущественную роль играют собственные размеры молекул, т. е. поправка b ; отсюда при очень высоких давлениях все газы обнаруживают отрицательный эффект Джоуля—Томсона.

При некоторых значениях давления p и температуры T роль обеих поправок a и b одинакова; в таком состоянии реальный газ дает нулевой эффект Джоуля—Томсона, т. е. он не нагревается, не охлаждается при расширении. Состояние, в котором эффект Джоуля—Томсона равен нулю, называется *точкой инверсии*. Совокупность точек инверсии образует кривую, изображенную на рис. 165. Для точки, соответствующей данным значениям p и T , эффект Джоуля—Томсона имеет тот или другой знак, в зависимости от того, по какую сторону от кривой инверсии лежит точка: если она лежит ниже кривой—эффект Джоуля—Томсона положителен, если выше кривой, то эффект Джоуля—Томсона отрицателен.

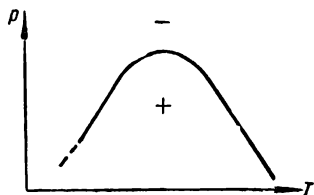


Рис. 165. Кривая инверсии.

§ 65. Ожижение газов. Разбор уравнения Ван-дер-Ваальса показал нам, что газ может быть переведен в жидкое состояние путем сжатия лишь в том случае, когда его температура T ниже его критической температуры T_k . Изотермы углекислоты, приведенные на рис. 156, показывают, что при температуре выше 31°C , которая является критической температурой углекислоты, вплоть до самых высоких давлений углекислота остается газообразной. Лишь при

температуре ниже 31°C изотермы дают изломы, соответствующие конденсации углекислоты в жидкость.

В табл. X приведены значения критических температур T_k и критических давлений p_k для ряда газов.

Из таблицы видно, что такие газы, как азот, кислород (а следовательно, и их смесь — воздух), водород, гелий имеют весьма низкие критические температуры.

Т а б л и ц а X

Критические температуры и критические давления

| Вещество | Критическая температура T_k в $^{\circ}\text{C}$ | Критическое давление p_k в ат |
|--------------------------------------|--|--|
| Вода, H_2O | 374 | 217 |
| Хлор, Cl_2 | 144 | 76 |
| Аммиак, NH_3 | 132 | 112 |
| Углекислота, CO_2 | 31 | 73 |
| Криптон, Kr | — 62,5 | 54 |
| Кислород, O_2 | — 118,8 | 50 |
| Аргон, Ar | — 122,4 | 48 |
| Азот, N_2 | — 147 | 33,5 |
| Неон, Ne | — 228 | 26 |
| Водород, H_2 | — 240 | 12,85 |
| Гелий, He | — 267,9 | 2,2 |

Следовательно, они могут быть ожижены сжатием лишь после предварительного сильного охлаждения.

Пикте использовал для охлаждения газов явление, заключающееся в том, что жидкость при интенсивном испарении охлаждается в результате расходования внутренней энергии на парообразование (теплота парообразования). Пикте подвергал интенсивному испарению жидкий сернистый ангидрид, температура которого вследствие этого падала. В сосуде, где происходило испарение жидкого сернистого

ангидрида, находился змеевик, по которому под большим давлением пропусклась углекислота. Углекислота при этом ожижалась. Жидкая углекислота затем испарялась в другом сосуде, через который проходила труба, наполненная сжатым кислородом. В результате интенсивного испарения жидкой углекислоты ее температура падала до -130°C , т. е. ниже критической температуры кислорода. При этих условиях кислород путем сильного сжатия мог быть переведен в жидкое состояние.

В 1884 г. Вроблевский и Ольшевский ожижили водород, сжимая его до 190 ат и одновременно охлаждая кипящим кислородом. В конце же прошлого столетия Дюаром и Линде было предложено использовать для охлаждения газов эффект Джоуля — Томсона.

Схема *машины Линде*, служащей для получения жидкого воздуха, представлена на рис. 166. Двухцилиндровый компрессор С, приводимый в движение электромотором, сжимает воздух до давления порядка 100 ат . Сжатый воздух поступает в змеевик G. Этот змеевик состоит из нескольких труб, вставленных одна в другую. Сжатый компрессором воздух проходит по самой внутренней трубе и, достигая вентиля а, внезапно расширяется. При этом его температура (воздух имеет при этих условиях положительный эффект Джоуля —

Томсона) падает. Получившаяся порция холодного воздуха поднимается по внешней трубе змеевика и охлаждает встречную порцию воздуха, идущего по внутренней трубе от компрессора. Эта вторая порция сжатого воздуха, таким образом, отчасти охлаждается еще раньше, чем она достигнет вентиля *a*. Расширяясь при прохождении

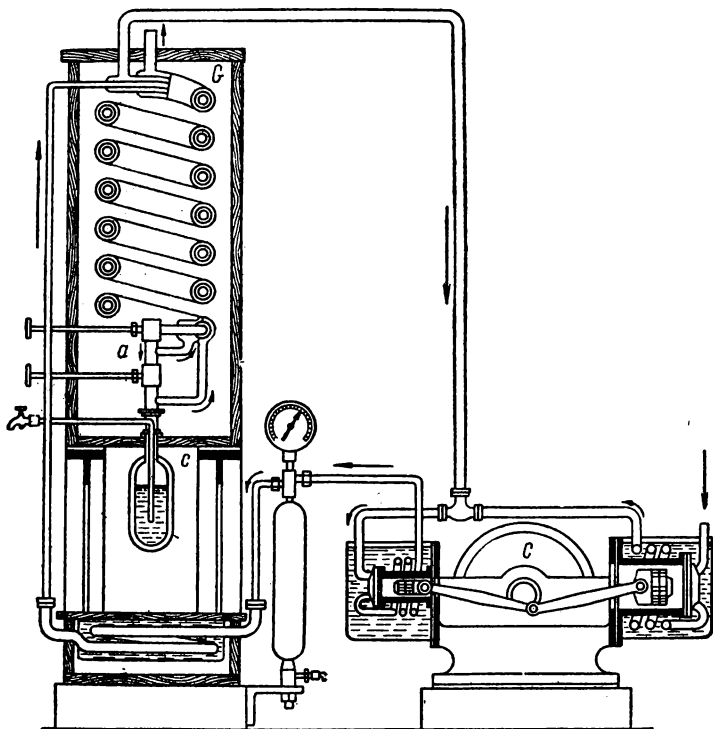


Рис. 166. Машина Линде.

через вентиль *a*, она еще сильнее охлаждается благодаря эффекту Джоуля — Томсона.

Этот процесс, повторяемый достаточное число раз, ведет к охлаждению воздуха до температуры ниже его критической температуры и к его ожижению.

Жидкий воздух собирается в дюаровском сосуде *c*, в котором он, благодаря слабому притоку извне тепла, может сохраняться достаточно долго.

Так как воздух в основном состоит из двух газов — азота и кислорода, то и жидкий воздух является смесью двух жидкостей. Но точка кипения этих двух жидкостей различна: при атмосферном

давлении жидкий азот кипит при $-195,7^{\circ}\text{C}$, а жидкий кислород кипит при -183°C . Поэтому жидкий воздух по мере испарения обогащается кислородом, так как азот выкипает первым.

Если две трети жидкого воздуха испарились, то остаток содержит 53 % кислорода.

Жидкий воздух в настоящее время находит широкое применение при лабораторных работах и в технике. В лабораториях он употребляется для получения высокого вакуума (см. § 60) и для разных других целей. В технике особо широкое применение получают машины, дающие раздельно жидкий кислород и жидкий азот. Выделение обоих газов из воздуха основано на разнице в их температурах ожижения и кипения.

Бата или древесный уголь, пропитанные жидким кислородом, дают весьма сильное взрывчатое вещество, употребляемое при горных работах. Жидкий кислород употребляется также в авиации при высотных полетах: испаряясь, он дает газообразный кислород, идущий на поддержание дыхания летчиков.

Метод фракционного испарения используется также для получения из воздуха редких газов: гелия, неона, аргона, криптона и ксенона.

Метод Дюара — Линде непосредственно применим лишь для ожижения газов, которые при комнатных температурах дают положительный эффект Джоуля — Томсона.

Газы, дающие при комнатной температуре отрицательный эффект Джоуля — Томсона, необходимо предварительно охладить ниже точки инверсии. Так, водород должен быть охлажден до -80°C , чтобы при уменьшении давления от 100 ат до 1 ат он давал положительный эффект Джоуля — Томсона. Гелий имеет для того же интервала давлений температуру инверсии -258°C . После охлаждения ниже указанных температур (что для водорода достигается с помощью жидкого воздуха, а для гелия — с помощью жидкого водорода) эти газы могут быть ожижены путем применения к ним метода Дюара — Линде.

В настоящее время все известные газы переведены не только в жидкое, но и в твердое состояние. Гелий был впервые ожижен Камерлинг-Оннесом в 1908 г. Испаря жидкий гелий при очень низком давлении, Камерлинг-Оннес достиг температуры в $0,9^{\circ}\text{K}$. В последние годы тем же методом достигнута температура в $0,71^{\circ}\text{K}$ и путем адиабатического размагничивания намагниченных тел получена температура ниже $0,1^{\circ}\text{K}$.¹

Для ожижения воздуха, кроме способа Дюара — Линде, употребляется еще способ, основанный на понижении температуры в результате совершения газом работы против внешних сил.

¹ Из общетеоретических рассуждений следует, что достичь температуры, в точности равной абсолютному нулю, невозможно. Чем ближе мы подходим к температуре абсолютного нуля, тем труднее получить дальнейшее охлаждение.

В простейшем виде этот принцип осуществляется в машинах, в которых газ, сжатый до высокого давления, поступает в цилиндр („детандер“) с поршнем. Отодвигая поршень, газ совершает против внешних сил работу за счет своей внутренней энергии, что ведет к понижению температуры газа.

В последнее время П. Л. Капица, используя этот метод, сконструировал машину для получения жидкого воздуха и других охлажденных газов, в которой охлаждение газа происходит за счет работы вращения турбины.

Возможность с помощью охлажденных газов (воздуха, водорода, гелия) охлаждать тела до очень низких температур играет в современной физике большую роль. Все свойства тел зависят от температуры, причем эта зависимость становится особенно большой при очень низких температурах. При приближении температуры к абсолютному нулю возникает ряд качественно новых явлений. Мы уже упоминали (§ 42) о сверхтекучести жидкого гелия. В т. II будет указано на явление сверхпроводимости, заключающееся в том, что для многих чистых металлов и некоторых сплавов омическое сопротивление становится практически равным нулю при температурах порядка $1—7^{\circ}\text{K}$. При низких температурах сильно меняются магнитные свойства веществ. Теплостойкость тел при приближении температуры к абсолютному нулю сама тоже стремится к нулю. Область физики, изучающая все эти явления, носит название физики низких температур.

ГЛАВА VIII

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 66. Молекулярно-кинетическое и энергетическое описание процессов. Молекулярно-кинетическая теория вещества ставит своей задачей объяснение макроскопических свойств тел путем детального разбора тех молекулярных процессов, которые лежат в их основе. При этом *макроскопические физические величины имеют смысл средних значений тех величин, которые характеризуют соответственный молекулярный или атомный процесс.* Так, давление газа на стенки обусловлено ударами отдельных молекул. Постоянство давления при данных условиях есть результат того, что, измеряя давление, мы наблюдаем средний эффект ударов очень большого числа молекул за промежуток времени, весьма большой по сравнению со временем отдельного удара.

Разбирая явление диффузии газов, мы видели, что оно также имеет смысл некоторого среднего эффекта, возникающего в результате беспорядочного движения молекул. То же относится и к явлениям внутреннего трения в газах и теплопроводности.

Беспорядочность движения молекул ведет в общем к наличию определенных закономерностей. Формула распределения скоростей Максвелла показывает, что среди беспорядочно распределенных скоростей существует наиболее вероятная скорость, т. е. такая скорость, значительно отличная от которой встречаются редко. Кинетическая энергия движения отдельных молекул может принимать самые разнообразные значения при данном равновесном состоянии вещества, средняя же энергия, приходящаяся на одну степень свободы, имеет при этом вполне определенное значение. Это среднее значение энергии определяет температуру тела. Сумма потенциальных и кинетических энергий беспорядочно движущихся молекул составляет запас внутренней энергии вещества.

Таким образом, макроскопические величины обладают определенными значениями лишь потому, что они являются *средним значением очень большого числа отдельных элементарных процессов.* При наблюдении же явлений в малых масштабах, когда число наблюдаемых молекул невелико, должны встречаться отступления от установленных средних значений.

Такие отступления, называемые *флуктуациями* (см. подробнее § 76), действительно наблюдаются: примером может служить броуновское движение.

Метод, применяемый для объяснения макроскопических свойств тел с точки зрения их молекулярного строения, есть по существу метод *статистический*. В настоящее время этот метод имеет столь широкое применение, что весь раздел теоретической физики, применяющий его, носит название *статистической физики*.

Однако возможен и другой способ описания явлений. В § 26 мы отмечали, что возможно описывать поведение тел и без того, чтобы входить в детальное рассмотрение тех процессов, которые при этом происходят. Такое описание возможно, благодаря введению понятий об энергии, ее превращениях и способах передачи и установлению тех основных законов, которым подчиняются эти превращения энергии из одних видов в другие.

Раздел физики, рассматривающий процессы с указанной энергетической точки зрения, носит название *термодинамики*. Термодинамика, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов, позволяет делать целый ряд выводов относительно их общего протекания, столь же достоверных, как и те фундаментальные законы, которые лежат в ее основе.

Термодинамический метод рассуждений, как относящийся к энергетической стороне процессов, имеет не только исключительно большое принципиальное, но и практическое значение. Весьма обширный класс технических проблем, связанный с переводом энергии из одних форм в другие и с получением за счет энергии работы, может быть разобран с термодинамической точки зрения.

Законы, лежащие в основе термодинамики, носят название *начал термодинамики*. Эти начала установлены как обобщение экспериментальных данных; их достоверность подтверждается в дальнейшем совпадении весьма большого числа выводов из них с результатами опытов.

§ 67. Эквивалентность количества переданного тепла и работы. Раньше чем перейти к формулировке первого начала термодинамики, рассмотрим более подробно передачу энергии от одних тел к другим путем совершения работ и путем передачи тепла. Понятие о работе было нами разобрано в § 25. Представлением о передаче некоторого количества тепла тому или другому телу мы тоже неоднократно пользовались. Подвергнем все же это понятие о передаче тепла более подробному анализу.

Первоначальные понятия о тепловом состоянии тел возникли в результате тех субъективных ощущений, которые нагретые тела могут вызывать. Эти ощущения определяются сложным комплексом фактов, относящихся не только к телу, степень нагретости которого мы определяем, но и к воспринимающему органу, каковым чаще всего является кожа рук. Кажется ли нам данное тело теплым или

холодным, определяется не только его температурой, но и его теплопроводностью и состоянием нашей руки. Для того чтобы установить объективную оценку теплового состояния тел, используют то положение, что тела, образующие изолированную группу, с которыми не происходит никаких изменений, кроме тепловых, при достаточно долгом соприкосновении друг с другом принимают одинаковую температуру. На этом основано измерение температур: термометр при достаточно длительном соприкосновении принимает температуру тела. Для измерения температур, как мы видели, может быть использована зависимость любой физической величины от температуры. Эмпирическая шкала (см. § 44) измеряет температуру по изменению давления водорода при постоянном объеме.

В первой половине XVIII столетия некоторые ученые считали, что причиной повышения температуры тел является движение молекул. Это мнение было развито М. В. Ломоносовым. По мнению Ломоносова, тепловые явления обусловлены вращательным („колорватным“) движением молекул. Ломоносов связывал тепловое состояние тел именно с вращательным движением молекул, так как считал, что вращательное движение является единственно общим для всех агрегатных состояний вещества. Теория Ломоносова, изложенная в 1744 г. в трактате „Рассуждение о причине теплоты и холода“, несмотря на указанное ограничение, содержала все основные черты молекулярно-кинетической теории тепла. В качестве основного аргумента в пользу молекулярно-кинетической теории тепла Ломоносов приводил нагревание тел в результате трения. Этот же факт он использовал для критики общепризнанной в то время теории теплорода.

Теория теплорода возникла в XVIII столетии и получила широкое распространение. *По теории теплорода теплота представляет собою некоторое вещество — теплород, не создающееся и не уничтожающееся.* Считалось, что теплород лишь переходит от более горячих тел к более холодным: горячее тело содержит больше теплорода, холодное — меньше. Несмотря на то, что теория теплорода не согласовалась с нагреванием тел при работе сил трения, она продолжалась до середины XIX столетия.

На основе теории теплорода развился метод калориметрических измерений и было установлено понятие о *количестве передаваемого тепла* Q . Первые калориметрические измерения были выполнены в 1750—1751 гг. в Петербурге Г. В. Рихманом. Понятие о количестве переданного тепла можно ввести, рассматривая, например, следующий опыт. Берутся два совершенно одинаковых сосуда, содержащих одинаковые количества воды при одинаковой температуре T_0 . Затем два различных по своему составу тела, например, одно железное, а другое свинцовое, но одинаковой массы m , нагреваются до одной и той же температуры T , более высокой, чем T_0 . Если одно из этих тел опустить в один из сосудов с водой, а другое — в другой и подождать достаточно времени, чтобы температуры между каждым

из тел и водой выравнивались, то окажется, что вода в сосуде, в который было опущено железо, нагрелась больше, чем в сосуде, в который был опущен свинец. Этот факт может быть истолкован в том смысле, что железо передало воде большее количество тепла ΔQ , чем свинец. Так же, экспериментируя с телами одного состава, можно установить, что воде передается тем больше тепла, чем больше масса тела и чем до более высокой температуры оно было первоначально нагрето. На основании этих опытов было принято, что количество тепла ΔQ , переданное телу или отнятое от него, пропорционально изменению температуры тела ΔT и его массе m :

$$\Delta Q = cm\Delta T. \quad (1)$$

Величина c получила название удельной теплоемкости. За единицу количества переданного тепла (*калорию*) было принято такое количество передаваемого тепла, которое надо сообщить 1 г воды, чтобы повысить ее температуру на 1°C . При измерении количества переданного тепла в калориях удельная теплоемкость воды оказывается равной единице.

На основании сказанного, измерение количества переданного тепла ΔQ можно производить следующим способом: тело приводится в соприкосновение с водой таким образом, чтобы теплообмен практически происходил лишь между телом и водой, тогда по (1)

$$\Delta Q = cm\Delta T = c_0 m_0 \Delta T_0, \quad (2)$$

где c_0 и m_0 — теплоемкость и масса воды, ΔT_0 — изменение температуры воды, получившееся в результате теплообмена с данным телом. Так как m_0 и ΔT_0 доступны непосредственному измерению, то по (2) можно измерить и ΔQ .

В конце XVIII и в начале XIX столетий, по мере накопления экспериментального материала, все резче выступала уже показанная Ломоносовым неспособность теории теплорода объяснить нагревание тел при работе сил трения.

Румфорд наблюдал непрерывное нагревание стружек при сверлении металла. Дэви в конце XVIII столетия показал возможность получить нагревание при трении двух кусков льда. Джоуль в результате большой серии работ, выполненных в период с 1843 по 1878 г., показал, что необходимо затратить работу в $4,18 \cdot 10^7$ эрг, чтобы возникло нагревание тел такое же, как при передаче количества тепла в одну калорию; наоборот, в случае совершения механической работы в результате взятого от каких-либо тел тепла, за счет одной калории всегда получается $4,18 \cdot 10^7$ эрг механической работы. Эти опыты, впоследствии многократно повторенные в разнообразных видах, установили общую эквивалентность между количеством переданного тепла и работой.

§ 68. **Первое начало термодинамики.** Эквивалентность между количеством переданного тепла и работы позволяет обобщить закон сохранения механической энергии. Как было сказано в § 28, изменение механической энергии системы пропорционально работе, совершенной силами, приложенными к системе извне, и внутренними силами трения. При этом мы не рассматривали тепловые воздействия.¹ В общем же случае возможно изменение энергии системы не только за счет совершения работ, но и за счет передачи тепла и за счет других воздействий (например, за счет поглощения света).

Рассмотрим некоторую систему и будем переводить ее из одного состояния в другое. Например, определенное количество газа может сжиматься под действием внешних сил и одновременно нагреваться в результате передачи ему некоторого количества тепла. Каждое состояние системы может быть определено с макроскопической точки зрения заданием определенных величин, характеризующих это состояние. Такие величины называются *параметрами*. Для идеального газа параметрами, определяющими его состояние, является любая пара из трех следующих величин: объем V , давление p и температура T , так как для заданного количества идеального газа его состояние однозначно определяется любой парой из этих трех величин (например, давление p и температура T).

Переход системы из одного состояния в другое происходит под влиянием внешних воздействий, к числу которых относится не только работа внешних сил ΔA , но и передача некоторого количества тепла ΔQ и другие воздействия. Передача тепла и работа, как мы видели, всегда эквивалентны друг другу. Для всех других воздействий, как показывают опыты, также удастся установить соответственные механические эквиваленты. Далее опыты показывают, что если система переходит под влиянием внешних воздействий из определенного состояния I в другое определенное состояние II , то *при всех возможных способах переходов сумма механических эквивалентов внешних воздействий остается неизменной*.

Эта сумма механических эквивалентов внешних воздействий $\sum \Delta A_i$ и определяет *изменение энергии*

$$U_{II} - U_I = k \sum_i \Delta A_i, \quad (1)$$

где U_I и U_{II} — энергии системы соответственно в состояниях I и II и k — коэффициент пропорциональности.

Из сказанного видно, что физический смысл имеет *разность* энергий двух состояний, сама же энергия может быть определена, только если энергию какого-либо состояния условно принять за нуль (или приписать какое-либо определенное значение).

¹ Тем самым мы молчаливо предполагаем, что внешние силы не являются силами трения, так как работа внешних сил трения сопровождается передачей тепла системе.

Но если мы припишем системе в каком-либо состоянии определенное значение энергии, например, в состоянии I — значение энергии U_I , то энергия U_{II} в состоянии II будет по формуле (1) равняться:

$$U_{II} = U_I + k \sum_i \Delta A_i.$$

Так как по сказанному $\sum_i \Delta A_i$ не зависит от способа перехода из состояния I в состояние II , то тем самым оказывается, что и в состоянии II энергия будет иметь вполне определенное значение U_{II} . Это означает, что *энергия является однозначной функцией состояния, т. е. однозначно определяется теми же параметрами, которыми определяется состояние*. Если в результате каких-либо воздействий система сперва переходит из состояния I в состояние II , а затем снова возвращается в состояние I , то ее энергия принимает *прежнее значение*. Следовательно, закон изменения и сохранения энергии в наиболее общем виде формулируется следующим образом: *изменение энергии системы при ее переходе из одного состояния в другое пропорционально сумме механических эквивалентов всех внешних воздействий, ведущих к рассматриваемому переходу системы. При круговом процессе, т. е. таком, в результате которого система возвращается в исходное состояние, сумма механических эквивалентов всех внешних воздействий равна нулю, и энергия остается постоянной*.

Закон сохранения энергии, выраженный в таком общем виде, и носит название *первого начала термодинамики*.

Поскольку фактически передача энергии путем теплопроводности играет большую роль, мы будем выделять те воздействия, которые сводятся к передаче количества тепла ΔQ , тогда первое начало термодинамики мы запишем в следующем виде:

$$\Delta U = k\Delta A + k'\Delta Q, \quad (2)$$

где ΔU — изменение внутренней энергии системы, ΔQ — количество тепла, переданного системе, и ΔA — сумма механических эквивалентов всех прочих внешних воздействий. Если прочие внешние воздействия сводятся к механическим, то ΔA представляет собою работу внешних сил, приложенных к системе.

Ввиду эквивалентности количества переданного тепла и работы, количество переданного тепла ΔQ можно измерять в тех же единицах, что и работу (в *эргах, джоулях, кГм* и т. д.); в тех же единицах измеряется и энергия. Если все входящие в формулу (2) величины измерять в одних и тех же единицах, то оба коэффициента k и k' станут равны единице, и формула (2) примет вид:

$$\Delta U = \Delta A + \Delta Q. \quad (2a)$$

Считая изменение внутренней энергии бесконечно малым, перепишем соотношение (2а) в виде:

$$dU = dA + dQ.$$

Так как энергия U является функцией состояния и при круговом процессе ее изменение равно нулю, то dU представляет собой *полный дифференциал*. Работа же, совершаемая на замкнутом пути, во всех тех случаях, когда имеет место нагревание, не равна нулю. Отсюда следует, что dA не представляет собой в этих случаях полного дифференциала. Но тогда из (2б) вытекает, что и *количество переданного тепла dQ не есть полный дифференциал*.

Отсюда получаем, что ни работа, ни количество переданного тепла не тождественны с энергией. Они имеют тот смысл, что их *сумма* определяет изменение энергии.

Наряду с работой ΔA , совершаемой внешними силами, приложенными к системе, можно рассматривать работу $\Delta A'$, совершаемую силами, приложенными к внешним телам со стороны системы. В силу третьего закона Ньютона $\Delta A' = -\Delta A$. Вводя в формулу (2а) $\Delta A'$, перепишем ее в виде:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A'. \quad (3)$$

Записанное в таком виде первое начало термодинамики утверждает: *количество тепла, переданное системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и на работу, совершаемую силами, приложенными со стороны системы к внешним телам*.

Первое начало термодинамики подтверждается как теми опытами, на основании которых была установлена эквивалентность между теплом и работой, так и совпадением весьма большого числа выводов из него с наблюдаемыми фактами.

Исторически установление закона сохранения энергии (первого начала) было связано с неудачами осуществления такой машины, которая совершала бы работу, не затрачивая при этом никакого вида энергии и не получая извне тепла. В термодинамике такая машина называется перпетуум мобиле первого рода. По сказанному, при возвращении системы в исходное состояние ее энергия принимает прежнее значение. Поэтому для периодически действующей машины к концу каждого периода $\Delta U = 0$, и совершенная ею работа может быть получена лишь за счет переданного извне количества тепла ΔQ , либо за счет каких-либо других дополнительных внешних источников энергии. Так как передача тепла есть тоже передача энергии, то можно говорить вообще о переданной энергии и формулировать закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) в следующем виде: *невозможно построить перпетуум мобиле первого рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который производил бы за*

один период работу в количестве большем, чем количество поглощаемой им извне энергии.

Говоря о законе сохранения энергии, существенно отметить следующее: возможны такие переходы системы из некоторого состояния *I* в отличное от него состояние *II*, когда сумма механических эквивалентов внешних воздействий оказывается равной нулю. Тогда по формуле (1) энергии обоих состояний *I* и *II* должны равняться друг другу: $U_{II} = U_I$. Это означает, что в системе происходит такой процесс, при котором параметры системы меняются, но энергия ее остается постоянной. Примером может служить изотермическое расширение идеального газа: поскольку температура газа не меняется, постольку не меняется и его энергия. Параметры же, определяющие состояние газа (объем *V* и давление *p*), меняются. При этом совершается внешняя работа, и газу передается некоторое количество тепла, но сумма внешней работы и механического эквивалента переданного тепла равна нулю.

В случае изолированной системы внешние воздействия отсутствуют. Но и в этом случае, за счет взаимодействий между отдельными частями системы, в ней могут происходить процессы, и отдельные виды энергии (кинетическая, потенциальная и т. д.) могут меняться. Полная же энергия системы будет сохраняться. Рассмотрим в качестве примера изолированную систему тел, обладающую некоторым запасом кинетической и потенциальной энергии. Пусть в результате взаимодействий между телами, образующими систему, совершается работа против сил трения. В этом случае, как мы указывали в § 28, механическая энергия системы, являющаяся суммой потенциальной и кинетической энергии тел, будет убывать. Но в результате работы против сил трения тела нагреются и их внутренняя (тепловая) энергия возрастет. Полная энергия системы останется неизменной, лишь отдельные виды энергии перейдут из одного вида в другой.

Принципиальное и теоретическое значение эквивалентности переданного тепла и работы было выяснено Робертом Майером (1814—1878), В. Томсоном (1824—1907), Клаузиусом (1822—1888) и рядом других физиков.

Закон сохранения энергии предугадывался давно. В 1748 г. М. В. Ломоносов, формулируя закон сохранения вещества, сформулировал и закон сохранения движения в природе. Он писал: „Все перемены, в Натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимается, столько присовокупится к другому... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения: ибо тело, движущее своей силою другое, столько же оныя у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает“. Количественная формулировка закона сохранения энергии была дана лишь через 100 лет Робертом Майером (1814—1878) и Гельмгольцем (1821—1894) после открытия многих

процессов, связанных с взаимным превращением различных видов энергии. Майер пришел к открытию закона сохранения энергии в результате общих рассуждений, основанных на физиологических наблюдениях. Он подчеркивал превращение качественно различных видов энергии друг в друга, причем эти превращения всегда осуществляются в определенных количественных (эквивалентных) соотношениях. Гельмгольц ввел понятие о кинетической и потенциальной энергиях и, рассматривая систему, в которой действуют центральные силы притяжения и отталкивания, установил, что сумма кинетической и потенциальной энергий для данной замкнутой системы постоянна. Таким образом, в трактовке Гельмгольца закон сохранения энергии носил ограниченный механистический характер.

Общий характер закона сохранения и превращения энергии и его исключительное значение для естествознания были раскрыты Энгельсом. Формой существования материи является движение, понимаемое как изменение вообще. Движение, понимаемое в таком общем смысле, не может ни исчезнуть, ни создаться из ничего; в природе возможны лишь изменения формы существования материи, ее превращения, происходящие в известных количественных соотношениях. Это есть общая формулировка закона сохранения, не связанная с ее физической формулировкой, которая в зависимости от новых открытий может изменяться. Энгельс писал: „...любая форма движения оказалась способной и вынужденной превращаться в любую другую форму движения. Дойдя до этой формы, закон достиг своего последнего выражения. Посредством новых открытий мы можем доставить ему новые подтверждения, дать ему новое, более богатое содержание. Но к самому закону, как он здесь выражен, мы не можем прибавить больше ничего“.¹

Закон сохранения и превращения энергии позволяет вместе с тем более глубоко выяснить природу физической величины, которая называется работой. Как мы видели, энергия системы может меняться за счет совершенной работы. Следовательно, работа является мерой изменения энергии. Такой смысл работы был отмечен Энгельсом, который писал: „...работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны“.²

Работа и „количество переданного тепла“, являясь мерой изменения энергии, вместе с тем не тождественны энергии. Действительно, энергия характеризует систему, она является *однозначной функцией состояния системы* (см. § 26). Система обладает определенным значением энергии и тогда, когда с ней не происходит никаких изменений. Понятия же о работе и „количестве переданного тепла“ имеют смысл только тогда, когда происходит процесс, ведущий к изменению состояния системы, в результате которого меняется ее энергия. Ни работа, ни „количество переданного тепла“ не являются функциями состояния системы.

Несмотря на то, что после установления эквивалентности между количеством переданного тепла и работой теория теплорода была полностью оставлена,

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы. 1950, стр. 178.

² Там же, стр. 70.

до сих пор слова „тепло“ и „теплота“ часто употребляются в том смысле, который им придавала теория теплорода. Так, с одной стороны, „тепло“ употребляется в смысле „количества переданного тепла“, которое, как мы выяснили, эквивалентно работе и является мерой изменения энергии. С другой стороны, под „теплом“, содержащимся в теле, подразумевают тепловую энергию тела, о которой мы скажем дальше. Такое неоднозначное употребление слова „тепло“ может легко повести к неясностям, усугубляемым еще тем, что в соответствии с неверной теорией теплорода иногда подразумевается, что количество „тепла“, содержащегося в теле, определяется „количеством переданного тепла“. Несостоятельность же последнего утверждения с несомненностью вытекает из того, что для перевода некоторого вещества из определенного начального состояния I в некоторое вполне определенное состояние II приходится сообщать ему самые разнообразные количества тепла в зависимости от того, каким образом совершается переход. Возьмем, например, 1 моль идеального газа, который требуется перевести из состояния I , характеризуемого давлением p_1 и температурой T_1 , в состояние II , характеризующееся более высоким давлением p_2 и более высокой температурой T_2 . Этот перевод мы можем провести различным образом. Например: 1) нагреваем газ при постоянном давлении p_1 до температуры T_2 ; для этого сообщаем газу количество тепла: $\Delta Q = C_p(T_2 - T_1)$, где C_p — молярная теплоемкость газа при постоянном давлении; после этого сжимаем газ изотермически до давления p_2 ; 2) нагреваем газ при постоянном объеме до температуры T_2 , для чего сообщаем ему количество тепла $\Delta Q' = C_v(T_2 - T_1)$, где C_v — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. После этого сжимаем газ изотермически до давления p_2 . В обоих случаях газ переведен из состояния I во вполне определенное состояние II , количества же переданного ему тепла ΔQ и $\Delta Q'$ не равны друг другу, так как $C_p \neq C_v$.

При нагревании газа при постоянном объеме мы имеем дело только с передачей количества тепла, которое полностью идет на увеличение запаса внутренней энергии газа. При нагревании же при постоянном давлении процесс носит более сложный характер: одновременно с передачей количества тепла производится работа, вызванная расширением газа. Только одновременный учет работ и количеств переданного тепла позволяет однозначно учесть изменение внутренней энергии тела.

Отсюда становится ясной невозможность говорить о „запасе тепла“ у тела, *определяемом „количеством переданного тепла“.*

Степень нагретости тел, характеризующаяся температурой, определяется интенсивностью беспорядочного молекулярного движения.

Как мы видели (§ 48), температура T тела в шкале Кельвина однозначно определяется через среднюю энергию \bar{w}_0 , приходящуюся на одну степень свободы молекулы: $T = \frac{2}{k} \bar{w}_0$, где k — постоянная Больцмана. Полная энергия беспорядочного движения молекул (поступательного, вращательного, колебательного) вместе с возможными видами немеханической потенциальной энергии составляет запас внутренней энергии тела. Сумму энергий всех видов *беспорядочного* движения частиц иногда называют *тепловой энергией* данного тела. Однако выделение из общей внутренней энергии тела тепловой энергии возможно лишь в том случае, если имеется достаточно полная молекулярно-кинетическая теория данного тела, учитывающая все виды возможных беспорядочных движений его частиц и зависимость этих движений от температуры. При этом, как мы указали в § 49, эта теория не может основываться только на представлениях классической механики, но должна учитывать особый, квантовый характер движения молекул.

Выделение тепловой энергии можно произвести лишь для простейших идеализированных случаев. Так, мы видели (см. § 48), что для идеального газа взаимная потенциальная энергия его частиц равна нулю. Следовательно,

для такого газа тепловая энергия совпадает с его внутренней энергией. В качестве другого примера возьмем идеализированный двуатомный газ, все молекулы которого имеют независимо от температуры пять степеней свободы и подчиняются закону равнораспределения энергии по степеням свободы. Для такого газа его тепловая энергия равна $\frac{5}{2} kTN$, где N — число молекул газа.

Для всех же реальных тел такое выделение тепловой энергии невозможно. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь полной внутренней энергии тел, не выясняя, из каких отдельных видов энергии она состоит.

Эквивалентность количества переданного тепла и работы, а вместе с тем и их специфические особенности сказываются особенно ясно при разборе отдельных явлений с молекулярно-кинетической точки зрения. Пусть движущийся молоток ударяет о пружину и сжимает ее. Здесь кинетическая энергия *упорядоченного* движения молотка перешла, в результате совершения работы упругих сил, в потенциальную энергию сжатой пружины. Возьмем другой пример: определенное количество газа нагревается на ΔT° путем теплопроводности при соприкосновении с другим количеством газа, находящимся при более высокой температуре. Этот процесс, сводящийся с макроскопической точки зрения к передаче некоторого количества тепла от горячего газа более холодному, с молекулярно-кинетической точки зрения представляет собой процесс выравнивания средних кинетических энергий *беспорядочного* движения молекул обоих газов. На этих особенностях передачи энергии путем совершения работы (в результате наличия упорядоченного движения) и путем передачи тепла (в результате наличия беспорядочного молекулярного движения) мы еще в дальнейшем остановимся.

Существенно отметить, что при измерении количества переданного тепла по эквивалентным количествам затраченной работы было установлено, что теплоемкости всех тел, в том числе и воды, не являются вполне постоянными величинами, но несколько зависят от температуры. Поэтому „количество переданного тепла“ ΔQ , определяемое соотношением (1)

$$\Delta Q = ct \Delta T,$$

само по себе еще не может служить мерой изменения энергии системы. Такой мерой оно может служить лишь после того, как в результате установления эквивалентных работ для каждого температурного интервала ΔT определен вид зависимости теплоемкости от температуры T . „Первичной мерой“ изменения энергии системы всегда является механическая работа. Это еще раз подтверждает уже приведенное нами раньше (§ 26) высказывание Энгельса, что „работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны“.¹

В связи с тем, что теплоемкость воды, как и всех других тел, зависит от температуры, необходимо уточнить определение калории. В настоящее время принимается, что калория есть количество переданного тепла, необходимое для повышения температуры 1 г воды от $19,5^\circ$ до $20,5^\circ$ С при постоянном давлении.

§ 69. Круговые процессы (циклы). Рассматривая какой-либо процесс с термодинамической точки зрения, мы можем не интересоваться, из каких веществ состоит система, но нам важно знать, каким числом физических величин и какими именно физическими величинами состояние системы может быть однозначно определено.

Величины, служащие для определения состояния системы и могущие изменяться под влиянием внешних причин, как сказано выше,

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы. 1950, стр. 70.

называются *параметрами*. Количество параметров, необходимых для однозначного определения состояния системы, зависит от степени ее сложности. Для того чтобы установить степень сложности системы, в термодинамике вводят понятие о *фазе*. Под фазой подразумевают всякое физически однородное тело или совокупность тождественных и физически однородных тел. Например, система, состоящая из воды и насыщенного водяного пара над ней, представляет собою систему из двух фаз: одной фазой является вода, другой — насыщенный пар. Также вода и плавающие в ней куски льда будут представлять собою систему из двух фаз: одна фаза — это вода, другая — совокупность кусков льда.

Простейшей системой является некоторое определенное количество идеального газа; это будет однофазная система. Параметрами, однозначно определяющими состояние этой системы, служат две из трех следующих величин: объем V , давление p и температура T (масса газа m , как определенно заданная, в этом случае параметром не является). Величины V , p и T связаны между собою уравнением состояния, которым для идеального газа служит формула Менделеева — Клапейрона.

Весьма существенен вопрос о том, является ли данная система *равновесной* или *неравновесной*. Равновесным состоянием системы называется такое состояние, при котором характеризующие систему параметры имеют определенные значения, остающиеся без влияния извне каких-либо причин неизменными сколь угодно долго. Если эти условия не выполнены, состояние системы будет неравновесным. Приведем примеры: система, состоящая из жидкости и насыщенного пара над ней, заключенных в сосуд данного объема V и находящихся во всех своих частях при одинаковой температуре T , находится в равновесном состоянии; здесь все части системы находятся под одним и тем же давлением. Таким образом, p и T имеют для системы определенные значения, остающиеся, так же как и остальные параметры (относительные количества жидкости и насыщенных паров), неизменными со временем. Та же система, в которой температуры жидкости и пара различны, окажется в неравновесном состоянии: величина T для нее вообще не имеет определенного значения, а относительные количества жидкости и пара будут меняться. В качестве другого примера неравновесного состояния системы можно привести металлический стержень, концы которого поддерживаются извне при разных температурах; здесь осуществляется постоянство температуры в каждой данной точке стержня (стационарное состояние), но, во-первых, это постоянство возможно лишь при наличии внешней причины, поддерживающей концы стержня при данных температурах, и, во-вторых, температура в разных частях стержня разная.

Графически состояние системы можно изобразить точкой, отложив по осям координат значения параметров, характеризующих систему. Например, если состояние системы характеризуется ее объемом V и давлением p , то, отложив по оси абсцисс объем, а по оси ординат —

давления, получим, что состояние системы, характеризуемое данными p и V , изобразится точкой A (рис. 167), координаты которой суть p и V . Только равновесное состояние системы может быть изображено точкой, так как неравновесному состоянию системы не соответствуют, как мы выяснили, определенные значения параметров.

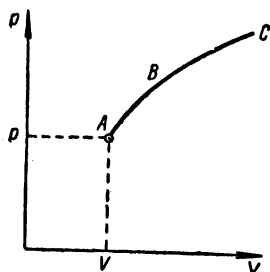


Рис. 167. Равновесное состояние изображается точкой. Равновесный процесс изображается кривой.

Процесс, происходящий в системе, всегда связан с рядом неравновесных состояний. Однако можно представить такое протекание процесса, что для каждого момента времени каждый из параметров имеет определенное значение, и изменение параметров со временем происходит настолько медленно, что в течение любым образом выбранного малого промежутка времени Δt система может считаться равновесной. Такой *бесконечно медленно протекающий процесс называется равновесным процессом, его можно считать состоящим из ряда равновесных состояний*.

Ни один реальный процесс, строго говоря, не может быть равновесным, но чем медленнее он протекает, тем ближе он к равновесному. Графически равновесный процесс изобразится непрерывной кривой (кривая ABC рис. 167).

Назовем *обратимым* такой процесс, который может протекать в обоих направлениях, причем если процесс протек сперва в одном направлении, а потом в обратном, то система должна вернуться в исходное состояние без того, чтобы в окружающих телах произошли какие-либо изменения. Всякий равновесный процесс обратим, так как он состоит из непрерывного ряда равновесных состояний, которые могли следовать друг за другом как в одном, так и в обратном направлении. Неравновесный процесс всегда необратим, откуда следует, что реальные процессы, строго говоря, всегда необратимы, они могут лишь приближаться к обратимым процессам, протекая бесконечно медленно. Ниже мы подробнее разберем случай обратимых и необратимых процессов.

Представим себе процесс, сводящийся к изменению объема V , давления p и температуры T данного количества вещества. Определим работу, совершаемую при переходе из состояния C_1 в состояние C_2 (рис. 168), считая, что переход происходит бесконечно медленно, т. е. считая процесс равновесным.

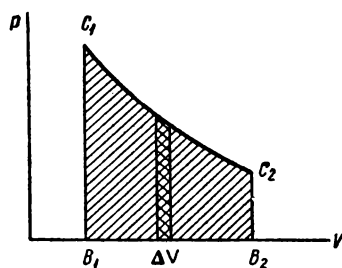


Рис. 168. Работа расширения изображается площадью фигуры $C_1C_2B_2B_1$.

В § 49 было указано, что при расширении газа при постоянном давлении p совершается работа

$$A = p(V_2 - V_1), \quad (1)$$

где $V_2 - V_1$ — изменение объема. Это выражение справедливо не только при расширении газа, но и при расширении любого вещества, которое мы будем называть рабочим веществом, если только давление p остается во время расширения постоянным.

Теперь, однако, мы рассматриваем более общий случай, когда давление не остается постоянным. Поэтому предварительно введем в рассмотрение бесконечно малое изменение объема ΔV , при котором давление p можно считать постоянным; тогда элементарная работа ΔA , совершаемая при таком бесконечно малом расширении, равна

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (2)$$

Графически элементарная работа ΔA изобразится площадью густо заштрихованного столбика на рис. 168. Давление p численно равно силе, приложенной со стороны рабочего вещества к единице поверхности стенки сосуда. Поэтому работа ΔA в формуле (2) представляет собою работу сил, приложенных со стороны системы к внешним телам, т. е. ту работу, которая в формуле (3) § 68 была обозначена $\Delta A'$. Подставляя это значение ΔA в формулу (3) § 68, получим выражение закона сохранения энергии в применении к данному элементарному процессу:

$$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V. \quad (3)$$

Здесь ΔQ — количество тепла, переданного рабочему веществу, ΔU — изменение его внутренней энергии. Если вещество расширяется ($\Delta V > 0$), то работа положительна: $\Delta A > 0$; эта работа совершается либо за счет передачи извне рабочему веществу количества тепла ($\Delta Q > 0$), либо за счет убывания внутренней энергии вещества U , либо за счет этих обоих источников вместе. При уменьшении объема рабочего вещества ($\Delta V < 0$), что может происходить в результате сжатия вещества внешними силами, работа $\Delta A = p \Delta V$ отрицательна; это ведет к передаче от рабочего вещества внешним телам количества тепла ($\Delta Q < 0$), либо к увеличению запаса внутренней энергии тела U , либо к обоим этим процессам одновременно.

Полная работа, совершаемая при изменении состояния вещества от точки C_1 до точки C_2 , равна сумме элементарных работ:

$$A = \sum \Delta A = \sum p \Delta V; \quad (4)$$

графически она изобразится площадью фигуры $C_1 C_2 B_2 B_1$, заштрихованной на рис. 168.

Представим себе, что рабочее вещество, которое, расширяясь, перешло из состояния C_1 в состояние C_2 (рис. 169), затем путем

сжатия оказалось снова переведено в состояние C_1 . Пусть процесс расширения изображается кривой $C_1C'C_2$. Сжатие может быть осуществлено вдоль той же самой кривой $C_2C'C_1$, проходящей в обратном порядке. Но можно провести сжатие иным путем так, чтобы оно изобразилось, например, более низкой кривой $C_2C''C_1$, для чего во время сжатия вещество следует поддерживать при другом температурном ходе T_2 , чем температурный ход T_1 , при котором оно расширялось. Для всех веществ, имеющих положительный коэффициент объемного расширения, $T_2 < T_1$, так как для таких веществ при одном и том же объеме большие давления достигаются при больших температурах. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие вещества.

Весь процесс, изображаемый замкнутой кривой $C_1C'C_2C''C_1$, называется *круговым процессом* или *циклом*. Подсчитаем сумму работ, совершенных при цикле.

Работа A_1 , совершаемая веществом при расширении, изобразится площадью фигуры $C_1C'C_2B_2B_1$; эта работа положительна: $A_1 > 0$.

Работа A_2 , совершаемая при сжатии, изобразится площадью фигуры $C_1C''C_2B_2B_1$; эта работа отрицательна: $A_2 < 0$.

Суммарная работа

$$A = A_1 + A_2$$

изобразится *разностью площадей* фигур $C_1C'C_2B_2B_1$ и $C_1C''C_2B_2B_1$, откуда следует, что она равна заштрихованной на рис. 169 площади, охватываемой кривой $C_1C'C_2C''C_1$. Эта работа положительна.

Рис. 169. Работа, совершаемая при круговом процессе, равна площади фигуры, охватываемой замкнутой кривой.

Обозначим внутреннюю энергию вещества в состоянии C_1 через U_1 , а в состоянии C_2 — через U_2 . Количество тепла, *переданного рабочему веществу* при расширении $C_1C'C_2$, обозначим через Q_1 , а количество тепла, *переданного рабочему веществу* при сжатии $C_2C''C_1$, — через Q_2 . (При расширении вещество *получает* количество тепла $Q_1 > 0$, а при сжатии *отдает* количество тепла $Q_2 > 0$, т. е. получает количество тепла — Q_2). Тогда по первому началу термодинамики имеем

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1; \quad -Q_2 = U_1 - U_2 + A_2.$$

Складывая оба эти равенства почленно, получим, что работа A , совершенная при цикле веществом против внешних сил, равна

$$A = A_1 + A_2 = Q_1 - Q_2. \quad (5)$$

Эта работа при цикле, изображенном на рис. 169, как мы выяснили, положительна. Таким образом, в результате процесса,

изображаемого циклом $C_1C'C_2C''C_1$, оказалось: веществу извне передано количество тепла Q_1 , вещество отдало количество тепла Q_2 , меньшее, чем Q_1 ; за счет разности значений этих количеств тепла $Q_1 - Q_2$ вещество совершило работу A против внешних сил. Цикл такого рода носит название *прямого цикла*. Так как в результате за счет переданного количества тепла $Q_1 - Q_2$ совершена работа A , то процесс, изображаемый прямым циклом, представляет собой *тепловую машину*.

Как мы видим, при рассматриваемом круговом процессе не все количество тепла Q_1 , переданное веществу во время первой половины процесса, оказалось превращено в работу: часть тепла Q_2 снова отдана вовне. Так как передача тепла происходит сама собой только от более горячего тела более холодному, то, следовательно, должны существовать: более горячее тело, передающее веществу количество тепла Q_1 (нагреватель), и более холодное тело, которому вещество отдает количество тепла Q_2 (холодильник).

При получении работы за счет переданного количества тепла, конечно, выполняется закон сохранения энергии: разность $Q_1 - Q_2$ между значениями количества тепла, взятого извне и отданного, равна полученной работе A . С практической точки зрения представляет интерес, какая часть взятого от нагревателя тепла Q_1 превращена в работу A , так как количество тепла Q_2 , отданное холодильнику, практически не представляет интереса; поэтому вводится в рассмотрение коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (6)$$

Для определения этого к. п. д. надо рассмотреть конкретный цикл и вычислить производимые в нем работы. Мы сделаем это в § 73.

Сейчас рассмотрим цикл, *обратный* по отношению к циклу, изображенному на рис. 169. При *обратном цикле* (рис. 170) расширение вещества происходит по кривой $C_1C'C_2$, при этом совершается положительная работа A_1 , численно равная площади фигуры $C_1C''C_2B_2B_1$. Сжатие вещества происходит по кривой $C_2C'C_1$; совершаемая при этом работа A_2 отрицательна, численно она равна площади фигуры $C_1C'C_2B_2B_1$. Суммарная работа $A' = A_1 + A_2$ *отрицательна*, так как по абсолютному значению A_2 больше A_1 ; численное значение суммарной работы A' изобразится площадью, охватываемой замкнутой кривой $C_1C'C_2C''C_1$. Положительна будет работа, совершаемая силами, приложенными к системе со стороны внешних тел, $A = -A'$.

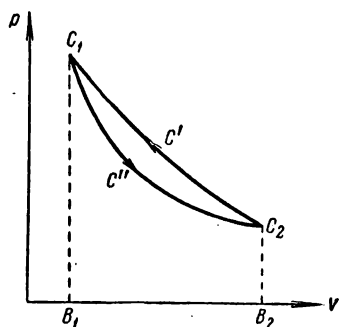


Рис. 170. Обратный цикл.

Пусть при расширении тело поглощает извне количество тепла Q_2 , а при сжатии отдает количество тепла Q_1 . Весь процесс сводится к следующему: силы, приложенные к системе со стороны внешних тел, совершают положительную работу A , система получает извне количество тепла Q_2 и отдает количество тепла Q_1 , большее чем Q_2 . Количество отданного тепла Q_1 равно сумме полученного тепла Q_2 и работы, совершенной над системой внешними силами:

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Машина, работающая по рассмотренному циклу, может служить *холодильной машиной*: так как расширение $C_1C''C_2$ происходит при более низкой температуре, чем сжатие $C_2C'C_1$, то количество тепла Q_2 может браться от более холодного тела, а количество тепла Q_1 передаваться более горячему. Холодильная машина работает за счет внешних сил, она „перетаскивает“ некоторое количество тепла Q_2 от более холодного тела (тем самым охлаждая его еще сильнее) к телу более горячему.

§ 70. Адиабатические процессы. Уравнение адиабаты. *Адиабатическим изменением* состояния системы называется такое изменение, которое *протекает без обмена теплом между системой и окружающими телами*. При адиабатическом процессе система не получает извне тепла и не отдает тепла окружающим телам. Для адиабатического протекания процесса система должна быть окружена совершенно нетеплопроводными стенками. Так как совершенно нетеплопроводных стенок осуществить нельзя, то всякий реальный процесс может происходить лишь как более или менее точное приближение к адиабатическому. Практически близкими к адиабатическим оказываются процессы, протекающие настолько быстро, что обмен теплом с внешними телами не успевает осуществиться в сколь угодно заметных количествах.

Математически адиабатический характер процесса выразится в том, что $\Delta Q = 0$, откуда закон сохранения энергии при адиабатическом процессе примет вид:

$$\Delta U + \Delta A = 0. \quad (1)$$

При адиабатическом процессе работа ΔA может производиться лишь за счет изменения внутренней энергии системы. Если система совершает положительную работу ($\Delta A > 0$), то внутренняя энергия системы убывает; если, наоборот, внешние силы совершают над системой работу ($\Delta A < 0$), то внутренняя энергия системы возрастает.

Рассмотрим процесс адиабатического расширения идеального газа. Работа ΔA , как всегда, равна

$$\Delta A = p \Delta V, \quad (2)$$

где p — давление газа, а ΔV — изменение его объема. Внутренняя энергия идеального газа, как было показано в § 48, есть кинетическая

энергия движения его молекул; отсюда внутренняя энергия одного моля идеального газа равна

$$U = \frac{i}{2} k T \cdot N = \frac{i}{2} R T,$$

где k — постоянная Больцмана, N — число Авогадро, R — газовая постоянная. Вводя молярную теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2} R$, имеем

$$U = C_V \cdot T,$$

откуда изменение внутренней энергии идеального газа равно

$$\Delta U = C_V \cdot \Delta T. \quad (3)$$

Подставив в (1) значение ΔA по (2) и значение ΔU по (3), получим выражение первого начала термодинамики в применении к одному молю идеального газа:

$$C_V \Delta T + p \Delta V_0 = 0. \quad (4)$$

Из соотношения (4) имеем: при адиабатическом расширении ($\Delta V_0 > 0$) — газ охлаждается ($\Delta T < 0$); при адиабатическом сжатии ($\Delta V_0 < 0$) — газ нагревается ($\Delta T > 0$). Таким образом, при адиабатическом изменении объема газа его температура не остается постоянной. Соответственный расчет (см. мелкий шрифт на стр. 271) позволяет связать это изменение температуры газа T с изменением его объема V . Пусть газ, занимая объем V_1 , имел температуру T_1 , тогда при адиабатическом изменении объема до значения V_2 температура примет значение T_2 , причем будет иметь место следующее соотношение:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (5)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, т. е. γ есть отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме (см. мелкий шрифт на стр. 271).

Воспользовавшись формулой Менделеева — Клапейрона, справедливой для каждого данного состояния газа, получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2},$$

подставив это значение V_1/V_2 в (5), получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (6)$$

Формула (6), тождественная по своему смыслу с формулой (5), связывает изменение температуры, происходящее при адиабатическом процессе, с изменением давления газа.

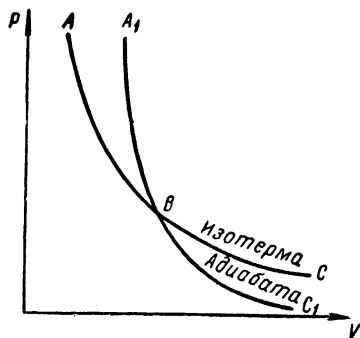
Сравним теперь изотермическое и адиабатическое изменения состояния газа. Для того чтобы расширение газа могло происходить *изотермически*, т. е. при постоянной температуре, газу необходимо непрерывно передавать извне тепло, чтобы компенсировать то падение внутренней энергии, которое происходит при совершении газом положительной работы. Наоборот, для того, чтобы сжатие газа протекало изотермически, от него надо непрерывно отбирать тепло, чтобы запас его внутренней энергии, а вместе с ним и его температура не возросли. Изотермический процесс возможен лишь при идеально хорошем обмене теплом между газом и внешними телами. Практически приблизиться к изотермическому процессу можно, заставляя его протекать настолько медленно, чтобы температура газа все время успевала выравниваться с температурой окружающих тел.

Таким образом, мы имеем:

1) *изотермическое изменение объема газа* возможно при идеально хорошем обмене теплом с внешними телами; работа сил, приложенных со стороны газа к внешним телам, при расширении происходит за счет притока извне тепла; работа внешних сил при сжатии газа сопровождается передачей от газа внешним телам соответственного количества тепла;

2) *адиабатическое изменение объема газа* возможно при идеально хорошей тепловой изоляции; работа газа совершается за счет его внутренней энергии; при расширении газ охлаждается, при сжатии — нагревается.

Изотермическое изменение газа подчиняется закону Бойля — Мариотта:



$$pV = \text{const}$$

Рис. 171. Адиабата проходит более круто, чем изотерма.

для данного количества газа. Пусть эта зависимость выражается на рис. 171 изотермой ABC . Если мы, исходя из некоторого состояния B , начнем газ сжимать адиабатически, то его температура, согласно сказанному, начнет повышаться; благодаря этому, все значения произведения pV будут по численному значению больше, чем при изотермическом сжатии; отсюда адиабатическое сжатие изобразится кривой BA_1 , идущей вверх круче, чем ветвь изотермы BA . Точно так же, если мы, исходя из точки B , начнем газ адиабатически расширять, то его температура начнет падать, в результате чего расширение изобразится кривой BC_1 , идущей вниз круче, чем ветвь изотермы BC . Кривая A_1BC_1 носит название *адиабаты*. Таким образом, при адиабатическом изменении объема газа газ не подчиняется закону Бойля — Мариотта. Кривая, изображающая адиабатическое

расширение газа (адиабата), идет круче, чем кривая, изображающая изотермическое изменение объема газа (изотерма).

Уравнение адиабаты получим, воспользовавшись выражениями (5) и (6); приравнявая друг другу их правые части, получим

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}, \quad (7)$$

т. е. при адиабатическом изменении объема давление газа p меняется обратно пропорционально объему, взятому в степени γ . Из формулы (7) имеем, что при адиабатическом процессе

$$p V^{\gamma} = \text{const.} \quad (7a)$$

Формула (7a), заменяющая для адиабатического процесса закон Бойля — Мариотта, носит название *формулы Пуассона*.

Практически процессы не носят строго адиабатического или строго изотермического характера, так как невозможно осуществить ни полной термической изоляции, ни идеального обмена теплом. Действительные процессы носят характер, средний между изотермическим и адиабатическим. Частным случаем реальных процессов являются процессы *политропические*, для которых имеют место те же формулы, что и для адиабатических, только γ имеет значение, промежуточное между C_p/C_v и единицей. В этом случае γ носит название *показателя политропы*.

Чем ближе показатель политропы к значению C_p/C_v , тем ближе процесс к адиабатическому; чем ближе показатель политропы к единице, тем ближе процесс к изотермическому.

Выражение (5) можно вывести, переписав первое начало термодинамики (4) в дифференциальном виде:

$$C_v dT + p dV_0 = 0, \text{ откуда } p dV_0 = -C_v dT.$$

Поделив это равенство почленно на равенство, выражающее уравнение состояния идеального газа,

$$pV_0 = RT,$$

получим

$$\frac{dV_0}{V_0} = -\frac{C_v}{R} \cdot \frac{dT}{T}, \text{ или } \frac{R}{C_v} \cdot \frac{dV_0}{V_0} = -\frac{dT}{T}.$$

Так как R/C_v — величина постоянная, то последнее равенство можно переписать в виде:

$$d\left(\frac{R}{C_v} \ln V_0\right) = -d(\ln T).$$

Но если дифференциалы двух величин равны друг другу, то сами величины могут отличаться лишь на произвольную аддитивную постоянную:

$$\frac{R}{C_V} \ln V_0 = -\ln T + \text{const}, \quad \text{откуда} \quad \ln \left(V_0^{\frac{R}{C_V}} \cdot T \right) = \text{const}.$$

Так как величина, логарифм которой постоянен, тоже постоянна, то

$$V_0^{\frac{R}{C_V}} \cdot T = \text{const}. \quad (8)$$

Это выражение преобразуем, воспользовавшись формулой (5) § 49, откуда

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1.$$

Подставив это значение R/C_V в (8), найдем

$$V_0^{\gamma-1} T = \text{const},$$

т. е. при адиабатическом процессе произведение из температуры T на $V^{\gamma-1}$ остается постоянным, следовательно,

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1},$$

что совпадает с формулой (5).

Для того чтобы получить конкретное представление о различии изотермического и адиабатического процессов, рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. Некоторое количество азота, находящегося при температуре 27°C и давлении в 1 ат , сжимается адиабатически до объема в 5 раз меньшего, чем начальный. Чему будут равны после сжатия давление и температура азота? Сравнить давление с тем, которое получится при изотермическом сжатии.

Решение. По формуле Пуассона (7):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, \quad \text{откуда} \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma.$$

В нашем случае $p = 1 \text{ ат}$, $\frac{V_1}{V_2} = 5$, и так как азот двуатомный газ, то (см. § 49)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Отсюда

$$p_2 = 1 \cdot 5^{1,4} \text{ ат} = 9,5 \text{ ат}.$$

В случае изотермического сжатия давление определилось бы по закону Бойля — Мариотта:

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1 \cdot 5 \text{ ат} = 5 \text{ ат}.$$

Температура T_2 , которую газ примет после адиабатического сжатия, определится соотношением (5):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad \text{откуда} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot 5^{0,4} = 571^\circ\text{K},$$

или, переходя к шкале Цельсия, получим: $t = 298^\circ\text{C}$. Таким образом, при рассматриваемом адиабатическом сжатии будет иметь место значительное

нагревание (от 27 до 298° С), и давление почти вдвое превысит то, которое имеет место при изотермическом сжатии.

Пример 2. В закрытой колбе со стенками, окруженными нетеплопроводным материалом, имеется воздух при повышенном против атмосферного давлении p_1 и температуре T_1 . Открыв кран (рис. 172), дают давлению воздуха внутри колбы быстро выравняться с атмосферным давлением H , после чего кран C закрывают. После того как температура воздуха внутри колбы снова приняла значение T_1 , давление внутри колбы оказалось равным p_2 .

Определить по этим данным отношение γ теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме.

Решение. Обозначим объем колбы V_1 . Мысленно выделим ту часть воздуха, имеется в колбе после открытия крана; она занимала некоторый объем V_2 , давление воздуха было p_1 и его температура T_1 .

При открывании крана из колбы вырвалась часть воздуха; оставшийся воздух занял весь объем колбы V_1 , и его давление стало равным атмосферному давлению H .

Процесс расширения можно считать адиабатическим, так как он протекал быстро и стенки колбы по условию плохо теплопроводны, поэтому по формуле Пуассона:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{H}{p_1}. \quad (9)$$

В результате этого адиабатического расширения воздух охладился до некоторой температуры T_2 . После того как его температура снова возросла до первоначального значения T_1 , его давление стало больше атмосферного H и приняло некоторое значение p_2 . Объем воздуха при этом остался равным V_1 .

Так как при этом окончательном состоянии воздуха его температура та же, что и в начале, то величины V_2 , V_1 , p_1 и p_2 связаны между собою законом Бойля — Мариотта:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (10)$$

Сравнивая выражения (9) и (10), получаем

$$\frac{H}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\gamma.$$

Логарифмируя это соотношение, найдем

$$\lg H - \lg p_1 = \gamma (\lg p_2 - \lg p_1), \quad \text{откуда} \quad \gamma = \frac{\lg H - \lg p_1}{\lg p_2 - \lg p_1}.$$

Таким образом, измерив давления H , p_1 и p_2 , можно получить значение γ для воздуха.

Изложенный пример представляет собою схему опыта, применяемого для определения отношения теплоемкостей C_p и C_v газов.

§ 71. Работа при адиабатическом и изотермическом изменениях объема газа. Определим работу, совершаемую при адиабатическом расширении газа. Эта работа ΔA , как мы выяснили, целиком совершается за счет изменения внутренней энергии газа.

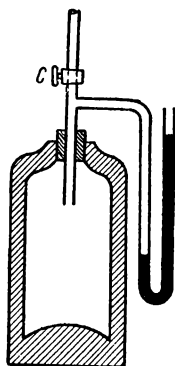


Рис. 172. Схема опыта по определению C_p/C_v для воздуха.

Пользуясь соотношением (4) § 49, имеем для моля идеального газа:

$$\Delta A = p \Delta V_0 = -C_V \Delta T.$$

Так как C_V постоянно, то это соотношение справедливо и для конечного изменения температуры. Пусть первоначальная температура газа T_1 , а окончательная T_2 , тогда $\Delta T = T_2 - T_1$, и совершенная работа A равна

$$A = -C_V(T_2 - T_1) = C_V T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Заменив по формуле (5) § 70 отношение T_2/T_1 отношением $\left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}$, получим

$$A = C_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (1)$$

Эта формула и дает нам работу при адиабатическом изменении объема одного моля газа от значения V_{01} до значения V_{02} ; температура T_1 соответствует объему V_{01} .

