

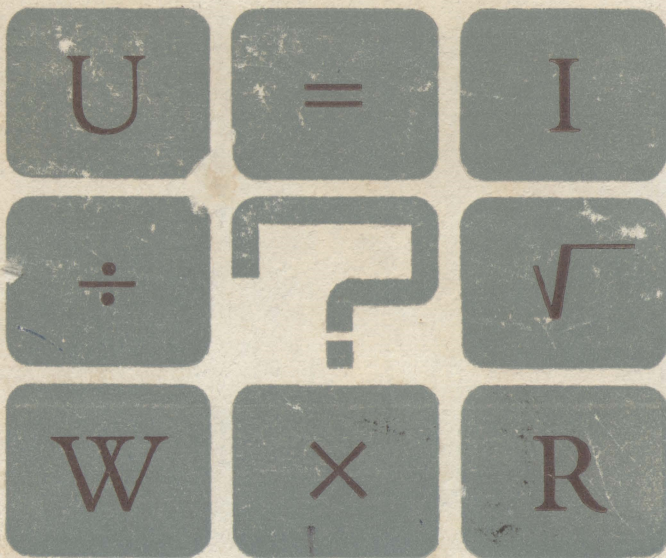
СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

# СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

---

Для студентов вузов

---



# СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Под редакцией доктора техн. наук.  
проф. П. А. Ионкина

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов электротехнических и энергетических специальностей вузов



МОСКВА ЭНЕРГОИЗДАТ 1982



ББК 31.21  
С 23  
УДК 621.3.01 (076.1)

Рецензенты: Кафедра Московского авиационного института  
им. Серго Орджоникидзе, зав. кафедрой проф.  
С. П. Колосов; проф. Ю. Г. Толстов

Авторы: Г. П. Андреев, С. Н. Андреев, И. И. Баранов,  
Б. А. Болдов, С. И. Вашенко, Г. Г. Гусев, А. И. Дзюнской,  
Ф. П. Жарков, Б. Я. Жуховицкий, П. А. Ионкин, Е. И. Калугин,  
В. В. Каратаев, В. А. Киселева, Я. Н. Колли, Н. К. Круг,  
В. Н. Кудин, В. А. Кузовкин, Е. С. Кухаркин, С. А. Левитан,  
В. А. Майбога, В. Г. Миронов, В. И. Паротькин, М. Д. Пирогова,  
Л. П. Соболева, Б. М. Фрадкин, Ф. Н. Шакирзянов,  
В. М. Юркевич

**Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов/Под ред. проф. П. А. Ионкина. — М.: Энергоиздат, 1982. — 768 с., ил.**  
В пер.: 1 р. 50 к.

Содержание задачника охватывает все разделы теории линейных и нелинейных цепей и теории электромагнитного поля курса теоретических основ электротехники и соответствует утвержденной программе.

В сборнике приведены задачи, как иллюстрирующие тот или иной метод расчета, так и возникающие при исследовании реальных электротехнических устройств. Все задачи имеют ответы, многие задачи даны с подробными решениями.

Предназначен в качестве учебного пособия для студентов электротехнических и энергетических специальностей вузов.

С 2302000000-254 144-82.  
051 (01)-82

ББК 31.21  
6П2.1

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники составлен коллективами кафедр теоретических основ электротехники (ТОЭ) и электрофизики (ЭФ) Московского энергетического института как учебное пособие для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Задачи и упражнения, включенные в сборник, охватывают все разделы курса ТОЭ в соответствии с программой курса «Теоретические основы электротехники», утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию 28 декабря 1977 г.

Помещенные в сборнике задачи предназначены как для решения в аудитории с помощью преподавателя, так и для самостоятельного решения, в том числе и студентами заочных отделений вузов; поэтому в каждой главе для типовых задач и задач повышенной трудности приведены подробные решения с необходимыми методическими указаниями. У таких задач после номера поставлена буква Р. Для всех задач даны ответы, причем в случаях, когда ответ прямо соответствует поставленным вопросам, в ответе приведены только числа, формулы или слова, служащие прямым ответом.

Принятый порядок расположения глав и задач в каждой главе не определяет желательную или необходимую последовательность их самостоятельного решения студентами и решения в аудитории преподавателем или студентами совместно с преподавателем.

При составлении задач авторы стремились по возможности связать их с электротехнической практикой и дать параметры, характерные для реальных технических устройств. Некоторые задачи появились в результате обобщения и идеализации практиче-



ских вопросов, с которыми представители промышленности обращались на кафедры. Но, конечно, в сборнике есть и достаточное число учебных задач, подобранных так, чтобы в решении можно было подчеркнуть особенности того или иного метода расчета электрических цепей или электромагнитного поля.

В списке литературы указаны основные учебники и учебные пособия, вышедшие за последние годы и предназначенные для студентов как дневных, так и вечерних отделений вузов.

Отзывы, критические замечания и пожелания просьба посылать в адрес Энергоиздата: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

*Авторы*

# Глава первая

## ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННЫХ ЭДС И ТОКОВ

### Введение к гл. 1

К простейшим двухполюсным пассивным элементам схемы линейной электрической цепи относятся резистивный, индуктивный и емкостный элементы.

Резистивный элемент — это элемент, в котором напряжение  $u$  и ток  $i$  связаны соотношением (закон Ома)

$$u_r = ri_r \text{ или } i_r = gu_r, \quad (1.1)$$

где  $r$  — сопротивление;  $g = 1/r$  — проводимость.

Мощность преобразования электромагнитной энергии в тепловую (закон Джоуля—Ленца)

$$p = ri_r^2. \quad (1.2)$$

Индуктивный элемент — это элемент, в котором напряжение и ток связаны законом электромагнитной индукции:

$$u_L = L di_L/dt, \quad (1.3)$$

где  $L$  — индуктивность;  $t$  — время.

Энергия, запасаемая в магнитном поле индуктивного элемента, равна:

$$w = Li_L^2/2. \quad (1.4)$$

Емкостный элемент — это элемент, в котором напряжение и ток связаны соотношением

$$i_C = C du_C/dt, \quad (1.5)$$

где  $C$  — емкость.

Энергия, запасаемая в электрическом поле емкостного элемента, равна:

$$w = Cu_C^2/2. \quad (1.6)$$

В установившемся режиме цепи постоянного тока ток  $I$  и напряжение  $U$  постоянны (не изменяются во времени). Из (1.3) и (1.5) следует, что в таком режиме отсутствуют напряжение на индуктивности и ток в емкости:  $u_{Ly} = 0$ ;  $i_{Cy} = 0$ .



Источник энергии (активный элемент) линейной электрической цепи постоянного тока можно представить любой из двух схем замещения: последовательной, состоящей из идеального источника ЭДС  $E$  и внутреннего сопротивления  $r_{вт}$  (рис. 1.А, а), и параллельной, состоящей из идеального источ-

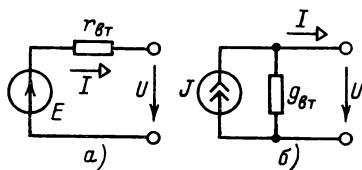


Рис. 1.А

ника тока  $J$  и внутренней проводимости  $g_{вт}$  (рис. 1.А, б). У идеального источника ЭДС  $r_{вт} = 0$ ; он развивает мощность

$$P = EI, \quad (1.7)$$

а у идеального источника тока  $g_{вт} = 0$ ; он развивает мощность

$$P = UJ. \quad (1.8)$$

Для последовательной схемы (рис. 1.А, а)

$$U = E - r_{вт}I, \quad (1.9)$$

а для параллельной схемы (рис. 1.А, б)

$$I = J - g_{вт}U, \quad (1.10)$$

причем у одного и того же источника энергии

$$E = r_{вт}J \text{ и } g_{вт} = 1/r_{вт}. \quad (1.11)$$

*Основные уравнения цепи (уравнения состояния).* Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.12)$$

где с положительным знаком учитываются токи, направленные от узла.

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений на ветвях любого замкнутого контура равна нулю, т. е.

$$\sum_k u_k = 0, \quad (1.13)$$

где с положительным знаком учитываются напряжения, направления которых совпадают с направлением обхода контура.

В установившемся режиме постоянный ток на участке цепи, схема которой показана на рис. 1.Б, а (с последовательными схемами замещения источников), можно определить из выражения (обобщенный закон Ома)

$$I = \frac{U_{ab} + E_1 + E_2 - E_3}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = \frac{U_{ab} + \sum_{ab} E}{r_{ab}} = (U_{ab} + \sum_{ab} E) g_{ab}, \quad (1.14)$$

где  $\sum_{ab} E$  — алгебраическая сумма ЭДС в ветви;  $r_{ab}$  — сумма

сопротивлений в ветви и  $g_{ab} = 1/r_{ab}$ .

*Алгебраические методы расчета цепей.* При записи уравнений на основании законов Ома и Кирхгофа в матричной форме пользуются понятием обобщенной ветви (рис. 1.Б, б).

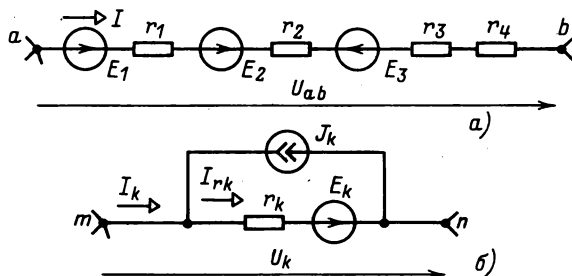


Рис. 1.Б

Закон Ома для обобщенной ветви:

$$U = r(I + J) - E. \quad (1.15a)$$

Записав это соотношение для всех  $b$  ветвей, получим матричную форму закона Ома:

$$\mathbf{U}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)} [\mathbf{I}^{(b)} + \mathbf{J}^{(b)}] - \mathbf{E}^{(b)}, \quad (1.15b)$$

где  $\mathbf{R}^{(b)}$  — диагональная матрица сопротивлений ветвей:

$$\mathbf{R}^{(b)} = \text{diag} \|r_1 r_2 \dots r_b\|; \quad (1.16)$$

$\mathbf{U}^{(b)}$ ,  $\mathbf{I}^{(b)}$ ,  $\mathbf{J}^{(b)}$ ,  $\mathbf{E}^{(b)}$  — векторы напряжений и токов ветвей, токов и ЭДС источников:

$$\mathbf{U}^{(b)} = \|U_1 U_2 \dots U_b\|^T; \quad (1.17)$$

$$\mathbf{I}^{(b)} = \|I_1 I_2 \dots I_b\|^T; \quad (1.18)$$



$$\mathbf{J}^{(b)} = \|J_1 J_2 \dots J_b\|^T; \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E}^{(b)} = \|E_1 E_2 \dots E_b\|^T. \quad (1.20)$$

Закон Ома можно записать в другой форме:

$$\mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{G}^{(b)} [\mathbf{U}^{(b)} + \mathbf{E}^{(b)}] - \mathbf{J}^{(b)}, \quad (1.21)$$

где

$$\mathbf{G}^{(b)} = \text{diag } \|g_1 g_2 \dots g_b\|. \quad (1.22)$$

Первое уравнение Кирхгофа в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{A} \mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

где  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$  — матрица соединений (узловая), у которой строки соответствуют узлам, а столбцы — ветвям, причем  $a_{ij} = +1$ , если ветвь  $j$  присоединена к узлу  $i$  и направлена от узла;  $a_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  присоединена к узлу  $i$  и направлена к узлу;  $a_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  к узлу  $i$  не присоединена; число строк матрицы  $\mathbf{A}$  равно числу независимых узлов. Если матрица соединений записана для всех узлов (неопределенная), то она обозначена  $\mathbf{A}_n$ .

Первое уравнение Кирхгофа можно представить в виде

$$\mathbf{Q} \mathbf{I}^{(b)} = \mathbf{0}, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$  — матрица главных сечений, у которой строки соответствуют сечениям, а столбцы — ветвям, причем  $q_{ij} = +1$ , если ветвь  $j$  содержится в сечении  $i$  и направления у них одинаковые (направлением главного сечения считается направление ветви дерева этого сечения);  $q_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  содержится в сечении  $i$  и направления их противоположны;  $q_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не содержится в сечении  $i$ .

Второе уравнение Кирхгофа в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^{(b)} = \mathbf{0}, \quad (1.25)$$

где  $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$  — матрица главных контуров, у которых строки соответствуют контурам, а столбцы — ветвям, причем  $b_{ij} = +1$ , если ветвь  $j$  содержится в контуре  $i$  и ее направление совпадает с направлением обхода контура;  $b_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  содержится в контуре  $i$  и ее направление противоположно направлению обхода;  $b_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не содержится в контуре  $i$ .

Соотношения (1.23) и (1.25) можно представить в виде

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_r = \mathbf{A} \mathbf{G}^{(b)} \mathbf{U}_r = \mathbf{A} \mathbf{J}^{(b)}; \quad (1.26)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{U}_r = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(b)} \mathbf{I}_r = \mathbf{B} \mathbf{E}^{(b)}; \quad (1.27)$$

здесь  $I_r$  и  $U_r$  — векторы токов и напряжений на сопротивлениях, причем их элементы связаны соотношением  $U_{rk} = r_k I_{rk}$ .

Получить независимые уравнения по первому и второму законам Кирхгофа, т. е. выбрать независимую систему контуров и сечений, можно при помощи дерева графа (схемы), содержащего все узлы графа, но ни одного контура, и ветвей связи, дополняющих дерево до исходного графа. Если граф содержит  $b$  ветвей и  $y$  узлов, то число ветвей дерева  $d = y - 1$ , а число ветвей связи  $k = b - (y - 1)$ . Для дерева образуется  $d$  главных сечений, каждое из которых состоит из ветвей связи и одной ветви дерева, и  $k$  главных контуров, каждый из которых состоит из ветвей дерева и только одной ветви связи. Уравнения, составленные по законам Кирхгофа для главных сечений и главных контуров, линейно независимы.

Если ветвям дерева присвоены первые номера, то матрица главных сечений может быть разделена на две подматрицы:

$$Q = [1F], \quad (1.28)$$

где  $1$  — единичная подматрица порядка  $y - 1$ ;  $F$  — подматрица, столбцы которой соответствуют ветвям связи.

Матрицы  $A$ ,  $Q$  и  $B$ , составленные для одного и того же графа (схемы), удовлетворяют соотношениям

$$AB^T = 0, \text{ или } BA^T = 0, \quad (1.29)$$

$$QB^T = 0, \text{ или } BQ^T = 0. \quad (1.30)$$

Применение узловых уравнений позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений, так как в качестве независимых переменных выбираются потенциалы узлов (метод узловых потенциалов)

$$G^{(y)}\phi = J^{(y)}, \quad (1.31)$$

где  $\phi$  — вектор потенциалов узлов;  $G^{(y)}$ ,  $J^{(y)}$  — матрицы узловых проводимостей и узловых токов:

$$G^{(y)} = AG^{(a)}A^T; \quad (1.32)$$

$$J^{(y)} = AJ^{(a)} - AG^{(a)}E^{(a)}. \quad (1.33)$$

Напряжения ветвей определяются через узловые потенциалы:

$$U^{(a)} = A^T\phi. \quad (1.34)$$



$$\begin{aligned} g_{11}\Phi_1 - g_{12}\Phi_2 - \dots - g_{1,y-1}\Phi_{y-1} &= J_1^{(y)}; \\ -g_{21}\Phi_1 + g_{22}\Phi_2 - \dots - g_{2,y-1}\Phi_{y-1} &= J_2^{(y)}; \\ &\vdots \\ -g_{y-1,1}\Phi_1 - g_{y-1,2}\Phi_2 - \dots + g_{y-1,y-1}\Phi_{y-1} &= J_{y-1}^{(y)}; \end{aligned} \quad (1.35)$$

В качестве независимых переменных можно выбрать напряжения ветвей дерева (узловых пар)  $U^{(d)}$ :

$$\mathbf{G}^{(c)}\mathbf{U}^{(d)} = \mathbf{J}^{(c)}. \quad (1.36)$$

$$\mathbf{G}^{(\text{c})} = \mathbf{Q}\mathbf{G}^{(\text{b})}\mathbf{Q}^{\text{T}}; \quad (1.37)$$

$$\mathbf{J}^{(c)} = \mathbf{Q}\mathbf{J}^{(b)} - \mathbf{Q}\mathbf{G}^{(b)}\mathbf{E}^{(b)}. \quad (1.38)$$

$$\mathbf{U}^{(\mathbf{B})} = \mathbf{O}^T \mathbf{U}^{(\mathbf{D})}. \quad (1.39)$$
$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}^{(K)} \quad (1.40)$$
$$\mathbf{R}^{(\kappa)} \mathbf{I}^{(\kappa)} = \mathbf{E}^{(\kappa)}, \quad (1.41)$$
$$\mathbf{R}^{(K)} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{(B)}\mathbf{B}^T; \quad (1.42)$$

$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{(B)} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{(B)}\mathbf{J}^{(B)}. \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} r_{11}I_1^{(k)} + r_{12}I_2^{(k)} + \dots + r_{1k}I_k^{(k)} &= E_1^{(k)}; \\ r_{21}I_1^{(k)} + r_{22}I_2^{(k)} + \dots + r_{2k}I_k^{(k)} &= E_2^{(k)}; \\ &\vdots \\ r_{k1}I_1^{(k)} + r_{k2}I_2^{(k)} + \dots + r_{kk}I_k^{(k)} &= E_k^{(k)}; \end{aligned} \quad (1.44)$$

Матрица  $\mathbf{R}^{(k)}$  симметричная, так как  $r_{ij} = r_{ji}$ .

$$\sum_{k=1}^b E_k I_k + \sum_{k=1}^b U_k J_k = \sum_{k=1}^b r_k I_{rk}^2, \quad (1.45)$$
$$\mathbf{I}_r^T \mathbf{R}^{(b)} \mathbf{I}_r = [\mathbf{E}^{(b)}]^T \mathbf{I}_r + [\mathbf{U}^{(b)}]^T \mathbf{J}^{(b)}. \quad (1.46)$$
$$I_h = \sum_{l=1}^b g_{hl} E_l + \sum_{l=1}^b K_{hl}^{(i)} J_l, \quad h = 1, 2, \dots, b; \quad (1.47)$$

$$U_h = \sum_{l=1}^b r_{hl} J_l + \sum_{l=1}^b K_{hl}^{(u)} E_l, \quad h = 1, 2, \dots, b, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{G}\mathbf{E}^{(B)} + \mathbf{K}^{(i)}\mathbf{J}^{(B)}; \quad (1.49)$$

$$\mathbf{U}^{(B)} = \mathbf{R}\mathbf{J}^{(B)} + \mathbf{K}^{(u)}\mathbf{E}^{(B)}; \quad (1.50)$$

$$g_{hl} = I_h/E_l; \quad K_{hl}^{(u)} = U_h/E_l \quad (1.51)$$

при действии в цепи только источника ЭДС  $E_i$ :

$$r_{hi} = U_h/J_i; K_{hi}^{(i)} = I_h/J_i \quad (1.52)$$

при действии в цепи только источника тока  $J_i$ . Матрицы  $G$ ,  $K^{(i)}$ ,  $R$  и  $K^{(u)}$  удовлетворяют соотношениям

$$AG = 0; AK^{(i)} = 0; BR = 0; BK^{(u)} = 0. \quad (1.53)$$

При изменении какого-либо параметра одной из ветвей (ЭДС, тока источника или сопротивления) напряжения и токи

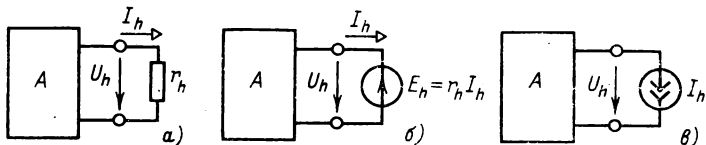


Рис. 1.B

любой пары ветвей связаны линейными соотношениями вида

$$y = ax + b, \quad (1.54)$$

где  $x$ ,  $y$  — напряжения или токи;  $a$ ,  $b$  — постоянные коэффициенты.

На основании теоремы о компенсации любое сопротивление схемы  $r_h$  с током  $I_h$  (рис. 1.B, а) можно заменить источником ЭДС  $E_h = r_h I_h$  (рис. 1.B, б); любую ветвь с током  $I_h$  можно заменить источником тока  $J_h$  (рис. 1.B, в).

Ток в одной из ветвей можно определить на основании теоремы об эквивалентном источнике (активном двухполюснике). Активную часть цепи, к которой присоединена пассивная ветвь с сопротивлением  $r$  (рис. 1.Г, а), можно заменить источником с ЭДС, равной напряжению  $U_x$  на выводах разомкнутой пассивной ветви, и сопротивлением, равным входному сопротивлению  $r_{вх}$  активной части цепи (рис. 1.Г, б), или источником тока, значение которого  $I_x$  равно току в короткозамкнутой пассивной ветви, и проводимостью, равной входной проводимости  $g_{вх}$  активной части цепи (рис. 1.Г, в). Ток и напряжения ветви

$$I = U_x/(r_{вх} + r), \quad U = I_x/(g_{вх} + g), \quad (1.55)$$

где

$$r_{вх} = U_x/I_x; \quad g_{вх} = 1/r_{вх}. \quad (1.56)$$

При взаимном преобразовании пассивной трехлучевой звезды (рис. 1.Д, а) и треугольника (рис. 1.Д, б) сопротивлений имеем:

$$r_1 = \frac{r_{12}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{12}r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{23}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad (1.57)$$

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \quad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_1 r_3}{r_2}. \quad (1.58)$$

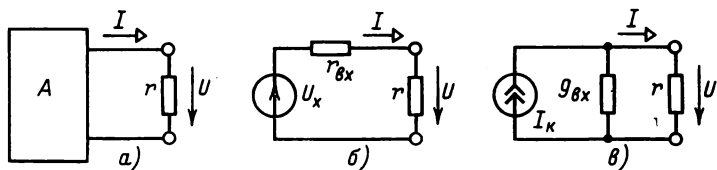


Рис. 1.Г

Топологические методы анализа цепей применяются для определения входных и взаимных сопротивлений и проводимостей, передаточных функций (токов и напряжений) непосредственно по схеме без записи уравнений.

По топологической формуле (формуле Мэсона) передаточная функция или передача, т. е. отношение показания измерительного прибора (вольтметра или амперметра) к параметру источника ( $E$  или  $J$ ), имеет вид:

$$H = \sum_k \Pi'_k \Delta'_k / \Delta, \quad (1.59)$$

где  $\Pi'_k$  — путь передачи, т. е. произведение проводимостей ветвей пути, включающего выводы источника и измерительный

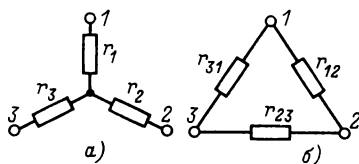


Рис. 1.Д

прибор (проводимость прибора принимается равной единице);  $\Delta'_k$  — минор пути передачи или узловой определитель схемы, получающейся при замыкании  $k$ -го пути;  $\Delta$  — узловой определитель

литель схемы, получаемой после исключения вольтметра и источника тока и замыкания амперметра и источника ЭДС:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n G_{j1} G_{j2} \dots G_{j(y-1)}; \quad (1.60)$$

здесь  $G_{ji}$  — проводимость ветви  $i$  дерева  $j$ ;  $n$  — число деревьев схемы. Определитель может быть вычислен разложением по путям между парой узлов:

$$\Delta = \sum_k \Pi_k \Delta_k, \quad (1.61)$$

где  $\Pi_k$  — произведение проводимостей ветвей  $k$ -го пути;  $\Delta_k$  — определитель схемы, которая получается при замыкании  $k$ -го пути исходной схемы.

Если схема состоит из двух подсхем, имеющих общий узел, то

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad (1.62)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — узловые определители подсхем.

Миноры пути передачи  $\Delta_k$  вычисляются аналогично.

Ток и напряжение любой ветви схемы с несколькими источниками могут быть найдены при помощи топологической формулы с применением метода наложения.

**Сигнальные (направленные) графы.** Для построения сигнального графа узловые или контурные уравнения цепи надо записать в форме причина — следствие, т. е. каждое уравнение разрешить относительно переменной, отличной для каждого уравнения.

Узлы графа  $x_i$  и  $x_j$ , соответствующие зависимым (потенциалы, токи) и независимым переменным, соединяются направленными ветвями с передачами  $a_{ij}$  (рис. 1.Е):

$$x_i = a_{ij} x_j. \quad (1.63)$$

К узлу — истоку сигнального графа присоединены только исходящие ветви, к узлу — стоку — только входящие ветви.

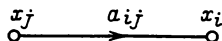


Рис. 1.Е

Графы узловых и контурных уравнений могут быть построены без записи уравнений. Для построения графа узловые уравнения (1.35) записываются в форме причина —

**следствие:**

[illegible]

Потенциалам всех узлов схемы ставятся в соответствие узлы графа. Каждая пара узлов графа  $f_j$  и  $f_k$  соединяется ветвью с передачей  $g_{jk}/g_{jj}$ , направленной от узла  $f_j$  к узлу  $f_k$ , и ветвью с передачей  $g_{kj}/g_{kk}$  от узла  $f_k$  к узлу  $f_j$ . Узел графа  $J_j^{(y)}$  соединяется с узлом  $f_j$  ветвью с передачей  $1/g_{jj}$ . Вместо узлов  $J_j^{(y)}$  можно ввести узлы  $J_j$  и  $E_j$ .

