

**А.А. Локшин, Е.А. Иванова**

# **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕДОРАЗУМЕНИЯ**

*Книжка для родителей младших школьников*



МОСКВА – 2018

УДК 372.8(072):514  
ББК 22.151.0я71  
Л73

**Локшин А.А., Иванова Е.А.**

**Л73 Геометрические недоразумения:** Книжка для родителей младших школьников. – М.: МАКС Пресс, 2018. – 48 с.: ил.  
ISBN 978-5-317-05898-2

В книжке собраны и проанализированы базовые геометрические понятия, которые обычно рассматриваются в начальной школе. Особое внимание обращено на типичные ошибки и трудные для понимания случаи.

УДК 372.8(072):514  
ББК 22.151.0я71

**ISBN 978-5-317-05898-2**

© Локшин А.А., Иванова Е.А., 2018  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2018

## Содержание

1. О математических недоразумениях (вместо предисловия) .....	5
2. Точка.....	6
3. Точка (продолжение) .....	7
4. Точка (окончание).....	9
5. Прямая.....	10
6. Линия.....	12
7. Отрезок.....	13
8. Отрезок (продолжение) .....	15
9. Ломаные линии.....	16
10. Луч.....	17
11. Углы.....	18
12. Понятие о перпендикулярности. Плоскость .....	20
13. Углы (продолжение).....	22
14. Многоугольники.....	25
15. Многоугольники (продолжение) .....	28
16. Окружность, круг и эллипс .....	30
17. Две удивительные истории про эллипс.....	33
18. Коварный куб.....	35
19. Справа и слева .....	37
20. Справа и слева (продолжение).....	40
Литература.....	46



## **1. О МАТЕМАТИЧЕСКИХ НЕДОРАЗУМЕНИЯХ** *(вместо предисловия)*

Математические недоразумения – это далеко не то же самое, что математические парадоксы. В отличие от парадоксов, обычно основанных на глубинных проблемах математики, недоразумения связаны, прежде всего, с употреблением математического жаргона, либо с неаккуратностью приводимых определений.

В этой книжке мы собрали некоторые недоразумения, относящиеся к элементам геометрии, излагаемым в начальной школе.

И здесь присутствие недоразумений в каком-то смысле оказывается неизбежным. Действительно, с одной стороны, определения вводимых понятий должны быть краткими, чтобы не отпугнуть детей от изучаемого предмета.

С другой же стороны, вынужденная (из-за краткости) нечеткость введенных понятий приводит к недоразумениям, способным отвлечь от математики именно тех детей, кто более всего к ней способен.

## 2. ТОЧКА

В превосходном пособии Э.Н. Балаяна [1] читаем:

*«Точка – это простейшая геометрическая фигура».*

Казалось бы, к чему тут может придаться чересчур до-тошный ребенок, ищущий в математике окончательную истину?

А вот к чему.

Что такое геометрическая фигура?

*Геометрическая фигура – это множество точек.* Таким образом, точка – это элемент множества, а не само множество. Поэтому точка геометрической фигурой не является.

Вот так. Две точки – пожалуйста, это геометрическая фигура. А одна точка – увы...

Что делать учителю или родителю, столкнувшемуся с этим недоразумением?

Наш совет таков. Нужно сказать:

– Математики для упрощения своей речи часто пользуются жаргоном. И вместо слова «точка» должно было быть написано: «одноточечное множество». А про точку надо было сказать, что это – неопределяемое понятие.

### 3. ТОЧКА (продолжение)

И все же – как объяснить ребенку, что такое точка?

Логично сделать это все равно не удастся (почему – об этом чуть ниже). Наверно, надо сказать:

– В обычном языке слово «точка» обозначает такое маленькое пятнышко. Если это маленькое пятнышко начать уменьшать, то оно в конце концов исчезнет. И вот, то самое место, где пятнышко исчезнет, и есть математическая точка!



Рис. 3.1

Теперь сделаем два важных научных утверждения.

**Утверждение А.** *Нет никакого сомнения в том, что ребенок вас правильно поймет.*

**Утверждение Б.** *Объяснение, предложенное ребенку, нелогично (содержит порочный круг).*

С утверждением А дело обстоит следующим образом. Недавно проводились исключительно тонкие биологические эксперименты над новорожденными крысятами, показавшие, что в их мозгу имеются специальные клетки, отвечающие за представление о точке и о направлении. По-видимому, с человеком дело обстоит аналогичным образом. Именно поэтому ребенок легко поймет нелогичное (!) объяснение, которое ему будет предложено.

Теперь обратимся к Утверждению Б.

Если мы говорим: «Размеры пятнышка уменьшаются», то неявно опираемся на понятие расстояния. А расстояние – это, между прочим, расстояние между двумя точками. Налицо порочный круг в вышеприведенном объяснении.

#### 4. ТОЧКА (окончание)

Нам могут возразить:

– Понятие точки вводится аксиоматически. Имеется набор аксиом, сформулированных великим математиком Гильбертом, и не в меру любознательному ребенку можно объяснить, что когда он поступит в институт, то познакомится с этими аксиомами, в которых нет никакого порочного круга и которые дают полное представление о понятии «точка».

Однако это возражение, на самом деле, вводит в заблуждение. Никакая система аксиом не может сформировать тот мысленный зрительный образ точки, которым оперирует человек [2]. Система аксиом Гильберта лишь успешно моделирует наше восприятие, но не определяет его однозначно. Почему мы видим мир так, как мы его видим, – неизвестно. Скорее всего, за эти наши (в значительной мере) врожденные способности отвечают нервные клетки, аналогичные тем, которые были найдены у новорожденных крысят.

**Замечание.** Евклид в своей аксиоматической системе определял точку как *«то, что не имеет частей»*. Математики, естественно, такое определение не любят и всерьез не принимают. Тем не менее, для объяснения детям, что такое точка, Евклидово определение, на наш взгляд, прекрасно подходит.

## 5. ПРЯМАЯ

Для того чтобы объяснить ребенку, что такое математическая прямая, обычно прибегают к следующему способу. Говорят:

– Представь себе, что два человека натягивают нитку и при этом все время удаляются друг от друга в разные стороны и в конце концов уходят в бесконечность. Представь себе теперь, что нитка (когда люди, ее натягивающие, удалились в бесконечность) начала становиться все тоньше и тоньше. Вот то место, где нитка исчезнет, и есть математическая прямая. У математической прямой нет толщины, и она бесконечно простирается в обе стороны.