Формуле (1) можно придать также несколько иной вид; для этого воспользуемся соотношением (5) § 49:

$$C_p - C_V = R,$$

откуда

$$C_V = R \frac{C_V}{R} = R \frac{C_V}{C_p - C_V} = R \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Подставив это выражение для C_V в (1), найдем

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (1a)$$

Работа, совершаемая при *изотермическом* расширении газа, производится за счет тепла, передаваемого газу извне. Поэтому она не может быть определена таким образом, как мы определяли работу, совершаемую при адиабатическом расширении. Элементарная работа, совершаемая газом при увеличении его объема на бесконечно малую величину ΔV , по формуле (2) § 69 равна

$$\Delta A = p \Delta V.$$

Полную работу A , совершаемую при изменении объема газа от значения V_1 до значения V_2 , получим, просуммировав все элементарные работы:

$$A = \sum p \Delta V;$$

графически эта работа выразится площадью фигуры, заштрихованной на рис. 173. Фактически указанное суммирование сводится к

интегрированию, результат которого (см. мелкий шрифт на стр. 275) дает для одного моля газа:

$$A = RT \ln \frac{V_{02}}{V_{01}}. \quad (2)$$

Так как при изотермическом процессе выполняется закон Бойля — Мариотта, то

$$\frac{V_{02}}{V_{01}} = \frac{p_1}{p_2},$$

откуда выражение (2) может быть также переписано в виде:

$$A = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2a)$$

Обобщая формулы (1a) и (2) на любую массу газа m , получим:

1) *работа A , совершаемая массой газа m при адиабатическом изменении ее объема от V_1 до V_2 , равна*

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]; \quad (16)$$

здесь μ — молекулярный вес газа, T_1 — температура газа при его объеме V_1 ;

2) *работа A , совершаемая массой газа m при изотермическом изменении ее объема от V_1 до V_2 , равна*

$$A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (26)$$

Здесь T — та постоянная температура, при которой протекает данное изотермическое изменение объема газа.

Выражение для работы при изменении объема можно подсчитать следующим образом. Элементарная работа

$$dA = p dV. \quad (3)$$

Полная работа при изменении объема от значения V_1 до значения V_2 выразится определенным интегралом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (4)$$

Это выражение справедливо независимо от того, протекает ли процесс изотермически или адиабатически.

Для изотермического процесса для одного моля газа выполняется формула Менделеева — Клапейрона:

$$pV_0 = RT,$$

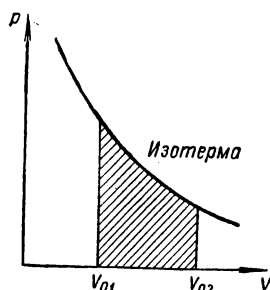


Рис. 173. Работа при изотермическом расширении газа изображается площадью заштрихованной фигуры.

причем температура T имеет постоянное значение. Выражая давление p через V_0 и T , получим

$$p = \frac{RT}{V_0}.$$

Подставляя это значение p в (4) и вынося R и T , как постоянные, за знак интеграла, найдем:

$$A = RT \int_{V_{01}}^{V_{02}} \frac{dV_0}{V_0} = RT \ln \frac{V_{02}}{V_{01}},$$

что и дает работу, совершаемую одним моле́м газа при изотермическом изменении его объема от значения V_{01} до значения V_{02} [ср. с формулой (2) основного текста].

Воспользуемся формулой (4), чтобы еще раз вывести выражение для работы, совершаемой при адиабатическом изменении объема. При адиабатическом процессе имеет место формула Пуассона:

$$pV_0^\gamma = p_1V_{01}^\gamma,$$

где p_1 и V_{01} — начальные давление и объем одного моля газа, отсюда

$$p = \frac{p_1V_{01}^\gamma}{V_0^\gamma}.$$

Подставляя это значение p в (4) и вынося $p_1V_{01}^\gamma$, как постоянную величину, за знак интеграла, получим:

$$A = p_1V_{01}^\gamma \int_{V_{01}}^{V_{02}} \frac{dV_0}{V_0^\gamma} = \frac{p_1V_{01}^\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{V_{01}^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_{02}^{\gamma-1}} \right);$$

вынося в последнем выражении $\frac{1}{V_{01}^{\gamma-1}}$ за скобки, найдем

$$A = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_1V_{01}^\gamma}{V_{01}^{\gamma-1}} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1V_{01}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, имеем

$$p_1V_{01} = RT_1,$$

где T_1 — температура, соответствующая газу, когда он занимал объем V_{01} и имел давление p_1 , отсюда

$$p = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right],$$

что совпадает с формулой (1a).

Приведем численный пример на вычисление работы сжатия газа.

Пример. 10 л азота, находившихся при давлении $p_1 = 1$ ат, сжимаются до давления $p_2 = 100$ ат. Определим работу сжатия для двух случаев: 1) сжатие производится изотермически; 2) сжатие производится адиабатически.

Решение. 1) При изотермическом сжатии работа, по формуле (26), равна

$$A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Замечая, что $\frac{m}{\mu} RT = p_1 V_1$ и $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, перепишем это выражение:

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Решая пример в CGS-системе, переводим давление в бары и объем в куб. сантиметры, тогда $p_1 = 1 \text{ ат} \cong 10^6 \text{ бар}$; $V_1 = 10 \text{ л} = 10^4 \text{ см}^3$, откуда:

$$A = 10^6 \cdot 10^4 \ln \frac{1}{100} \text{ эрг} \cong -4,6 \cdot 10^{10} \text{ эрг} = -4,6 \cdot 10^3 \text{ дж}.$$

2) При адиабатическом сжатии, по формуле (16):

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Здесь снова пользуемся соотношением $\frac{m}{\mu} RT_1 = p_1 V_1$; кроме того, замечаем, что по формуле Пуассона:

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

Выполняя эти подстановки, находим

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right].$$

Как и в первом случае, имеем: $p_1 \cong 10^6 \text{ бар}$, $V_1 = 10^4 \text{ см}^3$, кроме того, для азота, как для газа двухатомного, $\gamma = 1,4$, откуда

$$A = \frac{10^6 \cdot 10^4}{1,4 - 1} \left[1 - 100^{\frac{1,4 - 1}{1,4}} \right] \text{ эрг} = -6,8 \cdot 10^{10} \text{ эрг} = -6,8 \cdot 10^3 \text{ дж}.$$

В обоих случаях работа отрицательна, что соответствует тому, что она представляет собою работу сжатия, вызванного внешними силами. При адиабатическом сжатии работа в данном случае оказывается больше, чем при изотермическом сжатии.

§ 72. Второе начало термодинамики. Рассматривая в § 69 прямой круговой процесс, производимый с любым рабочим веществом, мы видели, что он может быть использован как тепловая машина: за счет количества тепла Q_1 , полученного от некоторого источника, рабочее вещество совершало работу A . Одновременно, как мы видели, количество тепла Q_2 передавалось холодильнику. Таким образом, процесс носил сложный характер: от нагревателя бралось количество тепла Q_1 ; рабочее вещество совершало работу A , меньшую, взятого количества тепла Q_1 ; количество тепла $Q_2 = Q_1 - A$ передавалось более холодному телу (холодильнику). Так как в большинстве случаев с практической точки зрения представляет интерес, какую долю взятого от нагревателя количества тепла Q_1 составляет работа A , то, как мы указывали, отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

может быть названо к. п. д. тепловой машины.

Очевидно, машина будет тем выгоднее, чем ближе η к единице, т. е. чем большую долю от количества полученного тепла составляет работа A .

Тепловой двигатель, который обладал бы к. п. д. $\eta = 1$, был бы необычайно выгодным. Дело в том, что такой двигатель не требовал бы наличия двух тел — более горячего (нагревателя) и более холодного (холодильника), он мог бы работать за счет охлаждения любых окружающих нас тел, например, земной коры или океанов, до температур, более низких, чем наиболее холодные из окружающих тел. Двигатель такого рода получил название *перпетуум мобиле второго рода*. Поскольку перпетуум мобиле второго рода не нарушал бы закона сохранения энергии (первого начала термодинамики), невозможность его построения не очевидна. Однако все попытки построить периодически действующую тепловую машину, результатами действия которой были бы только передача рабочему телу некоторым источником количества тепла Q_1 и получение работы $A = Q_1$, неизменно терпели неудачу.

Первым, поставившим в общем виде вопрос о получении работы за счет взятого от источника количества тепла, был Сади Карно, который в 1824 г. опубликовал работу: „Размышления о движущей силе огня“. Карно пришел к выводу, что при круговом процессе, производимом с идеальным газом и состоящем из адиабатических и изотермических изменений объемов, нельзя избежать передачи тепла от нагревателя к холодильнику, если только температура холодильника выше абсолютного нуля.

Впоследствии выводы Карно были обобщены Клаузиусом и В. Томсоном в *принцип невозможности осуществления такого периодического процесса, единственным результатом которого было бы получение работы за счет взятого количества тепла от одного источника*.

Этот принцип получил название *второго начала термодинамики*.

Второе начало термодинамики может быть сформулировано также в виде принципа невозможности построения перпетуум мобиле второго рода, т. е. периодически действующего двигателя, который давал бы работу за счет охлаждения одного источника количества тепла.

Справедливость второго начала термодинамики подтверждается тем, что огромное число выводов из него в точности совпадает с результатами опытов.

§ 73. Цикл Карно. Коэффициент полезного действия тепловой машины. Разберем в настоящем параграфе круговой процесс, введенный впервые в рассмотрение Карно и получивший название *цикла Карно*.

Этот цикл представляет собою обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Для осуществления цикла необходимо иметь нагреватель, сообщаящий рабочему веществу

соответственное количество тепла при его изотермическом расширении, и холодильник, принимающий от рабочего вещества соответствующее количество тепла при его изотермическом сжатии.

Будем, как и в § 69, обозначать количество тепла, *переданного рабочему веществу* нагревателем, через Q_1 , а количество тепла, *переданного рабочему веществу* холодильником, через $-Q_2$. (Положительно тепло Q_2 , *отданное рабочим веществом* холодильнику.) Работу во всех случаях будем обозначать через A (без знака). Работа, совершаемая рабочим веществом при расширении, положительна: $A_1 > 0$; работа, совершаемая при сжатии, отрицательна: $A_2 < 0$.

Разберем цикл Карно, выбрав в качестве рабочего вещества один моль идеального газа, который первоначально находится в состоянии (1), характеризуемом объемом V_{01} , давлением p_1 и температурой T_1 (рис. 174). Заставим газ изотермически расширяться, пока он не займет объем V_{02} при давлении p_2 [состояние (2)]. При этом изотермическом расширении газ получит от нагревателя количество тепла Q_1 и совершит работу $A_1 = Q_1$.

Исходя из состояния (2), предоставим газу расширяться адиабатически до состояния (3), характеризуемого объемом V_{03} и давлением p_3 . При этом температура газа упадет до некоторого значения T_2 .

Исходя из состояния (3), начнем газ сжимать изотермически (при постоянной температуре T_2) до состояния (4), характеризуемого объемом V_{04} и давлением p_4 . При этом газ отдает холодильнику количество тепла Q_2 и совершает работу $A = -Q_2$.

Наконец, исходя из состояния (4), сожмем адиабатически газ так, чтобы он принял исходный объем и давление V_{01} и p_1 и нагрелся до исходной температуры T_1 .

Покажем прежде всего, что такого рода процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, действительно может быть выполнен в виде замкнутого цикла. Для этого воспользуемся формулой (5) § 70, по которой при адиабатическом расширении (2) → (3) имеет место соотношение:

$$\left(\frac{V_{02}}{V_{03}}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (1)$$

Условие замкнутости заключается в том, чтобы газ при адиабатическом сжатии от состояния (4) к состоянию (1) повысил свою тем-

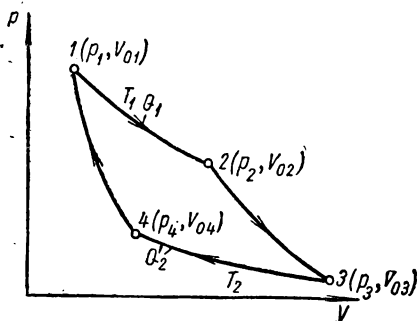


Рис. 174. Цикл Карно.

пературу от значения T_2 до начального значения T_1 , т. е. чтобы было выполнено соотношение:

$$\left(\frac{V_{01}}{V_{04}}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что должно быть выполнено условие:

$$\frac{V_{02}}{V_{03}} = \frac{V_{01}}{V_{04}}. \quad (3)$$

Так как этому условию всегда можно удовлетворить, то, следовательно, рассматриваемый процесс можно действительно осуществить в виде кругового процесса (цикла).

Определим к. п. д. цикла Карно. К. п. д. η кругового процесса, по сказанному в § 69, равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (4)$$

где A — суммарная работа, выполненная в результате протекания всего цикла; Q_1 — количество тепла, полученного от нагревателя; Q_2 — количество тепла, отданного холодильнику.

Количество тепла Q_1 , полученного рабочим веществом, равно работе A_1 , совершаемой одним моле́м газа при изотермическом расширении (1) → (2). По формуле 2 § 71 находим для Q_1 :

$$Q_1 = A_1 = RT_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}}.$$

Также количество тепла — Q_2 , полученного от холодильника, равно работе A_2 , совершаемой газом при изотермическом сжатии (3) → (4):

$$-Q_2 = A_2 = RT_2 \ln \frac{V_{04}}{V_{03}} = -RT_2 \ln \frac{V_{03}}{V_{04}}.$$

Подставив эти значения Q_1 и $-Q_2$ в выражение (4), найдем

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}} - T_2 \ln \frac{V_{03}}{V_{01}}}{T_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}}}.$$

Но из условия замкнутости (3) следует, что

$$\frac{V_{03}}{V_{04}} = \frac{V_{02}}{V_{01}}, \quad \text{откуда} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5)$$

Здесь T_1 — температура газа, при которой протекает изотермическое расширение (1) → (2); T_2 — температура газа, при которой протекает изотермическое сжатие (3) → (4). При изотермическом расширении газ получает от нагревателя количество тепла Q_1 , при изотермическом сжатии — отдает холодильнику количество тепла Q_2 .

Температуру нагревателя мы должны взять равной T_1 , а температуру холодильника — равной T_2 , так как при более высокой температуре нагревателя и более низкой температуре холодильника процесс не мог бы протекать равновесно.

Рассмотренный *прямой цикл Карно представляет собою идеальную тепловую машину. Коэффициент полезного действия такой идеальной тепловой машины η определяется только температурами T_1 нагревателя и T_2 холодильника.*

При протекании одного цикла газ совершает работу:

$$A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1, \quad (6)$$

где η — к. п. д., определяемый формулой (5). При этом от нагревателя оказывается полученным количество тепла Q_1 и холодильнику отдано количество тепла Q_2 , равное

$$Q_2 = Q_1 - A = (1 - \eta) Q_1. \quad (7)$$

Чем выше температура нагревателя T_1 и чем ниже температура холодильника T_2 , тем выше к. п. д., тем большая часть тепла Q_1 , полученного от нагревателя, превращается в работу и тем меньшее количество тепла Q_2 отдается холодильнику. К. п. д. η может равняться единице лишь при $T_2 = 0$, т. е. при температуре холодильника, равной абсолютному нулю.

Схема действия прямого цикла Карно (идеальной тепловой машины) представлена на рис. 175.

Обратимость цикла Карно позволяет провести его в обратном направлении по отношению к рассмотренному. Такой *обратный цикл Карно явится идеальной холодильной машиной*. В самом деле, при обратном цикле Карно внешние силы совершат над газом положительную работу A' , равную работе A , совершенной газом при прямом цикле. При этом от холодильника будет получено количество тепла Q_2 , которое по формулам (6) и (7) может быть представлено в виде:

$$Q_2 = \frac{1 - \eta}{\eta} A.$$

Нагревателю будет передано количество тепла

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

Схема действия обратного цикла Карно (идеальной холодильной машины) представлена на рис. 176.

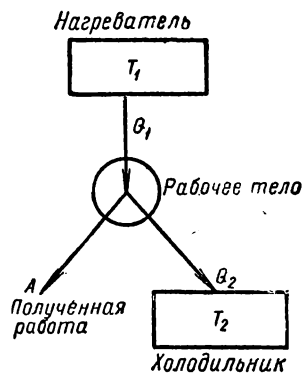


Рис. 175. Схема действия тепловой машины.

Все изложенные результаты мы получили, предполагая, что цикл Карно производился с идеальным газом. Однако, исходя из второго начала термодинамики, можно показать, что *обратимый цикл Карно, проводимый с любым рабочим веществом, имеет тот же самый к. п. д., что и цикл Карно, проводимый с идеальным газом.* Для доказательства предположим, что обратимый цикл Карно, проводимый с некоторым рабочим веществом, имеет к. п. д. η' больший, чем к. п. д. η цикла Карно, проводимого с идеальным газом: $\eta' > \eta$. Осуществим первый из этих циклов в *прямом направлении* (как

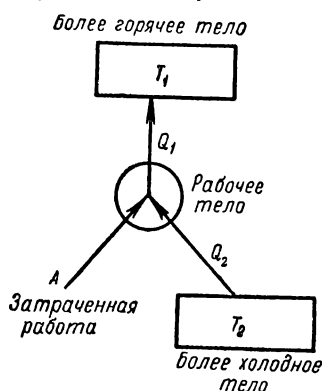


Рис. 176. Схема действия холодильной машины.

тепловую машину) n раз между нагревателем температуры T_1 и холодильником температуры T_2 . Тогда мы получим работу nA , причем от нагревателя будет получено количество тепла nQ_1 , а холодильнику отдано количество тепла nQ_2 . На основании соотношений (6) и (7), применимых не только к циклу Карно с идеальным газом, но и к произвольному циклу (если только под η подразумевать к. п. д. рассматриваемого цикла), мы можем написать:

$$nA = \frac{\eta'}{1 - \eta'} nQ_2. \quad (8)$$

Осуществим цикл Карно с идеальным газом в *обратном направлении* (как холодильную машину) m раз между теми же нагревателем и холодильником. Для этого мы должны затратить работу mA' ; от холодильника будет получено количество тепла mQ'_2 и нагревателю отдано количество тепла mQ'_1 . При этом выполняется соотношение:

$$mA' = \frac{\eta}{1 - \eta} mQ'_2. \quad (9)$$

Мы можем подобрать числа n и m так, чтобы

$$nQ_2 = mQ'_2. \quad (10)$$

Тогда по (8) и (9), принимая во внимание, что $\eta' > \eta$, получим

$$\frac{nA}{mA'} = \frac{\frac{\eta'}{1 - \eta'}}{\frac{\eta}{1 - \eta}} > 1,$$

т. е. в результате проведения прямого цикла n раз и обратного m раз полученная работа nA окажется больше, чем затраченная mA' ; при этом по (10) холодильнику передано столько же тепла, сколько

от него взято. Таким образом, оба цикла, взятые вместе, осуществят перпетуум мобиле второго рода: работа окажется полученной за счет тепла, взятого от нагревателя, без того, чтобы холодильнику было бы передано какое-либо количество тепла. Осуществление же перпетуум мобиле второго рода невозможно по второму началу термодинамики. Отсюда следует, что мы должны откинуть предположение, что $\eta' > \eta$.

Остается предположение, что $\eta' < \eta$. Но в этом случае, проводя цикл Карно с идеальным газом в прямом направлении, а цикл с другим рабочим веществом — в обратном, мы точно так же смогли бы осуществить перпетуум мобиле второго рода.

Таким образом, и это второе предположение должно быть отброшено. Следовательно, остается единственная возможность: $\eta' = \eta$.

Рассмотрим теперь *необратимый* (протекающий неравновесно) цикл Карно, проводимый в прямом направлении, т. е. действующий как тепловая машина. Обозначим η'' его к. п. д. Осуществляя этот процесс между данными нагревателем и холодильником и заставляя между теми же нагревателем и холодильником работать обратимый цикл Карно как холодильную машину, получим на основании рассуждений, тождественных с приведенными, что $\eta'' \leq \eta$, где η — к. п. д. обратимого цикла Карно.

Для необратимого цикла Карно нельзя показать, что одновременно его к. п. д. η'' не может быть меньше η , так как этот процесс не может быть по условию обратим, т. е. использован как холодильная машина. Отсюда мы должны ограничиться следствием, что *к. п. д. необратимого цикла Карно не может быть больше к. п. д. обратимого цикла Карно.*

Полученные результаты можно обобщить на любой замкнутый процесс.

Представим себе произвольный обратимый замкнутый процесс, изображаемый графически замкнутой кривой $ABCD$ (рис. 177). Этот процесс может быть приближенно разбит на бесконечное множество бесконечно узких циклов Карно. При осуществлении всех этих циклов Карно части каждой из адиабат, проходимые дважды в противоположных направлениях, выпадут. Останутся изотермы и краевые участки адиабат, образующие в совокупности замкнутую ломаную линию. В пределе эта линия даст обход по циклу $ABCD$. Каждый из этих циклов Карно протекает

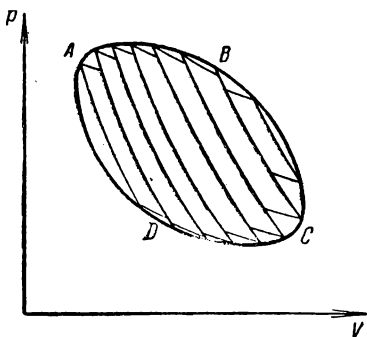


Рис. 177. Любой замкнутый круговой процесс $ABCD$ может быть разбит на элементарные циклы Карно.

между температурами T'_k и T_k , разными для различных циклов. По формуле (5) к. п. д. k -го цикла Карно равен

$$\eta_k = \frac{T'_k - T_k}{T'_k}.$$

Обозначим максимальную из температур, имеющих место при протекании всего цикла $ABCD$, через T_1 , а минимальную — через T_2 , тогда к. п. д. каждого из отдельных циклов Карно:

$$\eta_k \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Отсюда и к. п. д. всего цикла $ABCD$ будет удовлетворять условию:

$$\eta''' \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (11)$$

Таким образом, мы приходим к следствию, что *к. п. д. η''' любого прямого обратимого кругового процесса (тепловой машины) не может превышать к. п. д. обратимого цикла Карно (идеальной тепловой машины), протекающего между температурами T_1 и T_2 .*

Если рассматриваемый замкнутый процесс необратим, т. е. содержит необратимые участки, которые не могут быть изображены на рис. 177, то, как можно показать, он разбивается на бесконечное множество циклов Карно, часть которых будет также необратима.

Так как к. п. д. обратимого цикла Карно η'_k не может быть больше к. п. д. обратимого цикла, то формула (11) тем более справедлива и для *любого прямого необратимого кругового процесса.*

Второе начало термодинамики утверждает, что невозможен процесс, единственным результатом которого было бы получение работы за счет количества тепла, взятого от некоторого источника. Теперь мы видим, что процессом, сопровождающим получение работы за счет взятого количества тепла, может быть передача тепла от горячего тела к более холодному.

Из формул (6) и (7) имеем: если рабочее тело, совершающее обратимый цикл Карно, производит работу $A = \eta Q_1$ и получает от нагревателя количество тепла Q_1 , то при этом холодильнику передается количество тепла

$$Q_2 = (1 - \eta) Q_1,$$

где η — к. п. д., определяемый равенством (5).

Подставив в это соотношение вместо η его выражение по (5), получим

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1, \quad (12)$$

где T_1 — температура того тела, от которого берется тепло (нагреватель), T_2 — температура того тела, которому тепло передается (холодильник).

Любой другой процесс, проводимый между теми же нагревателем и холодильником, имея к. п. д. не больший, чем к. п. д. обратимого цикла Карно, производит ту же работу A (за счет равного ей количества тепла, взятого у нагревателя), лишь перенося от нагревателя к холодильнику количество тепла, не меньшее чем (12).

Таким образом, *рассмотрение обратимого цикла Карно дает нам количественный критерий, позволяющий установить то количество тепла Q_2 , меньше которого не может быть передано от горячего тела к холодному, чтобы, при любом рабочем процессе, получить заданное количество работы A за счет равного ему количества тепла $Q_1 - Q_2$, взятого от горячего тела.*

Остановимся еще на одном важном следствии, вытекающем из рассмотрения цикла Карно. В § 44 нами была отмечена произвольность шкалы температур, так как эмпирическая шкала зависит от выбора термометрического тела. Лишь выводы кинетической теории газов позволили установить связь между температурой и кинетической энергией движения молекул, общую для всех веществ. Рассмотрение цикла Карно позволяет, как это впервые отметил Кельвин, также установить шкалу температур, не зависящую от выбора термометрического тела. Способ установления этой шкалы, называемой *термодинамической шкалой температур*, следующий: из формулы (12) имеем

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Из этого равенства видно, что отношение двух температур T_1/T_2 может измеряться отношением теплот Q_1/Q_2 , где Q_1 — теплота, получаемая при обратимом цикле Карно от нагревателя, а Q_2 — передаваемая холодильнику. Как мы видели, к. п. д. η обратимого цикла Карно не зависит от рода применяемого рабочего вещества. Отсюда и отношение Q_1/Q_2 не зависит от выбора рабочего вещества, а следовательно, оно может служить для установления шкалы температур, независимой от выбора термометрического тела.

Термодинамическая шкала температур совпадает с абсолютной шкалой температур, определяемой по термометру с идеальным газом.

§ 74. Технические циклы. В предыдущем параграфе показано, что наивысшим возможным к. п. д. η обладает обратимый цикл Карно, для которого

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя, а T_2 — температура холодильника.

Однако осуществить практически такой цикл невозможно; приближение к циклу Карно осуществимо лишь при весьма медленном протекании процессов, что также с технической точки зрения неприемлемо. Применяемые в технических тепловых машинах циклы необратимы и в действительности даже незамкнуты, так как в них рабочее вещество (пар, сгоревшая смесь) по окончании цикла выбрасывается наружу. Однако задачей техники является создание таких циклов, к. п. д. которых по возможности приблизился бы к к. п. д. цикла Карно. Рассмотрим некоторые из технически применяемых циклов.

1. *Рабочий цикл идеальной поршневой паровой машины.* Этот цикл заключается в следующем (рис. 178):

а) при начале доступа пара из котла в цилиндр давление пара в цилиндре поднимается от значения p_0 (соответствующего давлению пара в холодильнике)

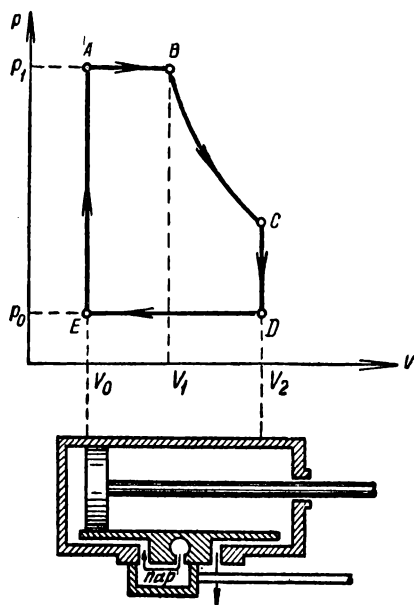


Рис. 178. Цикл поршневой паровой машины.

до значения p_1 (соответствующего давлению пара в котле); весь этот процесс можно считать происходящим при постоянном объеме V_0 (ветвь EA);

б) при продолжающемся доступе пара из котла в цилиндр поршень движется слева направо, в результате чего объем увеличивается при постоянном давлении p_1 от значения V_0 до значения V_1 (ветвь AB);

в) при дальнейшем движении поршня направо доступ пара из котла в цилиндр прекращается, в результате чего происходит адиабатическое расширение пара от объема V_1 до объема V_2 (ветвь BC);

г) при крайнем правом положении поршня золотник открывает выход пару из цилиндра в холодильник. Происходит быстрое падение давления пара до значения p_0 (практически при постоянном объеме V_2 ; ветвь CD);

д) при обратном движении поршень выталкивает оставшиеся пары при постоянном давлении p_0 , уменьшая их объем от V_2 до V_0 .

Определим полную работу, совершаемую паровой машиной за один цикл. Работа на ветвях EA и CD равна нулю, так что полная работа A складывается из следующих работ:

1) работы A_1 при изобарическом расширении AB

$$A_1 = p_1 (V_1 - V_0);$$

2) работы A_2 при адиабатическом расширении BC

$$A_2 = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right];$$

3) работы A_3 при изобарическом сжатии DE

$$A_3 = -p_0 (V_2 - V_0),$$

откуда полная работа

$$A = p_1 (V_1 - V_0) - p_0 (V_2 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Действительный цикл паровых поршневых машин несколько отличается от рассмотренного. Для вычерчивания цикла реальной машины применяется прибор, называемый *индикатором*.

Схема этого прибора дана на рис. 179. Смещение штифта, несущего записывающее перо, пропорционально давлению пара в цилиндре. Лист

бумаги *A*, на котором вычерчивается кривая, движется вместе с поршнем; таким образом, его смещение пропорционально объему, заполненному паром. Кривая, получаемая с помощью этого прибора, носит название *индикаторной диаграммы*. Работа, совершаемая машиной за одно смещение, изображается площадью, охватываемой индикаторной кривой.

На рис. 180 сравнены кривая, изображающая теоретический цикл *1*, и индикаторная диаграмма действительной машины *2*. Как видно, индикаторная кривая всеми своими частями лежит внутри кривой, изображающей теоретический цикл. Отсюда работа, производимая реальной машиной, меньше теоретической. Кроме того, во всякой реальной паровой машине имеется ряд вредных потерь тепла в топке и в других частях машины. В результате всего этого к. п. д. паровых машин невелик. Лучшие паровые машины потребляют на 1 л. с. в час около 0,5 кг угля с теплотворной способностью 7000 ккал на 1 кг. Следовательно, такая машина потребляет на 1 л. с. в час энергии $0,5 \cdot 7000 \cdot 427$ кГМ, совершает же работу

$$A = 75 \cdot 60 \cdot 60 \text{ кГМ, откуда ее к. п. д.}$$

$$\eta' = \frac{75 \cdot 60 \cdot 60}{0,5 \cdot 7000 \cdot 427} = 0,18.$$

Переводя в проценты, имеем $\eta' = 18\%$. Температура котла такой машины около 200°C , а температура холодильника — около 30° . Обратимый цикл Карно, осуществляемый между нагревателем и холодильником с такими температурами, имел бы к. п. д.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{170}{473} \approx 0,36,$$

или, в процентах, $\eta = 36\%$. Сравнение коэффициентов η' и η показывает, что в реальных поршневых паровых машинах энергия, развиваемая при сгорании топлива, используется лишь, примерно, наполовину по сравнению с теоретически мыслимым пределом. Такой малый к. п. д. поршневой паровой машины отчасти обусловлен тем, что ее рабочий цикл отличается от идеального обратимого цикла вредными потерями; последние могут быть уменьшены улучшением конструкции.

В паровых турбинах достигаются к. п. д. в 20% и даже несколько выше.

2. Рабочий цикл четырехтактного двигателя внутреннего сгорания. Этот цикл состоит из следующих процессов (рис. 181):

а) при первом ходе поршня слева направо (первый такт) в цилиндр всасывается через клапан *a* горючее (пары бензина в смеси с воздухом). Приблизительно можно считать, что это всасывание происходит при постоянном давлении p_0 , приблизительно равном атмосферному; объем при этом увеличивается от V_2 до V_1 (ветвь *EA*);

б) в течение второго хода (второй такт; ветвь *AB*) поршень, двигаясь налево, адиабатически сжимает всосанную смесь, уменьшая ее объем от V_1 до V_2 , повышая ее температуру от T_0 до T_1 и повышая давление от p_0 до p_1 ;

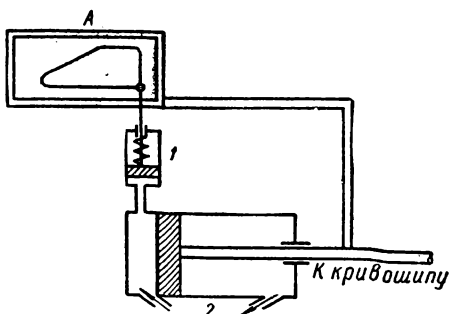


Рис. 179. Индикатор.

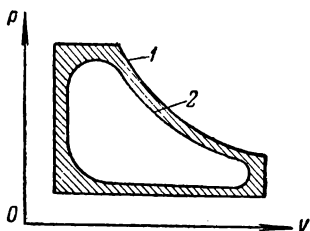


Рис. 180. Сравнение теоретического цикла паровой машины с индикаторной диаграммой.

в) при помощи электрической искры, проскакивающей у свечи M , сжатая смесь взрывается. Начинается третий такт. Сперва происходит почти мгновенное (без изменения объема, см. ветвь BC) возрастание давления до значения p_2 и температуры — до значения T_2 за счет тепла, выделяемого при взрыве. Далее, при движении поршня слева направо происходит приблизительно адиабатическое расширение газа до объема V_1 , сопровождаемое падением температуры T_2 до T_3 (ветвь CD).

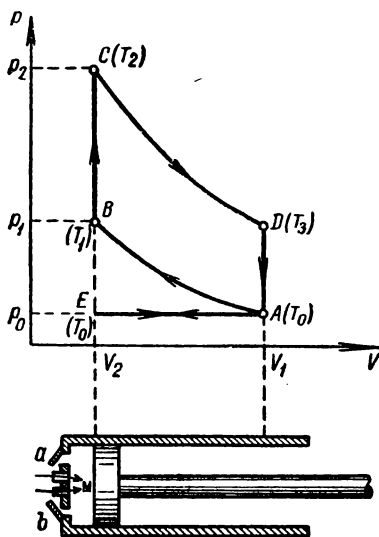


Рис. 181. Рабочий цикл двигателя внутреннего сгорания.

При крайнем правом положении поршня, соответствующем точке D , открывается выпускной клапан b , причем давление при постоянном объеме V_1 падает до значения p_0 (ветвь DA); температура падает до значения T_0 ;

г) при последнем, четвертом, такте поршень движется влево и при этом выталкивает отработавший газ через клапан b наружу (ветвь AE).

Подсчитаем полную работу, совершаемую при цикле. Работы, совершаемые при первом и последнем тактах, равны друг другу и противоположны по знаку, что непосредственно вытекает из того, что оба эти такта изображаются одной и той же прямой AE , проходящей в противоположных направлениях. Работы при изохорических (объемы не меняются) процессах BC и AD равны нулю. Таким образом, работа, совершаемая при цикле, складывается из

адиабатическом сжатии AB совершается работа

$$A_1 = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где m — масса газа, находящегося в цилиндре, μ — его молекулярный вес.

При адиабатическом расширении CD совершается работа

$$A_2 = -\frac{RT_3}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

откуда полная работа

$$A = A_1 + A_2 = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] (T_0 - T_3). \quad (1)$$

В реальных двигателях сжатие AB и расширение CD не протекают строго адиабатически. В частном случае политропического процесса в выражении (1) под γ должно подразумеваться не отношение теплоемкостей C_p/C_v , но показатель политропы, который, как было указано в § 70, меньше отношения C_p/C_v .

Выражение (1) может быть преобразовано. По формуле (5) § 70 имеем

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_0}, \quad (2)$$

кроме того,

$$\frac{R}{\gamma - 1} = C_v.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, перепишем (1):

$$A = \frac{m}{\mu} C_V \left(1 - \frac{T_2}{T_3} \right) (T_0 - T_3),$$

откуда на основании отношения

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_0} \text{ получим } A = \frac{m}{\mu} C_V \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) (T_2 - T_3). \quad (3)$$

Определим к. п. д. цикла. Количество тепла Q_1 , выделяющееся при сгорании горючего в цилиндре (ветвь BC), равно

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1). \quad (4)$$

Из (3) и (4) находим искомый к. п. д. цикла

$$\eta' = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}.$$

Следует отметить, что наибольшая температура, достигаемая за цикл, равна T_2 , а наименьшая T_0 ; цикл Карно, совершаемый между температурами T_0 и T_2 , имел бы к. п. д.

$$\eta = \frac{T_2 - T_0}{T_2}; \text{ так как } T_0 < T_3, \text{ то } \eta' < \eta,$$

т. е. к. п. д. рассматриваемого двигателя внутреннего сгорания ниже к. п. д. цикла Карно, что и следовало ожидать на основании рассуждений, приведенных в § 73.

Пользуясь соотношением (2), можно к. п. д. цикла придать вид:

$$\eta' = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}}.$$

Величина V_1/V_2 называется „сжатием“. Таким образом, к. п. д. цикла определяется всецело сжатием и показателем политропы γ .

Выражение для суммарной работы (3), совершаемой при цикле, мы получили, рассматривая работы, совершаемые на отдельных ветвях циклов. Однако тот же результат можно получить, исходя из закона сохранения энергии. Работа A равна

$$A = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 — количество тепла, полученного при взрыве горючей смеси, Q_2 — количество отданного тепла.

Количество тепла Q_1 выражается формулой (4). Количество тепла Q_2 отдается при изохорическом охлаждении, изображаемом ветвью DA , откуда

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_V (T_3 - T_0).$$

Воспользовавшись этими выражениями для Q_1 и Q_2 , найдем

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{m}{\mu} C_V [(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)],$$

что, как легко убедиться, совпадает с (3).

Четырехтактные двигатели, работающие по указанному циклу, имеют весьма широкое применение; бензиновые автомобильные двигатели работают по этому циклу. Обычно на один вал работают несколько цилиндров (четыре и более). Рабочая фаза каждого цилиндра сдвинута относительно рабочей фазы следующего цилиндра на одну и ту же долю периода, чем достигается плавность хода.

3. *Рабочий цикл четырехтактного двигателя внутреннего сгорания Дизеля.* Двигатель Дизеля работает до известной степени сходно с рассмотренным выше бензиновым двигателем внутреннего сгорания. Главное отличие заключается в том, что применяется весьма большая степень сжатия (до 30—35 ат и более). Так как сжатие это происходит приблизительно адиабатически, то достигается большое повышение температуры. Этого повышения температуры достаточно для воспламенения горючей смеси, так что

двигатель Дизеля не требует воспламенения горючей смеси с помощью искры. Горючая смесь вбрызгивается в цилиндр по окончании сжатия, причем вбрызгивается она постепенно, что обуславливает ее относительно медленное сгорание при изобарическом расширении. Эти особенности двигателя Дизеля позволяют получить более высокий к. п. д., чем у четырехтактных двигателей с воспламенением искрой. Кроме того, двигатели Дизеля работают на более тяжелом топливе (нефть).

Рабочий цикл двигателя Дизеля заключается в следующем:

а) при первом такте поршень засасывает в цилиндр атмосферный воздух. Процесс протекает изобарически при атмосферном давлении p_0 (ветвь EA , рис. 182);

б) при втором такте поршень сжимает этот воздух адиабатически (ветвь AB) до высокого давления p_1 , в результате чего

температура повышается от T_0 до значительно более высокой температуры T_1 ;

в) в начале третьего такта в цилиндр вбрызгивается горючее, которое воспламеняется в горячем воздухе и сгорает, вызывая перемещение поршня при постоянном давлении p_1 ; температура при этом, за счет сгорания, повышается от T_1 до T_2 (ветвь BC). Затем смесь продуктов горения и воздуха адиабатически расширяется (ветвь CD). В конце третьего такта (точка D) открывается выпускной клапан, в результате чего давление в цилиндре падает при постоянном объеме V_2 до атмосферного давления p_0 (ветвь DA);

г) при последнем, четвертом, такте смесь удаляется из цилиндра (ветвь AE).

Для определения полной работы A , совершаемой при цикле Дизеля, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$A = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 — тепло, выделившееся при сгорании смеси, Q_2 — тепло, отданное окружающему пространству.

Так как по условию сгорание смеси происходит изобарически, то

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1).$$

Процесс, связанный с отдачей тепла (ветвь DA), происходит изохорически, откуда

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_v (T_3 - T_0).$$

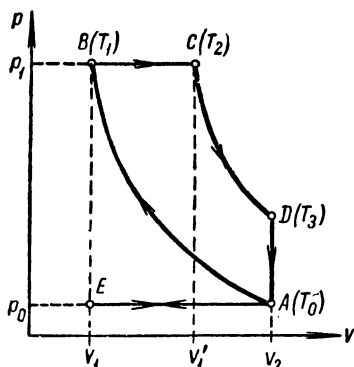


Рис. 182. Рабочий цикл двигателя Дизеля.

Воспользовавшись этими выражениями для Q_1 и Q_2 , получим

$$A = \frac{m}{\mu} C_V [\gamma (T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)].$$

Коэффициент полезного действия цикла Дизеля равен

$$\eta_D = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

Пользуясь уравнением адиабат и изобар, можно привести это выражение к следующему виду:

$$\eta_D = 1 - \frac{\left(\frac{V'_1}{V_1}\right)^\gamma - 1}{\gamma \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V'_1}{V_1} - 1\right)},$$

где V'_1 — объем, соответствующий точке C (рис. 182). Таким образом, к. п. д. цикла Дизеля определяется значением двух сжатий, V_2/V_1 и V'_1/V_1 , и показателем политропы γ .

Двигатели Дизеля имеют к. п. д., достигающий 35%.

4. *Рабочий цикл пульсирующего воздушно-реактивного двигателя.* В § 41 нами была дана схема пульсирующего воздушно-реактивного двигателя. Работе этого двигателя также можно сопоставить определенный цикл (рис. 183). Поступающий в диффузор A воздух (см. рис. 100, § 41) проходит из его более узкой головной части в расширенную, благодаря чему скорость воздуха понижается. При этом, в силу уравнения Бернулли (§ 40), давление воздуха повышается от первоначального значения p_0 до некоторого конечного значения p_1 . Таким образом, происходит сжатие воздуха, изображаемое на рис. 183 адиабатой (точнее, политропой) AB . В камере сгорания происходит нагревание рабочей смеси при постоянном давлении p_1 (прямая BC), при этом смеси передается количество тепла Q_1 ; температура смеси повышается от T_1 до T_2 , а ее объем возрастает от V_2 до V_3 . В сопле C происходит дальнейшее адиабатическое расширение, и рабочая смесь выбрасывается наружу с увеличенной скоростью, что ведет к появлению реактивной силы. Практически цикл остается незамкнутым, но на схеме его можно замкнуть, полагая, что рабочее вещество вновь сжимается до объема V_1 при постоянном давлении p_0 (прямая DA), при этом холодильнику отдается количество тепла Q_2 . Коэффициент полезного действия цикла

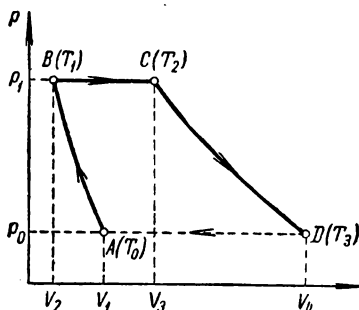


Рис. 183. Рабочий цикл воздушно-реактивного двигателя.

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Так как сгорание и охлаждение смеси происходит при постоянном давлении, то

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1), \quad Q_2 = \frac{m}{\mu} C_p (T_3 - T_0), \quad \text{откуда} \quad \eta = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

Из уравнений адиабат AB и CD имеем

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_3}{T_0} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Пользуясь этим соотношением между температурами, преобразовываем выражение к. п. д. η к следующему виду:

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_0}{T_1}.$$

Таким образом, промежуточные температуры T_2 и T_3 не играют роли, и к. п. д. определяется лишь значением температур T_0 и T_1 .

Отношение температур T_0/T_1 можно заменить отношением объемов V_1 и V_2 , воспользовавшись уравнением адиабаты AB :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \text{откуда} \quad \eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}.$$

Последнее выражение показывает, что к. п. д. воздушно-реактивного двигателя определяется лишь сжатием V_1/V_2 и показателем политропы γ . Так как в воздушно-реактивных двигателях, построенных по указанной схеме, сжатие невелико, то их к. п. д. мал.

§ 75. Обратимые и необратимые процессы. Обратимым нами был назван такой процесс, который может протекать в обоих направлениях, причем, если процесс протек сперва в одном направлении, а потом в обратном, то система должна вернуться в исходное состояние *без того, чтобы в окружающих телах произошли какие-либо изменения.*

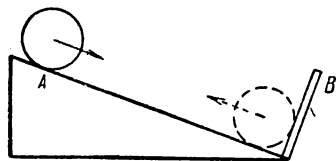


Рис. 184. Обратимое скатывание абсолютно упругого шара.

Приведем пример обратимого процесса. Пусть абсолютно упругий тяжелый шар закреплен на наклонной плоскости в точке A (рис. 184). В конце наклонной плоскости, нормально к ней, установлена неподвижная абсолютно упругая стенка B . Если мы опустим шар, то он скатится по наклонной плоскости, ударится о стенку B , упруго отразится от нее и снова вкатится по наклонной плоскости до точки A . Здесь процесс скатывания шара нацело обернулся, шар снова попал в точку A без того, чтобы в окружающих телах произошли какие-либо изменения.

Примером такого же обратимого процесса могут служить движения маятника, качающегося без трения: путь, пройденный маятником за полпериода от точки A до точки B (рис. 185), проходится им за вторые полпериода в обратном порядке, в точку A маятник возвращается без того, чтобы в окружающих телах произошли какие-либо изменения. Вообще, мы можем сказать, что все чисто

механические процессы, протекающие без трения и без участия неупругих ударов, обратимы.

На примере идеального цикла Карно мы видели, что и некоторое количество тепла $Q_1 - Q_2$ может быть обратимо превращено в работу A , хотя это превращение и является лишь звеном более сложного процесса: его сопровождает перенос количества тепла Q_2 от нагревателя к холодильнику. Используя тот же обратимый цикл Карно для осуществления холодильной машины, мы можем обратно получить за счет работы A количество тепла $Q_1 - Q_2$ и перенести обратно от холодильника к нагревателю количество тепла Q_2 . Однако мы подчеркивали, что это возможно *лишь при равновесном, т. е. при бесконечно медленном протекании цикла Карно, что практически не осуществимо*. Всякий же реальный переход работы в теплоту протекает необратимо, так как переход работы в тепло осуществим сам по себе без сопровождения его какими-либо другими процессами, переход же тепла в работу может протекать лишь при сопровождении его еще каким-либо другим процессом.

Необратимым является такой процесс, обратный которому может протекать лишь как одно из звеньев более сложного процесса.

Таким образом, для необратимых процессов существенно *направление их протекания*. В одном направлении, которое мы будем называть „положительным“, они протекают „сами собою“ т. е. они могут быть *единственным* процессом, происходящим в замкнутой системе. В другом направлении, которое мы будем называть „отрицательным“, они могут протекать лишь в сопровождении какого-либо другого „положительного“ процесса. Так, работа переходит в теплоту „сама собою“ повсюду и постоянно. Во всех процессах, при которых фигурируют силы трения или имеют место неупругие взаимодействия между телами, за счет совершенной работы возникает теплота. Переход же теплоты в работу наблюдается только как часть более сложного процесса. При совершении цикла Карно или другого сходного с ним цикла, превращение тепла в работу сопровождается „положительным“ процессом переноса тепла от горячего тела (нагревателя) к более холодному (холодильнику).

Перенос тепла от горячего тела к холодному (явление теплопроводности) является также необратимым процессом. Этот процесс, сводящийся к выравниванию температур тел, протекает также „сам собою“, т. е. он может быть *единственным* процессом, происходящим в замкнутой системе. Обратный „отрицательный“ процесс —

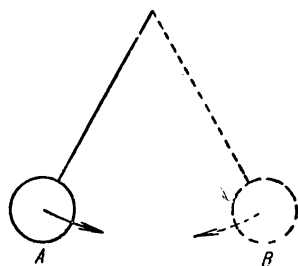


Рис. 185. Обратимое качание маятника.

перенос тепла от более холодного тела к более горячему — „сам собою“ не происходит. При действии холодильной машины перенос тепла от более холодного тела к более горячему осуществляется лишь параллельно с „положительным“ процессом, сводящимся к затрате работы A , которая превращается в количество тепла ηQ_1 , отдаваемое нагревателю.

В качестве еще одного примера процесса, протекающего необратимо, можно привести расширение газа в пустоту. Представим себе сосуд, разделенный перегородкой C на две равные части A и B

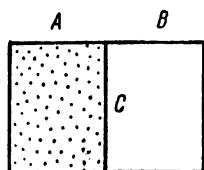


Рис. 186. Распределение газа по двум половинам сосуда.

(рис. 186). Пусть в части A находится газ, в части B — пустота. Если убрать перегородку, то газ немедленно „сам собою“ расширится, заполнит часть B и распределится равномерно по всему сосуду. Обратное сжать его в часть сосуда A можно, только совершив с помощью внешних сил некоторую работу. В результате этой работы газ нагреется, т. е. „отрицательный“ процесс сжатия газа будет сопровождаться „положительным“ процессом превращения работы в теплоту.

„Положительный“ процесс расширения газа может явиться тем процессом, который сопровождает превращение тепла в работу. Так, при изотермическом расширении газа все количество тепла Q , которое передается при этом газу извне, превращается в работу A ; здесь нет никакого переноса тепла от горячего тела к более холодному, но зато происходит необратимое („положительное“) расширение газа. Таким образом, всякий „отрицательный“ процесс обязательно компенсируется каким-либо „положительным“ процессом.

§ 76. Статистический смысл второго начала термодинамики. Теперь поставим вопрос: как необратимость реальных процессов может быть согласована с молекулярно-кинетической теорией вещества, по которой все процессы являются следствием механического, а следовательно, обратимого движения молекул?

Согласно молекулярно-кинетической теории, газ представляет собою собрание беспорядочно движущихся молекул, испытывающих упругие столкновения друг с другом и со стенками.

Движение каждой из молекул, взятой в отдельности, обратимо. Спрашивается: почему же необратимо движение совокупности молекул?

Ответ на этот вопрос дается на основании представления о вероятности отдельных явлений и статистического подсчета наиболее вероятных состояний.

Для того чтобы разобрать представление о вероятности, обратимся к самому простому примеру бросания игральной кости.

Пусть кость представляет собою правильный однородный куб, на гранях которого поставлены номера от 1 до 6. Бросание кости

представляет собою сложный процесс. Вследствие нерегулярных изменений условий бросания выпад того или иного номера есть явление *случайное*. Однако, если мы будем бросать кость достаточно большое число раз, то каждый из номеров выпадет приблизительно одинаковое число раз.

Пусть мы совершили всего N бросаний, притом пусть какой-либо определенный номер выпал m раз, тогда отношение m/N при большом числе бросаний N стремится к определенному значению (в нашем случае $1/6$). Предел этого отношения m/N при $N \rightarrow \infty$ определяет *вероятность* p выпад данного номера:

$$p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N}. \quad (1)$$

Мы можем обобщить это определение вероятности на любые события, считая, что если произведено N испытаний, причем число случаев, благоприятных появлению данного события, оказалось равным m , то вероятность этого события p также выражается равенством (1).

Вероятность объективно выражает собою некоторое свойство, фактически присущее данному явлению; она дает числовую характеристику степени возможности появления определенного события при данных условиях испытания, могущих повторяться неограниченное число раз. Необходимо иметь в виду, что вероятность при конечном, хотя бы и большом числе испытаний позволяет предсказать результат испытаний *не точно*, а лишь приближенно, причем степень приближения возрастает по мере увеличения числа событий.

Знание вероятностей позволяет определять *средние* значения различных величин при многочисленных испытаниях. Предположим, что, бросая игральную кость, мы хотим найти среднее значение выпавших номеров. Если в результате N бросаний, номер n_1 выпал m_1 раз, номер n_2 выпал m_2 раз и т. д., то среднее значение выпавших номеров равно:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i m_i}{N},$$

где k — число различных номеров на кости (в нашем случае $k=6$).

При $N \rightarrow \infty$, по определению, $m_i/N \rightarrow p_i$, где p_i — вероятность выпадения номера n_i . Таким образом, при очень большом числе бросаний среднее значение номеров стремится к значению:

$$\bar{n}_\infty = \sum_{i=1}^k p_i n_i.$$

В разбираемом случае все

$$p_i = 1/6 \text{ и } \bar{n}_\infty = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

Как видим, такого рода подсчет среднего значения носит *статистический характер*.

Как было указано в § 66, макроскопические величины, характеризующие вещество, носят характер средних значений, получающихся в результате усреднения беспорядочного действия отдельных молекул. Фактически мы не можем определить движение каждой из молекул, и в этом смысле оно случайно. Однако, благодаря большому числу молекул, средние величины не будут содержать элементов случайности, а примут при данных условиях определенные значения. Предположим, что мы наблюдаем ряд различных макроскопических состояний газа. Каждое из них возникает в результате не одного какого-то состояния движения молекул, а многих. Очевидно, что то макроскопическое состояние, которое возникает в результате большего числа возможных состояний движений отдельных молекул, осуществляется чаще, оно более вероятно. Поясним это на примере газа, распределенного между двумя половинами сосуда.

Предположим первоначально, что газ состоит всего из четырех молекул, которые все находятся в части сосуда *A* (рис. 186); часть сосуда *B* пуста. Уберем перегородку *C*. Тогда некоторые из молекул, двигаясь беспорядочно, залетят в часть сосуда *B*, что будет означать, что газ расширился. В дальнейшем все четыре молекулы станут летать по всему сосуду, однако при этом не обязательно будет осуществляться такое распределение, что в каждой из половин сосуда окажутся по две молекулы. Благодаря беспорядочности их движения, возникнут и такие распределения, когда в одной части окажутся три молекулы, а в другой — одна. Может произойти, что случайно все четыре молекулы снова залетят в часть сосуда *A*; если мы в этот момент закроем перегородку *C*, то газ снова окажется весь сосредоточенным только в этой части сосуда. Таким образом, в случае четырех молекул вполне возможно, что газ, сперва расширившись, затем сам собою сожмется. Процесс расширения газа оказался обратимым.

Однако такое состояние, когда все молекулы соберутся благодаря беспорядочности движения в одной половине сосуда, менее вероятно, чем когда в обеих частях сосуда находится по некоторому числу молекул. Обозначим рассматриваемые четыре молекулы соответственно буквами *a*, *b*, *c*, *d*. Тогда возможны следующие 16 распределений молекул по обеим половинам сосуда:

| Распределение молекул | Половины сосуда | | Число состояний | Половины сосуда | | Число состояний |
|--|--------------------------|------------------|-----------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------|
| | A | B | | A | B | |
| | 0 abcd | abcd 0 | } 2 | ab ac ad bc bd cd | cd bd bc ad ac ab | } 6 |
| a b c d bcd acd abd abc | bcd acd abd abc | a b c d | } 8 | Итого ... | | 16 |

Благодаря беспорядочности движения, каждое из этих состояний встречается одинаково часто. Как мы видим, число случаев, когда молекулы присутствуют в обеих половинах сосуда, равно 14; число же случаев, когда одна из половин сосуда пуста, равно всего 2. Распределение, при котором все молекулы снова окажутся в части сосуда A, встречается в 16 раз реже других распределений; его вероятность равна $\frac{1}{16}$. Однако при большой скорости движения молекул состояния следуют быстро друг за другом и, очевидно, придется не очень долго ждать, чтобы расширившийся газ „сам собою“ снова сжался. Однако так обстоит дело только при очень малом числе молекул.

Можно показать, что общее число распределений из n молекул по двум половинам сосуда равно $z = 2^n$. Из всего этого числа только одно распределение соответствует случаю, когда все n молекул находятся в половине сосуда A и ни одной не находится в половине B. Практически мы всегда имеем дело с очень большим числом молекул n . Если положить, что половина сосуда A имеет объем в 1 см^3 и что газ находился в ней при нормальных условиях, то $n = 3 \cdot 10^{19}$ и, следовательно, число возможных распределений $z = 2^{30\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$. Только одно из этих z состояний соответствует тому, когда газ снова сам собою соберется в часть сосуда A. Очевидно, вероятность такого события настолько ничтожна, что практически оно неосуществимо. Таким образом, мы приходим к важному следствию: необратимость расширения газа в пустоту носит статистический характер, т. е. „отрицательный“ процесс самопроизвольного сжатия газа весьма мало вероятен.

Этот результат может быть обобщен: *необратимый процесс есть такой, обратный которому мало вероятен*. Случай, при котором процесс, обратный „положительному“, стал бы протекать в качестве единственного процесса в замкнутой системе, не является принципиально невозможным. Практически он не наблюдается благодаря его исключительно малой вероятности. *Все процессы в замкнутой*

системе протекают в сторону увеличения вероятности состояния системы.

Все сказанное относится и к случаю передачи телу определенного количества тепла за счет совершенной работы. Такой процесс означает переход макроскопического движения тела, происходящего под влиянием внешних сил, в беспорядочное движение молекул. Следовательно, этот процесс сводится к переходу *упорядоченного движения в беспорядочное* — такой переход вероятен.

Получение работы за счет взятого количества тепла означает *переход беспорядочного движения молекул в упорядоченное движение макроскопического тела* — такой переход мало вероятен.

Таким образом, второе начало термодинамики, указывающее на необратимость перехода работы в тепло, связано с тем, что переход тепла в работу означает переход от более вероятного состояния к состояниям менее вероятным. Молекулярно-кинетическая теория вещества не только не противоречит понятию о необратимости и второму началу термодинамики, но она придает им более глубокое значение и указывает границы их применимости.

Закономерность, выражаемая вторым началом термодинамики, носит, как мы видим, статистический характер. Статистическая закономерность, как ясно из сказанного выше, отличается от механической (динамической) закономерности классической механики, где для каждого единичного процесса по значению одних физических величин можно однозначно и сколь угодно точно определить другие. Тем не менее статистическая закономерность указывает поведение всей системы в целом и в этом смысле отражает ее объективные свойства. Каждое отдельное явление случайно, но весьма большое скопление случайных явлений приводит к необходимости. Статистическая закономерность служит наглядным примером диалектического единства случайности и необходимости.

Статистическая закономерность приближенна в том смысле, что полученные на ее основе выводы тем лучше совпадают с результатами наблюдений, чем по большему числу отдельных событий произведено усреднение. В малых масштабах от статистической закономерности возможны отступления.

Отсюда следует, что понятие необратимости процессов имеет смысл, только пока мы имеем дело с телами макроскопическими, т. е. состоящими из большого числа молекул. К совокупности небольшого числа молекул понятие о необратимости процессов неприменимо. На примере „газа“, состоящего из четырех молекул, мы видели возможность самопроизвольного сжатия такого „газа“. При небольшом числе частиц становятся практически возможными некоторые отступления от наиболее вероятного состояния. С макроскопической точки зрения, например, наиболее вероятно состояние газа, соответствующее одинаковой плотности во всех местах. Однако, если мы выделим в газе два соседних объема, настолько малых,

чтобы в них заключалось по небольшому числу молекул, то в них будут встречаться отступления от равномерного распределения молекул. Произведенный подсчет распределения четырех молекул по двум равным объемам показывает, что в этом случае чаще встречаются состояния, когда в одном объеме — три молекулы, а в другом — одна, чем когда в обоих объемах — по две молекулы.

Такого рода отступления от средних значений, существующие в малых масштабах, носят, как указывалось, название *флуктуаций*. Всякая физическая величина, возникающая как среднее из действий многих молекул, *подвергнута флуктуациям*. Флуктуации сказываются во многих явлениях. Например, флуктуации плотности газа обуславливают, как мы увидим в отделе, посвященном оптике (т. III), голубой цвет неба.

Неравномерность ударов молекул, проявляющаяся в малых масштабах, вызывает флуктуации давления. Эти флуктуации давления обуславливают движение броуновских частиц (ср. § 43). Броуновские частицы являются столь малыми объектами, что они уже не подчиняются второму началу термодинамики. Отдельная броуновская частица может, например, под влиянием удара молекул, совершающих тепловое движение, подняться в жидкости против силы тяжести из более низкого в более высокий слой. Механическая работа поднятия частицы совершится за счет энергии теплового движения молекул без сопровождения каким-либо другим процессом. Поднявшаяся броуновская частица может затем, случайно, снова опуститься и перевести свою потенциальную энергию в энергию теплового движения окружающих молекул.

В этих микроскопических масштабах процесс перевода тепла в работу окажется обратимым, второе начало — нарушенным, однако использовать это нарушение второго начала в макроскопических размерах невозможно. Всякий механизм, с помощью которого мы пытались бы собрать энергию броуновских частиц, сам был бы подвержен флуктуациям и не позволил бы осуществить такое накопление энергии.

Существенно отметить, что наличие флуктуаций устанавливает границу точности наших измерений. Всякий измеряющий прибор, например электрический гальванометр, обладает подвижной системой (стрелкой), перемещение которой служит для измерения данной физической величины. Эта подвижная система сама подвержена флуктуациям — слабым беспорядочным колебаниям. Средняя энергия этих колебаний, как можно показать, равна $\frac{1}{2} kT$, где k — постоянная Больцмана, а T — температура окружающей среды. Следовательно, измеряемая системой энергия (например, энергия электрического тока) должна быть больше $\frac{1}{2} kT$. Более точный расчет показывает, что погрешность ΔE измерения энергии E есть величина порядка πkT . Для комнатной температуры ($T = 290^\circ \text{K}$) получим: $\pi kT = 1,26 \cdot 10^{-20}$ дж. Таким образом, при каждой данной температуре T существует естественный предел чувствительности измеряющего прибора, не зависящий от совершенства его конструкции.

В большинстве измерительных приборов этот предел далеко не достигается, но для некоторых очень точных современных измерительных приборов (электроизмерительных приборов, приборов, измеряющих поток световой энергии, и т. д.) он достигнут. При данной температуре окружающей среды T дальнейшее повышение точности этих приборов невозможно.

Флуктуационные колебания легкой подвижной системы можно использовать для опытного определения числа Авогадро N . Такого рода определения дают правильное по порядку значение N . Для наблюдения флуктуационных

колебаний применяется система, состоящая из весьма тонкой кварцевой нити с подвешенным к ней очень маленьким и легким зеркальцем. Под влиянием ударов молекул окружающего воздуха система совершает беспорядочные крутильные колебания. Эти колебания непосредственно наблюдаются с помощью отраженного от зеркальца луча, который образует на достаточно далеко расположенной шкале световой зайчик.

Средняя кинетическая энергия \bar{E}_k колебаний зеркальца, по сказанному, равна $\frac{1}{2} kT$. С другой стороны, \bar{E}_k равна средней потенциальной энергии колебаний \bar{E}_p .

Воспользовавшись для \bar{E}_p формулой (17) § 89, получим

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} D \bar{\varphi}^2 = \frac{1}{2} kT,$$

где D — модуль кручения нити и $\bar{\varphi}^2$ — среднее значение квадрата угла отклонения.

Эта формула может быть переписана в виде:

$$\bar{\varphi}^2 = \frac{kT}{D}. \quad (2)$$

Так как непосредственные измерения модуля кручения D представляют трудности, то можно воспользоваться выражением для собственной частоты крутильных колебаний (см. § 89, где дано выражение для периода $T = \frac{1}{\nu_0}$):

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{I}},$$

где I — момент инерции системы.

Тогда соотношение (2) принимает вид:

$$\bar{\varphi}^2 = \frac{kT}{(2\pi\nu_0)^2 I},$$

здесь все величины, кроме постоянной Больцмана k , доступны непосредственному измерению.

Выполнив эти измерения, можно найти k , а следовательно, и число Авогадро $N = \frac{R}{k}$.

Другая область ограничения применимости второго начала термодинамики относится к космическим масштабам. На этом необходимо остановиться в связи с выдвижением со стороны некоторых физиков и философов второй половины прошлого столетия гипотезы о так называемой „тепловой смерти вселенной“. Рассматривая вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, они пришли к выводу, что со временем все разности температур между отдельными небесными телами выравниваются, и вселенная должна будет погрузиться в состояние совершенно равномерного распределения температур („тепловой смерти“).

Гипотеза о „тепловой смерти“ ведет и к другому выводу — о „первом толчке“, создавшем в мире когда-то неравномерность температур, т. е. в конечном счете к прямой поповщине — к признанию сотворения мира.