Передача сигнального графа (формула Мэзона) имеет вид:

$$H = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{1 - \sum_k P_k^{(1)} + \sum_k P_k^{(2)} - \sum_k P_k^{(3)} + \dots}, \quad (1.65)$$

где  $P'_k$  – произведение передач ветвей пути, начинающегося в истоке и заканчивающегося в стоке;  $\Delta'_k$  – определитель графа, получающегося из исходного при исключении ветвей, принадлежащих  $k$ -му пути;  $\Delta$  – определитель графа (системы уравнений, отображаемых графом);  $\sum_k P_k^{(1)} = \sum_k L_k$  – сумма пе-

редач всех контуров графа;  $\sum_k P_k^{(m)} = \sum_k L_{k1} L_{k2} \dots L_{km}$  — сумма

передач всех возможных комбинаций из  $m$  некасающихся контуров ( $m = 2, 3 \dots$ ).

Во всех задачах этой главы, кроме особо оговоренных случаев, надо считать, что сопротивление вольтметра бесконечно велико, а сопротивление амперметра равно нулю.

## 1.1. Простейшие электрические цепи

1.1. Для электрической цепи рис. 1.1 заданы сопротивления  $r_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 60 \text{ Ом}$  и напряжение на входе  $U = 120 \text{ В}$ .

Найти показания амперметров.

1.2. Для цепи рис. 1.1 вывести формулу распределения общего тока  $I$  по двум параллельным ветвям с сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ .

1.3. В цепи рис. 1.1 выразить входное сопротивление  $r_{\text{вх}} = U/I$  через сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  двух параллельных ветвей.

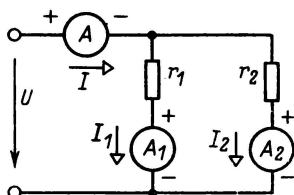


Рис. 1.1

1.4. В цепь рис. 1.1 дополнительно включено сопротивление  $r$  последовательно с амперметром, измеряющим общий ток  $I$ .

Выразить входное сопротивление  $r_{\text{вх}} = U/I$  через сопротивления  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$ .

1.5. Показать, что распределение общего тока  $I$  по двум параллельным ветвям с сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$  в цепи задачи 1.4 такое же, как и в цепи задачи 1.2.

1.6. Написать необходимое для определения всех токов число уравнений по законам Кирхгофа (в общем виде) для схем рис. 1.7, а и 1.8 – 1.10 при замкнутом ключе.

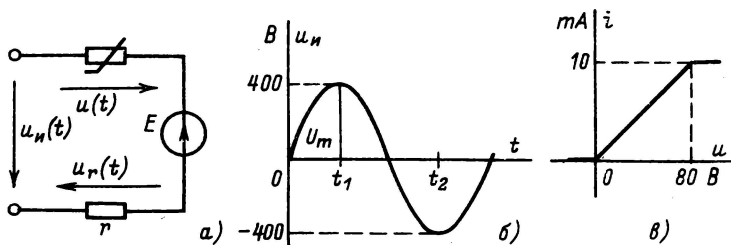


Рис. 1.7

1.7(Р). В цепи рис. 1.7, а включены: источник синусоидального напряжения  $u_n(t)$ , которое изменяется, как показано на рис. 1.7, б, источник постоянной ЭДС  $E = 80$  В, линейный резистор с сопротивлением  $r = 1$  кОм и нелинейный резистор, несимметричная вольт-амперная характеристика которого представлена на рис. 1.7, в.



Найти напряжения на резисторах: 1) в момент времени  $t_1$ , когда напряжение  $u_n(t)$  положительно и равно амплитуде  $U_m$ ; 2) в момент времени  $t_2$ , когда напряжение  $u_n(t)$  отрицательно и равно  $-U_m$ .

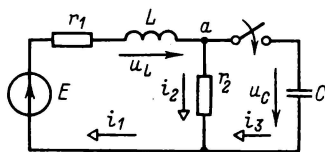


Рис. 1.8

**Решение.** Обходя контур по направлению движения часовой стрелки, запишем по второму закону Кирхгофа уравнение

$$u(t) + u_r(t) - u_n(t) = -E \text{ или } u(t) = u_n(t) - u_r(t) - E.$$

1) Дано:  $u_n(t_1) = 400$  В. По вольт-амперной характеристике определим, что при этом ток  $i = 10$  мА  $= 10 \cdot 10^{-3}$  А. Следовательно,  $u_r = ri = 10$  В;  $u = 400 - 10 - 80 = 310$  В.

2) Дано:  $u_n(t_2) = -400$  В. По вольт-амперной характеристике найдем, что  $i = 0$ . Следовательно,  $u_r = 0$ ;  $u = -400 - 80 = -480$  В.

**1.8(Р).** Для цепи рис. 1.8 дано:  $r_1 = r_2 = 10$  Ом;  $L = 5$  мГн;  $C = 10$  мкФ;  $E = 100$  В.

Найти все токи, напряжения на емкости  $C$  и индуктивности  $L$  в момент замыкания ключа ( $t = 0$ ), если известно, что у тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент включения остаются те же значения, которые были непосредственно перед замыканием ключа (перед коммутацией).

**Решение.** До коммутации в цепи был установившийся режим (токи и напряжения не изменялись), в котором согласно (1.3) напряжение на индуктивности  $u_L = 0$ ; ток  $i_1 = E/(r_1 + r_2) = 100/(10 + 10) = 5$  А;  $u_C = 0$  (на емкости не было заряда). После коммутации по условию ток  $i_1$  и напряжение  $u_C$  в первый момент времени ( $t = 0$ ) имеют те же значения. Остальные параметры найдем из уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

1) по второму закону Кирхгофа для внешнего контура  $r_1 i_1 + u_L + u_C = E$ , или  $5 \cdot 10 + u_L + 0 = 100$ , откуда  $u_L = 50$  В;

2) по второму закону Кирхгофа для правого контура  $-r_2 i_2 + u_C = 0$ , или  $-10 i_2 = 0$ , откуда  $i_2 = 0$ ;

3) по первому закону Кирхгофа для верхнего узла  $a$ :  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$ , откуда  $i_3 = 5$  А.

1.9. Для цепи рис. 1.9 дано:  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 40 \text{ мГн}$ ;  $C = 100 \text{ мкФ}$ ;  $E = 100 \text{ В}$ .

Задание то же, что и в задаче 1.8.

1.10. Для цепи рис. 1.10 задано:  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 2 \text{ мкФ}$ ;  $J(t) = 2\sqrt{2} \sin(10^4 t + 135^\circ) \text{ А}$ ;  $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ) \text{ В}$ .

Задание то же, что и в задаче 1.8.

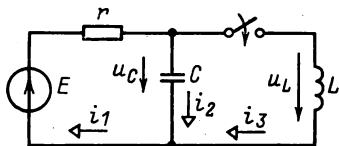


Рис. 1.9

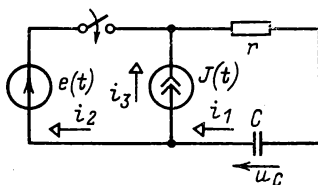


Рис. 1.10

1.11. В цепи рис. 1.11 ключ в момент времени  $t = 0$  переводится (мгновенно) из положения  $a$  в положение  $b$ .

Дано:  $L = 10 \text{ мГн}$ ;  $C = 100 \text{ мкФ}$ ;  $r = r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $E = 30 \text{ В}$ ;  $e = 5\sqrt{2} \sin(10^3 t + 135^\circ) \text{ В}$ .

Задание то же, что и в задаче 1.8.

1.12. Для источника энергии (рис. 1.12) с ЭДС  $E = 2 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r_{вт} = 0,02 \text{ Ом}$  найти напряжение  $U_{ab}$  на выводах при токе, равном  $2 \text{ А}$  и направленном: 1) по направлению действия ЭДС; 2) противоположно направлению действия ЭДС.

1.13. Для схемы рис. 1.13 дано:  $E = 2 \text{ В}$ ;  $r = 0,02 \text{ Ом}$ ;  $U_{ab} = 1,6 \text{ В}$ .

Найти ток  $I$ : 1) при направлении ЭДС, указанном на схеме; 2) при обратном направлении ЭДС.

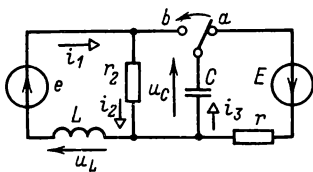


Рис. 1.11

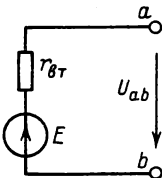


Рис. 1.12

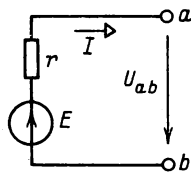


Рис. 1.13

1.14. Пользуясь законом Ома для участка цепи с ЭДС, найти токи в ветвях и проверить вычисления по первому закону Кирхгофа для следующих цепей:

1) токи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  в цепи рис. 1.20 при потенциалах узлов:  $\varphi_a = 46 \text{ В}$ ;  $\varphi_b = -32 \text{ В}$ ;  $\varphi_c = 24 \text{ В}$ ;  $\varphi_d = -8 \text{ В}$ ;

2) токи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  в цепи рис. 1.32 при потенциалах:  $\varphi_a = 2$  В;  $\varphi_b = -36$  В;  $\varphi_c = 8$  В;  $\varphi_d = -28$  В.

1.15. Составить балансы мощностей для цепей рис. 1.20 и 1.32 при данных задачи 1.14.

1.16. Пользуясь законом Ома для участка цепи с ЭДС и первым законом Кирхгофа, найти токи в ветвях и проверить вычисления, составляя уравнения по второму закону Кирхгофа: 1) для цепи рис. 1.28 при токе  $I_1 = 8$  А; 2) для цепи рис. 1.32 при токе  $I_1 = 1$  А.

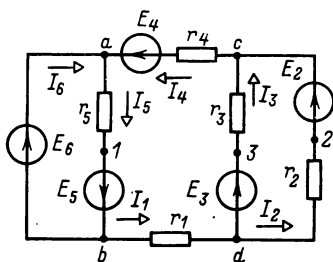


Рис. 1.17

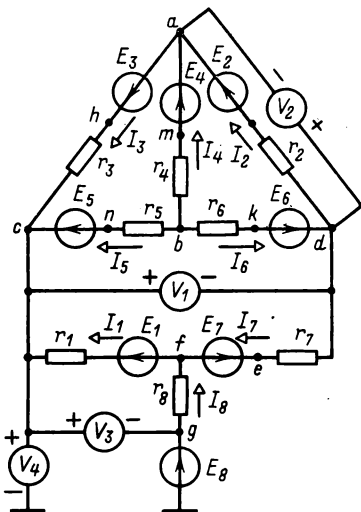


Рис. 1.18 →

1.17. Для цепи рис. 1.17 дано:  $r_1 = 0$ ;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом;  $r_4 = 2$  Ом;  $r_5 = 4$  Ом;  $E_2 = 6$  В;  $E_3 = 4$  В;  $E_4 = 7$  В;  $E_5 = 3$  В;  $E_6 = 3$  В, ток  $I_2 = 2$  А. Найти все токи, применив закон Ома для участка цепи с ЭДС и первый закон Кирхгофа. Составить баланс мощностей.

1.18(Р). Для схемы рис. 1.18 дано:

Номер ветви . . . . .	1	2	3	4	5	6	7	8
$E$ , В . . . . .	?	?	14	14	?	28	28	10
$I$ , А . . . . .	-1	2,2	0,8	-1,4	0,2	1,2	-1	0
$r$ , Ом . . . . .	0	10	8	4	4	3	2	2

1) Не определяя ЭДС  $E_1, E_2$  и  $E_5$ , найти показания вольтметров.

2) Определив потенциалы узлов, найти ЭДС  $E_1, E_2$  и  $E_5$ ; проверить вычисления, составив уравнения по второму закону Кирхгофа.

3) Построить потенциальную диаграмму вдоль контура  $f, d, b, a, c, f$ , приняв потенциал заземленной точки равным нулю.

Решение. 1) Для определения показаний вольтметров найдем потенциалы узлов и точек  $g, d, a$  и  $c$ :  $\varphi_g = E_8 = 10$  В;  $\varphi_f = \varphi_g - r_8 I_8 = \varphi_g$ ;  $\varphi_d = \varphi_f + E_7 + r_7 I_7 = 36$  В;  $\varphi_a = \varphi_d - E_6 + r_6 I_6 - r_4 I_4 + E_4 = 31,2$  В;  $\varphi_c = \varphi_a + E_3 - r_3 I_3 = 38,8$  В. Показания вольтметров:  $U_1 = \varphi_c - \varphi_d = 2,8$  В;  $U_2 = \varphi_d - \varphi_a = 4,8$  В;  $U_3 = \varphi_c - \varphi_g = 28,8$  В;  $U_4 = \varphi_c = 38,8$  В.

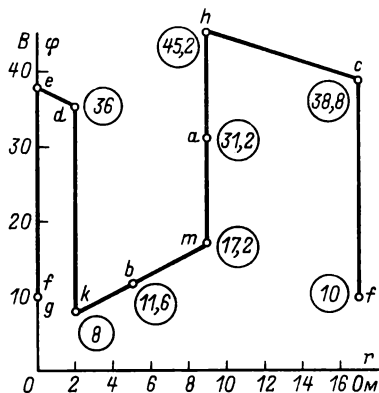


Рис. 1.18Р

2) Определим значения ЭДС:  $E_1 = \varphi_c - \varphi_f + r_1 I_1$ , т. е.  $E_1 = 28,8$  В; аналогично  $E_2 = 17,2$  В;  $E_5 = 28$  В. Проверим выполнение второго закона Кирхгофа по контуру  $dacbd$ :  $r_2 I_2 + r_3 I_3 - r_5 I_5 + r_6 I_6 = E_2 + E_3 - E_5 + E_6$ , что после подстановки численных значений дает  $31,2$  В =  $31,2$  В.

По полученным значениям потенциалов узлов строим потенциальную диаграмму (рис. 1.18Р).

1.19. Для схемы рис. 1.17 построить потенциальную диаграмму вдоль контура  $acdba$ , приняв потенциал точки  $I$  равным нулю ( $\varphi_I = 0$ ).

1.20. В цепи рис. 1.20 амперметр показывает ток 8 А.

Определить остальные токи в ветвях, пользуясь законом Ома для участка цепи с ЭДС и первым законом Кирхгофа.

1.21. Указать 1) параллельно и 2) последовательно соединенные сопротивления в схемах, приведенных на рис. 1.71 и 1.72.

**1.22(Р).** Найти входные сопротивления для схемы рис. 1.17 при  $r_1 = 2$  Ом относительно: 1) выводов источника ЭДС  $E_6$ ; 2) точек  $b, c$ ; 3) точек  $c, d$ ; 4) точек  $1, 3$ .

**Решение.** 1) Эквивалентная схема для определения  $r_{вх}$  относительно выводов  $E_6$  приведена на рис. 1.22Р. Входное сопротивление  $r_{вх} = r_5 r_{эк} / (r_5 + r_{эк})$ , где  $r_{эк}$  — эквивалентное сопротивление:  $r_{эк} = r_1 + r_4 + r_2 r_3 / (r_2 + r_3)$ . Подставив численные значения, получим:  $r_{эк} = 5$  Ом;  $r_{вх} = 2,22$  Ом.

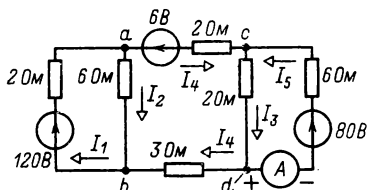


Рис. 1.20

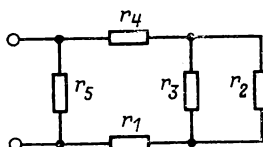


Рис. 1.22Р

**1.23.** Для схемы рис. 1.23, где сопротивления указаны в омах, найти входные сопротивления относительно выводов: 1) источника тока; 2) источника ЭДС.

**1.24.** На рис. 1.24 значения ЭДС указаны в вольтах, сопротивлений — в омах, тока — в амперах.

Найти входное сопротивление относительно выводов источника тока, применив преобразования: 1) треугольника сопротивлений в звезду; 2) звезды сопротивлений в треугольник. Рассчитать мощность источника тока.

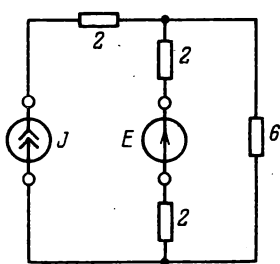


Рис. 1.23

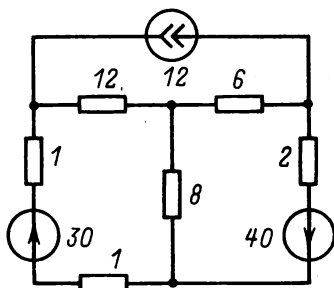


Рис. 1.24

**1.25.** 1) Заменяв треугольник сопротивлений эквивалентной звездой, найти входное сопротивление относительно выводов источника ЭДС в схеме рис. 1.25 при  $r_{ab} = r_{bc} = r_{ca} = 3$  Ом,  $r_{ab} = r_{ca} = 30$  Ом,  $r_{bc} = 40$  Ом.

2) Найти сопротивления эквивалентного треугольника для звезды сопротивлений с общей точкой лучей  $a$  при  $r_{ab} = r_{ca} = 30 \text{ Ом}$  и  $r_{bc} = 40 \text{ Ом}$ .

1.26. Для схемы рис. 1.18 найти: 1) сопротивления эквивалентной звезды для треугольника  $abc$ ; 2) входные сопротивления относительно точек  $c$ ,  $f$  и  $a$ ,  $d$ .

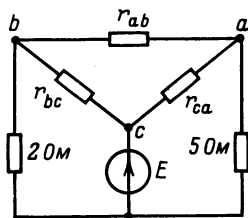


Рис. 1.25

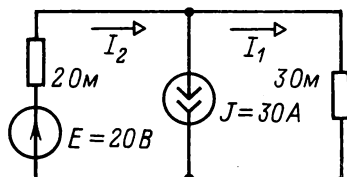


Рис. 1.28

1.27. Для схемы рис. 1.18 найти сопротивления эквивалентных треугольников: 1) для звезды с общей точкой лучей  $b$ ; 2) для звезды с общей точкой лучей  $a$ .

1.28. Определить токи  $I_1$  и  $I_2$  в схеме рис. 1.28, предварительно преобразовав источник с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $2 \text{ Ом}$  в источник тока.

1.29. Найти токи  $I_1$  и  $I_2$  в схеме рис. 1.28, предварительно преобразовав источник с током  $J$  и внутренним сопротивлением  $3 \text{ Ом}$  в источник ЭДС.

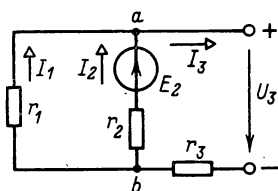


Рис. 1.31

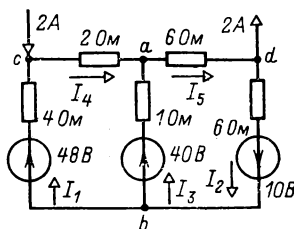


Рис. 1.32

1.30. Определить: 1) мощность, развиваемую источником с ЭДС  $E$  в схеме на рис. 1.28; 2) мощность, развиваемую источником тока, который эквивалентен источнику ЭДС рис. 1.28. Сравнить эти мощности.

1.31. В схеме рис. 1.31 заменить источник с напряжением  $U_3$  идеальным источником ЭДС  $E_3$ . Преобразовать источники  $E_2$ ,  $r_2$  и  $E_3$ ,  $r_3$  в эквивалентные источники тока.

1) Найти токи в ветвях заданной (не преобразованной) схемы.

2) Составить баланс мощности: а) до преобразования схемы; б) после преобразования.

Дано:  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $E_2 = 100 \text{ В}$ ;  $U_3 = 20 \text{ В}$ .

1.32. Заменить двумя источниками ЭДС узловой ток 2 А в схеме на рис. 1.32. Найти токи в заданной схеме.

1.33. Для схемы рис. 1.32 составить баланс мощностей: 1) до преобразования узлового тока; 2) после преобразования.

## 1.2. Переходные и установившиеся процессы в простейших цепях

1.34(Р). Определить ток  $i_L$  в индуктивности и напряжение  $u_L$  на индуктивности в схеме рис. 1.34 после размыкания ключа. Построить зависимости  $i_L(t)$  и  $u_L(t)$ .

Дано:  $J = 0,1 \text{ А}$ ;  $R = 30 \text{ Ом}$ ;  $r = 20 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Решение. При выбранных на рис. 1.34 положительных направлениях токов в ветвях составим уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$\left. \begin{aligned} J &= i_R + i_L; \\ R i_R - L di_L/dt - r i_L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключив ток  $i_R$ , получим дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left( \frac{L}{r + R} \right) \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{R}{r + R} J. \quad (2)$$

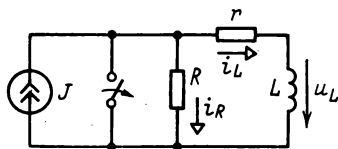


Рис. 1.34

Решение для тока запишем в виде суммы:

$$i_L(t) = i_L = i_y + i_{св}; \quad (3)$$

здесь  $i_y = RJ/(r + R) = 0,06 \text{ А}$  — составляющая тока, соответствующая установившемуся режиму ( $t \rightarrow \infty$ ). В этом режиме  $di_L/dt = 0$ , т. е. напряжение на индуктивности  $u_L = L di_L/dt = 0$ .



Поэтому установившийся ток  $i_y$  найден в схеме рис. 1.34Р, а (без индуктивности). Свободная составляющая тока  $i_{св}$  представляет собой решение соответствующего уравнению (2) однородного уравнения:

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}. \quad (4)$$

В решении (4) постоянная времени цепи  $\tau = L/r_{вх} = L/(R + r) = 0,002$  с;  $r_{вх}$  — входное сопротивление заданной схемы рис. 1.34Р, б относительно выводов индуктивности.

Постоянная интегрирования  $A$  определяется из условия неизменности тока в индуктивности в момент коммутации

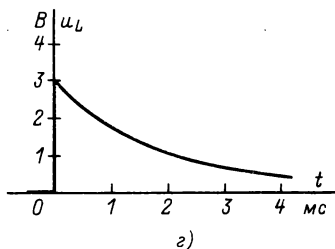
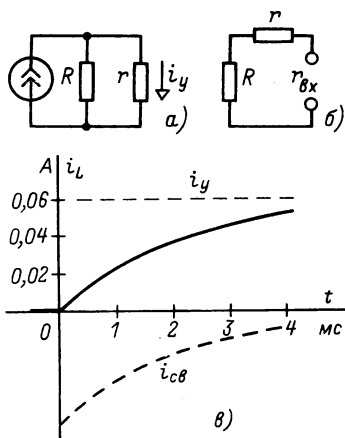


Рис. 1.34Р

$t = 0$ , т. е. условия  $i_L(0+) = i_L(0-)$ , где  $i_L(0-)$  — ток в индуктивности непосредственно перед размыканием ключа. Ток  $i_L(0-) = 0$ , так как до коммутации весь ток источника проходил через ветвь с ключом. Подставим это значение в решение (3) для тока  $i_L$  при  $t = 0$ :

$$0 = RJ/(R + r) + A,$$

откуда  $A = -RJ/(R + r)$ .

Следовательно, ток

$$i_L(t) = \frac{R}{R + r} J (1 - e^{-t/\tau}) = 0,06(1 - e^{-500t}) \text{ A}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{1}{\tau} \frac{R}{r + R} J e^{-t/\tau} = 3e^{-500t} \text{ В}.$$

Зависимости  $i_L(t)$  и  $u_L(t)$  приведены на рис. 1.34Р, в и г.

**1.35.** Для схемы рис. 1.35 определить время  $t$ , в течение которого ток  $i$  достигнет значения, равного половине установившегося. Для рассчитанного момента времени определить напряжение на индуктивности.

Дано:  $E = 12$  В;  $r = 10$  Ом;  $L = 20$  мГн.

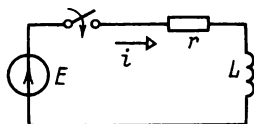


Рис. 1.35

**1.36.** Определить ток  $i_L$  после замыкания ключа в цепи рис. 1.36 при  $r_1 = r_2 = r_3 = 10$  Ом;  $L = 1$  Гн;  $E = 60$  В.

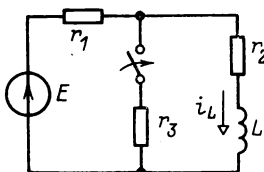


Рис. 1.36

**1.37.** В схеме рис. 1.37 определить ток в индуктивности  $i_L$  и напряжение  $u_L$  после замыкания ключа.

Дано:  $J = 2$  А;  $r = 4$  Ом;  $L = 0,1$  Гн.

**1.38.** Для цепи рис. 1.38, в которой  $r_1 = r_2 = 5$  Ом;  $r_3 = r_4 = 2,5$  Ом;  $L = 10$  мГн;  $E = 30$  В, размыкается ключ.

Определить ток в индуктивности и напряжение на ней после коммутации.

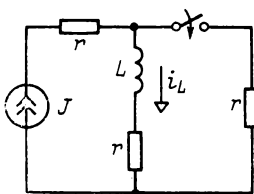


Рис. 1.37

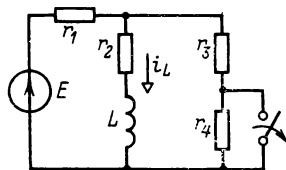


Рис. 1.38

**1.39(P).** Определить напряжение и ток конденсатора в цепи рис. 1.39 после замыкания ключа.

Дано  $E = 2$  В;  $R = 10$  Ом;  $r = 40$  Ом;  $C = 10^{-6}$  Ф.