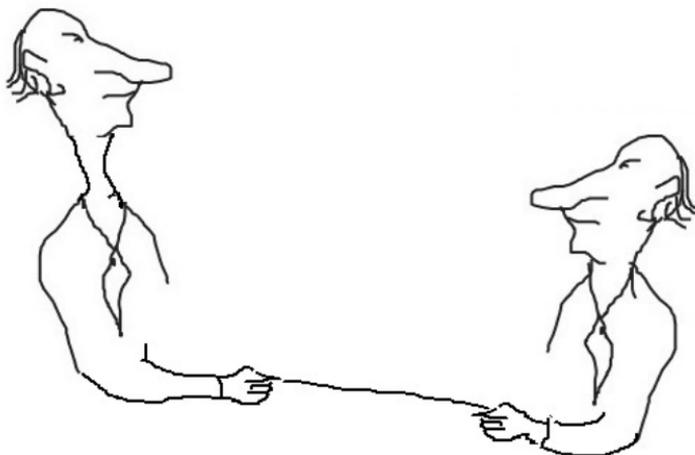


Рис. 5.1

Это объяснение, несмотря на его очевидную нелогичность, будет понято ребенком.

Нелогичность снова заключается в том, что мы в нашем объяснении неявно использовали понятие расстояния (когда говорили, что люди «удаляются друг от друга» и что нитка становится «тоньше»). А для введения понятия «расстояние» необходимо понятие «точка», которое мы ввели нелогичным способом (см. выше).

## 6. ЛИНИЯ

Линия – это след от точки, движущейся в пространстве. Математическая прямая – это тоже линия (частный случай).

Заметим, что в механике след от точки, движущейся в пространстве, принято называть *кривой*. Таким образом, получается, что *прямая* – это частный случай *кривой*. В учебниках математики для начальной школы с этим категорически не согласны. На наш взгляд, точка зрения, принятая в начальной школе, вполне оправданна. Прямая линия – это фундаментальное понятие, которое должно быть четко выделено при изучении начал геометрии. Если детям (когда они повзрослеют) придется иметь дело с инженерными расчетами, переменить точку зрения на «*прямую*» для них не составит труда.



Рис. 6.1

## 7. ОТРЕЗОК

После того как понятия «точка» и «прямая» введены, можно, наконец, начать давать определения «менее фундаментальных» понятий и делать это без обращения к физическим экспериментам.

Вот общепринятое в начальной школе определение отрезка.

**Определение 7.1** (см. например, [1]). *Отрезок – это часть прямой, расположенная между двумя ее точками.*

Это хорошее, легко усваиваемое определение. Конечно, оно должно сопровождаться рисунком (см. рис. 7.1).



Рис. 7.1

Однако это определение не вполне корректно.

Не сказано, что упомянутые две точки – концы отрезка – тоже ему принадлежат. Но это не все, к чему можно придраться.

Действительно, фигура, изображенная жирными линиями на рис 7.2, очевидным образом отрезком не является, но определению 7.1 удовлетворяет.



Рис. 7.2

**Определение 7.2.** Пусть  $A$  и  $B$  – две произвольно взятые точки,  $L$  – проходящая через них единственная прямая. Отрезок  $AB$  – это геометрическая фигура, состоящая из точек  $A$ ,  $B$  и всех точек прямой  $L$ , расположенных между  $A$  и  $B$ .

Нетрудно понять, что более корректное определение 7.2 будет гораздо хуже усваиваться детьми, чем не вполне корректное, но зато намного менее громоздкое определение 7.1.

Какое определение должен предпочесть учитель?

На наш взгляд, безусловное предпочтение нужно отдавать определению 7.1 (где все сказанное в определении 7.2 подразумевается), но при этом учитель должен быть готов при необходимости дать свои разъяснения – в духе определения 7.2.

**Замечание.** Как известно [2], понятие «лежать между» является одним из не определяемых в явном виде, фундаментальных понятий геометрии. Не исключено, что понимание того, что значит «лежать между», является для человека врожденным.

## 8. ОТРЕЗОК (продолжение)

Итак, мы видим, что необходим некий баланс между математической строгостью – с одной стороны, и доступностью для понимания – с другой.

По-видимому, излишняя педантичность может оттолкнуть от предмета одних детей, а нестрогость и непоследовательность изложения – других.

Вот пример из [1], который, на наш взгляд, не является авторской удачей.

На с. 9 про граничные точки отрезка сказано, что *«Эти точки называются концами отрезка»*. А буквально в следующей строчке (уже на с.10) говорится : *«Всякий отрезок имеет начало и конец»*. В результате ребенку, читающему учебник, предлагается согласиться с тем, что один из концов отрезка является его началом. Назвать это педагогической удачей, на наш взгляд, трудно.

## 9. ЛОМАНЫЕ ЛИНИИ

**Определение 9.1.** Ломаная линия – это геометрическая фигура, состоящая из отрезков, последовательно присоединенных друг к другу своими концами.

Примеры ломаных линий приведены на рис. 9.1.

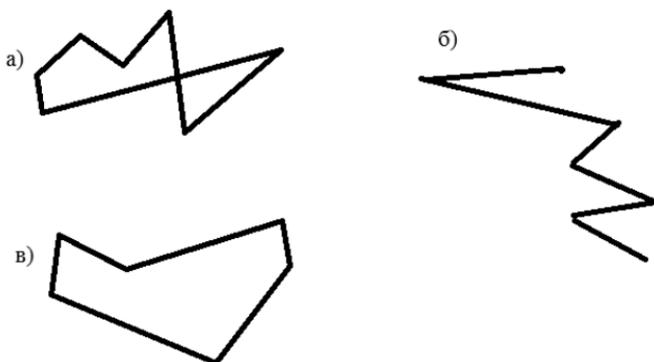


Рис. 9.1. Ломаные линии:

- а) самопересекающаяся и замкнутая;
- б) незамкнутая;
- в) замкнутая

## 10. ЛУЧ

**Определение 10.1** (см., например, [1]). *Луч – это часть прямой, ограниченная с одной стороны.*

Это определение, снабженное соответствующим рисунком (см. рис. 10.1), безусловно, будет понятно ребенку. Заметим, однако, что, например, отрезок АВ (см. рис. 7.1) также удовлетворяет этому определению. Поэтому приходится признать, что определение 10.1 не вполне корректно.