Реакционная сущность теории „тепловой смерти“ была вскрыта Энгельсом, указавшим на ее научную несостоятельность.

Необоснованность вывода о тепловой смерти лежит в незаконном экстраполировании второго начала на систему, представляющую собою весь мир. Второе начало связано с представлением о необратимости процессов, наблюдаемых в масштабах, пространственных и временных, весьма малых по сравнению с масштабами, в которых происходит процесс эволюции не только всей вселенной, но хотя бы большой совокупности звезд. В эволюции даже отдельной звезды, несомненно, играют исключительно важную роль такие процессы, которые на земном шаре заметной роли не играют, как, например, превращение элементов. Законы этих процессов нам пока мало известны.

Таким образом, в распространении второго начала на всю вселенную и на бесконечно большие промежутки времени лежит ошибка, сводящаяся к приписыванию физическим законам абсолютного значения и к забвению того, что они являются лишь более или менее хорошими приближениями к действительности (ср. § 2).

§ 77. Неравенство Клаузиуса. Энтропия. В предыдущих параграфах мы выяснили, что „отрицательные“ процессы могут идти лишь в сопровождении одного из „положительных“ процессов.

Рассмотрение обратимого цикла Карно указывает, какое количество тепла Q_2 должно быть перенесено от нагревателя температуры T_1 к холодильнику температуры T_2 , чтобы количество тепла $Q_1 - Q_2$ могло быть превращено в работу A . Мы воспользуемся сейчас этим количественным соотношением в том виде, как оно представлено формулой (12) § 73:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1)$$

Мы условились (§ 73) количество тепла, переданного рабочему веществу нагревателем, обозначать через Q_1 , а переданного рабочему веществу холодильником — через — Q_2 . Изменим теперь обозначение и будем буквой Q (без знака) обозначать количество тепла, переданного рабочему веществу как нагревателем, так и холодильником. Тогда, если Q_2 означает количество тепла, переданного рабочему веществу холодильником, то имеет место неравенство $Q_2 < 0$; при таком обозначении соотношение (1) надо переписать в виде:

$$\frac{Q_1}{-Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad (1a)$$

откуда получим

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (2)$$

Отношение Q/T называется *приведенным количеством тепла*. Содержание уравнения (2) может быть сформулировано: *при обратимом цикле Карно сумма приведенных количеств тепла равна нулю*.

Для любого цикла Карно, как мы выяснили в § 73, к. п. д. удовлетворяет неравенству:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

(для обратимого цикла имеет место только знак равенства). Потому для любого цикла Карно получим:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (2a)$$

т. е. для любого цикла Карно сумма приведенных количеств тепла не может быть больше нуля. Это неравенство носит название *неравенства Клаузиуса*.

Неравенство Клаузиуса может быть обобщено на любой круговой процесс.

Как мы уже видели (см. § 73), любой круговой процесс может быть разбит на весьма большое число элементарных циклов Карно. Каждый из этих элементарных циклов Карно протекает между нагревателем соответствующей температуры T_i , от которого он получает количество тепла ΔQ_i , и холодильником соответствующей температуры T_k , которому он отдает количество тепла ΔQ_k .

Для этого элементарного цикла напомним неравенство Клаузиуса:

$$\frac{\Delta Q_i}{T_i} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} \leq 0. \quad (3)$$

Знак равенства выполняется при обратимом протекании элементарного процесса.

Суммируя выражения (3), написанные для каждого из элементарных циклов, получим для всего цикла:

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0, \quad (4)$$

т. е. для всякого кругового процесса сумма приведенных количеств тепла не может быть больше нуля; для обратимого процесса она равна нулю.

В случае обратимого протекания процесса можно показать, что сумма (4) преобразуется в контурный интеграл:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (4a)$$

Величина dQ в интеграле выражается через независимые переменные и их дифференциалы. В качестве независимых переменных выбирают параметры, определяющие состояние (p , V или T).

Кружок у знака интеграла показывает, что интеграл распространяется на весь обратимый круговой процесс.

Для необратимого процесса сумма (4) не может быть заменена контурным интегралом, так как переменные интегрирования p и T на необратимых участках процесса не имеют определенных значений.

Покажем, что в случае обратимого процесса сумма приведенных теплот, сообщаемых телу, не зависит от пути, по которому шел процесс.

Пусть некоторое тело из состояния A (рис. 187) переходит обратимым путем в состояние B по пути, изображаемому кривой AC_1B . Дополним путь AC_1B до кругового процесса, наметив обратный путь BC_2A . Обозначим сумму приведенных теплот на пути AC_1B через X , а сумму приведенных теплот на пути BC_2A — через Y , тогда по условию (4):

$$X + Y = 0. \quad (5)$$

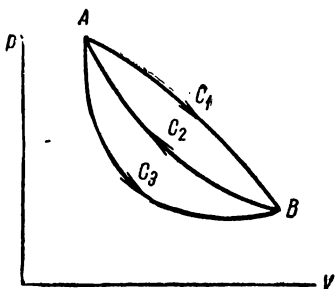


Рис. 187. Различные пути перехода между данными состояниями A и B .

Наметим еще один путь из состояния A в состояние B , изображаемый кривой AC_3B ; сумму приведенных теплот на нем обозначим X_1 ; тогда для кругового процесса AC_3BC_2A имеем

$$X_1 + Y = 0.$$

Сравнивая это равенство с равенством (5), получим

$$X = X_1,$$

т. е. суммы приведенных теплот для путей AC_1B и AC_3B равны друг другу. То же может быть доказано по отношению к любым другим путям, ведущим из состояния A в состояние B .

Отсюда интеграл

$$\int_A^B \frac{dQ}{T},$$

выражающий сумму приведенных теплот для обратимого изменения состояния от A до B , не зависит от пути следования процесса, определяясь исключительно начальным и конечным состояниями тела. Из этого обстоятельства следует, что существует некоторая величина S , характеризующая состояние тела и имеющая в состоянии A значение S_A , а в состоянии B — значение S_B , причем разность $S_B - S_A$ равняется:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \quad (6)$$

т. е. равняется сумме приведенных теплот для любого обратимого процесса, протекающего между состояниями A и B .

Разность $S_B - S_A$ определяет разность некоторой физической величины S , являющейся функцией состояния; эта физическая величина называется *энтропией*.

Приведенный метод рассуждений не позволяет определить абсолютное значение энтропии; можно только установить разность энтропий $S_B - S_A$ двух состояний B и A .

Пусть некоторая замкнутая система, исходя из состояния A , совершает обратимый *круговой процесс* ABA (рис. 188); тогда изменение энтропии при переходе от состояния A в состояние B равно

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Обозначим значение энтропии в состоянии A после возвращения в него по окончании всего цикла через S'_A , тогда

$$S'_A - S_B = \int_B^A \frac{dQ}{T}.$$

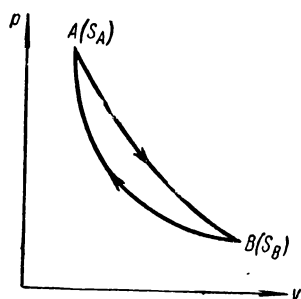


Рис. 188. При совершении кругового обратимого процесса энтропия не меняется.

Но по условию (4а) для обратимого процесса

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = 0, \text{ откуда } S_B - S_A = -(S'_A - S_B), \text{ или } S'_A - S_A = 0,$$

т. е. при совершении кругового обратимого процесса энтропия системы не меняется.

Рассмотрим переход из некоторого состояния A в состояние B по необратимому пути, условно изображаемому кривой AC_1B (рис. 189); затем вернем систему из состояния B в состояние A , выбрав для этого обратимый путь BC_2A ; тогда круговой процесс AC_1BC_2A в целом будет необратим, так как необратима одна из его частей, отсюда

$$\sum_{AC_1B \text{ необр}} \frac{\Delta Q}{T} + \int_{BC_2A \text{ обр}} \frac{dQ}{T} \leq 0.$$

Но по определению интеграл

$$\int_{BC_2A} \frac{dQ}{T} = S_A - S_B,$$

так что

$$\sum_{AC_1B \text{ необр}} \frac{\Delta Q}{T} + (S_A - S_B) \leq 0,$$

откуда

$$S_B - S_A \geq \sum_{AC_1B \text{ необр}} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (7)$$

В случае изолированной системы, система в целом не получает и не отдает тепла, откуда для нее все $\Delta Q = 0$ и сумма, стоящая в правой части неравенства (7), превращается в нуль. Отсюда: в изолированной системе могут протекать только такие процессы, при которых энтропия системы не уменьшается.

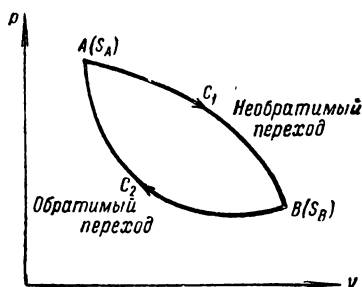


Рис. 189. Обратимый и необратимый переходы между состояниями A и B .

Если в изолированной системе протек процесс, при котором энтропия осталась неизменной, то этот процесс может протечь и в обратном направлении, т. е. он обратим. Если же при процессе энтропия возросла, то обратный процесс невозможен, т. е. рассматриваемый процесс необратим. Таким образом, при протекании в изолированной системе необратимого процесса энтропия системы возрастает.

Мы видели, что для необратимых процессов два возможных направления их протекания неравноценны: в одном направлении (названном нами „положительным“) процесс может протекать „сам собою“, в другом („отрицательным“) он „сам собою“ не протекает. Однако до сих пор мы не имели критерия для решения вопроса, в каком именно направлении данный необратимый процесс будет протекать. Введение понятия об энтропии решает этот вопрос: в замкнутой системе процессы протекают в сторону возрастания энтропии: в частном

случае, когда все процессы, протекающие в системе, обратимы, энтропия остается неизменной.

В § 75 было указано, что необратимый характер процессов связан с переходом от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным. Отсюда ясно, что и энтропия, определяющая направление протекания необратимых процессов, должна быть связана с вероятностью. Больцман показал, что энтропия S пропорциональна логарифму вероятности состояния:

$$S = k \ln W,$$

где W — вероятность данного состояния; коэффициентом пропорциональности служит постоянная Больцмана k .

Поскольку $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ дает нам лишь изменение энтропии, сама энтропия данного состояния определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной:

$$S = \int_0^A \frac{dQ}{T} + S_0, \quad (8)$$

где $\int \frac{dQ}{S}$ берется по пути обратимого перехода из некоторого состояния, выбранного за нулевое, в данное состояние A .

Дифференцируя (8), получим выражение для полного дифференциала энтропии

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (9)$$

Пример 1. Найти изменение энтропии при охлаждении 100 г воды от $t_1 = 10^\circ \text{C}$ до $t_2 = 0^\circ \text{C}$.

По формуле (6) изменение энтропии равно

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Считая для воды изменение объема при нагревании ничтожно малым, имеем

$$dQ = mc dT,$$

где m — масса воды, а c — ее удельная теплоемкость. Для воды теплоемкость c может считаться постоянной, откуда

$$S_2 - S_1 = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (10)$$

Подставляя в выражение (10) $m = 100$ г, $c = 1$ кал/г град, $T_2 = 273^\circ \text{K}$ и $T_1 = 288^\circ \text{K}$, получим

$$S_2 - S_1 = 100 \cdot 1 \cdot \ln \frac{273}{288} \text{ кал/град} = -5,1 \text{ кал/град}.$$

Пример 2. Найти изменение энтропии 280 г азота при изотермическом увеличении объема в 5 раз.

По первому началу термодинамики

$$dQ = dU + dA. \quad (11)$$

Изменение запаса внутренней энергии dU равно

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT,$$

где μ — молекулярный вес и C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Работа dA равна

$$dA = p dV.$$

Это выражение работы преобразуем, считая азот идеальным газом:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

откуда

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Воспользовавшись этим значением p , найдем для работы dA :

$$dA = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

Подставив найденные выражения для dU и dA в (11), получим для идеального газа:

$$dQ = \frac{m}{\mu} \left(C_V dT + RT \frac{dV}{V} \right).$$

Воспользовавшись этим выражением dQ , получим следующую формулу для изменения энтропии:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{\mu} \left(\int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \right).$$

Полагая, что теплоемкость C_V не зависит от температуры, выполняем интегрирование:

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (12)$$

По условиям данного примера расширение происходит изотермически, следовательно, $T_2 = T_1$, и по (12):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \cong \frac{290}{28} \cdot 2 \cdot \ln 5 \text{ кал/град} = 32,2 \text{ кал/град}.$$

Приведенные рассуждения позволяли определить лишь изменение энтропии [формула (6), стр. 303]. Значение самой энтропии могло быть определено лишь с точностью до аддитивной постоянной [формула (8), стр. 305]. Для определения абсолютных значений энтропии надо знать ее абсолютное значение хотя бы для какой-нибудь одной температуры. Такое одно значение энтропии определяет теорема, высказанная Нернстом и иногда называемая третьим началом термодинамики. По теореме Нернста *энтропия всякого вещества при температуре абсолютного нуля равна нулю*.

Будем нагревать один моль какого-либо вещества, начиная с температуры абсолютного нуля, при постоянном давлении. Для повышения температуры этого вещества на dT ему необходимо сообщить количество тепла:

$$dQ = C_p dT,$$

при этом энтропия вещества возрастает на

$$dS = \frac{C_p dT}{T}.$$

Интеграл, взятый при постоянном давлении в пределах от нуля до T , даст абсолютное значение энтропии моля данного вещества при температуре T :

$$S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T}.$$

Так как при низких температурах теплоемкость не является величиной постоянной, но зависит от температуры (§ 93), то указанный интеграл может быть взят, при условии, что известен ход теплоемкости C_p , с температурой вплоть до значения $T=0$.

ГЛАВА IX

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ

§ 78. Строение жидкости. Молекулярное давление. Жидкое состояние является промежуточным между газообразным и твердым и имеет сходство как с тем, так и с другим. Как мы видели в § 62, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только газообразное состояние вещества, но передает и некоторые свойства жидкого состояния. При этом уравнение Ван-дер-Ваальса указывает на возможность непрерывного перехода из жидкого в газообразное состояние через критическую точку. Вблизи критической точки различия между газом и жидкостью незначительны, и жидкость до некоторой степени может рассматриваться как плотный газ. Но то же уравнение Ван-дер-Ваальса показывает, что при температурах, значительно более низких, чем критическая, разница между жидким и газообразным состоянием делается весьма заметной. Плотность насыщающих паров для многих жидкостей, при комнатных температурах, в тысячу или даже в несколько тысяч раз меньше плотности жидкости. Среди изотерм Ван-дер-Ваальса, как мы видели в § 62, имеются изотермы, частично лежащие в области отрицательных давлений: они указывают на возможность существования жидкости в растянутом состоянии. Опыты показывают, что такое растянутое состояние жидкости действительно возможно и соответствует наличию у жидкостей некоторой прочности на разрыв. В этом отношении жидкость становится сходной с твердым телом. В дальнейшем мы увидим, что сходства между жидкостью и твердым телом имеются и в ряде других областей, особенно при условиях, близких к затвердеванию (кристаллизации) жидкости.

С молекулярно-кинетической точки зрения газообразное состояние вещества характеризуется большими средними расстояниями между молекулами, тепловое движение газовых молекул сводится к свободному движению на длине свободного пути, в несколько раз превышающего размеры самих молекул. В газах с заметной скоростью происходит диффузия. В жидкостях же молекулы располагаются значительно ближе друг к другу, чем в газах. Они проявляют большие силы взаимодействия. Диффузия в жидкостях происходит гораздо медленнее, чем в газах. Но вместе с тем строение жидкостей существенно отличается от строения твердых тел, где диффузия практически

отсутствует. В твердом теле каждая частица (атом, ион) колеблется около своего положения равновесия, причем в идеальной решетке твердого кристалла (§ 87) все возможные „места“ для частиц заняты. Жидкость обладает более „рыхлой“ структурой, чем твердое тело, в ней имеются свободные места — „дырки“, благодаря чему молекулы могут перемещаться, покидая свое место и занимая одну из соседних свободных „дырок“. По теории Я. И. Френкеля, тепловое движение в жидкостях носит следующий характер: каждая молекула в течение некоторого промежутка времени колеблется около определенного места равновесия. Молекула меняет место равновесия, перемещаясь на отрезок порядка размеров самих молекул. Таким образом, молекулы медленно перемещаются внутри жидкости, пребывая часть времени около определенных мест, находясь, по образному выражению Я. И. Френкеля, в „оседлом“ состоянии. Существуют некоторые особенности в строении жидкостей, напоминающие строение кристаллических твердых тел (см. § 95).

В газе средняя кинетическая энергия теплового движения молекул достаточна, чтобы преодолеть силы притяжения между молекулами; это ведет к тому, что газовые молекулы разлетаются во все стороны, и газ распространяется на весь предоставленный ему объем.

В жидкостях, наоборот, средней кинетической энергии теплового движения не хватает, чтобы преодолеть силы сцепления. Благодаря этому жидкость представляет собою тело определенного объема. Из жидкости вырываются лишь наиболее быстрые молекулы, что ведет к процессу испарения жидкости.

В § 61 мы видели, что взаимная потенциальная энергия двух газовых молекул имеет при некотором расстоянии r_0 между молекулами минимум (рис. 154). Однако глубина образующейся потенциальной ямы невелика и меньше средней кинетической энергии $\frac{1}{2} kT$, приходящейся на одну степень свободы. Поэтому газовые молекулы не удерживаются друг около друга, но, сблизившись, снова разлетаются. Для молекул жидкости средняя кинетическая энергия теплового движения, как мы видели, недостаточна, чтобы преодолеть силы взаимного притяжения молекул друг к другу. В результате молекулы располагаются достаточно близко друг к другу, и каждая молекула окружена другими.

Для простоты рассмотрим несколько молекул, расположенных вдоль одной прямой. Каждая молекула на такой прямой будет иметь двух соседей — одну справа, другую слева. Поэтому потенциальная энергия такой молекулы представится суммой двух кривых, подобных кривой, изображенной на рис. 154. Эти кривые представлены на рис. 190а пунктирными линиями. Суммарная кривая (сплошная линия) дает достаточно глубокую потенциальную яму. Для совокупности молекул образуется волнообразная потенциальная кривая (рис. 190б). Глубина отдельных потенциальных ям ΔE_p больше средней кинетической энергии, приходящейся на одну степень свободы молекулы

жидкости $1/2 kT$. Поэтому каждая молекула пребывает в потенциальной яме около своего положения равновесия. Однако для жидкости средняя энергия $1/2 kT$ не на много меньше глубины ямы ΔE_p , в результате чего кинетическая энергия отдельной молекулы, благодаря наличию флуктуаций, от времени до времени оказывается достаточной, чтобы молекула выскочила из потенциальной ямы и заняла новое место между другой парой молекул.

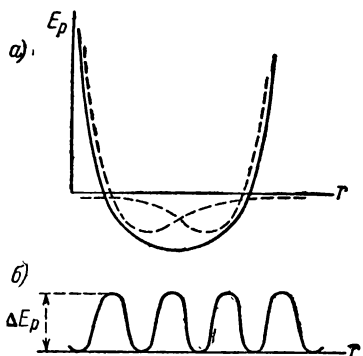


Рис. 190. Кривые потенциальной энергии молекулы в жидкости.

Указанный характер движения молекул в жидкостях объясняет как медленность диффузии в жидкостях, так и большую, по сравнению с газами, вязкость жидкостей. В газах внутреннее трение (вязкость) объясняется переносом количества направленного движения молекул из слоя в слой за счет теплового движения молекул (§ 56). В жидкостях, наряду с таким механизмом внутреннего трения, имеет место и другой, связанный с передачей ко-

личества движения за счет удара молекул друг с другом, аналогично передаче количества движения вдоль ряда соприкасающихся между собой упругих шаров. Число соударений молекул обратно пропорционально свободному объему между молекулами, следовательно, и вязкость жидкостей обратно пропорциональна этому свободному объему. Для одного моля жидкости свободный объем равен $V_0 - b$, где V_0 — молярный объем жидкости, а b — объем, занимаемый молекулами при их плотной упаковке (величина, аналогичная поправке b в уравнении Ван-дер-Ваальса). На основании этого вязкость жидкости η может быть положена равной

$$\eta = \frac{C}{V_0 - b},$$

где C — константа. Эта формула, впервые предложенная А. И. Бачинским, хорошо приложима для многих вязких жидкостей.

Я. И. Френкель, исходя из изложенного выше характера теплового движения молекул в жидкостях, показал, что температурная зависимость вязкости жидкости должна выражаться формулой:

$$\eta = A \cdot e^{\frac{\Delta E_p}{kT}},$$

где ΔE_p — глубина потенциальной ямы, в которой находится каждая молекула. Эта формула также достаточно хорошо оправдывается в ряде случаев.

Иным способом свойства жидкости можно представить, рассматривая потенциальную энергию молекулы, находящейся внутри жидкости, по отношению к потенциальной энергии молекулы вне жидкости. Потенциальная энергия молекулы внутри жидкости *меньше* потенциальной энергии молекулы вне жидкости. Поверхностный слой жидкости находится в иных условиях, чем весь объем жидкости. Для перевода молекулы из жидкости наружу необходимо преодолеть определенный потенциальный барьер, т. е. совершить определенную работу. Средняя энергия теплового движения молекул недостаточная, чтобы совершить эту работу, в результате чего жидкость сохраняет свой объем.

Как мы видели при разборе свойств реальных газов, молекулы, расположенные у границы газа, благодаря наличию сил притяжения находятся в иных условиях, чем молекулы внутри газа. Совершенно аналогичное явление имеет место в жидкостях.

Если мы мысленно выделим в жидкости какую-либо молекулу, то должны учесть действие на нее всех других молекул. Однако силы взаимодействия между молекулами быстро убывают с расстоянием, так что практически достаточно учесть действие лишь молекул, расположенных достаточно близко.

Пусть r — такое расстояние, что силы взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии, большем, чем r , настолько малы, что ими можно пренебречь. Проведем вокруг данной молекулы A (рис. 191), как центра, сферу радиуса r . Тогда нам достаточно учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы радиуса r .

Расстояние r принято называть *радиусом молекулярного действия*, а сферу радиуса r — *сферой молекулярного действия*.

В жидкости в сферу молекулярного действия, проведенную вокруг данной молекулы A , попадает большое число других молекул. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу A , направлены в различные стороны и в среднем компенсируются. Таким образом, результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, в среднем равна нулю. Иначе обстоит дело с молекулами, находящимися у поверхности жидкости. Рассмотрим молекулу B , расположенную от поверхности жидкости на расстоянии, меньшем радиуса молекулярного действия r . Тогда сфера молекулярного действия, как видно из рис. 191, лишь частично окажется внутри жидкости, часть же ее будет лежать вне жидкости. Пусть над поверхностью жидкости находится вещество в газообразном состоянии, например, пар данной жидкости. Концентрация молекул в паре мала, поэтому их действием можно вообще пренебречь. Мы можем, следовательно, принимать во внимание дей-

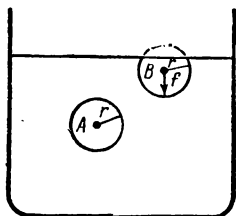


Рис. 191. Радиус молекулярного действия.

ствие на молекулу B лишь молекул, лежащих в той части сферы действия, которая расположена внутри жидкости. При этом окажется, что на молекулу B действует с разных сторон неодинаковое число молекул. Силы, с которыми они действуют на молекулу B , в среднем не будут компенсированы, возникнет результирующая сила f , направленная *внутрь жидкости*. Таким образом, на каждую молекулу, лежащую от поверхности жидкости на расстоянии, меньшем радиуса молекулярного действия r , со стороны других молекул действует сила, направленная *внутрь жидкости*. На весь слой, лежащий у поверхности жидкости, действуют силы, направленные *нормально к поверхности* внутрь жидкости. Поверхностный слой оказывает на всю жидкость давление, называемое *молекулярным давлением*. Под влиянием этого давления молекулы жидкости оказываются сближенными, что ведет к появлению между ними сил отталкивания, уравнивающих силы сжатия, вызванные поверхностным слоем.

Из приведенного рассуждения видно, что это давление тождественно по своей природе с внутренним давлением p' газов, учитываемым поправкой a/V_0^2 уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT.$$

Количественное уравнение Ван-дер-Ваальса находится не в очень точном соответствии с действительными свойствами жидкого состояния вещества, но все же им можно воспользоваться для ориентировочных подсчетов. Так, например, для воды поправка Ван-дер-Ваальса $a = 5,47 \text{ ат л}^3/\text{моль}^2$; для жидкой воды при 0°C объем одного моля $V_0 = 18 \text{ см}^3/\text{моль} = 0,018 \text{ л/моль}$, откуда

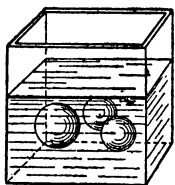


Рис. 192. Оливковое масло в смеси воды со спиртом.

$$p' = \frac{a}{V_0^2} = \frac{5,47}{0,018^2} \text{ ат} \cong 17\,000 \text{ ат}.$$

Так же и для других жидкостей внутренние давления представляют собою величины порядка десяти тысяч атмосфер.

Силы молекулярного притяжения, существующие в поверхностном слое жидкости, направлены внутрь массы жидкости. Если на жидкость не действуют никакие другие силы, то равновесным окажется такое положение поверхности, при котором эти силы нормальны к поверхности. Масса жидкости, на которую не действуют внешние силы, должна под влиянием сил молекулярного давления принять сферическую форму. Малые капли жидкости, для которых роль силы тяжести относительно мала, действительно принимают вид правильных сфер. Для больших масс жидкости можно обнаружить их стремление принять сферическую форму, компенсируя силу тяжести на основании закона

Архимеда. Например, можно ввести оливковое масло в смесь воды со спиртом, подобранную так, что ее плотность равна плотности масла. Тогда сила тяжести, действующая на масло, компенсирована гидростатическим давлением, и масло под влиянием собственного молекулярного давления принимает правильную сферическую форму (рис. 192).

§ 79. Поверхностное натяжение. Явления, обусловленные наличием молекулярного давления со стороны поверхностного слоя жидкости на остальные слои, могут быть разобраны и с иной точки зрения, чем изложенная в § 78.

Из всех геометрических тел сфера имеет при данном объеме наименьшую поверхность. Поэтому переход данной массы жидкости от какой-либо несферической формы к сферической связан с уменьшением ее поверхности. Следовательно, действие сил молекулярного давления, под влиянием которых жидкость принимает сферическую форму, аналогично действию, которое возникло бы, если поверхность жидкости представляла бы собою растянутую пленку, стремящуюся сжаться. Все явления, которые вызваны существованием молекулярного давления, объясняются путем рассмотрения действия такой растянутой пленки.

Для того чтобы растянутую пленку удержать в равновесии, нормально к линии ее границы (рис. 193), надо приложить силу f , касательную к поверхности жидкости, называемую силой поверхностного натяжения.

Эта сила, очевидно, тем больше, чем больше длина границы пленки l :

$$f = \alpha l. \quad (1)$$

Коэффициент α , зависящий от природы жидкости, называется *коэффициентом поверхностного натяжения*.

Из (1) можем получить:

$$\alpha = \frac{f}{l}. \quad (1a)$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения α численно равен силе, приложенной к единице длины края поверхностной пленки жидкости. Измеряется α в CGS-системе в *дин/см*.

Для данной жидкости коэффициент поверхностного натяжения α зависит от температуры: с повышением температуры он убывает.

При приближении температуры жидкости к критической температуре T_k (см. § 62) коэффициент поверхностного натяжения α стремится к нулю.

Это обстоятельство становится понятным, если вспомнить, что в критической точке разница между жидким и газообразным состояниями пропадает.

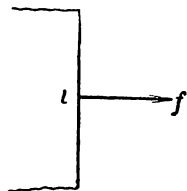


Рис. 193. Сила поверхностного натяжения.

В табл. XI приведены значения коэффициента поверхностного натяжения α для некоторых жидкостей в CGS-системе.

Определим работу, которую надо затратить, чтобы увеличить площадь поверхностной пленки жидкости на некоторую величину ΔS .

Таблица XI

Значения коэффициента
поверхностного натяжения α

| Жидкость | α в дин/см при 20°C |
|------------------|---|
| Вода | 73 |
| Ртуть | 540 |
| Глицерин | 65 |
| Эфир | 17 |

Для этого с помощью силы f переместим границу пленки (рис. 194) на отрезок ΔS параллельно самой себе. Тогда совершенная работа ΔA равна

$$\Delta A = f \Delta s,$$

но по (1) $f = \alpha l$, откуда

$$\Delta A = \alpha l \Delta s.$$

Произведение $l \Delta s$ представляет собою увеличение площади пленки ΔS , так что

$$\Delta A = \alpha \cdot \Delta S.$$

Эта работа идет на увеличение энергии пленки ΔE , откуда

$$\Delta E = \alpha \Delta S \quad (2)$$

или

$$\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S}. \quad (2a)$$

Энергия E представляет собою ту часть внутренней энергии пленки, которая может быть превращена в работу при изотермическом процессе. В термодинамике эту часть энергии называют *свободной энергией*.

Из равенства (2a) получаем еще одно определение коэффициента поверхностного натяжения: коэффициент поверхностного натяжения α численно равен отношению изменения свободной энергии поверхностной пленки к изменению площади этой пленки.

Поверхностное натяжение объясняет многочисленные явления, характерные для жидкого состояния вещества, например, образование капель при вытекании жидкости сквозь малое отверстие, образование пены и т. д. Представим себе пузырь воздуха A , который всплывает к поверхности жидкости (рис. 195). Достигнув поверхности, он приподнимает над собою куполообразный тонкий слой жидкости. Если пузырь воздуха достаточно мал, то он не сможет прорвать поверхностный слой и останется над поверхностью жидкости. Совокупность большого числа таких пузырей образует пену.

Общеизвестно, что мыльная вода особенно легко дает тонкие пленки, хотя коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды

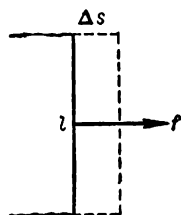


Рис. 194. Определение работы при увеличении площади поверхностного слоя жидкости.

(45 дин/см) значительно меньше коэффициента поверхностного натяжения чистой воды, равного 73 дин/см . Это объясняется большой вязкостью мыльной воды, благодаря чему она стекает под влиянием силы тяжести медленнее, чем чистая вода, и поэтому легче удерживается между поверхностными слоями. В тонких пленках, где поверхность очень велика, а масса жидкости, заключенной между поверхностями, мала, явления поверхностного натяжения сказываются весьма резко. Тонкая мыльная пленка оказывается в значительной мере сходной с растянутой резиновой пленкой и удобна для демонстрации явлений поверхностного натяжения.

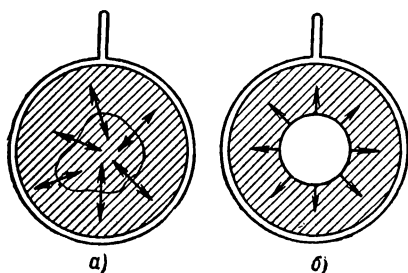


Рис. 196. Нитяная петелька растягивается в кружок мыльной пленкой.

петли, не нарушая целостности остальной части пленки, то силы больше не будут уравновешены, и внешняя по отношению к петле часть пленки растянет ее в кружок (рис. 196б).

Рассмотрим еще образование капель при медленном вытекании жидкости из вертикальной трубки. Поверхностное натяжение не позволяет жидкости сразу вылиться из трубки. По мере вытекания жидкости поверхностная пленка капли получает сужение, или шейку (рис. 197а). Сужение потом разрывается, и нижняя часть жидкости дает основную падающую каплю, а из сужения получается добавочная маленькая капелька (рис. 197б).

При очень малом отверстии и недостаточном давлении со стороны жидкости капля может вовсе не оторваться. Так поверхностное натяжение приводит к тому, что жидкость не протекает сквозь мелкосетчатые поверхности, например, через поверхность зонтика или ткань палатки.

Пример. Для оценки баланса энергии при изменении поверхности жидкости определим, какое количество энергии освобождается при слиянии мелких водяных капель радиусом $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ в одну большую каплю радиусом $R = 2 \text{ мм}$.

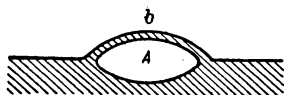


Рис. 195. Пузырь воздуха под поверхностью жидкости.

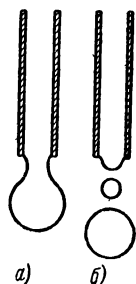


Рис. 197. Образование капли.

Решение. Обозначим число мелких капель, которые, сливаясь, образуют одну большую каплю, через n . Тогда общая поверхность S всех n малых капель равна

$$S = 4\pi r^2 \cdot n. \quad (3)$$

Поверхность большой капли $S_0 = 4\pi R^2$, откуда количество энергии, выделяемое за счет уменьшения поверхности при слиянии капель, по формуле (2) равно

$$\Delta E = (S - S_0) \alpha = 4\pi (r^2 n - R^2) \alpha, \quad (4)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Число малых капель n определим из того соображения, что сумма их объемов равна объему большой капли:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 n = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \text{откуда} \quad n = \frac{R^3}{r^3}.$$

Подставив это значение n в (4), найдем

$$\Delta E = 4\pi R^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \alpha.$$

Подставив сюда численные значения $R = 2$ мм, $r = 2 \cdot 10^{-8}$ мм, $\alpha = 73$ дин/см, получим

$$\Delta E = 4 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot (10^8 - 1) \cdot 73 \text{ эрг} \cong 3,5 \cdot 10^4 \text{ эрг} = 3,5 \cdot 10^{-8} \text{ дж}.$$

Таким образом, за счет уменьшения поверхности воды при слиянии мелких капель в одну большую освободится энергия $3,5 \cdot 10^{-8}$ дж. Эта энергия пойдет на нагревание капли.

Обратно, при разбивании большой капли на малые происходит увеличение энергии поверхностной пленки, которое влечет за собой некоторое охлаждение капель.

§ 80. Давление под изогнутой поверхностью жидкости. Как мы выяснили в предыдущем параграфе, поверхностная пленка жидкости по своим свойствам сходна с растянутой упругой пленкой.

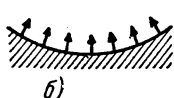
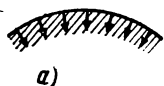


Рис. 198. Действие изогнутой поверхности жидкости.

Поэтому, если пленка ограничена плоским контуром, то она и сама стремится принять форму плоскости. Отсюда выпуклая пленка, стремясь стать плоской, давит на нижележащие слои жидкости (рис. 198 а, б), а вогнутая — их растягивает. Другими словами:

всякая изогнутая поверхностная пленка оказывает на жидкость добавочное давление по сравнению с тем, которое испытывает жидкость с плоской поверхностной пленкой; в случае выпуклой поверхности это добавочное давление положительно, в случае вогнутой — отрицательно.

Определим значение этого добавочного давления для случая, когда поверхность жидкости представляет собою часть сферы радиуса R . Выделим малый сферический сегмент ΔS (рис. 199). Силы поверхностного натяжения, приложенные к контуру этого сегмента, повсюду

касательны к сферической поверхности. Рассмотрим силу Δf , приложенную к элементу контура Δl . Эта сила равна

$$\Delta f = \alpha \cdot \Delta l, \quad (1)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Будучи касательной к сферической поверхности, эта сила составляет некоторый угол с радиусом OC . Поэтому имеется отличная от нуля составляющая этой силы Δf_1 , направленная параллельно радиусу OC . Если поверхность жидкости выпукла, то центр C лежит внутри жидкости, и в этом случае сила Δf_1 сжимает жидкость, лежащую под сегментом ΔS , т. е. образует положительное давление; если поверхность вогнута, то центр C лежит вне жидкости, и в этом случае сила Δf_1 растягивает жидкость, т. е. оказывает отрицательное давление. Из рисунка имеем

$$\Delta f_1 = \Delta f \sin \varphi,$$

откуда по (1)

$$\Delta f_1 = \alpha \Delta l \sin \varphi.$$

Эта сила Δf_1 приложена к элементу контура Δl . Такие же силы приложены ко всем другим элементам контура. Поэтому ко всему сферическому сегменту ΔS приложена параллельно радиусу OC сила

$$f_1 = \sum \Delta f_1 = \alpha \sin \varphi \cdot \sum \Delta l.$$

Сумма $\sum \Delta l$ представляет собою длину контура, ограничивающего шаровой сегмент ΔS . Этот контур есть окружность; обозначим его радиус через r , тогда $\sum \Delta l = 2\pi r$, откуда

$$f_1 = \alpha \cdot 2\pi r \sin \varphi. \quad (2)$$

Из рис. 199 видим:

$$\sin \varphi = \frac{r}{R}.$$

Подставив это значение $\sin \varphi$ в (2), найдем

$$f_1 = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R}.$$

Давление p получим, поделив значение этой силы на площадь той части плоскости, которая ограничена контуром сегмента, т. е.

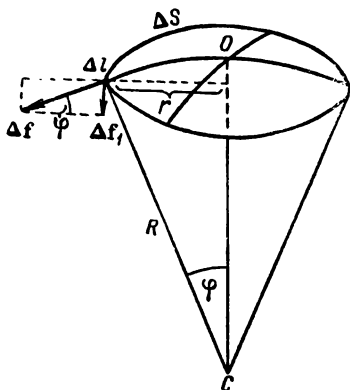


Рис. 199. Определение добавочного давления под сферической поверхностью жидкости.

на площадь окружности радиуса r , откуда

$$p = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R \cdot \pi r^2},$$

т. е.

$$p = \frac{2\alpha}{R}. \quad (3)$$

Эта формула дает нам значение добавочного давления p , оказываемого на жидкость со стороны сферической поверхности.

Как видно, это давление прямо пропорционально коэффициенту поверхностного натяжения α и обратно пропорционально радиусу поверхности R . Чем сильнее искривлена поверхность, тем меньше ее радиус R и, следовательно, тем больше добавочное давление p .

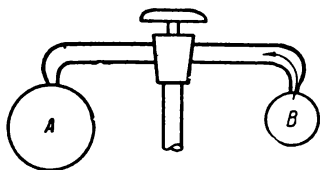


Рис. 200. Воздух перетекает из меньшего мыльного пузыря в больший.

Наличие добавочного давления под изогнутой поверхностью ведет, например, к тому, что внутри мыльного пузыря воздух находится под большим давлением, чем внешний воздух. Разность давлений воздуха внутри и вне пузыря тем больше, чем меньше радиус пузыря.

Это может быть продемонстрировано, если на концах стеклянной трубки (рис. 200) выдуть два мыльных пузыря A и B разных диаметров. Тогда в меньшем пузыре воздух окажется под большим давлением и начнет по трубке течь в больший пузырь. В результате меньший пузырь полностью стянется, больший же еще больше увеличится в размерах.

Пример. Для оценки величины добавочного давления p определим, под каким давлением находится воздух внутри пузырька радиусом $R = 5 \cdot 10^{-3}$ мм, расположенного под поверхностью воды.

Решение. Давление воздуха в пузырьке сложится из атмосферного давления H и добавочного давления p , вызываемого пленкой воды, окружающей пузырек (считаем, что пузырек расположен под самой поверхностью воды, так что слой воды, находящийся над пузырьком, заметного давления не оказывает).

По формуле (3):

$$p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Для воды $\alpha = 73$ дин/см, откуда

$$p = \frac{2 \cdot 73}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ бар} = 2,92 \cdot 10^5 \text{ бар}.$$

Так как $1 \text{ ат} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ бар}$, то

$$p \cong 0,29 \text{ ат}.$$

Отсюда давление воздуха в пузырьке

$$p = H + p = 1,29 \text{ ат}.$$

§ 81. Давление под изогнутой поверхностью жидкости любой формы. Выражение, полученное в § 80 для добавочного давления p для случая сферической поверхности, может быть обобщено и на изогнутую поверхность любой формы. Для этого надо ввести понятие о *кривизне произвольной поверхности*.

Возьмем некоторую произвольную кривую поверхность и восставим в точке O нормаль ON к этой поверхности. Проведем через нормаль плоскость P_1 . Линия пересечения этой плоскости с поверхностью называется нормальным сечением.

Для сферы любое нормальное сечение представляет собою большой круг A_1B_1 (рис. 201), радиус R которого совпадает с радиусом самой сферы. Величина $C = \frac{1}{R}$ дает кривизну сферы.

Для произвольной кривой поверхности различные нормальные сечения, проведенные через одну и ту же точку O , окажутся различными геометрическими кривыми, а следовательно, дадут разную кривизну. На рис. 201 указаны два различных нормальных сечения, проведенных через одну и ту же точку O . Одно из этих сечений дает дугу A_1B_1 с радиусом кривизны $OC_1 = R_1$, другое — дугу A_2B_2 с радиусом кривизны $OC_2 = R_2$.

В геометрии доказывается, что если через точку O любой кривой поверхности провести два взаимно перпендикулярных нормальных сечения A_1B_1 и A_2B_2 , радиусы кривизны которых равны R_1 и R_2 , то величина

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

имеет одно и то же значение для любой пары таких взаимно перпендикулярных нормальных сечений. Эта величина C называется *средней кривизной поверхности в точке O* .

Выберем теперь на кривой поверхности жидкости, имеющей произвольный вид, точку O и проведем через эту точку два взаимно перпендикулярных нормальных сечения A_1B_1 и A_2B_2 с радиусами кривизны R_1 и R_2 (рис. 202). Выделим около точки O малый криволинейный четырехугольник $DEFG$. Длину дуги $\overline{DE} = \overline{FG}$ обозначим через Δl_1 , а длину дуги $\overline{DG} = \overline{EF}$ — через Δl_2 . Тогда площадь рассматриваемого четырехугольника $\Delta S = \Delta l_1 \cdot \Delta l_2$.

Дальнейшее рассуждение построим вполне аналогично рассуждению, приведенному в § 80 для случая сферической поверхности. Сила поверхностного натяжения Δf_1 , приложенная к краю DE , равна

$$\Delta f_1 = \sigma \Delta l_1. \quad (1)$$

Для определения давления, действующего на жидкость со стороны изогнутой поверхности, надо рассмотреть составляющую этой силы $\Delta f'_1$, направленную параллельно радиусу OC_1 . Из рис. 202 имеем

$$\Delta f'_1 = \Delta f_1 \cdot \sin \varphi_1. \quad (2)$$

Но приближенно

$$\sin \varphi_1 \cong \varphi_1 = \frac{\overline{OA_1}}{OC_1}.$$

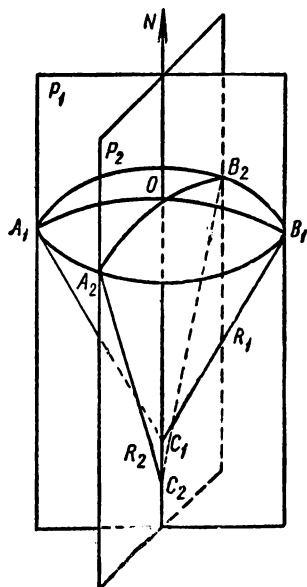


Рис. 201. Нормальные сечения искривленной поверхности.

Дуга $\widehat{OA_1} = \frac{\Delta l_2}{2}$, а отрезок OC_1 представляет собою радиус R_1 нормального сечения A_1B_1 , откуда

$$\sin \varphi_1 \cong \frac{\Delta l_2}{2R_1}.$$

Подставляя это значение $\sin \varphi_1$ в (2) и воспользовавшись (1), получим

$$\Delta f'_1 = \alpha \Delta l_1 \Delta l_2 \frac{1}{2R_1}.$$

Замечая, что $\Delta l_1 \Delta l_2 = \Delta S$, найдем

$$\Delta f'_1 = \alpha \Delta S \frac{1}{2R_1}.$$

На край FG действует равная составляющая $\Delta f'_1$. Точно так же мы найдем, что на край DG действует направленная параллельно радиусу OC_1 составляющая сила

$$\Delta f'_2 = \alpha \Delta S \frac{1}{2R_2}.$$

Такую же составляющую $\Delta f'_2$ дает край EF . В сумме от всех четырех сторон криволинейного четырехугольника $DEFG$ действует параллельно радиусу OC_1 сила

$$\begin{aligned} \Delta f' &= \Delta f'_1 + \Delta f'_1 + \Delta f'_2 + \Delta f'_2 = \\ &= 2\alpha \Delta S \frac{1}{2R_1} + 2\alpha \Delta S \frac{1}{2R_2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta f' = \alpha \Delta S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собою среднюю кривизну поверхности в точке O и не зависит, как указано, от выбора взаимно перпендикулярных нормальных сечений A_1B_1 и A_2B_2 .

Давление p , оказываемое изогнутой поверхностью на жидкость, найдем, поделив значение силы $\Delta f'$ на площадь ΔS , откуда

$$p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3)$$

Эта формула, носящая название *формулы Лапласа*, дает значение добавочного давления p , вызываемого искривленной поверхностью жидкости любой формы.

Для сферы $R_1 = R_2 = R$, где R есть радиус сферы, откуда добавочное давление p под сферической поверхностью по (3):

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

что совпадает с формулой (3) § 80.

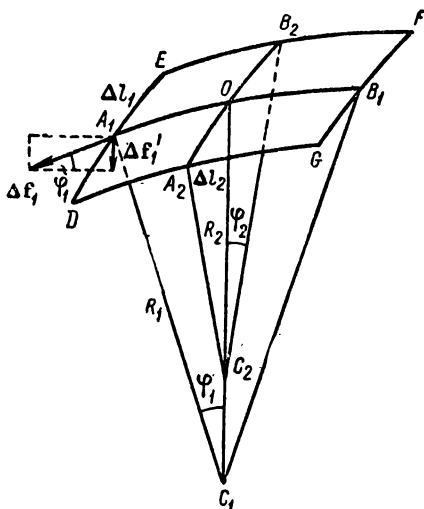


Рис. 202. Определение добавочного давления под искривленной поверхностью.

Разберем еще в качестве частного случая поверхность в виде кругового цилиндра. Возьмем за одно из нормальных сечений сечение, идущее вдоль образующей цилиндра (рис. 203); это сечение представляет собою прямую, для которой $R_1 = \infty$. Второе, перпендикулярное к нему сечение представляет собой окружность, радиус которой R_2 есть радиус цилиндра R .

Отсюда добавочное давление под цилиндрической поверхностью p равно

$$p = \frac{\alpha}{R}. \quad (4)$$

§ 82. Явления на границе жидкости и твердого тела. Капиллярность. При соприкосновении жидкости с твердым телом надо учитывать как силы взаимодействия между молекулами жидкости, так и силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела.

Здесь возможны два случая: 1) силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела; 2) силы взаимодействия между молекулами жидкости меньше, чем силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела.

В первом случае говорят о *несмачивании жидкостью твердого тела*. При несмачивании в слое жидкости, прилегающем к твердому телу, *резльтирующая сила направлена в сторону жидкости*. В равновесном состоянии поверхность жидкости располагается нор-

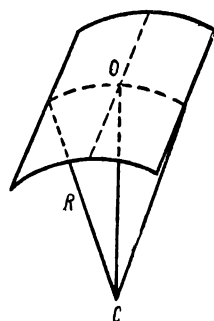


Рис. 203. Цилиндрическая поверхность.

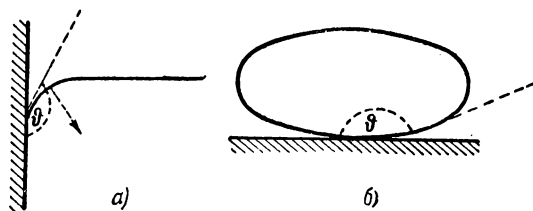


Рис. 204. Краевой угол несмачивающей жидкости.

Угол ϑ между касательными к поверхности жидкости и к поверхности твердого тела называется *краевым углом*. В случае несмачивания краевой угол тупой: $\vartheta \geq \frac{\pi}{2}$. При $\vartheta = \pi$ говорят о *полном несмачивании*.

Во втором случае, когда силы взаимодействия между молекулами жидкости меньше, чем силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела, говорят о *смачивании жидкостью твердого тела*. При смачивании в слое жидкости, прилегающем к твердому телу, *резльтирующая сила направлена в сторону твердого*

тела. При этом краевой угол острый, т. е. $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Если $\vartheta = 0$, то говорят о *полном смачивании*.

На рис. 205а представлено расположение поверхности смачивающей жидкости у вертикальной твердой стенки, а на рис. 205б — вид капли смачивающей жидкости на горизонтальной поверхности.

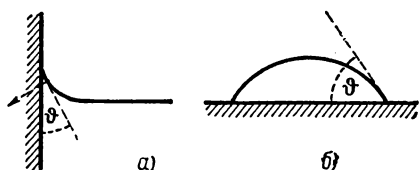


Рис. 205. Краевой угол смачивающей жидкости.

Капля жидкости, помещенная на горизонтальную поверхность твердого тела, которое она полностью смачивает, растекается по поверхности. Капля несмачивающей жидкости принимает более или менее сферическую форму

(в зависимости от ее размеров) и легко перемещается по поверхности твердого тела.

Одна и та же жидкость смачивает одни и не смачивает другие твердые тела. Так, вода практически полностью смачивает чистую поверхность стекла и не смачивает, например, парафин. Ртуть не смачивает стекло и смачивает чистую поверхность железа и т. д.

Поверхность смачивающей жидкости, находящейся в узкой цилиндрической трубке, принимает вогнутую форму (рис. 206а), а несмачивающей жидкости — выпуклую (рис. 206б). Такого рода изогнутые поверхности жидкости носят название *менисков*.

Рассмотрим случай узкой трубки, погруженной одним своим концом в жидкость, налитую в широкий сосуд. Пусть жидкость смачивает материал, из которого сделана трубка. Тогда внутри трубки мениск вогнутый (рис. 207) и при круглом сечении трубки приближенно представляет собою часть сферы.

Под вогнутой поверхностью жидкости, по сказанному в § 80, появится добавочное отрицательное давление [формула (3) § 80]:

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

где R — радиус поверхности жидкости и α — коэффициент поверхностного натяжения.

Так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде добавочного давления нет, то жидкость поднимется в трубке на такую высоту h , при которой давление столба жидкости уравнивает давление p . Давление, создаваемое столбом жидкости высотой h ,

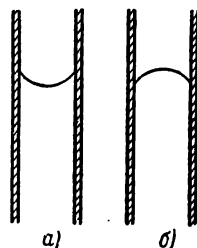


Рис. 206. Форма менисков: а) смачивающей жидкости, б) несмачивающей жидкости.

равно ρgh , где ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести; отсюда условие равновесия имеет вид:

$$p = \frac{2\alpha}{R} = \rho gh. \quad (1)$$

Обозначив через r радиус трубки и через ϑ краевой угол, имеем из рис. 207

$$R = \frac{r}{\cos \vartheta}.$$

Подставив это значение R в (1), найдем

$$\frac{2\alpha \cdot \cos \vartheta}{r} = \rho gh,$$

откуда высота поднятия жидкости

$$h = \frac{2 \cos \vartheta \cdot \alpha}{r \rho g}. \quad (2)$$

Вводя диаметр трубки $d = 2r$, получим

$$h = \frac{4 \cos \vartheta \cdot \alpha}{d \rho g}. \quad (2a)$$

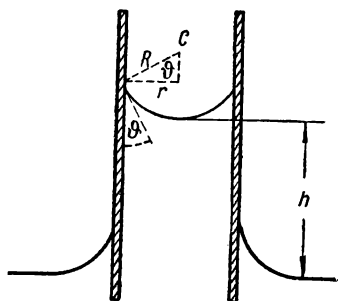


Рис. 207. Поднятие смачивающей жидкости в капиллярной трубке.

Из формулы (2) видно, что высота поднятия тем больше, чем меньше радиус r , т. е. чем уже трубка. Поэтому поднятие смачивающей жидкости особенно заметно в очень узких трубках.

Такие узкие трубки носят название *капиллярных* от латинского слова capillus, что значит волос. Само явление изменения высоты уровня жидкости в узких трубках называется *капиллярностью*.

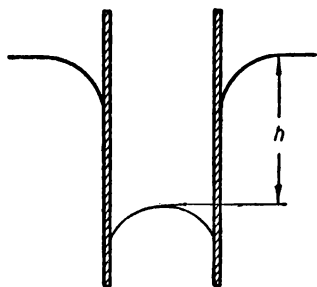


Рис. 208. Опускание несмачивающей жидкости в капиллярной трубке.

При данном радиусе r капиллярной трубки поднятие тем больше, чем больше коэффициент поверхностного натяжения α , чем сильнее происходит смачивание (чем меньше краевой угол ϑ) и чем меньше плотность жидкости ρ . При полном смачивании ($\vartheta = 0$) формула (2) принимает вид:

$$h = \frac{2\alpha}{r \rho g}. \quad (2б)$$

Если жидкость не смачивает материал трубки, то мениск жидкости в трубке выпуклый, создаваемое этим мениском добавочное давление положительно и уровень жидкости в трубке располагается ниже, чем в широкой части сосуда (рис. 208). Величина понижения уровня h несмачивающей жидкости дается той же формулой (2), что и высота поднятия смачивающей жидкости.

Формула (2) может быть использована для определения коэффициента поверхностного натяжения α . Для этого стараются подобрать такой материал, чтобы смачивание (или несмачивание) носило полный характер. Тогда можно пользоваться формулой (26). Зная радиус трубки r , плотность жидкости ρ и измерив высоту поднятия (или опускания) h , непосредственно вычисляют по (26) значение α .

Явления капиллярности играют большую роль в природе и в практической жизни. Проникновение воды в почву и во всякого рода пористые материалы происходит за счет капиллярности. На капиллярности основано действие фитилей, впитывание воды гигроскопической ватой и т. д. В технике на явлениях смачивания и несмачивания основана так называемая *флотация*. Схематически процесс флотации заключается в следующем: размельченная смесь руды с горной породой, в которую она заключена, взбалтывается в жидкости. Жидкость подбирается так, чтобы она смачивала руду и не смачивала „пустую“ породу. Через жидкость пропускаются пузырьки воздуха. Эти пузырьки, оседая на крупинках породы, не смачиваемой жидкостью, увлекают их на поверхность жидкости. Смачиваемые же жидкостью крупинки руды погружаются на дно. Таким образом достигается отделение руды от „пустой“ породы.

Рассмотрим еще случай жидкости, находящейся между параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии d (рис. 209).

Поверхность смачивающей жидкости между пластинами принимает цилиндрический вид. Добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью по формуле (4) § 81 равно:

$$p = \frac{\alpha}{R},$$

где R — радиус цилиндра. При краевом угле ϑ :

$$R = \frac{d}{2 \cos \vartheta} \quad \text{и} \quad p = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{d}.$$

Это давление уравнивает давление столба жидкости высотой h :

$$\frac{2\alpha \cos \vartheta}{d} = \rho g h,$$

откуда высота поднятия h равна

$$h = \frac{2 \cos \vartheta \cdot \alpha}{d \rho g}. \quad (3)$$

Рис. 209. Поднятие смачивающей жидкости между параллельными пластинами.

Сравнивая формулы (2а) и (3), видим, что высота поднятия смачивающей жидкости между параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии d , вдвое меньше, чем в трубке диаметром d .

Приведем еще примеры на вычисление высоты капиллярного поднятия и опускания жидкостей.

Пример 1. Диаметры колен U -образной стеклянной трубки (рис. 210) равны 1 мм и 3 мм. Чему равна разность уровней воды в обоих коленах?

Решение. Давление p_1 , вызываемое вогнутой поверхностью воды в более узком колене трубки, уравнивается давлением, создаваемым разностью уровней воды в обоих коленях h (рис. 210), и давлением p_2 , вызываемым вогнутой поверхностью в более широком колене:

$$p_1 = h\rho g + p_2, \quad (4)$$

где ρ — плотность воды, g — ускорение силы тяжести. Полагая краевой угол $\vartheta = 0$, имеем по (3) § 80:

$$p_1 = \frac{2\alpha}{r_1}, \quad p_2 = \frac{2\alpha}{r_2},$$

где r_1 и r_2 — радиусы трубок обоих колен.

Вводя вместо радиусов диаметры $d_1 = 2r_1$ и $d_2 = 2r_2$, получим

$$p_1 = \frac{4\alpha}{d_1}, \quad p_2 = \frac{4\alpha}{d_2}.$$

Подставляя эти значения p_1 и p_2 в (4), получим

$$\frac{4\alpha}{d_1} = h\rho g + \frac{4\alpha}{d_2},$$

откуда

$$h = \frac{4\alpha}{\rho g} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{4 \cdot 73}{1 \cdot 980} \left(\frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,3} \right) \text{ см} \cong 2 \text{ см}.$$

Пример 2. Барометрическая трубка (рис. 211), заполненная ртутью, погружена нижним концом в широкий сосуд. Диаметр внутреннего сечения трубки равен 0,4 см. Разность уровней ртути $h = 758$ мм. Чему равно атмосферное давление?

Решение. Атмосферное давление не может быть непосредственно определено по высоте ртутного столба h , так как к давлению столба прибавляется еще давление выпуклого мениска ртути в трубке. Таким образом, атмосферное давление P уравнивает давление ртутного столба h и добавочное давление p :

$$P = h\rho g + p.$$

Добавочное давление p равно

$$p = \frac{4\alpha |\cos \vartheta|}{d},$$

где d — диаметр трубки, ϑ — краевой угол. Отсюда

$$P = h\rho g + \frac{4\alpha |\cos \vartheta|}{d}. \quad (5)$$

Рис. 211. Влияние капиллярности на высоту поднятия ртути в барометрической трубке.

Желая, как обычно, выразить атмосферное давление P в миллиметрах ртутного столба, мы должны определить, давлению какой высоты h' ртутного столба равно давлению p . Из соотношения

$$p = \frac{4\alpha |\cos \vartheta|}{d} = h'\rho g \quad \text{имеем} \quad h' = \frac{4\alpha |\cos \vartheta|}{d\rho g},$$

здесь взято абсолютное значение $|\cos \vartheta|$, так как h' должно быть положительно.

Обозначим атмосферное давление, измеренное в миллиметрах ртутного столба, через H , тогда вместо (5) получим:

$$H = h + h' = h + \frac{4\alpha |\cos \vartheta|}{d\rho g}. \quad (6)$$

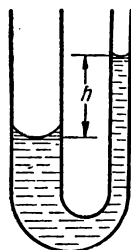
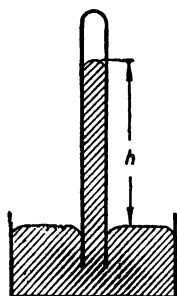


Рис. 210. Поднятие воды в более узком колене U-образной трубки.



Полагая для границы ртуть — стекло угол $\vartheta = \pi$, получим вместо (6):

$$H = h + \frac{4\alpha}{d\rho g}. \quad (6a)$$

Для ртути $\alpha = 540$ дин/см и $\rho = 13,6$ г/см³, откуда

$$H = 75,8 + \frac{4 \cdot 540}{0,4 \cdot 13,6 \cdot 980} \text{ см} = 76,2 \text{ см Hg.}$$

§ 83. Растекание капли по поверхности жидкости. Мономолекулярные пленки. Рассмотрим каплю (рис. 212) некоторой жидкости *I*, расположенную на поверхности *CD* другой, более плотной жидкости *II*. Обозначим поверхностное натяжение первой жидкости через α_1 и второй — через α_2 .

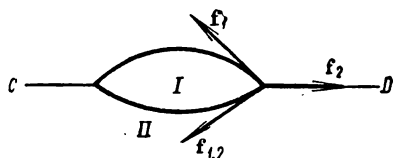


Рис. 212. Капля менее плотной жидкости *I* на поверхности более плотной жидкости *II*.

На границе обеих жидкостей также действует поверхностное натяжение, отличное, однако, от тех, которые имеют место на свободных поверхностях обеих жидкостей. Обозначим коэффициент этого поверхностного натяжения на границе обеих жидкостей через $\alpha_{1,2}$. В каждой точке окружности капли сходятся три пограничные поверхности. Поэтому на каждую единицу длины окружности капли действуют три силы поверхностного натяжения f_1 , f_2 и $f_{1,2}$, направленные каждая по соответствующей поверхности.

Силы f_1 и $f_{1,2}$ стремятся стянуть каплю; сила f_2 растягивает ее. Равновесной будет та форма капли, при которой векторная сумма сил f_1 и $f_{1,2}$ уравнивается силой f_2 . Очевидно, это возможно при условии, что $f_2 < f_1 + f_{1,2}$, откуда следует, что жидкость *I* может держаться в виде капли на поверхности жидкости *II*, если

$$\alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_{1,2}.$$

Если же поверхностное натяжение α_2 настолько велико, по сравнению с другими, что

$$\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_{1,2},$$

то в этих случаях равнодействующая сил f_1 и $f_{1,2}$ ни при какой форме капли не может уравновесить силу f_2 и капля растягивается по поверхности жидкости *II* в виде тонкой пленки. Так, например, многие органические жидкости (эфир, скипидар) растекаются по поверхности воды. Для некоторых жидкостей (бензол, жирные кислоты) явление растекания наблюдается только для первых капель, помещенных на поверхности чистой воды; последующие капли уже не растекаются, а остаются на поверхности воды в виде устойчивых капель. Это объясняется тем, что первые капли отчасти растворяются в воде и при этом настолько уменьшают ее поверхностное натяжение, что равновесие капель становится возможным.

Ленгмюр изучал поведение очень тонких пленок на поверхности воды с помощью прибора, показанного на рис. 213. Кювета с плоскими краями наполнена чистой водой; на поверхности воды могут перемещаться две парафинированные полоски бумаги *A* и *B*. Полоску *A* можно перемещать свободно; полоска *B* связана твердо с плечом коромысла весов *CD*. Если поверхность воды чистая, то перемещения полоски *A* не оказывают никакого влияния на положение полоски *B*. Ленгмюр растворял жирную кислоту (нерастворимую в воде) в бензоле и пускал несколько капель такого раствора на поверхность воды в кювете. Бензол испарялся, и жирная кислота покрывала поверхность воды тонкой пленкой.

Если позаботиться, чтобы на часть поверхности воды, расположенную правее полоски B , жирная кислота не попадала, то пленка этой кислоты

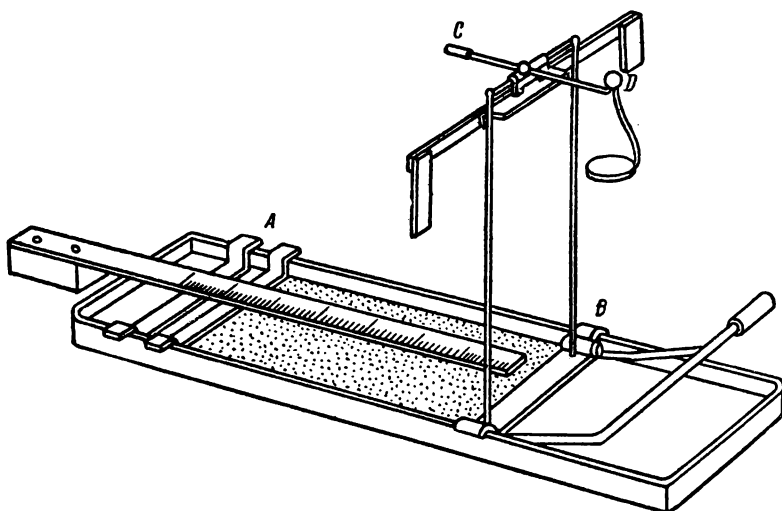


Рис. 213. Прибор для определения давления поверхностной пленки.

будет находиться лишь по одну сторону от полоски B и станет ее отодвигать с силой f , которую можно измерить с помощью весов CD . Всякий сдвиг полоски A , т. е. изменение поверхности пленки жирной кислоты, поведет к изменению силы f .

Зная концентрацию раствора и его количество, налитое на воду, можно сосчитать число молекул жирной кислоты, оказавшихся на поверхности воды. Отсюда, измерив площадь поверхности воды, заключенную между полосками A и B , легко определить площадь ω , приходящуюся на долю одной молекулы. При передвижении полоски A площадь ω меняется.