Решение. Уравнения Кирхгофа для заданной цепи после коммутации следующие:

$$i = i_r + i_C; \quad Ri + u_C = E.$$

С учетом соотношений  $i_r = u_C/r$  и  $i_C = Cdu_C/dt$  получим дифференциальное уравнение для напряжения

$$\left( \frac{Rr}{R+r} \right) C \frac{du_C}{dt} + u_C = E \frac{r}{r+R}. \quad (1)$$

Напряжение на конденсаторе  $u_C$  запишем в виде суммы:

$$u_C = u_y + u_{св} = E \frac{r}{r+R} + Ae^{-t/\tau}; \quad (2)$$

здесь  $u_y$  — составляющая, соответствующая установившемуся режиму ( $t = \infty$ ). В этом режиме  $Cdu_C/dt = 0$  (ток в емкости отсутствует). Поэтому напряжение  $u_y$  найдено из схемы рис. 1.39Р,

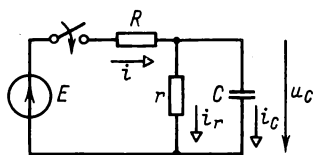


Рис. 1.39

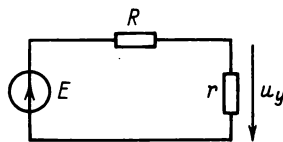


Рис. 1.39Р

на которой ветвь с емкостью отключена. Постоянная времени цепи  $\tau = Cr_{вх}$ , где  $r_{вх}$  — входное сопротивление заданной цепи относительно выводов конденсатора:  $r_{вх} = Rr/(R+r) = 8$  Ом и  $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$  с = 8 мкс.

Напряжение на конденсаторе не изменяется скачком в момент коммутации  $u_C(0+) = u_C(0-)$ . До коммутации  $u_C(0-) = 0$  (конденсатор не был заряжен). Поэтому для момента времени  $t = 0$  согласно (2) получим:

$$0 = Er/(r+R) + A,$$

откуда  $A = -Er/(r+R)$ .

Следовательно, напряжение

$$u_C(t) = E \frac{r}{R+r} (1 - e^{-t/\tau}) = 1,6(1 - e^{-125\,000t}) \text{ В.}$$

Ток

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{1}{\tau} E \frac{r}{r+R} e^{-t/\tau} = \frac{E}{r} e^{-t/\tau} = 0,2e^{-125\,000t} \text{ А.}$$

**1.40.** Цепь рис. 1.40, где  $r = 10$  Ом;  $C = 100$  мкФ, подключается к источнику с постоянным напряжением  $U = 10$  В.

Найти напряжение на конденсаторе и ток; построить их зависимости от времени. Определить напряжение на конденсаторе и ток через 10 мс после замыкания ключа.

1.41. При переводе ключа в положение 1 (рис. 1.41) конденсатор  $C$  заряжается через резистор с сопротивлением  $r = 12$  Ом от источника с постоянной ЭДС  $E = 12$  В. Затем ключ переводится в положение 2 и конденсатор разряжается через такой же резистор.

Найти наибольшие значения тока при зарядке и при разрядке конденсатора.

1.42. Определить напряжение  $u_C$  на конденсаторе  $C$  и ток  $i_C$  в цепи рис. 1.42 после замыкания ключа. Дано:  $r_1 =$

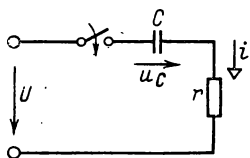


Рис. 1.40

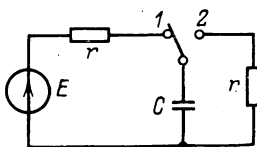


Рис. 1.41

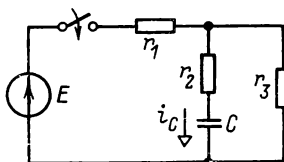


Рис. 1.42

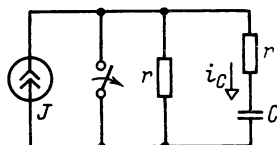


Рис. 1.43

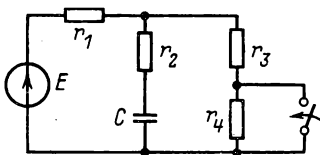


Рис. 1.44

$= 5$  Ом;  $r_2 = r_3 = 10$  Ом;  $C = 100$  мкФ;  $E = 15$  В. Построить зависимости  $u_C(t)$  и  $i_C(t)$ .

1.43. Для цепи рис. 1.43 определить напряжение  $u_C$  и ток  $i_C$  после размыкания ключа.

Дано:  $J = 20$  мА;  $r = 100$  кОм;  $C = 2000$  пФ.

**1.44.** В цепи рис. 1.44 определить ток и напряжение на конденсаторе после замыкания ключа.

Дано:  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 10 \text{ Ом}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $E = 60 \text{ В}$ .

### 1.3. Применение уравнений Кирхгофа

**1.45(P).** Определить токи в ветвях схемы рис. 1.45, применяя матричную запись уравнений Кирхгофа.

Дано:  $E_1 = 3 \text{ В}$ ;  $E_2 = 2 \text{ В}$ ;  $E_3 = 2 \text{ В}$ ;  $E_5 = 1 \text{ В}$ ;  $J_3 = 1 \text{ А}$ ;  $J_4 = 0,5 \text{ А}$ ;  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 6 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 8 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 10 \text{ Ом}$ .

Решение. Граф схемы, в которой каждая обобщенная ветвь (см. рис. 1.Б,б) представлена отрезком линии, изображен на рис. 1.45Р.

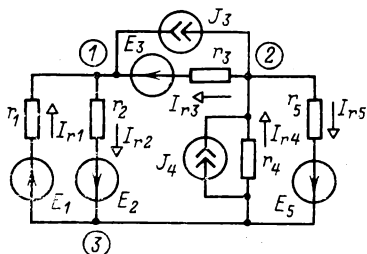


Рис. 1.45

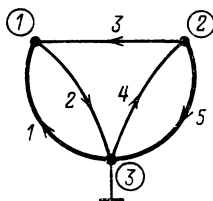


Рис. 1.45Р

Выберем дерево графа — ветви 1 и 5 и запишем топологические матрицы **A** и **B** графа. Матрицу соединений **A** составим определенной, приняв  $\varphi_3 = 0$ . Для составления матрицы главных контуров **B** образуем эти контуры, каждый из которых состоит из ветвей дерева и одной ветви связи. За направление обхода контура принимаем направление ветви связи, входящей в его состав.

Матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбцовые матрицы параметров источников и диагональная матрица сопротивлений ветвей:

$$\mathbf{E}^{(b)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{J}^{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0,5 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$\mathbf{R}^{(b)} = \text{diag} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы в соответствии с (1.26) и (1.27), получаем:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -0,5 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & r_3 & 0 & -r_5 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & r_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

В развернутом виде:

$$-I_{r1} + I_{r2} - I_{r3} = 1,0;$$

$$I_{r3} - I_{r4} + I_{r5} = -1,0 + 0,5;$$

$$r_1 I_{r1} + r_2 I_{r2} = 3 + 2;$$

$$-r_1 I_{r1} + r_3 I_{r3} - r_5 I_{r5} = -3 + 2 - 1;$$

$$r_4 I_{r4} + r_5 I_{r5} = 1.$$

После подстановки численных значений решение этих уравнений дает следующие токи:  $I_{r1} = 0,2$  А;  $I_{r2} = 0,7$  А;  $I_{r3} = -0,5$  А;  $I_{r4} = 0,1$  А;  $I_{r5} = 0,1$  А.

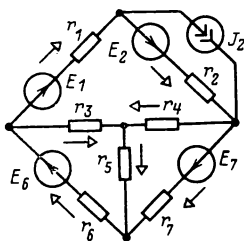


Рис. 1.46

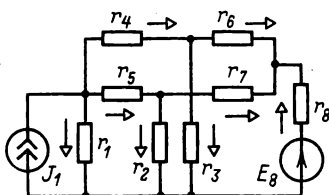


Рис. 1.47

**1.46.** Составить уравнения Кирхгофа для схемы рис. 1.46, где стрелками показаны положительные направления токов, применяя топологические матрицы.

Дано:  $r_1 = 12 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 5 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 4 \text{ Ом}$ ;  
 $r_5 = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 1 \text{ Ом}$ ;  $r_7 = 24 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 4 \text{ В}$ ;  $E_2 = 1 \text{ В}$ ;  
 $E_6 = 5 \text{ В}$ ;  $E_7 = 2 \text{ В}$ ;  $J_2 = 0,7 \text{ А}$ .

Определить токи.

1.47. Для схемы рис. 1.47, где стрелками показаны положительные направления токов, записать уравнения Кирхгофа в матричной форме и определить токи.

Дано:  $J_1 = 1,2 \text{ А}$ ;  $E_8 = 1 \text{ В}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  
 $r_3 = 8 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 7,5 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 8 \text{ Ом}$ ;  $r_7 = 4 \text{ Ом}$ ;  
 $r_8 = 2 \text{ Ом}$ .

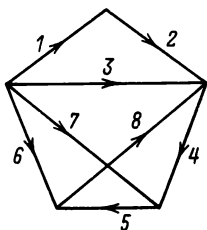


Рис. 1.49

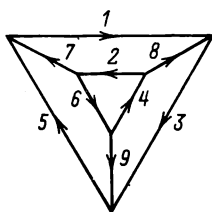


Рис. 1.50

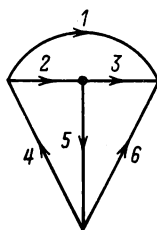


Рис. 1.52

1.48. По заданной узловой матрице  $A$  составить граф электрической цепи и для него записать матрицу главных контуров  $B$ , выбрав в качестве ветвей дерева ветви 2-3-5-6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где столбцы соответствуют узлам 1 — 4, а строки — ветвям 1 — 8.

1.49. На рис. 1.49 изображен граф электрической схемы.

Составить матрицу главных сечений при ветвях дерева 1-2-4-6.

1.50. Для графа на рис. 1.50 составить матрицу главных контуров при ветвях дерева 4-6-7-8-9.

1.51. На примере графов рис. 1.49 и 1.50 проиллюстрировать матричные соотношения (1.23) — (1.25), (1.34).

1.52. Для графа, изображенного на рис. 1.52, составить матрицы  $A$ ,  $B$  при дереве 4-5-6 и проверить выполнение соотношений (1.29).

**1.53.** На рис. 1.53 приведен граф электрической схемы.

1) При указанной нумерации ветвей записать матрицу  $A$ , выбрав за базисный узел 5.

2) Выбрать дерево графа, состоящее из ветвей 2-5-6-7, и изменить нумерацию ветвей таким образом, чтобы можно было представить матрицу сечений разделенной на две подматрицы:  $Q = \|1F\|$ ; составить матрицу  $Q$ .

3) Составить матрицу  $B$ .

4) Проверить выполнение соотношений (1.29) и (1.30).

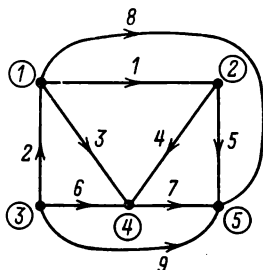


Рис. 1.53

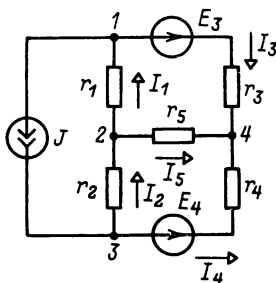


Рис. 1.54

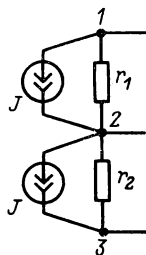


Рис. 1.54Р

**1.54(Р).** Для схемы рис. 1.54 составить уравнения Кирхгофа в матричной форме, приняв за базисный узел 4.

**Решение.** Схема имеет особенность в виде ветви, содержащей только идеальный источник тока  $J$ . Для устранения особенности заменим источник тока двумя источниками тока  $J$  (рис. 1.54Р), при этом уравнения Кирхгофа для токов в узлах 1, 2, 3 не изменятся. Запишем уравнения Кирхгофа (1.26) и (1.27) для полученной схемы, выбрав в качестве ветвей дерева ветви 3-4-5:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} J \\ J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & r_3 & 0 & -r_5 \\ 0 & r_2 & 0 & -r_4 & r_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \\ E_4 \\ 0 \end{vmatrix}.$$



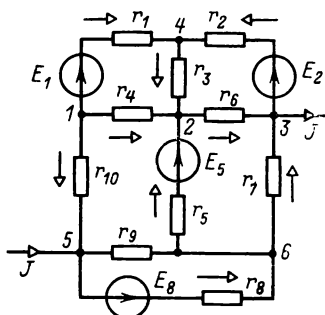


Рис. 1.55

**1.55.** Составить уравнения Кирхгофа в матричной форме для схемы, изображенной на рис. 1.55. На схеме стрелками показаны выбранные положительные направления токов.

Дано:  $r_1 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r_7 = 16 \text{ Ом}$ ;  $r_8 = 80 \text{ Ом}$ ;  $r_9 = 75 \text{ Ом}$ ;  $r_{10} = 20 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 2,5 \text{ В}$ ;  $E_2 = 6 \text{ В}$ ;  $E_5 = 2,5 \text{ В}$ ;  $E_8 = 0,5 \text{ В}$ ;  $J = 0,4 \text{ А}$ .

Определить токи.

**1.56(P).** Для цепи рис. 1.56 составить уравнения Кирхгофа с применением топологических матриц, приняв  $\varphi_4 = 0$ .

**Решение.** Схема имеет особенность в виде ветви, содержащей только идеальный источник ЭДС. Для ее устранения перенесем ЭДС через узел 1 и получим схему (рис. 1.56P), в которой на один узел меньше, чем в исходной. Составим матрицы **A** и **B** и запишем уравнения Кирхгофа (1.26) и (1.27):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & r_4 & 0 \\ r_1 & 0 & -r_3 & 0 & r_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

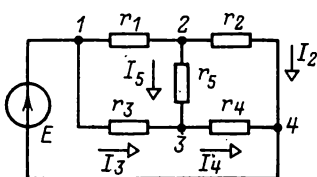


Рис. 1.56

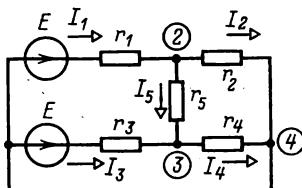


Рис. 1.56P

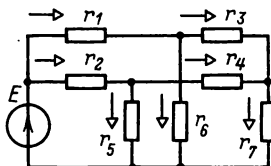


Рис. 1.57

**1.57.** Составить уравнения Кирхгофа в матричной форме для схемы рис. 1.57, на которой положительные направления токов показаны стрелками.

Дано:  $E = 7,5$  В;  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 5$  Ом;  $r_3 = 10$  Ом;  $r_4 = 2$  Ом;  $r_5 = 10$  Ом;  $r_6 = 2$  Ом;  $r_7 = 1$  Ом.

Определить токи.

#### 1.4. Применение узловых уравнений и уравнений с напряжениями ветвей дерева

**1.58(Р).** В цепи рис. 1.58 определить токи во всех ветвях, пользуясь методом узловых потенциалов.

Дано:  $E_1 = 4$  В;  $E_3 = 2$  В;  $E_5 = 12$  В;  $J_3 = 2$  А;  $r'_1 = 4$  Ом;  $r''_1 = 4$  Ом;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом;  $r_4 = 8$  Ом;  $r_5 = 1$  Ом. Положительные направления токов указаны на рис. 1.58 стрелками.

Решение. Примем  $\varphi_1 = 0$  и запишем уравнения согласно (1.35) для узлов 2 и 3:

$$(g_1 + g_2 + g_3)\varphi_2 - g_3\varphi_3 = -g_1E_1 - g_3E_3 + J_3;$$

$$-g_3\varphi_2 + (g_3 + g_4 + g_5)\varphi_3 = -J_3 + g_3E_3 + g_5E_5.$$

Подставив значения ЭДС, тока источника и проводимостей, т. е.  $g_1 = 1/(r'_1 + r''_1) = 0,125$  См,  $g_2 = 1/r_2 = 0,5$  См и т. д., получим:

$$1,125\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = -0,5 - 1 + 2;$$

$$-0,5\varphi_2 + 1,625\varphi_3 = -2 + 1 + 12.$$

Решение этих уравнений дает:  $\varphi_2 = 4$  В;  $\varphi_3 = 8$  В.

Токи в ветвях определим по закону Ома для участка цепи (1.14):

$$I_1 = (\varphi_2 + E_1)g_1 = 1 \text{ А}; \quad I_2 = \varphi_2 g_2 = 2 \text{ А}; \quad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_2 - E_3)g_3 = 1 \text{ А};$$

$$I_4 = \varphi_3 g_4 = 1 \text{ А}; \quad I_5 = (-\varphi_3 + E_5)g_5 = 4 \text{ А}.$$

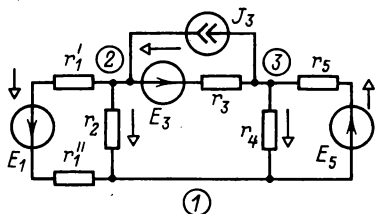


Рис. 1.58

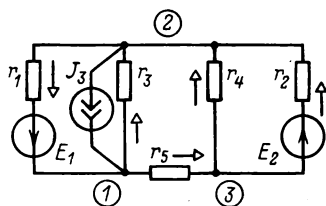


Рис. 1.59

**1.59.** Методом узловых потенциалов определить токи в схеме рис. 1.59.

Дано:  $E_1 = 8$  В;  $E_2 = 2$  В;  $J_3 = 0,5$  А;  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 80$  Ом;  $r_3 = 50$  Ом;  $r_4 = 20$  Ом;  $r_5 = 10$  Ом.

Положительные направления токов показаны на схеме стрелками.

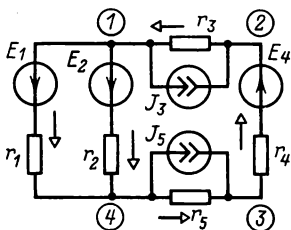


Рис. 1.60

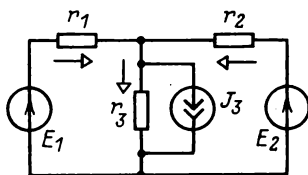


Рис. 1.61

**1.60.** Для схемы рис. 1.60 определить все токи методом узловых потенциалов.

Дано:  $r_1 = r_2 = r_3 = 5$  Ом;  $r_4 = r_5 = 10$  Ом;  $E_1 = 8$  В;  $E_2 = 6$  В;  $E_4 = 4$  В;  $J_3 = 2$  А;  $J_5 = 1$  А.

Положительные направления токов показаны на схеме стрелками.

**1.61.** Определить токи в цепи рис. 1.61 методом узловых потенциалов.

Дано:  $E_1 = 0,4 \text{ В}$ ;  $E_2 = 1,0 \text{ В}$ ;  $J_3 = 0,03 \text{ А}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 20 \text{ Ом}$ .

Положительные направления токов показаны на схеме стрелками.

1.62. Определить ток  $I_4$  в цепи рис. 1.62 методом узловых потенциалов.

Дано:  $E_1 = 25 \text{ В}$ ;  $E_2 = 30 \text{ В}$ ;  $E_3 = 15 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 200 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 150 \text{ Ом}$ .

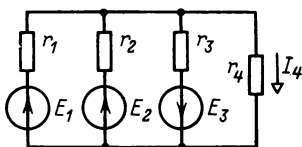


Рис. 1.62

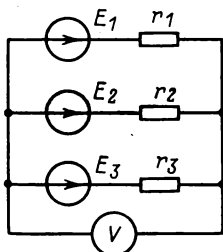


Рис. 1.63

1.63. Для схемы рис. 1.63 определить методом узловых потенциалов показание вольтметра, считая его сопротивление бесконечно большим.

Дано:  $E_1 = 80 \text{ В}$ ;  $E_2 = 30 \text{ В}$ ;  $E_3 = 20 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_3 = 4 \text{ кОм}$ ;  $r_2 = 2 \text{ кОм}$ .

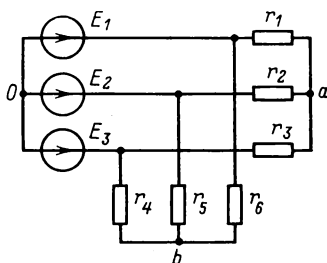


Рис. 1.65

1.64. Определить показание вольтметра рис. 1.63, если его сопротивление конечно и равно  $10 \text{ кОм}$ .

1.65. Определить потенциалы точек  $a$  и  $b$  в схеме рис. 1.65, приняв  $\varphi_0 = 0$ .

Дано:  $E_1 = 220 \text{ В}$ ;  $E_2 = 100 \text{ В}$ ;  $E_3 = 120 \text{ В}$ ;  $r_1 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 200 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 50 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 100 \text{ Ом}$ .

**1.66.** Вычислить показание вольтметра с внутренним сопротивлением 500 Ом, если вольтметр включить между точками  $a$  и  $b$  на схеме рис. 1.65 (плюс вольтметра подключен к точке  $a$ ).

**1.67(P).** Определить токи в схеме рис. 1.67 при помощи узловых уравнений, записанных в матричной форме. Все сопротивления указаны в омах.

Решение. Для графа рис. 1.67 P, у которого выбрана нумерация ветвей, составим матрицу соединений, приняв  $\varphi_4 = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица узловых проводимостей по (1.32) запишется так:

$$\begin{aligned} G^{(y)} &= AG^{(b)}A^T = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & & & & & & \\ & g_2 & & & & & \\ & & g_3 & & & & \\ & & & g_4 & & & \\ & & & & g_5 & & \\ & & & & & g_6 & \\ & & & & & & g_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (g_1 + g_2 + g_7) & -g_1 & -g_2 \\ -g_1 & (g_1 + g_3 + g_4 + g_5) & -g_3 \\ -g_2 & -g_3 & (g_2 + g_3 + g_6) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1,25 & -0,05 & -0,20 \\ -0,05 & 0,45 & -0,10 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Запишем правую часть узловых уравнений (1.31) согласно (1.33):  $J^{(y)} = AJ^{(b)} - AG^{(b)}E^{(b)}$  при  $E^{(b)} = \|E_1 E_2 0 E_4 0 E_6 E_7\|^T$ ;  $J^{(b)} = \|J_1 0 0 0 0 0 0\|^T$ .

После перемножения и суммирования матриц получим:

$$J^{(y)} = \|68 \ 5 \ -35\|^T.$$

Запишем (1.31) в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} 1,25 & -0,05 & -0,20 \\ -0,05 & 0,45 & -0,10 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 \\ 5 \\ -35 \end{vmatrix},$$

откуда определим потенциалы узлов:  $\varphi_1 = 50$  В,  $\varphi_2 = 10$  В,  $\varphi_3 = -30$  В. Токи найдем, например, по закону Ома для обобщенной ветви (1.21):  $I_1 = 12$  А;  $I_2 = 4$  А;  $I_3 = 4$  А;  $I_4 = 4$  А;  $I_5 = 10$  А;  $I_6 = 0$ ;  $I_7 = 2$  А.

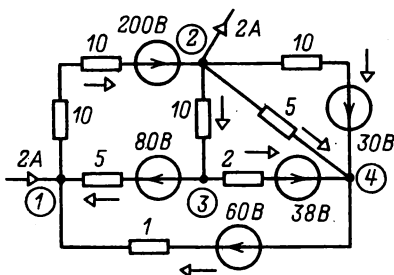


Рис. 1.67

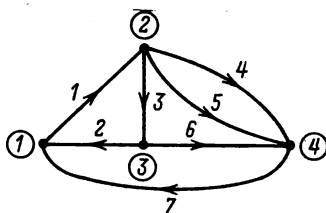


Рис. 1.67Р

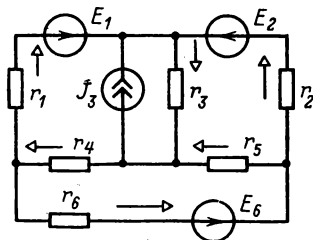


Рис. 1.68

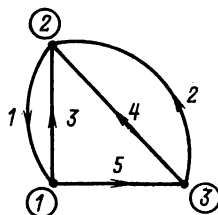


Рис. 1.69Р

**1.68.** Составить узловые уравнения для схемы рис. 1.68 в матричной форме. Определить токи, положительные направления которых указаны стрелками.

Дано:  $E_1 = 6$  В;  $E_2 = 1$  В;  $E_6 = 5$  В;  $J_3 = 0,025$  А;  $r_1 = 80$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $r_3 = 20$  Ом;  $r_4 = 16$  Ом;  $r_5 = 20$  Ом;  $r_6 = 10$  Ом.

**1.69(Р).** Составить узловые уравнения для схемы рис. 1.59, применяя неопределенную матрицу соединений  $A_n$ .

**Решение.** Составим неопределенную матрицу соединений для графа рис. 1.69Р, соответствующего схеме рис. 1.59:

$$A_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Неопределенная матрица узловых проводимостей аналогична (1.32)

$$\begin{aligned} G_n^{(y)} &= A_n G^{(b)} A_n^T = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & & & & \\ & g_2 & & & \\ & & g_3 & & \\ & & & g_4 & \\ & & & & g_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (g_1 + g_3 + g_5) & (-g_1 - g_3) & -g_5 \\ (-g_1 - g_3) & (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) & (-g_2 - g_4) \\ -g_5 & (-g_2 - g_4) & (g_2 + g_4 + g_5) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица  $G_n^{(y)}$  дает возможность произвести контроль правильности составляемых уравнений, так как суммы проводимостей как по строкам, так и по столбцам равны нулю.