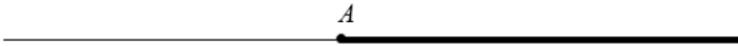


Рис. 10.1

Приведем более точное, общепринятое определение.

**Определение 10.2.** *Лучом с началом в точке  $A$  называется часть прямой, состоящая из точки  $A$  и всех точек данной прямой, лежащих по одну сторону от точки  $A$ .*

Какое же из двух вышеприведенных определений должен предпочесть учитель в начальных классах? По-видимому, как и в случае с определением отрезка, имеет смысл предпочесть более краткое (хотя и не вполне корректное) определение 10.1, а потом дополнить его, разобрав соответствующие примеры.

## 11. УГЛЫ

В этом пункте мы столкнемся с новыми неприятностями, связанными с употреблением математического жаргона и вообще с некоторой неразберихой, присутствующей в математике.

Итак,

**Определение 11.1** (см., например, [1]). *Углом называется геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. (Эту точку называют вершиной угла.)*

На рис. 11.1 изображены два угла:

$$\angle ABC \text{ и } \angle DEF. \quad (11.1)$$

Заметим теперь следующее важное обстоятельство.

Как известно, в математике (и не только в математике) иногда возникает необходимость сравнивать величины углов. Но если опираться только на определение 11.1, не дополняя его новыми условиями и ограничениями, то сравнить между собой углы (11.1) просто-напросто не удастся. Чтобы это удалось сделать, нужно договориться о том, какая у каждого из углов сторона первая, а какая – вторая; потом ввести понятие плоскости; далее, условиться о том, что направление вращения против часовой стрелки является положительным. И только после этого мы сможем сравнивать между собой величины двух углов. Такой способ сравнения углов представляется нам не самым удачным для начальной школы.

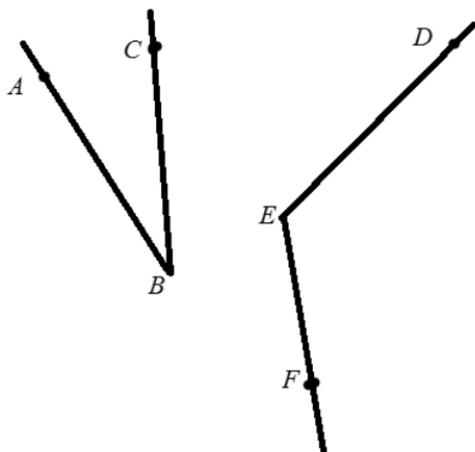


Рис. 11.1

Любопытно, что существует другое определение угла, которое позволяет избежать упомянутых трудностей. С этим (другим) способом мы познакомимся ниже.

## 12. ПОНЯТИЕ О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ. ПЛОСКОСТЬ

Наша цель – ввести понятие плоскости, опираясь на определенные мысленно осуществимые *действия*, а не просто на созерцание, скажем, поверхности стола или глади озера.

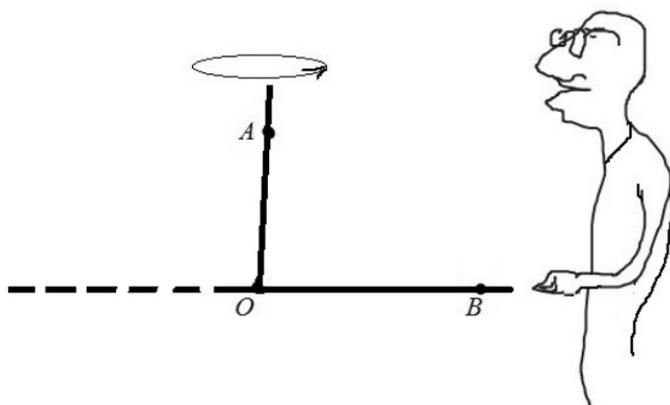


Рис. 12.1

Итак, рассмотрим два луча с общей вершиной: OA и OB и начнем вращать эту геометрическую фигуру (которую можно было бы назвать углом, если придерживаться определения 11.1) вокруг оси OA. Если при этой процедуре исходное положение луча OB и его новое положение *время от времени* образуют единую прямую, то скажем, что лучи OA и OB *перпендикулярны* друг другу (см. рис. 12.1).

А область, замечаемую в этом случае лучом  $OB$  при вращении, назовем *плоскостью* (см. рис.12.2).

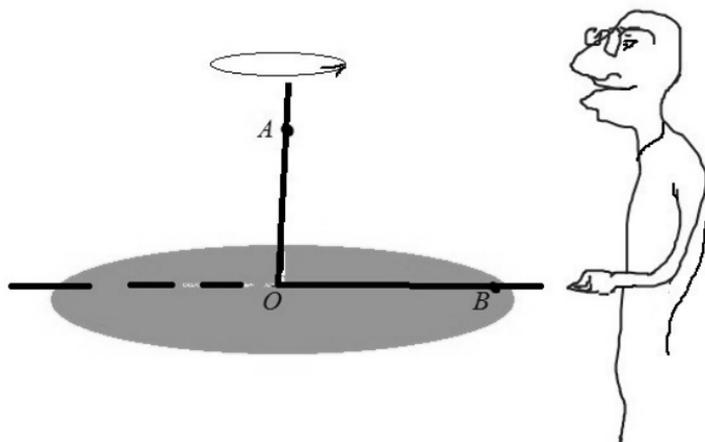


Рис. 12.2

### 13. УГЛЫ (продолжение)

Введем теперь новое, отличное от предыдущего, определение угла.

**Определение 13.1.** *Часть плоскости, ограниченную двумя лучами с общим началом, назовем углом.*

(Общее начало двух упомянутых лучей назовем, как и раньше, *вершиной* угла.)

**Замечание.** Каждая пара лучей с общим началом разбивает плоскость на две части (на два угла). Когда мы говорим об угле, ограниченном данной парой лучей, то обязательно подразумеваем одну из этих двух частей. На рис. 13.1 соответствующие части плоскости закрашены.

Наше новое определение угла позволяет легко ввести операцию сравнения любых двух углов.

**Определение 13.2.** *Пусть  $\angle ABC$  и  $\angle DEF$  – два угла, которые для определенности будем считать расположенными в одной и той же плоскости  $\pi$ . Скажем, что  $\angle ABC$  меньше, чем  $\angle DEF$ , если, перемещая  $\angle ABC$  вдоль плоскости как твердое тело, его можно целиком разместить строго внутри  $\angle DEF$  (при этом необходимо, чтобы вершины обоих углов совпали).*

Нетрудно видеть, что изображенный на рис.13.1  $\angle ABC$  меньше, чем  $\angle DEF$ .