Ленгмюр измерял силу f_0 , приходящуюся на единицу длины полоски B , соответствующую различным значениям ω . Зависимость f_0 от ω представлена на рис. 214. Для относительно больших ω (больших $20 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$) получается гиперболическая часть кривой QS . Начиная от точки S , кривая имеет прямолинейный вид и круто идет кверху до точки H ; далее она проходит почти горизонтально. Характер этой кривой может быть истолкован следующим образом: при ω больших чем $20 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ площадь, приходящаяся на одну молекулу, больше ее собственных размеров. Совокупность молекул жирной кислоты, расположенных на поверхности воды, образует как бы двумерный газ. Этот двумерный газ подчиняется обычным газовым законам.

Зависимость между силой f_0 , приходящейся на единицу длины полоски (аналог давления), и площадью ω , занимаемой молекулой (аналог объема),

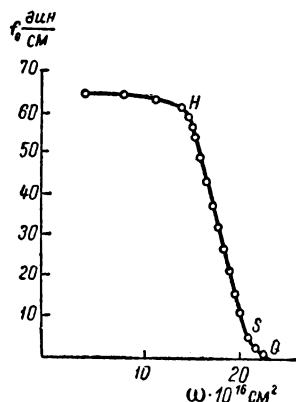


Рис. 214. Кривая зависимости давления поверхностной пленки от площади.

подчиняется закону

$$f_0 \omega = kT,$$

где T — абсолютная температура пленки и k — постоянная Больцмана.

Начиная от значений ω , соответствующих точке S , молекулы располагаются вплотную друг к другу. Теперь совокупность молекул жирной кислоты на поверхности воды образует как бы двумерное твердое вещество. Молекулы в такой твердой пленке расположены в один ряд, откуда пленка носит название *мономолекулярной пленки*. Прямая SH выражает сравнительно малую сжимаемость мономолекулярной пленки.



Рис. 215. Расположение молекул жирных кислот в мономолекулярном слое на поверхности воды.

Для точек, лежащих левее H , имеет место образование складок пленки, образование двух и более молекулярных слоев.

Абсцисса точки S определяет площадь ω_0 , приходящуюся на одну молекулу при их плотном расположении на поверхности воды. Опыты Ленгмюра показали, что всем жирным кислотам, начиная от пальмитиновой ($C_{16}H_{31}COOH$) до церотиновой ($C_{26}H_{51}COOH$), приходится приписать одну и ту же площадь $\omega_0 = 21 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$. Так

как эти молекулы имеют вид длинных цепочек различной длины для разных кислот, то полученный результат можно объяснить тем, что длинные молекулы жирных кислот на воде располагаются вертикально, их концы с группой $COOH$ погружены в воду, а углеводные цепи $CH_3-(CH_2)_n$ торчат над водой (рис. 215).

§ 84. Испарение жидкостей. Если жидкость находится в открытом сосуде, она постепенно испаряется, т. е. переходит в газообразное состояние.

Испарение происходит при всякой температуре, но для каждой данной жидкости с повышением температуры скорость испарения увеличивается.

Явление испарения, как было указано, объясняется тем, что в жидкостях, как и в газах, молекулы обладают различными энергиями как большими, так и меньшими средней энергии, значение которой определяется температурой T . Поэтому при каждой температуре T в жидкости находятся настолько быстрые молекулы, что они, подходя к поверхности жидкости, могут преодолеть притяжение соседних молекул и, прорвавшись сквозь поверхностный слой, вылететь за пределы жидкости. Чем выше температура жидкости, тем больше число быстрых молекул и тем, следовательно, быстрее идет испарение.

Во время испарения из жидкости вылетают более быстрые молекулы, при этом они тратят часть своей энергии на совершение работы против удерживающих их внутри жидкости сил молекулярного притяжения. Отсюда получается, что средняя энергия молекул, остающихся в жидкости, убывает, т. е. жидкость охлаждается.

Чтобы поддерживать жидкость при испарении при постоянной температуре, к ней нужно подводить извне тепло. Это тепло носит название *теплоты испарения*; передача этого количества тепла

жидкости ведет не к повышению ее температуры, но к совершению работы, затрачиваемой при испарении.

Под удельной теплотой испарения λ подразумевается количество тепла, которое нужно сообщить единице массы жидкости, находящейся при температуре T , чтобы перевести ее в пар при той же температуре.

Обычно удельную теплоту относят к одному грамму или к одному килограмму жидкости.

Теплота испарения зависит от температуры жидкости: при стремлении температуры к критической температуре T_k теплота испарения стремится к нулю.

Если к испаряющейся жидкости не подводить извне тепло, то она охлаждается. На этом факте основан способ понижения температур: заставляя жидкость, помещенную в сосуд с нетеплопроводными стенками, усиленно испаряться, можно ее значительно охладить (ср. § 65).

При конденсации пара в жидкость его молекулы взаимно притягиваются, в результате чего их скорости, а следовательно, и их кинетическая энергия возрастают. Это ведет к нагреванию образующейся жидкости: теплота, затраченная при испарении, отдается обратно при конденсации пара.

При нагревании жидкости до такой температуры, при которой упругость ее насыщенных паров становится равной внешнему давлению, испарение жидкости начинает идти не только с поверхности жидкости, но и в ее толще, где начинают образовываться пузырьки пара. Такое более бурное испарение носит название *кипения*. Таким образом, температура кипения зависит от того внешнего давления, под которым жидкость находится. При атмосферном давлении (760 мм Hg) вода кипит при 100°C ; при более низком давлении она кипит при более низкой температуре, а при более высоком давлении — при более высокой температуре.

Пузырьки пара, образующиеся при кипении жидкости, легче всего возникают на пузырьках воздуха, обычно присутствующих в жидкости и обыкновенно прилипающих к стенкам сосуда.

Пузырьки воздуха являются теми центрами, около которых начинается кипение. Жидкость, лишенную воздуха, можно *перегреть*, т. е. нагреть выше температуры кипения без того, чтобы она вскипела. Если в такую перегретую жидкость ввести какие-либо твердые частицы, к поверхности которых прилип воздух, то она сейчас же закипит, при этом температура ее упадет до температуры кипения.

Так как закипание перегретой жидкости происходит бурно, то его обычно стараются избегать, для чего, например, в сосуд с нагреваемой водой вводят капиллярные трубки, внутри которых легко сохраняются пузырьки воздуха.

Теплота испарения λ идет на работу A , совершаемую молекулами при прохождении сквозь поверхностный слой жидкости, и на ра-

боту A' , связанную с увеличением удельного объема V_0 вещества при его переходе из жидкого в газообразное состояние:

$$\lambda = A + A'. \quad (1)$$

Толщина поверхностного слоя, в пределах которого действуют на молекулу силы притяжения, есть величина порядка радиуса молекулярного действия r (см. § 78). Обозначая среднюю силу, действующую на длине этого радиуса молекулярного действия, через \bar{f} , получим выражение для работы вырывания одной молекулы:

$$\Delta A = \bar{f} \cdot r.$$

Работа A , совершаемая всеми молекулами, находящимися в единице массы жидкости:

$$A = n \cdot \Delta A = n \cdot \bar{f} r,$$

где n — число молекул в единице массы.

Работа A' равна

$$A' = p(V'_0 - V_0),$$

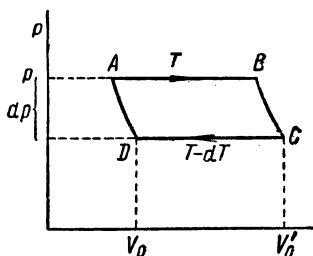
где V'_0 — удельный объем пара, V_0 — удельный объем жидкости и p — то давление, при котором происходит испарение. Подставляя значения A и A' в (1), найдем

$$\lambda = n\bar{f}r + p(V'_0 - V_0). \quad (2)$$

Это соотношение не позволяет непосредственно вычислить значение теплоты испарения λ , поскольку остаются неизвестными \bar{f} и r , но оно показывает, что λ зависит от той же величины молекулярного взаимодействия \bar{f} , которая обуславливает и наличие поверхностного натяжения. При повышении температуры уменьшаются и сила \bar{f} , и разность удельных объемов V'_0 пара и V_0 жидкости, откуда, по (2), с увеличением температуры убывает и теплота испарения λ . При приближении температуры к критической T_k величина молекулярного притяжения \bar{f} стремится к нулю, и одновременно пропадает разность в удельных объемах пара V'_0 и жидкости V_0 ; отсюда при $T \rightarrow T_k$, по (2), и теплота испарения $\lambda \rightarrow 0$, что, как было отмечено, действительно имеет место.

Пользуясь вторым началом термодинамики, можно установить зависимость между упругостью насыщенных паров, температурой, теплотой испарения и изменением удельного объема при переходе от жидкого к газообразному состоянию. Для этого предположим, что в цилиндре под поршнем находится жидкость и над ней ее насыщенные пары. Проведем с этой смесью обратимый цикл Карно (см. § 73). Пусть первоначальная температура равна T и упругость насыщенных паров при этой температуре p . Проведем сперва изотермическое расширение. При этом некоторая масса жидкости m испарится и перейдет в состояние насыщенных паров при прежнем давлении p .

Таким образом, расширение произойдет изобарически; на графике (рис. 216) оно представится изобарой AB . Для того чтобы это расширение протекало действительно изобарически, смеси надо передать теплоту испарения



$$Q_1 = m\lambda. \quad (3)$$

Увеличение объема ΔV равно

$$\Delta V = m(V'_0 - V_0),$$

где V'_0 — удельный объем пара, а V_0 — удельный объем жидкости. Работа, совершенная при этом изобарическом расширении, равна

$$A_1 = p \cdot \Delta V = pm(V'_0 - V_0). \quad (4)$$

Рис. 216. Цикл Карно, проводимый со смесью жидкости и ее насыщенного пара.

Затем произведем бесконечно малое адиабатическое увеличение объема (ветвь BC); при этом температура упадет на dT , а упругость насыщенных паров понизится на dp . Затем сожмем смесь снова изобарически на величину ΔV . Это сжатие изобразится прямой CD , оно будет протекать при давлении $p - dp$ и температуре $T - dT$, и при нем совершится работа

$$A_2 = -(p - dp) \Delta V = -(p - dp) m(V'_0 - V_0). \quad (5)$$

Наконец, замкнем цикл, производя адиабатическое сжатие DA . В результате цикла от нагревателя взято количество тепла Q_1 и совершена некоторая работа A . Пренебрегая бесконечно малыми работами, совершаемыми на адиабатах BC и AD , можно считать $A = A_1 + A_2$. Коэффициент полезного действия обратимого цикла Карно $\eta' = \frac{A}{Q_1}$, по сказанному на стр. 281, не

зависит от природы рабочего вещества и равен $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где T_1 — температура нагревателя (в нашем случае T) и T_2 — температура холодильника (в нашем случае $T - dT$). Таким образом:

$$\eta' = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}.$$

Подставляя сюда вместо Q_1 , A_1 и A_2 их значения по (3), (4) и (5), получим

$$\frac{m(V'_0 - V_0) dp}{m\lambda} = \frac{dT}{T}, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V'_0 - V_0}. \quad (6)$$

Формула (6) носит название *формулы Клапейрона—Клаузиуса*, она связывает величину dp/dT , характеризующую зависимость упругости насыщенных паров от температуры, с теплотой испарения λ , изменением удельного объема $V'_0 - V_0$ и температурой T . Вид этой формулы не зависит от природы жидкости.

§ 85. Растворы. Осмотическое давление. Как известно, твердые вещества, вообще говоря, растворяются в жидкостях, образуя с ними вполне однородную среду. Однако раствор не представляет собой простой смеси, подобной смеси газов, химически не реагирующих друг с другом. Д. И. Менделеев в результате обширных исследований, произведенных в 1865—1887 гг., показал, что объем

раствора отличается от суммы объемов растворителя и растворенного вещества. Процесс растворения связан с выделением или поглощением тепла. Менделеев установил наличие особых точек, соответствующих определенным весовым соотношениям растворителя и растворенного вещества. Все это указывает на наличие энергетических взаимодействий между молекулами раствора и растворенного вещества и сближает растворы с химическими соединениями. Однако для слабых растворов указанные эффекты играют небольшую роль. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением столь слабых растворов, что одна молекула растворенного вещества приходится на большое число молекул растворителя. Тогда молекулы растворенного вещества находятся далеко друг от друга, слабо взаимодействуют друг с другом, и их совокупность образует подобие газа. Различие с действительным газом заключается в том, что здесь движение молекул растворенного вещества затруднено наличием между ними молекул растворителя, с которыми они непрерывно сталкиваются. Благодаря этому коэффициент диффузии растворенного вещества гораздо меньше коэффициента диффузии газов.

Средняя кинетическая энергия теплового движения молекул как растворителя, так и растворенного вещества та же, что и в газе при данной температуре T : на каждую степень свободы приходится в среднем энергия

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} k T,$$

где k — постоянная Больцмана.

Совокупность молекул растворенного вещества, будучи подобна газу, должна оказывать давление (см. § 46)

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{\omega}, \quad (1)$$

где n_0 — число молекул растворенного вещества в единице объема раствора. Это давление p называется *осмотическим*.

Однако, благодаря наличию у жидкости, являющейся растворителем, огромного внутреннего давления, вызванного поверхностной пленкой, непосредственное наблюдение осмотического давления невозможно.

Осмотическое давление p аналогично парциальному давлению какого-либо газа, подмешанного в малом количестве к другому газу, находящемуся при большом давлении p . Отсюда и метод наблюдения осмотического давления должен быть тот же, что и метод наблюдения парциального давления газа. В § 47 нами был описан опыт, в котором, благодаря наличию перегородки из раскаленной платины, проницаемой для молекул водорода и непроницаемой для молекул аргона, можно было непосредственно измерить парциальное давление водорода. Аналогично можно обнаружить осмотическое давление, если подобрать перегородку, пропускающую молекулы растворителя

и не пропускающую молекулы растворенного вещества. Такого рода перегородки называются *полупроницаемыми*. Например, для случая раствора сахара животный пузырь является прозрачным для молекул воды и непрозрачным для молекул сахара, откуда следует, что он может быть использован для наблюдения и измерения осмотического давления раствора сахара.

Схема опыта, служащего для обнаружения осмотического давления, представлена на рис. 217. В сосуд с чистой водой погружен маленький сосудик *a*, нижний открытый конец которого затянут полупроницаемым пузырем. К верхней части сосудика *a* прикреплена тонкая длинная трубка *b*. В сосудике находится раствор сахара. Аналогично тому, как в опыте, изображенном на рис. 114, водород поступал внутрь платинового сосуда в больших количествах, чем выходил из него, так и в сосудик *a* через полупроницаемую перегородку будет больше проникать воды извне, чем из сосудика *a* наружу. Эта лишняя проникнувшая вода поднимет уровень раствора в трубке *b* и будет его повышать до тех пор, пока гидростатическое давление поднявшегося столба жидкости не окажется равным осмотическому („парциальному“) давлению растворенного сахара.

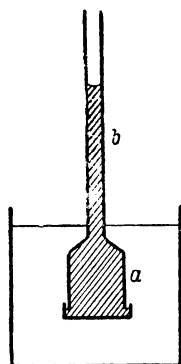


Рис. 217. Определение осмотического давления с помощью полупроницаемой перегородки.

Из формулы (1) вытекает, что осмотическое давление должно подчиняться соотношению Менделеева—Клапейрона:

$$p = \frac{m}{\mu \cdot V} RT, \quad (2)$$

где m — масса растворенного вещества, μ — его молекулярный вес, V — объем раствора, R — газовая постоянная.

Вводя величину

$$C = \frac{m}{V},$$

которая представляет собой *концентрацию раствора* (концентрация численно равна массе растворенного вещества, приходящейся на единицу объема раствора), перепишем формулу (2):

$$p = \frac{C}{\mu} RT. \quad (3)$$

Формула (3) в применении к осмотическому давлению носит название *формулы Вант-Гоффа*. Из формулы Вант-Гоффа следует: 1) для данного растворенного вещества при постоянной температуре осмотическое давление p прямо пропорционально концентрации C ; 2) для данного растворенного вещества при постоянной концентрации осмотическое давление p прямо пропорционально абсолютной темпе-

ратуре раствора T ; 3) для различных растворенных веществ, взятых при одинаковых концентрациях и одинаковых температурах, осмотическое давление p обратно пропорционально молекулярному весу.

Для большого числа слабых растворов формула Вант-Гоффа (3) оправдывается весьма хорошо. Однако для ряда растворов, например для растворов неорганических солей, осмотические давления оказываются значительно больше вычисленных по формуле (3).

Это объясняется распадом молекул этих веществ при растворении на несколько частей (*диссоциацией*), в результате чего возрастает число частиц n_0 , приходящихся на единицу объема растворителя, и по формуле (1) возрастает и давление.

Растворы, подчиняющиеся формуле (3), оказываются непроводниками электрического тока, в то время как растворы, обнаруживающие большие осмотические давления, являются проводниками электричества (*электролитами*, см. т. II). Отсюда следует, что молекулы распадаются при растворении не на нейтральные, но на заряженные части (ионы).

Явления, связанные с осмотическим давлением, играют большую роль в природе, а именно, в процессах, происходящих в живых организмах.

Для оценки величины осмотических давлений рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. В 1 л воды растворено 34 г тростникового сахара ($C_{12}H_{22}O_{11}$) при температуре 27°C . Найти величину осмотического давления.

Решение. По формуле (2):

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V};$$

здесь величина R представляет собой газовую постоянную, равную $0,082 \text{ л ат/град моль}$. Молекулярный вес μ находим, пользуясь приведенной химической формулой тростникового сахара и зная, что атомные веса водорода (H), углерода (C) и кислорода (O) соответственно равны 1, 12 и 16, откуда $\mu = 342$. Пользуясь этими численными значениями, имеем:

$$p = \frac{34}{342} \cdot \frac{0,082 \cdot 300}{1} \text{ ат} \cong 2,46 \text{ ат}.$$

Из приведенных расчетов видно, что осмотическое давление может достигать величин порядка нескольких атмосфер.

Пример 2. Определить, в каком отношении возрастает осмотическое давление в результате диссоциации молекул растворенного вещества, считая, что x -я часть всех молекул растворенного вещества распадается на i частиц каждая.

Решение. Обозначим число молекул растворенного вещества, приходящихся на единицу объема, в предположении, что диссоциация не происходит, через n_0 . Если x -я часть молекул растворенного вещества распадается на i частиц каждая, то число частиц в единице объема станет равным:

$$n'_0 = n_0 x i + (1 - x) n_0 = [1 + x(i - 1)] n_0.$$

Так как давление пропорционально числу частиц в единице объема, то, следовательно, в результате диссоциации давление возрастет в отношении:

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'_0}{n_0} = 1 + \kappa(i - 1). \quad (4)$$

Для очень слабых растворов диссоциация бывает полная, т. е. все молекулы распадаются, тогда $\kappa = 1$, и формула (4) принимает вид:

$$\frac{p'}{p} = i.$$

Если, например, все молекулы диссоциируют на две части, то $i = 2$ и $p' = 2p$, т. е. осмотическое давление в результате диссоциации возрастает вдвое.

Пример 3. Определить меру диссоциации молекул поваренной соли NaCl при растворении 2,92 г соли в 1 л воды при температуре 27° C, если известно, что при этих условиях осмотическое давление оказалось равным 1,75 ат.

Решение. Обозначим фактически наблюдаемое осмотическое давление раствора поваренной соли через p' , а давление, которое имело бы место при отсутствии диссоциации, через p . Тогда на основании формулы (4), выведенной в решении предыдущего примера:

$$p' = p[1 + \kappa(i - 1)].$$

По условию $i = 2$, откуда

$$p' = p(1 + \kappa).$$

Решая это равенство относительно κ , найдем

$$\kappa = \frac{p'}{p} - 1. \quad (5)$$

По формуле Менделеева — Клапейрона

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Подставив это значение p в (5), получим

$$\kappa = \frac{p'\mu V}{mRT} - 1.$$

Подставляя сюда приведенные численные данные, найдем

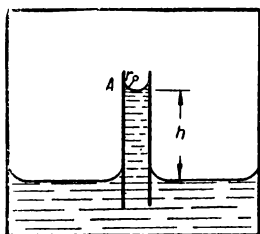
$$\kappa \cong 0,44,$$

т. е. 0,44 всех молекул поваренной соли диссоциированы.

§ 86. Давление насыщенных паров над искривленной поверхностью и над раствором. Рассмотрим зависимость давления насыщенных паров жидкости от кривизны ее поверхности. Пусть некоторое количество жидкости находится в закрытом сосуде; над жидкостью — насыщенные пары. Давление насыщенных паров над поверхностью жидкости имеет при данной температуре T вполне

определенное значение p . С высотой это давление убывает по барометрической формуле (см. § 51).

Представим себе капиллярную трубку A , опущенную одним концом в жидкость (рис. 218). Предположим, что материал, из которого сделана капиллярная трубка, полностью смачивается жидкостью. Тогда мениск жидкости представит собою вогнутую поверхность в виде полусферы радиуса r , совпадающего с радиусом капиллярной трубки. Жидкость в трубке поднимается на высоту h , равную по формуле (26) § 82:



$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g}, \quad (1)$$

Рис. 218. Упругость насыщенных паров на высоте h меньше, чем над уровнем жидкости в сосуде.

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости и ρ — ее плотность.

Допустим, что давление насыщенных паров над вогнутой поверхностью жидкости в капилляре имеет то же значение p , что оно имеет над плоской поверхностью в сосуде. Тогда пары, испаряющиеся с вогнутой поверхности в капилляре, расположенной на отрезок h выше уровня жидкости в сосуде, окажутся под большим давлением, чем окружающие их пары, так как последние из-за убывания давления с высотой будут иметь давление $p' < p$. Возникшие более плотные пары, расширяясь, могут совершить работу; эта работа окажется совершенной за счет одного источника тепла с температурой T , без наличия холодильника, что невозможно в силу второго начала термодинамики. Таким образом, мы должны признать, что давление насыщенных паров над вогнутой поверхностью жидкости равно давлению p' окружающих паров, так как только при этом давлении наступит равновесие между паром и жидкостью в капилляре.

Значение p' можно было бы определить, пользуясь барометрической формулой, но вследствие малого значения высоты h можно приближенно положить, что разность $p - p'$ равна давлению однородного столба паров высотой h и плотностью ρ_0 , где ρ_0 — плотность насыщенных паров данной жидкости при температуре T , откуда

$$p - p' = hg\rho_0.$$

Подставив сюда значение h по (1), найдем

$$p - p' = \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_0}{\rho},$$

откуда

$$p' = p - \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2)$$

Как видно из формулы (2), $p' < p$, т. е. *давление насыщенных паров над вогнутой поверхностью меньше, чем над плоской*. Чем меньше радиус кривизны поверхности r , тем сильнее отличается p' от давления насыщенных паров p над плоской поверхностью.

Рассматривая случай несмачивания жидкостью капилляра трубки, мы получим в капилляре выпуклый мениск жидкости и более низкое расположение уровня жидкости, чем в окружающем сосуда. Отсюда с помощью рассуждений, вполне аналогичных приведенным, мы придем к выводу, что *давление насыщенных паров p'' над выпуклой поверхностью больше, чем над плоской*. Давление p'' окажется равным:

$$p'' = p + \frac{2\alpha}{r} \cdot \rho_0. \quad (2a)$$

Из последнего результата вытекает, что давление насыщенных паров над сферическими каплями больше, чем над плоской поверхностью жидкости, и тем больше, чем меньше радиус капель. Капли разных радиусов, окруженные паром, не могут быть в равновесии. Меньшие капли будут испаряться, а на больших каплях пары начнут конденсироваться, пока меньшие капли не исчезнут вовсе.

Сравним теперь давление насыщенных паров над раствором с давлением паров над чистым растворителем.

Еще в конце прошлого столетия Раулем на основании многочисленных измерений, преимущественно с органическими веществами, было показано, что давление насыщенных паров p' растворителя над раствором нелетучего вещества ниже, чем давление насыщенных паров p над чистым растворителем при той же температуре. Например, давление насыщенных паров воды над водным раствором сахара ниже, чем давление насыщенных паров воды над чистой водой при той же температуре. Обозначим через v' число молей вещества, растворенного в v молях чистого растворителя; тогда по закону, установленному Раулем, относительное понижение давления насыщенных паров $\frac{p-p'}{p}$ равно

$$\frac{p-p'}{p} = \frac{v'}{v+v'}. \quad (3)$$

Закон Рауля может быть выведен путем рассмотрения следующего кругового процесса:

1) испаряем в сосуде А (рис. 219) один моль чистого растворителя при давлении насыщенных паров p . Объем возникших насыщенных паров обозначим через V_0 ;

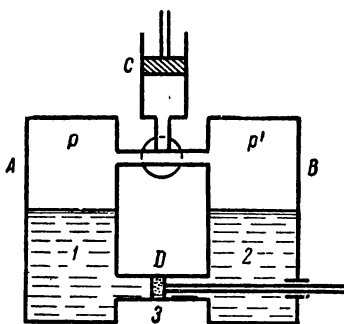


Рис. 219. К выводу выражения для понижения упругости насыщенных паров над раствором.

2) расширяем с помощью насоса C эти пары до такого объема V'_0 , чтобы они приняли давление p' , соответствующее давлению насыщенных паров над раствором;

3) конденсируем в сосуде B один моль паров, находящихся при давлении p' , в раствор.

Все три процесса производим изотермически при одной и той же температуре T ;

4) переводим с помощью полупроницаемого поршня один моль растворителя из раствора обратно в чистый растворитель.

Сумма работ, совершенных при этом круговом процессе, должна равняться нулю; в противном случае снова было бы нарушено второе начало термодинамики, так как весь процесс осуществляется с одним резервуаром тепла с температурой T .

Легко проверить, что работы, совершенные при проведении процессов 1) и 3), равны по величине и обратны по знаку, так что при составлении суммы работ для всего кругового процесса они выпадают.

Работа расширения пара с помощью насоса C равна (см. § 71)

$$A_1 = RT \ln \frac{p'}{p}.$$

Определим еще работу перевода одного моля растворителя из раствора в сосуд с чистым растворителем. Для этого надо передвинуть полупроницаемый поршень D на такой отрезок, чтобы объем растворителя ΔV прошел сквозь поршень. Так как при этом поршень будет продвигаться против осмотического давления P , то будет совершена работа

$$A_2 = P \cdot \Delta V.$$

Объем ΔV представляет собою объем одного моля чистого растворителя, откуда $\Delta V = \frac{\mu}{\rho}$, где μ — молекулярный вес растворителя, а ρ — его плотность, отсюда

$$A_2 = P \frac{\mu}{\rho}.$$

Требование $A_1 + A_2 = 0$ дает:

$$P \cdot \frac{\mu}{\rho} = -RT \ln \frac{p'}{p},$$

откуда получаем для осмотического давления P

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \ln \frac{p}{p'}. \quad (4)$$

Последнее выражение можно преобразовать. Перепишем выражение $\ln \frac{p}{p'}$ следующим образом:

$$\ln \frac{p}{p'} = \ln \left(1 + \frac{p - p'}{p'} \right);$$

так как изменение давления $p - p'$ мало, то $\frac{p - p'}{p'}$ много меньше единицы, откуда приближенно:

$$\ln \left(1 + \frac{p - p'}{p'} \right) \approx \frac{p - p'}{p'}.$$

Воспользовавшись этим приближенным выражением, перепишем формулу (4):

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \frac{p - p'}{p'}. \quad (5)$$

Эта формула позволяет вычислять значение осмотического давления по понижению давления насыщенных паров над раствором вместо того, чтобы его измерять, пользуясь полупроницаемыми перепонками, как это описано в § 85.

По формуле Менделеева — Клапейрона осмотическое давление P равно

$$P = \frac{m'}{\mu'} \frac{RT}{V}.$$

Здесь m' — масса растворенного вещества, а μ' — его молекулярный вес, следовательно, m'/μ' равно числу молей растворенного вещества, т. е. равно ν' . Отсюда получаем

$$P = \nu' \frac{RT}{V}.$$

С другой стороны, $\frac{\rho}{\mu} = \frac{m}{\mu V}$, где m — масса растворителя и μ — его молекулярный вес, откуда

$$\frac{\rho}{\mu} = \nu \frac{1}{V},$$

где ν — число молей растворителя. Подставив эти значения P и ρ/μ в (5), получим:

$$\frac{p - p'}{p'} = \frac{\nu'}{\nu}, \quad \text{откуда} \quad \frac{p - p'}{p} = \frac{\nu'}{\nu + \nu'},$$

что и представляет собою закон Рауля (3).

ГЛАВА X

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

§ 87. **Кристаллические и аморфные тела.** Твердые тела разделяются на два типа, весьма существенно отличающихся друг от друга по своим физическим свойствам, а именно на тела: 1) *кристаллические* и 2) *аморфные*.

Основным признаком кристаллического состояния вещества является наличие *анизотропии*, которая заключается в том, что *однородное тело в различных направлениях обладает различными свойствами*. Например, коэффициент теплового расширения кристаллического тела различен в различных направлениях; в различных направлениях различны механические, оптические и электрические свойства кристаллов. Наиболее характерным внешним признаком кристалла является его правильная геометрическая форма. Общеизвестны правильные геометрические узоры, образуемые кристаллами льда при замерзании воды на поверхности оконных стекол, и правильные формы отдельных снежинок. Кристаллы ограничены плоскими гранями, сходящимися в ребрах и вершинах. Обычно грани располагаются симметрично относительно друг друга. Кварц, например, образует кристаллы, представляющие собою шестигранные призмы, заканчивающиеся шестигранными пирамидами (рис. 220); квасцы кристаллизуются в октаэдры (рис. 221), каменная соль — в кубы и т. д. Углы между гранями в различных образцах одного и того же кристаллического вещества являются строго постоянными. Например, в кристаллах кварца угол между гранями призмы и пирамиды всегда равен $38^{\circ}13'$.

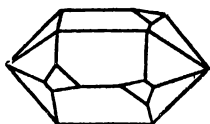


Рис. 220. Кристалл кварца.

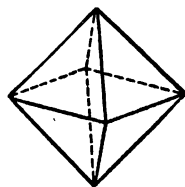


Рис. 221. Кристалл квасцов.

Аморфные же твердые тела *изотропны*, т. е. они *обладают во всех направлениях одинаковыми свойствами*.

Кристаллы имеют определенным образом ориентированные плоскости, по которым многие из них особенно легко раскалываются. Например, кристаллы каменной соли раскалываются по взаимно

перпендикулярным плоскостям, так что отдельные кусочки каменной соли после раскалывания имеют форму параллелепипедов; слюда легко раскалывается на тонкие пластинки. Аморфные же тела всегда дают неправильные поверхности излома; кусок стекла при раскалывании образует отдельные кусочки совершенно неправильной случайной формы.

Различно поведение кристаллических и аморфных тел при плавлении, т. е. при переходе из твердого в жидкое состояние. Каждое данное кристаллическое тело имеет вполне определенную точку плавления. На рис. 222 кривая *A* дает ход изменения температуры со временем при плавлении кристаллического тела при равномерном нагревании. Часть кривой *bc* относится к нагреванию кристалла в твердом состоянии. При достижении температуры плавления $T_{пл}$ дальнейшее нагревание тела прекращается, как вся подводимая теплота идет на переход тела из твердого состояния в жидкое (*теплота плавления*). Точка *d* относится к тому моменту, когда тело целиком перешло в жидкое состояние. Дальнейшая восходящая часть кривой относится к нагреванию жидкости. Пример такого хода плавления дает лед: температура льда при таянии остается неизменно равной 0°C , пока весь лед не превратится в воду. Аморфное тело дает на кривой, изображающей ход температуры со временем (кривая *B* рис. 222), лишь перегиб, относящийся к интервалу размягчения; тело непрерывно переходит из твердого в жидкое состояние. Это обстоятельство сближает, вообще, аморфное твердое тело с жидкостью, обладающей очень большой вязкостью.

Образцами аморфных тел могут служить стекло, различные стеклообразные вещества, смолы, битумы и т. д.

Стеклообразное состояние иногда возникает при охлаждении предвременно расплавленного кристаллического вещества. При медленном остывании температура может стать ниже температуры плавления без того, чтобы выделилась скрытая теплота плавления и вещество перешло в кристаллическую фазу. При этом, однако, вязкость настолько возрастает, что вещество перестает быть жидким в обычном смысле слова и становится стеклообразным. Такое вещество называется *переохлажденной жидкостью*. Переохлажденная жидкость неустойчива: со временем в ней происходит процесс кристаллизации.

В последнее время особое внимание к себе привлекают аморфные вещества, состоящие из органических соединений, образующих так

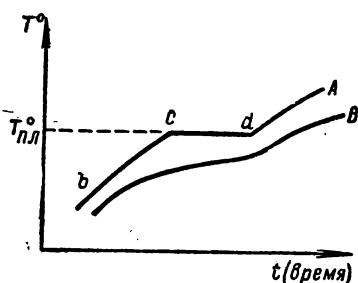


Рис. 222. Кривые хода температуры со временем при плавлении кристаллического твердого тела (*A*) и аморфного твердого тела (*B*).

называемые *полимеры*. В них молекулы более простого соединения (мономера) объединены в группы. Например, мономер C_2H_4O (паральдегид) дает полимер (ацетальдегид), каждая молекула которого состоит из трех молекул паральдегида $(C_2H_4O)_3$. Возможны весьма высокие степени полимеризации, когда в одну группу, обычно нитеобразную, объединяются до нескольких тысяч молекул мономера. Соответствующее твердое аморфное тело представляет собою клубок таких нитеобразных молекул. Примером могут служить натуральный и искусственный каучуки и другие пластмассы.

На первый взгляд может показаться, что число кристаллических твердых тел невелико. Однако на самом деле кристаллической структурой обладают не только те тела, которые обнаруживают непосредственно наблюдаемую внешнюю симметрию формы и анизотропию. Внешне и непосредственно кристаллическая структура заметна только у одиночных крупных кристаллов, какими являются природные кристаллы кварца (горного хрусталя), куски каменной соли и т. д. Такие одиночные кристаллы носят название *монокристаллов*. Большинство же твердых тел обладает *мелкокристаллической структурой*, или, как говорят, *поликристаллической структурой*. Порошки солей представляют собой собрание отдельных микроскопических кристалликов. Из раствора какой-либо соли может быть искусственно выращен большой монокристалл этой соли.

Все *металлы также обладают поликристаллической структурой*. Отдельные кристаллики металла удерживаются друг около друга молекулярными силами, так что весь агрегат таких мелких кристалликов образует кусок металла, представляющий при непосредственном рассматривании сплошным. Благодаря беспорядочной ориентации отдельных кристалликов, кусок металла в целом не обнаруживает анизотропии, хотя отдельные образующие его кристаллики анизотропны.

Поликристаллическая структура металлов может быть обнаружена при рассматривании полированной поверхности металла; иногда кристаллы настолько крупны, что могут быть замечены простым глазом, иногда их можно обнаружить лишь с помощью микроскопа.

В последнее время разработаны методы получения монокристаллов различных металлов. По большей части монокристаллы получают при охлаждении расплавленного вещества. При охлаждении в расплавленной массе обычно образуется несколько центров кристаллизации (ядер); возникающие в этих центрах кристаллики затем разрастаются в разных направлениях с разными скоростями и ведут к образованию поликристаллической структуры. Для получения монокристалла надо создать такие условия, чтобы разрасталось только одно ядро. Путем внесения в расплавленное вещество „затравки“ (отдельного кристаллика) и очень медленного охлаждения сосуда с нижнего конца можно получить металлические монокристаллы значительных размеров (например, в виде стержней длиной в 20 см и более).

В наиболее общем виде симметрия кристаллов была рассмотрена Е. С. Федоровым, который показал, что существуют 230 различных способов расположения частиц в кристаллах. Кроме того, Федоров, установив связь между симметрией и химическим составом кристаллов, дал метод кристаллохимического анализа.

Внешняя симметрия кристалла является результатом симметричного расположения частиц, из которых он построен. Эта идея была высказана еще в конце XVIII в. В настоящее время мы имеем непосредственное доказательство того, что атомы в кристаллах расположены симметрично друг относительно друга, *образуя пространственную решетку*. Это доказательство основано на возможности получить от кристаллической решетки дифракцию рентгеновых лучей (см. т. III).

Каждый атом, образующий твердое тело, находится под влиянием сил взаимодействия со стороны всех соседних атомов. При расположении атомов по углам определенной пространственной решетки силы, действующие на каждый из атомов, компенсируют друг друга, и атом находится в равновесии. Такому расположению атомов соответствует минимум их взаимной потенциальной энергии, что обуславливает прочность всего кристалла в целом.

Таким образом, кристалл представляет собою сложное архитектурное построение, прочность которого обусловлена его внутренней симметрией.

Силы взаимодействия между атомами, образующими кристалл, носят различный характер. В кристаллах солей атомы несут электрические заряды, они представляют собою ионы. Положительные и отрицательные ионы чередуются так, что кристалл в целом нейтрален. В такой *ионной решетке*, носящей также название *гетерополярной*, силы взаимодействия между частицами являются в основном электростатическими.

На рис. 223 представлена кубическая решетка каменной соли (NaCl); такая решетка является простейшей и принадлежит к кубической системе. Атомы натрия изображены черными кружками, они несут положительный электрический заряд, т. е. являются положительными ионами. Атомы хлора изображены белыми кружками, они несут отрицательный заряд, т. е. являются отрицательными ионами.

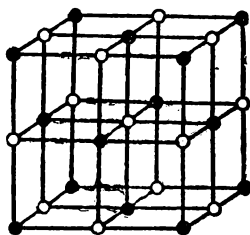


Рис. 223. Кубическая решетка каменной соли.

На рис. 224 представлена пространственная решетка цинковой обманки (ZnS). Черные кружки изображают положительные ионы Zn, белые кружки — отрицательные ионы S. Решетка цинковой обманки обладает несколько более сложной структурой, чем решетка каменной соли.

В случае химически простых твердых тел, атомы, образующие пространственную решетку, все нейтральны. Решетка такого кристалла носит название *атомной* или *гомополярной*.

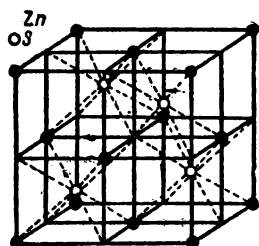


Рис. 224. Пространственная решетка цинковой обманки.

Природа сил взаимодействия в атомной решетке может быть полностью объяснена лишь на основе квантовой механики.

На рис. 225 изображено расположение атомов в кристаллической решетке алмаза.

Кроме ионных решеток (типа NaCl) и атомных (типа алмаза), принято рассматривать еще молекулярные решетки и решетки металлов; первые относятся, преимущественно, к кристаллам многоатомных химических соединений, например, P_2O_5 , SO_2 и т. д.; вторые характерны для металлов

с их большой электропроводностью и металлическим блеском. Кристаллы металлов, грубо говоря, можно представить в виде электронного облака, в котором на определенных расстояниях друг от друга расположены положительные ионы.

Наличие устойчивого равновесия кристаллической решетки указывает на то, что между частицами, образующими кристалл, при сжатии возникают силы отталкивания, а при растягивании — силы притяжения. Это может быть объяснено, если положить, что между частицами одновременно существуют силы притяжения и силы отталкивания, поразному зависящие от расстояния r между частицами. В положении равновесия эти силы численно равны друг другу. При уменьшении расстояния r между соседними частицами начинает превалировать сила отталкивания, а при возрастании этого расстояния превалирует сила притяжения.

§ 88. Энергия кристаллической решетки. Потенциальная энергия кристаллической решетки E_p может быть представлена в виде (§ 61):

$$E_p = -\frac{C'}{r^{k_1}} + \frac{C''}{r^{k_2}}, \quad (1)$$

где первый член этой формулы $-\frac{C'}{r^{k_1}}$ соответствует силам притяжения, второй $+\frac{C''}{r^{k_2}}$ — силам отталкивания. На рис. 226 представлен

ход этих членов в отдельности и ход суммарной кривой, изображающей потенциальную энергию E_p в зависимости от расстояния r между соседними частицами решетки. При $k_2 > k_1$ силы отталкивания возрастают при убывании r быстрее, чем силы притяжения, что

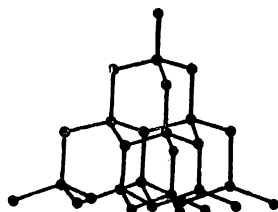


Рис. 225. Пространственная решетка алмаза.

объясняет противодействие кристалла сжатию. Значению $r=r_0$ соответствует наиболее глубокое место потенциальной ямы; величина r_0 определяет расстояние между частицами в кристалле, не подверженном действию внешних сил. Вблизи

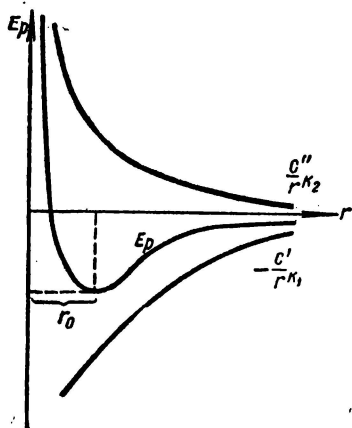


Рис. 226. Зависимость потенциальной энергии E_p кристаллической ионной решетки от расстояния r между ионами.

положения равновесия каждая частица может совершать небольшие колебания, не выходя за пределы потенциальной ямы. К таким колебаниям частиц около положения равновесия сводится тепловое движение в кристаллах.

Теория кристаллических решеток была развита Борном и рядом других физиков. Борн показал, что, зная показатели степени k_1 и k_2 в формуле (1), можно рассчитать упругие свойства кристаллов, энергию образования кристалла, его оптические свойства и т. д. Для получения согласия с опытом для гетерополярных решеток надо положить $k_1=1$ и $k_2=9$; для гомеополярных решеток k_2 имеет большие значения.

Расчет энергии простейшей кубической кристаллической решетки типа NaCl схематически может быть представлен в следующем виде.

Потенциальная энергия двух изолированных ионов с зарядами $-e$ и $+e$, находящихся на расстоянии r_0 друг от друга, равна

$$E_p = -\frac{e^2}{r_0}. \quad (2)$$

Потенциальная энергия двух соседних ионов внутри решетки будет больше этой величины по двум причинам: 1) на каждый ион действует не только его ближайший сосед, но и все другие ионы решетки; 2) ионы, воздействуя друг на друга, вызывают взаимную поляризацию, которая обуславливает появление сил отталкивания [второй член в формуле (1)].

Вычисления показывают, что для кристалла типа NaCl формула (2) должна быть заменена следующей:

$$E_p = -0,2582 \frac{e^2}{r_0}. \quad (2a)$$

Потенциальная энергия, выражаемая формулой (2a), численно равна работе, которую надо совершить, чтобы, вырвав два соседних иона из решетки, удалить их в бесконечность, другими словами, она равна работе разрыва связи между двумя соседними ионами в решетке. В одном моле вещества решетки находится N пар ионов,

и каждый ион в кубической решетке имеет 6 соседних ионов; таким образом, чтобы развести все ионы, входящие в состав одного моля, на бесконечно большие расстояния друг от друга, надо разорвать $6N$ связей.

Отсюда полная потенциальная энергия решетки E_p , отнесенная к одному молю, равна $6NE'_p$, т. е.:

$$E_p = -0,2582 \frac{e^2}{r_0} \cdot 6N. \quad (3)$$

Расстояние r_0 между соседними ионами в кубической решетке определим следующим образом: если ρ — плотность рассматриваемого кристалла, μ — молекулярный вес и V_0 — объем одного моля, то

$$V_0 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Объем же $v = r_0^3$, приходящийся на одну элементарную кубическую ячейку, получим, поделив V_0 на число ячеек в одном моле, которое совпадает с числом ионов в одном моле, т. е. на $2N$,

$$r_0^3 = \frac{V_0}{2N} = \frac{\mu}{2\rho N}, \text{ откуда } r_0 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N}}. \quad (4)$$

Подставив это значение в формулу (3) для потенциальной энергии, найдем

$$E_p = -0,2582 \cdot 6 \cdot e^2 \sqrt[3]{\frac{2\rho N^4}{\mu}}. \quad (5)$$

Так как e и N представляют собой константы, то последнее выражение можно представить в виде:

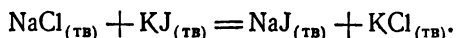
$$E_p = -K \sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (5a)$$

Если ρ выражать в $г/см^3$, μ — в граммах на моль и E_p — в калориях на моль, то K имеет численное значение, равное 545.

Для кристаллических решеток типа CsCl или CaF_2 получаются формулы, аналогичные (5a), лишь с другим численным значением константы K .

Непосредственная экспериментальная проверка расчетов Борна затруднительна, так как мы не имеем возможности перевести твердый кристалл в собрание свободных ионов. Косвенно же правильность расчетов может быть подтверждена несколькими способами.

Рассмотрим, например, реакцию превращения солей NaCl и KJ в соли KCl и NaJ:



Здесь индексы (тв) означают, что химические символы относятся к твердой кристаллической фазе соответствующих веществ. Очевидно,

энергия превращения ΔU будет равна

$$\Delta U = -[E_p(\text{NaCl}) + E_p(\text{KJ})] + [E_p(\text{NaJ}) + E_p(\text{KCl})]$$

и, следовательно, может быть вычислена по формуле (5а) через потенциальные энергии $E_p(\text{NaCl})$, $E_p(\text{KJ})$ и т. д. кристаллических решеток NaCl, KJ и т. д. С другой стороны, в первом приближении, энергия превращения ΔU равна разности теплот растворения солей q при условии, что растворы берутся настолько слабыми, чтобы диссоциация в них могла считаться полной:

$$\Delta U = \sum q = [q(\text{NaCl}) + q(\text{KJ})] - [q(\text{NaJ}) + q(\text{KCl})].$$

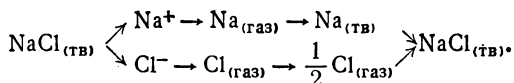
В табл. XII сопоставлены для ряда солей вычисленные значения ΔU и $\sum q$, найденные через теплоты растворения.

Т а б л и ц а XII

| Реакция | ΔU | $\sum q$ |
|---|------------|----------|
| $\text{KCl} + \text{LiBr} = \text{KBr} + \text{LiCl}$ | + 4 | + 3,6 |
| $\text{KCl} + \text{LiJ} = \text{KJ} + \text{LiCl}$ | + 7 | + 7,2 |
| $\text{KCl} + \text{NaBr} = \text{KBr} + \text{NaCl}$ | + 3 | + 2,0 |
| $\text{KCl} + \text{NaJ} = \text{KJ} + \text{NaCl}$ | + 5 | + 3,4 |

Если принять во внимание, что $\sum q$ экспериментально определяется с небольшой точностью (малая разность относительно больших величин), то совпадение между $\sum q$ и ΔU надо считать хорошим.

Второй способ проверки сводится к рассмотрению так называемого кругового процесса Борна — Габера. Этот процесс для случая NaCl представляется схемой:



Сперва мы представляем себе, что один моль твердого кристаллического NaCl разъединяется на совокупность свободных ионов Na^+ и Cl^- ; на это тратится работа, численно равная потенциальной энергии решетки E_p . Затем ионные газы Na^+ и Cl^- превращаются в нейтральные атомные газы $\text{Na}_{(\text{газ})}$ и $\text{Cl}_{(\text{газ})}$. На это тратятся работы, численно равные работам ионизации $A_i(\text{Na})$ и $A_i(\text{Cl})$, отнесенным к одному молю. Далее, газ $\text{Na}_{(\text{газ})}$ превращается в твердый металлический натрий [тратится работа, равная теплоте испарения $L(\text{Na})$] и атомный газ $\text{Cl}_{(\text{газ})}$ — в половину моля обыкновенного двуатомного газообразного хлора Cl_2 [тратится работа, равная теплоте диссоциации $\frac{1}{2} q(\text{Cl})$].

Наконец, из твердого металлического натрия и газообразного хлора путем химической реакции снова получается один моль твердого кристаллического NaCl; при этом выделяется теплота образования $Q(\text{NaCl})$. При круговом про-

цессе сумма всех работ и всех полученных и отданных количеств теплоты (учтенных здесь эквивалентными работами) равна нулю. Поэтому получаем:

$$-E_p = A_f(\text{Na}) + A_f(\text{Cl}) + L(\text{Na}) + \frac{1}{2}q(\text{Cl}) + Q(\text{NaCl}).$$

Если измерить каждую из величин, стоящих в правой части этого равенства, то можно найти значение E_p . На самом деле, непосредственному экспериментальному определению доступны все указанные величины, кроме работы образования отрицательного иона Cl^- . По косвенным соображениям можно считать $A_f(\text{Cl})$ равной приблизительно -90 кал/моль . Тогда, воспользовавшись эмпирическими значениями $A_f(\text{Na}) = 117 \text{ кал}$, $L(\text{Na}) = 27 \text{ кал}$, $1/2q(\text{Cl}) = 29 \text{ кал}$, $Q(\text{NaCl}) = 98 \text{ кал}$, найдем, что энергия решетки NaCl есть величина порядка -180 кал/моль . Формула (5а), если в нее поставить массу моля каменной соли $\mu = 58,5 \text{ г/моль}$ и ее плотность $\rho = 2,16 \text{ г/см}^3$, дает $E_p = -182 \text{ кал/моль}$.

Следует иметь в виду, что более точная теория кристаллических решеток, особенно желающая представить их поведение при низких температурах, должна базироваться на квантовой механике.

§ 89. Деформации твердых тел. Под влиянием внешних сил всякое твердое тело *деформируется*, т. е. изменяет свою форму. *Упругой* называется деформация, исчезающая с прекращением действия силы. Так, упруго растянутая пружина принимает свою прежнюю длину после прекращения действия растягивающей силы. С изменением знака силы меняется и знак упругой деформации, например, если под влиянием растягивающей силы пружина удлиняется, то

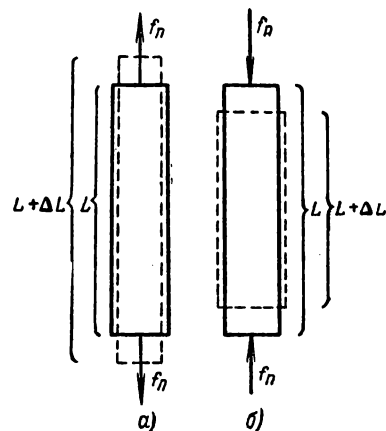
под влиянием сжимающей силы она укорачивается. По закону, установленному Гуком, величина деформации Δx пропорциональна действующей силе f :

$$\Delta x = Kf, \quad (1)$$

где K — постоянная величина для данной деформации данного твердого тела.

Рассмотрим простейшую деформацию *продольного растяжения* или *одностороннего сжатия*.¹ Представим себе однородный стержень длины L с площадью поперечного сечения S , к концам которого приложены силы f_n , в результате чего длина стержня меняется на величину ΔL .

Рис. 227. Деформация растяжения (а) и сжатия (б).



Растягивающие силы считаем положительными; в этом случае (рис. 227 а) ΔL тоже положительно, т. е. стержень удлинится.

¹ Различают одностороннее сжатие от *всестороннего*, при котором тело подвергается сжатию одновременно со всех сторон. В дальнейшем мы будем рассматривать только одностороннее сжатие.

Сжимающие силы считаем отрицательными; в этом случае (рис. 227 б) ΔL тоже отрицательно; это означает, что, когда стержень подвергается одностороннему сжатию, длина его L уменьшается.

Для характеристики деформации существенно не абсолютное значение удлинения стержня ΔL , но относительное удлинение $\Delta L/L$. Это следует из того, что очевидным образом не одинаково просто растянуть, например, на $\Delta L = 1$ см два стержня из одинакового материала и одинакового поперечного сечения, но один из которых имеет длину L всего в 2 см, а другой — в 10 м. Для растягивания же таких стержней на одну и ту же долю их первоначальной длины (например, на $\frac{1}{1000}$) придется приложить одинаковые силы f . Таким образом, деформацию следует характеризовать *относительным изменением* длины $\Delta L/L$.

Для стержней разного поперечного сечения S под влиянием одной и той же силы относительная деформация $\Delta L/L$ тем меньше, чем толще стержень, т. е. чем больше S . Отсюда для упругой деформации растяжения (сжатия) получаем, что относительное изменение длины $\Delta L/L$ должно быть пропорционально величине f_n/S , т. е. силе, отнесенной к единице поперечного сечения стержня.

Эту величину $\frac{f_n}{S} = p_n$ назовём *усилием*.

Тогда окончательно имеем

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{f_n}{S}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta L}{L} = \alpha p_n, \quad (2)$$

где коэффициент α , носящий название *коэффициента упругости*, зависит уже только от материала, из которого сделан стержень.

Наряду с коэффициентом упругости α принято характеризовать материал обратной величиной:

$$E = \frac{1}{\alpha}, \quad (3)$$

которую называют *модулем упругости* или *модулем Юнга*. Подставляя в (2) вместо α модуль Юнга E , получим

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} p_n. \quad (2a)$$

Из формул (2) и (2a) имеем

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{p_n}, \quad E = \frac{p_n}{\Delta L/L}, \quad (4)$$

откуда следует: коэффициент упругости α численно равен относительному изменению длины $\Delta L/L$, происходящему под влиянием усилия, равного единице; модуль Юнга E численно равен усилию p_n , вызывающему относительное изменение длины, равное единице.

При относительном удлинении, равном единице, $\Delta L = L$, откуда получаем: модуль Юнга E численно равен тому усилию p_n , которое

растягивает стержень вдвое. На самом деле подавляющее число материалов рвется раньше, чем они будут растянуты вдвое, поэтому обычно фактически нельзя приложить к стержню усилие p_n , численно равное модулю Юнга E .

Предположим, что к стержню первоначальной длины L_0 приложено усилие p_n , тогда новая длина стержня будет:

$$L = L_0 + \Delta L.$$

Так как, по формуле (2):

$$\Delta L = \alpha L_0 p_n,$$

то новая длина стержня L равна

$$L = L_0 (1 + \alpha p_n). \quad (5)$$

Из этой формулы видно, что в пределах упругой деформации длина стержня меняется линейно с усилием p_n . При растяжении или сжатии стержня внешние силы совершают работу. По формуле (2а) мы имеем, что сила, приложенная к стержню в каждый данный момент, равна

$$f_n = \frac{ES}{L} \cdot \Delta L,$$

т. е. сила не остается во время деформации постоянной, но меняется пропорционально изменению длины стержня ΔL . В § 25 мы определяли работу такой переменной силы. Вычислим ее здесь еще раз иным способом. Пусть длина стержня меняется от значения L до $L + \Delta L$, тогда работа A равна

$$A = \bar{f}_n \cdot \Delta L,$$

где \bar{f}_n представляет собою среднее значение силы. Ввиду линейности возрастания силы f_n с удлинением ΔL , это среднее значение силы равно среднему арифметическому из значений силы $f_n = 0$ (при $\Delta L = 0$) и $f_n = \frac{ES}{L} \cdot \Delta L$ (при данном ΔL), т. е.

$$\bar{f}_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{L} \cdot \Delta L, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{L} \cdot \Delta L^2.$$

Эта работа пойдет на создание *потенциальной энергии упруго деформированного стержня*:

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{L} \right) \cdot \Delta L^2. \quad (6)$$

Таким образом, потенциальная энергия упруго деформированного стержня оказывается *пропорциональной квадрату деформации ΔL^2* .

Деформация продольного растяжения или сжатия сопровождается изменением поперечных размеров деформируемого стержня.

При продольном растяжении стержень дает поперечное сжатие, при продольном сжатии — поперечное расширение. Относительное изменение толщины стержня $\Delta d/d$ пропорционально действующему усилию p_n :

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta p_n. \quad (7)$$

Коэффициент β называется *коэффициентом поперечного сжатия при продольном растяжении*.

Отношение

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$$

называется *коэффициентом Пуассона*. Пользуясь выражением для коэффициента Пуассона, мы можем переписать формулу (7) в виде:

$$\frac{\Delta d}{d} = \alpha \sigma p_n. \quad (7a)$$

Для большинства однородных изотропных тел (и металлов) коэффициент Пуассона σ близок по численному значению к $1/4$.

Рассмотрим еще одну простую деформацию, называемую *деформацией сдвига*.

Деформация сдвига происходит под влиянием силы f_t , касательной к той поверхности, на которую она действует (рис. 228). Под влиянием такой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга, и каждая физическая прямая (т. е. линия, связанная с определенными частицами твердого тела) ab , перпендикулярная к поверхности, к которой приложена сила, поворачивается на некоторый угол ψ .

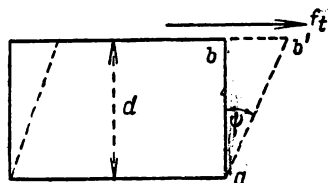


Рис. 228. Деформация сдвига.

При малом значении угла сдвига ψ приближенно имеем

$$\psi = \frac{bb'}{d},$$

где $d=ab$ есть толщина тела, а bb' — абсолютная величина сдвига верхнего слоя относительно нижнего. Отсюда видно, что угол сдвига ψ характеризует *относительный сдвиг*, поэтому в пределах выполнимости закона Гука получим соотношение:

$$\psi = n \frac{f_t}{S}, \quad (8)$$

где n — постоянная величина, зависящая только от материала, из которого изготовлен брусок, называемая *коэффициентом сдвига*; S — площадь поверхности, к которой приложена сила f_t .

Вводя усилие $p_t = \frac{f_t}{S}$, перепишем формулу (8):

$$\psi = n \cdot p_t. \quad (8a)$$

Величина, обратная n ,

$$N = \frac{1}{n},$$

называется *модулем сдвига*. Вводя в формулу (8a) вместо коэффициента сдвига n *модуль сдвига* N , получим

$$\psi = \frac{1}{N} \cdot p_t. \quad (9)$$

Для большинства однородных изотропных тел модуль сдвига N по численному значению равен приблизительно 0,4 от численного значения модуля Юнга E .

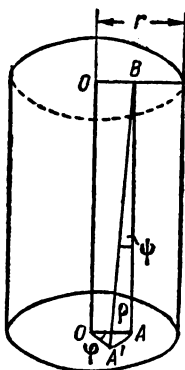


Рис. 229. Деформация кручения.

Рассмотрим еще *деформацию кручения*, которая, как мы увидим, сводится к деформации сдвига.

Возьмем стержень в виде кругового цилиндра длиной L и радиуса r (рис. 229). Пусть верхнее сечение стержня закреплено неподвижно, а к нижнему приложен момент силы M , закручивающий стержень. Введем в рассмотрение отрезок $OA = r$, отложенный вдоль одного из радиусов нижнего сечения. Под влиянием закручивающего момента отрезок OA повернется на угол φ и займет положение OA' . Относительной деформацией будет величина φ/L , т. е. угол закручивания, отнесенный к единице длины стержня. В пределах упругой деформации эта величина φ/L пропорциональна закручивающему моменту M :

$$\frac{\varphi}{L} = cM. \quad (10)$$

Величина c постоянна для данного стержня; для различных стержней она зависит от их радиусов и от свойств материалов, из которых они сделаны. Для определения c свяжем деформацию кручения с деформацией сдвига.

При закручивании стержня его нижний торец испытывает сдвиг относительно верхнего; прямая BA поворачивается, принимая положение BA' , угол ψ является углом сдвига. По формуле (9) угол сдвига ψ равен

$$\psi = \frac{1}{N} \cdot p_t, \quad (11)$$

где p_t — касательное усилие, приложенное к элементу поверхности dS , расположенному у точки A' (см. рис. 230), а N — модуль сдвига.

Из рис. 229 имеем

$$\psi = \frac{AA'}{L} = \frac{\varphi \cdot r}{L}, \quad \text{откуда по (11)} \quad p_t = N\psi = N \cdot \frac{\varphi \cdot r}{L}. \quad (12)$$

Сила, приложенная к элементу поверхности dS , равна $p_t dS$, а ее момент $dM = r p_t dS$. Вводя полярные координаты ϑ и ρ (рис. 230), получим для элемента поверхности $dS = \rho d\rho d\vartheta$, откуда

$$dM = p_t \cdot \rho^2 d\rho d\vartheta.$$

Подставляя сюда значение p_t по (12), найдем

$$dM = \frac{N\varphi}{L} \rho^3 d\rho d\vartheta.$$

Полный момент M , приложенный ко всему нижнему торцу стержня, получим, проинтегрировав выражение dM по всей площади круга радиуса r :

$$M = \frac{N\varphi}{L} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \rho^3 d\rho d\vartheta = \frac{\pi N r^4}{2} \cdot \frac{\varphi}{L},$$

откуда получаем

$$\varphi = \frac{2}{\pi N} \cdot \frac{L}{r^4} M. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с формулой (10), найдем

$$c = \frac{2}{\pi N} \cdot \frac{1}{r^4}.$$

Из формулы (13) следует: угол закручивания φ зависит от модуля сдвига N и обратно пропорционален радиусу стержня, взятому в четвертой степени.

Переписывая формулу (13) в виде:

$$M = \frac{\pi N}{2} \cdot \frac{r^4}{L} \cdot \varphi, \quad (13a)$$

имеем, что для закручивания проволоки на данный угол φ надо приложить момент M , прямо пропорциональный r^4 и обратно пропорциональный длине проволоки L .

Следовательно, момент зависит весьма сильно от радиуса. Толстые короткие стержни трудно подвергнуть закручиванию; наоборот, тонкие длинные проволоки под влиянием даже очень малых моментов обнаруживают заметное закручивание. Этим обстоятельством пользуются для создания чувствительных подвесных систем в измерительных приборах.

Например, если маленькую магнитную стрелку подвесить к длинной и тонкой проволоке, то можно определить малую пару сил, действующую со стороны внешнего магнитного поля, по углу, на который эта пара сил закрутит проволоку; угол закручивания проволоки определяется по смещению луча света, отражающегося от маленького зеркала, прикрепленного к нити. Найдем, для примера, момент пары сил, способный закрутить проволоку длиной 5 см и радиусом 0,02 мм на угол $10'$. Модуль сдвига материала проволоки будем считать равным 6000 кг/мм^2 .

Для решения воспользуемся формулой (13a):

$$M = \frac{\pi N}{2} \cdot \frac{r^4}{L} \cdot \varphi = \frac{3,14 \cdot 6000}{2} \cdot \frac{(0,02)^4}{50} \cdot 0,0029 \text{ кг мм} = 8,74 \cdot 10^{-8} \text{ кг мм}.$$

Переводя полученный ответ в Г см, найдем

$$M = 8,74 \cdot 10^{-6} \text{ Г см},$$

т. е. момент силы, равный приблизительно моменту силы в 10^{-2} мГ , приложенной к плечу в 1 см, достаточен, чтобы вызвать закручивание упомянутой проволоки на $10'$.

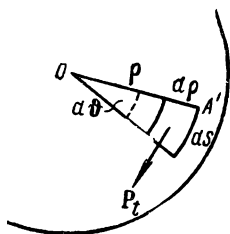


Рис. 230. К определению момента dM , приложенного к элементу поверхности dS .

Рассмотрим еще случай собственных *крутильных колебаний* тела ab с моментом инерции I , подвешенного к тонкой нити (рис. 231). Момент инерции самой нити считаем настолько малым, что им можно пренебречь.

По сказанному в § 35, угловое ускорение тела β равно

$$\beta = \frac{M}{I}, \quad (14)$$

где M — момент сил, приложенных к телу. С другой стороны, угловое ускорение β равно второй производной от угла поворота φ по времени: обозначая вторую производную по времени двумя точками, поставленными над буквой φ , получим: $\beta = \ddot{\varphi}$. Момент сил M , приложенных к телу, равен моменту, приложенному к нити, но имеет обратное направление, откуда по формуле (13а):

$$M = -D\varphi;$$

величина $D = \frac{\pi N}{2} \cdot \frac{r^4}{L}$ может быть названа модулем кручения данной нити. Подставляя полученные значения β и M в (14), найдем

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{I} \varphi.$$

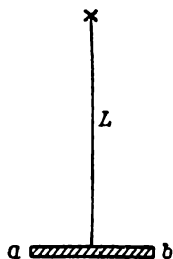


Рис. 231.
Стержень ab ,
подвешенный
к нити L .