Для получения определенной матрицы проводимостей нужно вычеркнуть из  $G_n^{(y)}$  одну (любую) строку и один (любой) столбец. Вычеркнем, например, третий столбец, что соответствует схеме, в которой принято  $\varphi_3 = 0$ , и третью строку, т. е. уравнения составим для узлов 1 и 2. Узловые уравнения для этих узлов:

$$\begin{vmatrix} (g_1 + g_3 + g_5) & (-g_1 - g_3) \\ (-g_1 - g_3) & (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_3 + E_1 g_1 \\ -J_3 - E_1 g_1 \end{vmatrix}.$$

Можно, например, вместо уравнения для узла 2 записать уравнение для базисного узла 3:

$$\begin{vmatrix} (g_1 + g_3 + g_5) & (-g_1 - g_3) \\ -g_5 & (-g_2 - g_4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_3 + E_1 g_1 \\ -E_2 g_2 \end{vmatrix}.$$

Узловой определитель в этом случае содержит 8 слагаемых:

$$\Delta^{(y)} = -(g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_2 g_5 + g_1 g_4 + g_3 g_4 + g_4 g_5 + g_1 g_5 + g_3 g_5),$$

а в случае уравнений для узлов 1 и 2 — 15 слагаемых:

$$\Delta^{(y)} = g_1^2 + g_1g_3 + g_1g_5 + g_1g_2 + g_2g_3 + g_2g_5 + g_1g_3 + \\ + g_3^2 + g_3g_5 + g_1g_4 + g_3g_4 + g_4g_5 - g_1^2 - 2g_1g_3 - g_3^2.$$

Таким образом, после приведения подобных членов определители совпадают с точностью до знака и при применении уравнения для узла, потенциал которого принят равным нулю, уменьшается число слагаемых в узловом определителе.

**1.70.** Составить неопределенную матрицу узловых проводимостей схемы рис. 1.60.

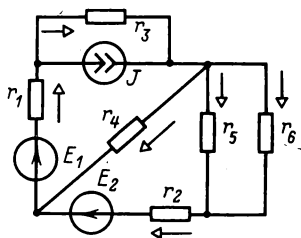


Рис. 1.71

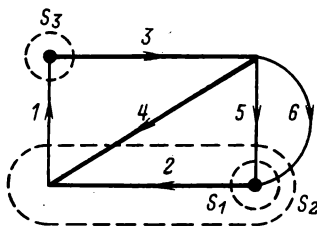


Рис. 1.71P

**1.71(P).** Рассчитать токи в цепи рис. 1.71, приняв в качестве независимых переменных напряжения ветвей дерева.

Дано:  $r_1 = r_3 = 1$  Ом;  $r_2 = r_4 = 0,5$  Ом;  $r_5 = r_6 = 2$  Ом;  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 1$  В;  $J = 8$  А.

Решение. Составим граф схемы рис. 1.71P, выберем дерево (ветви 2-3-4) и сечения ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ). Сначала рассчитаем по (1.36) напряжения ветвей дерева. Запишем матрицы  $Q$ ,  $G^{(n)}$ ,  $J^{(n)}$  и  $E^{(n)}$ :

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad G^{(n)} = \text{diag} \| g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6 \|;$$

$$J^{(n)} = \| 00J000 \|^\tau; \quad E^{(n)} = \| E_1 E_2 0000 \|^\tau.$$

Матрица проводимостей сечений по (1.37):

$$G^c = QG^{(n)}Q^\tau =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & & & & & \\ & g_2 & & & & \\ & & g_3 & & & \\ & & & g_4 & & \\ & & & & g_5 & \\ & & & & & g_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= \begin{vmatrix} (g_2 + g_5 + g_6) & -(g_5 + g_6) & 0 \\ -(g_5 + g_6) & (g_1 + g_4 + g_5 + g_6) & g_1 \\ 0 & g_1 & (g_1 + g_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Правая часть уравнения (1.36) по (1.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^c &= \mathbf{QJ}^{(b)} - \mathbf{QG}^{(b)}\mathbf{E}^{(b)} = \\ &= \begin{vmatrix} -g_2 E_2 \\ g_1 E_1 \\ g_1 E_1 + J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 \\ 10 \\ 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (1.36) с напряжениями ветвей дерева можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 \\ 10 \\ 2 \end{vmatrix},$$

откуда  $U_2 = -2$  В;  $U_3 = 0$ ;  $U_4 = 2$  В.

Напряжения остальных ветвей можно выразить через найденные напряжения ветвей дерева согласно (1.39):  $U_1 = -2$  В;  $U_5 = U_6 = 4$  В. Токи в ветвях:  $I_1 = g_1(U_1 + E_1) = 8$  А;  $I_2 = g_2(U_2 + E_2) = 4$  А;  $I_3 = g_3 U_3 = 0$ ;  $I_4 = g_4 U_4 = 4$  А;  $I_5 = g_5 U_5 = 2$  А;  $I_6 = g_6 U_6 = 2$  А.

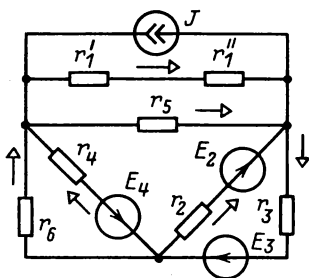


Рис. 1.72

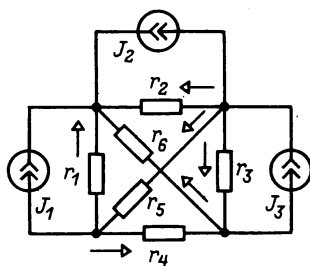


Рис. 1.73

**1.72.** Для заданной схемы рис. 1.72 определить все токи, положительные направления которых показаны стрелками, применив уравнения с напряжениями ветвей дерева.

Дано:  $J = 1$  А;  $E_2 = 10$  В;  $E_3 = 200$  В;  $E_4 = 56$  В;  $r_1' = 20$  Ом;  $r_1'' = 10$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $r_3 = 6$  Ом;  $r_4 = 8$  Ом;  $r_5 = 15$  Ом;  $r_6 = 40$  Ом.

1.73. Определить токи в ветвях цепи рис. 1.73, применив уравнения с напряжениями ветвей дерева.

Дано:  $J_1 = 0,05$  А;  $J_2 = 0,25$  А;  $J_3 = 0,25$  А;  $r_1 = 80$  Ом;  $r_2 = 80$  Ом;  $r_3 = 30$  Ом;  $r_4 = 20$  Ом;  $r_5 = 20$  Ом;  $r_6 = 40$  Ом. Положительные направления токов указаны на схеме стрелками.

## 1.5. Применение контурных уравнений

1.74(Р). В схеме рис. 1.74 определить все токи методом контурных токов.

Дано:  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $r_3 = 40$  Ом;  $r_4 = 80$  Ом;  $r_5 = 20$  Ом;  $r_6 = 20$  Ом;  $E_3 = 16$  В;  $J = 0,3$  А.

Решение. Выберем контуры для получения независимых уравнений таким образом, чтобы в каждом была по крайней мере одна новая ветвь (показаны на рис. 1.74 штриховой линией). Контурными будут токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ .

Запишем уравнения для выбранных токов в соответствии с (1.44):

$$(r_1 + r_4 + r_6)I_1 - r_6I_2 - r_4I_3 = r_4J;$$

$$-r_6I_1 + (r_2 + r_5 + r_6)I_2 - r_5I_3 = r_5J;$$

$$-r_4I_1 - r_5I_2 + (r_3 + r_4 + r_5)I_3 = E_3 - (r_4 + r_5)J,$$

откуда при заданных параметрах находим  $I_1 = 0,3$  А;  $I_2 = 0,2$  А;  $I_3 = 0,1$  А.

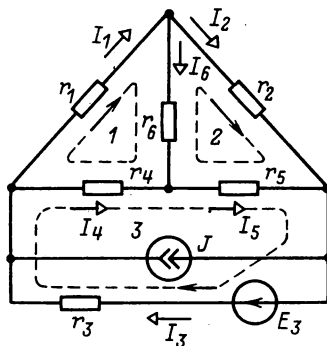


Рис. 1.74

Токи в ветвях:  $I_4 = -I_1 + I_3 + J = 0,1$  А;  $I_5 = -I_2 + I_3 + J = 0,2$  А;  $I_6 = I_1 - I_2 = 0,1$  А.

1.75. Определить токи в схеме рис. 1.75 методом контурных токов.

Дано:  $E = 12$  В;  $J = 2$  А;  $r_1 = 1$  Ом;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 4$  Ом;  $r_4 = 2$  Ом;  $r_5 = 2$  Ом;  $r_6 = 0,5$  Ом. Положительные направления токов указаны на схеме стрелками.

1.76. Методом контурных токов определить токи в ветвях цепи рис. 1.76.

Дано:  $E = 11$  В;  $J = 0,3$  А;  $r_1 = 10$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $r_3 = 5$  Ом;  $r_4 = 40$  Ом;  $r_5 = 10$  Ом. Положительные направления токов указаны на схеме стрелками.

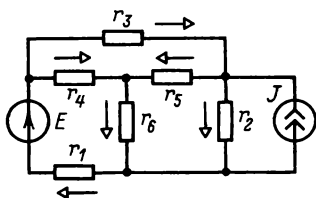


Рис. 1.75

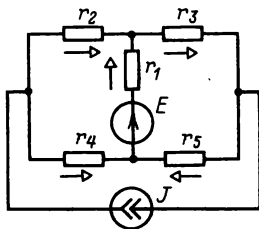


Рис. 1.76

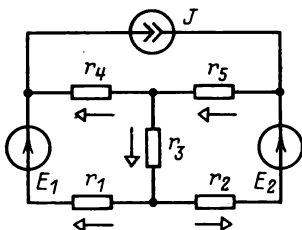


Рис. 1.77

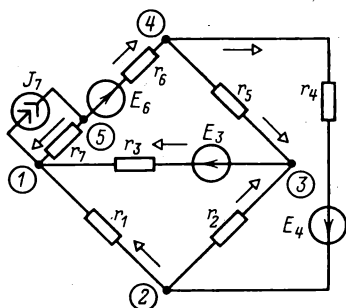


Рис. 1.78

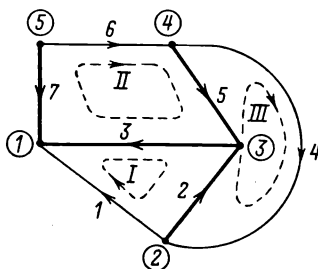


Рис. 1.78P

1.77. Для схемы рис. 1.77 определить токи, применив контурные уравнения.

Дано:  $E_1 = 3$  В;  $E_2 = 12$  В;  $J = 0,2$  А;  $r_1 = 30$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $r_3 = 20$  Ом;  $r_4 = 40$  Ом;  $r_5 = 5$  Ом. Положительные направления токов указаны на схеме стрелками.

1.78(Р). Определить токи цепи рис. 1.78 методом контурных уравнений, записанных в матричной форме.

Дано:  $r_1 = 30$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $r_3 = 20$  Ом;  $r_4 = 40$  Ом;  $r_5 = 60$  Ом;  $r_6 = 40$  Ом;  $r_7 = 10$  Ом;  $E_3 = 3$  В;  $E_4 = 4$  В;  $E_6 = 18$  В;  $J_7 = 0,4$  А.

Решение. Для графа схемы рис. 1.78Р выбираем дерево (ветви 2-5-3-7). Образует главные контуры, присоединив к ветвям дерева по одной ветви связи. Составим матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}^{(n)}$ ,  $\mathbf{E}^{(n)}$ ,  $\mathbf{J}^{(n)}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{R}^{(n)} = \text{diag} \| r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 \|;$$

$$\mathbf{E}^{(n)} = \| 0 0 E_3 E_4 0 E_6 0 \|^T;$$

$$\mathbf{J}^{(n)} = \| 0 0 0 0 0 0 J_7 \|^T.$$

Матрица контурных сопротивлений по (1.42)

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{B}^T =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (r_1 + r_2 + r_3) & -r_3 & -r_2 \\ -r_3 & (r_3 + r_5 + r_6 + r_7) & -r_5 \\ -r_2 & -r_5 & (r_2 + r_4 + r_5) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 70 & -20 & -20 \\ -20 & 130 & -60 \\ -20 & -60 & 120 \end{vmatrix}.$$

Для контурных уравнений (1.41) определим правую часть:

$$\mathbf{E}^{(k)} = \begin{vmatrix} -E_3 \\ E_6 + E_3 + J_7 r_7 \\ E_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 18 + 3 + 4 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Токи в обобщенных ветвях схемы найдем из (1.40):  
 $\mathbf{I}^{(a)} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}^{(k)}$ , т. е.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_6 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ -I_1 + I_4 \\ -I_1 + I_6 \\ I_4 \\ I_6 - I_4 \\ I_6 \\ -I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,1 \\ 0,3 \\ -0,3 \end{pmatrix}.$$

Токи в сопротивлениях совпадают с токами в обобщенных ветвях для всех ветвей, кроме седьмой, в которой имеется источник тока, поэтому  $I_{r7} = I_7 + J_7 = 0,1$  А.

**1.79.** Составить контурные уравнения для схемы рис. 1.74 в матричной форме, выбрав ветви 4-5-6 в качестве ветвей дерева. Записать в общем виде выражение для токов в ветвях схемы через контурные токи.

**1.80.** Для схемы рис. 1.75 записать контурные уравнения в матричной форме, выбрав в качестве ветвей дерева ветви 2-3-5.

**1.81.** Составить контурные уравнения для цепи рис. 1.77 в матричной форме, выбрав в качестве ветвей связи ветви 1 и 2.

## 1.6. Метод наложения. Свойство взаимности

**1.82(Р).** Для цепи рис. 1.82 заданы параметры:  $E_1 = 25$  В;  $J_2 = 125$  мА;  $r_1 = 100$  Ом;  $r_n = 500$  Ом;  $r_2 = 2$  кОм.

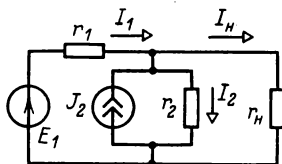


Рис. 1.82

Определить токи во всех ветвях, применив метод наложения. Рассчитать мощность сопротивления нагрузки  $r_n$ .

**Решение.** При расчете цепи с применением метода наложения рассматриваем отдельно действие источника ЭДС  $E_1$  и источника тока  $J_2$ . Эквивалентные схемы для частичных токов изображены на рис. 1.82Р.

При действии источника ЭДС  $E_1$  токи в ветвях схемы рис. 1.82Р,а равны:  $I'_2 = 0,01$  А;  $I'_1 = 0,05$  А;  $I'_H = 0,04$  А. При действии источника тока  $J_2$  токи в ветвях схемы рис. 1.82Р,б равны:  $I''_2 = 0,005$  А;  $I''_1 = -0,10$  А;  $I''_H = 0,02$  А.

Искомые токи:  $I_1 = I'_1 + I''_1 = -0,05$  А = -50 мА;  $I_2 = I'_2 + I''_2 = 0,015$  А = 15 мА;  $I_H = I'_H + I''_H = 0,06$  А = 60 мА.

Мощность сопротивления нагрузки  $P_H = r_H I_H^2 = 1,8$  Вт.

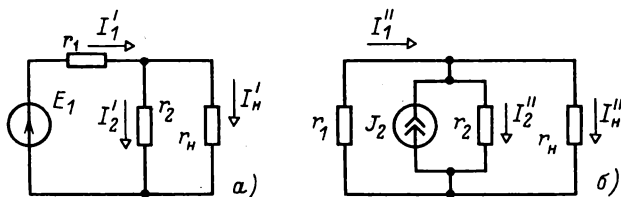


Рис. 1.82Р

**1.83.** Для схемы рис. 1.83 определить все токи, применив метод наложения.

**1.84.** Для схемы рис. 1.84 с параметрами  $E_1 = 2$  В;  $E_3 = 3$  В;  $E_4 = 9$  В;  $r_1 = 6$  Ом;  $r_2 = 6$  Ом;  $r_3 = 3$  Ом;  $r_4 = 6$  Ом;  $r_5 = 3$  Ом;  $r_6 = 2$  Ом. Определить ток  $I_5$ , применив метод наложения и свойство взаимности.

**У к а з а н и е.** При решении учесть, что взаимные проводимости  $g_{51} = g_{15}$ ;  $g_{53} = g_{35}$ ;  $g_{54} = g_{45}$ ; проводимости  $g_{15}$ ,  $g_{35}$  и  $g_{45}$  рекомендуется рассчитывать, включив источник ЭДС в пятую ветвь и исключив остальные источники ЭДС.

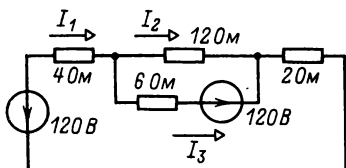


Рис. 1.83

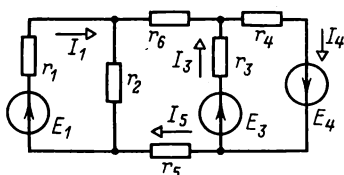


Рис. 1.84

**1.85.** В цепи рис. 1.85 были выполнены два опыта: 1) при действии только источника ЭДС  $E_1 = 40$  В ток амперметра оказался равным 4 А; 2) при действии только источника тока  $J_2 = 5$  А ток амперметра оказался равным -1 А.

Определить показание прибора при одновременном действии источника ЭДС  $E_1 = 20$  В и источника тока  $J_2 = 6$  А.

1.86. Определить ток  $I$  в схеме рис. 1.86, применив метод наложения.

1.87. В схеме рис. 1.87 определить ток  $I$ , применив метод наложения.

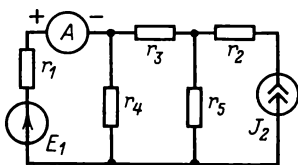


Рис. 1.85

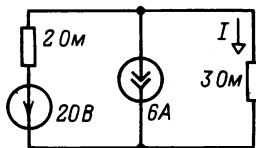


Рис. 1.86

1.88. В схеме рис. 1.87 определить напряжение  $U$  между выводами источника тока, применив метод наложения.

1.89. Проверить выполнение свойства взаимности между первой и пятой ветвями схемы рис. 1.89.

Дано:  $r_1 = 5$  Ом;  $r_2 = 8$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом;  $r_4 = 3$  Ом;  $r_5 = 6$  Ом.

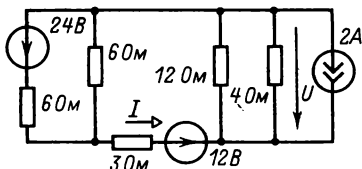


Рис. 1.87

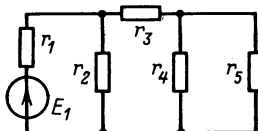


Рис. 1.89

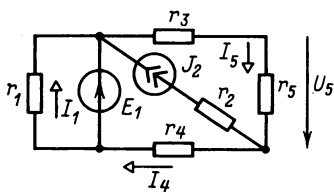


Рис. 1.90

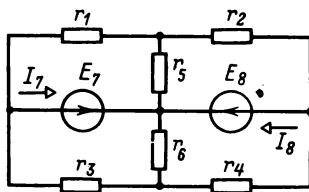


Рис. 1.91

1.90. Для цепи рис. 1.90 с параметрами  $r_1 = 40$  Ом;  $r_2 = 10$  Ом;  $r_3 = 50$  Ом;  $r_4 = r_5 = 20$  Ом;  $E_1 = 50$  В;  $J_2 = 2,5$  А вычислить: 1) коэффициенты  $K_{52}^{(i)}$ ,  $K_{31}^{(u)}$ ,  $K_{51}^{(u)}$ ;

2) взаимное сопротивление  $r_{42}$ ; 3) напряжение  $U_5$ , применив метод наложения.

**1.91.** Найти токи  $I_7$  и  $I_8$  в схеме рис. 1.91, применив метод наложения.

Дано:  $r_1 = r_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = r_5 = r_6 = 40 \text{ Ом}$ ;  $E_7 = 54 \text{ В}$ ;  $E_8 = 48 \text{ В}$ .

### 1.7. Линейные соотношения между напряжениями и токами

**1.92(Р).** Для цепи рис. 1.92 известны показания амперметров  $A_1$  и  $A_2$  в двух режимах: 1)  $r = 0$ ;  $I_1 = 5 \text{ А}$ ;  $I_2 = 2 \text{ А}$ ; 2)  $r = r_n$ ;  $I_1 = 4 \text{ А}$ ;  $I_2 = 1 \text{ А}$ .

Определить показание первого амперметра при  $r = \infty$ .

Решение. Для линейной цепи справедливо соотношение вида (1.54)  $I_1 = a + bI_2$ . По данным двух режимов находим коэффициенты  $a$  и  $b$  из уравнений

$$5 = a + b \cdot 2; \quad 4 = a + b \cdot 1,$$

откуда  $a = 3 \text{ А}$ ;  $b = 1$ .

При  $r = \infty$  ток  $I_2 = 0$  и  $I_1 = a + b \cdot 0 = 3 \text{ А}$ .

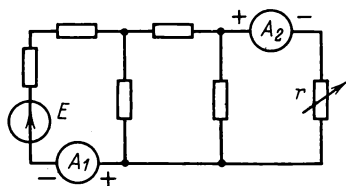


Рис. 1.92

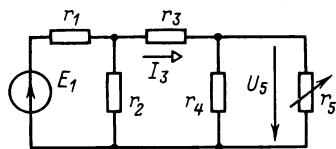


Рис. 1.93

**1.93.** Для схемы рис. 1.93 с параметрами  $r_1 = r_3 = r_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 0 \div \infty$ ;  $E_1 = 20$  составить уравнение линейной связи между напряжением  $U_5$  и током  $I_3$ .

**1.94.** В цепи рис. 1.94 выделены две ветви. При разомкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$  токи  $I_1 = 1 \text{ А}$ ;  $I_2 = 0$ . При замкнутом ключе  $K_1$  и разомкнутом ключе  $K_2$  токи  $I_1 = 2 \text{ А}$ ;  $I_2 = 0,5 \text{ А}$ .

Определить ток  $I_1$  при замкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$ , если в этом режиме  $I_2 = 1 \text{ А}$ .

**1.95.** Составить уравнение линейной зависимости  $I_1 = f(I_4)$  для схемы на рис. 1.95, если  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $r_n = 0 \div \infty$ ,  $J = 1 \text{ А}$ .



**1.96.** Для схемы рис. 1.96 записать уравнение линейной зависимости между напряжениями  $U_{12}$  и  $U_{34}$ .

**1.97(Р).** В цепи рис. 1.97 определить все токи при  $E = 124$  мВ. Сопротивления указаны в омах.

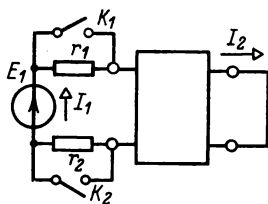


Рис. 1.94

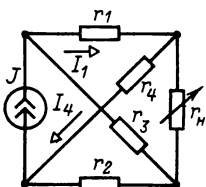


Рис. 1.95

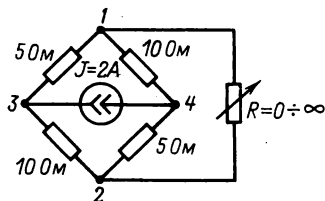


Рис. 1.96

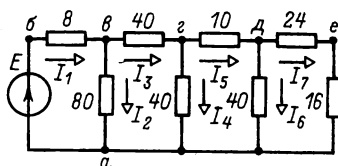


Рис. 1.97

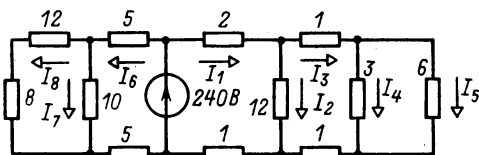


Рис. 1.98

**Решение.** Схема содержит один источник ЭДС. Применим один из простых методов расчета режима такой линейной цепи – метод пропорциональных величин. Выберем точку нулевого потенциала – точку  $a$ , т. е. положим  $\phi_a = 0$ . Найдем значение ЭДС  $E'$ , при действии которой ток  $I_7$  будет равен выбранному значению, например  $I_7 = 1$  А. Для определения  $E'$  нужно вычислить значения других токов при  $I_7 = I_7'$ , что можно сделать в следующем порядке:  $\phi'_a = (24 + 16) I_7' = 40$  В;  $I_6' = 40/40 = 1$  А;  $I_5' = I_7' + I_6' = 2$  А;  $\phi'_2 = \phi'_a + 10 \cdot 2 = 60$  В;  $I_4' = 60/40 = 1,5$  А;  $I_3' = I_5' + I_4' = 3,5$  А;  $\phi'_8 =$

$= \varphi'_2 + 40 \cdot 3,5 = 200 \text{ В}$ ;  $I'_2 = 200/80 = 2,5 \text{ А}$ ;  $I'_1 = I'_3 + I'_2 = 6 \text{ А}$ ;  
 $\varphi'_6 = \varphi'_8 + 8 \cdot 6 = 248 \text{ В}$ .

Эти значения токов получатся при ЭДС  $E' = \varphi'_6 - \varphi'_a = 248 \text{ В}$ . В силу линейности токи при  $E = 0,124 \text{ В}$  отличаются от полученных в  $k = E/E' = 0,5 \cdot 10^{-3}$  раз, т. е., например,  $I_7 = kI'_7 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 0,5 \text{ мА}$ . Аналогично  $I_6 = 0,5 \text{ мА}$  и т. д.