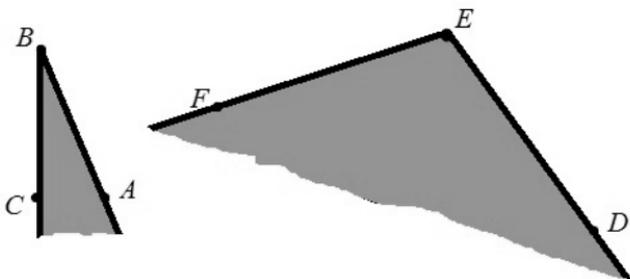


Рис. 13.1

Теперь, опираясь на определения 13.1 и 13.2, мы можем ввести определения прямого, развернутого, острого и тупого углов (см. рис.13.2 и 13.3):

**Прямым** назовем меньший из двух углов, ограниченных двумя взаимно перпендикулярными лучами.

Если оба луча, исходящие из общей вершины, составляют единую прямую, то каждый из двух образовавшихся на плоскости углов назовем **развернутым**.

**Острым** углом назовем угол, который меньше прямого.

**Тупым** углом назовем угол, который больше прямого, но меньше развернутого.

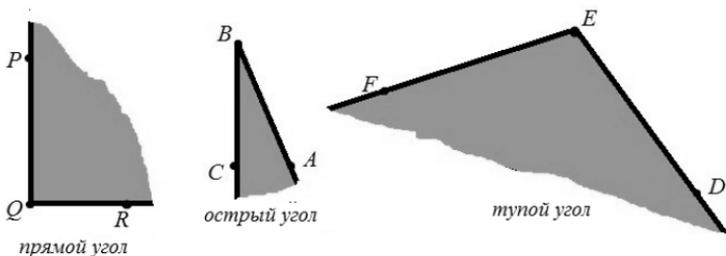
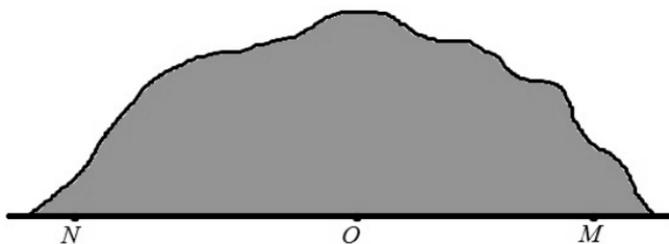


Рис. 13.2



*Развернутый угол*

Рис. 13.3

**Замечание.** Предложенный в определении 13.2 метод сравнения углов прекрасно согласуется с измерениями углов при помощи транспортира. Каким именно методом воспользоваться – зависит от учителя.

**Замечание.** Итак, в нашем распоряжении оказалось целых два (причем не согласующихся друг с другом) определения угла. Оба эти определения благополучно используются в математической литературе и, как ни странно, почти не мешают друг другу.

Как такое может быть? Все дело в том, что привычный читатель легко выясняет из контекста, какое из определений имеется в виду. С похожей ситуацией мы столкнемся ниже еще раз.

## 14. МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИХ УГЛЫ

Существует по крайней мере два разных (не согласующихся друг с другом) определения понятия «многоугольник».

Одно из них трактует многоугольник как ломаную линию, а другое – как часть плоскости, ограниченную ломаной линией.

Мы остановим свой выбор на втором из этих определений по следующей причине. В геометрии чрезвычайно широко распространены такие словосочетания как «площадь квадрата», «площадь прямоугольника», «площадь треугольника». Если придерживаться первого из упомянутых определений, то все эти площади, очевидно, должны считаться равными нулю, что вовсе не имеется в виду.

Итак,

**Определение 14.1.** *Многоугольником (точнее, плоским многоугольником) называется часть плоскости, ограниченная замкнутой, несамопересекающейся ломаной.*

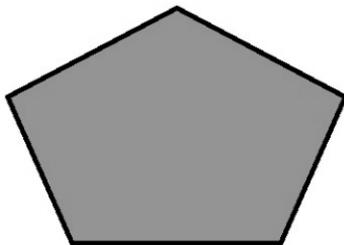


Рис. 14.1. Пятиугольник

**Замечание.** Отрезки, из которых состоит вышеупомянутая ломаная, называются *сторонами* многоугольника.

Определение 14.1 кажется не слишком сложным и в дальнейших упрощениях, на наш взгляд, не нуждается. К тому же, из него легко выводятся чрезвычайно удобные и легко воспринимаемые определения для многоугольников с заданным числом сторон:

*Треугольник – это многоугольник с тремя сторонами (вариант: с тремя углами).*

*Четырехугольник – это многоугольник с четырьмя сторонами.*

И так далее.

**Замечание.** Дальнейшие попытки упрощения определений конкретных многоугольников не всегда оказываются удачными (на наш взгляд). Например, в [1] дано такое определение треугольника: «Треугольник – это геометрическая фигура, которая имеет три стороны и три угла». Между тем, существует фигура, имеющая три стороны и три угла, но треугольником не являющаяся (см. рис. 14.2).

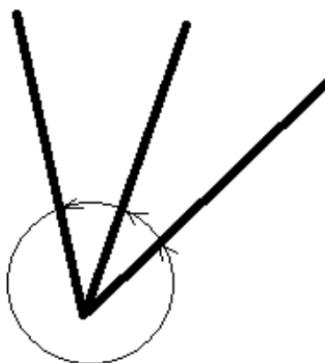


Рис. 14.2

**Замечание.** Л.Г. Петерсон в [5] так определяет угол (на наш взгляд, делает это неудачно):

*«Два луча с общим началом разбивают плоскость на две части. Меньшая из этих частей называется **углом**.»*

Однако, приняв такое определение, мы будем испытывать затруднение, пересчитывая *внутренние* углы любого невыпуклого многоугольника – например, пятиугольника, изображенного на рис. 14.3.

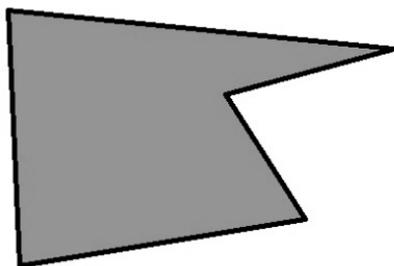


Рис. 14.3

## 15. МНОГОУГОЛЬНИКИ (продолжение)

Теперь нас будут интересовать параллелограммы, прямоугольники, ромбы, квадраты и трапеции.