Как будет показано в § 97, решение такого дифференциального уравнения представляет колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (15)$$

Таким образом, период крутильных колебаний тела, подвешенного к нити, всецело определяется его моментом инерции и модулем кручения нити.

Кинетическая энергия колебаний E_k равна

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

Она не остается постоянной в течение периода, но достигает максимума, когда тело проходит через положение равновесия, и становится равной нулю в моменты наибольшего поворота тела (ср. со сказанным в § 112).

Потенциальную энергию E_p определим, воспользовавшись формулой (2) § 39, по которой для поворота тела на угол φ надо совершить работу

$$A = M\varphi. \quad (16)$$

В случае закручивания нити, момент сил не постоянен, но сам зависит от угла φ , поэтому в формуле (16) надо подразумевать под M среднее значение момента $\bar{M} = \frac{1}{2} D\varphi$. Отсюда $A = \bar{M}\varphi = \frac{1}{2} D\varphi^2$. Потенциальная энергия E_p численно равна этой работе:

$$E_p = \frac{1}{2} D\varphi^2. \quad (17)$$

В моменты наибольшего поворота тела, когда его кинетическая энергия E_k равна нулю, потенциальная энергия E_p , достигая своего максимума, становится равной полной энергии E .

Таким образом:

$$E = E_{p \max} = \frac{1}{2} D\varphi_{\max}^2,$$

где φ_{\max} — наибольший угол поворота тела во время его крутильных колебаний.

§ 90. Пределы упругости и прочности. Пластические деформации. Всякое твердое тело дает деформации, подчиняющиеся *закону Гука* лишь до известного предела.

Точнее говоря, зависимость относительной деформации от усилия не является вообще линейной, но отступления от линейности невелики при малых значениях относительной деформации $\Delta x/x$ и становятся заметными при увеличении $\Delta x/x$. Графически зависимость относительной деформации $\Delta x/x$ от усилия p представлена на рис. 232 а. При больших усилиях деформация происходит легче, чем при малых. То значение усилия $p = p_{пр}$, начиная с которого отступления от линейности становятся заметными, называется *пределом пропорциональности*. Строго говоря, не существует определенного значения предела пропорциональности, так как возможность обнаружить отступления от линейной зависимости определяется точностью измерений.

При упругой деформации, после прекращения действия внешней силы, деформация полностью пропадает, т. е. тело принимает прежние размеры (прежнюю форму). Однако при значениях усилия, превышающих так называемый *предел упругости* p_e , наступает иной тип деформации, носящей название *пластической деформации*, не пропадающей полностью после прекращения действия сил. Пластическая деформация происходит легче упругой. Если при достижении некоторой точки b (рис. 232 б), лежащей в области пластической деформации, начать уменьшать усилие p до нуля, то тело не вернется в исходное состояние по линии baO ; убывание деформации изобразится пунктирной линией bd , тело сохранит *остаточную деформацию* Od . Если мы, например, подвергли тело растяжению, зайдя за предел упругости и достигнув области пластической деформации, то по прекращении действия сил тело будет иметь большую длину, чем оно имело первоначально: оно сохранит остаточную деформацию растяжения.

При все увеличивающемся усилии можно достичь разрушения стержня; соответствующее значение усилия называется *пределом прочности*. Если предел прочности близок к пределу упругости, то такое тело дает лишь незначительные остаточные деформации: оно называется *хрупким* (например, закаленная сталь). Тела, способные

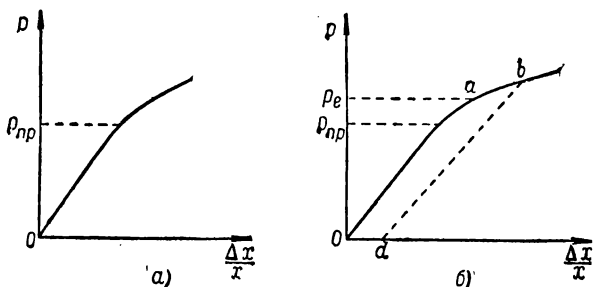


Рис. 232. Ход относительной деформации твердого тела в зависимости от величины приложенного усилия.

давать большие пластические деформации, называются „пластическими“; так, например, свинцовые или цинковые проволоки обнаруживают значительные пластические и остаточные деформации.

Для реальных твердых тел ход относительной деформации в зависимости от усилия значительно отличается от изображенного на рис. 232. Он зависит в большой мере для каждого данного материала от характера его обработки, а также от длительности действия сил. Одно и то же тело может при кратковременных силах проявлять себя как хрупкое, а при длительных, хотя бы и слабых силах, обнаруживать настолько сильные пластические деформации, что оно может быть названо текучим.

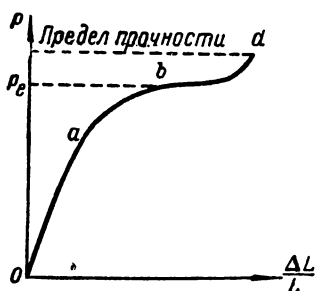


Рис. 233. Диаграмма растяжения железа.

На рис. 233 представлена диаграмма растяжения железа. Прямолинейная часть Oa соответствует выполнению закона Гука; часть ab , хотя и относится еще к упругой деформации, но дает уже отступления от закона Гука: здесь удлинение возрастает быстрее усилия. За точкой b удлинение может возрастать и без увеличения нагрузки — это область текучести. При дальнейшем увеличении усилия стержень вновь приобретает способность сопротивления растяжению: кривая загибается вверх. Точка d отвечает разрыву (предел прочности).

Приведем некоторые численные данные, характеризующие упругие свойства различных металлов.

В качестве примера рассчитаем, воспользовавшись данными табл. XIII, величину наибольших возможных упругих растяжений для проволок из приведенных в таблице материалов.

Т а б л и ц а XIII

Упругие свойства металлов

| Металл | Модуль Юнга в кг/мм^2 | Предел упругости в кг/мм^2 | Предел прочности в кг/мм^2 |
|------------------------------|-----------------------------------|--|--|
| Свинец | 1 800 | 0,25 | 2 |
| Олово | 3 000 | 0,34 | 2 |
| Медь (мягкая) | 10 000 | 3 | 20 |
| Железо (мягкое) | 19 000 | 5 | 35 |
| Углеродистая сталь | 20 000 | 33 | 75 |
| Молибденовая сталь | 22 000 | 60 | 150 |

Наибольшее возможное упругое растяжение $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\max}$ определится как растяжение, вызванное усилием, равным пределу упругости p_e .

Отсюда, по формуле (2а) § 89:

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\max} = \frac{p_e}{E},$$

где E — модуль Юнга.

Подставив сюда вместо p_e и E их численные значения, найдем:

| Материал | $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\max}$ |
|--------------------------|--|
| Олово | 0,00011 |
| Свинец | 0,00014 |
| Медь | 0,00030 |
| Железо | 0,00026 |
| Углеродистая сталь . . . | 0,00165 |
| Молибденовая сталь . . . | 0,00273 |

Таким образом, в пределах упругой деформации оловянная проволока может быть растянута лишь приблизительно на 0,01% от своей первоначальной длины, проволока же из молибденовой стали может быть растянута почти на 0,3% от своей первоначальной длины.

Реальные твердые тела обнаруживают в большей или меньшей мере сложную зависимость деформации от времени, не учитываемую ни законом Гука, ни теми упрощенными схемами, которые мы рассматривали. Вообще говоря, после начала действия силы деформация устанавливается не сразу в полной мере, после же прекращения действия силы она пропадает не целиком: часть ее остается и медленно спадает затем со временем. Схематически зависимость упругой деформации от времени представлена на рис. 234. Если в момент времени t_0 на твердое тело начинает действовать сила, то весьма быстро устанавливается начальная упругая деформация AB , затем под влиянием установившейся постоянной силы f деформация продолжает медленно возрастать со временем по кривой $BC'C$. Если в момент времени t_1 действие силы прекращается, то деформация сперва быстро спадает на величину CD , равную AB , а затем спадает медленно по кривой DEE' . Таким образом, после прекращения действия силы сохраняется *остаточная деформация* $A'D$, спадающая лишь постепенно; тело медленно восстанавливает свою форму. Это явление называется *упругим последействием*.

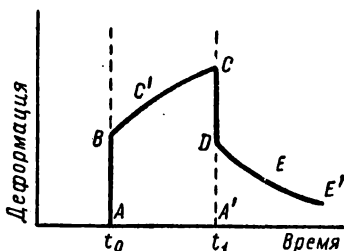


Рис. 234. Зависимость деформации от времени действия силы.

Упругое последействие легко наблюдать при растяжении резиновой трубки. Длинная резиновая трубка подвешивается вертикально. К нижнему концу на некоторое время прикрепляется груз P , который удлиняет трубку на величину ΔL . Сразу после снятия груза P резиновая трубка вновь укорачивается, однако на величину $\Delta L' < \Delta L$. Остается заметное удлинение $\delta L = \Delta L - \Delta L'$, которое затем медленно (в течение десятка минут) пропадает.

Для многих твердых тел часть деформации $BC'C$ носит необратимый, пластический характер. Такие тела ведут себя по отношению

к слабым, но длительно действующим силам, как тела жидкие, в то время как при действии больших кратковременных сил они оказываются хрупкими. Например, лед или вар текут под влиянием длительно действующих сил и легко ломаются при кратковременных, но более интенсивных воздействиях.

§ 91. Деформации с точки зрения кристаллической структуры твердых тел. Упругие деформации сжатия и растяжения в монокристаллах легко могут быть объяснены с точки зрения существования кристаллической решетки. Равновесие кристаллической решетки, как было указано в § 87, определяется взаимной компенсацией сил притяжения и отталкивания, существующих между частицами (ионами или атомами), образующими решетку. Например, в случае ионной решетки, при сжатии кристалла расстояние r_0 между соседними ионами уменьшается, силы отталкивания становятся больше сил притяжения, в результате чего появляется суммарная сила отталкивания, противодействующая внешней силе, сжимающей кристалл. Чем больше выведены ионы из положения равновесия, т. е. чем больше деформация, тем значительнее сила отталкивания. При прекращении действия внешней силы ионы возвращаются в свои положения равновесия, решетка принимает прежний вид, что означает, что деформация кристалла пропала. Точно так же при растяжении кристалла расстояние

r_0 между соседними ионами увеличивается, силы притяжения становятся больше сил отталкивания, кристалл в целом сопротивляется внешнему растягивающему усилию.

Таблица XIV

Вычисленные и наблюдаемые значения коэффициентов всестороннего сжатия γ

| Кристалл | $\gamma_{\text{набл.}} \cdot 10^{12}$ | $\gamma_{\text{выч.}} \cdot 10^{12}$ |
|----------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| NaCl | 4,1 | 3,56 |
| NaBr | 5,1 | 4,73 |
| NaJ | 6,9 | 6,30 |
| KCl | 5,0 | 5,36 |
| KBr | 6,2 | 6,64 |
| KJ | 8,6 | 8,68 |
| TiCl | 4,7 | 4,69 |
| TiBr | 5,1 | 5,36 |
| TiJ | 6,7 | 6,76 |

Теория кристаллических решеток позволяет вычислить коэффициенты всестороннего сжатия для ионных кристаллов типа NaCl. В табл. XIV приведены наблюдаемые и вычисленные значения коэффициентов всестороннего сжатия γ для ряда кристаллов.

Здесь значения γ даны в CGS-системе. Совпадение между вычисленными и наблюдаемыми значениями, как видно, очень хорошее.

При деформации сдвига происходит скашивание решетки. В случае простейшей кубической ионной решетки, каждая элементарная ячейка решетки из куба превращается в косоугольный параллелепипед, диагональ ac (рис. 235) оказывается укороченной, диагональ bd — удлиненной, в результате чего между ионами a и c возникают силы отталкивания, а между ионами b и d — силы притяжения. Решетка стремится восстановить свою прежнюю форму, что и обуславливает возникновение упругой деформации сдвига.

В случае сдвига легко объяснить также появление пластической и остаточной деформаций. Благодаря геометрически правильному расположению атомов (или ионов), в пространственной решетке кристалла существуют плоскости, вдоль которых может произойти соскальзывание частей решетки друг относительно друга настолько, что положительные ионы снова расположатся над отрицательными. Тогда взаимное расположение этих ионов окажется таким же, как и в первоначальной решетке, и не будет сил, стремящихся сместить их обратно. Этим объясняется остаточная деформация.

На первый взгляд представляется более трудным объяснить возможность остаточной деформации в монокристаллах при растяжении. На самом деле оказывается, что такие деформации сводятся также к сдвигам, т. е., в конечном счете, снова к соскальзыванию одних слоев вдоль других.

Представим себе стержень с круговым сечением, вырезанный из монокристалла так, что плоскости, вдоль которых может происходить соскальзывание, проходят косо, как указано на рис. 236а. Такой стержень в известном смысле сходен со стопой монет. При растягивании стержня в нем происходят соскальзывания по косо расположенным плоскостям, в результате чего стержень в целом делается длиннее (рис. 236б), т. е. дает остаточную деформацию растяжения. При этом, очевидно, должна изменяться форма стержня: его сечение из круглого должно стать эллиптическим. Опыты, произведенные над растяжением монокристаллических палочек цинка, показали, что при образовании остаточной деформации круглое сечение принимает овальную вытянутую форму.

Поверхность таких цинковых палочек, первоначально гладкая, после растяжения делается шероховатой.

Все это подтверждает точку зрения, что остаточная деформация растяжения обусловлена соскальзыванием частей кристалла вдоль определенных плоскостей.

Теория кристаллических решеток позволяет вычислить прочность кристаллов. Однако вычисленные значения предела прочности для

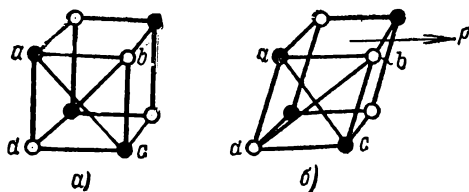


Рис. 235. Сжатие кристаллической решетки при деформации сдвига.

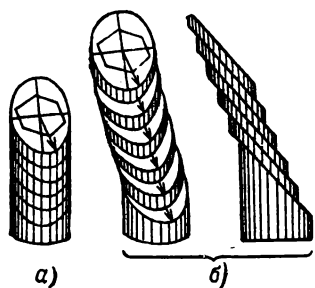


Рис. 236. Сдвиг по плоскостям спайности при растяжении стержня, вырезанного из монокристалла.

монокристаллов оказываются гораздо выше фактически наблюдаемых. Так, теоретический предел прочности для кристаллов каменной соли имеет значение, близкое к 200 кг/мм^2 . Это значит, что следовало бы приложить силу в 200 кг к стержню из каменной соли с поперечным сечением в 1 мм^2 , чтобы его разорвать. На самом деле стержни, вырезанные из монокристалла каменной соли, разрываются при нагрузке не более $\frac{1}{2} \text{ кг/мм}^2$; таким образом, экспериментальные данные оказываются в четыреста раз меньше теоретически вычисленного значения. Это огромное расхождение объясняется, однако, не неправильностью теории кристаллической решетки, но тем, что расчеты относятся к идеальному кристаллу, представляющему собой совершенно правильную однородную решетку; всякий же реальный кристалл обладает большим числом дефектов: в нем существуют места, где нарушается правильная структура решетки; особую роль играет также поверхность, где условия иные, чем внутри кристалла. Большую роль должны играть трещины на поверхности кристалла: достаточно на поверхности появиться микроскопической трещинке, чтобы на грани трещинки получилось перенапряжение, в результате которого трещинка начинает идти дальше и ведет к разрыву всего кристалла. Чтобы исключить роль поверхностных трещинок, А. Ф. Иоффе брал палочку каменной соли, подвешивал к ней груз, настолько малый, чтобы не наступал разрыв, и опускал ее в теплую воду, в которой происходило растворение соли. При растворении поверхностного слоя уничтожались бывшие на нем повреждения, новые же не успевали образоваться, так как растворение велось непрерывно. По мере растворения палочка становилась все тоньше и, наконец, разрывалась под влиянием силы тяжести привешенного к ней груза. По площади поперечного сечения палочки в момент разрыва и по величине подвешенного груза определялся предел прочности, который значительно превосходил обычный предел прочности кристаллов каменной соли. В некоторых случаях Иоффе наблюдал разрыв лишь при напряжении в 160 кг/мм^2 , т. е. в триста раз большем, чем обычно, и близком к теоретическому. Возможно, что роль воды в опытах Иоффе не ограничивается удалением поверхностных трещинок и носит более сложный характер, но во всяком случае опыты Иоффе указывают на возможность обнаружить прочности монокристаллов, близкие к теоретическим расчетам.

Практическая прочность кристаллов в сотни раз ниже их теоретической прочности. Решетка реальных кристаллов отличается от идеальной. В ней всегда имеются внутренние дефекты: наличие пустых, незанятых частицами мест и местные нарушения порядка. Ничтожные дефекты на поверхности и внутри решетки ведут к разрыву всего кристалла.

Поликристаллические тела практически оказываются прочнее монокристаллов. Механические свойства поликристаллических тел, какими являются обычные металлы, обусловлены формой отдельных

кристаллов и силами сцепления между ними. Всякое изменение формы отдельных кристалликов, из которых состоит кристаллическое тело, а также изменения в их взаимном расположении ведут к существенным изменениям механических свойств всего твердого тела в целом.

Изменениями формы и расположения кристалликов объясняется влияние на прочность и другие механические свойства металлов прокатки,ковки, закалки и иных видов холодной и горячей обработки.

§ 92. Тепловое движение в твердых телах. Расширение твердых тел. Каждая частица (атом или ион), из которых построена пространственная решетка кристаллического твердого тела, совершает колебания около положения равновесия. Энергия этих колебаний и представляет собою внутреннюю энергию твердого тела. Таким образом, тепловое движение частиц в твердом теле отличается по своему характеру от теплового движения частиц в газах и жидкостях. В газах отдельные молекулы свободно летают, испытывая друг с другом лишь упругие столкновения; этим объясняется сравнительно большая скорость диффузии газов. В жидкостях молекулы непрерывно сталкиваются при своем беспорядочном движении с соседними молекулами. Они „толкуются“ около одного места и, как было указано в § 78, лишь постепенно перемещаются. Диффузия в жидкостях существует, хотя и происходит медленнее, чем в газах. В кристаллической решетке твердого тела каждая частица (атом или ион) имеет определенное положение равновесия, около которого она совершает колебания. Кроме того, в твердом теле частицы, вообще говоря, могут переходить с места на место; однако эти переходы достаточно редки. Диффузия в твердых телах происходит чрезвычайно медленно. Требуется весьма тонкие наблюдения, чтобы заметить некоторое проникновение двух соприкасающихся металлов друг в друга, причем такое проникновение может быть обнаружено лишь после длительного соприкосновения тел.

При повышении температуры твердого тела отклонения частиц от их положений равновесия возрастают. Это ведет к тепловому расширению твердого тела.

Полагая длину твердого тела при температуре 0° равной L_0 , мы получим, как известно, для удлинения тела ΔL при нагревании его до температуры t :

$$\Delta L = a L_0 t, \quad (1)$$

где a — коэффициент линейного теплового расширения твердого тела. Отсюда длина тела L_t при температуре t будет равна

$$L_t = L_0 + \Delta L = L_0 (1 + at), \quad (2)$$

т. е. длина твердого тела возрастает линейно с температурой. На самом деле это соотношение выполняется не вполне точно, коэффициент теплового расширения a несколько зависит от температуры

(ср. со сказанным в § 44), но для большинства практических целей α можно считать постоянным. Для твердых тел коэффициенты линейного расширения малы и представляют собою величины порядка 10^{-5} и 10^{-6} град $^{-1}$.

В результате линейного расширения возрастает и объем тела. Представим себе тело в виде куба с длиной ребра L_0 и обозначим его первоначальный объем, равный L_0^3 , через V_0 . Тогда объем при температуре t окажется равным

$$V = L_0^3 (1 + \alpha t)^3 = V_0 (1 + \alpha t)^3.$$

Возводя бином $(1 + \alpha t)$ в куб и пренебрегая членами, содержащими α^2 и α^3 , получим

$$V = V_0 (1 + 3\alpha t).$$

Обозначим 3α через b , имеем

$$V = V_0 (1 + bt). \quad (3)$$

Величина b называется *коэффициентом объемного теплового расширения* твердого тела. Из приведенного расчета следует, что приближенно коэффициент b равен утроенному коэффициенту линейного расширения.

Для анизотропных кристаллов коэффициент линейного расширения α различен для различных направлений. Это ведет к тому, что, расширяясь, кристалл не остается подобен самому себе: он меняет свою форму. Некоторая физическая прямая (т. е. линия, связанная с определенными частицами твердого тела) при тепловом расширении кристалла, вообще говоря, не остается прямой. Однако в каждом кристалле есть такие направления, вдоль которых физическая прямая остается прямой и при тепловом расширении. Эти направления называются *кристаллографическими осями*. Значения коэффициентов теплового расширения α вдоль кристаллографических осей называются *главными*. В общем случае кристаллы обладают тремя осями и тремя различными главными коэффициентами линейного теплового расширения α_1 , α_2 и α_3 . Для кристаллов некоторых систем эти три направления взаимно перпендикулярны.

Представим себе параллелепипед, вырезанный из кристалла, со взаимно перпендикулярными осями, с длиной ребер, при температуре 0° равной L_{01} , L_{02} , L_{03} . Объем этого параллелепипеда $V_0 = L_{01} \cdot L_{02} \cdot L_{03}$. При нагревании до температуры t ребра примут значения:

$$L_1 = L_{01} (1 + \alpha_1 t), \quad L_2 = L_{02} (1 + \alpha_2 t), \quad L_3 = L_{03} (1 + \alpha_3 t).$$

Новый объем параллелепипеда будет равен

$$V = V_0 (1 + \alpha_1 t) (1 + \alpha_2 t) (1 + \alpha_3 t).$$

Производя перемножения и пренебрегая всеми членами, содержащими произведения величин a_1, a_2, a_3 , получим приближенно

$$V = V_0 [1 + (a_1 + a_2 + a_3)t].$$

С другой стороны, можно положить

$$V = V_0 (1 + bt),$$

где b — коэффициент объемного теплового расширения кристалла. Из сравнения двух последних формул получим

$$b = a_1 + a_2 + a_3. \quad (4)$$

Таким образом, коэффициент объемного расширения кристалла приближенно равен сумме его главных коэффициентов линейного расширения. Для изотропного тела $a_1 = a_2 = a_3 = a$, и мы снова получаем из (4) уже выведенное нами соотношение $b = 3a$.

В результате нагревания в твердых телах, если они не могут при этом свободно расширяться, возникают большие механические напряжения. Для оценки этих напряжений произведем следующий расчет. Пусть стержень длиной L_0 при нагревании от 0° до t° удлинился на величину

$$\Delta L = aL_0t,$$

где a — коэффициент линейного расширения материала, из которого сделан стержень. Для обратного укорочения стержня путем упругой деформации сжатия на величину ΔL надо приложить к нему усилие p_n , определяемое формулой (2а) § 89:

$$\Delta L = \frac{1}{E} L_0 p_n,$$

где E — модуль Юнга материала стержня. Приравняв друг другу оба значения ΔL , получим

$$\frac{1}{E} L_0 p_n = aL_0t, \text{ откуда } p_n = aEt.$$

Для железа, например, $a \cong 1 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$ и $E \cong 2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$, откуда при повышении температуры на $t = 1^\circ \text{C}$, к стержню, чтобы компенсировать его тепловое расширение, надо приложить усилие

$$p_n \cong 1 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2 = 0,2 \text{ кг/мм}^2 = 20 \text{ кг/см}^2.$$

С возможностью возникновения таких напряжений при нагреваниях приходится считаться в строительной технике. Чтобы избежать этих напряжений, рельсы железнодорожных путей укладывают со свободными промежутками на стыках, фермы мостов и других сооружений у концов не закрепляют жестко, но укладывают на катки и т. д.

При соединении различных материалов необходимо еще принимать во внимание напряжения, могущие произойти от разных значений коэффициентов расширения.

§ 93. Теплоемкость твердых тел. Запас внутренней энергии твердого тела представляет собою запас энергии колебаний частиц, из которых оно построено, а также их взаимной потенциальной энергии. Частицы (атомы или ионы), образующие кристаллическую решетку, вообще говоря, не являются независимыми, так как между

ними существуют значительные силы взаимодействия. Поэтому колебания частиц надо рассматривать как связанные; в решетке, как в целом, возникают колебания различных частот, энергия которых и должна быть учтена.

Однако при достаточно высоких температурах, когда энергия колебаний становится большой, частицы можно рассматривать как независимые. Каждая из частиц совершает около положения равновесия колебательное движение. Для определения средней энергии колебаний частицы надо принять во внимание, что она обладает запасом как кинетической, так и потенциальной энергии. На каждый из этих видов энергии в среднем придется одинаковая энергия. Таким образом, если обозначить среднюю кинетическую энергию частицы через $\bar{\omega}_k$, то полное значение средней энергии частицы будет $\bar{\omega} = 2\bar{\omega}_k$.

В пространственной кристаллической решетке каждая частица может колебаться около своего положения равновесия в любом направлении; следовательно, ее скорость v должна быть задана как вектор. Отсюда получаем, что каждая частица обладает *тремя* степенями свободы i . Поэтому средняя кинетическая энергия $\bar{\omega}_k = \frac{i}{2} kT = \frac{3}{2} kT$, а полное значение средней энергии одной частицы

$$\bar{\omega} = 2\bar{\omega}_k = 3kT.$$

Полную внутреннюю энергию одного моля твердого тела U получим, умножив среднюю энергию одной частицы на число независимо колеблющихся частиц, содержащихся в одном моле. Для химически простых твердых кристаллических тел число независимо колеблющихся частиц в одном моле¹ совпадает с числом Авогадро N , так что

$$U = \bar{\omega} \cdot N = 3NkT = 3RT, \quad (1)$$

где R — газовая постоянная.

Для твердых тел, обладающих малым коэффициентом теплового расширения, теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении практически не различаются. Поэтому в дальнейшем мы их не будем различать. Тогда имеем: атомная теплоемкость химически простого кристаллического твердого тела, численно равная увеличению внутренней энергии U при повышении температуры на 1° , по формуле (1) будет равна

$$C = 3R,$$

а так как газовая постоянная $R \cong 2 \text{ кал/град моль}$, то

$$C \cong 6 \text{ кал/град моль}, \quad (2)$$

¹ Для элементов в твердом виде под словом „моль“ следует подразумевать граммом.

т. е. *атомная теплоемкость всех химически простых кристаллических твердых тел при достаточно высокой температуре равна 6 кал/град моль*. Это утверждение носит название *закона Дюлонга и Пти*.

Без более детального разбора характера колебаний взаимодействующих между собою частиц, образующих кристалл, нельзя вперед указать, какая температура должна считаться для данного тела достаточно высокой, чтобы выполнялся закон Дюлонга и Пти. Сами Дюлонг и Пти установили свой закон на основании эмпирических данных, полученных для ряда твердых тел при комнатных температурах.

Таблица XV дает значения атомных теплоемкостей некоторых химических простых твердых тел.

Из таблицы видно, что для большинства из приведенных веществ (Al, Fe, Au, Cd и т. д.) атомная теплоемкость близка к 6 кал/град моль, т. е. для них комнатная температура достаточно высока, чтобы атомы колебались практически независимо друг от друга; для этих тел закон Дюлонга и Пти выполняется. Для алмаза, кремния и бора при комнатной температуре атомные теплоемкости много меньше 6 кал/град моль; это означает, что в кристаллических решетках этих веществ при комнатных температурах колебания атомов еще нельзя считать независимыми. При температуре 985° С атомная теплоемкость алмаза становится равной 5,52, т. е. приближается к ожидаемому значению 6.

Многие кристаллы химически сложных веществ носят ионный характер. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы данного вещества, как их можно выделить в газообразном состоянии. В кристаллической решетке лишь правильно чередуются все те атомы, в виде ионов, которые входили в состав молекул газа данного вещества. Отсюда число частиц, образующих моль этого вещества в кристаллическом состоянии, равно числу атомов в моле этого вещества. Так, один моль газообразного хлористого натрия содержит в себе число молекул NaCl, равное числу Авогадро N . В кристалле же каменной соли мы имеем расположенными по узлам решетки (рис. 223) ионы Na^+ и Cl^- , общее число которых (ионов Na^+ и ионов Cl^- вместе) равно $2N$. Считая по-прежнему, что каждому из ионов в решетке соответствует средняя энергия $\bar{\omega} = 2 \cdot \frac{1}{2} kT$,

Таблица XV
Атомная теплоемкость
элементов в твердом
состоянии

| Вещество | Атомная теплоем- кость C |
|------------------|----------------------------------|
| Алюминий, Al. | 6,14 |
| Алмаз, С. . . . | 1,35 |
| Железо, Fe. . . | 6,36 |
| Золото, Au. . . | 6,36 |
| Кадмий, Cd. . . | 6,11 |
| Кремний, Si. . . | 4,67 |
| Медь, Cu. . . . | 5,91 |
| Олово, Sn. . . . | 6,63 |
| Платина, Pt. . . | 6,29 |
| Серебро, Ag. . . | 6,13 |
| Цинк, Zn. . . . | 6,10 |
| Бор, В. | 2,51 |

получим, что молярная теплоемкость кристаллической каменной соли должна равняться:

$$C = 2 \frac{t}{2} k \cdot 2N = 6kN = 6R,$$

или приблизительно 12 кал/град моль. То же рассуждение справедливо и в том случае, когда атомы, оставаясь в решетке нейтральными, колеблются независимо друг от друга. Отсюда следует, что приблизительно 12 кал/град моль должна равняться молярная теплоемкость и всех других двуатомных соединений в твердом состоянии. Так же получим, что трехатомные соединения должны иметь молярную теплоемкость, приблизительно равную 18 кал/град моль, а четырехатомные — равную 24 кал/град моль и т. д.

Таблица XVI

**Молярная теплоемкость
твердых соединений**

| Вещество | Молярная теплоемкость C |
|-----------------------------|---------------------------|
| CuO | 11,3 |
| NaCl | 12,1 |
| CaCl ₂ | 18,2 |
| BaCl ₂ | 18,6 |
| KNO ₃ | 24,1 |

Этот вывод совпадает с эмпирически установленным законом Джоуля и Коппа, по которому молярная теплоемкость твердых соединений равна сумме атомных теплоемкостей элементов, входящих в состав этих соединений.

Закон Джоуля и Коппа может быть справедлив лишь при таких высоких температурах, при которых колебания частиц можно считать независимыми.

Таблица XVI показывает, что для ряда твердых соединений при комнатной температуре закон Джоуля и Коппа выполняется достаточно хорошо.

С понижением температуры теплоемкость всех твердых тел падает. Падение теплоемкости с температурой графически представлено на рис. 237. При стремлении температуры к абсолютному нулю теплоемкость всех твердых тел стремится к нулю. Ход теплоемкости твердых тел при очень низких температурах может быть объяснен лишь на основании квантовой механики.

В § 49 мы отмечали, что, согласно квантовой механике, энергия отдельных частиц меняется лишь скачкообразно. Это относится и к энергии колебаний атомов (или ионов) в кристаллической решетке. Порция энергии, на которую скачкообразно меняется энергия колеблющейся в решетке частицы, равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, равная $6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг сек, и ν — частота колебаний частицы. При тех температурах, при которых средняя энергия $\frac{1}{2} kT$, приходящаяся на одну степень свободы, велика по сравнению с $h\nu$, энергию колебания частицы можно считать меняющейся непрерывно

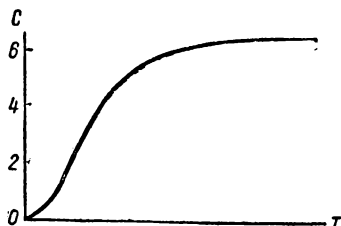


Рис. 237. Ход теплоемкости твердых тел с температурой.

с температурой T и, следовательно, применять классическую теорию. При таких низких температурах, при которых средняя энергия $\frac{1}{2} kT$ одного порядка с порцией энергии $h\nu$, расчет должен производиться на основе квантовой механики. Частота колебаний частиц в кристаллической решетке есть величина порядка 10^{12} сек.⁻¹, откуда из неравенства

$$\frac{1}{2} kT > h\nu$$

получаем, что классический способ расчета пригоден для температур, удовлетворяющих условию:

$$T > \frac{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{12}}{1,4 \cdot 10^{-16}} \text{°K} \cong 100 \text{°K}.$$

Таким образом, для комнатных температур ($T \cong 300 \text{°K}$) годится классический способ расчета теплоемкостей, при температурах же порядка — 200°C необходимо рассчитывать теплоемкость по квантовой теории.

Основы квантовой теории теплоемкости твердых тел были даны Эйнштейном. Затем Дебай принял во внимание большую роль взаимодействия частиц, образующих решетку, при низких температурах. Дебай рассматривал не колебания отдельных частиц, но *колебания, устанавливающиеся в решетке, как в целом*. Он показал, что *в кристаллической решетке должны установиться стоячие волны различных частот, вплоть до акустических*.

Суммируя энергию всех этих колебаний кристаллической решетки и учитывая их зависимость от температуры, согласно квантовой механике, Дебай пришел к результатам, очень хорошо согласующимся с опытами. *Для очень низких температур теплоемкость твердых тел меняется пропорционально третьей степени абсолютной температуры*.

Теория Дебая замечательна тем, что она связывает тепловые колебания в кристаллах с их акустическими колебаниями.

Советский физик Л. И. Мандельштам указал, то наличие тепловых упругих волн в кристаллах должно сказаться на характере света, рассеянного от кристаллов (см. т. III). Предсказанное Л. И. Мандельштамом явление было наблюденно советским физиком Е. Ф. Гроссом; тем самым существование упругих тепловых колебаний в твердых телах оказалось экспериментально подтвержденным.

§ 94. Плавление и испарение твердых тел. Как указано в § 87, кристаллические твердые тела имеют определенную температуру плавления. Эта температура несколько зависит от внешних условий.

Если плавление вещества сопровождается увеличением объема (что имеет место для большинства веществ), то при увеличении давления температура плавления повышается: уже расплавленное вещество может при увеличении давления вновь затвердеть.

Если плавление вещества сопровождается уменьшением объема (вода, висмут, сурьма и некоторые другие вещества), то при увеличении давления температура плавления понижается; уже затвердевшее вещество может при увеличении давления вновь сделаться жидким. Лед под давлением тает при температуре ниже 0°C ; точка плавления льда понижается на 1° при увеличении давления приблизительно на 130 ат .

При очень высоких давлениях вещества, которые при плавлении расширяются, можно удерживать в твердом состоянии при температуре выше критической.

Так, хлористый фосфор может быть в твердом состоянии при давлении 2050 кг/см^2 при $t=102^\circ$, в то время как его критическая точка лежит при $p=75 \text{ кг/см}^2$ и $t=50^\circ$. Также углекислота, критическая температура которой равна 31° , при давлении $p=12\,000 \text{ кг/см}^2$ остается твердой при $t=93^\circ \text{C}$.

При разборе изотерм Ван-дер-Ваальса мы видели, что при температуре выше критической они идут плавно, что не позволяет при этом различать две фазы — газообразную и жидкую. Однако твердое состояние оказывается возможным и при температуре выше критической.

Процесс перехода из твердого состояния в жидкое связан с затратой энергии; другими словами, для того, чтобы данную массу твердого тела перевести в жидкое состояние при той же температуре, необходимо сообщить телу некоторое количество тепла, называемого *теплотой плавления*. При затвердевании жидкости эта энергия выделяется в виде тепла. Теплота плавления весьма различна для разных веществ; так, для воды она равна 80 кал/г , а для ртути — всего $2,75 \text{ кал/г}$.

На стр. 331 мы видели, что, рассматривая цикл Карно, проводимый со смесью жидкости и насыщенного пара над ней в качестве рабочего вещества, можно установить связь между зависимостью упругости насыщенных паров от температуры и теплотой парообразования. Однако все приведенные там рассуждения остаются в силе и тогда, когда в качестве рабочего вещества берется смесь твердой и жидкой фаз какого-либо тела.

Таким образом, формула [(6), стр. 331]:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V'_0 - V_0} \quad (1)$$

остается справедливой и в том случае, если считать T за температуру плавления, λ — за теплоту плавления, V'_0 и V_0 — соответственно за удельные объемы жидкой и твердой фаз и p — за давление, под которым находится смесь.

Формулу (1) можно переписать также в виде:

$$dT = T \frac{V'_0 - V_0}{\lambda} dp, \quad (2)$$

тогда она дает изменение температуры плавления dT при изменении давления на dp .

Из формулы (2) непосредственно вытекают указанные правила: если удельный объем жидкости больше удельного объема твердой фазы ($V'_0 > V_0$), то при увеличении давления ($dp > 0$) точка плавления повышается, если $V'_0 < V_0$, то при повышении давления точка плавления понижается. Например, удельный объем льда при 0°C равен $V_0 = 1,0908 \text{ см}^3/\text{г}$, удельный объем воды при той же температуре $V'_0 = 1,0001 \text{ см}^3/\text{г}$, теплота плавления льда $\lambda = 79 \text{ кал/г} = 33 \cdot 10^8 \text{ эрг/г}$. Отсюда вблизи $T = 273^\circ \text{K}$ изменение давления на dp дает изменение температуры плавления на

$$dT = -273 \frac{0,0907}{33 \cdot 10^8} dp,$$

где p выражено в барах.

Если p выразить в атмосферах, то

$$dT = -0,0076 \, dp.$$

Отсюда получаем, что для понижения температуры плавления льда на 1° надо увеличить давление на $\frac{1}{0,0076} \, \text{ат} \cong 130 \, \text{ат}$, в согласии с данными, приведенными в основном тексте.

Температура плавления очень сильно зависит от чистоты данного вещества. Иногда незначительные примеси могут заметно понизить температуру плавления. Для сплавов, которые не представляют собою определенных химических соединений, но могут быть получены при любых пропорциях сплавляемых веществ, зависимость температуры плавления от состава сплава имеет характерный ход, представленный на рис. 238. Пусть сплав образован двумя элементами A и B . По оси абсцисс отложены количества веществ A и B в сплаве, причем направление слева направо соответствует возрастанию количества вещества A . По оси ординат отложены температуры плавления сплава. Точка T_B относится к температуре плавления чистого вещества B ; малые примеси вещества A ведут к понижению температуры плавления. В точке C достигается минимум температуры плавления; состав сплава, отвечающего точке C , называется *эвтектическим*. Далее температура плавления повышается, достигая точки T_A , которая относится к чистому веществу A . Из хода кривой видно, что малая добавка второй компоненты (как менее тугоплавкой к более тугоплавкой, так и, наоборот, более тугоплавкой к менее тугоплавкой) всегда ведет к *понижению температуры плавления* по сравнению с температурой плавления чистого вещества.

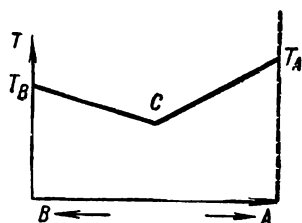


Рис. 238. Зависимость температуры плавления от состава сплава.

Твердые тела, как и жидкости, при всякой температуре испаряются в большей или меньшей степени, образуя пар данного вещества.

Будем охлаждать жидкость в закрытом сосуде, причем пусть над жидкостью имеются лишь насыщенные пары. По мере понижения температуры давление паров падает; пусть ход этого давления с температурой изображается кривой CD на рис. 239.

Точке D соответствует температура затвердевания жидкости под давлением насыщенных паров. При достижении точки D , при дальнейшем отнятии тепла, начнется переход жидкости в твердое состояние, причем температура остается постоянной, пока вся масса жидкости не перейдет в твердое состояние. За все это время и давление насыщенных паров остается постоянным и равным ординате точки D . Когда вся жидкость перейдет в твердое состояние, над

твердым телом будет по-прежнему насыщенный пар. При дальнейшем охлаждении твердого тела начнет падать и давление насыщенных паров, но по новой кривой DG .

Таким образом, в точке D смыкаются две кривые: кривая GD , дающая зависимость давления насыщенных паров от температуры над данным веществом в твердом состоянии, и кривая CD , дающая зависимость давления насыщенных паров от температуры над тем же веществом в жидком состоянии. При температурах ниже температуры, соответствующей абсциссе точки D , пар может быть в равновесии только с твердым телом, при температурах выше этой температуры — в равновесии только с жидкостью. В точке D все три состояния вещества — твердое, жидкое и насыщенный пар над ними — или, как говорят, все три фазы, находятся в равновесии. Поэтому точка D называется *тройной точкой*.

Температура тройной точки есть температура плавления вещества, находящегося под давлением его насыщенного пара. Если вещество подвергнуть большому давлению, то и температура плавления изменится. Как было указано, для большинства тел при повышении давления температура плавления тоже повышается.

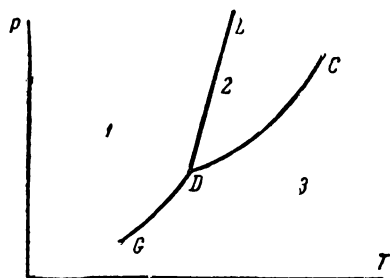


Рис. 239. Тройная точка.

1 — твердая фаза; 2 — жидкая фаза;
3 — газообразная фаза.

Можно построить кривую, выражающую зависимость между температурой плавления и давлением. Эта кривая пройдет через тройную точку D ; на рис. 239 она представлена линией DL . Рисунок 239 относится к случаю, когда температура плавления тела возрастает с повышением давления.

Так как температура плавления зависит от давления очень слабо (кривая DL идет круто вверх), то при обычных давлениях (порядка атмосферного) температура плавления совпадает с температурой тройной точки.

По большей части мы имеем дело с твердыми телами при температурах много ниже температуры их тройной точки (железо и другие металлы при комнатной температуре), поэтому давление их насыщенных паров ничтожно, и испарение этих твердых тел практически отсутствует. Но вблизи тройной точки давление насыщенных паров над твердым телом может быть вполне заметным. Так, вода в тройной точке (при $0,00748^\circ\text{C}$) имеет давление насыщенных паров $p_0 = 4,58$ мм Hg; при -1°C над льдом упругость насыщенных паров равна 4,22 мм Hg и при -10°C еще равна 1,95 мм Hg. Этими сравнительно большими упругостями насыщенных паров объясняется легко заметное испарение твердого льда, в частности —

факт „высыхания“ мокрого белья на морозе. Иод имеет в тройной точке (114°C) давление насыщенных паров 90 мм Hg ; это большое значение давления насыщенных паров позволяет удобно демонстрировать на кристаллах иода процесс испарения („возгонки“) твердых тел.

Ряд веществ имеет и в тройной точке очень низкие давления насыщенных паров; так, серебро при температуре плавления (962°C) обладает давлением насыщенных паров всего $2 \cdot 10^{-3} \text{ мм Hg}$.

§ 95. Квазикристаллическое строение жидкостей. В § 78 мы уже указывали, что природа жидкостей, особенно вблизи температур затвердевания, во многом сходна с природой твердых тел. Теперь мы познакомимся с этим сходством более подробно.

Прежде всего следует отметить, что при плавлении (или, соответственно, затвердевании) свойства вещества меняются гораздо меньше, чем при испарении.

Мы уже указывали, что плавление сопровождается значительно меньшим изменением удельного объема, чем испарение, если последнее происходит при температурах более низких, чем критическая.

Теплоты плавления малы по сравнению с теплотами испарения.

Например, натрий и ртуть имеют при температурах кипения теплоты испарения соответственно равные $25\,000 \text{ кал/моль}$ и $14\,000 \text{ кал/моль}$.

Теплоты плавления тех же элементов соответственно равны 610 кал/моль и 570 кал/моль .

В табл. XVII сравнены молярные теплоемкости для ряда веществ в твердом и жидком состояниях.

Таблица XVII

**Молярные теплоемкости при постоянном давлении
твердых и жидких веществ**

| Вещество | Na | Hg | Pb | Zn | Al | HCl | CH ₄ |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|------|-------|-----------------|
| C_p (твердое) . . . | 7,6 | 6,7 | 7,2 | 7,2 | 6,14 | 12,27 | 10,0 |
| C_p (жидкое) . . . | 8,0 | 6,7 | 7,7 | 7,9 | 6,25 | 14,73 | 13,5 |

Из таблицы видно, что теплоемкости веществ как простых, так и химически сложных при переходе из твердого состояния в жидкое меняются мало. Это непосредственно указывает, что характер теплового движения частиц в жидком состоянии близок к характеру теплового движения частиц в твердых телах. На этом выводе и основывается указанная в § 78 теория Я. И. Френкеля, по которой молекулы жидкости совершают колебания около временных положений равновесия. Различие между твердым и жидким состоянием заключается в следующем: в твердых телах каждая частица (атом или ион) колеблется около определенного положения равновесия, которое остается неизменным длительное время; в жидкости каждая

частица также колеблется около определенного положения равновесия, но в течение гораздо более короткого промежутка времени, после чего она меняет свое положение равновесия. Называя среднее время τ , в течение которого частица пребывает около определенного места равновесия, временем „оседлой“ жизни, имеем: твердое состояние вещества характеризуется большим временем „оседлой“ жизни, жидкое — сравнительно небольшим временем „оседлой“ жизни.

В предыдущих параграфах мы видели, что в твердом кристаллическом состоянии тел частицы расположены с определенной пространственной симметрией по узлам правильной геометрической решетки. Спрашивается, существует ли в расположении частиц жидкости (вернее, их временных положений равновесия) также некоторый порядок? Целый ряд фактов заставляет ответить на этот вопрос утвердительно: тепловые колебания частиц в жидкости не независимы, в жидкостях может быть обнаружено наличие таких же тепловых упругих волн, какие существуют в твердых телах (стр. 367); рентгеновы лучи, проходя через жидкость, дают, хотя и размытую, но все же определенно заметную диффракционную картину (см. т. III). Но вместе с тем необходимо отметить, что жидкости (за очень редкими исключениями) не обнаруживают никакой анизотропии, характерной для кристаллических твердых тел с их правильным расположением частиц по узлам геометрической решетки. Эти кажущиеся противоречия устраняются на основании гипотезы, по которой в жидкостях осуществляется так называемый „ближний порядок“ в расположении частиц.

Под „ближним порядком“ подразумевается такое расположение частиц, когда приблизительно правильно расположены частицы, ближайšie к данной. По мере того, как мы будем отходить от данной частицы, порядок в расположении остальных частиц по отношению к данной будет все более и более нарушаться. В пределах значительного объема частицы практически расположены беспорядочно. Такое расположение частиц соответствует структуре, отличной от истинной кристаллической структуры твердых тел, при которой осуществляется „дальний порядок“. При наличии „дальнего порядка“ частицы расположены правильно по узлам геометрической решетки в пределах значительного объема.

Из сказанного видно, что жидкость имеет до некоторой степени упорядоченное строение лишь в пределах малых объемов; такая структура носит название *квазикристаллической* (кристаллоподобной).

При повышении температуры время „оседлой“ жизни частиц в жидкости становится все меньше и меньше, и жидкость по своим свойствам отходит от свойств твердых тел и приближается к свойствам плотных газов.

Приведенная теория позволяет также объяснить механические свойства жидкостей.

Как известно, жидкости текучи. Однако при действии очень кратковременных сил вязкие жидкости проявляют свойства хрупкости и способны давать упругие деформации. Еще во второй половине прошлого столетия Максвелл развил формальную теорию такого состояния вещества, при котором одновременно могут проявляться и текучесть, и упругая деформация.

Напряжение в таком веществе спадает не сразу после прекращения действия силы, но по закону:

$$p_t = p_0 e^{-t/\tau},$$

где p_0 — начальное значение напряжения, p_t — напряжение через время t после прекращения действия силы. Величина τ носит название *времени релаксации*.

По Максвеллу, вещество ведет себя как твердое, если сила действует в течение промежутка времени, меньшего времени релаксации τ , и как жидкое, если сила действует в течение времени, большего τ . По теории Я. И. Френкеля, вещество должно вести себя как твердое под влиянием сил настолько кратковременных, что они действуют в течение промежутка времени, меньшего времени „оседлой“ жизни частиц. Действительно, в течение столь малого времени частицы остаются около своих положений равновесия, и вещество обладает структурой, характерной для твердого состояния. Если время действия силы больше времени „оседлой“ жизни частиц, то вещество обнаруживает вязкое течение, т. е. ведет себя как жидкость. Таким образом, в теории Я. И. Френкеля время релаксации приобретает непосредственный физический смысл: оно совпадает со временем „оседлой“ жизни частиц.

§ 96. Абсорбция и адсорбция газов твердыми телами. Опыты показывают, что если какое-либо твердое тело, находившееся в соприкосновении с газом, поместить в сосуд, из которого происходит откачка, то тело выделяет тот газ, с которым оно было в соприкосновении. Отсюда следует, что твердые тела поглощают газы.

Это поглощение тем больше, чем больше давление газа и чем больше поверхность твердого тела. Порошки поглощают значительно больше, чем сплошные тела того же состава и той же массы. Это показывает, что поглощение, хотя бы частично, носит характер прилипания газа к поверхности твердого тела.

Более подробное изучение поглощения указывает на существование двух различных видов поглощения газов твердыми телами, называемых *адсорбцией* и *абсорбцией*. *Адсорбция* заключается в прилипании газа тонким слоем к поверхности твердого тела. *Абсорбция* (или *окклюзия*) сводится к действительному поглощению газа всей массой твердого тела, т. е. к процессу, аналогичному растворению газов жидкостями.

Адсорбированный газ может образовать на поверхности твердого тела мономолекулярную пленку, аналогичную мономолекулярным слоям, которые могут существовать на поверхности жидкости (§ 83).

Образование мономолекулярного слоя газа на поверхности твердого тела обусловлено наличием больших сил взаимодействия между молекулами газа и твердого тела. Надо считать, что эти силы, посящие характер сил притяжения, действуют лишь на очень малых расстояниях. Поэтому, когда на первый слой молекул газа попадают новые молекулы, то на них действуют силы лишь со стороны молекул этого первого слоя, а не молекул твердого тела; эти силы недостаточны, чтобы удержать молекулы газа в виде второго слоя.

В вакууме адсорбированный слой молекул постепенно срывается и освобождает поверхность твердого тела. Чем выше температура, тем скорее идет процесс выделения газа с поверхности твердого тела.

Абсорбция (или окклюзия) идет в основном лишь при высоких температурах, так как только при этих температурах наблюдается заметная диффузия газа внутрь твердого тела.

Некоторые твердые тела способны окклюдировать газ в очень больших количествах, так что объем поглощенного газа (отнесенный к нормальным условиям) в сотни раз может превышать собственный объем твердого тела. Раскаленный палладий поглощает водород в объемах, отнесенных к нормальному давлению, до 1000 раз превышающих собственный объем палладия. Сильно поглощают водород щелочные металлы, особенно натрий. При нагревании в вакууме окклюдированные газы выделяются.

Явления адсорбции и абсорбции (окклюзии) играют большую роль в вакуумной технике. Для обезгаживания всех твердых (особенно металлических) частей, вводимых внутрь вакуумного прибора, их необходимо сильно прогревать под непрерывной откачкой. С другой стороны, явлениями адсорбции пользуются и для улучшения вакуума. Для этих целей пользуются, главным образом, способностью древесного угля сильно адсорбировать многие газы, особенно при низких температурах.

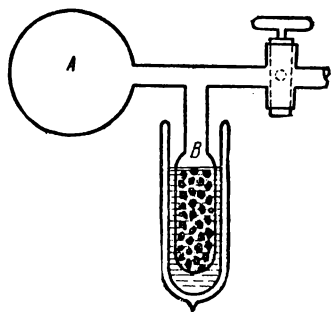


Рис. 240. Улучшение вакуума путем поглощения газов охлаждаемым углем.

К сосуду А, в котором желательно улучшить вакуум (рис. 240), присоединяют сосуд В, содержащий предварительно обезгаженный уголь. При погружении сосуда В с углем в жидкий воздух он охлаждается до температуры — 184°С и при этом поглощает остатки газа в сосуде А; таким образом может быть получен вакуум порядка 10^{-6} мм Нг.

В табл. XVIII приведены объемы различных газов (отнесенных к нормальным условиям), поглощаемых единицей объема угля при температуре жидкого воздуха.

Из табл. XVIII видно, что меньше всего при температуре жидкого воздуха поглощается гелий. Этим свойством гелия пользуются для его очистки от загрязнений: при пропускании загрязненного гелия через сосуд с охлажденным углем газы, примешанные к гелию (азот, кислород и т. д.), сильно поглощаются углем, сам же гелий поглощается лишь в очень небольших количествах.

Для того чтобы уголь обладал свойством сильно адсорбировать газы, он должен быть получен в пористом виде и свободным от обычно присутствующих в его порах углеводородов. Для этого его прогревают в закрытом сосуде при температуре 350—400° С, попеременно впуская и откачивая воздух.

Такая обработка носит название *активизации угля*. Активированный уголь находит применение также в оборонной технике: обычные противогазы содержат в себе активированный уголь.

На поверхности твердого тела могут адсорбироваться не только газы, но и жидкости. Адсорбированные вещества меняют свойства поверхности твердого тела. Некоторые твердые тела под влиянием веществ, адсорбированных на их поверхности, обнаруживают понижение прочности. При этом, по-видимому, существенную роль играют микроскопические трещинки и зазоры между отдельными кристалликами поликристаллических тел (металлов). Молекулы адсорбированной жидкости проникают в микротрещины и расширяют их. Это явление находит практическое применение: смачивая поверхность твердого тела соответствующей жидкостью, можно уменьшить работу резания.

Т а б л и ц а XVIII

Объемы газов, поглощаемых углем при температуре жидкого воздуха

| Газ | Объем газа, поглощаемого единицей объема угля |
|---------------|---|
| Гелий | 15 |
| Водород . . | 135 |
| Азот | 155 |
| Аргон | 175 |
| Кислород . . | 230 |

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ГЛАВА XI

ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 97. Гармоническое колебание. Как было показано в § 89, при упругих деформациях, удовлетворяющих закону Гука, возникает сила, направленная к положению равновесия и пропорциональная деформации. Рассмотрим характер движения, происходящего под действием такой силы.

Предположим, что груз A зажат между двумя пружинами. Обе пружины одинаково растянуты, и груз находится в равновесии в положении O (рис. 241 *а*).

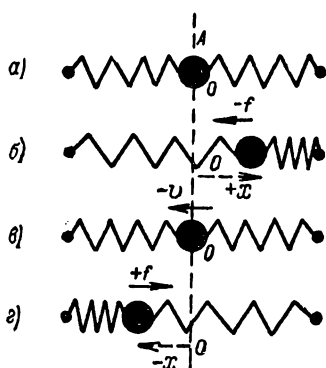


Рис. 241. Колебание около положения равновесия O груза A , зажатого между двумя пружинами.

Выведем груз из положения равновесия направо (рис. 241 *б*) на отрезок $+x$ (положительными считаем отрезки, отложенные слева направо), тогда правая пружина окажется сжатой, левая — растянутой, и на груз будет действовать сила $-f$, направленная к положению равновесия O и тем большая по численному значению, чем больше смещение x . Под влиянием этой силы груз A начнет двигаться к положению равновесия с возрастающей скоростью. Когда он снова попадет в положение равновесия (рис. 241 *в*), сила станет равной нулю, но у груза будет запас скорости $-v$, благодаря чему он перейдет через положение равновесия и продолжит движение налево. При этом левая

пружина сожмется, правая растянется, и на груз начнет действовать сила $+f$, направленная направо к положению равновесия. Эта сила будет тормозить груз, пока он не остановится; затем он начнет двигаться обратно к положению равновесия. Таким образом, установится колебательное движение груза A около положения равновесия.

Другим примером колебательного движения может служить движение плоского маятника (рис. 242). Если нить маятника вертикальна, то сила тяжести P , приложенная к грузу маятника,

уравновешивается натяжением нити. Однако, если маятник отклонить из положения равновесия на некоторый угол φ , то только часть силы тяжести P уравновесится реакцией нити, именно, составляющая силы тяжести P_n , параллельная нити. Составляющая P_t , перпендикулярная к нити, численно равная $P \sin \varphi$ и направленная к положению равновесия маятника, останется неуравновешенной. Если угол φ мал, то синус можно заменить самим углом, тогда P_t приблизительно равна $P\varphi$. Здесь смещение груза маятника из положения равновесия определяется углом φ . Сила, возвращающая груз маятника в положение равновесия, при малом угле φ пропорциональна углу φ .

Под влиянием этой силы маятник придет в колебательное движение около положения равновесия. В этом случае движение определяется не упругой силой, а составляющей силы тяжести P_t , которая направлена к положению равновесия и пропорциональна (при малых углах φ) отклонению маятника из положения равновесия. Таким образом, эта сила по своему характеру аналогична упругой силе. Колебания, вызываемые этой силой, при малых углах φ совпадают по характеру движения с колебаниями, вызываемыми упругой силой.

Силы, не упругие по своей природе, но аналогичные им по виду зависимости от смещения, называются *квазиупругими*.

Приведенные примеры показывают, что действие упругой или квазиупругой силы вызывает колебательное движение. Рассмотрим колебательный процесс более подробно.

Определим положение материальной точки с массой m ее смещением x из положения равновесия; в положении равновесия $x = 0$. Для упругой (или квазиупругой) силы f характерно то, что она пропорциональна смещению x и направлена к положению равновесия; следовательно, можно написать:

$$f = -kx. \quad (1)$$

Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению x ; например, при смещении вверх сила действует вниз, при смещении вниз сила действует вверх и т. д. Коэффициент k положителен. По второму закону Ньютона:

$$m\omega = f = -kx, \quad (2)$$

где ω — ускорение рассматриваемой материальной точки.

Ускорение ω равно второй производной смещения по времени, т. е. $\omega = \frac{d^2x}{dt^2}$; будем сокращенно обозначать вторую производную по времени двумя точками, поставленными над той величиной, от

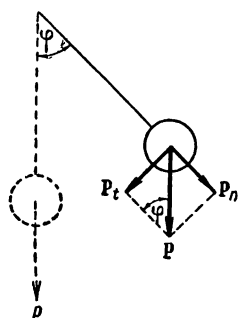


Рис. 242. Колебания маятника.

которой берется производная, тогда $\omega = \ddot{x}$. Подставляя это выражение для ω в (2), получим

$$m\ddot{x} = -kx \quad (3)$$

или

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (3a)$$

Так как k и m — обе величины положительные, то их отношение можно приравнять квадрату некоторой величины ω , т. е. мы можем ввести обозначение

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \quad (4)$$

Величина ω по причинам, указанным ниже, называется *круговой* (или *циклической*) *частотой* колебания.

Тогда уравнение (3a) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (5)$$

Наша задача теперь сводится к определению движения точки, относительно которой известно, что ее ускорение по формуле (5) пропорционально ее отклонению x из положения равновесия и направлено в сторону положения равновесия. Движение точки известно, если известно ее положение как функция времени; в данном случае надо определить смещение x как функцию от времени t . Следовательно, нам надо найти такую связь между x и t , чтобы она удовлетворяла уравнению (5). Легко проверить, что эта связь дается уравнением:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

где a и α — произвольные постоянные, которые могут быть определены из начальных условий. Действительно, взяв вторую производную от x по времени, мы увидим, что полученное значение \ddot{x} обращает уравнение (5) в тождество. Множитель a называется *амплитудой*, аргумент $\omega t + \alpha$ — *фазой*, постоянная α — *начальной фазой* колебания. С одинаковым правом мы могли бы взять уравнение в виде:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

при этом при определении постоянной α в каждом частном случае мы получили бы для α другое значение, чем по уравнению (6). При этом другом значении постоянной α численное значение синуса в уравнении (7) в каждый данный момент времени равнялось бы численному значению косинуса в уравнении (6), т. е. движения, описываемые уравнениями (6) и (7), были бы тождественны.

Уравнения (6) или (7) называются *уравнениями гармонического колебательного движения*; перейдем к их исследованию.

Основное свойство гармонического колебательного движения — это его периодичность. Положим, для простоты, начальную фазу $\alpha = 0$, тогда

$$x = a \cos \omega t. \quad (6a)$$

При $t = 0$ имеем $\cos \omega t = +1$, откуда $x = +a$. Условимся положительные значения смещения откладывать направо, а отрицательные — налево от положения равновесия (рис. 243). Тогда материальная точка A , совершающая гармоническое колебательное движение, в момент времени $t = 0$ смещена из положения равновесия направо, на отрезок a . Это — максимальное возможное смещение точки направо, так как $\cos \omega t$ не может быть больше $+1$. При возрастании

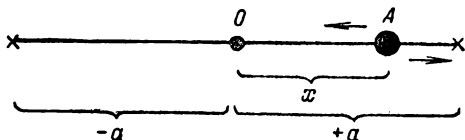


Рис. 243. Смещение колеблющейся точки из положения равновесия.

времени t значение $\cos \omega t$ начнет убывать — точка будет перемещаться налево, двигаясь к положению равновесия O . В момент времени, определяемый условием $\omega t = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $t = \frac{\pi}{2\omega}$, точка окажется в положении равновесия O . При дальнейшем возрастании времени косинус примет отрицательные значения, точка A сместится налево от положения равновесия. В момент времени $t = \frac{\pi}{\omega}$ косинус примет значение -1 , откуда $x = -a$, т. е. точка достигнет крайнего левого положения. Затем она начнет двигаться направо, вторично пройдет положение равновесия O и в момент времени $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ снова достигнет крайнего смещения вправо. После этого все движение начнет повторяться. Таким образом, точка возвращается в исходное состояние движения через время

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8)$$

это время T является *периодом колебаний*. За время, равное периоду T , колеблющееся тело A пройдет каждую точку своего пути (кроме точек, соответствующих крайним отклонениям $x = \pm a$) дважды: один раз — двигаясь в одном направлении, и в другой раз — двигаясь в обратном направлении.

Величина $\omega = \frac{2\pi}{T}$ представляет собою число колебаний в 2π единиц времени. Величина a , называемая *амплитудой*, дает наибольшее возможное смещение колеблющейся точки от положения равновесия.

При $\alpha \neq 0$ имеем, что в начальный момент времени $t = 0$ точка A находится в месте, определяемом значением $x = a \cos \alpha$. Исходя из этой точки, можно также проследить весь характер движения за

период T . Следовательно, начальная фаза α определяет положение колеблющейся точки в начальный момент времени $t=0$.

Наряду с циклической частотой ω , можно ввести в рассмотрение и обычную частоту $\nu = \frac{1}{T}$, дающую число колебаний в единицу времени. Сопоставляя все три величины ω , ν и T , имеем между ними связь:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (9)$$

Подставляя эти значения ω в (6), получим еще два следующих выражения для гармонического колебательного движения:

$$x = a \cos(2\pi\nu t + \alpha), \quad (6б)$$

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right). \quad (6в)$$

Пользуясь формулой (4) и соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем для периода величину:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10)$$

Таким образом, мы видим, что период колебания зависит исключительно от динамических характеристик задачи: массы m и коэффициента k .

Во многих приложениях, связанных с рассмотрением колебательного процесса, удобен геометрический способ представления колебания с помощью вектора амплитуды.