**1.98.** Определить токи в схеме рис. 1.98, применив метод пропорциональных величин. Значения сопротивлений указаны на схеме в омах.

**Указание.** При решении учесть, что у схемы на рис. 1.98 могут быть независимо рассчитаны режимы правой и левой частей (относительно источника ЭДС).

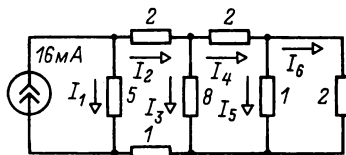


Рис. 1.99

**1.99.** В схеме рис. 1.99 рассчитать все токи методом пропорциональных величин. Значения сопротивлений указаны на схеме в омах.

## 1.8. Преобразования электрических схем

**1.100(Р).** Для цепи рис. 1.100 найти мощность потерь в резисторе с сопротивлением  $r_3 = 3 \text{ Ом}$ .

Дано:  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 5 \text{ Ом}$ ;  $J_1 = 20 \text{ А}$ ;  $J_2 = 20 \text{ А}$ .

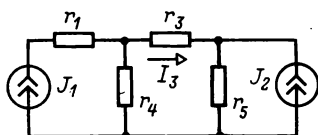


Рис. 1.100

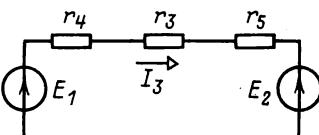


Рис. 1.100Р

**Решение.** Преобразуем источники тока  $J_1$  и  $J_2$  в эквивалентные источники ЭДС (рис. 1.100Р), чтобы уменьшить число узлов расчетной схемы и упростить расчет. Значения

ЭДС эквивалентных источников:  $E_1 = r_4 J_1 = 40$  В;  $E_2 = r_5 J_2 = 100$  В. Ток  $I_3 = (E_1 - E_2)/(r_3 + r_4 + r_5) = -6$  А; мощность  $P_3 = r_3 I_3^2 = 108$  Вт.

**1.101.** На рис. 1.101 изображена электрическая цепь, в которой необходимо определить токи во всех ветвях, выполнив предварительно преобразование источников ЭДС в источники тока.

Дано:  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 12$  Ом;  $r_3 = 5$  Ом;  $r_4 = 5$  Ом;  $r_5 = 10$  Ом;  $E_1 = 16$  В;  $E_2 = 12$  В.

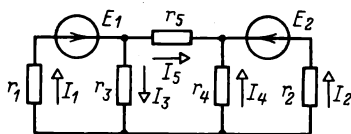


Рис. 1.101

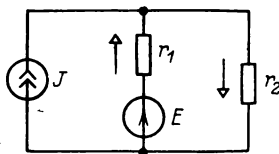


Рис. 1.102

**1.102.** Определить токи и составить баланс мощностей для схемы рис. 1.102 при  $E = 10$  В;  $J = 3$  А;  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 3$  Ом.

**1.103.** Три генератора с ЭДС  $E_1 = 155$  В;  $E_2 = 130$  В;  $E_3 = 95$  В и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 0,5$  Ом;  $r_2 = 0,2$  Ом;  $r_3 = 0,5$  Ом работают параллельно (рис. 1.103). Найти ЭДС, внутреннее сопротивление эквивалентного генератора и мощности, потребляемые в резисторах с сопротивлениями  $r_{H1} = 4$  Ом и  $r_{H2} = 3$  Ом.

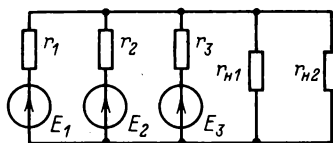


Рис. 1.103

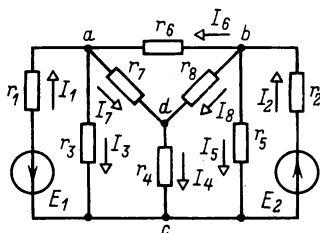


Рис. 1.104

**1.104(Р).** Определить токи в схеме рис. 1.104, положительные направления которых выбраны, при  $r_1 = 5$  Ом;  $r_2 = 9$  Ом;  $r_3 = 300$  Ом;  $r_4 = 20$  Ом;  $r_5 = 60$  Ом;  $r_6 = 30$  Ом;  $r_7 = 20$  Ом;  $r_8 = 20$  Ом;  $E_1 = 15$  В;  $E_2 = 105$  В.

**Решение.** Для сокращения числа совместно решаемых уравнений звезду сопротивлений  $r_7 - r_8 - r_4$  заменим экви-

валентным треугольником (рис. 1.104Р, а):

$$r_{78} = r_7 + r_8 + r_7 r_8 / r_4 = 60 \text{ Ом}; \quad r_{47} = r_4 + r_7 + r_4 r_7 / r_8 = 60 \text{ Ом};$$

$$r_{48} = r_4 + r_8 + r_4 r_8 / r_7 = 60 \text{ Ом}.$$

В полученной схеме заменим параллельно соединенные сопротивления эквивалентными (рис. 1.104Р, б):

$$r_{\text{эк1}} = r_3 r_{47} / (r_3 + r_{47}); \quad r_{\text{эк2}} = r_5 r_{48} / (r_5 + r_{48}); \quad r_{\text{эк3}} = r_6 r_{78} / (r_6 + r_{78}).$$

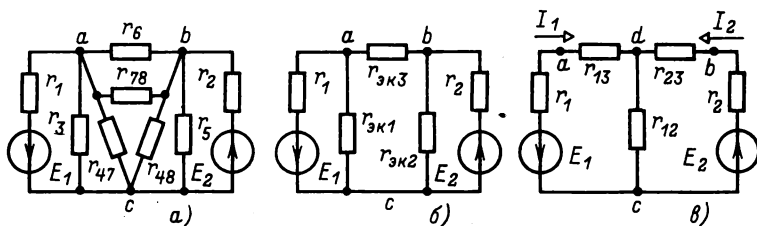


Рис. 1.104Р

Наконец, треугольник эквивалентных сопротивлений  $r_{\text{эк1}} - r_{\text{эк2}} - r_{\text{эк3}}$  заменим эквивалентной звездой (рис. 1.104Р, в):

$$r_{12} = r_{\text{эк1}} r_{\text{эк2}} / (r_{\text{эк1}} + r_{\text{эк2}} + r_{\text{эк3}}) = 15 \text{ Ом}; \quad r_{13} = r_{\text{эк1}} r_{\text{эк3}} / (r_{\text{эк1}} + r_{\text{эк2}} + r_{\text{эк3}}) = 10 \text{ Ом}; \quad r_{23} = r_{\text{эк2}} r_{\text{эк3}} / (r_{\text{эк1}} + r_{\text{эк2}} + r_{\text{эк3}}) = 6 \text{ Ом}.$$

Полученная схема содержит два узла, и токи в ней легко определяются методом узловых потенциалов. Отметим, что при выполненных эквивалентных преобразованиях потенциалы узлов  $a, b, c$  не изменяются, т. е. токи  $I_1$  и  $I_2$  участков, не затронутых преобразованиями, также не изменились.

Напряжение между узлами  $d$  и  $c$

$$U_{dc} = \frac{-E_1 / (r_1 + r_{13}) + E_2 / (r_2 + r_{23})}{1 / (r_1 + r_{13}) + 1 / r_{12} + 1 / (r_2 + r_{23})} = 30 \text{ В}$$

и токи по (1.14)

$$I_1 = (U_{cd} - E_1) / (r_1 + r_{13}) = -3 \text{ А}; \quad I_2 = (U_{cd} + E_2) / (r_2 + r_{23}) = 5 \text{ А}.$$

Выбрав, например,  $\varphi_c = 0$ , найдем потенциалы узлов:

$$\varphi_a = -E_1 - r_1 I_1 = 0; \quad \varphi_b = E_2 - r_2 I_2 = 60 \text{ В}.$$

В заданной схеме (рис. 1.104) токи

$$I_3 = (\varphi_a - \varphi_c) / r_3 = 0; \quad I_5 = (\varphi_b - \varphi_c) / r_5 = 1 \text{ А}; \quad I_6 = (\varphi_b - \varphi_a) / r_6 = 2 \text{ А}.$$

Остальные токи определим по первому закону Кирхгофа:

$$I_7 = I_1 + I_6 - I_3 = -1 \text{ A}; I_8 = I_2 - I_5 - I_6 = 2 \text{ A}.$$

**1.105.** В схеме рис. 1.105 найти ток  $I_3$ .

Дано:  $E_1 = 16 \text{ В}$ ;  $E_2 = 8 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 3 \text{ Ом}$ .

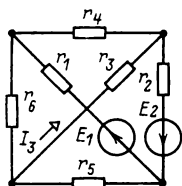


Рис. 1.105

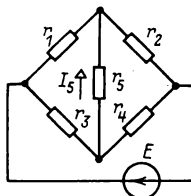


Рис. 1.106

**1.106.** Определить ток  $I_5$  в диагонали четырехплечевого моста (рис. 1.106).

Дано:  $r_1 = 120 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 180 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 120 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 80 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 80 \text{ Ом}$ ;  $E = 30 \text{ В}$ .

## 1.9. Эквивалентные источники (активные двухполюсники)

**1.107(Р).** В цепи рис. 1.107 определить ток  $I_6$ , применив теорему об эквивалентном источнике (активном двухполюснике).

Дано:  $r_1 = 45 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 15 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 36 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 18 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 3 \text{ Ом}$ ;  $r_7 = 5 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 225 \text{ В}$ ;  $E_4 = 180 \text{ В}$ .

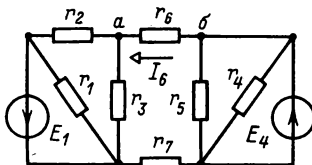


Рис. 1.107

**Решение.** Разомкнем ветвь с резистором  $r_6$  (рис. 1.107Р, а) и найдем напряжение  $U_x$  между точками  $b$  и  $a$ . Для этого в схеме рис. 1.107Р, а определим токи

$$I_{1p} = E_1 / (r_2 + r_3) = 5 \text{ А}; I_{2p} = E_4 / r_5 = 10 \text{ А}$$

и напряжение

$$U_x = r_3 I_{1p} + r_5 I_{2p} = 225 \text{ В}.$$

Входное сопротивление, измеренное между точками  $a$  и  $b$  при отключенном резисторе с сопротивлением  $r_6$  (рис. 1.107Р, б),

$$r_{\text{вх}} = r_7 + r_2 r_3 / (r_2 + r_3) = 15 \text{ Ом.}$$

По (1.55) ток

$$I_6 = U_x / (r_{\text{вх}} + r_6) = 15 \text{ А.}$$

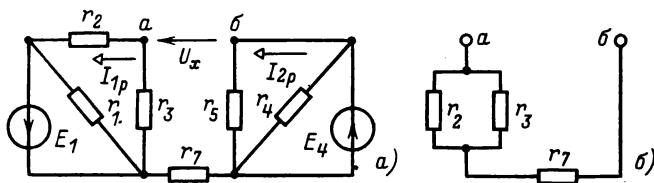


Рис. 1.107Р

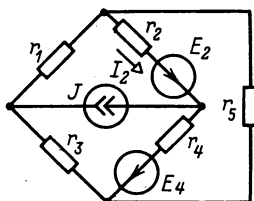


Рис. 1.108

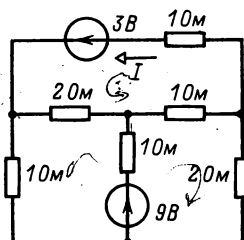


Рис. 1.109

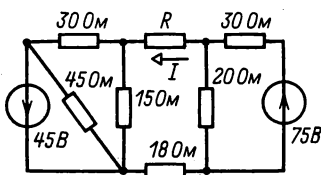


Рис. 1.110

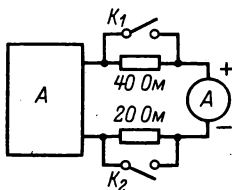


Рис. 1.111

**1.108.** Определить методом эквивалентного источника ток в сопротивлении  $r_2$  (рис. 1.108).

Дано:  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 6 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 8 \text{ Ом}$ ;  $E_2 = 22 \text{ В}$ ;  $E_4 = 13 \text{ В}$ ;  $J = 3 \text{ А}$ .

**1.109.** В схеме на рис. 1.109 определить ток  $I$ , применив теорему об эквивалентном источнике.

**1.110.** Применив теорему об эквивалентном источнике, определить ток в сопротивлении  $R = 10 \text{ Ом}$  схемы рис. 1.110.

**1.111.** В цепи рис. 1.111 при разомкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$  амперметр показывает 1,2 А. При разомкнутом втором ключе и замкнутом первом амперметр показывает 3 А.

Найти показание амперметра для режима, при котором первый ключ разомкнут, а второй замкнут.

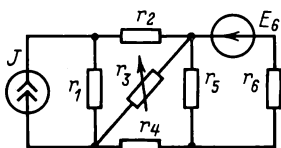


Рис. 1.112

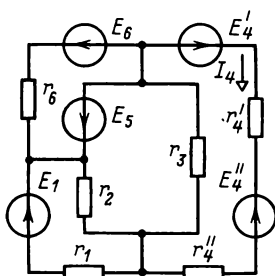


Рис. 1.113 →

**1.112.** Применив теорему об эквивалентном источнике и условие передачи максимальной мощности, определить сопротивление резистора  $r_3$  (рис. 1.112), при котором в нем выделяется максимальная мощность, и вычислить значение этой мощности.

Дано:  $r_1 = 5$  кОм;  $r_2 = 3$  кОм;  $r_4 = 2$  кОм;  $r_5 = 20$  кОм;  $r_6 = 4$  кОм;  $E_6 = 40$  В;  $J = 10$  мА.

**1.113.** В схеме рис. 1.113 найти ток  $I_4$ , применив теорему об эквивалентном источнике.

Дано:  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 3$  Ом;  $r_3 = 1$  Ом;  $r_4' = r_4'' = 2$  Ом;  $r_6 = 4$  Ом;  $E_1 = 4$  В;  $E_4' = 10$  В;  $E_4'' = 2$  В;  $E_5 = 10$  В;  $E_6 = 6$  В.

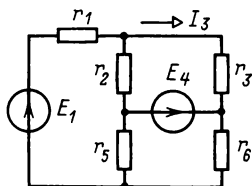


Рис. 1.114

**1.114.** Определить ток  $I_3$  в схеме рис. 1.114 при действии источников ЭДС  $E_1 = 110$  В и  $E_4 = 200$  В.

Дано:  $r_1 = 1$  Ом;  $r_2 = 10$  Ом;  $r_3 = 5$  Ом;  $r_5 = 5$  Ом;  $r_6 = 10$  Ом.

## 1.10. Топологические методы расчета передаточных функций

1.115. Вычислить узловой определитель схемы, граф которой показан на рис. 1.115, применив разложение определителя по узлу.

Дано:  $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = 0,5$  См.

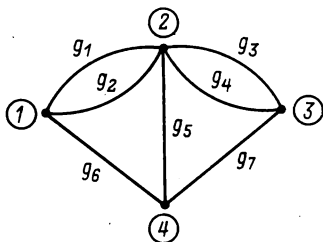


Рис. 1.115

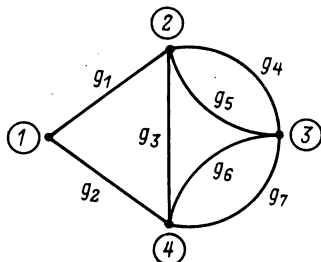


Рис. 1.116

1.116. Вычислить узловой определитель схемы, граф которой приведен на рис. 1.116, применив разложение определителя по ветви.

Дано:  $g_1 = g_2 = g_3 = 2$  См;  $g_4 = g_5 = 1$  См;  $g_6 = g_7 = 0,5$  См.

1.117. Для схем, графы которых приведены на рис. 1.115 и 1.116, вычислить узловые определители разложением их по путям между двумя узлами.

1.118(Р). Топологическим методом вычислить передаточную проводимость  $g_{41}$  для схемы рис. 1.118.

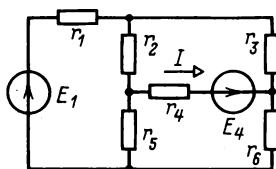


Рис. 1.118

Дано:  $g_1 = 1$  См;  $g_2 = 0,1$  См;  $g_3 = 0,2$  См;  $g_4 = 0,5$  См;  $g_5 = 0,2$  См;  $g_6 = 0,1$  См.

Решение. По топологической формуле (1.59) взаимная проводимость  $g_{41} = \sum_k \Pi'_k \Delta'_k / \Delta$ .

Для графа рис. 1.118Р,а существует два пути передачи через источник и измерительный прибор в направлении,



указанном стрелкой. Значение первого пути:  $\Pi'_1 = g_1 g_2 g_4 g_6$ ; минор  $\Delta'_1 = 1$ , так как при коротком замыкании первого пути граф вырождается в узел. Аналогично найдем  $\Pi'_2 = -g_1 g_3 g_4 g_5$ ;  $\Delta'_2 = 1$ . Узловой определитель  $\Delta$  схемы рис. 1.118Р,б найдем

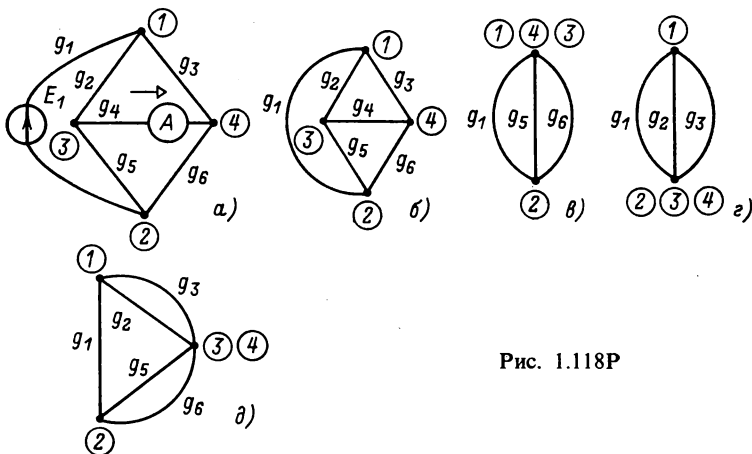


Рис. 1.118Р

разложением по путям (1.61) между узлами 3–4, между которыми есть пять путей передачи. Определим значения путей и их миноры:

$$\Pi_1 = g_2 g_3; \Delta_1 = g_1 + g_5 + g_6; \Pi_2 = g_5 g_6; \Delta_2 = g_1 + g_2 + g_3;$$

$$\Pi_3 = g_2 g_1 g_6; \Delta_3 = 1; \Pi_4 = g_5 g_1 g_3; \Delta_4 = 1; \Pi_5 = g_4;$$

$$\Delta_5 = g_1 (g_2 + g_3 + g_5 + g_6) + (g_2 + g_3)(g_5 + g_6).$$

Графы, полученные при замыкании путей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_5$ , изображены на рис. 1.118Р,в–д. Минор  $\Delta_5$  может быть найден разложением по путям между узлами 1–2.

Подставляя все значения, получаем:

$$g_{41} = (0,005 - 0,02)/0,447 = -0,0336 \text{ См.}$$

**1.119Р.** Для схемы рис. 1.118 топологическим методом определить ток  $I$ : 1) при действии только источника ЭДС  $E_1$ ; 2) при действии источников ЭДС  $E_1 = 140 \text{ В}$  и  $E_4 = 200 \text{ В}$ .

Решение. 1) Ток при действии источника ЭДС  $E_1$   $I' = g_{41} E_1 = -0,0336 \cdot 140 = -4,7 \text{ А}$  (значение  $g_{41}$  найдено в решении задачи 1.118).

2) Ток  $I$  при действии двух источников ЭДС определим методом наложения:  $I = g_{41} E_1 + g_{44} E_4$ .

Найдем  $g_{44}$  по топологической формуле (1.59) для схемы рис. 1.119P:

$$g_{44} = \frac{g_4 g_3 g_2 (g_1 + g_5 + g_6) + g_4 g_5 g_6 (g_1 + g_2 + g_3) + g_4 g_3 g_1 g_5 + g_4 g_6 g_1 g_2}{\Delta} = 0,114 \text{ См};$$

здесь узловой определитель  $\Delta = 0,447 \text{ См}^3$  тот же, что и в задаче 1.118.

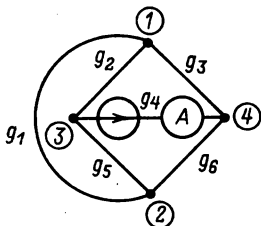


Рис. 1.119P

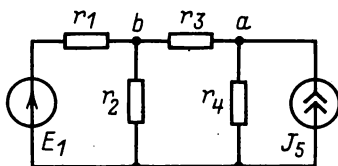


Рис. 1.120

Подставив численные значения, получим  $I = 18,1 \text{ А}$ .

**1.120.** Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме рис. 1.120 топологическим методом по формуле Мэзона.

Дано:  $E_1 = 4 \text{ В}$ ;  $J_5 = 0,4 \text{ А}$ ;  $r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 25 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 40 \text{ Ом}$ .

**1.121.** Для цепи рис. 1.121, применяя формулу Мэзона, определить коэффициент передачи тока  $K_{33}^{(i)}$ , коэффициент передачи напряжения  $K_{61}^{(u)}$  и напряжение  $U_6$ .

Дано:  $r_1 = 0,05 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 0,2 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 0,2 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 0,1 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 0,1 \text{ Ом}$ ;  $r_6 = 0,2 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 0,2 \text{ В}$ ;  $J_3 = 0,5 \text{ А}$ .

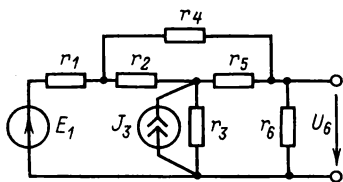


Рис. 1.121

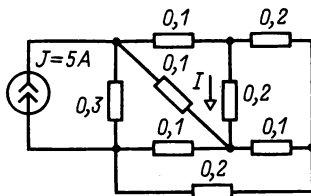


Рис. 1.122

**1.122.** Определить ток  $I$  в схеме рис. 1.122 топологическим методом по формуле Мэзона. На схеме указаны значения проводимостей в сименсах.

**1.123(P).** Определить входное сопротивление схемы рис. 1.123 относительно узлов 1 и 2 по формуле Мэзона. Дано:  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = r_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $r_5 = 10 \text{ Ом}$ .

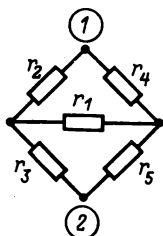


Рис. 1.123

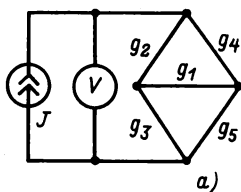
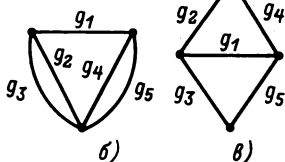


Рис. 1.123Р



**Решение.** Для определения входного сопротивления источник тока  $J$  и измерительный прибор включим, как показано на рис. 1.123Р, а. По формуле Мэзона (1.59):  $r_{\text{вх}} = \sum_k \Pi'_k \Delta'_k / \Delta$ . Через источник и измерительный прибор имеется единственный путь с передачей  $\Pi'_1 = 1$ . Минор этого пути определим из графа рис. 1.123Р, б):

$$\Delta'_1 = g_1(g_2 + g_3) + g_1(g_5 + g_4) + (g_2 + g_3)(g_5 + g_4) = 0,69 \text{ См}^2.$$

Узловой определитель схемы находим из графа рис. 1.123Р, в):

$$\Delta = g_2 g_3 (g_1 + g_5 + g_4) + g_2 g_1 g_5 + g_4 g_1 g_3 + g_5 g_4 (g_2 + g_1 + g_3) = 0,102 \text{ См}^3.$$

Входное сопротивление  $r_{\text{вх}} = 6,76 \text{ Ом}$ .

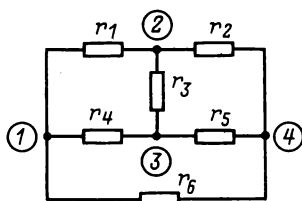
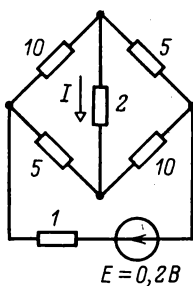


Рис. 1.124

Рис. 1.125 →



**1.124.** Рассчитать входное сопротивление схемы рис. 1.124 относительно узлов 2—4, применив топологическую формулу (Мэзона) для расчета передаточных функций, если  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 1 \text{ Ом}$ .

1.125. Определить по формуле Мэсона ток  $I$  в диагонали моста (рис. 1.125). Сопротивления указаны в омах.

### 1.11. Применение сигнальных графов

1.126(P). Определить передачу сигнального графа рис. 1.126 между истоком  $x_4$  и стоком  $x_1$  методом последовательного преобразования.

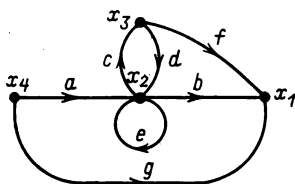


Рис. 1.126

Решение. Исключим петлю с передачей  $e$  в узле  $x_2$ , при этом передача всех остальных входящих в узел  $x_2$  ветвей умножается на  $1/(1-e)$ . Полученный граф приведен на рис. 1.126P, а.