Здесь мы опять столкнемся с некоторой нелогичностью, присущей математике.

Итак, нарисуем четыре квадрата произвольных размеров (см. рис. 15.1).

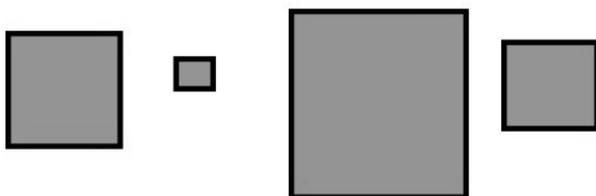


Рис. 15.1

**Задача.** Выясните, сколько на рис. 15.1 изображено:

- а) прямоугольников;
- б) параллелограммов;
- в) ромбов;
- г) трапеций.

*Ответы:*

- а) четыре;
- б) четыре;
- в) четыре;
- г) ни одной.

Человеку, забывшему школьную премудрость (в особенности – гуманитарии), эти ответы могут показаться очень странными. Ведь на рисунке – одни только квадраты. Откуда же там могут взяться прямоугольники, параллело-

граммы и ромбы? И почему тогда там не обнаруживаются еще и трапеции, чем они хуже?

Ответы на все эти вполне закономерные вопросы содержатся в общепринятых определениях:

*а) Квадрат – это прямоугольник с равными сторонами. (Значит, каждый квадрат одновременно является прямоугольником.)*

*б) Квадрат – это параллелограмм с равными сторонами и прямыми углами. (Значит, каждый квадрат одновременно является также параллелограммом.)*

*в) Квадрат – это ромб с прямыми углами. (Значит, каждый квадрат одновременно является еще и ромбом.)*

*г) Трапеция – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие противоположные стороны – не параллельны. Таким образом, отсутствие трапеций на рис. 15.1 объясняется специфическим определением трапеции.*

Тот факт, что трапеции по определению запрещено иметь две пары параллельных друг другу сторон, по видимому, всего лишь дань традиции.

## 16. ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ И ЭЛЛИПС

В отличие от термина *многоугольник*, термин *окружность* вполне однозначен и используется исключительно для обозначения плоской замкнутой кривой специального вида. А для окружности вместе с ее внутренностью имеется другой специальный термин: *круг*.

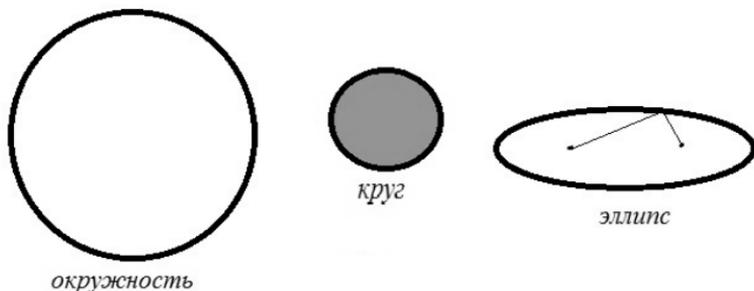


Рис. 16.1

Удивительно, что желание дать простое и всем понятное определение окружности очень часто оказывается своеобразной ловушкой.

Цитируем [1]:

«Окружность – это геометрическая фигура, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от центра.»

Но это неверно!

На рис. 16.2 изображены геометрические фигуры, удовлетворяющие «определению», взятому нами из [1], но, тем не менее, окружностями не являющиеся.

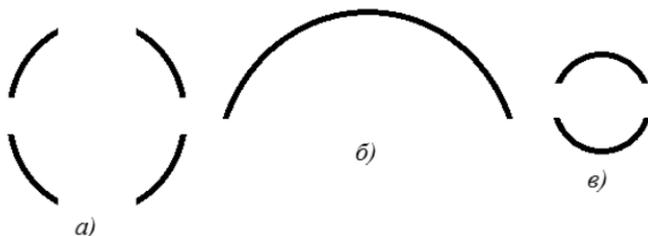


Рис. 16.2

Ошибка, допущенная в определении из [1], заключается в том, что слово «каждая» стоит не на месте. Это так называемый *квантор общности*, с которым нужно обращаться очень аккуратно.

**Замечание.** Распространенным синонимом слова «каждый» является слово «все», которое в некоторых случаях оказывается более удобным для применения, чем «каждый».

Приведем теперь общепринятое (правильное) определение окружности.

**Определение 16.1.** *Окружность – это плоская геометрическая фигура, состоящая из всех точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром.*

Аналогичным образом определяется эллипс.

**Определение 16.2.** *Эллипс – это плоская геометрическая фигура, состоящая из всех точек, сумма расстояний которых до двух выделенных точек плоскости постоянна.*

**Замечание.** Упомянутые в определении 16.2 две выделенные точки называют *фокусами* эллипса.

Построить эллипс нетрудно. Нужно положить лист бумаги на деревянную доску, вбить два гвоздика в места будущих фокусов, а затем привязать к этим гвоздикам нитку подходящей длины. Натягивая нитку карандашом, нетрудно нарисовать на листе бумаги эллипс.

Имеется еще один на удивление простой способ изготовления эллипса. Нужно взять цилиндрическую банку (не обязательно прозрачную) и наполнить ее водой, но не до краев. Наклонив банку, получим искомый эллипс. (Горизонтальная поверхность воды в наклоненной банке будет представлять собой внутренность эллипса; см. рис. 16.3.)

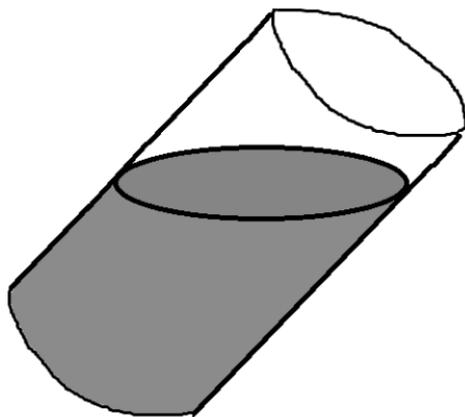


Рис. 16.3

## 17. ДВЕ УДИВИТЕЛЬНЫЕ ИСТОРИИ ПРО ЭЛЛИПС

### История первая

Как известно из астрономии, Земля обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Авторы этой брошюры не раз обращались к своим ученикам с вопросом:

– А что находится в другом фокусе?