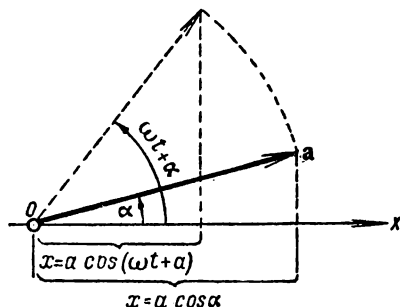


Рис. 244. Представление гармонического колебательного движения как проекции вектора \mathbf{a} , вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Этот способ сводится к следующему. Возьмем ось, которую назовем осью X (рис. 244), и выберем на ней произвольную точку O . Из этой точки под углом α , равным начальной фазе колебания, отложим в некотором масштабе вектор, численно равный амплитуде a . Из рисунка видно, что проекция вектора \mathbf{a} на ось X даст в том же масштабе начальное смещение точки $x = a \cos \alpha$. Будем вращать вектор амплитуды с угловой скоростью ω против часовой стрелки, тогда в некоторый момент времени t он образует с осью X угол, равный $\omega t + \alpha$, при этом его проекция на ось X будет равна

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

т. е. будет давать смещение колеблющейся точки в момент времени t . Отсюда мы можем сделать заключение: гармоническое колебательное движение представляется движением проекции на некоторую ось конца вектора амплитуды, отложенного из произвольной точки оси под углом, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω вокруг этой точки. Отсюда становится ясным, почему величина ω называется *круговой частотой*.

§ 98. Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении. Примеры. Смещение x материальной точки A , совершающей гармоническое колебательное движение, по формуле (6) § 97 равно

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

где a — амплитуда колебания, ω — круговая частота и α — начальная фаза. Скорость точки v численно равна производной по времени от смещения x , т. е. $v = \frac{dx}{dt}$. Обозначим первую производную по времени точкой над буквой, выражающей ту величину, от которой берется производная. Тогда, выполняя дифференцирование, имеем

$$v = \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha). \quad (2)$$

Ускорение точки A получим, беря производную от скорости по времени:

$$w = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \quad (3)$$

Вводя в формулы (2) и (3) вместо ω период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим

$$v = -\frac{2\pi}{T} a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right), \quad (2a)$$

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right). \quad (3a)$$

Последнее равенство на основании формулы (1) может быть еще переписано:

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

откуда снова получим, что ускорение при гармоническом колебательном движении пропорционально смещению x и направлено к положению равновесия (ср. стр. 377).

Из формул (2a) и (3a) видно, что скорость и ускорение точки, совершающей гармоническое колебательное движение, являются периодическими функциями от времени с тем же периодом T , каким обладает и смещение x . Проследим изменения скорости и ускорения за время одного колебания. Для этого составим табличку зна-

чений v и w для различных моментов времени, сопоставив их со значениями смещения x для тех же моментов времени. Начальную фазу α снова, для простоты, полагаем равной нулю.

Т а б л и ц а X I X

Значения x , v и w при гармоническом колебательном движении для разных моментов времени

| t | x | v | w |
|----------------|------|--------------------|------------------------|
| 0 | $+a$ | 0 | $-\frac{4\pi^2}{T^2}a$ |
| $\frac{1}{4}T$ | 0 | $-\frac{2\pi}{T}a$ | 0 |
| $\frac{1}{2}T$ | $-a$ | 0 | $+\frac{4\pi^2}{T^2}a$ |
| $\frac{3}{4}T$ | 0 | $+\frac{2\pi}{T}a$ | 0 |
| T | $+a$ | 0 | $-\frac{4\pi^2}{T^2}a$ |

Из таблицы видно: скорость достигает максимальных по абсолютной величине значений

$|v|_{\max} = \frac{2\pi}{T}a$ при прохождении колеблющейся точкой A положения равновесия; при крайних отклонениях $x = \pm a$ скорость равна нулю. Ускорение, наоборот, равно нулю при прохождении положения равновесия (в этот момент сила равна нулю) и достигает по абсолютной величине максимальных значений $|w|_{\max} = \frac{4\pi^2}{T^2}a$ при крайних отклонениях. Ускорение всегда направлено к положению равновесия.

Амплитуда колебания и начальная фаза, как было сказано выше, определяются из начальных данных. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ известны скорость v_0 частицы и ее смещение x_0 . При этих условиях, подставляя $t=0$ в выражения (1) и (2), имеем

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega \sin \alpha, \quad (4)$$

или

$$\frac{v_0}{\omega} = -a \sin \alpha. \quad (5)$$

Возводя в квадрат и складывая почленно выражения (4) и (5), получаем

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = a^2, \quad \text{откуда} \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (6)$$

Деля выражение (5) почленно на $x_0 = a \cos \alpha$, найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) дают амплитуду a и начальную фазу α , определяемые через начальное смещение x_0 и начальную скорость v_0 . Таким образом, мы видим, что точка данной массы, находясь под действием одной и той же упругой силы, может совершать колебания различной амплитуды и с различными начальными фазами

в зависимости от начальных условий, в то время как период ее всегда остается одним и тем же.

Если груз, подвешенный на пружине, вывести из положения равновесия, то он начнет совершать колебания, амплитуда которых будет зависеть от того, насколько была вытянута пружина перед началом движения и какая начальная скорость была сообщена грузу; период колебания будет независимо от величины амплитуды определяться только массой груза m и „жесткостью“ пружины k .

Начальная фаза колебания, как видно из приведенного рассмотрения, зависит от выбора начального момента: можно, например, взять за начальный момент тот, при котором смещение точки $x_0 = -a$, тогда из соотношения (6) следует, что $v_0 = 0$ и по соотношению (7) начальная фаза равна нулю: $\alpha = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Определить период колебания груза весом $P = 2,5$ кг, привешенного к пружине, если пружина под действием силы 3 кг растягивается на 9 см.

Решение. Коэффициент упругости пружины мы получим, если силу 3 кг поделим на вызываемое этой силой смещение:

$$k = \frac{3}{9} \text{ кг/см} = \frac{1}{3} \text{ кг/см},$$

после чего определим по формуле (10) § 97

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gk}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,5 \cdot 3}{981}} \text{ сек.} = 0,55 \text{ сек.}$$

Пример 2. Определить период колебаний математического маятника длины l .

Математическим маятником называется такой маятник, весом нити которого в условиях задачи можно пренебречь.

Решение. Обозначим через m массу груза маятника. Предположим, что маятник отклонен на угол φ от вертикали. Силой, движущей груз маятника по направлению к положению равновесия, является составляющая силы тяжести P_t , перпендикулярная к нити (рис. 242). По сказанному на стр. 377, эта составляющая P_t при малом угле отклонения φ приблизительно равна по численному значению $P\varphi$ и направлена к положению равновесия, откуда

$$P_t = -P\varphi = -mg\varphi, \quad (8)$$

где g — ускорение силы тяжести; знак минус означает, что сила P_t направлена в сторону, противоположную той, в которую отсчитываются положительные углы φ .

Касательное к траектории груза ускорение равно $l\ddot{\varphi}$, откуда по второму закону Ньютона:

$$ml\ddot{\varphi} = P_t$$

или по (8)

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi, \quad \text{откуда} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Обозначим g/l через ω^2 , получим

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi.$$

Это уравнение относительно углового смещения маятника φ вполне аналогично уравнению (5) § 97. Поэтому φ явится периодической во времени функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (9)$$

Формула (9) и дает искомый период колебания математического маятника, который, оказывается, зависит лишь от длины маятника l и ускорения силы тяжести g в данном месте земного шара.

Пример 3. Определить период колебания около оси O (рис. 245) тела, весом P , центр тяжести которого C расположен на расстоянии a от оси вращения. Углы отклонения φ тела от положения равновесия считать малыми.

Решение. Силу тяжести P можно считать приложенной к центру тяжести C . Как и в предыдущем примере, тело будет двигаться к положению равновесия под влиянием составляющей силы тяжести P_t , которая при малых углах φ приближенно равна

$$P_t = -P\varphi.$$

Момент этой силы по отношению к оси вращения O (см. § 35) равен

$$M = P_t a = -P\varphi a. \quad (10)$$

Под влиянием этого момента M тело приобретает угловое ускорение $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ (см. § 35), равное

$$\beta = \frac{M}{I},$$

где I — момент инерции тела относительно оси O . Подставляя в это последнее выражение вместо M его значение по (10) и $\ddot{\varphi}$ вместо β , получим

$$\ddot{\varphi} = -\frac{P \cdot a}{I} \varphi.$$

Рис. 245. Колебания тяжелого тела около оси O .

Это уравнение вполне аналогично уравнению (5) § 97 или уравнению относительно φ , рассмотренному в предыдущем примере. Отсюда мы получаем: при малых углах отклонения φ тело будет совершать около положения равновесия гармоническое колебательное движение с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pa}}; \quad (11)$$

воспользовавшись соотношением $P = mg$, где m — масса тела, перепишем выражение для периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (11a)$$

Тело, способное указанным образом колебаться около положения равновесия, называется *физическим маятником*.

Величину

$$L = \frac{I}{ma} \quad (12)$$

принято называть *приведенной длиной физического маятника*.

Так как в выражение момента инерции I (см. § 35) входит масса, то приведенная длина физического маятника L не зависит от его полной массы, а зависит только от его геометрической формы и от распределения масс. Подставляя в (11а) значение приведенной длины маятника, получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}};$$

таким образом, формула для периода колебания физического маятника принимает вид, аналогичный формуле для периода колебаний математического маятника [формула (9) предыдущего примера].

§ 99. Энергия гармонического колебательного движения. Пусть материальная точка массы m совершает колебания под влиянием квазиупругой силы

$$f = -kx,$$

где x — смещение точки из положения равновесия. Совершая колебания, материальная точка обладает скоростью, а следовательно, и кинетической энергией

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2. \quad (1)$$

Кроме того, колеблющаяся точка будет обладать и потенциальной энергией. То обстоятельство, что точка имеет различную скорость в различных положениях, показывает, что кинетическая энергия точки E_k меняется со временем. Очевидно, что меняется при этом и потенциальная энергия. Потенциальная энергия измеряется работой внешних сил, которая совершена для того, чтобы вызвать определенное смещение x . Как было показано в § 25, работа упругой силы численно равна $kx^2/2$. Таким образом, получаем для потенциальной энергии E_p выражение:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (2)$$

Подставляя в формулы (1) и (2) вместо v и x их значения по выражениям (1) и (2) § 98, получим:

$$E_k = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (1a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (2a)$$

Кинетическая энергия E_k имеет значение нуль там, где потенциальная достигает максимума, т. е. в положениях крайнего отклонения; кинетическая энергия достигает максимума при прохождении через положение равновесия, потенциальная энергия в этой точке равна нулю.

Полная энергия E колеблющейся точки выразится суммой энергий обоих видов, т. е.

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Так как, согласно принятому обозначению, $m\omega^2 = k$, то это выражение можно написать в виде:

$$E = \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega t + \alpha),$$

откуда

$$E = \frac{1}{2} k a^2, \quad (3)$$

т. е. полная энергия E пропорциональна квадрату амплитуды колебания и пропорциональна коэффициенту упругости k .

Воспользовавшись равенством $k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2}$, можно формулу (3) переписать также в виде:

$$E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} a^2. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) видно, что *полная энергия постоянна во все время колебания*, как это и должно быть на основании закона сохранения энергии.

В положениях крайнего смещения вся энергия переходит в потенциальную, при прохождении через положение равновесия вся энергия переходит в кинетическую; во всех прочих положениях колеблющейся точки имеются энергии обоих видов. Графическое изображение энергии при колебательном движении было рассмотрено в § 29.

Из сказанного видно, что во время колебательного движения энергия все время переходит из потенциальной в кинетическую и обратно. При этом за один период T полная энергия E *дважды* целиком переходит в кинетическую энергию E_k (при двух прохождениях положения равновесия) и *дважды* целиком переходит в потенциальную энергию E_p (при обоих крайних положениях). В известном смысле можно при этом говорить о „колебании“ энергии, подразумевая под этим ее переход то в кинетическую, то в потенциальную. Из сказанного видно, что это „колебание“ энергии происходит с периодом T' , вдвое меньшим, чем период самого колебательного движения T .

Рассмотрим следующий *п р и м е р* на определение энергии колебания.

Определить энергию колебания груза, подвешенного к пружине, по следующим данным: груз в начальный момент оттянут на 8 см из положения равновесия и затем предоставлен самому себе. Относительно пружины известно, что она вытягивается под влиянием силы в 2 кг на 1 см.

Р е ш е н и е. Так как в начальный момент груз не имеет скорости ($v_0 = 0$), то амплитуда колебаний $a = x_0 = 8$ см.

Коэффициент упругости k определится следующим образом:

$$k = \frac{2}{1} \text{ кг/см} = 2 \text{ кг/см} = 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \text{ дин/см},$$

откуда полная энергия

$$E = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \cdot 64 \text{ эрг} \cong 6,3 \cdot 10^7 \text{ эрг} = 6,3 \text{ дж.}$$

Следует обратить внимание, что этот результат не зависит от массы колеблющегося тела.

§ 100. Сложение колебаний, происходящих вдоль одной прямой. Часто приходится иметь дело с таким движением, при котором тело участвует одновременно в двух или нескольких колебаниях. Например, если мы подвесим груз на пружине к потолку рессорного вагона, то груз будет совершать колебания относительно точки подвеса, которая, в свою очередь, совершает колебания на рессорах вагона; таким образом, груз будет совершать движение, складывающееся из двух колебаний одного направления.

Рассмотрим, какое результирующее движение получается при сложении колебаний.

Начнем с рассмотрения сложения двух колебаний одинакового направления и одинакового периода, происходящих с некоторой разностью фаз и имеющих разные амплитуды. Возьмем колебания:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (1)$$

Круговые частоты ω обоих колебаний одинаковы, так как по предположению равны их периоды.

Смещение x из положения равновесия, при участии тела одновременно в обоих колебаниях, выразится алгебраической суммой смещений x_1 и x_2 :

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (2)$$

Выполним это сложение графически. Представим оба колебания векторами амплитуд (см. § 97), отложенными от произвольной точки O , лежащей на оси X (рис. 246). Амплитуда a_1 откладывается в начальный момент под углом α_1 к оси X , амплитуда a_2 — под углом α_2 . Обе амплитуды вращаются с одинаковой угловой скоростью ω против часовой стрелки. Следовательно, угол между векторами a_2 и a_1 все время остается равным $\alpha_2 - \alpha_1$. Так как сумма проекций двух векторов на некоторую ось равна проекции на ту же ось вектора,

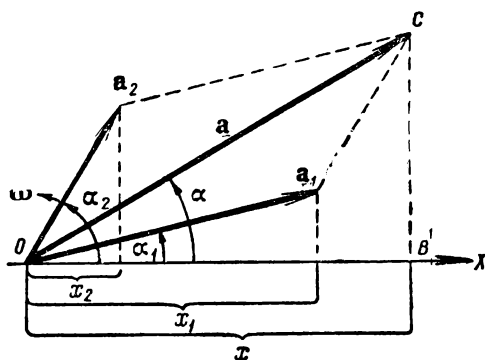


Рис. 246. Сложение векторов, представляющих гармонические колебательные движения одного периода.

являющегося их суммой, то результирующее колебание может быть изображено вектором амплитуды a , получающимся геометрическим сложением векторов амплитуд a_1 и a_2 , т. е.

$$a = a_1 + a_2. \quad (3)$$

Из рис. 246 имеем

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4)$$

Вектор результирующей амплитуды a , очевидно, вращается с той же угловой скоростью, что и векторы амплитуд складываемых колебаний.

Угол α , который образует вектор результирующей амплитуды с осью X в начальный момент, как видно из рис. 246, равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (5)$$

Само результирующее колебание выразится проекцией вектора амплитуды a на ось X , т. е. оно будет равно

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (6)$$

Таким образом, мы видим, что результирующее движение представляет собою гармоническое колебание, происходящее вдоль той же прямой, что и складываемые, и с периодом, равным периоду складываемых колебаний. Амплитуда a и начальная фаза α результирующего колебания определяются соответственно через амплитуды и начальные фазы складываемых колебаний по формулам (4) и (5).

Важно заметить, что, согласно формуле (4), *амплитуда результирующего колебания a зависит от разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ складываемых колебаний*. Так как косинус не может быть больше $+1$ и меньше -1 , то из формулы (4) видно, что результирующая амплитуда a не больше суммы и не меньше разности складываемых амплитуд a_1 и a_2 , т. е. она заключена в пределах

$$a_1 + a_2 \geq a \geq |a_2 - a_1|.$$

Если разность фаз складываемых колебаний *равна 0 или $2k\pi$* , где k — целое число, то косинус разности фаз равен $+1$, и мы получаем по формуле (4)

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2, \text{ откуда } a = a_1 + a_2,$$

т. е. *амплитуда результирующего колебания a равна сумме амплитуд складываемых колебаний a_1 и a_2 при разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$*

Если *разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу π* , то косинус разности фаз равен -1 , и для амплитуды a получаем по (4) значение:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2, \text{ откуда } a = |a_2 - a_1|.$$

Мы берем здесь абсолютное значение разности $a_2 - a_1$, так как амплитуда a по самому смыслу амплитуды может быть лишь величиной положительной.

Отсюда амплитуда результирующего колебания a равна абсолютному значению разности амплитуд складываемых колебаний a_2

и a_1 при разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

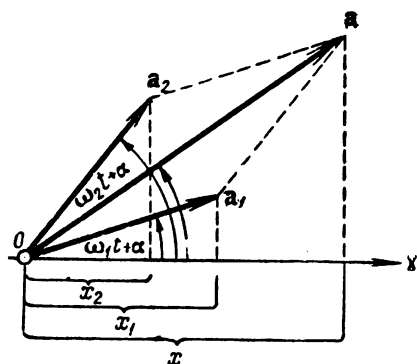


Рис. 247. Сложение векторов, представляющих гармонические колебательные движения разных периодов.

ω_1 и ω_2 . Так как разность фаз складываемых колебаний переменна, то можно в качестве начального момента взять такой, при котором начальные фазы обоих колебаний одинаковы, т. е. представить колебания в виде:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha), \quad (7)$$

где предположим, что $\omega_2 > \omega_1$.

Разность фаз складываемых амплитуд будет равна $(\omega_2 - \omega_1)t$. Подставляя это значение разности фаз в формулу (4) вместо $\alpha_2 - \alpha_1$, получим для квадрата результирующей амплитуды

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t. \quad (8)$$

Таким образом, величина амплитуды a результирующего колебания меняется со временем с определенным периодом.

Угловая скорость вращения вектора результирующей амплитуды при этом непостоянна, так что результирующее движение *не является гармоническим колебанием*.

Рассмотрим специально результат сложения двух колебаний равных амплитуд $a_1 = a_2$, периоды и, следовательно, круговые частоты которых очень мало отличаются друг от друга.

Полагая в формуле (8) $a_1 = a_2$, получим

$$a^2 = 2a_1^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t] = 4a_1^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

или

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (9)$$

Мы берем здесь, как и на стр. 388, абсолютное значение величины, стоящей справа, так как амплитуда есть величина существенно положительная. Период *абсолютного* значения косинуса равен π ; следовательно, период τ изменения абсолютного значения амплитуды будет тем промежутком времени, за который аргумент косинуса изменится на π , т. е. τ определится из условия:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau = \pi,$$

откуда

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (10)$$

Частота ν изменения амплитуды, т. е. величина, обратная периоду τ , равна

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1, \quad (10a)$$

т. е. частота ν изменения амплитуды *резльтирующего колебания равна разности частот $\nu_2 - \nu_1$ слагаемых колебаний*. Угол, который образует результирующая амплитуда с осью X , как видно из рис. 247, равен $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha$, следовательно, вектор результирующей амплитуды в этом случае вращается с постоянной угловой скоростью, равной полусумме круговых частот слагаемых колебаний. Результирующее движение мы получим, если возьмем проекцию вектора результирующей амплитуды на ось X , откуда результирующее смещение x равно

$$x = a \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right)$$

или по (9)

$$x = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right). \quad (11)$$

Так как по предположению ω_2 очень близко к ω_1 , то величина $\omega' = \omega_2 - \omega_1$ мала по сравнению с величиной $\omega_1 + \omega_2$, откуда мы имеем: результирующее колебание (11) можно рассматривать как гармоническое колебательное движение, происходящее с круговой частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которого a , однако, сама не остается постоянной, но медленно меняется периодически со временем, согласно соотношению (9). Период τ изменения амплитуды a дается формулой (10). Графически колебание такого рода представлено

на рис. 248. Амплитуда этого колебания то увеличивается, то уменьшается; это явление носит название *биения*.

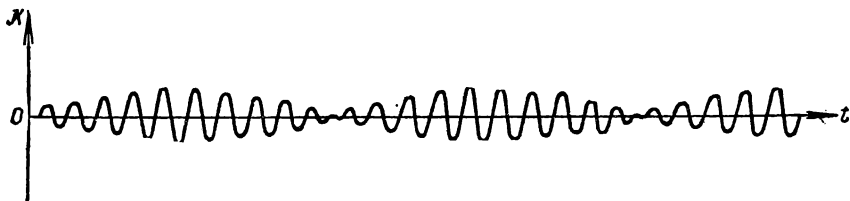


Рис. 248. Биение.

§ 101. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим теперь результат сложения двух колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях. Предположим сперва, что материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковыми периодами. Пусть за направления колебаний взяты оси OX и OY .

Тогда уравнения колебаний будут:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2), \quad (1)$$

где a_1 и a_2 , α_1 и α_2 — соответственно амплитуды и фазы первого и второго колебаний.

Определим уравнение траектории точки, для чего исключим из уравнений (1) время.

Перепишем уравнения (1) в виде:

$$\frac{x}{a_1} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_1 - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_1, \quad (2)$$

$$\frac{y}{a_2} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_2 - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_2. \quad (2a)$$

Умножая (2) на $\cos \alpha_2$ и (2a) на $\cos \alpha_1$ и беря их разность, получим

$$\frac{x}{a_1} \cos \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \cos \alpha_1 = \sin \omega t \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Умножая (2) на $\sin \alpha_2$ и (2a) на $\sin \alpha_1$ и беря их разность, получим

$$\frac{x}{a_1} \sin \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \sin \alpha_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Возводя в квадрат и складывая почленно последние два уравнения, находим уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3)$$

Это уравнение представляет, вообще говоря, *уравнение эллипса*, характеристики которого определяются значением разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1$.

Разберем частные случаи. Пусть разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ слагаемых колебаний равна нулю, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Уравнение траектории (3) в этом случае примет вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0 \text{ или } \left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{a_1}{a_2},$$

т. е. мы получили уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью OX угол, тангенс которого равен $\frac{a_2}{a_1}$ (рис. 249а).

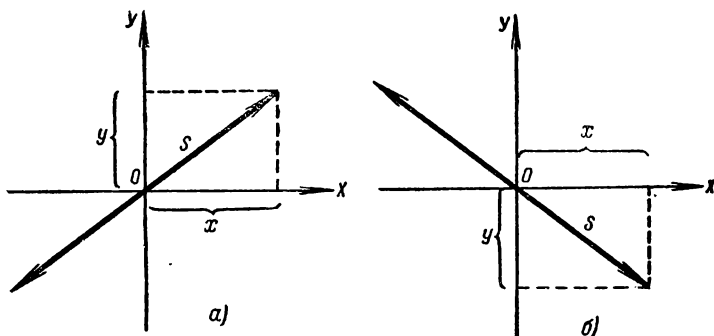


Рис. 249. При сложении двух взаимно перпендикулярных колебательных движений, происходящих с одинаковыми или противоположными фазами, возникает гармоническое колебательное движение вдоль прямой.

По этой прямой точка совершает гармоническое колебание, так как положение точки на прямой дается отрезком s , равным

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a_1^2 \cos^2(\omega t + \alpha) + a_2^2 \cos^2(\omega t + \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos(\omega t + \alpha);$$

период результирующего колебания равен периоду слагаемых колебаний, а амплитуда a результирующего колебания равна

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Предположим теперь, что разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ слагаемых колебаний равна π , т. е.

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi.$$

Уравнение траектории (3) в этом случае примет вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0, \text{ откуда } \frac{x}{y} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Это уравнение представляет собою уравнение прямой, расположенной, как показано на рис. 249б; по этой прямой точка совершает гармоническое колебание с той же амплитудой, что и в предыдущем случае.

Если разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ слагаемых колебаний равна $\pi/2$ или $3\pi/2$, то уравнение траектории имеет вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \quad (4)$$

Это — уравнение эллипса, отнесенного к осям OX и OY (рис. 250).

Если разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, то точка движется по эллипсу по часовой стрелке. Это можно показать, если написать уравнения слагаемых колебаний в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= a_2 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -a_2 \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

В некоторый момент времени аргумент обоих выражений равен нулю; при этом колеблющаяся точка находится в точке A (рис. 250);

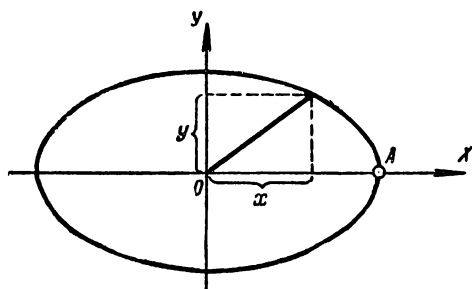


Рис. 250. Возникновение эллиптического движения при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений.

в следующий момент времени аргумент возрастает, следовательно, x будет положительным, y — отрицательным; точка пойдет вниз и сдвинется по направлению часовой стрелки. Если разность фаз слагаемых колебаний равна $3\pi/2$, то аналогичным рассуждением можно показать, что точка по эллипсу движется против часовой стрелки.

При изменении знака разности фаз движение по эллипсу меняет свое на-

правление на обратное, например при $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ получаем движение против часовой стрелки, а при $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{3\pi}{2}$ — по часовой стрелке. Очевидно, что при равенстве амплитуд эллипс превращается в окружность.

Таким образом, два взаимно перпендикулярных гармонических колебания

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

которые можно переписать в виде

$$x = a \cos \omega t, \quad y = -a \sin \omega t, \quad (5a)$$

дают в сумме равномерное движение по окружности радиуса a с угловой скоростью ω , происходящее по часовой стрелке.

Обратно, равномерное движение, происходящее по окружности радиуса a по часовой стрелке, с угловой скоростью ω , может быть разложено на два взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движения, представляемых формулами (5) или (5a).

Также два взаимно перпендикулярных гармонических колебания:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \cos \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) = a \sin \omega t \quad (6)$$

дают в сумме равномерное движение по окружности радиуса a , с угловой скоростью ω , происходящее против часовой стрелки.

Все прочие значения разности фаз, кроме $\pm \pi/2$ и $\pm 3\pi/2$, дают эллипсы, не приведенные к осям OX и OY . Некоторые из возможных видов траекторий, возникающих при сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений одного периода, изображены на рис. 251.

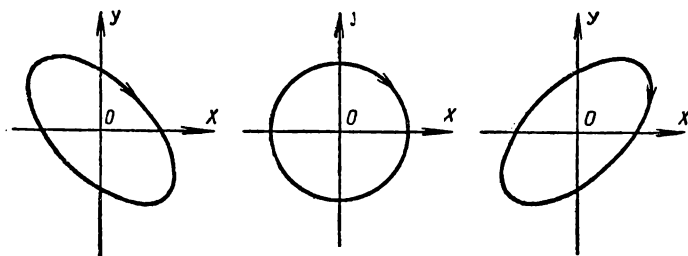


Рис. 251. Различные виды траекторий движений, возникающих при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений одного периода.

Из приведенного рассмотрения следует, что движение точки по эллипсу также может быть разложено на два взаимно перпендикулярных колебания, разность фаз между которыми определяется видом эллипса и направлением движения точки.

Если взаимно перпендикулярные колебания происходят с различными периодами, то в результате сложения колебаний получаются траектории более сложной формы, изображенные для некоторых частных случаев на рис. 252; эти траектории называются *фигурами Лисажу*.

Наконец, рассмотрим возможность разложить прямолинейное колебание точки на два „круговых колебания“. Чтобы уяснить это, обратимся к рис. 253. Представим себе, что точка одновременно участвует

в двух смещениях из положения равновесия O . Одно смещение представлено вектором OA , другое — вектором OA_1 , численно равным OA . Длину каждого из этих векторов обозначим через a . Результирующее смещение выражается геометрической суммой обоих смещений; следовательно, положение точки будет даваться точкой B рис. 253. Предположим, что векторы смещения вращаются вокруг точки O в двух противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью ω , тогда результирующее смещение будет откладываться по прямой OB , которую назовем осью X . Расстояние точки B от положения равновесия O в некоторый момент времени определится величиною x , которая, как видно из рисунка, равна

$$x = 2a \cos(\omega t + \alpha),$$

т. е. результирующее смещение представляет собою гармоническое колебание с амплитудой, равной удвоенному радиусу окружности, по которой вращаются концы векторов OA и OA_1 . Период колебания равен периоду обращения векторов смещения.

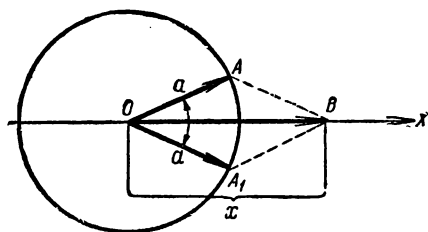


Рис. 253. Сложение двух круговых колебаний, представляемых векторами OA и OA_1 , вращающимися в противоположных направлениях.

половине амплитуды колебания, и векторы расположены в каждый данный момент симметрично по отношению к прямой, по которой происходит колебание.

§ 102. Затухающие колебания. На практике всякое колебание материальной точки, которое не поддерживается извне, затухает, амплитуда его колебания с течением времени уменьшается. Причина затухания обуславливается силами, тормозящими движение, например, силой трения в месте подвеса при колебании маятника или силой сопротивления среды. Чтобы исследовать этот вопрос, надо написать уравнение, выражающее второй закон Ньютона, принимая в расчет силы сопротивления. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда точка совершает прямолинейное колебание в вязкой среде. Сила

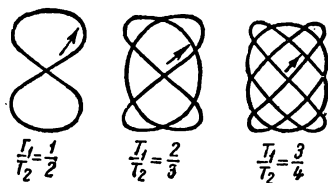


Рис. 252. Различные виды траекторий движений, возникающих при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений различных периодов.

сопротивления среды зависит от скорости движения точки и, как мы видели (§ 42), в случае малых скоростей ее можно считать пропорциональной скорости; направлена она в сторону, противоположную скорости; таким образом, силу сопротивления можно положить равной $-r\dot{x}$, где r — постоянная величина, называемая *коэффициентом сопротивления*. Эта сила прибавится к упругой силе $-kx$, откуда полная сила, действующая на точку, равна $f = -kx - r\dot{x}$ и, следовательно, второй закон Ньютона может быть написан в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (1)$$

Деля правую и левую части этого уравнения на массу m , получим

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}. \quad (1a)$$

Введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad (2)$$

где ω_0^2 и β — положительны. Тогда уравнение (1a) примет вид:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}. \quad (16)$$

С помощью подстановки можно уравнение (16) привести к виду, уже рассмотренному нами в § 97. Для этого введем новую переменную z , связанную с x соотношением:

$$x = z \cdot e^{-\beta t}. \quad (3)$$

Проведем замену переменных в уравнении (16), пользуясь равенствами:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{-\beta t} \cdot \dot{z} - \beta e^{-\beta t} \cdot z; \\ \ddot{x} &= e^{-\beta t} \cdot \ddot{z} - 2\beta e^{-\beta t} \cdot \dot{z} + \beta^2 e^{-\beta t} z. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (16) и сокращая все члены на множитель $e^{-\beta t}$, получаем

$$\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z + 2\beta^2 z - 2\beta\dot{z}$$

или

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)z. \quad (4)$$

Положим, что сопротивление среды настолько мало, что $\omega_0^2 > \beta^2$.¹ Тогда $\omega_0^2 - \beta^2$ есть величина положительная, и мы можем ввести обозначение: $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, после чего уравнение (4) принимает вид:

$$\ddot{z} = -\omega^2 z. \quad (4a)$$

¹ При большом сопротивлении среды $\beta^2 > \omega_0^2$; тогда, как можно показать, движение становится неперiodическим. Этот случай мы не будем рассматривать.

Уравнение (4а) совпадает с уравнением (5) § 97, решение которого нам известно. Поэтому по аналогии мы можем написать решение уравнения (4а) в виде:

$$z = a_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

где a_0 и α — постоянные, которые должны быть определены из начальных условий. Повторяя все рассуждения, приведенные в § 97, заключаем, что z меняется периодически, причем период изменения z равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

или, подставляя вместо ω его значение $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6)$$

Воспользовавшись выражениями (2), можно представить период колебаний T еще в виде:

$$T = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - \frac{1}{4}r^2}}. \quad (6a)$$

Подставляя в решение (5) вместо z его значение, получаем по формуле (3) уравнение движения точки под действием упругой силы в среде с сопротивлением:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

которое можно также представить в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (7a)$$

Это решение представляет собою *колебание с амплитудой $a = a_0 e^{-\beta t}$, уменьшающейся с течением времени*. Период колебания

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ в среде с сопротивлением *больше*, чем период колебания $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ точки такой же

массы m под действием такой же упругой силы $f = -kx$ в среде без сопротивления. График зависимости x от времени представлен на рис. 254. Как видно, колебания затухают со временем.

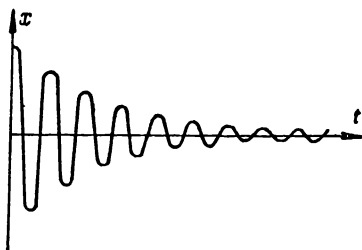


Рис. 254. Затухающие колебания.

Логарифм отношения двух последовательных значений амплитуд, отстоящих друг от друга на время, равное периоду T , называется

логарифмическим декрементом затухания. Обозначив логарифмический декремент буквой λ , имеем по определению

$$\lambda = \ln \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}, \text{ т. е. } \lambda = \beta T. \quad (8)$$

Вводя в выражение (7) вместо β логарифмический декремент λ по формуле (8) и вместо ω — период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим еще следующее выражение для затухающих колебаний:

$$x = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha \right), \quad (76)$$

где период T определяется формулой (6) или (6а).

Логарифмический декремент λ можно определить непосредственно из наблюдений, измерив значения амплитуд a_1 и a_3 двух последующих колебаний, тогда по определению:

$$\lambda = \ln \frac{a_1}{a_3}.$$

Зная λ , можно, пользуясь соотношением

$$r = 2\beta m = 2 \frac{\lambda}{T} m,$$

определить коэффициент сопротивления r .

По формуле (7) колебания прекращаются полностью лишь через бесконечно большой промежуток времени. На самом деле колебания прекращаются через конечный промежуток времени, так как при амплитуде одного порядка величины с атомными размерами колебания макроскопической системы, как целого, невозможны. Энергия, сообщенная системе при выводе ее из положения равновесия, при наличии затуханий, понемногу тратится на работу против сил трения. Чтобы поддержать колебания незатухающими, к системе надо непрерывно подводить извне энергию.

Примером системы, колебания которой, несмотря на наличие сил трения, происходят благодаря подводимой энергии с неизменной амплитудой, может служить часовой маятник. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза.

Система такого рода, поддерживающая неизменной амплитуду своих колебаний, носит название *автоколебательной системы*.

Для того чтобы составить более конкретное представление о затухающих колебаниях, разберем два следующих примера.

Пример 1. Логарифмический декремент колебаний маятника равен $\lambda = 0,02$. Определить, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний после 100 полных качаний маятника.

Решение. В начальный момент времени $t=0$ амплитуда колебаний

$$a = a_0 e^{-\beta t} = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

равна a_0 .

После 100 колебаний, т. е. в момент времени $t=100 T$, амплитуда колебаний равна

$$a_{100} = a_0 e^{-\lambda \cdot 100}, \text{ откуда } \frac{a_0}{a_{100}} = \frac{1}{e^{-\lambda \cdot 100}} = e^{\lambda \cdot 100} = e^2 \cong 7,4,$$

т. е. амплитуда колебаний маятника уменьшается после 100 колебаний в 7,4 раза.

Пример 2. Определить логарифмический декремент затухающих колебаний маятника длиной $l=50$ см, если он за 8 мин. качаний теряет 99% своей энергии.

Решение. Обозначим энергию колебаний маятника в начальный момент через E_0 , а энергию его колебаний через время $t=8$ мин. = 480 сек. — через E_t , тогда по условию

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{1}{100}.$$

Так как энергия колебаний прямо пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$\frac{a_t}{a_0} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

Амплитуда в начальный момент $t=0$ равна a_0 ; амплитуда через время t равна $a_t = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$, где T — период колебаний маятника, откуда

$$\frac{a_t}{a_0} = e^{-\lambda \frac{t}{T}} = \frac{1}{10}, \text{ а искомый декремент затухания } \lambda \text{ равен } \lambda = \frac{T}{t} \ln 10.$$

Ввиду слабости затуханий, можно приближенно выразить период колебаний T , пользуясь обычной формулой для периода колебаний маятника:

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

тогда

$$\lambda \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\ln 10}{t} = 0,0068.$$

§ 103. Вынужденные колебания. Рассмотрим теперь колебания, которые совершает материальная точка, если на нее, кроме упругой силы и сил сопротивления, действует еще добавочная периодическая сила. Пример такого случая мы имеем, если груз, подвешенный на пружине, добавочно подталкивается, причем толчки происходят через равные промежутки времени. Мы предположим, что эта добавочная *вынуждающая сила* f_1 меняется со временем по закону синуса или косинуса, т. е. что она, например, имеет вид:

$$f_1 = H \cos \omega t. \quad (1)$$

Такое предположение сводится к тому, что сила меняется во времени периодически с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$; величина H называется амплитудой силы и представляет наибольшее значение силы.

В этом случае уравнение, выражающее второй закон Ньютона, напишется в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + H \cos \omega t; \quad (2)$$

справа стоит сумма силы упругости $-kx$, силы сопротивления среды $-r\dot{x}$ и вынуждающей силы $H \cos \omega t$. Перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + h \cos \omega t, \quad (2a)$$

где ω_0 и β имеют те же значения, что и в § 102 [формула (2)], а h равно отношению амплитуды силы к массе точки

$$h = \frac{H}{m}. \quad (3)$$

При отсутствии вынуждающей силы ($h \cos \omega t = 0$) и силы трения точка колеблется с круговой частотой ω_0 (*собственные колебания*).

Попробуем теперь найти решение уравнения (2a), положив x равным

$$x = a \cos (\omega t + \alpha); \quad (4)$$

другими словами, мы будем искать решение, предполагая, что в результате действия всех сил получится колебание периода, равного периоду вынуждающей силы. Подставляя функцию (4) в уравнение (2a), определим величины a и α из требования, чтобы уравнение обратилось в тождество. Для первой и второй производных от x по t из выражения (4) найдем

$$\dot{x} = -a\omega \sin (\omega t + \alpha), \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha);$$

подставляем эти значения \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (2a), получим $-a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha) = -\omega_0^2 a \cos (\omega t + \alpha) + 2\beta a \omega \sin (\omega t + \alpha) + h \cos \omega t$, или, представляя тригонометрические функции от сложного аргумента в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} -a\omega^2 (\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) = \\ = -\omega_0^2 a (\cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha) + \\ + 2\beta a \omega (\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \sin \alpha) + h \cos \omega t. \end{aligned}$$

Чтобы это уравнение обратилось в тождество, надо, чтобы коэффициенты при $\cos \omega t$ в обеих частях равенства были равны и коэффициенты при $\sin \omega t$ в обеих частях равенства были также равны;

таким образом, получаем

$$\begin{aligned} -a\omega^2 \cos \alpha &= -a\omega_0^2 \cos \alpha + 2\beta a\omega \sin \alpha + h, \\ a\omega^2 \sin \alpha &= a\omega_0^2 \sin \alpha + 2\beta a\omega \cos \alpha \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha - 2\beta a\omega \sin \alpha &= h, \\ a(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \alpha + 2\beta a\omega \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из второго уравнения (5) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Возводя в квадрат и складывая оба уравнения (5), имеем

$$a^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = h^2,$$

откуда

$$a = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) определяют фазу и амплитуду установившихся *вынужденных колебаний*.¹

Если тело первоначально покоилось, а затем на него начала действовать вынуждающая сила $f_1 = H \cdot \cos \omega t$, то оно начнет совершать вынужденные колебания, амплитуда которых будет возрастать, пока не достигнет значения, определяемого равенством (7). Возрастание со временем амплитуды вынужденных колебаний представлено на рис. 255. Когда вынужденные колебания установились, дальнейшее возрастание амплитуды прекращается.

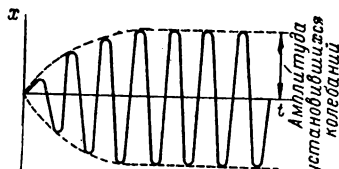


Рис. 255. Возрастание со временем амплитуды вынужденных колебаний.

Из формул (6) и (7) видим, что амплитуда a и фаза α вынужденных колебаний зависят от соотношения частоты ω вынуждающей силы и частоты ω_0 собственных колебаний точки. Колебание, вообще говоря, происходит не „в фазе“ с силой, т. е. наибольшего смещения точка достигает не в тот момент, когда сила наибольшая. Из формулы (6) видно, что если сопротивление среды равно нулю, т. е. $\beta = 0$, то в этом случае колебание и сила имеют одинаковые фазы; во всех прочих случаях фаза $\alpha \neq 0$. Наиболее интересным пред-

¹ В теории дифференциальных уравнений показывается, что для определения общего решения уравнения (2а) необходимо решение (4) сложить с решением уравнения $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta \dot{x}$; однако решение этого последнего уравнения, как было выяснено в § 102, представляет собою затухающие колебания, которые с течением времени перестают играть заметную роль. Решение же (4) является незатухающим и имеет место во все время существования вынуждающей силы f_1 .

ставляется выражение (7) для амплитуды вынужденных колебаний. Амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде силы. Если меняется частота ω вынуждающей силы при постоянной частоте ω_0 собственных колебаний, то при этом будет меняться и амплитуда вынужденных колебаний. Можно показать, что амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при частоте вынуждающей силы $\omega_{\text{рез}}$, удовлетворяющей соотношению $\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$.¹ Появление такого максимума представляет собою явление *резонанса*. На основании полученного соотношения *резонансная частота* $\omega_{\text{рез}}$ равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (8)$$

При этом по (7) максимальная (резонансная) амплитуда достигает значения

$$a_{\text{рез}} = \frac{h}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (9)$$

Если сопротивление среды равно нулю, т. е. $\beta = 0$, то максимум амплитуды получается при

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0,$$

т. е. когда частота вынуждающей силы ω делается равной частоте ω_0 собственных колебаний; в этом случае амплитуда вынужденных колебаний становится бесконечно

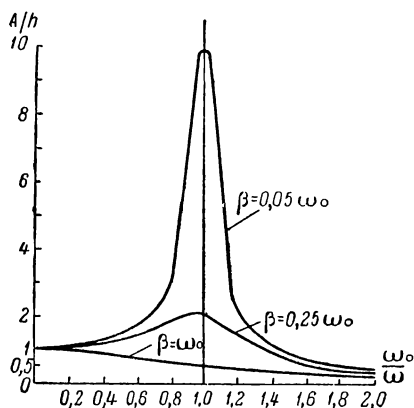


Рис. 256. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы для различных коэффициентов затухания.

большой. При отличном от нуля значении β амплитуда никогда не достигает бесконечности, и максимум ее получается при значениях $\omega_{\text{рез}}$, меньших ω_0 . Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приведена на рис. 256 для разных значений β . Мы видим, что чем больше коэффициент затухания β , тем менее остро выражен максимум амплитуды.

Кривые рис. 256 называются *резонансными кривыми*. Резонансные кривые имеют тем более высокий и острый максимум, чем меньше затухание β резонирующей системы. Так как на самом деле β всегда отлично от нуля, то

бесконечно больших амплитуд при резонансе получиться не может.

Рассмотрим еще зависимость фазы вынужденных колебаний α от частоты [формула (6)]. При $0 \leq \omega < \omega_0$ для тангенса получаются

¹ Чтобы в этом убедиться, надо найти минимум знаменателя выраже-

отрицательные значения, следовательно, для α получим следующие неравенства: $0 \geq \alpha > -\frac{\pi}{2}$ или $\pi \geq \alpha > \frac{\pi}{2}$. Полагая в первом из уравнений (5) $\omega = 0$, найдем: $a\omega_0^2 \cos \alpha = h$; а так как амплитуды a и h положительны, то при $\omega = 0$ получаем, что $\cos \alpha$ должен быть больше нуля. Это условие заставляет выбрать из двух неравенств одно: $0 \geq \alpha > -\frac{\pi}{2}$. Таким образом, при $0 \leq \omega \leq \omega_0$ разность фаз α отрицательна, т. е. вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы. При приближении значения ω к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ отставание по фазе возрастает. При условии резонанса, когда $\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, по формуле (6) фаза вынужденных колебаний определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}.$$

В случае острого резонанса β мало и для $\operatorname{tg} \alpha$ приближенно получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\omega_0}{\beta}.$$

Так как ω_0/β велико, то фаза α близка к $-\pi/2$. Для $\omega = \omega_0$ фаза $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

При $\omega > \omega_0$ тангенс угла α положителен,

следовательно, $\alpha < -\frac{\pi}{2}$, т. е. отставание по фазе еще больше. Для частот вынуждающей силы, много больших частоты собственных колебаний ω_0 , фаза α , оставаясь отрицательной, стремится к $-\pi$. Зависимость α от отношения ω/ω_0 представлена графически на рис. 257 для двух разных значений β : кривая 1 относится к меньшему значению β (малое затухание), кривая 2 — к большему значению β (большое затухание).

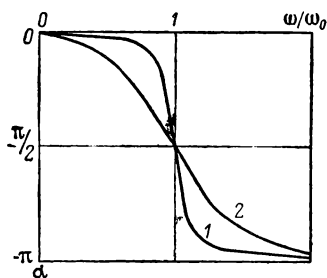


Рис. 257. Зависимость фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

Вблизи резонанса, где $\alpha \cong -\frac{\pi}{2}$, сила положительна во все время движения от максимального отрицательного смещения до максимального положительного смещения и отрицательна во время обратного движения, так что она непрерывно увеличивает размах колебаний. Это увеличение амплитуды колебаний происходит до тех пор, пока вся работа внешней силы не пойдет на преодоление силы

ния (7). Для этого приравниваем нулю производную знаменателя:

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Так как ω не нуль ($\omega = 0$ соответствует максимуму знаменателя), то знаменатель выражения (7) достигает минимума при

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

трения, вызывающей затухание колебаний. При этом достигается значение амплитуды установившихся вынужденных колебаний.

Работа внешней силы максимальна при разности фаз $-\pi/2$, т. е. при частоте, близкой к резонансной. При иных сдвигах фаз сила частично действует ускоряюще, частично же противодействует движению. При $\alpha=0$ или $\alpha=-\pi$ сила в течение половины времени ускоряет движение, в течение же другой половины времени противодействует ему, т. е. в общем не совершает никакой работы.

Отсюда следует, что вне области резонанса внешняя сила производит лишь незначительную работу, при резонансе же работа возрастает. Этот эффект выражен особенно сильно при остром резонансе. В этом случае β мало и, как видно из рис. 257, достаточно величине ω измениться от значений, немного меньших ω_0 , до значений, немного больших ω_0 , чтобы α изменилось от значения, близкого к $\alpha=0$, до значения, близкого к $\alpha=-\pi$. В этом смысле можно говорить об изменении разности фаз между силой и смещением на противоположную при переходе частоты через значение $\omega_0 \cong \omega_{\text{рез}}$.

Явления резонанса играют большую роль во многих физических процессах и в технике. В некоторых случаях в технике явления резонанса вредны. Рассмотрим, например, мотор с эксцентриком, укрепленный на подставке, способной совершать упругие колебания. При вращении мотор создает периодическую силу, сотрясающую подставку и приводящую ее в состояние вынужденных колебаний.

При наступлении резонанса мотор передает подставке значительную энергию, и амплитуда ее колебаний может достичь размеров, опасных для ее прочности. При дальнейшем возрастании числа оборотов мотора изменяется разность фаз между силой сотрясений и смещениями подставки, работа мотора на раскачивание подставки уменьшается, и число его оборотов возрастает, что также вредно, так как может привести к порче мотора.

Особый вид резонанса представляет собой так называемый *параметрический резонанс*. Колебания в системе могут возникнуть не только под влиянием рассмотренных вынуждающих сил, но и под влиянием периодического изменения одного из ее параметров, который при свободных колебаниях остается постоянным. Например, в механической системе колебания могут возникнуть в результате изменения ее момента инерции, размера, натяжений и т. д. Достижение максимальной амплитуды колебаний наступает при определенном отношении между частотой $\nu_{\text{п}}$ изменения параметра и средней частотой собственных колебаний $\bar{\nu}_0$, а именно, когда $\nu_{\text{п}}/\bar{\nu}_0 = 2/k$, где k — целое число, т. е. когда $\nu_{\text{п}}/\bar{\nu}_0$ принимает одно из значений: 2, 1, 1/2, 1/3 и т. д.

Условие возникновения параметрического резонанса выполняется тем легче, чем сильнее изменение параметра и чем меньше потери энергии системы (трение, сопротивление). Чаще всего параметричес-

кий резонанс возникает при $\frac{\nu_n}{\nu_0} = 2$. Простейшим примером параметрического резонанса служит раскачивание качелей, когда качающиеся приседают в такт с колебаниями качелей. В результате приседаний приведенная длина физического маятника, который представляют собой качели, периодически меняется. Другой пример параметрического резонанса — возбуждение колебаний в струне путем периодического изменения ее натяжения. Если частота периодического изменения натяжения струны близка к удвоенной частоте ее собственных колебаний, то в струне возникнут сильные поперечные колебания, хотя внешние силы (натяжение) действуют вдоль струны. Колебания, возникающие вследствие параметрического резонанса, могут оказаться вредными, например, в машинах, где имеются вращающиеся части, они могут привести к разрушению подшипников.

Разберем пример на вынужденные колебания.

Пример. Тело массой 400 г подвешено к пружине. Пружина растягивается на 1 см под влиянием силы 40 Г. Логарифмический декремент затухания колеблющегося тела $\lambda = 1,57$. Определить период колебаний, при котором наступает резонанс, и резонансную амплитуду, если амплитуда вынуждающей силы равна $H = 200$ Г.

Решение. При малом затухании $\omega \cong \omega_0$ и, следовательно, логарифмический декремент $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \beta \cong \frac{2\pi}{\omega_0} \beta$. Подставляя в формулу (8) вместо β его приближенное значение через λ , получим для резонансной частоты

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2};$$

в нашем случае

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1,57}{\pi} \right)^2} \cong 0,94 \omega_0;$$

отсюда

$$T_{\text{рез}} = \frac{1}{0,94} T_0 \text{ или } T_{\text{рез}} = 1,07 T_0,$$

где $T_{\text{рез}}$ — период, при котором происходит резонанс, T_0 — период собственных колебаний тела на пружине. По данным примера:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{400}{40 \cdot 981}} \text{ сек.} \cong 0,63 \text{ сек.}$$

Таким образом, резонанс имеет место при периоде

$$T_{\text{рез}} = 1,07 \cdot 0,63 \text{ сек.} \cong 0,67 \text{ сек.}$$

Введя в формулу (9) вместо h его значение H/m и вместо β логарифмический декремент λ , получим

$$a_{\text{рез}} = \frac{\frac{H}{m}}{\omega_0^2 \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2}},$$

откуда, пользуясь численными данными, найдем $a_{\text{рез}} \cong 10$ см.

§ 104. Представление негармонических колебательных процессов при помощи гармонических колебаний. До сих пор мы рас-

сма тривали в основном простое гармоническое колебательное движение, т. е. движение, при котором смещение x колеблющейся частицы из положения равновесия имеет вид:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

или, что то же самое (см. стр. 375)

$$x = a \sin(\omega t + \alpha'), \quad (1a)$$

где a — амплитуда колебаний, ω — круговая частота колебаний, α и α' — начальные фазы. Такое колебание графически изображается синусоидой.

Однако реальные колебания могут лишь более или менее точно походить на строго синусоидальные колебания, так как всякие реальные колебания сопровождаются затуханием (см. § 102). Кроме того, весьма часто колебания, вообще, носят более сложный характер. Тем не менее рассмотрение гармонических колебаний имеет большое значение, так как сложное колебание можно представить как сумму гармонических колебаний.

Мы видели (§ 100), что при сложении двух гармонических колебательных движений x_1 и x_2 , совершающихся вдоль одной и той же прямой и имеющих *одинаковую частоту* ω_1 , результирующее колебание является также гармоническим колебательным движением. Но так обстоит дело лишь при сложении колебаний одной частоты. При сложении двух гармонических колебательных движений *разных частот* суммарное колебание носит более сложный характер. На рис. 258 в верхней строке графически изображено гармоническое колебательное движение определенной частоты ω_1 и определенной амплитуды a_1 (по оси ординат отложено смещение x_1 , по оси абсцисс — время). В средней строке изображено другое гармоническое колебание x_2 , происходящее с частотой ω_2 , в 4,5 раза меньшей, чем частота ω_1 первого движения, и с амплитудой $a_2 = 2,5 a_1$. Наконец, в нижней строке представлено колебание, являющееся суммой двух первых; смещение x точки, совершающей это сложное колебание, в каждый данный момент равно

$$x = x_1 + x_2.$$

Мы могли бы поставить задачу обратно и, имея сложное колебание заданным, посмотреть, на сумму каких гармонических колебательных

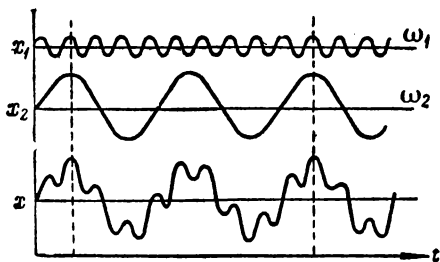


Рис. 258. Сложение двух гармонических колебательных движений частоты ω_1 и ω_2 .

движений оно разложимо. В случае сложного колебания, изображенного на нижней строке рис. 258, оно разложимо на два гармонических колебания, изображенных на двух других строках рис. 258.

В § 100 мы рассмотрели явление, известное под названием биения. Оно сводилось к тому, что два колебания $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha)$ и $x_2 = a_1 \cos(\omega_2 t + \alpha)$, частоты ω_1 и ω_2 которых близки друг к другу, при сложении дают колебание частоты $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ с амплитудой a , меняющейся по закону:

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (2)$$

Обратно, мы можем сказать, что сложное колебание, амплитуда которого меняется по закону (2), может быть разложено на два чисто гармонических колебательных движения с частотами ω_1 и ω_2 .

Аналогично можно себе представить иное сложное колебание, амплитуда которого медленно (по сравнению с периодом самих колебаний) меняется по какому-либо другому закону. Такого рода колебание носит название *модулированного колебания*. Модулированное колебание не представляет собою гармонического колебательного движения, но может быть разложено на ряд гармонических колебательных движений. Возьмем для примера колебание

$$x = a \cos \omega_0 t,$$

амплитуда которого меняется по закону:

$$a = a_1 + a_2 \cos \omega t,$$

где a_1 и a_2 постоянны, причем считаем $a_2 < a_1$ и $\omega \ll \omega_0$. Этот закон означает, что амплитуда a меняется со временем между значениями $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$. Подставив приведенное значение для a в выражение для x , получим

$$x = (a_1 + a_2 \cos \omega t) \cdot \cos \omega_0 t = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega t \cdot \cos \omega_0 t$$

или

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t, \quad (3)$$

т. е. рассматриваемое модулированное колебание может быть разложено на сумму трех гармонических колебательных движений с частотами ω_0 , $\omega_0 + \omega$ и $\omega_0 - \omega$ и соответственно с амплитудами a_1 , $a_2/2$ и $a_2/2$.

Результат сложения двух гармонических колебаний зависит от их частот, амплитуд и начальных фаз. В зависимости от значения частот, фаз и амплитуд могут быть получены весьма разнообразные суммарные колебания. Еще более сложный характер колебаний получится при сложении трех и более гармонических колебательных движений. Обратно, колебание весьма сложного характера может быть разложено на достаточное число гармонических колебаний различных амплитуд и частот.

В теории тригонометрических рядов показывается, что периодическую функцию с периодом 2π

$$x = F(\omega t)$$

можно представить в виде бесконечного тригонометрического ряда

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots + \left. \begin{aligned} &+ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

носящего название *ряда Фурье*; ¹ коэффициенты $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ и B_1, B_2, B_3, \dots для данного вида $F(\omega t)$ вычисляются по определенным формулам.

Для *четной функции*, т. е. такой, которая сохраняет свое значение при изменении знака аргумента на обратный:

$$F(-\omega t) = F(\omega t),$$

все коэффициенты B_1, B_2, B_3, \dots равны нулю, так что разложение в ряд принимает вид:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (5)$$

Для *нечетной функции*, т. е. для такой функции, которая меняет знак при изменении знака аргумента:

$$F(-\omega t) = -F(\omega t),$$

все коэффициенты $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ равны нулю, так что разложение в ряд принимает вид:

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (6)$$

Таким образом, видно, что, вообще говоря, любое периодическое колебание может быть математически представлено как сумма гармонических колебаний кратных частот $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т. д.

На рис. 259 внизу представлено колебание, имеющее вид почти ломаной линии; выше представлены четыре синусоиды, на которые оно разлагается. Аналитически это разложение имеет вид:

$$x = 10a \sin \omega t - 1,5a \sin 3\omega t + 0,6a \sin 5\omega t - 0,3a \sin 7\omega t, \quad (7)$$

в этом разложении $B_1 = 10a$, $B_3 = -1,5a$, $B_5 = 0,6a$, $B_7 = -0,3a$, все остальные коэффициенты B_i равны нулю.

¹ Более общо показывается, что любая функция $y = F(x)$, удовлетворяющая так называемым условиям Дирихле и заданная в интервале от $-l$ до $+l$, может быть представлена в виде ряда:

$$y = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots + \left. \begin{aligned} &+ B_1 \sin \frac{\pi x}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Результат разложения сложного колебания в ряд Фурье можно представить, записав все те частоты, амплитуды которых отличны от нуля, и значения соответствующих им амплитуд. Такую запись весьма удобно делать графически, отложив по оси абсцисс шкалу частот и проводя в соответственных местах оси абсцисс вертикальные линии, длина которых в определенном масштабе изображает амплитуду. Такой график носит название *спектра* данного колебания. На рис. 260 представлен спектр сложного колебания, изображенного на нижней строке рис. 258. Так как это колебание может быть разложено

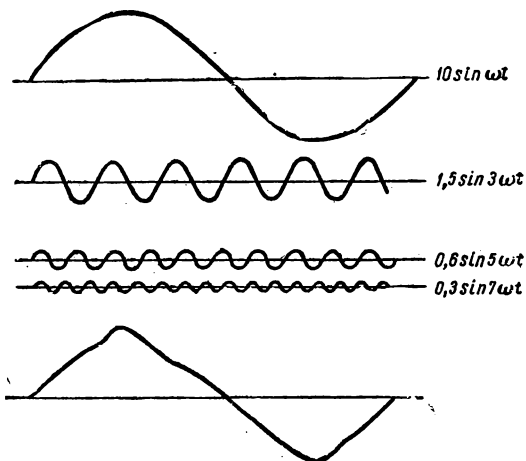


Рис. 259. Разложение сложного колебательного движения на ряд гармонических колебательных движений.

на две синусоиды с частотами ω_1 и $\omega_2 = \frac{\omega_1}{4,5}$ и амплитудами a_1 и $a_2 = 2,5a_1$, то спектр изобразится двумя линиями, с абсциссами ω_1 и $\frac{\omega_1}{4,5}$; длина второй из этих линий в 2,5 раза превышает длину первой.

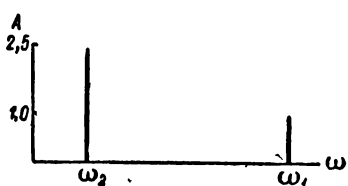


Рис. 260. Спектр сложного колебания, представленного на рис. 258.

На рис. 261 изображен спектр сложного колебания, представленного на рис. 259. Согласно разложению (7), этот спектр содержит четыре линии с частотами ω , 3ω , 5ω и 7ω ; длины этих линий в некотором определенном масштабе равны 10; 1,5; 0,6 и 0,3 единицам длины.

Изображение сложных колебаний с помощью такого рода спектров не полно в том смысле, что оно дает лишь частоты и амплитуды составляющих гармонических колебаний, не давая их начальные фазы; однако для многих случаев знания частот и амплитуд вполне достаточно.

До сих пор мы рассматривали разложение на сумму гармонических колебаний сложных колебаний, имеющих периодический характер. Движение может, однако, будучи колебательным, вместе с тем не носить периодического характера. В качестве примера можно привести затухающее колебание, изображенное на рис. 254. Здесь амплитуда колебаний непрерывно затухает, так что некоторое определенное состояние движения, осуществленное один раз,

более не осуществляется. Такое непериодическое движение нельзя разложить в ряд Фурье с прерывным рядом частот $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$. Оно может быть разложено на бесконечное множество гармонических колебательных движений,

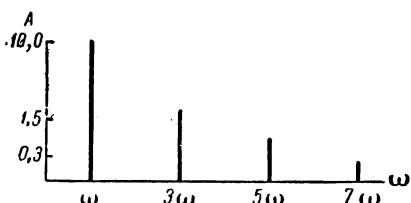


Рис. 261. Спектр сложного колебания, представленного на рис. 259.

причем частоты „соседних“ колебаний будут бесконечно мало отличаться друг от друга, а амплитуды ΔA_i отдельных элементарных колебаний будут бесконечно малы¹.

Графически такому колебанию уже не соответствует спектр, состоящий из отдельных линий („линейчатый спектр“): ему соответствует непрерывный спектр, что означает присутствие колебаний со „всеми“ частотами. Для графического изображения непрерывного спектра отложим по

оси абсцисс снова частоты ω , а по оси ординат — отношение $\Delta A_i / \Delta \omega_i$. Тогда кривая на таком графике даст „распределение амплитуд“ по частотам в сплошном спектре данного сложного колебания. На рис. 262 а еще раз представлено затухающее колебание, а на рис. 262 б — „распределение амплитуд“ по частотам в сплошном спектре этого колебания. Ординаты графика, умноженные на соответственный интервал частот $\Delta \omega_i$, дают среднюю амплитуду колебаний в этом интервале частот. Как видно из рис. 262 б, кривая имеет максимум, который оказывается тем острее, чем слабее затухание.

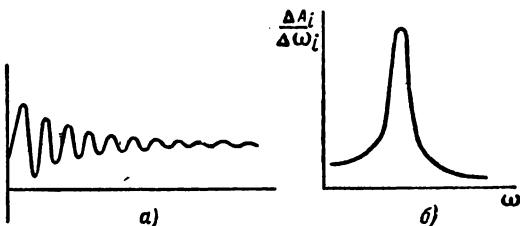


Рис. 262. Затухающее колебание (а) и „распределение амплитуд“ в его спектре (б).

Для иных непериодических движений получится сплошной спектр с иным распределением амплитуд по частотам.

Рассмотрим вопрос, каково физическое значение разложения негармонического процесса на гармонические составляющие, т. е. каким образом можно на опыте выявить эти составляющие (гармоники). Предположим, что зависимость некоторого процесса от времени выражается функцией $f(t)$, которая может быть разложена в ряд Фурье. Пусть, например, это разложение может быть представлено в виде:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t). \quad (8)$$

Левая и правая стороны этого соотношения математически тождественны — совокупность гармоник неотличима от функции $f(t)$.

¹ Математически это соответствует представлению функции в виде интеграла Фурье:

$$F(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \cos \alpha(\theta - \omega t) d\theta.$$

Для регистрации *отдельного* члена ряда (8) (отдельной гармоник) надо подобрать такие условия опыта, при которых эта отдельная гармоника обнаруживалась бы. Это может быть осуществлено, например, следующим образом. Предположим, что функция $f(t)$ характеризует вынуждающую силу, действующую на систему (резонатор), способную совершать вынужденные колебания (§ 103). Пусть этот резонатор имеет собственную частоту колебания (резонансную частоту), совпадающую с частотой $k\omega$ одной из гармоник ряда (8). Если резонансная кривая резонатора настолько остра, что частоты соседних гармоник $(k \pm 1)\omega$ лежат в области очень малых амплитуд вынужденных колебаний (рис. 263), то резонатор будет практически совершать колебания только частоты $k\omega$ с амплитудой, пропорциональной амплитуде гармоники $k\omega$ в разложении (8). Меняя резонансную частоту резонатора (настройку), можно последовательно создать условия для регистрации остальных гармоник разложения (8).