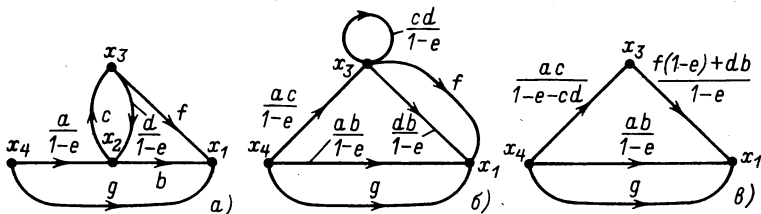


Рис. 1.126P

Исключим узел  $x_2$ . При устранении узла  $x_2$  образуется петля с передачей  $cd/(1-e)$  в узле  $x_3$  (рис. 1.126P, б). После исключения этой петли получается граф рис. 1.126P, в, состоящий из последовательно и параллельно соединенных ветвей. Его передача равна сумме передач всех ветвей из узла 4 в узел 1:

$$\frac{x_1}{x_4} = g + \frac{ab}{1-e} + \frac{ac}{1-e-cd} \frac{f(1-e)+db}{1-e}.$$

1.127. Для сигнального графа рис. 1.127 определить  $x_1$  при заданном  $x_0$ , применив преобразование графа.

**1.128.** Определить передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_3$  графа рис. 1.128 методом последовательного преобразования.

**1.129.** Определить передачи от истока  $x_0$  к узлам  $x_2$  и  $x_3$  графа рис. 1.128, применив формулу Мэзона.

**1.130.** Составить систему уравнений, которой соответствует граф, приведенный на рис. 1.128.

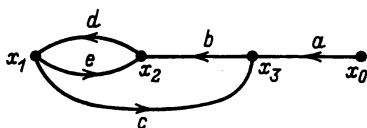


Рис. 1.127

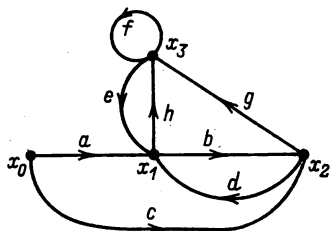


Рис. 1.128 →

**1.131(Р).** При помощи сигнальных графов решить систему уравнений:

$$2x_1 + 3x_2 = 0; \quad -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \quad x_1 + x_3 - x_0 = 0,$$

где  $x_0 = 10$ .

**Решение.** Приведем систему уравнений к причинно-следственной форме:

$$x_1 = -1,5x_2; \quad x_2 = 0,75x_1 - 0,5x_3; \quad x_3 = -x_1 + x_0.$$

По полученной системе уравнений строим граф (рис. 1.131Р).

Передачу  $H_{10} = x_1/x_0$  сигнального графа определим по формуле Мэзона (1.65):

$$H_{10} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{\Delta} = \frac{\sum_k \Pi'_k \Delta'_k}{1 - \sum_k L_k + \sum_k L_{k_1} L_{k_2} - \dots}$$

У построенного графа можно выделить только два контура с передачами:  $L_1 = -1,5 \cdot 0,75 = -1,125$ ;  $L_2 = (-1)(-0,5) \times (-1,5) = -0,75$ . При этих значениях  $\Delta = 2,875$ . Из истока  $x_0$  в узел  $x_1$  имеется один путь с произведением передач ветвей  $\Pi'_1 = 1(-0,5)(-1,5) = 0,75$ , и минор этого пути  $\Delta'_1 = 1$ . Таким образом,

$$x_1 = x_0 H_{10} = 10 \cdot 0,75 / 2,875 = 2,61.$$

Аналогично получим  $x_2 = -1,74$ .

При определении  $H_{30} = x_3/x_0$  учтем, что существует один путь между истоком  $x_0$  и узлом  $x_3$  с передачей  $\Pi_1 = 1$  и есть один контур  $L_1$ , не соприкасающийся с этим путем, т. е.  $\Delta'_1 = 1 - L_1$ . Следовательно,

$$H_{30} = 1(1 - L_1)/\Delta = 1 \cdot 2,125/2,875 = 0,73 \text{ и } x_3 = 7,3.$$

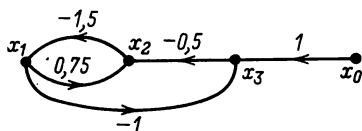


Рис. 1.131P

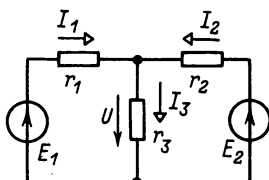


Рис. 1.133

**1.132.** Применив сигнальный граф, решить систему уравнений:

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0;$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0;$$

$$-5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,$$

при  $x_4 = 29$ .

**1.133.** Построить сигнальный граф по уравнениям Кирхгофа для схемы, приведенной на рис. 1.133.

**1.134(P).** Определить напряжение  $U_6$  в схеме рис. 1.134 при помощи сигнального графа узловых уравнений.

Дано:  $g_1 = 2$  См;  $g_2 = 5$  См;  $g_3 = 5$  См;  $g_4 = 10$  См;  $g_5 = 10$  См;  $g_6 = 5$  См;  $E_1 = 0,2$  В;  $J_3 = 0,5$  А.

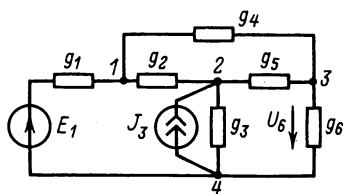


Рис. 1.134

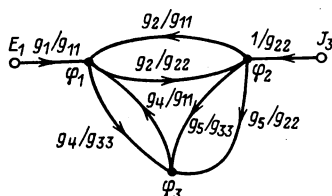


Рис. 1.134P

**Решение.** Примем  $\varphi_4 = 0$ , тогда  $U_6 = \varphi_3$ . Построим сигнальный граф узловых уравнений (1.64), который имеет узлы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и истоки  $E_1$  и  $J_3$  (рис. 1.134P), где  $g_{11} =$

$$= g_1 + g_2 + g_4 = 17 \text{ См}; g_{22} = g_2 + g_5 + g_3 = 20 \text{ См}; g_{33} = g_5 + g_4 + g_6 = 25 \text{ См}.$$

Искомый потенциал

$$\varphi_3 = H_{3E}E_1 + H_{3J}J_3,$$

где передачи графа равны:

$$H_{3E} = \frac{1}{\Delta} \frac{g_1}{g_{11}} \left[ \frac{g_4}{g_{33}} + \frac{g_{22}g_5}{g_{22}g_{33}} \right] = 1,157;$$

$$H_{3J} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{g_{22}} \left[ \frac{g_5}{g_{33}} + \frac{g_{22}g_4}{g_{11}g_{33}} \right] = 0,069 \text{ Ом},$$

так как определитель графа

$$\Delta = 1 - \left( \frac{g_2^2}{g_{11}g_{22}} + \frac{g_5^2}{g_{22}g_{33}} + \frac{g_4^2}{g_{11}g_{33}} + 2 \frac{g_4g_5g_2}{g_{11}g_{22}g_{33}} \right) = 0,734.$$

Следовательно,  $U_6 = \varphi_3 = 0,2 \cdot 1,157 + 0,5 \cdot 0,069 = 0,066 \text{ В}.$

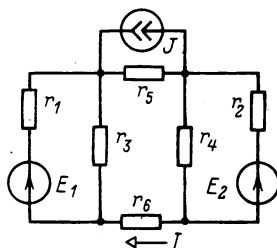


Рис. 1.135

**1.135.** Определить ток  $I$  в схеме рис. 1.135, применив:  
1) сигнальный граф узловых уравнений; 2) сигнальный граф контурных уравнений.

Дано:  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 10 \text{ Ом}; E_1 = 12 \text{ В}; E_2 = 18 \text{ В}; J = 3 \text{ А}.$

## Глава вторая

### ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЭДС И ТОКОВ

#### Введение к гл. 2

Мгновенное значение синусоидального тока

$$i = i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (2.1)$$

где  $I_m$  — амплитуда;  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота;  $f$  — частота;  $\psi$  — начальная фаза.

Действующее значение тока

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (2.2)$$

*Переходные и установившиеся процессы в электрических цепях.* Процессы в цепи, содержащей сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и источники гармонических ЭДС и токов, описываются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями. Решением дифференциального уравнения, полученного, например, для тока, будет функция

$$i = i_y + i_{св}, \quad (2.3)$$

где  $i_y$  — установившаяся составляющая тока, частное решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi); \quad (2.4)$$

$i_{св}$  — свободная составляющая тока, общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Для цепей, содержащих один накопитель энергии ( $L$  или  $C$ ),

$$i_{св} = Ae^{pt}, \quad (2.5)$$

где  $p$  — корень характеристического уравнения.

Постоянная  $A$  определяется независимыми начальными условиями — начальным значением тока в индуктивности или начальным значением напряжения на емкости (см. также гл. 1 и гл. 8). По «законам коммутации» ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться скачкообразно.

Значения  $I_m$  и  $\psi$  определяются при подстановке решения (2.4) в неоднородное дифференциальное уравнение для больших значений  $t$ , при которых  $i_{св} \rightarrow 0$ .



**Изображение синусоидальных величин комплексами.** Например, для тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} [I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi)] = \\ = \operatorname{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \operatorname{Im} [I_m \angle (\omega t + \psi)], \quad (2.6)$$

где  $\operatorname{Im}$  — мнимая часть,  $\dot{I}_m = I_m \angle \psi$  — комплексная амплитуда;  $\dot{I} = I \angle \psi$  — комплексное действующее значение тока.

**Законы электрической цепи в комплексной форме.** Мгновенные значения:

$$u_r = ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = (1/C) \int i dt;$$

комплексные действующие значения:

$$\dot{U} = r\dot{I}; \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = jx_L\dot{I} = \underline{Z}_L\dot{I};$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -jx_C\dot{I} = \underline{Z}_C\dot{I},$$

где  $r$  — активное сопротивление;  $x_L = \omega L$  — индуктивное (реактивное) сопротивление,  $x_C = 1/\omega C$  — емкостное (реактивное) сопротивление.

**Комплексные сопротивления и проводимости.** Пассивный двухполюсник. Для ветви рис. 2.А, а комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = r + jx = r + j(x_L - x_C) = ze^{j\varphi} = z \angle \varphi, \quad (2.7)$$

где  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$  — модуль комплексного сопротивления или полное сопротивление;  $\varphi = \operatorname{arctg}(x/r)$  — угол сдвига фаз между напряжением  $u$  и током  $i$ .

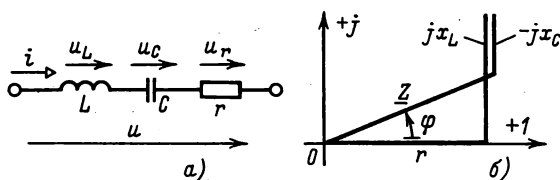


Рис. 2.А

Комплексное сопротивление может быть представлено на комплексной плоскости ( $\pm 1$ ;  $\pm j$ ) — рис. 2.А, б.

Комплексная проводимость

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = g - jb = ye^{-j\varphi} = y \angle -\varphi, \quad (2.8)$$

где  $g$  — активная проводимость;  $b$  — реактивная проводимость;

$y = 1/z = \sqrt{g^2 + b^2}$  — полная проводимость;  $\varphi = \arctg(b/g)$ .

Например, для схемы рис. 2.А, а

$$\underline{Y} = g - jb = y \angle -\varphi = 1/\underline{Z} = 1/[r + j(x_L - x_C)],$$

где  $y = 1/z$ ;  $\tg \varphi = (x_L - x_C)/r$ ;  $g = r/z^2$ ;  $b = (x_L - x_C)/z^2$ .

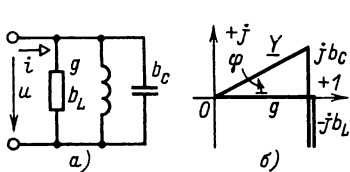


Рис. 2.Б

Для схемы рис. 2.Б, а

$$\underline{Y} = g - jb = 1/r + 1/j\omega L + j\omega C = g - j(b_L - b_C),$$

где  $g = 1/r$ ;  $b_L = 1/\omega L$  — индуктивная и  $b_C = \omega C$  — емкостная (реактивные) проводимости.

На рис. 2.Б, б проводимости изображены на комплексной плоскости.

У пассивного двухполюсника две схемы замещения.

Переход от последовательной схемы замещения (рис. 2.В, а) к параллельной (рис. 2.В, б)

$$\underline{Y} = y \angle -\varphi = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb,$$

т. е.

$$g = r/(r^2 + x^2); \quad b = x/(r^2 + x^2). \quad (2.9)$$

Обратный переход

$$\underline{Z} = z \angle \varphi = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx,$$

т. е.

$$r = g/(g^2 + b^2); \quad x = b/(g^2 + b^2). \quad (2.10)$$

**Мощность.** Мгновенная мощность пассивного двухполюсника (рис. 2.В, а, б)

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi - \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i),$$

где  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ , и определяется параметрами пассивного двухполюсника ( $x$  и  $r$  или  $g$  и  $b$ ).

Средняя за период (активная) мощность, Вт,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (2.11)$$

Полная мощность, В·А,

$$S = UI. \quad (2.12)$$

Реактивная мощность, вар,

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (2.13)$$

Знак угла  $\varphi$  определяет характер реактивной мощности — емкостной ( $Q < 0$ ) или индуктивной ( $Q > 0$ ).

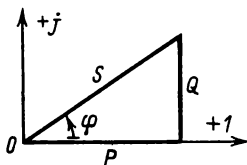


Рис. 2.Г

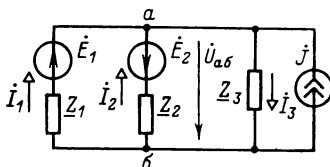


Рис. 2.Д

Комплексная мощность

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi}, \quad (2.14)$$

где  $\dot{I}^*$  — сопряженный комплекс тока  $\dot{I}$ ;

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad (2.15)$$

$\operatorname{tg} \varphi = Q/P$ ,  $\cos \varphi = P/S$  — коэффициент мощности.

Мощность может быть изображена на комплексной плоскости в виде треугольника мощностей (рис. 2.Г).

Баланс мощностей: сумма комплексных мощностей, потребляемых электрической цепью, равна нулю. Например, для схемы рис. 2.Д

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 \dot{I}_1^* - \dot{E}_2 \dot{I}_2^* + \dot{U}_{ab} j^* = & I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + \\ & + I_3^2 \underline{Z}_3 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + j(I_1^2 x_1 + I_2^2 x_2 + I_3^2 x_3). \end{aligned}$$

**Взаимная индуктивность.** Одноименные выводы у индуктивных катушек на рис. 2.Е, а обозначены точками. Магнитные

потоки (а также напряжения) самоиндукции и взаимной индукции складываются, если положительные направления токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  одинаковы относительно одноименных выводов (согласное включение), или вычитаются в противном случае (встречное включение).

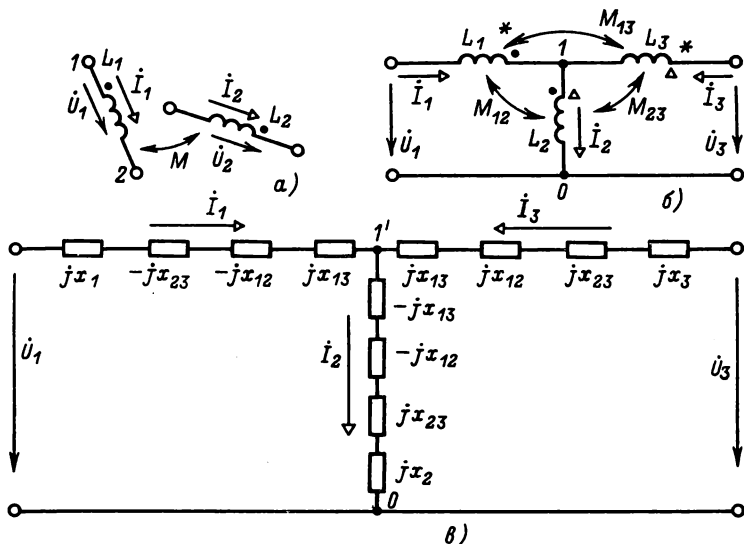


Рис. 2.Е

Напряжение взаимной индукции

$$u_M = \pm M di/dt, \quad (2.16)$$

где  $M$  — взаимная индуктивность.

В комплексной форме

$$\dot{U}_M = \pm j\omega M \dot{I} = \pm jx_M \dot{I} = \pm \underline{Z}_M \dot{I}, \quad (2.17)$$

где  $x_M = x_{12} = \omega M$  — сопротивление взаимной индукции.

На рис. 2.Е, а показано встречное включение, поэтому

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1.$$

Для схемы рис. 2.Е, б

$$\dot{U}_1 = jx_{11} \dot{I}_1 - jx_{12} \dot{I}_2 - jx_{13} \dot{I}_3 + jx_{21} \dot{I}_2 - jx_{12} \dot{I}_1 + jx_{23} \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_3 = jx_{31} \dot{I}_1 - jx_{13} \dot{I}_1 + jx_{23} \dot{I}_2 + jx_{23} \dot{I}_2 + jx_{23} \dot{I}_3 - jx_{12} \dot{I}_1.$$

Коэффициент связи

$$k = M/\sqrt{L_1 L_2}. \quad (2.18)$$

Возможна эквивалентная замена схем со взаимными индуктивностями схемами, не содержащими магнитных связей. В случае трех ветвей, соединенных в общем узле, две из которых имеют индуктивную связь, в эквивалентной схеме добавляются сопротивления  $\mp \underline{Z}_M$  в индуктивно связанные

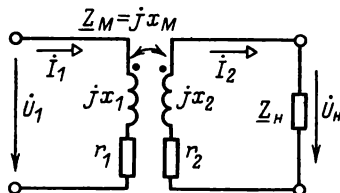


Рис. 2.Ж

ветви и  $\pm \underline{Z}_M$  — в общую ветвь (верхний знак берется для индуктивностей, присоединенных к узлу одноименными выводами и наоборот). Этот прием применяется последовательно к каждой паре индуктивностей до полного устранения всех связей.

Например, для схемы рис. 2.Е,б получим эквивалентную схему рис. 2.Е,в. Потенциал  $\phi'_1$  узла 1' схемы рис. 2.Е,в не равен потенциалу  $\phi_1$  узла 1 схемы рис. 2.Е,б.

Уравнения линейного двухобмоточного трансформатора (рис. 2.Ж)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= I_1 \underline{Z}_1 - I_2 jx_M; \\ 0 &= I_2 \underline{Z}_2 - I_1 jx_M + I_2 \underline{Z}_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где  $\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1$ ;  $\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2$ ;  $\underline{Z}_n = r_n + jx_n$ .

Первичный и вторичный токи трансформатора равны:

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{вн}}}; \quad I_2 = \frac{jx_M I_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_n}, \quad (2.20)$$

где вносимое сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = \frac{x_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_n} = \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} r_{22} - j \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} x_{22};$$

$$r_{22} = r_2 + r_n; \quad x_{22} = x_2 + x_n.$$

Коэффициент трансформации

$$\underline{n} = \dot{U}_1/\dot{U}_2. \quad (2.21)$$

Для идеального трансформатора ( $r_1 = r_2 = 0$ ;  $k = 1$ ;  $w_1 \rightarrow \infty$ ;  $w_2 \rightarrow \infty$ )

$$\dot{U}_1/\dot{U}_2 = w_1/w_2 = n; \quad \dot{I}_1/\dot{I}_2 = 1/n, \quad (2.22)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — числа витков первичной и вторичной обмоток соответственно.

Входное сопротивление идеального трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = n^2 \underline{Z}_n. \quad (2.23)$$

*Резонанс.* Условие резонанса в двухполоснике: реактивная мощность двухполосника равна нулю.

Для двухполосника (рис. 2.В) при последовательном резонансе — резонансе напряжений  $x = 0$  (рис. 2.В, а), при параллельном резонансе — резонансе токов  $b = 0$  (рис. 2.В, б).

Для последовательного контура  $r$ ,  $L$ ,  $C$  (рис. 2.А, а) угловая резонансная частота

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.24)$$

Добротность контура

$$Q = \omega_0 L/r = 1/\omega_0 C r = \sqrt{L/C}/r. \quad (2.25)$$

Резонансная кривая тока

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}, \quad (2.26)$$

где  $I_0 = U/r$  — ток при резонансе.

Полоса пропускания контура ( $\omega_1 - \omega_2$ ) определяется из соотношения

$$\omega_2/\omega_0 - \omega_1/\omega_0 = 1/Q, \quad (2.27)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты, при которых ток в  $\sqrt{2}$  раз меньше резонансного.

Условие передачи максимальной мощности от активного двухполосника к пассивному

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_n^*, \quad (2.28)$$

где  $\underline{Z}_n$  — внутреннее сопротивление пассивного двухполосника;  $\underline{Z}_n^*$  — сопряженное значение внутреннего сопротивления активного двухполосника.

## 2.1. Переходные и установившиеся процессы в простейших цепях

2.1(Р). Для схемы рис. 2.1 найти ток  $i$  после замыкания ( $t = 0$ ) ключа.

Дано:  $r = 1$  Ом;  $R = 2$  Ом;  $L = 0,01$  Гн;  $e = E_m \sin \omega t = 10 \sin 200t$  В.

Решение. На основании законов Кирхгофа составим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -i + i_1 + i_2 &= 0; \\ ri + L \frac{di_1}{dt} &= e; \\ ri + Ri_2 &= e \text{ или } r \frac{di}{dt} + R \frac{di_2}{dt} = \frac{de}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключив из системы уравнений (1) токи  $i_1$ ,  $i_2$  и производные токов  $di_1/dt$ ,  $di_2/dt$ , получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка для тока  $i$ :

$$L \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \frac{di}{dt} + ri = e + \frac{L}{R} \frac{de}{dt}. \quad (2)$$

Запишем его решение по (2.3) – (2.5):

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi) + Ae^{pt}. \quad (3)$$

Определим частное решение  $i_y$  ( $t$  велико и  $i_{св} \rightarrow 0$ ). Для этого подставим решение (3) при  $i_{св} = 0$  в (2):

$$\begin{aligned} L \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \omega I_m \cos(\omega t + \psi) + I_m r \sin(\omega t + \psi) = \\ = E_m \sin \omega t + \frac{\omega L E_m}{R} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) найдем  $I_m$  и  $\psi$ . Для этого разложим косинус и синус суммы двух углов  $\cos(\omega t + \psi)$  и  $\sin(\omega t + \psi)$  и просуммируем коэффициенты при одинаковых функциях ( $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ ):

$$-\omega L \left( 1 + \frac{r}{R} \right) I_m \sin \psi + r I_m \cos \psi = E_m; \quad (5)$$

$$\omega L \left( 1 + \frac{r}{R} \right) I_m \cos \psi + r I_m \sin \psi = \frac{\omega L E_m}{R}. \quad (6)$$

Возведя в квадрат (5) и (6), суммируя и учтя соотно-

шение  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ , получим уравнение для определения амплитуды тока  $I_m$

$$(\omega L)^2 (1 + r/R)^2 I_m^2 + (r I_m)^2 = E_m^2 + (\omega L E_m / R)^2. \quad (7)$$

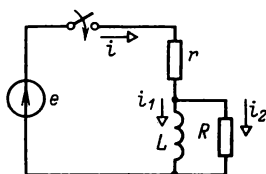
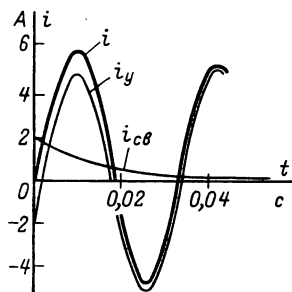


Рис. 2.1

Рис. 2.1P →



Разделив (6) на (5), получим уравнение для начальной фазы ( $\psi$ )

$$\frac{\omega L(1 + r/R) + r \operatorname{tg} \psi}{-\omega L(1 + r/R) \operatorname{tg} \psi + r} = \frac{\omega L}{R}. \quad (8)$$

Из (7) найдем

$$I_m = E_m \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{r^2 R^2 + (\omega L)^2 (r + R)^2}} = 4,47 \text{ A},$$

а из (8)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L R^2}{r R^2 + (\omega L)^2 (r + R)} = -0,5,$$

т. е.  $\psi = -26^\circ 30'$ .

Для определения постоянной  $A$  в решении (3) рассмотрим момент времени  $t = 0$ :

$$i(0) = I_m \sin \psi + A. \quad (9)$$

Начальное значение тока после коммутации  $i(0+)$  определим из системы (1) при  $t = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} -i(0+) + i_1(0+) + i_2(0+) &= 0; \\ ri(0+) + Ri_2(0+) &= e(0+). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ток  $i_1$  в индуктивности не может изменяться скачкообразно, т. е.  $i_1(0+)$  равен току до коммутации  $i_1(0-) = 0$ .



Из системы (10) находим

$$i(0+) = i_2(0+) = e(0+)/(r+R)$$

и из (9)

$$A = -I_m \sin \psi = 2 \text{ A.}$$

Из характеристического уравнения для уравнения (2), т. е.  $pL(1+r/R)+r=0$ , находим корень

$$p = -\frac{rR}{L(r+R)} = -66,6 \text{ c}^{-1}.$$

Общее решение уравнения (2):

$$i = 4,47 \sin(200t - 26^\circ 30') + 2e^{-66,6t} \text{ A.}$$

На рис. 2.1Р представлена кривая тока  $i(t)$ .

2.2. Резистор с сопротивлением  $r_2 = 30 \text{ Ом}$  (рис. 2.2) подключается к источнику с параметрами  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,005 \text{ Гн}$ ;  $e = 200 \sin 600t \text{ В}$  в момент времени  $t_1$ , когда  $e(t_1) = -E_m/2$  и  $de(t_1)/dt > 0$ .