Ответ был всегда один и тот же:

– Луна!

(К сожалению, ответ этот неверный. В другом фокусе – космический вакуум, пустота.)

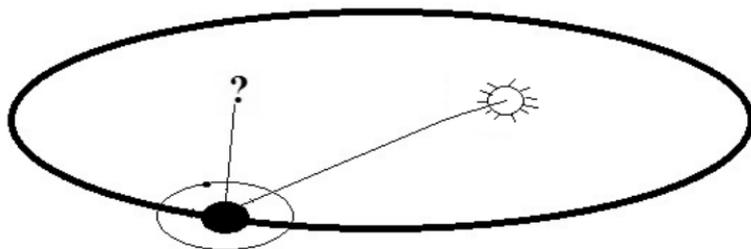


Рис. 17.1

## История вторая

Окружность, если ее наклонить, выглядит как эллипс. (А наклоненный круг – соответственно, как внутренность эллипса.)

В одном из сборников задач для детей нам попало такое задание. На рисунке была изображена сфера, у которой плоскостью срезана верхняя «макушка» (сегмент). Сфера со срезанной макушкой видна сбоку, так что сечение (имеющее форму окружности) было изображено на рисунке в виде эллипса. Детям предлагалось ответить на вопрос: *«Видишь ли ты на рисунке окружность?»*

Такая формулировка задачи представляется нам некорректной. Дети должны угадывать, какой из двух возможных ответов имеет в виду учитель.

## 18. КОВАРНЫЙ КУБ

Эта сказочная задача впервые была опубликована в [3]. Она навеяна ошибкой, прокравшейся в один из превосходных учебников по геометрии для начальной школы [6].

*Однажды Василиса Премудрая решила выйти замуж. К ней тут же посватались Кощей Бессмертный и Иванушка Дурачок. «Вот вам две задачи, – сказала Василиса, – вы уж как-нибудь разберитесь между собой, кто какую задачу будет решать. А замуж я выйду за того, кто быстрее справится со своей задачей».*



Рис. 18.1

*А задачи были такие:*

- 1) распилить березовый куб на четыре кубика;*
- 2) распилить железный кубище на восемь кубов.*

*Пока Иванушка Дурачок чесал затылок, Кощей быстро схватил березовый куб и помчался его распиливать.*

*«Так нечестно!» – закричал Иванушка, но было уже поздно.*

*За кого же вышла в результате замуж Василиса Премудрая? Какая у нее теперь фамилия?*

## 19. СПРАВА И СЛЕВА

Объясняя детям, что значит «справа», а что значит «слева», мы сталкиваемся с относительностью этих понятий и двусмысленностью некоторых наших собственных высказываний.

В учебниках по геометрии, адресованных младшим школьникам, эти трудности, конечно, преодолеваются, но...

Рассмотрим некоторые типовые ситуации, с которыми может сталкиваться ребенок (и не только ребенок).

Заметим вначале, что кроме слов «справа» и «слева» существуют еще словосочетания «*по правую руку*» и «*по левую руку*». Эти словосочетания значительно реже употребляются и, к тому же, не всегда применимы. Однако их важная особенность состоит в том, что они лишены двусмысленности.

**Задача 19.1.** За круглым столом сидят Вася, Петя, Катя и Маша (см. рис. 19.1). Вася сидит по правую руку от Пети, а Маша – по левую руку от Кати. Требуется выяснить, кто где сидит.

При такой постановке задачи легко удастся выяснить, как расселись люди. (Мы предоставляем эту возможность читателю.) Задача легко решается прежде всего потому, что термины «находиться по правую руку» и «находиться по левую руку» понимаются однозначно. (Фактически, использование этих терминов каждый раз означает переход на точку зрения персонажа и, соответственно, отказ от изложения точки зрения рассказчика – внешнего наблюдателя.)

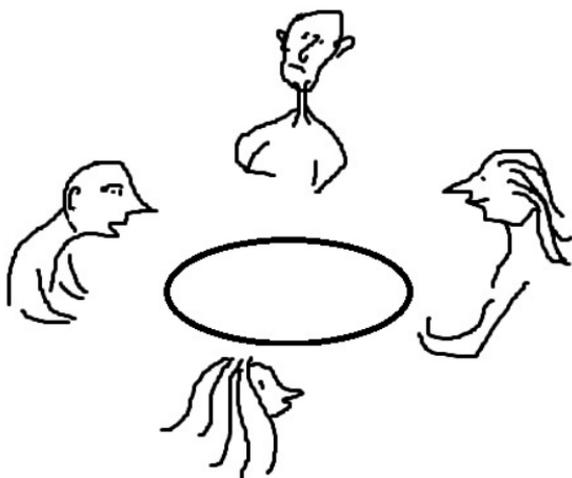


Рис. 19.1

**Задача 19.2.** На старой фотографии видно, как за круглым столом расположились Вася, Петя, Катя и Маша (см. рис. 19.1). Вот Катя, она хорошо *различима справа* от Васи, а Вася прекрасно *отпечатался слева* от Пети. Снова требуется выяснить, кто где сидит.

**Решение.** Нетрудно видеть, что термины «справа» и «слева» ни в коем случае нельзя понимать здесь, как в предыдущей задаче (т.е. как «находиться по правую руку» и «находиться по левую руку»). Во-первых, если бы мы понимали эти термины таким образом, то немедленно пришли бы к противоречию. А во-вторых, словосочетания «различима справа», «пропечатался слева» содействуют тому, чтобы мы приняли точку зрения рассказчика, а не персонажей, изображенных на фотографии.

Итак, в условии данной задачи термины «справа» и «слева» отражают точку зрения рассказчика (внешнего наблюдателя). Ответ к задаче представлен на рис. 19.2.

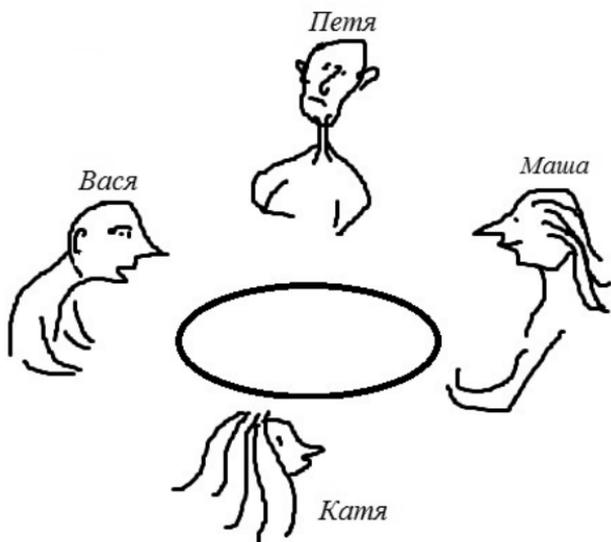


Рис. 19.2

В результате мы видим, что ситуация, касающаяся использования слов «справа» и «слева», далеко не проста; значение этих слов зависит от контекста.