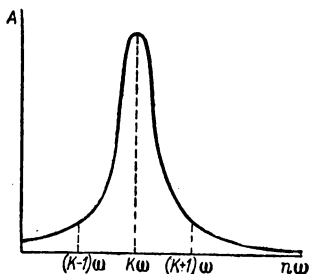


Рис. 263. Амплитуды вынужденных колебаний.

Явления такого типа имеют место в приборах, выявляющих спектральный состав какого-либо физического процесса, например светового или звукового возмущения, или электрического колебания.

§ 105. Представление колебательных процессов с помощью комплексных чисел. Из теории комплексных чисел известно, что комплексное число $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$, где a и φ — вещественные числа, e — основание натуральных логарифмов, $i = \sqrt{-1}$, может быть представлено в виде $a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Таким образом,

$$\xi = a \cdot e^{i\varphi} = a(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

Отсюда, вещественная часть комплексного числа ξ , которую мы обозначим $|\xi|$, выразится следующим образом:

$$|\xi| = a \cos \varphi. \quad (2)$$

Так как последнее соотношение носит характер тождества, то, следовательно, всегда, вместо тригонометрической функции $a \cos \varphi$, мы можем рассматривать вещественную часть комплексного числа $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$. Сама по себе такая замена вполне формальна и ничего нового не дает. Но дело заключается в следующем: если мы проделаем над рядом комплексных чисел ξ определенные математические действия (сложение, вычитание, умножение, дифференцирование, интегрирование и т. д.), а затем отделим вещественную часть от мнимой, то получим тот же результат, как если бы проделывали аналогичные действия над соответственными тригонометрическими функциями. Это обстоятельство позволяет заменять сравнительно громоздкие тригонометрические преобразования гораздо более простыми действиями над показательными функциями. Таким образом, пользование показательными функциями с мнимыми показателями степени, вместо соответственных тригонометрических функций, представляет с вычислительной точки зрения большие удобства.

Как мы видели, выражение вида

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

изображает гармоническое колебательное движение с амплитудой a , циклической частотой ω и начальной фазой α ; величина t есть время, отсчитанное от некоторого начального момента.

На основании сказанного ясно, что то же гармоническое колебательное движение может быть представлено как вещественная часть $|\xi|$ комплексного числа

$$\xi = a \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}. \quad (3)$$

Мы видели, что при решении многих задач достаточно знать квадрат амплитуды, т. е. величину a^2 , так как энергия колебаний пропорциональна a^2 ; знание начальной фазы α при этом может не представлять интереса. Легко показать, что для нахождения a^2 нет необходимости фактически отделять в комплексном числе вида (3) вещественную часть от мнимой, а достаточно составить выражение $\xi\xi^*$, где ξ^* — комплексное число, сопряженное с ξ . (Напомним, что сопряженным комплексным числом называется число, получаемое из данного переменной знаков у всех мнимых единиц i .) В самом деле, комплексное число, сопряженное с ξ , выраженным формулой (3), будет:

$$\xi^* = ae^{-i(\omega t + \alpha)}. \quad (3a)$$

Составив выражение $\xi\xi^*$, получим

$$\xi\xi^* = ae^{i(\omega t + \alpha)} \cdot ae^{-i(\omega t + \alpha)} = a^2, \quad (4)$$

т. е. $\xi\xi^*$ дает нам непосредственно квадрат амплитуды.

Обобщая выражение (3), можно и величину a положить комплексной; в этом случае она не будет, конечно, непосредственно выражать действительную амплитуду колебаний, так как действительная амплитуда всегда вещественна. Выясним, прежде всего, какой физический смысл имеет такая „комплексная амплитуда“. Для этого положим $a = a_0 e^{i\alpha_0}$, где a_0 и α_0 — вещественны, тогда

$$\xi = a_0 e^{i\alpha_0} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} \quad \text{или} \quad \xi = a_0 e^{i(\omega t + \alpha + \alpha_0)}. \quad (4a)$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, получим

$$|\xi| = a_0 \cos(\omega t + \alpha + \alpha_0), \quad (5)$$

откуда видно, что $|\xi|$ представляет собою гармоническое колебательное движение с амплитудой a_0 и начальной фазой $\alpha + \alpha_0$. Таким образом, комплексное значение амплитуды означает изменение начальной фазы на α_0 . Легко убедиться, что и в этом случае $\xi\xi^*$ дает квадрат вещественной амплитуды: $\xi\xi^* = a_0^2$.

Чтобы выяснять удобство пользования комплексными числами для изображения гармонических колебательных движений, рассмотрим задачу о сложении двух гармонических колебаний $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ и $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ одинаковой частоты ω и происходящих вдоль одной и той же прямой; эта задача была нами рассмотрена методом сложения векторов амплитуд в § 100. Пользуясь же комплексными числами, получим

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)}, \quad x_2 = a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}.$$

Результирующее колебание:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}.$$

Квадрат его амплитуды a^2 получим, умножив правую часть на величину, с ней сопряженную:

$$a^2 = [a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}] [a_1 e^{-i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{-i(\omega t + \alpha_2)}],$$

откуда

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)}),$$

но по формуле (1)

$$e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} = 2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

откуда

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

что совпадает с формулой (4) § 100.

ГЛАВА XII

ВОЛНЫ

§ 106. Распространение волн в упругой среде. Пусть точка, совершающая колебание, находится в среде, все частицы которой связаны между собой. Тогда энергия колебания точки может передаваться окружающим точкам, вызывая их колебание. Явление распространения колебания в среде называется *волной*. Пример образования волн мы получим, если бросим камень на поверхность воды: область водяной поверхности, которая непосредственно возмущена падающим камнем, начинает колебаться, причем это колебание распространяется от этой области к следующим, и мы получаем на поверхности воды волну. Другой пример образования волны можно получить, если взять веревку и одному из ее концов придать

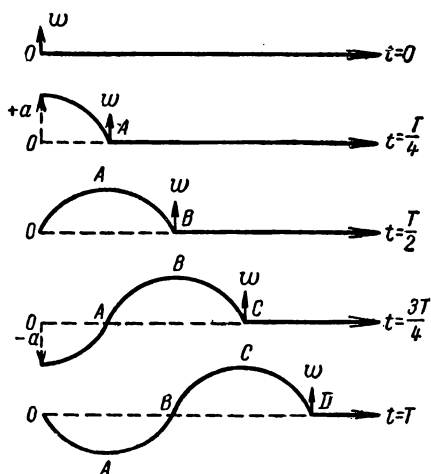


Рис. 264. Схема распространения поперечной волны.

рукой колебательное движение; в этом случае колебание также начнет распространяться вдоль веревки: по веревке побежит волна.

Заметим сразу, что при распространении колебаний колеблющиеся частицы не перемещаются с распространяющимся колебательным процессом, а колеблются около своих положений равновесия.

Если частицы колеблются по той же прямой, вдоль которой распространяется колебание, то мы назовем волну *продольной*; если колебания частиц перпендикулярны к направлению распространения колебаний, то волна называется *поперечной*.

На рис. 264 представлена схема распространения поперечной волны. Пять строчек рис. 264 представляют расположение частиц среды в последовательные моменты времени. Первая строчка дает

положения частиц в начальный момент времени $t=0$, когда все частицы занимают положения равновесия и крайняя частица O лишь получила ускорение ω , направленное кверху. Вторая строчка дает положение частиц через четверть периода после начала движения: частица O достигла своего крайнего удаления вверх, частица A приобрела лишь ускорение ω , направленное вверх. Третья строчка дает положение через полпериода после начала движения: частица O проходит положение равновесия, идя вниз, частица A достигла крайнего удаления вверх, частица B приобрела лишь ускорение ω , направленное вверх. Четвертая строчка дает положение частиц через три четверти периода после начала движения: частица O достигла крайнего отклонения вниз, частица A проходит положение равновесия, идя вниз, частица B достигла крайнего отклонения кверху; частица C приобретает ускорение ω , направленное вверх. Наконец, в пятой строчке даны положения частиц через период после начала колебания: частица O опять проходит положение равновесия, идя вверх; частица A достигла крайнего отклонения книзу; частица B идет через положение равновесия вниз; частица C достигла крайнего смещения кверху; частица D приобрела ускорение ω , направленное навверх. Таким образом можно проследить распространение колебаний дальше.

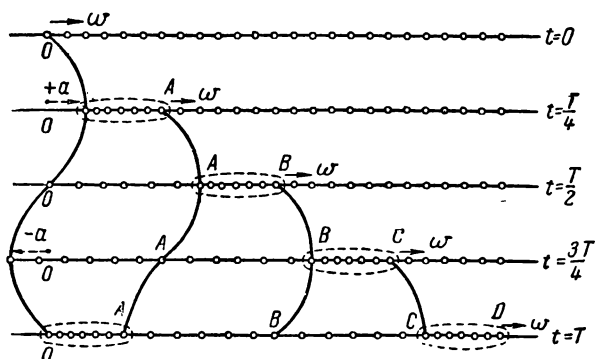


Рис. 265. Схема распространения продольной волны.

На рис. 265 сделано такое же построение для продольной волны. Разница только в том, что смещения частиц происходят в направлении распространения колебаний. Как видно из рис. 265, при продольной волне мы наблюдаем сближение и удаление частиц друг от друга, вследствие чего в среде возникают сгущения (области, обведенные на рисунке) и разрежения; процесс распространения волны сопровождается перемещением областей сгущения и разрежения.

Являются ли волны, распространяющиеся в среде, продольными или поперечными — зависит от упругих свойств среды.

Если при сдвиге одного слоя среды по отношению к другому слою возникают упругие силы, стремящиеся возвратить сдвинутый слой в положение равновесия, то в среде могут распространяться поперечные волны (такой средой, вообще говоря, служит твердое тело). Если в среде не возникают упругие силы при сдвиге параллельных слоев друг относительно друга, то поперечные волны не могут образоваться. Например, жидкость и газ представляют среды, в которых поперечные волны не распространяются (последнее не относится к поверхности жидкости, в которой могут распространяться и поперечные волны, носящие, однако, более сложный характер: в них частицы движутся по замкнутым круговым или эллиптическим траекториям). Если в среде возникают силы упругости при деформации сжатия и растяжения, то в такой среде могут распространяться продольные волны. Например, жидкость или газ при сжатии дают увеличение давления, сила которого, как мы видели, играет роль силы упругости при деформации сжатия. В жидкости и в газе распространяются только продольные волны. В твердых телах продольные волны могут существовать наряду с поперечными.

Скорость распространения продольных волн V , как показывает теория (см. § 111), обратно пропорциональна корню квадратному из коэффициента упругости среды α и ее плотности ρ :

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}}.$$

Приблизительно это соотношение может быть заменено следующим:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E — модуль Юнга среды.

Скорость распространения поперечных волн зависит от модуля сдвига N :

$$V = \sqrt{\frac{N}{\rho}}.$$

Расстояние, на которое определенная фаза колебания распространяется за один период колебания, называется *длиной волны*, длину волны обозначим буквой λ .

На рис. 266 сопоставлен ряд точек, отстоящих друг от друга на λ .

Из рисунка ясно, что *длина волны представляет собой наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковых фазах*. Под скоростью распространения волны подразумевается ее *фазовая скорость*, т. е. скорость распространения данной фазы колебания; например, в момент времени $t=0$ точка O на рис. 264

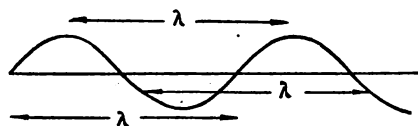


Рис. 266. Расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одинаковых фазах, определяет длину волны λ .

имела начальную фазу, т. е. выходила из положения равновесия; через промежуток времени T начальную фазу приобрела точка D , отстоящая от точки O на расстоянии λ . Следовательно, начальная фаза за время, равное периоду T , распространилась на расстояние, равное длине волны λ . Отсюда для фазовой скорости получаем определение:

$$V = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

Представим, что точка, от которой идут колебания (центр колебания), колеблется в сплошной среде. Колебания распространяются от центра во все стороны. *Геометрическое место точек, до которых к некоторому моменту времени дошло колебание, назовем фронтом волны.* Можно также в среде выделить *геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах*; эта совокупность точек образует *поверхность одинаковых фаз*, или, как говорят, *волновую поверхность*. Очевидно, что фронт волны является частным случаем волновой поверхности. Если среда изотропна, то колебания от центра колебаний распространяются одинаково во все стороны, в этом случае и фронт волны и поверхности одинаковых фаз представляют собою сферы, центр которых лежит в центре колебания. Очевидно, что радиус фронта волны представляет собою отрезок, на который колебания с данной фазой распространились за время t , прошедшее с момента начала колебаний точки, расположенной в центре, откуда

$$r = Vt,$$

где V — скорость распространения волн.

Форма фронта волны определяет типы волн, например, плоской волной называется волна, фронт которой представляет плоскость, и т. д.

Направления, в которых распространяются колебания, называются *лучами*. В изотропной среде лучи нормальны к фронту волны; при сферическом фронте волны лучи направлены по радиусам.

§ 107. Принцип Гюйгенса. Весьма важно для решения различных задач иметь метод построения фронта волны, относящегося к некоторому моменту времени, если известен фронт волны в предыдущий момент. Такой метод был дан Гюйгенсом в 1690 г.; он носит название *принципа Гюйгенса*.

Гюйгенс дал свой принцип без строгого доказательства; правильность принципа Гюйгенса вытекала только из сравнения результатов построений с опытом. Значительно позднее правильность метода Гюйгенса была доказана на основании общей

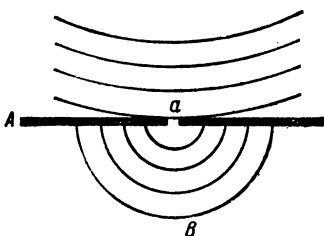


Рис. 267. Малое отверстие в преграде является новым источником волн.

теории упругости. Чтобы несколько уяснить себе идею метода Гюйгенса, рассмотрим следующий опыт. Представим себе, что на поверхности воды распространяется волна произвольной формы. Поставим на пути этой волны преграду A с отверстием a , размеры которого малы по сравнению с длиной волны λ (рис. 267). Волна, дойдя до преграды A , отразится от нее, а отверстие a в преграде будет служить источником колебаний, распространяющихся по другую сторону преграды. При этом от отверстия, независимо от формы распространявшейся волны, пойдут вперед полукольцевые волны B . Отверстие будет как бы служить новым центром колебания, от которого колебания распространяются вперед во всех направлениях. Этот опыт наводит на мысль, что каждую точку среды, до которой дошел волновой фронт, можно рассматривать как новый источник колебаний. Отсюда — сущность принципа Гюйгенса. Предположим, что в некоторый момент известен фронт волны AB (рис. 268), пришедшей в направлении, указанном стрелками. Для построения нового фронта, относящегося к моменту на промежуток времени t более позднему, следует каждую точку старого фронта принять за самостоятельный центр распространяющихся вперед колебаний. Построим

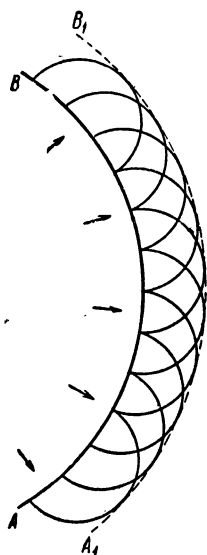


Рис. 268. Построение нового фронта волны по Гюйгенсу.

из каждой точки элементарную волновую поверхность радиуса $r = Vt$. Огибающая A_1B_1 всех элементарных волновых поверхностей даст новый фронт волны.

Применим метод Гюйгенса к построению волновых поверхностей для частных случаев. Предположим, что в некоторый момент времени волна имеет форму сферы радиуса R (рис. 269) и распространяется из центра колебаний; вокруг каждой точки фронта опишем элементарную волновую полусферическую поверхность. Огибающая всех элементарных полусферических поверхностей представит сферическую поверхность радиуса $R_1 = R + Vt$. Лучи, как было указано, направлены по радиусам от центра. Сферическая волна, распространяясь, имеет фронт в виде сферы все возрастающего радиуса; для очень больших радиусов участок фронта волны можно считать плоским. На

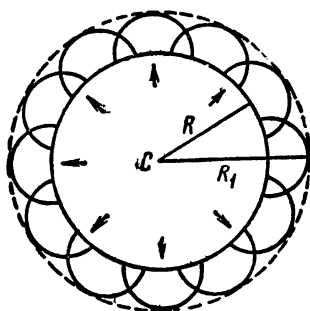


Рис. 269. Построение Гюйгенса для сферической волны, распространяющейся из центра C .

рис. 270 дан участок плоского фронта волны AB . Приняв все точки этого фронта за самостоятельные колебания и проведя вокруг них элементарные полусферы, получим огибающую поверхность в виде плоскости, параллельной плоскости AB . Лучи, т. е. направления, в которых распространяется колебание, являются прямыми, перпендикулярными к плоскости фронта. Отсюда заключаем, что плоская волна, распространяясь в одной изотропной среде, остается плоской; лучи представляют собою пучок параллельных прямых. В однородной изотропной среде волновой фронт, перемещаясь, всегда остается геометрически подобным себе.

Рассмотрим теперь, что будет с плоской волной, если на пути ее распространения поставлена преграда A с отверстием a , размеры которого больше длины волны λ (рис. 271). Плоский фронт BB' , подходя к преграде A , отразится от нее, а точки отверстия a станут самостоятельными центрами колебания. Вокруг каждой точки образуется элементарная полусферическая волновая поверхность; огибающая этих волновых поверхностей дает фронт волны за отверстием. Из рис. 271 видно, что этот фронт за отверстием перестает быть плоским, только его средняя часть параллельна первоначальному фронту; у краев фронт загибается — лучи меняют свое первоначальное направление. Чтобы полностью учесть такое загибание лучей, носящее название *диффракции*, надо сложить колебания, приходящие от отдельных точек отверстия, учитывая их фазы. Подробнее мы рассмотрим диффракцию ниже.

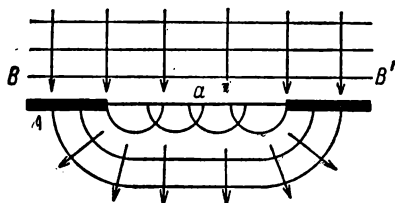


Рис. 271. Загибание волны за отверстием в преграде (диффракция волн).

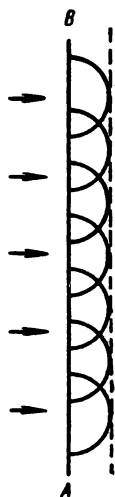


Рис. 270. Построение Гюйгенса для плоской волны.

§ 108. Уравнение волны. Выясним, каким образом можно аналитически охарактеризовать волновой процесс.

Представим себе первоначально волны, бегущие вдоль некоторой прямой, например вдоль веревки, один конец которой поддерживается в состоянии колебания. Обозначим через x смещение точки из положения равновесия. Волновой процесс будет известен, если знать, какое значение имеет x в каждый момент времени для каж-

мы рассмотрим диффракцию ниже. Чем меньше отверстие, тем сильнее выражено загибание лучей. Если размер отверстия a меньше длины волны, то просвет отверстия послужит единичным центром колебания, от которого пойдет полусферическая волна, как это имело место в опыте, послужившем для обоснования принципа Гюйгенса (рис. 267).

дой точки прямой, вдоль которой распространяется волна. Другими словами, надо знать смещение точки x как функцию времени и координат равновесного положения точек.

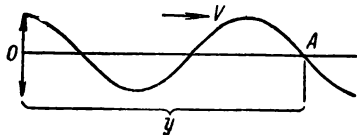


Рис. 272. К выводу уравнения волны.

Выберем за начало координат O ту точку на прямой (рис. 272), которая является центром колебаний. Пусть колебания в точке O происходят по закону:

$$x = a \cos \omega t. \quad (1)$$

Здесь a — амплитуда колебаний, ω — круговая частота, t — время, отсчитанное от момента начала колебаний.

Возьмем на прямой произвольную точку A , лежащую от начала координат на расстоянии y . Колебания, распространяясь от точки O , дойдут до точки A через промежуток времени

$$\tau = \frac{y}{V}, \quad (2)$$

где V — скорость распространения волны. Таким образом, точка A начнет колебаться на время τ позже точки O . Считая, что волны, распространяющиеся вдоль рассматриваемой прямой, не затухают, мы получим, что точка A , когда дойдет до нее волна, начнет колебаться с амплитудой a и круговой частотой ω , т. е. ее смещение x из положения равновесия выразится:

$$x = a \cos \omega t', \quad (3)$$

где t' — время, отсчитанное от того момента, когда точка A начала колебаться. Но так как точка A , по выясненному, начала колебаться на промежуток времени τ позже точки O , то $t' = t - \tau$; подставляя это значение t' в (3), получим

$$x = a \cdot \cos \omega (t - \tau),$$

или, подставляя сюда вместо τ его значение по (2)

$$x = a \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (4)$$

Это выражение дает смещение x как функцию времени t и расстояния y точки A от центра колебаний O ; оно представляет собою искомое уравнение волны, распространяющейся вдоль прямой OA .

Выражение (4) представляет собою уравнение *плоской волны*, распространяющейся вдоль направления y . В самом деле, в этом случае любая плоскость AB (рис. 273), перпендикулярная к направлению y , представит собою поверхность одинаковых фаз, и, следовательно, все точки этой плоскости имеют в один и тот же

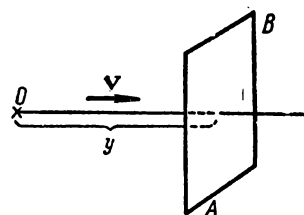


Рис. 273. Плоскость одинаковых фаз для плоской волны.

момент времени t одно и то же смещение x , определяемое лишь расстоянием y , на котором плоскость лежит от начала координат O .

Если мы представим себе плоскую волну, распространяющуюся в направлении, обратном тому, в котором отсчитывается расстояние y , то в выражении (4) y должно быть заменено через $-y$, тогда уравнение такой волны примет вид:

$$x = a \cos \omega \left(t + \frac{y}{V} \right). \quad (4a)$$

Выражение (4) может быть преобразовано, если мы воспользуемся соотношением (1) § 106, по которому $\frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{VT} = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны распространяющихся волн, тогда

$$x = a \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{y}{\lambda} \right),$$

или, если вместо круговой частоты ω ввести обычную частоту $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, то

$$x = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{y}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Разберем на примере волны, распространяющейся вдоль прямой (рис. 272), следствия, вытекающие из уравнения (4). Волновой процесс — это процесс двоякопериодический: аргумент косинуса в формуле (4) зависит от двух переменных — времени t и координаты y . Таким образом, волна имеет двойную периодичность — в пространстве и во времени. Для данного момента времени t уравнение (4) дает распределение смещения частиц x как функцию их расстояния y от начала координат; частицы, колеблющиеся под влиянием бегущей волны в данный момент времени t расположены по косинусоиде. Данная частица, характеризуемая определенным значением y , совершает во времени гармоническое колебательное движение:

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right) = a \cos (\omega t - \alpha), \quad \text{где } \alpha = \frac{\omega y}{V} = 2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (6)$$

Величина α постоянна для данной точки, причем α представляет собою *начальную фазу* колебаний в этой точке.

Две точки, характеризуемые расстояниями y_1 и y_2 от начала координат, имеют разность фаз:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi \frac{y_2 - y_1}{\lambda}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном длине λ , т. е. для которых $y_2 - y_1 = \lambda$, имеют разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi$; они имеют для каждого данного момента t одинаковые по величине и направлению смещения x ; про такие две точки говорят, что они *колеблются в одинаковой фазе*.

Для точек, отстоящих друг от друга на расстоянии $y_2 - y_1 = \frac{\lambda}{2}$, т. е. отстоящих на полволны, разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$; такие точки колеблются, как говорят, в *противоположных фазах* — они имеют для каждого данного момента смещения, одинаковые по абсолютному значению, но разные по знаку: если одна точка отклонена вверх, то другая — вниз, и наоборот.

Рассмотренные выше волны, распространяющиеся вдоль одной прямой, являются частным случаем волн. В упругой среде возможны волны иного вида, например, сферические волны.

В сферической волне амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию r от источника колебаний. Зависимость смещения от координат и времени имеет вид:

$$x = \frac{a}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right). \quad (8)$$

Поверхность равных фаз в некоторый момент времени определяется уравнением $r = \text{const}$, т. е. представляет собой сферу радиуса r .

Отсюда и происходит название „сферическая“ для такой волны.

§ 109. Интерференция волн. В среде могут распространяться одновременно колебания, исходящие от разных центров колебаний.

Если две различные системы волн, исходящих из разных источников, перекрываются в некоторой области, а затем снова расходятся, то дальше каждая из них распространяется так, как если бы она не встречала на своем пути другую. Этот принцип независимости распространения волн известен под названием *принципа суперпозиции*; он является весьма характерным для распространения волновых процессов.

Принцип суперпозиции легко проверить, бросив в воду два камня. После того как кольцевые волны, возникшие около мест падения камней, проникнув друг через друга, снова разойдутся, они будут представлять собою по-прежнему правильные круги с центрами в местах падения камней. Этот факт был замечен еще Леонардо да-Винчи, который писал: „В обширную и спокойную гладь воды брось одновременно два камешка на некотором расстоянии один от другого. Ты увидишь, что вокруг мест, куда упали камни, образуются две группы круговых волн; разбегаясь, они встречаются между собою — и тогда круги каждой группы проникают одни сквозь другие“.

В области перекрытия волн колебания налагаются друг на друга, происходит сложение (*интерференция*) волн, в результате чего колебания в одних местах получаются более сильные, а в других — более слабые. В каждой точке среды результирующее колебание будет суммой всех колебаний, дошедших до данной точки.

Особенный интерес представляет тот случай, когда источники колебаний колеблются с одинаковой частотой, имеют одинаковые направления колебаний и одинаковые фазы или постоянную разность фаз. Такие источники называются *когерентными*. Как мы увидим

ниже, в этом случае результирующее колебание в каждой точке среды имеет постоянную во времени амплитуду, зависящую от расстояний точки среды от источников колебаний. Такого рода сложение колебаний называется *интерференцией от когерентных источников*.

Когерентные источники колебаний можно, например, осуществить следующим образом: возьмем точечный источник S (рис. 274), от которого распространяется сферическая волна. На пути волны поставлена преграда BB_1 с двумя точечными отверстиями s_1 и s_2 , расположенными симметрично по отношению к источнику S . Отверстия s_1 и s_2 становятся, согласно принципу Гюйгенса, самостоятельными источниками колебаний, притом колеблющимися с одинаковой амплитудой и в одинаковых фазах, так как их расстояния от источника S одинаковы. Справа от преграды BB_1 будут распространяться две сферические волны, и в каждой точке среды колебание возникнет в результате сложения этих двух волн. Рассмотрим результат сложения в некоторой точке A , которая отстоит от источников s_1 и s_2 соответственно на расстояниях r_1 и r_2 . Колебания доходят до точки A с некоторой разностью фаз, которая зависит от разности расстояний r_2 и r_1 .

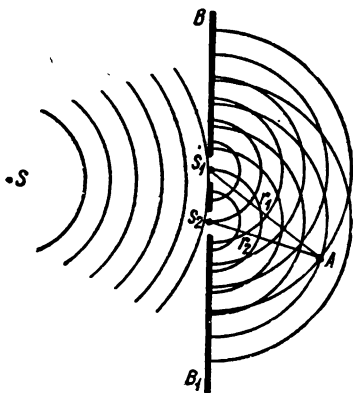


Рис. 274. Наложение волн, исходящих из отверстий s_1 и s_2 .

Колебания источников s_1 и s_2 , имеющие одинаковые фазы, можно представить в виде:

$$x_1 = a_0 \cos \omega t, \quad x_2 = a_0 \cos \omega t.$$

Тогда колебания, дошедшие до точки A соответственно от источников s_1 и s_2 , по формуле (8) § 108 выразятся:

$$x_1 = a_1 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda} \right), \quad x_2 = a_2 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda} \right),$$

где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ — частота колебаний. Согласно (8) § 108, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Однако если $|r_2 - r_1| \ll r_1$, то приближенно можно считать $a_1 \approx a_2$.

Разность фаз слагаемых колебаний в точке A будет

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}. \quad (1)$$

Мы видели в § 100, что амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз слагаемых колебаний, причем, если разность фаз равна нулю или кратна 2π , то амплитуда имеет максимальное значение, равное сумме амплитуд слагаемых колебаний. Если разность фаз равна нечетному числу π , то амплитуда имеет минимальное зна-

чение, равное разности слагаемых амплитуд. Следовательно, в точке A получится максимум или минимум колебаний в зависимости от того, с какой разностью фаз $\Delta\alpha$ подходят к точке A оба колебания. Условие максимума амплитуды в точке A , по сказанному, имеет вид:

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (2)$$

где $k=0, 1, 2, 3, \dots$; откуда максимум колебаний имеет место при

$$|r_2 - r_1| = k\lambda, \quad (2a)$$

т. е. максимум амплитуды получается в точках, для которых разность хода лучей равна нулю или целому числу длин волн.

Условие минимума амплитуды в точке A сводится к требованию:

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi, \quad (3)$$

где опять $k=0, 1, 2, 3, \dots$, откуда разность хода лучей должна быть равна

$$|r_2 - r_1| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3a)$$

т. е. минимум амплитуды получается в точках, для которых разность хода лучей равна нечетному числу полуволн.

При разностях фаз, имеющих промежуточные значения между $\pm 2k\pi$ и $\pm (2k + 1)\pi$, где k — целое число, имеет место некоторый средний эффект усиления или ослабления колебаний.

Таким образом, в результате наложения двух волн в среде возникают колебания, амплитуда которых различна в разных точках среды, при этом в каждой точке среды получается или максимум амплитуды, или минимум амплитуды, или ее промежуточное значение — в зависимости от значения разности расстояний точки до когерентных источников.

На рис. 275 представлены две системы интерферирующих волн; гребни волн изображены сплошными линиями, впадины — пунктирными.

В местах пересечения двух гребней или двух впадин расположены максимумы колебаний, в местах пересечения гребня и впадины расположены минимумы. Образование такого рода интерференционных максимумов и минимумов можно легко наблюдать при распротранении двух систем волн на поверхности воды.

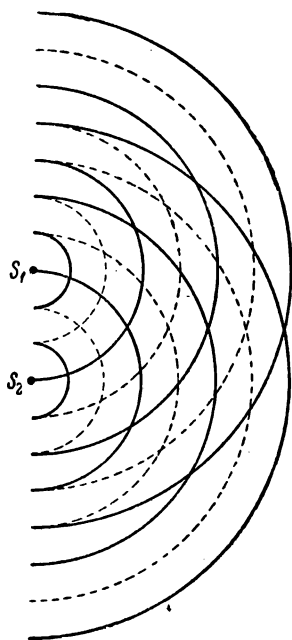


Рис. 275. Интерференция волн.

§ 110. Стоячие волны. Особым примером результата интерференции двух волн служат так называемые *стоячие волны*, образующиеся в результате наложения двух встречных плоских волн с одинаковыми амплитудами.

Предположим, что две плоские волны с одинаковыми амплитудами распространяются — одна по направлению положительной оси y , другая — по направлению отрицательной оси y . На рис. 276 одна из волн

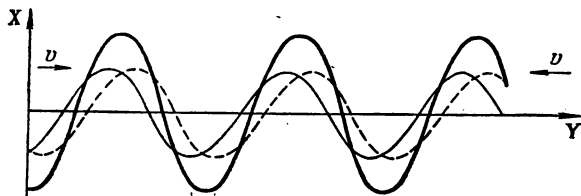


Рис. 276. Сложение двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

изображена тонкой сплошной линией, другая — пунктирной; результирующая волна изображена жирной линией. Если начало координат взять в такой точке, в которой встречные волны имеют одинаковые фазы, и выбрать отсчет времени так, чтобы начальные фазы оказались равными нулю, то уравнения обеих плоских волн можно написать в следующем виде: для волны, идущей в сторону положительной оси y ,

$$x_1 = a \cos 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right),$$

и для волны, идущей в сторону отрицательной оси y ,

$$x_2 = a \cos 2\pi \left(vt + \frac{y}{\lambda} \right).$$

Сложение этих двух волн дает

$$x = x_1 + x_2 = a \cos 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right) + a \cos 2\pi \left(vt + \frac{y}{\lambda} \right),$$

или, раскрывая значение косинусов от сложных аргументов и производя сокращения,

$$x = 2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \cdot \cos 2\pi vt. \quad (1)$$

Множитель $\cos 2\pi vt$ показывает, что в точках среды возникает колебание с той же частотой ν , что и колебания встречных волн.

Множитель $2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$, не зависящий от времени, выражает амплитуду A результирующего колебания; точнее — амплитуда, как

величина существенно положительная, равна абсолютному значению этого множителя:

$$A = \left| 2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (2)$$

Таким образом, амплитуда колебания зависит от координаты y , определяющей положение точек среды. Возникшее колебание носит название *стоячей волны*. В определенных точках амплитуда стоячей волны равна сумме амплитуд обоих слагаемых колебаний, такие точки называются *пучностями*; в других точках результирующая амплитуда равна нулю, эти точки называются *узлами* стоячей волны.

Определим координаты точек пучностей и узлов. Амплитуда, определяемая равенством (2), максимальна в точках, для которых

$$\left| \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \right| = 1,$$

в этих точках по (2)

$$A = 2a.$$

Отсюда положение пучностей определится условием

$$2\pi \frac{y}{\lambda} = \pm k\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ Следовательно, координаты пучностей равны

$$y = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Расстояние между соседними пучностями мы получим, если возьмем разность двух значений y , определяемых формулой (3) для двух последовательных значений k , откуда

$$y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda}{2},$$

т. е. расстояние между двумя соседними пучностями равно половине длины тех волн, в результате интерференции которых образуется данная стоячая волна. Очевидно, в местах пучностей колебания обеих волн все время совершаются в одной фазе.

В узлах амплитуда результирующего колебания равна нулю, откуда по формуле (2) условие образования узлов:

$$\cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) = 0 \quad \text{или} \quad 2\pi \frac{y}{\lambda} = \pm (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

следовательно, координаты узлов равны

$$y = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (4)$$

а значит, расстояние узла от ближайшей пучности равно

$$(2k+1) \frac{\lambda}{4} - k \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4},$$

т. е. узлы и пучности отстоят друг от друга на четверть длины волны. Узлы образуются в тех местах, где колебания в обеих волнах всё время совершаются в противоположных фазах.

Важно заметить, что хотя по формуле (1) во всех точках результирующее колебание происходит с фазой, как будто не зависящей от положения точки (множитель $\cos 2\pi vt$ не зависит от y), однако на самом деле при переходе через узел фаза колебаний меняется на противоположную. Это следует из того, что множитель $\cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right)$, определяющий амплитуду, при переходе через ноль в узле *меняет знак*; вследствие этого, если по одну сторону узла в некоторый момент времени смещение x положительно, то по другую сторону узла оно в тот же момент времени отрицательно.

Так как в данный момент времени множитель $\cos 2\pi vt$ имеет для всех точек одинаковое значение, то все точки *между двумя узлами* колеблются в одинаковых фазах, т. е. они одновременно достигают максимальных отклонений, одновременно проходят через положения равновесия и т. д. Точки, лежащие по обе стороны одного и того же узла, колеблются в противоположных фазах, т. е. достигают одновременно крайних, но противоположных по знаку смещений, проходят одновременно положение равновесия, но с противоположно направленными скоростями и т. д. Схема колебаний точек в поперечной

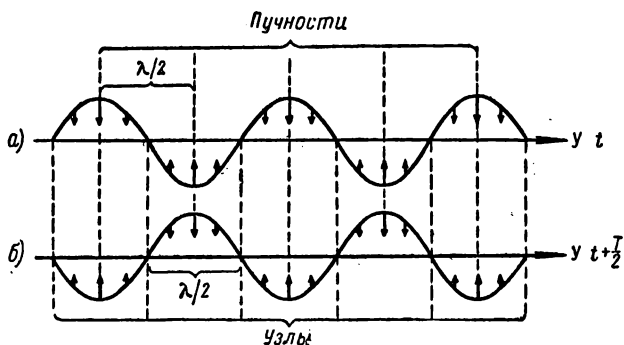


Рис. 277. Схема колебаний в поперечной стоячей волне.

стоячей волне указана на рис. 277 а и б, где нанесены положения колеблющихся точек для двух моментов времени, отстоящих на полпериода.

В продольной стоячей волне смещения точек параллельны оси y . На рис. 278 а и б даны расположения точек в продольной стоячей

волне для двух моментов времени, отстоящих на полпериода. Мы видим из рисунков, что в узлах, где скорости колеблющихся точек равны нулю, получается наиболее резкое изменение плотности среды: частицы то приближаются с двух сторон к узлу, то от него удаляются.

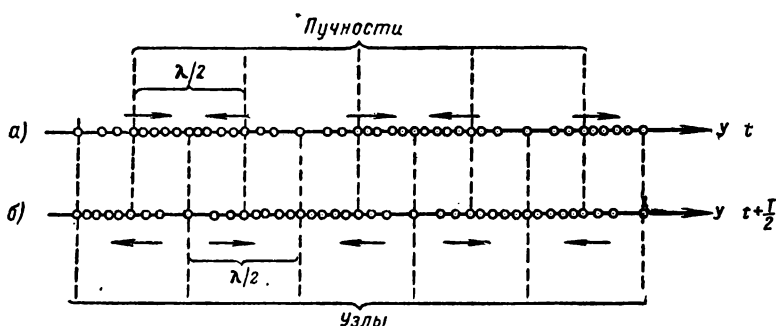


Рис. 278. Схема колебаний в продольной стоячей волне.

Образование стоячих волн происходит обычно при интерференции бегущей вперед и отраженной волн. Например, если один конец веревки укрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей вперед и образовывать стоячую волну. Узловые точки, остающиеся при этом неподвижными, находятся друг от друга на расстоянии, равном половине длины бегущей волны; в месте закрепления веревки, т. е. на границе, где происходит отражение волны, получается узел.

Вообще же говоря, на границе отражения может образоваться или узел, или пучность; это зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, более плотная, чем среда, в которой распространяется волна, то на границе получается узел. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, чем та, в которой распространяется волна, то на границе получается пучность.

Образование узла на границе отражения от более плотной среды объясняется тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, в месте отражения меняет свою фазу на прямо противоположную; тогда у границы складываются колебания противоположных направлений, что и ведет к образованию узла.

Так как фаза меняется на противоположную на расстоянии половины длины волны, то этот факт принято называть „потерей полволны“.

Отражаясь от менее плотной среды, волна не меняет фазы в месте отражения, поэтому потери полволны не происходит. Благодаря этому фазы падающей и отраженной волн у границы одинаковы, и в этом месте получается пучность в результате сложения колебаний одинаковых фаз.

Изменение фазы при отражении волн от границы более плотной среды и сохранение фазы при отражении от границы менее плотной среды доказываются в теории упругости на основании общих пограничных условий на границе двух упругих сред.

§ 111. Динамика распространения колебаний в упругой среде. Тип волн, способных распространяться в среде, как было сказано выше, зависит от упругих свойств среды. Распространяются колебания того типа, которые обусловлены смещением, вызывающим упругую деформацию среды. В среде, обнаруживающей лишь деформацию сжатия (жидкость, газ), распространяются продольные волны, в среде, обнаруживающей как деформацию сжатия, так и деформацию сдвига, могут распространяться и продольные, и поперечные волны. Будем пока рассматривать лишь продольную волну.

Выберем ряд точек, принадлежащих сплошной среде и лежащих на одной прямой, вдоль которой распространяется продольная волна.

Смещение некоторой точки, лежащей на этой прямой, из положения равновесия обозначим через x . Расстояния между точками, отсчитанные вдоль той же прямой, будем обозначать через y .

Рассмотрим две точки, равновесные положения которых отстоят на dy друг от друга. Пусть смещения этих точек из их положений равновесия в некоторый момент времени соответственно равны x и $x + dx$ (рис. 279). Следовательно, смещение точек на расстоянии dy меняется на величину dx .

Отношение изменения смещения dx к величине первоначального расстояния между точками dy , т. е. величину dx/dy , назовем *относительной деформацией* и обозначим ее буквой s , тогда

$$s = \frac{dx}{dy}. \quad (1)$$

При $s = \frac{dx}{dy} > 0$ расстояние между точками увеличивается, что означает *растяжение среды*.

При $s = \frac{dx}{dy} < 0$ расстояние между точками уменьшается, т. е. среда оказывается *сжатой*.

Принимая во внимание уравнение волны

$$x' = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right), \quad (2)$$

где ω — круговая частота, а V — скорость распространения волны, можно установить связь между относительной деформацией dx/dy и скоростью колеблющихся точек dx/dt ; действительно, обозначая скорость точек буквой v , имеем

$$v = x' = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Относительная деформация s определится

$$s = x' = \frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Сравнивая последние два выражения, получаем

$$\frac{dx}{dt} = -V \frac{dx}{dy}.$$

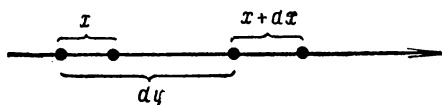


Рис. 279. К выводу выражения для скорости распространения продольной волны.

Отсюда видно, что деформация среды dx/du имеет по абсолютному значению наибольшую величину в тех точках, где скорость колеблющихся частиц dx/dt наибольшая, т. е. в области, где точки проходят через положение равновесия.

Из уравнения волны (2) можно получить еще одно соотношение, которое нам понадобится дальше. Беря вторые производные от x по переменным t и y , получим

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right);$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a\omega^2}{V^2} \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right),$$

откуда следует

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V^2 \frac{d^2x}{dy^2}, \quad (3)$$

т. е. вторая производная смещения по времени пропорциональна второй производной смещения по координате, причем коэффициентом пропорциональности служит квадрат скорости распространения волны V .

Уравнение (3) мы получили, дифференцируя уравнение волны (2). Обратное можно сказать, что чисто периодическая волна, которой соответствует косинусоида (2), удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).

Однако в действительности решением дифференциального уравнения (3) является и ряд других функций. Эти функции описывают распространение в среде волнового возмущения произвольной формы со скоростью V .

Таким образом, дифференциальное уравнение (3) в наиболее общем виде описывает распространение волнового процесса; оно носит название *волнового уравнения*.

Для определения скорости распространения волны в упругой среде воспользуемся законом Гука.

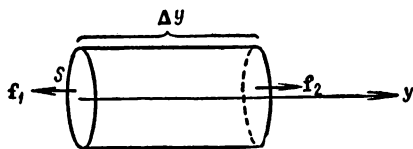
Закон Гука (см. § 89), установленный для деформации в сплошной среде, показывает, что упругая сила пропорциональна *относительной деформации* среды. Если взять, например, участок сплошной среды длиной du , поперечного сечения S , который растянут или сжат на величину dx , то по закону Гука упругая сила равна

$$f = \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dy} S,$$

где α — коэффициент упругости.

Рассмотрим, какие силы действуют на участок, мысленно вырезанный в сплошной среде, в которой распространяется продольная волна вдоль оси y . Для этого вырежем мы-

Рис. 280. К выводу выражения для скорости распространения продольной волны.



сленно в среде цилиндрический объем, причем пусть образующая цилиндра параллельна оси y и имеет длину Δy , а поперечное сечение цилиндра равно S . Пусть в рассматриваемый нами момент времени этот участок объема растянут под влиянием сил f_1 и f_2 (рис. 280), приложенных к основаниям цилиндра. Выберем начало оси y у левого основания цилиндра, тогда сила f_1 по закону Гука равна

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_0 S,$$

где индекс 0 указывает, что относительная деформация dx/du вычисляется для значения $y=0$, т. е. в точках левого основания цилиндра.

Сила, действующая на правое основание, по тому же закону равна

$$f_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_{\Delta y} S,$$

здесь dx/dy вычисляется в точках правого основания.

Величину dx/dy , которая представляет собою некоторую функцию $F(y)$, можно разложить в ряд Маклорена:

$$F(y) = F(0) + F'(0) \Delta y + \dots$$

Ограничиваясь величинами первого порядка малости по отношению к Δy , получим

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)_{\Delta y} = \left(\frac{dx}{dy} \right)_0 + \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) \right]_0 \Delta y.$$

Так как силы f_1 и f_2 направлены в противоположные стороны, то на элемент объема действует и разность, равная

$$f = f_2 - f_1 = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)_{\Delta y} - \left(\frac{dx}{dy} \right)_0 \right] S = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d^2 x}{dy^2} \Delta y S.$$

Под действием этой силы элемент объема получает ускорение $d^2 x/dt^2$, которое равно по второму закону Ньютона действующей силе, деленной на массу элемента; масса элемента равна произведению плотности ρ среды на объем элемента $\Delta y S$, следовательно:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho \Delta y S} \cdot \frac{d^2 x}{dy^2} \Delta y S \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho} \frac{d^2 x}{dy^2}. \quad (4)$$

Формула (4) дает связь между второй производной смещения по времени $d^2 x/dt^2$ и второй производной смещения по координате $d^2 x/dy^2$; такая связь уже была нами выведена в формуле (3), причем стоящая там величина V представляла скорость распространения волны. Сравнивая оба выражения, мы видим, что скорость распространения продольных волн в среде выражается через плотность и коэффициент упругости среды следующим соотношением:

$$V^2 = \frac{1}{\alpha \rho} \quad \text{или} \quad V = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}}. \quad (5)$$

Для отдельно взятого цилиндрического объема коэффициент упругости $\alpha = \frac{1}{E}$, где E — модуль Юнга (см. § 89); эта связь позволяет переписать формулу (5) в виде:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5a)$$

то совпадает с формулой, приведенной на стр. 416.

Однако в неограниченной среде при сжатии или растяжении каждый элемент объема одновременно испытывает боковое сжатие или растяжение со стороны соседних элементов объема, что ведет к более сложной связи между коэффициентом упругости среды α и модулем Юнга, а именно:

$$\alpha = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)E},$$

где σ — коэффициент Пуассона (см. § 89). Отсюда скорость распространения продольных волн в упругой сплошной среде равна

$$V = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \cdot \frac{E}{\rho}. \quad (56)$$

Так как коэффициент Пуассона есть величина порядка $1/4$, то множитель $\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ близок к единице, и для сплошной среды приближенно можно пользоваться формулой (5а). Таким образом, оказывается, что *скорость распространения продольных волн в упругой среде прямо пропорциональна корню квадратному из модуля Юнга и обратно пропорциональна корню квадратному из плотности среды.*

Аналогичным образом можно показать, что скорость распространения поперечных волн в упругой среде равна

$$V = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad (6)$$

где N — модуль сдвига.

Эта формула совпадает с приведенной на стр. 416.

§ 112. Энергия волны. Представим себе волну, распространяющуюся вдоль оси y и заданную уравнением:

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (1)$$

Энергия участка среды, в которой распространяется эта волна, складывается из кинетической энергии E_k и потенциальной энергии E_p . Пусть объем участка среды равен τ ; обозначим его массу через m и скорость смещения его частиц — через v , тогда кинетическая энергия

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2;$$

замечая, что $m = \rho \tau$, где ρ — плотность среды, и находя выражение для скорости по (1)

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right),$$

перепишем выражение для кинетической энергии E_k в виде:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \tau a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (2)$$

Потенциальная энергия твердого тела, подвергнутого относительной деформации $(\Delta L/L)$, как было выведено в § 89 [формула (6)], равна

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{L} \right) \cdot \Delta L^2.$$

Вводя вместо модуля Юнга E коэффициент упругости $a = \frac{1}{E}$ и деля и умножая правую часть на L , получим

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \cdot LS.$$

Произведение LS представляет собой объем τ деформируемого тела; относительную деформацию $\Delta L/L$ можно представить в виде dx/dy , где dx — разность смещений частиц, отстоящих друг от друга на dy , тогда

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \tau.$$

Определяя выражение для dx/dy по (1):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right),$$

перепишем выражение для потенциальной энергии в виде:

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{a^2 \omega^2 \tau}{V^2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (3)$$

Сравнивая выражения (2) и (3), мы видим, что и кинетическая, и потенциальная энергия меняются в одной фазе, т. е. одновременно достигают максимума и минимума. Этим энергия участка волны существенно отличается от энергии колебания изолированной точки, где при максимуме кинетической энергии потенциальная энергия имеет минимум, и наоборот. При колебании отдельной точки полный запас энергии колебания остается постоянным. При колебании в среде каждый элемент объема среды связан с окружающей средой, и энергия из одного участка среды может переходить в другие. Поэтому полная энергия участка среды, в которой распространяется волна, не остается постоянной.

Подсчитаем полную энергию E элемента объема среды τ ; складывая выражения (2) и (3), получим

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha V^2} + \rho \right) a^2 \omega^2 \tau \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Так как по формуле (5) § 111 скорость распространения волн V в упругой среде

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}},$$

то выражение для полной энергии E переписываем в виде:

$$E = \rho a^2 \omega^2 \tau \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (4)$$

Таким образом, энергия участка волны пропорциональна квадрату амплитуды колебания, квадрату частоты и плотности среды.

Введем в рассмотрение плотность энергии ϵ , которую определим как отношение энергии, заключенной в элементе объема τ , к величине этого объема:

$$\epsilon = \frac{E}{\tau} = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (5)$$

Плотность энергии в данной точке, как и сама энергия, величина переменная. Через половину периода плотность энергии принимает первоначальное значение. Так как среднее значение квадрата синуса за период равно $1/2$, то по (5) среднее значение плотности энергии

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (6)$$

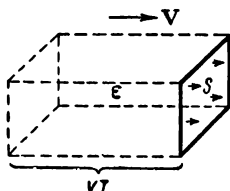


Рис. 281. За время, равное T , через площадь S протечет энергия, заключенная в объеме столба VTS .

В силу того, что энергия не остается локализованной в данном участке, а перемещается в среде, можно ввести в рассмотрение понятие о *потоке энергии*. Под потоком энергии через поверхность будем подразумевать величину, численно равную количеству энергии, проходящей в единицу времени через данную поверхность.

Предположим, что мы берем поверхность S , перпендикулярную к направлению скорости V волны; тогда через эту поверхность за время, равное периоду T , протечет количество энергии, равное энергии, заключенной в столбе поперечного сечения S и длиной VT (рис. 281); это количество энергии равно среднему значению плотности энергии $\bar{\epsilon}$, взятому за период и умноженному на объем столба VTS , откуда

$$E = \bar{\epsilon} \cdot VTS.$$

Средний поток энергии \bar{P} получим, поделив это выражение на время T , в течение которого энергия протекает через поверхность S :

$$\bar{P} = \bar{\epsilon} \cdot VS. \quad (7)$$

Подставив сюда значение $\bar{\epsilon}$ по (6), найдем

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 VS.$$

Таким образом, *средний поток энергии через поверхность, перпендикулярную к направлению распространения колебаний, равен произведению средней плотности энергии на скорость распространения волны и на величину поверхности*.

Количество энергии, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, называется *плотностью потока* \bar{U} . Так как по этому определению $\bar{U} = \frac{\bar{P}}{S}$, то, пользуясь формулой (7), получим

$$\bar{U} = \bar{\epsilon} \cdot V, \quad (8)$$

т. е. плотность потока равна произведению из средней плотности энергии и скорости распространения волны.

Так как скорость V представляет собой вектор, то и плотность потока энергии можно рассматривать как вектор, направленный в сторону распространения волны. Такой вектор был впервые введен в рассмотрение профессором Московского университета Н. А. Умовым (1845—1915) и носит название *вектора Умова*.

Покажем, что, если мы имеем сферическую волну, распространяющуюся от точечного источника, то средняя плотность потока энергии обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

Возьмем точечный источник колебаний и проведем сферу радиуса R с центром в источнике. Волна и энергия, с ней связанная, будут распространяться по радиусам, т. е. перпендикулярно к поверхности сферы. За период T

через поверхность сферы протечет энергия, равная \overline{PT} , где \overline{P} — поток энергии через сферу. Плотность потока \overline{U} мы получим, если эту энергию поделим на величину поверхности сферы и на время:

$$\overline{U} = \frac{\overline{P} \cdot T}{4\pi R^2 T} = \frac{\overline{P}}{4\pi R^2}.$$

Так как при отсутствии поглощения колебаний в среде и установившемся волновом процессе средний поток энергии \overline{P} постоянен и не зависит от того, какого радиуса R проведена сфера, то последнее отношение показывает, что *средняя плотность потока обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного источника*.

Выведенное соотношение, как указано, справедливо при отсутствии поглощения в среде; другими словами, при нашем рассмотрении предполагалось, что энергия волнового процесса не переходит в какой-либо другой вид энергии. Однако в действительности энергия колебательного движения в среде обычно частью переходит во внутреннюю энергию. Это вызвано наличием во всякой механической среде внутреннего трения. Полное количество энергии, которое несет волна, будет зависеть от ее расстояния от источника: чем дальше от источника находится волновая поверхность, тем меньшей энергией она обладает. Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды, то, следовательно, и амплитуда колебания уменьшается по мере распространения волны. Чтобы выяснить закон уменьшения амплитуды, сделаем предположение, что при прохождении слоя толщиной dy относительное уменьшение амплитуды $-\frac{da}{a}$ пропорционально dy , т. е. напомним уравнение:

$$-\frac{da}{a} = x dy,$$

где x — постоянная величина, зависящая от природы среды.

Последнее выражение можно, очевидным образом, переписать:

$$d(\ln a) = -x dy.$$

Если дифференциалы двух величин равны друг другу, то сами величины отличаются друг от друга на произвольную аддитивную постоянную величину C , отсюда

$$\ln a = -xy + C;$$

постоянная C определяется из условия, что при $y=0$ величина $\ln a$, равная $\ln a_0$, должна равняться C , таким образом:

$$\ln a = \ln a_0 - xy, \quad \text{откуда} \quad a = a_0 e^{-xy}. \quad (9)$$

Это выражение дает убывание амплитуды a по мере того, как волна распространяется в направлении оси y ; a_0 представляет значение амплитуды при $y=0$.

Уравнение плоской волны в среде с поглощением на основании формулы (9) будет:

$$x = a_0 e^{-xy} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (10)$$

Определим еще убывание энергии волны с расстоянием. Обозначим $\overline{\epsilon}_0$ — среднюю плотность энергии при $y=0$, через $\overline{\epsilon}_y$ — среднюю плотность энергии на расстоянии y , тогда по соотношениям (6) и (9) получим

$$\overline{\epsilon}_y = \overline{\epsilon}_0 e^{-2xy}. \quad (11)$$

Обозначив 2π через k , перепишем последнюю формулу в виде:

$$\bar{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_0 e^{-ky}. \quad (11a)$$

Величина k называется *коэффициентом поглощения*.

§ 113. Явление Допплера. Разберем вопрос о том, какова связь между колебаниями, испускаемыми источником, и колебаниями, воспринимаемыми каким-либо прибором, регистрирующим колебания, если источник и прибор движутся друг относительно друга. При этом для того, чтобы колебания могли от источника распространиться до прибора в виде волн, прибор и источник должны быть погружены в сплошную упругую среду. Предположим, что источник A испускает колебания периода T , так что число колебаний, испускаемых в единицу времени, равно $\nu = \frac{1}{T}$. Пусть некоторый прибор воспринимает колебания; число колебаний, воспринимаемых прибором в единицу времени, обозначим ν' . Разберем связь между ν' и ν для различных случаев движений прибора и источника относительно среды, в которой распространяются колебания. При этом для простоты предположим, что эти движения происходят по прямой, соединяющей источник с прибором.

В формулах, которыми мы будем пользоваться, введем определенное правило знаков скоростей источника и прибора. Условимся скорость u источника относительно среды считать положительной, если источник приближается к прибору. Если источник удаляется от прибора, его скорость будем считать отрицательной. Аналогичное условие введем для знака скорости v прибора относительно среды: при приближении его к источнику считаем его скорость положительной, при удалении от источника — отрицательной. Скорость распространения колебаний в среде обозначим буквой V .

Рассмотрим *первый случай: регистрирующий прибор A и источник B покоятся относительно среды*, т. е. $u=0$, $v=0$. Если колебания непрерывно идут мимо прибора, то он воспримет столько колебаний в единицу времени, сколько волн в единицу времени пройдет мимо него. Так как в единицу времени волна проходит расстояние V , то число воспринятых прибором колебаний равно

$$\nu' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = \nu,$$

т. е. мы получили очевидный результат: число колебаний, воспринимаемых прибором в единицу времени, равно числу колебаний, испускаемых в единицу времени источником.

Второй случай: регистрирующий прибор движется относительно среды со скоростью v ; источник неподвижен, т. е. $u=0$.

Сперва положим, что прибор движется по направлению к источнику, т. е. по установленному правилу скоростей $v > 0$. В этом случае мимо прибора за единицу времени пройдет большее число

волн, чем в том случае, когда прибор покоится относительно среды, в которой распространяются волны. В самом деле, так как прибор движется навстречу волнам, то рассматриваемый случай эквивалентен тому, как если бы волны шли мимо прибора со скоростью, равной сумме скорости волны V и скорости прибора v . Число волн, прошедших в единицу времени мимо прибора, равно

$$\nu' = \frac{V+v}{\lambda} = \frac{V+v}{VT},$$

отсюда, так как $\frac{1}{T} = \nu$, то

$$\nu' = \left(1 + \frac{v}{V}\right) \nu, \quad (1)$$

т. е. число воспринятых прибором колебаний больше числа испущенных колебаний в $\left(1 + \frac{v}{V}\right)$ раз.

Если прибор удаляется от источника, то по принятому правилу знаков его скорость $v < 0$. В этом случае число колебаний ν' , воспринятых прибором, выразится также формулой (1), но так как v/V будет меньше нуля, то ν' окажется меньше ν , т. е. число колебаний, воспринятых прибором, будет меньше числа испущенных колебаний.

Изменение числа колебаний, регистрируемых прибором, при движении прибора или источника относительно среды носит название явления Допплера.

Если скорость v прибора равна скорости волны, то прибор перемещается вместе с волной, и число воспринимаемых им в единицу времени колебаний равно нулю. Если скорость прибора больше скорости волн, то волны отстают от прибора, прибор отметит, что волны идут ему навстречу.

Рассмотрим теперь *третий случай*: источник движется относительно среды со скоростью u ; регистрирующий прибор неподвижен, т. е. $v = 0$.

Положим сперва, что источник движется к прибору: $u > 0$.

Так как скорость распространения колебаний зависит лишь от свойств среды, то за один период колебание распространится вперед на длину волны λ независимо от того, движется ли источник относительно среды или нет; но за это время источник пройдет в направлении волны путь uT (рис. 282), в результате чего длина волны окажется равной

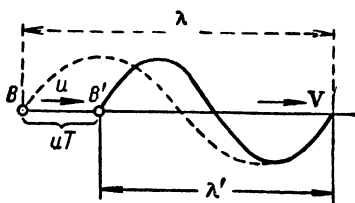


Рис. 282. Уменьшение длины волны при движении источника в сторону распространения волн.

$$\lambda' = \lambda - uT = VT - uT = (V - u)T,$$

отсюда число колебаний, воспринятых прибором в единицу времени, увеличится вследствие укорочения длины волны и будет равно

$$\nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{(V-u)T} \quad \text{или} \quad \nu' = \frac{V}{V-u} \nu, \quad (2)$$

т. е. число колебаний, воспринятых прибором, увеличится в отношении $\frac{V}{V-u}$.

Если бы источник удалялся от прибора ($u < 0$), то произошло бы *увеличение* длины волны на величину $\Delta\lambda = uT$, в результате чего прибор воспринял бы уменьшенное число колебаний $\nu' < \nu$.

В четвертом, самом общем, случае предположим, что регистрирующий прибор и источник перемещаются одновременно относительно среды, в которой распространяются волны ($u \neq 0$ и $v \neq 0$).

Вследствие движения источника длина испускаемой им волны изменится и станет равной

$$\lambda' = \lambda - uT.$$

Вследствие движения прибора число воспринятых им за единицу времени колебаний окажется измененным в $\frac{V+v}{V}$ раз; в результате этих обеих причин число колебаний, воспринимаемых прибором, окажется равным

$$\nu' = \frac{V+v}{\lambda - uT} = \frac{V+v}{V-u} \cdot \frac{1}{T} \quad \text{или} \quad \nu' = \frac{V+v}{V-u} \nu. \quad (3)$$

Таким образом, ν' зависит по-разному от скорости прибора v и скорости источника u относительно среды.

Если скорости v и u направлены не по прямой, соединяющей прибор и источник, то следует брать их составляющие на эту прямую.

Изменение числа колебаний в зависимости от движения источника или регистрирующего прибора легко заметить при восприятии звуков. Частота звуковых колебаний определяет тон звука: чем больше число колебаний в единицу времени, тем выше тон. Когда свистящий паровоз с большой скоростью приближается к наблюдателю, то ясно слышно, как высота свиста меняется в тот момент, когда, пройдя мимо, паровоз начинает удаляться.

§ 114. Групповая скорость. До сих пор, говоря о скорости распространения волн, мы говорили о фазовой скорости, т. е. о скорости, с которой распространяется поверхность одинаковых фаз. В уравнении плоской волны

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right) \quad (1)$$

величина V есть фазовая скорость, т. е. скорость, с которой перемещается в среде поверхность, представляющая собой геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе. В этом можно убедиться на основании следующих рассуждений.

В выражении (1) r есть отрезок, отложенный в направлении распространения плоских волн и определяющий положение данной поверхности одинаковых фаз (рис. 273). Требование постоянства фаз во времени сводится к требованию, чтобы аргумент косинуса в выражении (1) был постоянен, т. е. чтобы

$$\omega \left(t - \frac{r}{V} \right) = \text{const},$$

или, так как круговая частота ω есть величина постоянная, то — к требованию, чтобы имело место условие:

$$t - \frac{r}{V} = \text{const}.$$

Обозначим значение этой величины, постоянной для данной поверхности одинаковых фаз, через τ , тогда

$$t - \frac{r}{V} = \tau.$$

Очевидно, τ определяется моментом времени, от которого отсчитываем время t ; так как мы полагаем $t = 0$ для $r = 0$, то должны положить и постоянную τ равной нулю, откуда

$$t - \frac{r}{V} = 0 \quad \text{и} \quad V = \frac{r}{t},$$

т. е. V представляет собой скорость, с которой со временем возрастает отрезок r , другими словами, — скорость, с которой перемещается плоскость одинаковых фаз.

Релей впервые показал, что наряду с фазовой скоростью волн имеет смысл ввести понятие о другой скорости, называемой *групповой скоростью*. Групповая скорость относится к случаю распространения волн сложного не косинусоидального характера в среде, где фазовая скорость распространения косинусоидальных волн зависит от их частоты. Зависимость фазовой скорости волн от их частоты называется *дисперсией волн*.

Представим себе на поверхности воды волну в виде единичного горба (рис. 283), распространяющегося в определенном направлении. Согласно сказанному в § 104, такое сложное колебание может быть расположено на группу чисто гармонических колебаний. Если все гармонические колебания распространяются по поверхности воды с одинаковыми скоростями, то с той же скоростью будет распространяться и образуемое ими сложное колебание. Но если скорости отдельных косинусоидальных волн различны, то непрерывно меняются разности фаз между ними, и горб, возникающий в результате их сложения, непрерывно меняет свою форму и перемещается со скоростью, не совпадающей с фазовой скоростью ни одной из слагаемых волн.



Рис. 284. Отрезок косинусоиды.




Рис. 283. Волна в виде единичного горба.

Всякая реальная волна отлична от идеальной косинусоиды хотя бы потому, что идеальная косинусоида не ограничена во времени. Мы видели на стр. 410, что всякое затухающее колебание складывается из бесчисленного множества гармонических колебаний. Всякий отрезок косинусоиды (рис. 284) тоже может быть по теореме Фурье разложен на бесчисленное множество неограниченных во времени идеальных косинусоид. Таким образом, всякая реальная волна представляет собою наложение — группу — бесконечных косинусоид, и скорость ее распро-

странения в диспергирующей среде отлична от фазовой скорости слагаемых волн. Эта скорость распространения реальных волн в диспергирующей среде и носит название *групповой скорости*. Только в среде, лишенной дисперсии, реальная волна распространяется со скоростью, совпадающей с фазовой скоростью тех косинусоидальных волн, сложением которых она образована.