Определить напряжение  $u$  на резисторе.

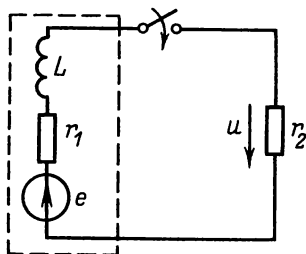


Рис. 2.2

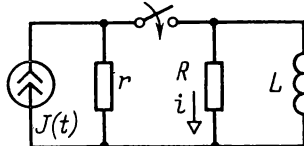


Рис. 2.3

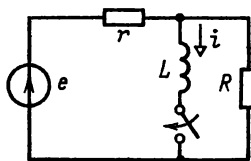


Рис. 2.4

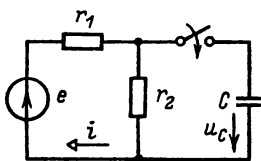


Рис. 2.5

2.3. Источник тока  $J(t) = 20 \sin(314t + 90^\circ) \text{ А}$  с внутренним сопротивлением  $r = 20 \text{ Ом}$  подключается к двухполюснику (рис. 2.3) с параметрами  $R = 20 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,0318 \text{ Гн}$ .

Найти ток  $i$  после замыкания ключа. Построить график изменения тока.

2.4. В схеме рис. 2.4 замыкается ключ.

Дано:  $e = 30 \sin(100t + 45^\circ)$  В;  $r = 30$  Ом;  $R = 10$  Ом;  
 $L = 0,3$  Гн.

Найти закон изменения тока  $i$ .

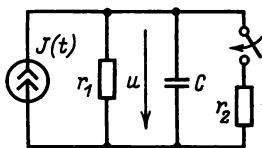


Рис. 2.6

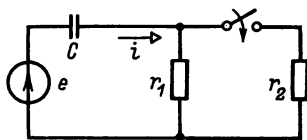


Рис. 2.7

2.5. Незаряженный конденсатор емкостью  $C$  подключается к цепи (рис. 2.5).

Определить  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

Дано:  $e = 36 \cos \omega t$  В;  $\omega = 10^4$  рад/с;  $r_1 = r_2 = 1,8$  кОм;  
 $C = 68$  пФ.

2.6. К цепи, состоящей из параллельно соединенных источника тока  $J(t)$ , резистора  $r_1$  и конденсатора  $C$ , подключается резистор  $r_2$  (рис. 2.6).

Найти узловое напряжение  $u(t)$  при  $J(t) = 10 \cos(\omega t - 33,7^\circ)$  мА;  $\omega = 2500$  рад/с;  $C = 10^{-7}$  Ф;  $r_1 = 6$  кОм;  $r_2 = 3$  кОм.

2.7. Для схемы на рис. 2.7 заданы параметры:  $C = 1$  мкФ;  $r_1 = 1$  кОм;  $r_2 = 0,1$  кОм; ЭДС  $e = 220 \sin \omega t$  В;  $\omega = 10^4$  рад/с.

Найти закон изменения тока  $i$  источника.

## 2.2. Мгновенные значения синусоидальных величин.

Простейшие операции с комплексными числами.

Последовательное и параллельное соединение элементов цепи

2.8. Синусоидальное напряжение  $u(t)$  с амплитудой 100 В и периодом  $T$  изображено на рис. 2.8 при начале отсчета времени в точке 0.

Записать напряжение  $u(t)$  при других началах отсчета времени в точках: 1)  $O_1$ , 2)  $O_2$ ; 3)  $O_3$ ; 4)  $O_4$ ; 5)  $O_5$ .

2.9. На рис. 2.9, а-в показаны кривые мгновенных значений гармонических токов и напряжений.

Записать аналитические выражения мгновенных значений этих токов и напряжений при амплитудах  $I_m = 5\sqrt{2}$  А;  $U_m = 220\sqrt{2}$  В.

**2.10.** При  $t = 0$  мгновенное значение синусоидального напряжения  $u(0) = -100/2$  В, а при  $T/8 = 1/200$  с напряжение  $u(T/8) = U_m = 100$  В.

Записать мгновенное значение напряжения.

**2.11.** Заданы токи:  $i_1 = I_m \sin(314t + 30^\circ)$ ;  $i_2 = I_m \sin(314t + 150^\circ)$ ;  $i_3 = I_m \sin(314t - 120^\circ)$ ;  $i_4 = I_m \sin(314t + 330^\circ)$ .

Построить графики этих токов.

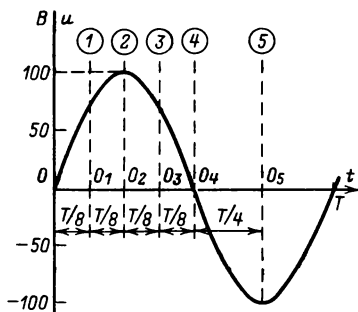


Рис. 2.8

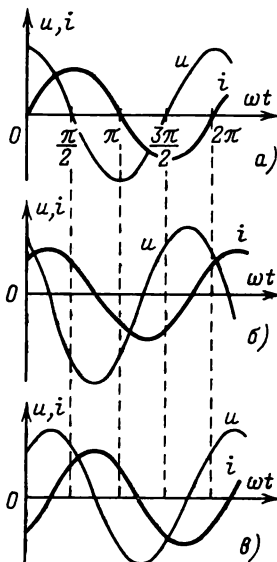


Рис. 2.9 →

**2.12.** На рис. 2.12 построены мгновенные значения тока и напряжения.

Записать их аналитические выражения. Определить сдвиг фаз  $\phi$  между напряжением и током.

**2.13.** Мгновенное значение тока  $i = 10 \sin(314t + \psi)$  при  $t = (7/6) 10^{-2}$  с равно  $-5$  А и  $di/dt < 0$ .

Найти значение  $\psi$ . Определить частоту. Записать комплексную амплитуду и комплексное действующее значение в полярной и алгебраической формах.

**2.14.** Для тока  $i = 10 \sin(314t + \psi)$  А известно при  $t = 0$  мгновенное значение:  $i(0) = 8,66$  А.

1) Найти возможные значения  $\psi$ .

2) Определить, как изменятся значения  $\psi$ , если  $i(0) = -8,66$  А.

3) Записать комплексные действующие значения токов при найденных значениях  $\psi$ .

**2.15.** Записать в полярной и алгебраической формах комплексные амплитуды напряжений и токов, мгновенные значения которых: 1)  $u = 220 \sin(\omega t + 20^\circ)$ ; 2)  $i = 15 \cos(\omega t - 50^\circ)$ ; 3)  $u = -380 \sin(\omega t + 100^\circ)$ ; 4)  $i = 100 \sin(\omega t - 120^\circ)$ .

**2.16.** Разложить на действительную и мнимую составляющие следующие комплексные числа: 1)  $5 \angle 30^\circ$ ; 2)  $10 \angle 70^\circ$ ; 3)  $0,2 \angle 100^\circ$ ; 4)  $0,035 \angle 170^\circ$ ; 5)  $250 \angle 195^\circ$ ; 6)  $30 \angle -112^\circ$ ; 7)  $2 \angle 275^\circ$ ; 8)  $380 \angle -30^\circ$ ; 9)  $0,017 \angle 269^\circ$ ; 10)  $1000 \angle -178^\circ$ ; 11)  $15 \angle 40^\circ$ .

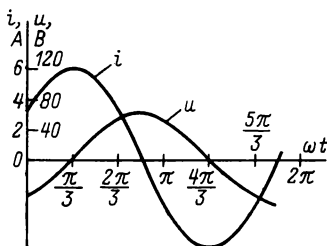


Рис. 2.12

**2.17.** Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел: 1)  $60 + j80$ ; 2)  $80 + j60$ ; 3)  $-300 - j100$ ; 4)  $-20 + j70$ ; 5)  $9 - j0,5$ ; 6)  $-100 - j3$ ; 7)  $-0,003 + j0,0002$ .

**2.18. А.** Представить следующие комплексные числа, которые заданы в алгебраической форме, в полярной форме и наоборот: 1)  $4 + j3$ ; 2)  $5 + j$ ; 3)  $j7$ ; 4)  $3 + j4$ ; 5)  $2 + j7$ ; 6)  $-15$ ; 7)  $4 \angle 30^\circ$ ; 8)  $9 + j21$ ; 9)  $-j4,5$ ; 10)  $1,4 \angle 50^\circ$ ; 11)  $61 + j5$ ; 12)  $-4 + j3$ ; 13)  $1 + j0,5$ ; 14)  $5$ ; 15)  $4 - j3$ ; 16)  $-4 - j3$ ; 17)  $-14 + j8,5$ .

**Б.** Вычислить комплекс  $10^{-5} (76 + j52)(-4,3 + j15)(-4,75 - j7,8)(14 - j3,49)$ , представив его в полярной и алгебраической формах.

**В.** Вычислить комплекс

$$\frac{(4,36 - j5,02)(-j4,37) + 73 \angle -205^\circ}{54 \angle 180^\circ + j0,437(j5,5)(1 \angle 90^\circ + 5,07 - j2,5)},$$

представив его в полярной и алгебраической формах.

**2.19.** В последовательном контуре с индуктивной катушкой ( $L = 20$  мГн;  $r = 50$  Ом) и конденсатором ( $C = 1$  мкФ) задан ток  $i = 0,5 \cos 10^4 t$  А.

Определить мгновенные значения напряжений на катушке и на входе цепи.

**2.20.** Цепь рис. 2.20 подключена к источнику тока  $J(t) = 2 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А с частотой  $f = 200$  Гц. Параметры цепи:  $r = 10$  Ом;  $L = 0,01$  Гн;  $C = 80$  мкФ.

Найти мгновенные значения напряжений на всех участках и мгновенную мощность источника.

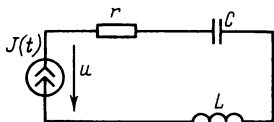


Рис. 2.20

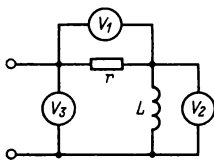


Рис. 2.21

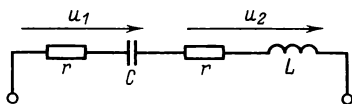


Рис. 2.22

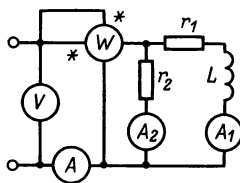


Рис. 2.23

**2.21.** В цепи  $r$ ,  $L$  (рис. 2.21) известны показания первого и второго вольтметров:  $U_1 = 100$  В;  $U_2 = 150$  В и сопротивление  $r = 10$  Ом.

Определить показание третьего вольтметра и индуктивность, если частота тока  $f = 50$  Гц.

**2.22.** Определить, при каком значении угловой частоты тока в цепи, схема которой показана на рис. 2.22, напряжение  $U_1$  будет в 2 раза больше  $U_2$ .

Дано:  $r = 50$  Ом;  $C = 3,18$  мкФ;  $L = 0,1$  Гн.

**2.23.** Определить показание приборов в цепи рис. 2.23, если известно показание первого амперметра  $I_1 = 1$  А и заданы параметры:  $r_1 = 100$  Ом;  $L = 0,276$  Гн;  $r_2 = 200$  Ом;  $f = 100$  Гц.

**2.24.** При замкнутом ключе сдвиг фаз между напряжением и током в цепи (рис. 2.24) составил  $45^\circ$ .

Определить сдвиг фаз при разомкнутом ключе, если частота тока не изменяется.

**2.25.** В цепи, состоящей из двух последовательно соединенных индуктивных катушек (рис. 2.25), напряжение на входе  $u = 120 \sin \omega t$  В.

Определить мгновенные значения напряжений  $u_1$  и  $u_2$  на катушках и показания приборов. Параметры катушек:  $L_1 = 4$  мГн;  $r_1 = 50$  Ом;  $L_2 = 20$  мГн;  $r_2 = 10$  Ом; частота  $f = 400$  Гц.

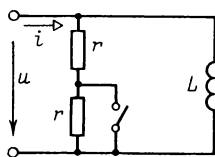


Рис. 2.24

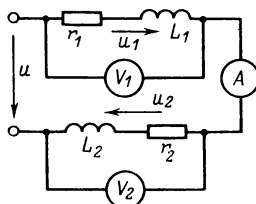


Рис. 2.25

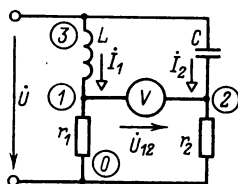


Рис. 2.26

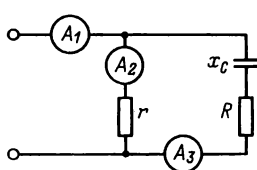


Рис. 2.27

**2.26. 1)** Определить показание вольтметра в схеме рис. 2.26 при  $\dot{U} = 100 \angle 30^\circ$  В;  $r_1 = 5$  Ом;  $r_2 = 25$  Ом;  $L = 0,159$  Гн;  $C = 127$  мкФ;  $\omega = 314$  рад/с. Построить топографическую диаграмму, приняв равным нулю потенциал точки 0.

**2)** Найти показание вольтметра в той же схеме, но после того как элементы  $r_1$  и  $L$  поменяли местами.

**2.27.** В цепи рис. 2.27 известны показания трех амперметров:  $I_1 = 2\sqrt{3}$  А;  $I_2 = I_3 = 2$  А и сопротивление резистора  $r = 50$  Ом.

Найти значения  $x_C$  и  $R$ . Определить  $\cos \varphi$  цепи.

### 2.3. Разветвленные электрические цепи.

Векторные и топографические диаграммы.

Энергетические соотношения

**2.28.** Для схемы двухполюсника рис. 2.28 заданы параметры:  $L_1 = 5$  мГн;  $r_1 = 150$  Ом;  $C_1 = 0,667$  мкФ;  $L_2 = 10$  мГн;  $r_2 = 200$  Ом;  $C_2 = 1$  мкФ; напряжение на входе  $u = 10\sqrt{2} \sin 10^4 t$  В.

Найти напряжение  $u_{C_2}(t)$  на конденсаторе  $C_2$ , построить топографическую диаграмму, приняв равным нулю потенциал точки 1.

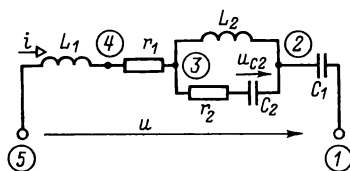


Рис. 2.28

2.29. На схеме рис. 2.29 указаны (в омах) сопротивления элементов, входное напряжение  $u = 100 \sin \omega t$  В.

Определить токи ветвей. Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму, приняв равным нулю потенциал точки 1.

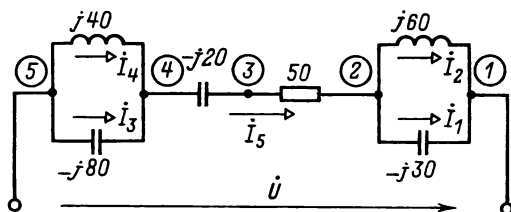


Рис. 2.29

2.30. На схеме рис. 2.30 ЭДС  $\dot{E} = 10$  В, сопротивления  $x_L = x_C = r = 10$  Ом.

- 1) Построить векторную диаграмму токов.
- 2) Построить векторную диаграмму токов при увеличенной в 2 раза частоте ЭДС.

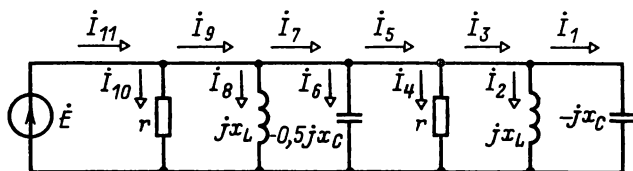


Рис. 2.30

2.31. Цепь рис. 2.31 преобразует однофазное напряжение  $\dot{U}$  в трехфазное, т.е. потенциалы  $\phi_a$ ,  $\phi_b$  и  $\phi_c$  образуют на комплексной плоскости равносторонний треугольник.

Построив качественно топографическую диаграмму, определить, при каких соотношениях параметров возможно такое преобразование.

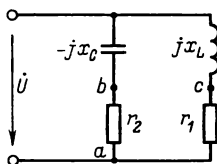


Рис. 2.31

**2.32(Р).** Для цепи рис. 2.32 известны показания амперметров:  $I_1 = I_2 = I_3 = 5$  А и вольтметров:  $U_1 = U_2 = 100$  В.

Определить параметры цепи и показание вольтметра на входе, если входные напряжение  $\dot{U}_{a\theta}$  и ток  $\dot{I}_1$  совпадают по фазе.

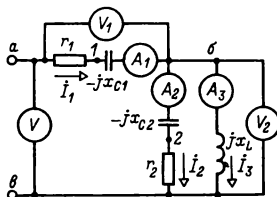


Рис. 2.32

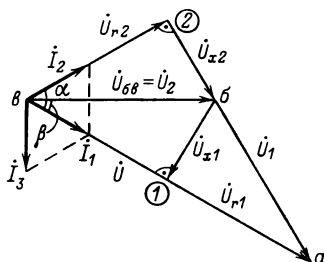


Рис. 2.32Р

**У к а з а н и е.** Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму.

**Р е ш е н и е.** Построим диаграмму (рис. 2.32Р). Для узла б запишем уравнение, составленное по первому закону Кирхгофа:  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ . Изображаем векторы этих токов на комплексной плоскости, отсчитывая их начальные фазы от узлового напряжения  $\dot{U}_{b\theta} = \dot{U}_2 = 100$  В, начальную фазу которого выберем равной нулю.

Ток  $\dot{I}_3$  отстает от напряжения  $\dot{U}_2$  по фазе на  $90^\circ$ , ток  $\dot{I}_2$  опережает на неизвестный угол  $\alpha < 90^\circ$ , а ток  $\dot{I}_1$  равен их сумме. Ввиду равенства модулей ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) углы между векторами пары токов  $\dot{I}_2, \dot{I}_1$  и пары токов  $\dot{I}_1, \dot{I}_3$  равны  $60^\circ$ , т. е.  $\alpha = \beta = 30^\circ$ . Напряжения  $\dot{U}_{r2} = r_2 \dot{I}_2$  и  $\dot{U}_{x2} = (-jx_{C2}) \dot{I}_2$  образуют катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой  $\dot{U}_{b\theta} = \dot{U}_2$ , значит,  $U_{2e} = U_{r2} = U_2 \cos \alpha = 100 \sqrt{3}/2$  и  $U_{62} = U_{x2} = U_2 \sin \alpha = 50$  В.



Далее строим векторы напряжений для элементов первой ветви:  $\dot{U}_{x1} = (-jx_{C1})\dot{I}_1$  и  $\dot{U}_{r1} = r\dot{I}_1$ . При этом согласно условию входное напряжение  $\dot{U}_{ae}$  и ток  $\dot{I}_1$  должны иметь одинаковые фазы. Следовательно, векторы  $\dot{U}_{1b} = \dot{U}_{x1}$  и  $\dot{U}_{a1} = \dot{U}_{r1}$  совместно с вектором  $\dot{U}_{ab}$  образуют прямоугольный треугольник, катет  $\dot{U}_{a1}$  которого составляет часть входного напряжения  $\dot{U}_{ae}$ .

Ввиду равенства треугольников 1ab, 1ab и 2ab находим, что  $U_{1a} = U_{a1} = U_{2a}$  и входное напряжение  $U_{ae} = 2U_{2a} = 2 \cdot 100\sqrt{3}/2 = 173$  В.

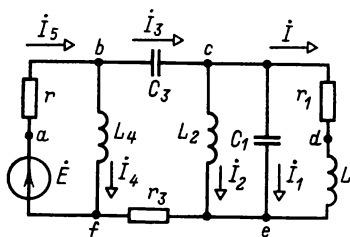


Рис. 2.33

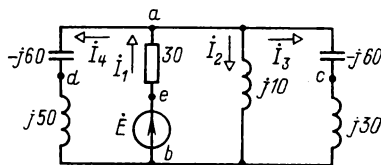


Рис. 2.34

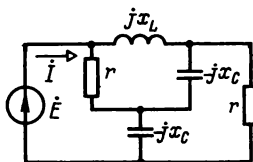


Рис. 2.35

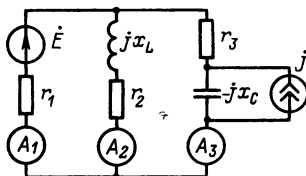


Рис. 2.36

Параметры определим по закону Ома:  $x_L = U_2/I_3 = 100/5 = 20$  Ом;  $x_{C2} = x_{C1} = U_{62}/I_2 = 50/5 = 10$  Ом;  $r_1 = r_2 = U_{2a}/I_2 = 86,5/5 = 17,3$  Ом.

2.33. Для схемы рис. 2.33 построить векторную диаграмму токов при  $\dot{I} = 1$  А и топографическую диаграмму, приняв потенциал  $\phi_e = 0$ . Параметры:  $r_1 = x_L = x_{C1} = r_3 = x_{L4} = r/2 = x_{L2} = x_{C3} = 1$  Ом.

Определить ЭДС  $\dot{E}$ .

2.34. В схеме рис. 2.34 ЭДС  $e = 150\sqrt{2} \sin \omega t$  В и значения сопротивлений элементов даны в омах.

Определить мгновенные значения токов и напряжений  $u_{ab}$ ,  $u_{ac}$  и  $u_{ad}$ . Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму, приняв равным нулю потенциал точки b.

2.35. Применив преобразование треугольника сопротивлений в звезду, определить ток  $\dot{I}$  источника в схеме рис. 2.35, если  $x_C = x_L = r = 10$  Ом и  $\dot{E} = 100$  В.

2.36. В цепи рис. 2.36 действуют источник ЭДС  $\dot{E} = 250 \angle 90^\circ$  В и источник тока  $\dot{J} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ$  А.

Дано:  $r_1 = 25$  Ом;  $r_2 = 50$  Ом;  $r_3 = 20$  Ом;  $x_C = 20$  Ом и  $x_L = 50$  Ом.

Определить показания амперметров.

2.37(P). Определить ток  $\dot{I}$  в сопротивлении  $\underline{Z}$  мостовой схемы рис. 2.37Р.

Дано:  $x_C = 10^4$  Ом;  $x_L = 0,8 \cdot 10^3$  Ом;  $r_1 = 5 \cdot 10^3$  Ом;  $r_2 = 10^3$  Ом;  $r_3 = 0,32 \cdot 10^3$  Ом;  $\underline{Z} = 192 - j41$  Ом;  $\dot{E} = 290 \angle -21^\circ 50'$  В.

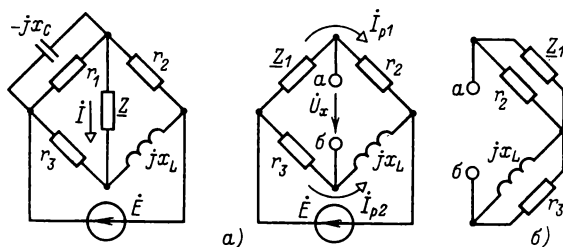


Рис. 2.37Р

**Решение.** Вычислим предварительно комплексное сопротивление первой ветви:

$$\underline{Z}_1 = r_1(-jx_C)/(r_1 - jx_C) = (4 - j2) \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Решим задачу методом активного двухполюсника (эквивалентного источника) по (1.55):

$$\dot{I} = \dot{U}_x / (\underline{Z}_{\text{вх}} + \underline{Z}). \quad (1)$$

Определим напряжение  $\dot{U}_x$  при разомкнутой ветви с сопротивлением  $\underline{Z}$  (рис. 2.37Р, а). Предварительно рассчитаем токи:

$$\dot{I}_{p1} = \dot{E} / (\underline{Z}_1 + r_2) = 53,85 \cdot 10^{-3} \angle 0^\circ \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{p2} = \dot{E} / (r_3 + jx_L) = 0,3366 \angle -90^\circ \text{ А.}$$

Напряжение

$$\dot{U}_x = -jx_L \dot{I}_{p2} + r_2 \dot{I}_{p1} = 215,4 \angle 180^\circ \text{ А.}$$

Определим входное сопротивление двухполюсника относительно выводов а, б разомкнутой ветви (рис. 2.37Р, б), учитывая, что внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{r_2 \underline{Z}_1}{r_2 + \underline{Z}_1} + \frac{jx_L r_3}{jx_L + r_3} = 1104 + j41 \text{ Ом.}$$

Искомый ток по (1)  $\dot{I} = 0,1662 \angle 180^\circ$  А.

**2.38.** Для схемы рис. 2.38 заданы параметры:  $x_L = x_C = 0,5r = 10 \text{ кОм}$ ;  $\dot{E} = 10 \text{ В}$ .

Определить ток  $\dot{I}$ .

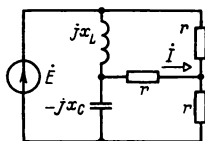


Рис. 2.38

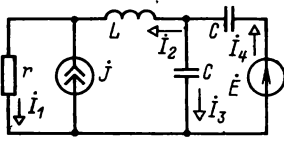


Рис. 2.39

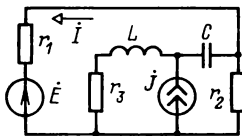


Рис. 2.40

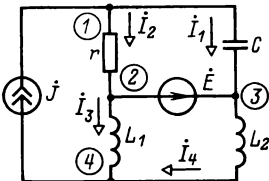


Рис. 2.41

**2.39.** Определить, применив метод наложения, токи в цепи рис. 2.39.

Дано:  $\dot{E} = 10\sqrt{2} \text{ В}$ ;  $\dot{J} = 1 \angle 45^\circ \text{ мА}$ ;  $\omega L = 1 \text{ кОм}$ ;  $1/\omega C = 2 \text{ кОм}$  и  $r = 1 \text{ кОм}$ .