## 20. СПРАВА И СЛЕВА (продолжение)

По-видимому, когда речь идет о людях, избавиться от двусмысленности терминов «справа» и «слева» в некоторых случаях невозможно. Точнее: двусмысленность неминуемо проявляется тогда, когда изображаемый (видимый) человек обращен к нам лицом, а также в некоторых случаях, когда человек виден нам в профиль. (См. в этой связи рис. 19.2, 20.1–20.3.)

Поэтому, на наш взгляд, вводить понятия «справа» и «слева» в начальной школе следует осторожно. Поначалу иллюстрировать их при помощи простейших известных ребенку неодушевленных предметов и их изображений (опираясь при этом на точку зрения наблюдателя, т.е. самого ребенка).

При использовании изображений животных также представляется разумным опираться на точку зрения наблюдателя, а не изображаемого животного (см., впрочем, [7]–[9]).

А при переходе к описанию взаимного расположения людей (и их изображений) желательно – в случаях, допускающих неоднозначное толкование – использовать термины «по правую руку» и «по левую руку». При таком подходе будет полностью исключена двусмысленность описаний.

Константин Егорыч

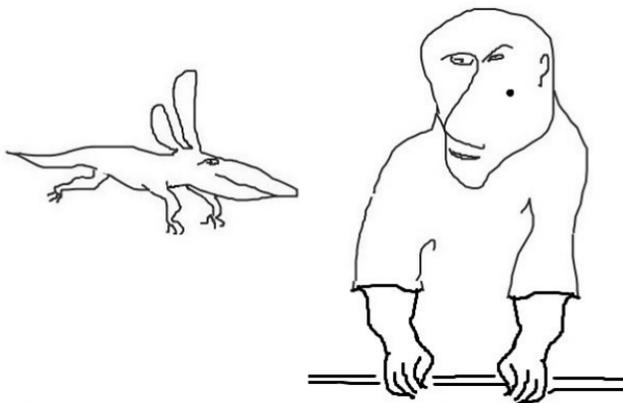


Рис. 20.1. На фотографии:  
справа от Жучки – Константин Егорыч собственной персоной,  
а справа от Константина Егорыча... Жучка

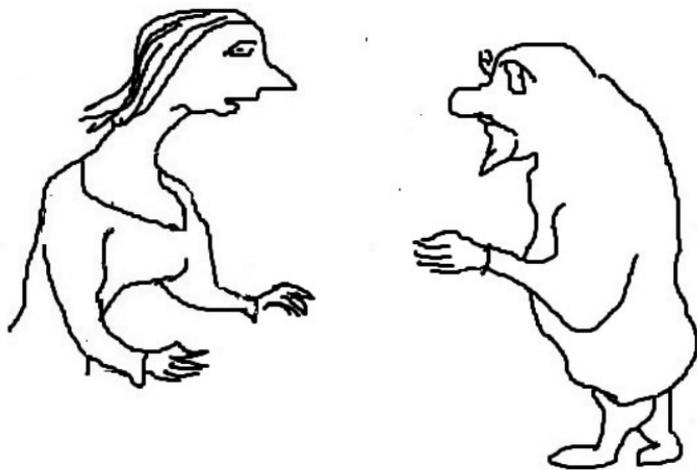


Рис. 20.2. На снимке: слева от доктора – Анна Петровна

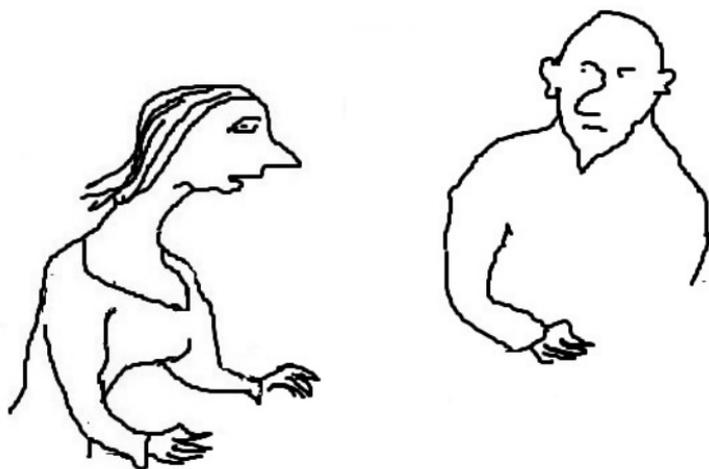


Рис. 20.3. На снимке: справа от Егора Константиныча – его супруга, Анна Петровна

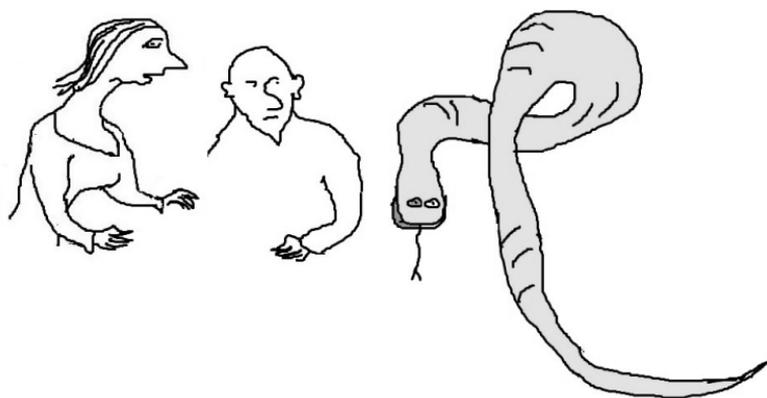


Рис. 20.4. Анна Петровна помогает своему супругу решить, по какую сторону от ужасной змеи они находятся



- К нам обращена левая или правая сторона  
этого животного?