Составим аналитическое выражение для групповой скорости. Для простоты предположим, что группа волн состоит всего из двух волн, мало различающихся друг от друга по длине: 1) волны — с длиной волны λ , распространяющейся со скоростью V ; 2) волны — с длиной волны $\lambda' = \lambda + d\lambda$, распространяющейся со скоростью



$$V' = V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda. \quad (2)$$



Рис. 285. К выводу выражения для групповой скорости.

Относительное расположение обеих волн для некоторого момента времени представлено на рис. 285а. Горбы обеих волн сходятся в точке А; в одном месте расположен максимум результирующих колебаний. Пусть $V' > V$, тогда вторая волна обгоняет первую. Че-

рез некоторый промежуток времени τ она обгонит ее на отрезок, равный $d\lambda$, в результате чего горбы обеих волн будут уже сходитьсь не в точке А, а в точке В (рис. 285б). Место максимума результирующего сложного колебания окажется смещенным относительно первой волны назад на отрезок, равный λ . Отсюда скорость распространения максимума результирующих колебаний относительно среды окажется меньше скорости распространения первой волны на величину λ/τ . Эта скорость распространения максимума сложного колебания и есть групповая скорость; обозначая ее через U , имеем

$$U = V - \frac{\lambda}{\tau}. \quad (3)$$

Так как скорость второй волны относительно первой равна $V' - V$, то

$$\tau = \frac{d\lambda}{V' - V};$$

подставляя сюда вместо V' его значение по (2), получим

$$\tau = \frac{d\lambda}{\left(V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda\right) - V} = \frac{d\lambda}{dV}.$$

Подставив это выражение для τ в (3), найдем для групповой скорости

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что групповая скорость U тем больше отличается от фазовой скорости V , чем больше $dV/d\lambda$, т. е. чем сильнее выражена зависимость скорости распространения волн от их длины. При $\frac{dV}{d\lambda} > 0$ групповая

скорость $U < V$, а при $\frac{dV}{d\lambda} < 0$ имеем $U > V$. Таким образом, групповая скорость U может быть как меньше, так и больше фазовой скорости V . Групповая скорость меньше фазовой, когда $\frac{dV}{d\lambda} > 0$, т. е. когда более длинные волны распространяются скорее более коротких; этот случай носит название нормальной дисперсии.

Для среды, лишенной дисперсии, $\frac{dV}{d\lambda} = 0$ и $U = V$, т. е., в согласии со сказанным выше, групповая и фазовая скорости совпадают.

Для определения групповой скорости можно воспользоваться следующим графическим методом. Пусть кривая AB (рис. 286) выражает зависимость фазовой скорости распространения волн V от длины волны λ . Проведем в точке C , соответствующей данному значению λ , касательную CD . Тогда для отрезка CF имеем

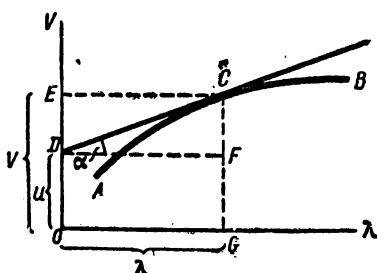


Рис. 286. Графическое нахождение групповой скорости.

$$CF = DF \cdot \operatorname{tg} \alpha = \lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ но } \operatorname{tg} \alpha = \frac{dV}{d\lambda}, \text{ откуда } CF = \lambda \cdot \frac{dV}{d\lambda}.$$

Из рисунка имеем

$$DO = EO - ED, \text{ но } EO = V, \text{ а } ED = CF = \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

откуда $DO = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}$.

Сравнивая это выражение с формулой (4), получаем, что на нашем графике отрезок DO как раз выражает групповую скорость U .

Из рис. 286 легко еще раз установить приведенные выше соотношения: если скорость волн V возрастает с λ (к этому случаю и относится рисунок), то точка D попадает ниже точки E , следовательно, групповая скорость $V < V$. Если скорость V убывает с возрастанием λ , то, как легко понять, точка D окажется выше точки E , что будет соответствовать соотношению $V > V$. Наконец, если волны всех длин распространятся с одинаковой скоростью, то зависимость V от λ изобразится на графике прямой, параллельной оси λ . Тогда точки E и D совпадут, а следовательно, будут совпадать групповая скорость V и фазовая скорость V .

Г Л А В А XIII

АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 115. Звуковые колебания и их распространение. В воздухе, как и во всяком другом газе, колебания распространяются в виде продольных волн. Достигнув нашего органа слуха — уха, колебания, частоты которых лежат в интервале приблизительно от 20 до 20 000 колебаний в 1 сек., вызывают специфическое ощущение звука.

Принято в качестве *единицы частоты брать частоту такого колебательного процесса, при котором в 1 сек. совершается одно колебание*; эта единица частоты по имени немецкого физика Герца называется *герцем* (сокращенно обозначается *гц*). Например, колебательный процесс, при котором в 1 сек. совершается 2 колебания, обладает частотой в 2 *гц*, а колебательный процесс, при котором совершается 10 колебаний в 1 сек., — частотой в 10 *гц*.

Таким образом, колебания, лежащие в интервале от 20 до 20 000 *гц*, обладают свойством вызывать ощущение звука и могут быть выделены по этому признаку в особую группу *звуковых* или *акустических колебаний*, называемых также сокращенно звуком.

Указанное выделение колебательных процессов, происходящих с частотами, лежащими в интервале от 20 до 20 000 *гц*, связано с физиологическими особенностями человеческого органа слуха воспринимать колебания именно этих частот. С физической же точки зрения колебания, например, в 10 *гц* или в 30 000 *гц* ничем специфическим не отличаются от колебаний в 20 *гц* или 20 000 *гц*. Поэтому в физике обычно под словами „звуковые колебания“ подразумевают вообще упругие колебания, распространяющиеся в виде волнового процесса в газах, жидкостях и твердых телах или образующие в ограниченных областях этих тел стоячие волны. Упругие колебания с частотами, превышающими 20 000 *гц*, принято называть *ультразвуками*. Упругие колебания с частотами меньше 20 *гц* называются *инфразвуками*.

Поскольку основной средой, в которой распространяются звуковые колебания, является воздух, рассмотрим вопрос о скорости распространения упругих продольных волн в газах.

В § 106 было приведено следующее выражение для скорости распространения продольных упругих волн в сплошной среде:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга среды, ρ — ее плотность. По определению, для деформируемого упругого стержня модуль Юнга

$$E = \frac{p_n}{\frac{\Delta L}{L}},$$

где p_n — усилие, т. е. величина, численно равная силе, отнесенной к единице поперечного сечения стержня, а $\Delta L/L$ — относительное удлинение. Для столба газа p_n должно быть заменено через добавочное давление Δp , вызывающее сжатие газа. Относительную линейную деформацию $\Delta L/L$ можно заменить относительной объемной деформацией $\Delta V/V$, так как мы полагаем, что столб газа сжимается лишь вдоль своей длины, не меняя своего поперечного сечения. Таким образом, имеем

$$E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}. \quad (2)$$

Полагая изменения давления и объема бесконечно малыми, обозначим их через dp и dV . При этом мы должны иметь в виду, что увеличению давления (положительное dp) соответствует уменьшение объема, т. е. отрицательное dV . Поэтому формулу (2) перепишем в виде:

$$E = - \frac{dp}{\frac{dV}{V}} \quad \text{или} \quad E = - V \frac{dp}{dV}. \quad (2a)$$

Звуковые колебания происходят настолько быстро, что сжатия и разрежения газа можно считать адиабатическими, поэтому изменение состояния газа удовлетворяет формуле Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (см. § 49).

Дифференцируя формулу Пуассона, получим:

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dp}{dV} = - \gamma \frac{p}{V}.$$

Подставляя это значение dp/dV в формулу (2a), найдем

$$E = \gamma p;$$

наконец, подставив это значение E в выражение (1) для скорости звуковых колебаний, получим

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (3)$$

Подставив сюда вместо плотности ρ ее значение через давление p , температуру газа T и его молекулярный вес μ (см. § 45)

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

где R — газовая постоянная, найдем

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (4)$$

Таким образом, для данного газа скорость распространения звуковых волн прямо пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры T и не зависит от давления газа p .

Для различных газов, взятых при одинаковых условиях, скорости звука обратно пропорциональны корню квадратному из их молекулярных весов.

Таблица XX
Скорости звука v в газах
при 0°C

| Газ | Скорость звука в м/сек |
|-----------------------|---------------------------|
| Воздух | 331 |
| Кислород | 315 |
| Водород | 1263 |
| Углекислота | 258 |

В табл. XX приведены значения скорости звука в некоторых газах при температуре 0°C .

Большое значение скорости звука в водороде определяется его малым молекулярным весом.

При распространении звуковых волн в атмосфере большую роль играют неоднородности атмосферы. Скорость звука зависит от температуры воздуха и степени его влажности. Ветер также влияет на скорость распространения звуковых волн. Наконец, волны отражаются на границе двух сред, в которых они движутся с различными скоростями.

Можно наблюдать отражение звуков от облаков и от границы тумана.

Всем хорошо известно, что звуки лучше доходят по ветру, чем против ветра. Это явление обусловлено градиентом скорости ветра, а не скоростью ветра самой по себе, так как она обычно мала по сравнению со скоростью звука. Скорость ветра у поверхности Земли меньше, чем на некоторой высоте. Это ведет к загибанию вверх звуковых лучей, идущих против ветра. Плохая слышимость против ветра объясняется тем, что звуковые лучи проходят над головой наблюдателя.

Подобное же явление наступает и вследствие наличия градиента температуры воздуха. В теплом воздухе звук распространяется быстрее, чем в холодном. Отсюда следует, что если температура понижается по мере удаления от поверхности Земли, то скорость звука уменьшается

с высотой, и звуковые лучи отклоняются вверх. Этот случай соответствует градиенту температуры, имеющему место в середине жаркого солнечного дня, когда поверхность Земли сильно нагрета. При этих условиях слышимость бывает плохой. Вечером же при ясном небе наступает быстрое охлаждение Земли, ведущее к охлаждению близлежащих слоев воздуха. Температура воздуха возрастает с высотой, что ведет к загибанию обратно книзу звуковых лучей, идущих вверх. Этим объясняется хорошая слышимость вечером.

Наконец, неоднородностью атмосферы объясняется образование так называемых зон молчания, наблюдаемых при распространении на большие расстояния сильных звуков, например звуков взрывов. Взрыв слышен на сравнительно близких, а также на очень далеких расстояниях (сотни километров), посредине же лежит область, где звука взрыва не слышно.

В выражение скорости звука (4) входит отношение теплоемкостей $\gamma = C_p/C_v$, что позволяет находить для газов численное значение этого отношения по измерениям скорости звука.

Остановимся теперь еще на некоторых характеристиках распространяющейся в газе звуковой волны. В каждой данной точке среды, в которой распространяется продольная звуковая волна, сжатия и разрежения сменяют друг друга. Следовательно, давление газа то возрастает против начального, то становится ниже его. Наибольшее отличие давления от нормального называется *амплитудой звука*; эта амплитуда обычно измеряется в барах.

Ввиду того что это добавочное давление в волне все время колеблется, его среднее значение равно нулю. Однако для очень сильных волн приходится принимать во внимание эффекты, зависящие от квадрата и более высоких степеней смещения. Колебания такого рода описываются нелинейными уравнениями и потому называются *нелинейными колебаниями*. Для нелинейных колебаний среднее давление не равно нулю. Такая звуковая волна, отражаясь от преграды, оказывает на нее давление. Величина этого звукового давления, как показывает теория, равна

$$p = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}' (\gamma + 1),$$

где $\bar{\epsilon}'$ — средняя плотность энергии в стоячей волне, образующейся около преграды; γ имеет прежнее значение отношения теплоемкостей C_p/C_v .

Экспериментально звуковое давление было изучено в лаборатории знаменитого русского физика П. Н. Лебедева (1866—1912), который поставил в общем виде вопрос о давлении, оказываемом при поглощении и отражении волн (см. т. III).

§ 116. Интерференция звуковых волн. На звуковых волнах легко могут быть обнаружены характерные явления интерференции, описанные в § 109. Простейший опыт по интерференции звука

осуществляется с помощью трубы, схематически изображенной на рис. 287. Источник звука устанавливается у воронки *A*, насаженной на трубу. Далее труба разветвляется, образуя два колена *ABD* и *ACD*. Колено *ACD* сделано из труб, вставленных друг в друга;

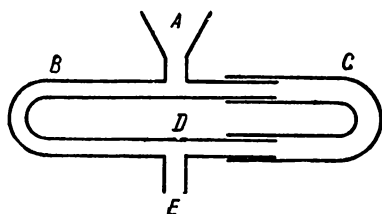


Рис. 287. Труба для наблюдения интерференции звука.

его можно удлинять или укорачивать. Звуковые колебания доходят до конца трубы *E* двумя путями: по колену *ABD* и по колену *ACD*. При неодинаковой длине колен между волнами, пришедшими в точку *E* по различным коленам, будет существовать разность хода $r_2 - r_1$. Если эта разность хода равна четному числу половолн, т. е.

$$r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2}, \text{ где } k \text{ — целое чи-}$$

сло, то, по сказанному на стр. 423, звук в точке *E* усилится по сравнению с тем, как если бы он проходил по одному колену. При разности хода в нечетное число половолн, т. е. когда $r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, будет наблюдаться ослабление звука.

Указанной трубой можно воспользоваться для измерения длин волн звука, испускаемого данным источником. Для этого надо измерить то смещение трубки *C*, которое необходимо произвести, чтобы перейти от одного ослабления звука до другого. Изменение длины колена даст длину волны λ . Этот метод измерения длин звуковых волн основан на явлении интерференции, поэтому он носит название *интерференционного метода*. Труба, изображенная на рис. 287, является простейшим аналогом *интерферометров*, применяемых в оптике для измерения длин световых волн.

Практически такую трубу можно использовать для измерения длины звуковых волн среднего диапазона, так как крайним звуковым колебаниям соответствуют слишком длинные или слишком короткие волны. Действительно, в воздухе, где скорость звука $V = 331 \text{ м/сек}$, наиболее медленным звуковым колебаниям с частотой $\nu = 20 \text{ гц}$ соответствует длина волны $\lambda = \frac{331}{20} \text{ м} = 16,5 \text{ м}$, наиболее же быстрым колебаниям $\nu = 2 \cdot 10^4 \text{ гц}$ соответствует длина волны $\lambda = 1,65 \text{ см}$. Средней частоте $\nu = 500 \text{ гц}$ соответствует $\lambda = 66,2 \text{ см}$.

Если в воронку трубы *A* направить сложный звук, то при заданной разности хода $r_2 - r_1$ ослабятся те колебания, для которых эта разность равна нечетному числу половолн $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ и т. д. В результате из сложного колебания выпадает ряд его гармонических составляющих, и сложное колебание изменит свой характер. Таким образом, труба играет роль фильтра по отношению к колебаниям определенных частот.

Частным случаем интерференции является интерференция двух *встречных волн* одинаковых частот и амплитуд. В этом случае, как было указано на стр. 425, образуются *стоячие волны*. Образование стоячих волн можно непосредственно обнаружить при отражении звука от стены. Для этого надо воспользоваться источником, испускающим волны определенной длины волны, которые при этом должны быть достаточно короткими, чтобы расстояния между соседними пучностями были невелики. Приближая и удаляя голову от стены, можно слышать усиление звука в местах наиболее резкого изменения плотности, т. е. в местах расположения узлов.

Кундт предложил весьма наглядный способ наблюдать стоячие волны. Оба конца стеклянной трубки закрываются наглухо пробками *A* и *C* (рис. 288). Через отверстие в пробке *C* пропускается зажа-

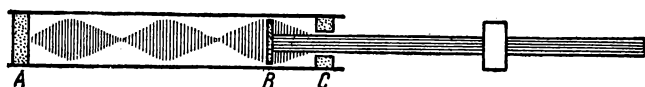


Рис. 288. Опыт Кундта по наблюдению стоячих волн.

тый посредине металлический стержень, на конце которого насажен пробковый диск *B*, свободно входящий в трубку. Если возбудить в стержне продольные колебания, натирая его кожей, посыпанной канифолью, то в нем установится стоячая волна с узлом в месте зажима и пучностями на концах. Пробковый диск *B* придет в колебания и возбудит колебания воздуха в трубке. Волна, идущая по трубке вперед, будет интерферировать с волной, отразившейся от конца *A* и идущей назад. Если трубка такова, что на ее длине укладывается целое число полуволн, то в ней установятся стоячие волны, на концах трубки образуются узлы смещений. В трубку насыпаются пробковые опилки, которые разбрасываются в пучностях и остаются лежать в узлах, благодаря чему места образования узлов и пучностей делаются непосредственно видимыми. Измерение расстояния между двумя соседними узлами (или пучностями) дает половину длины звуковой волны, возбужденной в трубке. Таким образом, трубка Кундта также служит для измерения длин звуковых волн.

Образование узлов и пучностей можно также наблюдать в звучащих пластинках. Здесь мы будем наблюдать образование *узловых линий*. Для наблюдения берется латунная пластинка, укрепленная в середине, и в ней возбуждаются смычком колебания. На пластинку насыпают немного песка. Когда пластинка колеблется, песок сбрасывается с мест пучностей и собирается по узловым линиям. На пластинке получаются сложные фигуры, по которым можно судить о роде колебаний. Эти фигуры для ряда частных случаев изображены на рис. 289. Вид колебаний зависит от точки возбуждения пластинки смычком и, кроме того, меняется в зависимости от точки

прикосновения к пластинке. Точка возбуждения будет пучностью, а узловая линия подходит к краю в точке, где мы касаемся пластинки пальцем. Остальные линии расположатся на пластинке симметрично.

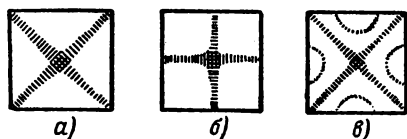


Рис. 289. Узловые линии.

Если коснуться пальцем угла пластинки и провести смычком по середине одной из сторон, то получается фигура, изображенная на рис. 289 а. Здесь узловые линии расположены по диагоналям. Если мы, наоборот, коснемся пальцем середины края пластинки, а около угла проведем смычком, то получим вторую фигуру (рис. 289 б). Касаясь одновременно угла и одной из сторон пластинки и проводя смычком по середине одной из сторон, мы получим более сложное расположение узловых линий (рис. 289 в).

Изучение вида узловых линий имеет практическое значение для выяснения характера колебаний мембран в телефонах и других акустических аппаратах.

§ 117. Восприятие звуков. Человек воспринимает звуки с помощью своего слухового аппарата — уха; строение его схематически представлено на рис. 290. В височных костях *1* черепа находится особый орган — улитка *2*, представляющий собой небольшую (объемом около $0,2 \text{ см}^3$) костную полость, наполненную жидкостью (лимфой). Внутри улитки расположен кортиева орган, состоящий из волокон, к которым подходят окончания слухового нерва *3*. Волокна имеют различную длину и натяжение, в результате им соответствуют различные резонансные частоты. Звуковые колебания по слуховому каналу *4* доходят до барабанной перепонки *5*, затем через систему слуховых косточек *6* передаются овальному окну *7*, ведущему в полость улитки. При действии звуков определенной частоты определенные волокна кортиева органа приходят в резонансное колебание и возбуждают соответствующие нервные окончания, передающие раздражения в мозг. При действии сложного звука раздражение испытывает ряд нервных окончаний, в результате чего человек может воспринимать составляющие сложного звука отдельно.

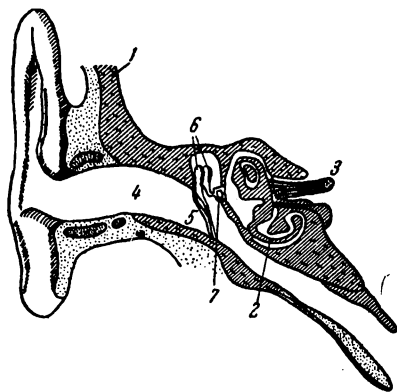


Рис. 290. Разрез уха человека.

Возможность оценивать направление распространения звуковых волн обусловлена наличием у человека парного слухового органа

(*бинауральный эффект*). Ощущение направления звуковых волн возникает благодаря способности мозговых центров учитывать разность фаз колебаний, достигающих ушей. При звуках высокой частоты суждение о направлении звука может возникать вследствие разницы амплитуд звука в обоих ушах. В субъективном звуковом восприятии мы различаем три характеристики звука: 1) *высоту*, 2) *тембр*, 3) *громкость*.

Высота звука определяется его частотой: чем больше частота, тем выше звук.

Тембр звука определяется характером колебаний; лишь в редких случаях звуковое колебание представляет собою чистое гармоническое колебание, чаще оно носит более сложный характер (см. § 118). Состав этого колебания и определяет тембр звука.

Объективная громкость, или, как говорят, сила звука, определяется количеством энергии, переносимой распространяющейся звуковой волной в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны.

Количество энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, пропорционально квадрату амплитуды волны и квадрату ее частоты. Отсюда следует, что сила звука данной высоты пропорциональна квадрату амплитуды. Однако такой объективной оценке силы звука не соответствует субъективная оценка громкости, основанная на непосредственном ощущении. Дело в том, что наше ухо не одинаково чувствительно к звукам различной высоты, т. е. различной частоты.

Количество энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волн, как мы указывали на стр. 434, определяется вектором Умова \bar{U} :

$$\bar{U} = \bar{\epsilon} V,$$

где $\bar{\epsilon}$ — средняя плотность энергии волны, а V — скорость распространения волны. Таким образом, сила звука определяется вектором Умова. Это позволяет измерять силу звука в объективной мере, например, в CGS-системе, в $\text{эрг/см}^2 \text{ сек}$. Для этого можно воспользоваться соотношением между звуковым давлением и средней плотностью энергии $\bar{\epsilon}$. На стр. 445 нами было указано, что при достаточной мощности звуковая волна оказывает на преграду давление p , которое определяется средней плотностью энергии $\bar{\epsilon}'$ в стоячей волне, образующейся около преграды. Отсюда следует, что, измеряя давление p на преграду, можно измерить и среднюю плотность энергии в стоячей волне $\bar{\epsilon}'$. Средняя плотность энергии в бегущей волне $\bar{\epsilon}$ будет вдвое меньше $\bar{\epsilon}'$. Однако непосредственное измерение звукового давления с экспериментальной точки зрения представляет значительные трудности. Поэтому пользуются несколько косвенным методом. Релеем было показано, что под влиянием звукового давления на диск, расположенный в поле звуковой волны, должен действовать момент сил. Для измерения этого момента очень легкий диск подвешивается к тонкой нити с зеркальцем, и по отклонению отражения светового луча от зеркальца вычисляется момент сил, поворачивающих диск. Отсюда вычисляется средняя плотность энергии в звуковой волне и по вектору Умова — громкость звука. Но и этот метод связан с достаточно тонкими измерениями и практи-

чески пригоден лишь для измерения звуков большой мощности. Обычно им пользуются для градуировки электроакустических приборов (микрофонов), служащих для измерения громкостей.

Для того чтобы звуковая волна создала ощущение звука, необходимо, чтобы сила звука превышала некоторую минимальную величину, называемую *порогом слышимости*. Звук, сила которого лежит ниже порога слышимости, ухом не воспринимается: он слишком слаб для этого. Порог слышимости различен для различных частот. Наиболее чувствительно человеческое ухо к колебаниям с частотами в области 1000—3000 гц; для этой области порог слышимости достигает величины порядка 10^{-8} эрг/см² сек. К более низким и к более высоким частотам ухо значительно менее чувствительно. Колебания с частотами менее 20 гц и более 20 000 гц ни при каких силах не воспринимаются как звуковые.

Колебания очень большой силы, порядка сотен тысяч эрг/см²сек, перестают восприниматься как звуковые: они вызывают в ухе осязательное чувство давления, переходящее дальше в болевое ощущение. Максимальная величина силы звука, при превышении которой возникает упомянутое осязательное (болевое) ощущение, называется

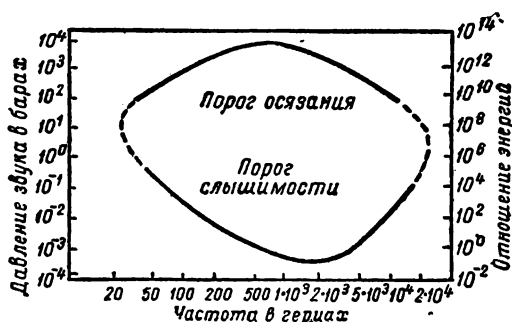


Рис. 291. Область слышимости.

порогом осязания или *порогом болевого ощущения*. Порог болевого ощущения несколько различен для различных частот. Между порогом слышимости и болевым порогом лежит область слышимости, изображенная на рис. 291.

Субъективная громкость звука не поддается точному количественному измерению. Однако все

же можно произвести оценку интенсивности ощущения, основываясь на *психофизическом законе Вебера — Фехнера*, по которому изменение интенсивности ощущения пропорционально логарифму отношения энергий раздражителя, вызывающих сравниваемые ощущения. На основании этого логарифмического закона устанавливается *шкала уровней силы звука*. Естественно принять уровень на пороге слышимости I_0 за нулевой. Условно за нулевой уровень принимается уровень, для которого $I_0 = 10^{-9}$ эрг/см² сек, т. е. несколько меньше порога слышимости для 1000 гц. Тогда по закону Вебера — Фехнера громкость некоторого звука L пропорциональна логарифму отношения его силы I к силе того же звука на пороге слышимости I_0 :

$$L = k \lg \frac{I}{I_0}, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Величину L обычно называют *уровнем силы звука*. Положив $k=1$, мы тем самым выберем определенную единицу измерения уровней звука; эта единица носит название *бела*.

Таким образом:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} \text{ белов.} \quad (2)$$

Наряду с белами пользуются единицами в 10 раз меньшими, получившими название *децибелов*; по этому определению:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \text{ децибелов.}$$

Таблица XXI, дающая приблизительное значение уровней силы звука для обычных звуков, позволяет составить более конкретное представление о характеристике громкостей. Следует, однако, еще иметь в виду зависимость чувствительности уха от частоты звука.

Т а б л и ц а XXI

Уровни различных звуков

| Звук | Уровень в деци- белах | Сила звука в $\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{ сек}}$ | Амплитуда давления в барах |
|--|-----------------------------|--|----------------------------------|
| Тихий шопот | 30 | $1 \cdot 10^{-8}$ | $6,4 \cdot 10^{-8}$ |
| Шаги | 40 | $1 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-2}$ |
| Громкая речь | 70 | $1 \cdot 10^{-2}$ | 0,4 |
| Шум оживленной улицы . . | 90 | 1 | 6,4 |
| Оркестр фортиссимо | 100 | $1 \cdot 10^1$ | $2,0 \cdot 10$ |
| Шум аэропланного мотора на расстоянии 3 м | 130 | $1 \cdot 10^4$ | $1 \cdot 10^3$ |

Из табл. XXI видно, что энергии, соответствующие обычным звукам, весьма невелики. Для иллюстрации этого можно привести следующий курьезный пример: если бы 2000 человек вели непрерывно разговор в течение $1\frac{1}{2}$ часов, то энергии их голосов хватило бы лишь на то, чтобы вскипятить один стакан воды.

Для объективной характеристики тембра звука сложное звуковое колебание надо разложить на его гармонические составляющие — определить его спектр. Такое разложение можно произвести, используя явление резонанса. Если взять два камертона с одинаковыми частотами собственных колебаний, расположенные на некотором расстоянии друг от друга, и возбудить сильные колебания в одном из них, то окажется, что более слабые колебания возникнут и во втором. В этом можно убедиться, заставив первый камертон внезапно пре-

кратить колебания, например, зажав его рукой. Тогда будет слышно слабое звучание второго камертона. Если частота собственных колебаний второго камертона отлична от частоты собственных колебаний первого, то явление будет выражено слабее и тем слабее, чем больше различие в частотах собственных колебаний. Описанное явление объясняется тем, что звуковая волна, испускаемая первым камертоном, достигнув второго, возбуждает в нем вынужденные колебания. Наибольшего значения амплитуда вынужденных колебаний достигнет при резонансе. При малом затухании колебаний второго камертона резонанс практически имеет место при совпадении частот собственных колебаний обоих камертонов, и явление резонанса будет достаточно острым (см. стр. 403). Основываясь на резонансе, анализ сложного звукового колебания можно произвести следующим образом: взять большое число камертонов с различными собственными частотами колебаний ω_i и с малым затуханием. Тогда сложное звуковое колебание вызовет вынужденные колебания заметной амплитуды только у тех из этих камертонов, собственные частоты колебаний которых ω_i совпадут с частотами ω_k колебаний, присутствующих в составе изучаемого сложного колебания.

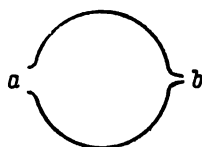


Рис. 292. Резонатор с воздушной полостью.

Вместо камертонов для анализа звука можно использовать любые другие системы с определенными собственными частотами колебаний и малым затуханием. Гельмгольц, впервые производивший анализ звуков, пользовался резонаторами с воздушной полостью. Такие резонаторы представляли собою тонкостенные металлические сферы с двумя отверстиями — одним большим a и другим меньшим b (на рис. 292 дано сечение резонатора). Основное отверстие a служит для проникновения звуковых колебаний внутрь объема резонатора, а малое отверстие b — для вкладывания его в ухо и определения на слух интенсивности вынужденных колебаний.

Собственная частота колебаний резонаторов Гельмгольца ω_0 приближенно равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{d}{V}},$$

где d — диаметр отверстия a , а V — объем полости резонатора.

Простой тон, входящий в состав изучаемого сложного звукового колебания, наиболее сильно возбудит тот резонатор, собственная частота колебаний которого ω_0 ближе всего к его частоте.

Таким образом, спектр сложного звука может быть определен путем последовательного „прослушивания“ через ряд резонаторов и оценки на слух громкости их вынужденных колебаний.

Современная техника позволяет изучать состав звуков с помощью гораздо более совершенной электроакустической методики,

основанной, однако, также на принципе наблюдения вынужденных колебаний.

§ 118. Источники звуков. Получение ультразвуков. Всякое колеблющееся тело может служить источником упругих волн в среде, окружающей колеблющееся тело, т. е. служить источником звука. Изучение источников звука имеет особый интерес в связи с развитием радио и говорящего кино, в которых употребляются громкоговорители, а также для теории и техники музыкальных инструментов. Однако на этих специальных вопросах мы не будем останавливаться и рассмотрим кратко лишь некоторые простейшие источники звуковых волн.

Рассмотрим струну длины l , закрепленную с обоих концов. При возбуждении колебаний в такой струне устанавливаются стоячие волны, причем узлы расположатся в местах закрепления, т. е. на концах струны; посередине струны образуется пучность (рис. 293а). Этому колебанию соответствует определенная частота колебаний ω_1 . Однако, наряду с указанной стоячей волной, в струне может установиться стоячая волна с тремя узлами: два узла на концах струны и один посередине (рис. 293б). Этому колебанию соответствует частота ω_2 , вдвое большая, чем частота первого колебания ω_1 . Точно так же могут установиться стоячие волны с четырьмя узлами (рис. 293в) и частотой $\omega_3 = 3\omega_1$, и вообще стоячие волны с $k+2$ узлами (считая и узлы на закрепленных концах струны) и с частотой колебаний $\omega_k = (k+1)\omega_1$.

Таким образом, одна и та же струна может испускать звуковые колебания не только с *основной частотой* ω_1 , но и так называемые *обертоны* с частотами $\omega_k = (k+1)\omega_1$, где k — целое число. Вообще говоря, при колебаниях струны одновременно устанавливается ряд стоячих волн и, таким образом, струна одновременно испускает, наряду с основной частотой, и обертоны, сила которых, однако, значительно меньше силы колебаний основной частоты. Спектр колебаний (см. стр. 405) такой группы представится из ряда линий, соответствующих частотам $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$

На рис. 294 изображен *акустический спектр* скрипки при основном тоне 640 гц. На рис. 295 представлен спектр колебаний кларнета при основном тоне 64 гц, а на рис. 296 — рояля (256 гц); на этом последнем рисунке видно, что наряду с линейчатым спектром присутствует и область сплошного спектра.

Шумам соответствует наличие лишь сплошного акустического спектра.

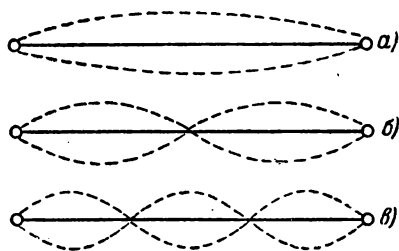


Рис. 293. Стоячие волны в струне, закрепленной с концов.

В качестве примера на рис. 297 представлен спектр шума бунзеновской горелки.

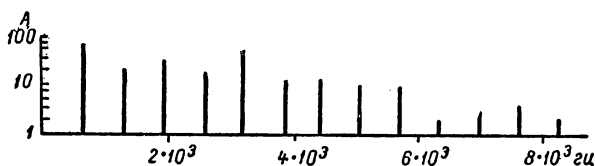


Рис. 294. Акустический спектр скрипки при основном тоне 640 Гц.

Громкость испускаемого звука определяется амплитудой колебаний звучащей системы. Однако в некоторых случаях источник колебаний, даже при значительных амплитудах, не дает сильного звука. Например, если натянуть струну между двумя твердыми зажимами и ударить ее, то звук получается лишь очень слабым. Также, если ударить камертон и держать его в руке, то звук почти не слышен. Это объясняется тем, что в указанных случаях колеблющиеся струна или ножка камертона вызывают лишь замкнутые вихревые потоки воздуха по соседству и не образуют сжатий и разрежений воздуха, ведущих к возникновению продольной звуковой волны. Связь колеблющейся системы с окружающим воздухом недостаточна, и система слабо излучает. Для увеличения излучения надо создать такие условия, при которых возникновение вихревых движений затруднялось бы. В связи с этим камертоны, для усиления их звучания, устанавливают на деревянных ящиках, а в музыкальных инструментах (скрипках, виолончелях) струны прикрепляют к деревянным поверхностям — декам. Колебания струны передаются большой поверхности деки, около которой замкнутые потоки воздуха становятся невозможными. Около деки образуются волны сжатия и разрежения, создающие сильный звук. Ту же роль играет крышка рояля.

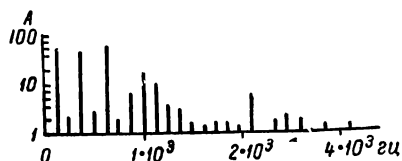


Рис. 295. Акустический спектр кларнета при основном тоне 64 Гц.

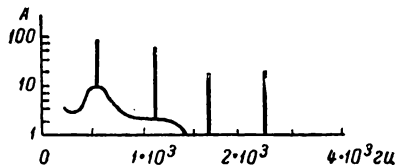


Рис. 296. Акустический спектр рояля при основном тоне 256 Гц.

возникновение вихревых движений затруднялось бы. В связи с этим камертоны, для усиления их звучания, устанавливают на деревянных ящиках, а в музыкальных инструментах (скрипках, виолончелях) струны прикрепляют к деревянным поверхностям — декам. Колебания струны передаются большой поверхности деки, около которой замкнутые потоки воздуха становятся невозможными. Около деки образуются волны сжатия и разрежения, создающие сильный звук. Ту же роль играет крышка рояля.

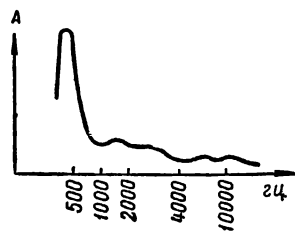


Рис. 297. Акустический спектр шума бунзеновской горелки.

Увеличением излучения объясняется и возрастание громкости звуков при резонировании систем. Такой опыт в простейшем виде может быть проведен следующим образом. Звучащий камертон (рис. 298) располагается над отверстием высокого узкого сосуда, в который налито немного воды. Если начать понемногу прибавлять воду, то в определенный момент сила звука значительно возрастет. Явление объясняется следующим образом. При соответственной высоте столба воздуха в сосуде над водой колебания воздуха приходят в резонанс с колебаниями камертона, и их амплитуда сильно возрастает. У отверстия сосуда возникают попеременно сжатия и разрежения, которые срывают вихри, образующиеся вокруг ножек камертона, в результате чего излучение звука усиливается.

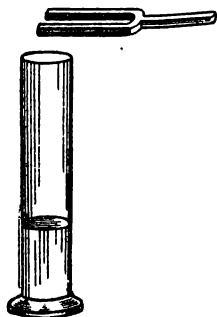


Рис. 298. Резонирование столба воздуха над водой.

Наконец, рассмотрим особого рода акустическую волну, возникающую около тела, движущегося в рассматриваемой среде со *сверхзвуковой скоростью* (для воздуха со скоростью больше 330 м/сек). Движущееся с такой скоростью тело вызывает в среде волну ударного характера, называемую *баллистической волной*.

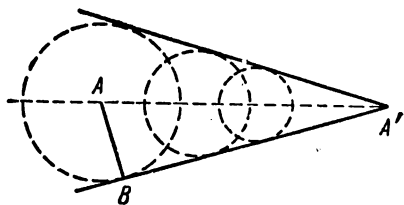


Рис. 299. Возникновение баллистической волны.

Сжатие среды не может распространяться впереди движущегося тела, и образующийся фронт волны располагается лишь за движущимся телом. Каждая точка среды, мимо которой прошло тело, может рассматриваться как источник сферических волн, распространяющихся со скоростью звука в данной среде. Огибающая этих сферических волн (рис. 299) имеет форму конуса.

Пусть тело проходит отрезок AA' за время t ; за то же время звуковая волна распространится около точки A на отрезок $AB = Vt$, где V — скорость звука. Отсюда угол при вершине конуса φ определяется отношением:

$$\sin \varphi = \frac{AB}{AA'} = \frac{V}{v}, \quad (1)$$

где v — скорость тела. Таким образом, баллистическая волна имеет фронт в виде конуса с углом раствора, определяемым равенством (1). Возникающая волна не имеет периодического характера, но представляет собою одну область сжатия, распространяющуюся со скоростью звука. Такого рода волны возникают от современных артиллерийских или реактивных снарядов, а также от самолетов, летящих со сверхзвуковой скоростью. Они производят ощущение резкого

удара. Кроме того, снаряд возбуждает другие колебания (дающие визг или шипение), вызванные наличием неровностей у снаряда. Все эти колебания могут наблюдаться лишь после того, как снаряд пролетел, так как, двигаясь со сверхзвуковой скоростью, он опережает их распространение.

Для получения *ультразвуков* чаще всего используется так называемый *пьезоэлектрический эффект* (см. т. II). Пьезоэлектрический эффект заключается в том, что некоторые кристаллы при внесении их в электрическое поле испытывают механическую деформацию. Для получения ультразвуковых колебаний употребляются кристаллы кварца (пьезокварц). Если к пластинке кварца, вырезанной определенным образом по отношению к ее кристаллографическим осям, приложить с помощью металлических обкладок переменное электрическое напряжение, то пластинка начнет колебаться. Колебания кварцевой пластинки становятся особенно интенсивными, если частота приложенного электрического напряжения совпадает с частотой собственных механических колебаний пластинки (явление резонанса). Подобрав соответственным образом размеры пластинки, можно получить ультразвуковые колебания с частотой в сотни тысяч герц.

Ультразвуковые волны, благодаря малой длине волны, более слабо, чем обычные звуковые волны, обнаруживают явление загибания волн (диффракцию; стр. 419). Это позволяет получать хорошо направленные пучки ультразвуковых волн.

В настоящее время ультразвуки широко используются в технике и, в частности, для направленной подводной сигнализации, для обнаружения подводных предметов и определения глубин (*эхолот*). Кварцевые пластинки одинаковой толщины, вырезанные определенным образом из кристаллов, пришлифовываются друг к другу в виде мозаики и вклеиваются между двумя толстыми стальными плитами. При подведении к плитам переменного электрического напряжения вся система служит мощным источником ультразвуков.

Принцип устройства эхолота заключается в следующем: от источника ультразвуков в воде посылается вертикально вниз звуковой луч, который, достигнув дна, отражается от него и возвращается обратно. Зная скорость распространения звука в воде, легко по времени, прошедшему от подачи ультразвукового сигнала до его возвращения обратно (наблюдения эхо), вычислить глубину.

Прием эхо производится также с помощью пьезокварца. Звуковые колебания, дойдя до пьезокварца, вызывают в нем упругие колебания, в результате которых на противоположных поверхностях кварца возникают электрические заряды, которые могут быть обнаружены и измерены соответственной электрической аппаратурой.

Ультразвуковые волны пригодны для сигнализации в воде, где они распространяются без заметного поглощения; в воздухе же они весьма сильно затухают, а потому не пригодны для сигнализации через толщу воздуха.

Современное техническое применение ультразвуков весьма разнообразно. Ультразвуки используются для обнаружения дефектов в металлических изделиях (ультразвуковая дефектоскопия), для измерения зазоров, толщин и т. д. Некоторые применения ультразвуков связаны с механическим воздействием, которое мощные ультразвуки оказывают на ту среду, в которой они распространяются. Так, с помощью ультразвуков можно обрабатывать металлические и другие поверхности, просверливать отверстия, вести очистку деталей и т. д. Ультразвуки воздействуют на многие физико-химические процессы и на протекание химических реакций.

§ 119. Отражение и поглощение звуковых волн. Достигнув границы двух сред, звуковая волна, вообще говоря, отчасти отражается от границы, отчасти проникает во вторую среду и продолжает в ней распространяться. При распространении волны в данной среде она постепенно ослабляется за счет перехода энергии колебаний в другие виды энергии.

Явления отражения и поглощения звуковых волн играют особую роль при распространении звуков в замкнутых помещениях. При проектировании аудиторий, концертных залов, театров существенно учитывать возможность многократных отражений звуковых волн от стен, потолка и т. д. Наличием этих отражений обуславливаются акустические свойства помещения.

В настоящее время развилась особая отрасль техники, получившая название *архитектурной акустики*.

В помещениях средних размеров звуковая волна претерпевает несколько сот последовательных отражений от стен и потолка, пока ее энергия не упадет до порога слышимости. В больших помещениях звук может быть слышен в течение нескольких секунд после выключения источника за счет существования отраженных волн. Слишком медленное затухание ухудшает акустические свойства помещения, вызывает чрезмерную „гулкость“ — каждая новая часть связного контекста (например, каждый новый слог речи) перекрывается еще не затухшими предыдущими колебаниями. Но и чрезмерно быстрое затухание отраженных волн с акустической точки зрения также не выгодно — звуки в помещении получаются слишком слабыми и „глухими“. Существует некоторое оптимальное значение затухания.

При расчетах акустических свойств помещений принято *рассчитывать время, в течение которого энергия звука уменьшается до одной миллионной доли начального значения* ($W = 10^{-6} W_0$); это время называется *временем реверберации*.

Так как затухание волн различной частоты различно, то принято определять реверберацию при частоте 512 гц. Оптимальное время реверберации различно для помещений, предназначенных для разных целей: например, для концертных залов, для аудиторий и т. д. оптимальное время реверберации есть величина порядка 1 сек.

Обозначим плотность звуковой энергии в помещении в начальный момент через W_0 . Обозначим через α коэффициент поглощения при отражении; пусть число отражений в единицу времени равно n . Тогда уменьшение плотности энергии dW за время dt равно

$$dW = -\alpha n W dt.$$

Перепишем это выражение в виде:

$$\frac{dW}{W} = -\alpha n dt,$$

что, в свою очередь, может быть переписано в виде:

$$d(\ln W) = -d(\alpha n t).$$

Как мы уже не раз указывали (ср. стр. 435), если дифференциалы двух величин равны друг другу, то сами величины могут отличаться лишь на аддитивную постоянную:

$$\ln W = -\alpha n t + C. \quad (1)$$

Так как при $t=0$ по условию $W = W_0$, то, следовательно,

$$C = \ln W_0,$$

после чего равенство (1) принимает вид:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\alpha n t,$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\alpha n t}. \quad (2)$$

Таким образом, плотность звуковой энергии убывает со временем по показательному закону.

По теории вероятности можно рассчитать число отражений звуковой волны в течение 1 сек. в предположении, что волны распространяются во всевозможных направлениях; расчет дает:

$$n = \frac{vS}{4V},$$

где v — скорость звука, S — площадь поверхности помещения, V — его объем.

Подставив это значение n в (2), получим

$$W = W_0 e^{-\frac{\alpha v S}{4V} t}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что, кроме геометрических факторов S и V , затухание определяется еще коэффициентом поглощения α .

Для определения времени реверберации полагаем в (3)

$$\frac{W}{W_0} = 10^{-6},$$

тогда

$$t = -\frac{4V}{\alpha v S} \ln 10^{-6}.$$

Подставляя сюда для v значение скорости звука в воздухе, получим

$$t = 0,163 \frac{V}{\alpha S}. \quad (4)$$

В табл. XXII приведены значения коэффициентов поглощения (для частоты 512 *гц*) для некоторых материалов.

Таблица XXII

Коэффициенты поглощения звуковых волн при отражении

| Материал | α |
|--|----------|
| Бетон | 0,015 |
| Оштукатуренная кирпичная стена | 0,025 |
| Известь на деревянной обрешетке | 0,034 |
| Ковер | 0,20 |
| Войлок (толщ. 2,5 см на расстоянии 8 см от стены)... | 0,78 |

Как видно из табл. XXII, коэффициенты поглощения α весьма различны для различных материалов. Малое значение α для бетона обуславливает „гулкость“ помещений с бетонным полом и стенами. Сравнительно большое значение α для ковров, занавесей и т. д. служит причиной „заглушенности“ звуков в помещениях с занавешенными стенами.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсорбция 373
Авенариус 239
 Авогадро закон 167
 — число 156, 197, 299
 автоколебательная система 398
 адиабата 268
 адиабатический процесс 268
 адиабатическое изменение объема газа 270
 адсорбция 373
 акустика архитектурная 457
 акустические колебания 442
 амплитуда 378
 — звука 445
 анизотропия 340
 Атвуда машина 58
 атмосфера техническая 161
 — физическая 161
 атомная теория 157
 атомный вес 157
 — пучок 202
- Баллистическая волна 455
 — кривая 32
 баллистический маятник 94
 бар 161
 барометрическая формула 195
 бел 451
Бернулли Даниил 171
 Бернулли уравнение 142
Бессель 116
 биения 391
 бинауральный эффект 449
 Бойля — Мариотта закон 161
Больцман 162, 305
 Больцмана закон распределения 194
 — постоянная 174
 — соотношение между энтропией и вероятностью 305
Борн 345
 Борна — Габера круговой процесс 347
 броуновских частиц смещение 196
 броуновское движение 160, 195
- Вакуум 219
 Ван-дер-Ваальса поправки 227, 229, 231
 — уравнение 229, 231
 — — в приведенных величинах 241
 Вант-Гоффа формула 333
 ватт 82
 Вебера — Фехнера закон 450
 вектор 27
 векторное произведение 42
 вероятность 294
 вес 54, 55
 веса зависимость от высоты 112
 — — от широты 71
 вискозиметр 156
 волн интерференция 422
 — упругих распространение 429
 волны поперечные 414
 — продольные 414
 — стоячие 425, 447
 волны уравнение 418, 430
 волчок 131
 внутреннее трение 148, 209
 — — при низких давлениях 217
 вязкость 148
- Газ идеальный 165
 — реальный 227
 газовая постоянная 168
Галилей 15, 58
 гармонического колебательного движения уравнения 378
 гармоническое колебательное движение 376
 Гейзенберга соотношение неопределенности 108, 171
 Гей-Люссака закон 163
 Гелий I 150
 Гелий II 149
Гельмгольц 452
 Гельмгольца резонатор 452
 гектоватт-час 83
Герц 9, 442

герц 442
 гидродинамика 139
 гироскоп 131
 гироскопический компас 133
 — эффект 132
 главный вектор сил 119
Голицын Б. Б. 178
 градиент плотности 206
 — скорости 148, 209
 — температуры 212
 грамм массы 12, 56
 — силы 55
 граммометр 158
 грамммолекула 158
 громкости шкала 450
 громкость 449
Гросс Е. Ф. 367
 Гаука закон 348
 Гюйгенса принцип 418

Давление 161
 — внутреннее в газах 228
 — — в жидкостях 312
 — молекулярное 308
 — насыщенных паров 238, 335
 — парциальное 177
 — под изогнутой поверхностью жидкости 316
 — приведенное 242
 Даламбера начало 69
Дальтон 177
 двигатель внутреннего сгорания 287
 — реактивный 147, 291
 движение 16
 — вращательное 38
 — вязкой жидкости 148
 — жидкости 139
 — криволинейное 29
 — Луны 112
 — молекулярное 159
 — поступательное 37
 — прямолинейное неравномерное 20
 — — равномерное 18
 — равнопеременное 22
 — твердого тела 119
 — тяжелого тела, брошенного под углом к горизонту 31
 движения количество 52
 декремент затухания 398
 дефектоскопия ультразвуковая 457
 деформация 348
 — кристаллических тел 358
 — кручения 352
 — одностороннего сжатия 348
 — остаточная 355
 — пластическая 355
 — продольного растяжения 348
 — сдвига 351

деформация твердых тел 348
 — упругих тел 348
 децибел 451
Джоуль 245, 255
 джоуль 83
 Джоуля и Коппа закон 366
 Джоуля — Томсона эффект 245
 дина 54
 динамика 44
 дисперсия волн 439
 диссоциация 334
 дифракция 419
 диффузии коэффициент 206
 диффузия газов 205
 длина волны 416, 421
 — свободного пути молекул 199
 Доплера явление 436
 Дюара сосуд 218
 Дюлонга и Пти закон 365

Единиц система 14
 — — абсолютная 14
 — — международная MS 12
 — — MKS 14
 — — техническая 14
 единица массы техническая 55
 единицы измерения 12

Жидкости строение 308, 371
 жидкость 308
 — вязкая 146
 — идеальная 139
 — переохлажденная 329
 — растаятая 241
Жуковский Н. Е. 155

Зайончковский 239
 звук 442
 звука высота 449
 — громкость 449
 — тембр 449
 звуков восприятие 448
 — источники 453
 — отражение 457
 — поглощение 457, 459
 — звуковые колебания 442
 — спектры 453
 зона молчания 445

Измерение физических величин 10
 изобара 166
 изотерма Бойля — Мариотта 162
 — Ван-дер-Ваальса 236
 — углекислоты 236
 изотермическое изменение объема газа 270
 изотропное тело 340
 изохора 165

импульс момента сил 129
 — сил 53
 инверсии точка 247
 индикатор 286
 индикаторная диаграмма 287
 инерциальная система 45
 инерции принцип 45
 инерционные силы 67, 69
 — — во вращающейся системе 70
 интерференция 422
 — звука 445
 инфразвуки 442
 испарение жидкости 328
 — твердых тел 370
 испарения скрытая теплота 328
Иоффе А. Ф. 360

Калория 181, 255
Камерлинг-Оннес 250
 капель образование 315
 капиллярность 321
Капица П. Л. 149, 251
 карданов подвес 131
Карно Сади 9, 277
 квазиупругая сила 377
 квантовая механика 16, 107
 — теория теплоемкости 180, 363
Кельвин 167
Кеплер 115
 киловатт 83
 киловатт-час 83
 килограмм массы 14, 54
 — силы 54
 килограммометр 82
 килоджоуль 82
 кинематика 17
 — твердого тела 37
 кинематическая теория газов 170
 кинетической теории газов основная формула 174
 кипение 329
 Клапейрона — Клаузиуса формула 331
Клаузиус 172, 259
 Клаузиуса неравенство 301
 когерентность 422
 колебаний модулирование 407
 — представление с помощью комплексных чисел 411
 — резонанс 402
 — сложение 387
 — — взаимно перпендикулярных 391
 колебания 376
 — вынужденные 399
 — затухающие 395
 — крутильные 354
 — негармонические 405
 — собственные 400

количество движения 52
 конвекция 212
 конденсационный насос 222
 коэффициент вязкости 148
 — полезного действия двигателя внутреннего сгорания 289, 291
 — — — паровой машины 287
 — — — реактивного двигателя 291
 — — — тепловой машины 267, 278, 284
 — поперечного сжатия при продольном растяжении 351
 — расширения 163, 361
 — трения 51
 — — покоя 51
 — упругости 349
 краевой угол 321
 кривизна линии 33
 — поверхностей 319
 кристалл 340
 кристаллографическая ось 362
 критическая температура 239, 248
 — точка 240
 критический коэффициент 244
 — объем 239
 критическое давление 239, 248
 — состояние вещества 236
 круговой процесс 266
Кундта метод 447
Кэвендиш 113

Ламинарное течение жидкости 150
Лапласа формула 320
Лебедев П. Н. 445
Ленин В. И. 8, 11, 15
Линде машина 249
 линия тока жидкости 139
Лисажу фигуры 394
 ловушка ртутная 223
Ломоносов М. В. 9, 171, 254
 лошадиная сила 83
 Лошмита число 175

Майер Роберт 259
 макроскопическое тело 15
Максвелл 9, 188
 Максвелла закон распределения скоростей 188, 192
Мандельштам Л. И. 367
 манометр Мак-Леода 224
 — ртутный 224
 — тепловой 224
 масса 47
 — атома 159
 — Земли 114
 — Солнца 115
 — покоящаяся 105
 — тяготеющая 115

массы зависимость от скорости 105, 107
 материальная точка 16
 маятник 376
 — математический 383
 — физический 384
Менделеев Д. И. 9, 168, 239
 Менделеева — Клапейрона формула 168
 мениск жидкости 322
 метр 12
 миллиметр ртутного столба 161
 модуль сдвига 352
 — Юнга 349
 молекул тепловое движение 160, 170
 — число в единице объема 175
 — эффективное сечение 201
 молекула 157
 молекулы диаметр 201, 235
 — объем 233
 молекулярно-кинетическая теория 157, 170
 молекулярный вес 158
 — пучок 202
 моль 158
 момент количества движения 127, 130
 — инерции 125, 126
 — пары сил 124
 — силы 121, 122
 монокристалл 342
 мономолекулярная пленка 327
 мощность 81, 82

Нагреватель 267
Надеждин А. И. 239
 насос вакуумный 219, 222
 — водоструйный 143
 — воздушный 219
 — диффузионный 222
 — масляный 220
 натяжение поверхностное 313
 натяжения поверхностного коэффициент 313
 необратимый процесс 264, 292
 неопределенности соотношение 108, 171
 неравновесное состояние 263
 неразрывность струи 140
 Нерста теорема 306
Ньютон 15, 44, 111
 ньютон 54
 Ньютона второй закон 46, 52
 — закон всемирного тяготения 110
 — первый закон 44
 — третий закон 59

Обратимый процесс 264, 292
 объем молекулярный 165
 — приведенный 243

ожигание газов 247
 ожигание паров 238
 окклюзия 373
Ольшевский 248
 опалесценция 240
 ось вращения 38
 относительности общая теория 71
 — принцип механический 58
 — теория 15, 102
 относительность движения 17
 осмотическое давление 331
Падение тел 24
 пара сил 124
 параметр 256, 262
 паровая машина 286
 пары насыщенные 238, 335
 перегретая жидкость 329
 переноса явления в газах 205
 период 39
 — колебаний 379
 — маятника 384
 перпетуум мобиле второго рода 278
 — первого рода 258
Перрен 195
Пикте 248
 плавление твердых тел 341, 367
 Планка постоянная 366
 плотность 13
 — газа 169
 — — относительная 169
 — Земли 114
 поглощение звуков 457
 поглощения коэффициент 436, 458
 поле вектора скорости 139
 — силы тяжести 116
 поликристалл 342
 полимер 342
 политропический процесс 271
 полупроницаемая перегородка 333
Попов А. С. 9
 порядок ближний 372
 — дальний 372
 потеря полуволны 428
 правило буравчика 42
 превращение энергии 260
 предел прочности 355
 — упругости 355
 пуаз 149
 Пуазейля формула 156
 Пуассона коэффициент 361
 — формула 271
 пульверизатор 143
 путь 18, 19
 — при неравномерном движении 22
 — при равномерном движении 19
 — при равнопеременном движении 24
 пучность 426

Работа 78, 83

- момента сил 134
- при изменении объема газа 265, 273
- силы тяжести 116
- упругих сил 84, 350
- равновесие системы 263
- равновесное состояние 264
- равновесный процесс 264
- радиус кривизны 34
- молекулярного действия 311
- размерности формулы 99
- размерность физических величин 99
- распределение частиц с высотой 194
- раствор 331
- растекание капли 326
- расширения линейного коэффициент 361
- объемного коэффициент 362
- Рауля закон 337
- реверберация 457
- резонанс 402, 452
- параметрический 403
- релаксации время 373
- решетка атомная 344
- гетерополярная 343
- гомеополярная 344
- кристаллическая 343
- Румфорд* 255

Сверхтекучесть 149

Сёзерленда постоянная 201

секунда 13

сила 46

- звука 449
- инерции 69, 70
- нормальная 64
- подъемная 155
- потенциальная 89
- тангенциальная 64
- трения 49
- тяготения 110
- тяжести 116
- центробежная 70, 71
- центростремительная 64
- силы взаимодействия между молекулами 228
- внутренние 63
- гироскопические 132
- Кориолиса 73
- при криволинейном движении 64
- система отсчета 17
- скаляр 27
- скорость 18
- групповая 440
- звуковая 444
- космическая первая 73

/ скорость космическая вторая 118

— молекул наиболее вероятная 188

— — квадратичная 173, 175, 190

скорость молекул средняя арифметическая 190

— — экспериментально определяемая 204

— неравномерного движения 21

— при гармоническом колебательном движении 381

— при криволинейном движении 30

— прямолинейного равномерного движения 18

— равнопеременного движения 23

— распространения волн 416, 429, 444

— средняя 20

— фазовая 416, 439

случайность 295

слышимости порог 450

смачивание 321

снаряд реактивный 146

соответственные состояния 243

сохранение количества движения 61

— момента количества движения 129

— — — движения жидкости 144

— энергии 92, 257

спектр акустический 453

— колебаний 409

сплошная среда 139

статистическая закономерность 295

— физика 253

статистическое толкование второго начала термодинамики 299, 305

стен 54

степени свободы 179

Стокса закон 153

Столетов А. Г. 9, 240

столкновение молекул 199

— шаров неупругое 62, 88

— — упругое 87

суперпозиция волн 422

сфера молекулярного действия 311

Тело абсолютно твердое 37

— аморфное 340

— кристаллическое 340

— мелкокристаллическое 342

— поликристаллическое 342

— твердое 340

температура 163

— приведенная 242

температуры абсолютный ноль 166

— шкала Кельвина (абсолютная) 166, 285

— — термодинамическая 285

— — Цельсия 163

— — эмпирическая 163

тепла механическая теория 254
 — механический эквивалент 255, 257
 — приведенное количество 301
 тепловая машина 267
 тепловое движение в газах 170
 — — в жидкостях 309, 371
 — — в твердых телах 361
 теплоемкости зависимость от температуры 186, 365
 теплоемкость 255
 — газа при низких и высоких температурах 186
 — — при постоянном давлении 182
 — — при постоянном объеме 181
 — двуатомных газов 184
 — жидкостей 371
 — многоатомных газов 185
 — молярная 180, 364
 — одноатомных газов 184
 — твердых тел 363, 371
 — удельная 180
 теплопроводности газов коэффициент 212
 теплопроводность газов 212
 — — при низких давлениях 218
 теплота 253, 258
 — испарения 328
 теплоты количество 254
 термодинамика 253
 термодинамики второе начало 277
 — первое начало 256
 — третье начало 306
 термометрическое тело 163
 термос 218
 техническая единица массы 55
Томсон 245, 259 —
 тонна массы 13
 — силы 55
 траектория 29
 трение 49
 — покоя 49
 тройная точка 370
 трубка тока жидкости 140
 турбулентное течение жидкости 150
 тяготение 110
 тяготения постоянная 110, 113

Угловая скорость 38
 — — как вектор 41
 угловое ускорение 40
 узел 426
 узловая линия 447
 ультразвуки 442, 456
 ультраразреженные газы 225
Умов Н. А. 434
 Умова вектор 434, 449
 упругое последствие 357
 упругости коэффициент 349

упругости модуль 349
 упругость насыщенных паров 238
 уравнение состояния 167
 уровень звука 451
 ускорение 23
 — касательное (тангенциальное) 36
 — нормальное (центростремительное) 35
 — при гармоническом колебательном движении 381
 — при криволинейном движении 32
 — равнопеременного движения 22
 — среднее 25
 ускоренная система 67
 ухо 448

Фаза 378
 — начальная 378, 421
Фарадей М. 9
Федоров Е. С. 343
 флотация 324
 флуктуация 299
Фок В. А. 71
 форвакуум 222
Френкель Я. И. 371
 Френкеля теория жидкости 309, 373
 фронт волны 417
Фуко 133
 функция распределения 189
 Фурье ряд 408

Холодильная машина 268
 холодильник 267

Центр кривизны 33
 — масс 120
 центробежная сила 65, 70
 центробежный регулятор 66
 центростремительная сила 64, 70
 центростремительное ускорение 36
 цикл 266
 — двигателя внутреннего сгорания 287
 — Дизеля 290
 — Карно 278
 — обратный 268
 — паровой машины 286
 — прямой 267
 — реактивного двигателя 291
Циолковский К. Э. 146

Частота колебаний 378
 — круговая 378
 — циклическая 378

Штерн 204

Эйнштейн 15, 71

эквивалентность количества переданного тепла и работы 255

— энергии и массы 106

Энгельс Ф. 16, 260, 262

энергии графическое представление 95

— плотность 433

— поток 434

— равномерное 180

— сохранение 88, 261

энергия 92

— взаимодействия молекул 180, 244

— внутренняя газа 178, 244

— — тела 257, 261

— волны 435

— гармонического колебательного движения 386

энергия звуковая 449, 451

— кинетическая 85, 88

энергия кинетическая вращения 134

— — молекул 174

— потенциальная 89, 90

— — кристаллической решетки 344

— — тел, притягивающихся по закону Ньютона 117

— — упруго деформированного тела 98, 350

— приходящаяся на одну степень свободы 180

энтропия 303

эрг 82

Этвеш 116

эхолот 456

Юнга модуль 349

Фриш Сергей Эдуардович
и *Тиморева Александра Васильевна*

Курс общей физики, том I
Л., Физматгиз, 1962, стр. 468, с илл.

Редакторы:

Ю. В. Новожилов и *Л. И. Орлова*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов*

Корректор *Л. А. Любович*

Подписано к печати с матриц 15/I 1962 г.
Бумага 60 × 92¹/₁₆. Физ. печ. л. 29,25.
Усл. печ. л. 29,25. Уч.-изд. л. 29,84.
Допечатка тиража 100 000 экз.
Цена 1 р. 00 к. Заказ № 1265.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного
хозяйства. Управление полиграфической
промышленности. Типография № 1
«Печатный Двор» им. А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.



ИСПРАВЛЕНИЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ

Напечатано: Издание одиннадцатое, стереотипное.
Должно быть: Издание десятое, стереотипное,

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ФИЗМАТГИЗ»

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ:

Базаров И. П., Термодинамика, 1961, стр. 292, цена 1 р. 00 к.

Бейман Б. Ф., Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии, 1961, стр. 228, цена 78 к.

Из серии «Современные проблемы физики», Дорфман Я. Г., Диамагнетизм и химическая связь, 1961, стр. 232, цена 74 к.

Андроникашвили Э. Л., Гамцемлидзе Г. А., Канчели О. А. и Мамаладзе Ю. Г., Лабораторные работы по физике, 1961, стр. 184, цена 83 к.

Книги продаются в книжных магазинах и высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».

1p.