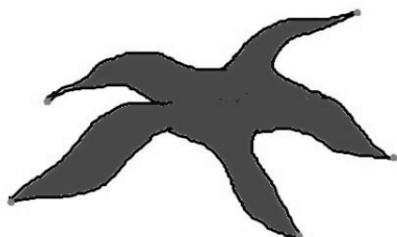


Рис. 20.5

- Уверен ли ты, что мы находимся  
слева от Константина Егорыча?

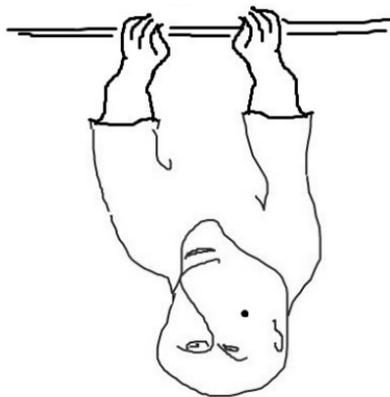
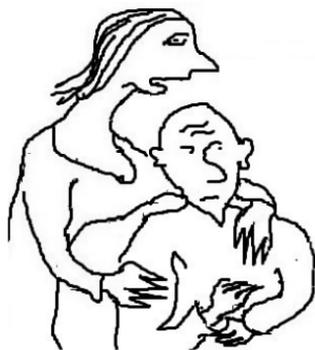


Рис. 20.6

**Задача** (для очень внимательного читателя). *Поразмыслив, Анна Петровна решила, что они с Егором Константиновичем не находятся слева от Константина Егорыча. Права ли она?*

**Указание.** Не торопитесь с ответом.

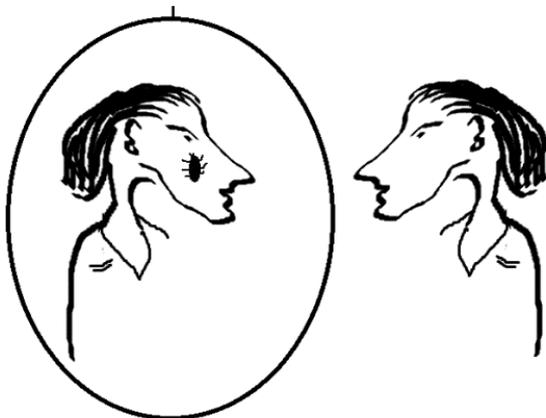


Рис. 20.7. Может ли такое быть?

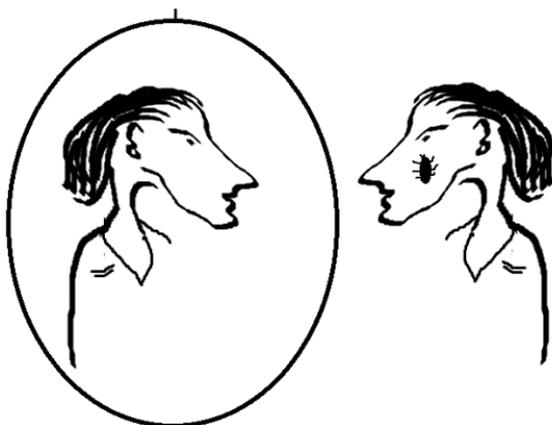


Рис. 20.8. Может ли такое быть?

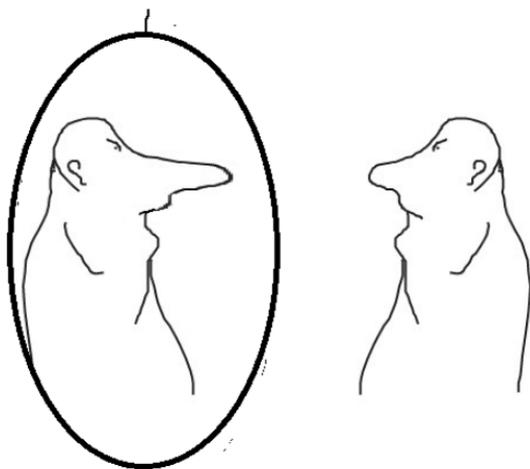


Рис. 20.9. Может ли такое быть?

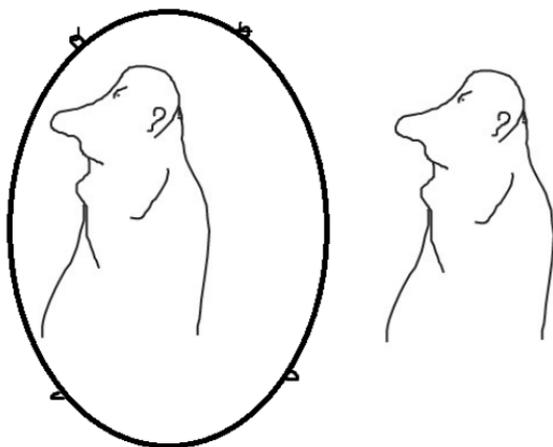


Рис. 20.10. Может ли такое быть?

## Литература

1. Балаян Э.Н. Геометрия в начальной школе. – Ростов н/Д: Феникс, 2017.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.
3. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 2. – М.: МАКС Пресс, 2015.
4. Истомина Н.Б., Редько З.Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 1 класс. – М., 2016.
5. Петерсон Л.Г. Математика. 2 класс. Часть 2. – М.: Ювента, 2004.
6. Шадрина И.В. Геометрия в начальной школе. Учебник-тетрадь для 3 класса. – М.: АСТ-ПРЕСС ШКОЛА, 2006, с. 21.
7. Смирнова Ю. Почему мама должна быть слева / Наука и жизнь, 12 января 2017. <https://www.nkj.ru/news/30499/>
8. Никифоров М. Смотреть на маму нужно левым глазом? / Наука и жизнь, 24 декабря 2010. <https://www.nkj.ru/news/19029/>
9. Смирнова Ю. «Чеширский кот» из пруда / Наука и жизнь, 6 июня 2013. <https://www.nkj.ru/news/22628/>

*Учебное издание*

ЛОКШИН Александр Александрович  
ИВАНОВА Елена Алексеевна

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ  
НЕДОРАЗУМЕНИЯ

*Книжка для родителей младших школьников*

Подготовка оригинал-макета:  
*Издательство «МАКС Пресс»*  
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*  
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*  
Обложка: *Е.А. Еронина*

*В издании использованы рисунки А.А. Локишина*

Подписано в печать 17.09.2018 г.  
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 4,5. Тираж 50 экз. Заказ 169.

Издательство ООО «МАКС Пресс».  
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ им. М.В. Ломоносова,  
2-й учебный корпус, 527 к.  
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.