**2.40.** Определить ток ветви с источником э. д. с. (рис. 2.40) методом эквивалентного источника.

Дано:  $\dot{E} = 32 \text{ В}$ ;  $\dot{J} = 40 \angle -22^\circ 36' \text{ мА}$ ;  $r_1 = 500 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = x_C = 200 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 400 \text{ Ом}$ ;  $x_L = 600 \text{ Ом}$ .

**2.41.** Для схемы рис. 2.41 дано:  $\dot{E} = 10 \text{ В}$ ;  $\dot{J} = 1 \text{ А}$ ;  $2x_{L1} = x_{L2} = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_C = r = 5 \text{ Ом}$ .

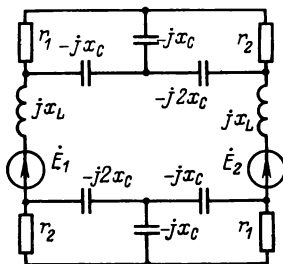


Рис. 2.42

1) Определить токи ветвей методом контурных токов, найти напряжение на выводах источника тока.

2) Решить задачу методом узловых потенциалов, выбрав  $\phi_2 = 0$ .

**2.42.** Определить комплексные мощности источников в схеме рис. 2.42.

Дано:  $x_L = 5,48 \text{ Ом}$ ;  $x_C = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $\dot{E}_1 = 100 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = -j50 \text{ В}$ .

2.43. Определить токи в ветвях схем рис. 2.43, а-г при  $e = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 200 \text{ Ом}$ ;  $x_L = x_{C2} = 200 \text{ Ом}$  и  $x_{C1} = 100 \text{ Ом}$ .

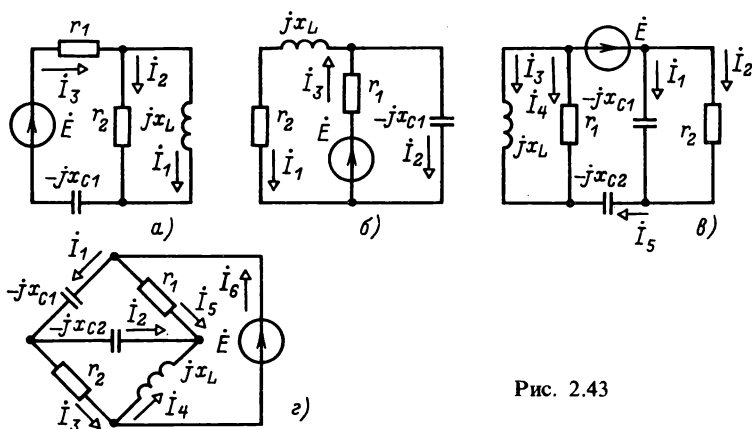


Рис. 2.43

2.44. Даны: векторная диаграмма токов и топографическая диаграмма (рис. 2.44) двухконтурной схемы. Составить схему и определить ее параметры.

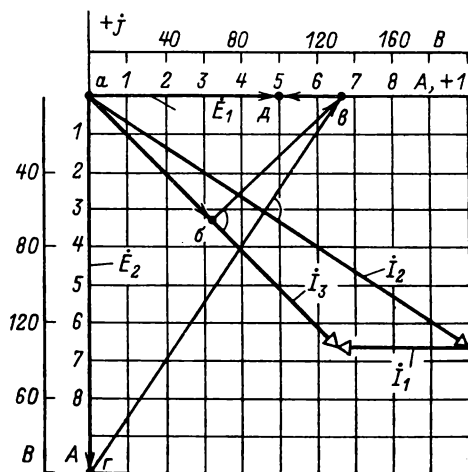


Рис. 2.44

**2.45.** Для цепи рис. 2.45 задано: входное напряжение  $u = 100 \cos \omega t$  В и сопротивления  $r = 20$  Ом;  $\omega L = 20$  Ом;  $1/\omega C = 10$  Ом.

Определить показания амперметра и ваттметра для двух положений ключа: 1 и 2.

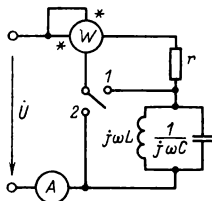


Рис. 2.45

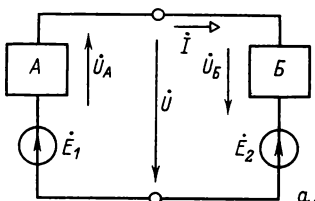
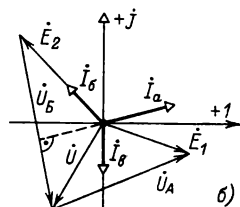


Рис. 2.46



**2.46.** Для цепи рис. 2.46, а известна векторная диаграмма (рис. 2.46, б), на которой показаны ЭДС  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_2$ , напряжения  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}$  и ток  $\dot{I}$  трех режимов:  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_b$ ,  $\dot{I}_s$ .

Записать комплексные мощности источников и двухполюсников А и Б; определить в указанных режимах, отдаются или потребляются ими активная и реактивная мощности.

**2.47.** В схеме рис. 2.47 известны параметры  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = x_L = x_C = 40$  Ом и показание ваттметра  $P = 600$  Вт.

Определить ток и ЭДС источника, приняв  $\dot{I} = I$ .

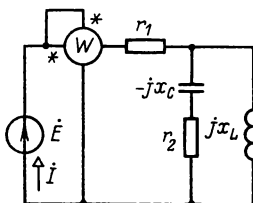


Рис. 2.47

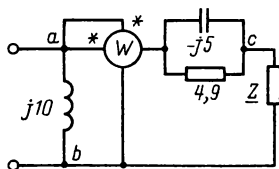


Рис. 2.48

**2.48.** В цепи рис. 2.48 известны напряжения  $u_{ab} = 8 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В и  $u_{ac} = 2\sqrt{2} \sin \omega t$  В. Значения сопротивлений (в омах) указаны на схеме.

Определить показание ваттметра и сопротивление  $Z$ .

**2.49.** Для цепей рис. 2.49, а и б  $J(t) = 10 \sin \omega t$  А;  $r_1 = x_C = 40$  Ом;  $r_2 = x_{L1} = 20$  Ом и  $x_{L2} = 80$  Ом.

Определить все токи и найти показание ваттметра.

**2.50.** В цепи рис. 2.50 были произведены измерения напряжения и тока: 1) при отключенном элементе  $Z_6$ ; 2) при корот-

ком замыкании точек *a* и *б*. В первом опыте получено  $\dot{U}_{ab} = 200\sqrt{2} \angle 30^\circ$  В, во втором опыте  $\dot{I} = 10 \angle -150^\circ$  А.

Найти сопротивление эквивалентного источника для элемента  $\underline{Z}_6$  и определить ток  $\dot{I}$  при  $\underline{Z}_6 = 10 \angle 60^\circ$  Ом.

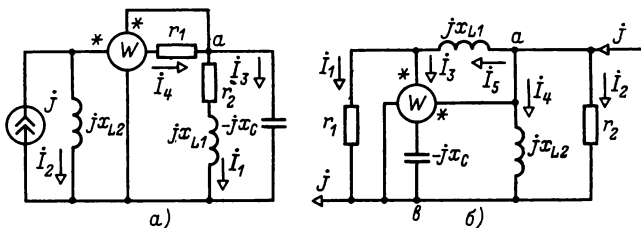


Рис. 2.49

2.51. Для схемы рис. 2.51 дано:  $\dot{I}_a = \sqrt{2} \angle 135^\circ$  А;  $\dot{I}_b = 4\sqrt{2} \angle 45^\circ$  А;  $\dot{E}_1 = 4$  В;  $\dot{E}_2 = 4 \angle -90^\circ$  В;  $\underline{Z}_1 = 2 + j4$  Ом;  $\underline{Z}_3 = 2$  Ом.

Определить токи  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_3$  и  $\dot{I}_c$ .

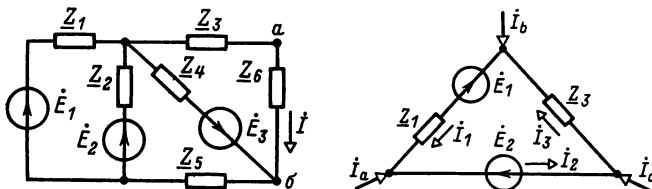


Рис. 2.50

Рис. 2.51

2.52(Р). Определить токи в схеме рис. 2.52, применив метод контурных токов.

Дано:  $r_1 = 20$  Ом;  $x_{C2} = 120$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $r_3 = 70$  Ом;  $x_{L3} = x_{C1} = 50$  Ом;  $x_{L2} = 100$  Ом;  $\dot{E}_1 = j200$  В;  $\dot{E}_2 = -j100$  В;  $\dot{E}_3 = (1 - j1) 100$  В.

Решение. Для схемы, изображенной на рис. 2.52, выбираем положительное направление контурного тока (по часовой стрелке) в каждом из трех контуров-ячеек 1, 2, 3. Составляем уравнения:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\dot{I}^{(1)} + \underline{Z}_{12}\dot{I}^{(2)} + \underline{Z}_{13}\dot{I}^{(3)} &= \dot{E}^{(1)}; \\ \underline{Z}_{21}\dot{I}^{(1)} + \underline{Z}_{22}\dot{I}^{(2)} + \underline{Z}_{23}\dot{I}^{(3)} &= \dot{E}^{(2)}; \\ \underline{Z}_{31}\dot{I}^{(1)} + \underline{Z}_{32}\dot{I}^{(2)} + \underline{Z}_{33}\dot{I}^{(3)} &= \dot{E}^{(3)}, \end{aligned}$$

где  $\dot{I}^{(1)}$ ,  $\dot{I}^{(2)}$ ,  $\dot{I}^{(3)}$  — контурные токи;  $\underline{Z}_{11} = r_1 + r_2 + jx_{L2} + jx_{L3} = 50 + j150$  Ом;  $\underline{Z}_{12} = -(r_2 + jx_{L2}) = -(30 + j100)$  Ом;  $\underline{Z}_{13} =$

$= -jx_{L3} = -j50 \text{ Ом}; \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}; \underline{Z}_{22} = r_2 + jx_{L2} + r_3 - jx_{C1} =$   
 $= 100 + j50 \text{ Ом}; \underline{Z}_{23} = -r_3 = -70 \text{ Ом}; \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{13}; \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_{23};$   
 $\underline{Z}_{33} = jx_{L3} + r_3 - jx_{C2} = 70 - j70 \text{ Ом}, \text{ а контурные ЭДС } \dot{E}^{(1)} =$   
 $= \dot{E}_1 = j200 \text{ В}; \dot{E}^{(2)} = -\dot{E}_3 = -100 + j100 \text{ В}; \dot{E}^{(3)} = \dot{E}_3 - \dot{E}_2 =$   
 $= 100 \text{ В}.$

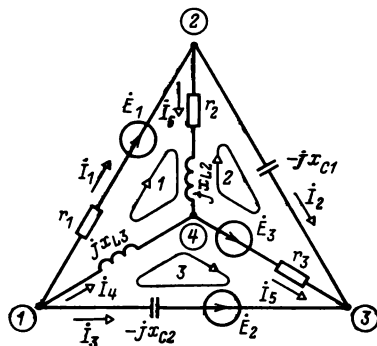


Рис. 2.52

Вычислим определитель матрицы  $\underline{Z}$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{vmatrix} = (19,72 - j4,77) \cdot 10^5 \text{ Ом}^3,$$

а также следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E}^{(1)} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \dot{E}^{(2)} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \dot{E}^{(3)} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{vmatrix} = (-1,09 + j2,39) \cdot 10^6 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \dot{E}^{(1)} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \dot{E}^{(2)} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \dot{E}^{(3)} & \underline{Z}_{33} \end{vmatrix} = (-4,18 + j3,97) \cdot 10^6 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dot{E}^{(1)} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dot{E}^{(2)} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \dot{E}^{(3)} \end{vmatrix} = (-2,79 - j0,28) \cdot 10^6 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2.$$

Находим контурные токи (решим систему уравнений):

$$\dot{I}^{(1)} = \Delta_1 / \Delta = 1,296 \angle 128,1^\circ \text{ А} = (-0,799 + j1,02) \text{ А};$$

$$\dot{I}^{(2)} = \Delta_2 / \Delta = 2,837 \angle 150,1^\circ \text{ А} = (-2,46 + j1,41) \text{ А};$$

$$\dot{I}^{(3)} = \Delta_3 / \Delta = 1,379 \angle -160,7^\circ \text{ А} = (-1,3 - j0,456) \text{ А}.$$

Токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_1 &= \dot{I}^{(1)}; I_2 = \dot{I}^{(2)}; I_3 = -\dot{I}^{(3)}; I_4 = -\dot{I}^{(1)} + \dot{I}^{(3)} = \\ &= -0,5 - j1,476 = 1,56 \angle -108,7^\circ \text{ А}; I_5 = -\dot{I}^{(2)} + \dot{I}^{(3)} = \\ &= 1,16 - j1,866 = 2,2 \angle -58,1^\circ \text{ А}; I_6 = \dot{I}^{(1)} - \dot{I}^{(2)} = 1,66 - j0,39 = \\ &= 1,69 \angle -10,2^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

Для того чтобы убедиться в правильности вычислений, составим баланс мощностей.

Мощность, развиваемая источниками,

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{E}_i \dot{I}_i^* &= \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_3^* + \dot{E}_3 \dot{I}_5^* = 200j(-0,799 - j1,02) - \\ &- 100j(1,3 - j0,456) + 100(1 - j)(1,16 + j1,866) = \\ &= (461 - j219,2) \text{ В} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

Мощность потребляемая:

активная

$$\begin{aligned} \sum P_{\text{потр}} &= r_1 I_1^2 + r_3 I_3^2 + r_2 I_6^2 = 20 \cdot 1,296^2 + 70 \cdot 2,2^2 + 30 \cdot 1,69^2 = \\ &= 458 \text{ Вт}; \end{aligned}$$

реактивная

$$\begin{aligned} \sum Q_{\text{потр}} &= (-x_{C1}) I_2^2 + (-x_{C2}) I_3^2 + x_{L3} I_4^2 + x_{L2} I_6^2 = \\ &= (-50) 2,837^2 + (-120) 1,379^2 + 50 \cdot 1,56^2 + 100 \cdot 1,69^2 = \\ &= -223,3 \text{ вар}. \end{aligned}$$

Относительная ошибка вычислений:

$$\delta_P \% = \frac{461 - 458}{0,5(461 + 458)} 100 \% = 0,65 \%;$$

$$\delta_Q \% = \frac{223,3 - 219,2}{0,5(223,3 + 219,2)} 100 \% = 1,85 \%.$$

**2.53(Р).** Определить потенциалы узлов и записать по закону Ома токи в схеме рис. 2.53.

Дано:  $r_1 = r_3 = r_4 = r_5 = x_{C1} = x_{C2} = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = r_6 = x_{L2} = 5 \text{ Ом}$ ;  $x_{L1} = 20 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E}_1 = j200 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 50 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_3 = (100 + j200) \text{ В}$ ;  $\dot{J} = 10 \text{ А}$ .

**Решение.** Для решения задачи применим метод узловых потенциалов. Приняв  $\phi_4 = 0$ , запишем уравнения по методу



узловых потенциалов:

$$+ \underline{Y}_{11}\phi_1 - \underline{Y}_{12}\phi_2 - \underline{Y}_{13}\phi_3 = j_1;$$

$$- \underline{Y}_{21}\phi_1 + \underline{Y}_{22}\phi_2 - \underline{Y}_{23}\phi_3 = j_2;$$

$$- \underline{Y}_{31}\phi_1 - \underline{Y}_{32}\phi_2 + \underline{Y}_{33}\phi_3 = j_3,$$

$$\text{где } \underline{Y}_{11} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{jx_{L1}} + j \frac{1}{x_{C2}} + \frac{1}{r_5} = (0,2 + j0,05) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{jx_{L1}} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_6 + jx_{L2}} = (0,4 - j0,15) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{33} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + j \frac{1}{x_{C2}} + \frac{1}{r_4 - jx_{C1}} = (0,45 + j0,15) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{jx_{L1}} = (0,1 - j0,05) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{13} = \frac{1}{r_5} + j \frac{1}{x_{C2}} = (0,1 + j0,1) \text{ См}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{1}{r_2} = 0,2 \text{ См};$$

$$j_1 = - \frac{\dot{E}_1}{jx_{L1}} + j = 0; \quad j_2 = \frac{\dot{E}_1}{jx_{L1}} + \frac{\dot{E}_2}{r_2} = 20 \text{ А};$$

$$j_3 = -2j - \frac{\dot{E}_2}{r_2} - \frac{\dot{E}_3}{r_3} = -20(2 + j1) \text{ А}.$$

Решим систему уравнений для потенциалов. Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,2 + j0,05 & -(0,1 - j0,05) & -0,1(1 + j1) \\ -(0,1 - j0,05) & 0,4 - j0,15 & -0,2 \\ -0,1(1 + j1) & -0,2 & 0,45 + j0,15 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,0364 \angle 0,0045^\circ \text{ См}^3.$$

Определитель, в котором элементы первого столбца заменены свободными членами

$$\Delta_1 = 2,121 \angle 57,73^\circ \text{ А} \cdot \text{См}^2.$$

Потенциал узла 1

$$\phi_1 = \Delta_1 / \Delta = 58,128 \angle 57,723^\circ \text{ В}.$$

Аналогично для определения потенциалов узлов 2 и 3 вычислим:

$$\Delta_2 = 0,9656 \angle 63,566^\circ \text{ А} \cdot \text{См}^2;$$

$$\Delta_3 = 3,917 \angle -166,93^\circ \text{ А} \cdot \text{См}^2.$$

Следовательно,

$$\phi_2 = \Delta_2 / \Delta = 26,46 \angle 63,56^\circ \text{ В};$$

$$\phi_3 = \Delta_3 / \Delta = 107,37 \angle -166,94^\circ \text{ В}.$$

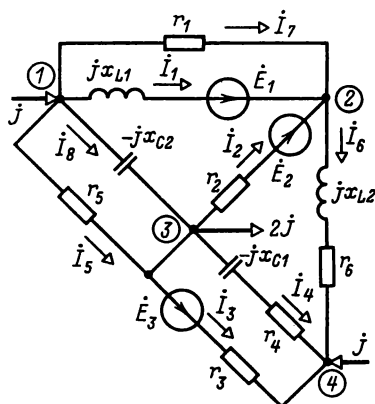


Рис. 2.53

Токи ветвей запишем по обобщенному закону Ома (1.14):

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\dot{U}_{12} + \dot{E}_1}{jx_{L1}}; & i_2 &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{23}}{r_2}; & i_3 &= \frac{\dot{U}_{34} + \dot{E}_3}{r_3}; \\ i_4 &= \frac{\dot{U}_{34}}{r_4 - jx_{C1}}; & i_5 &= \frac{\dot{U}_{13}}{r_5}; & i_6 &= \frac{\dot{U}_{24}}{r_6 + jx_{L2}}; & i_7 &= \frac{\dot{U}_{12}}{r_1}; \\ i_8 &= \frac{\dot{U}_{13}}{-jx_{C2}}. \end{aligned}$$

## 2.4. Эквивалентные схемы двухполосников

**2.54.** Для последовательной схемы (рис. 2.54) при  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$  найти параметры параллельной эквивалентной схемы. Вычисления провести для двух случаев: 1)  $\omega = 10^3 \text{ рад/с}$ ; 2)  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ .

**2.55(Р).** Полная проводимость конденсатора  $y = 0,01 \text{ См}$ , его добротность  $Q_C = 5$ .

Определить параметры параллельной и последовательной схем замещения.

**Решение.** В конденсаторе с потерями разность фаз  $\phi$  приложенного напряжения и тока по абсолютному значению меньше  $\pi/2$  на угол потерь  $\delta$ .

Представим конденсатор эквивалентной схемой, содержащей емкость и параллельно включенное сопротивление (рис. 2.55Р, а). Для этой схемы  $\operatorname{tg} \delta = 1/Q_C = x_C/R = 0,2$  и  $\delta = 11^\circ 20'$ .

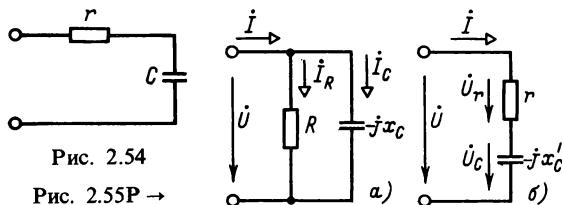


Рис. 2.54

Рис. 2.55Р →

Значения  $x_C$  и  $R$  определим из соотношений

$$\sin \delta = I_R/I = U/(RU) = 1/(Ry); \quad \cos \delta = I_C/I = U/(x_C U) = 1/(x_C y),$$

откуда  $R = 1/(y \sin \delta) = 508 \text{ Ом}$ ;  $x_C = 1/(y \cos \delta) = 102 \text{ Ом}$ .

Для последовательной схемы замещения (рис. 2.55Р, б)

$$\operatorname{tg} \delta = 1/Q_C = r/x'_C = 0,2; \quad \sin \delta = U_r/U = Ir/Iz = r/z;$$

$$\cos \delta = U_C/U = Ix'_C/Iz = x'_C/z;$$

здесь  $z = 1/y$  — полное сопротивление конденсатора. Следовательно,  $r = z \sin \delta = (1/y) \sin \delta = 19,6 \text{ Ом}$ ;  $x'_C = z \cos \delta = (1/y) \cos \delta = 98 \text{ Ом}$ .

Те же значения можно получить из выражения для комплексной проводимости, вычислив предварительно угол  $|\varphi| = \pi/2 - \delta = 78^\circ 40'$  и  $\varphi = -78^\circ 40'$  (схема замещения конденсатора), при этом

$$\underline{Y} = y \angle -\varphi = g - jb = \frac{1}{R} + j \frac{1}{x_C} = 0,01 \angle 78^\circ 40' \text{ См},$$

и для последовательной схемы замещения

$$\underline{Z} = z \angle \varphi = 1/\underline{Y} = r - jx'_C = 100 \angle -78^\circ 40' \text{ Ом}.$$

Отметим, что поскольку угол  $\delta$  мал, то  $\cos \delta$  близок к единице и, следовательно,  $C \approx C'$ , а  $r \ll R$ . Это следует из соотношений  $r/R = z \sin \delta (y \sin \delta) = \sin^2 \delta \ll 1$ ;  $x'_C/x_C = z \cos \delta (y \cos \delta) = \cos^2 \delta \approx 1$ . Поэтому основными параметрами конденсатора считают его емкость и угол потерь.

**2.56.** На входе двухполосника (рис. 2.56), содержащего резисторы и индуктивные катушки, измерены: мощность  $P = 110 \text{ Вт}$ , напряжение  $U = 220 \text{ В}$  и ток  $I = 5 \text{ А}$ .

Определить параметры: а) последовательной и б) параллельной схем замещения двухполосника.

**2.57.** Для реального конденсатора известны потребляемая мощность  $P = 10$  мВт и тангенс угла диэлектрических потерь  $\operatorname{tg} \delta = 0,316$  при напряжении  $U = 220$  В.

Определить параметры последовательной схемы замещения.

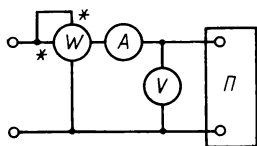


Рис. 2.56

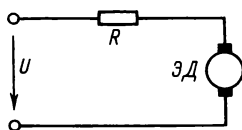


Рис. 2.59

**2.58.** Конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ с реальным диэлектриком имеет  $\operatorname{tg} \delta = 0,15$  на частоте  $f = 50$  Гц.

Определить полное сопротивление конденсатора.

**2.59.** Электродвигатель с номинальными параметрами  $U_{\text{ном}} = 127$  В,  $P_{\text{ном}} = 2$  кВт и  $\cos \varphi_{\text{ном}} = 0,8$  включается в сеть с напряжением  $U = 220$  В по схеме рис. 2.59.

Найти сопротивление резистора  $R$ , при котором двигатель будет работать в номинальном режиме, и параметры  $x$  и  $r$  последовательной схемы замещения двигателя, а также полную, активную и реактивную мощности всей установки.

**2.60.** Для определения неизвестных параметров катушки ( $x$ ,  $r$ ) ее соединили последовательно с резистором, сопротивление которого  $R = 2$  кОм (рис. 2.60), и измерили напряжения  $U_1 = 45$  В,  $U_2 = 20$  В и  $U_3 = 30$  В.

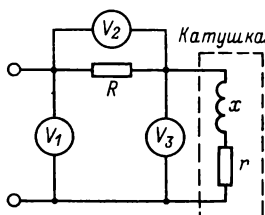


Рис. 2.60

Определить  $x$  и  $r$ .

**2.61.** Сопротивление  $R$  конденсатора постоянному току равно 10 кОм. При переменном токе частотой  $f_1 = 1600$  Гц  $\operatorname{tg} \delta = 0,05$ .

Для параллельной схемы замещения конденсатора определить  $\operatorname{tg} \delta$ ,  $S$ ,  $P$  и  $Q$  при частоте  $f_2 = 3200$  Гц и напряжении питания  $U = 380$  В, считая постоянным и равным  $R$  активное сопротивление в схеме замещения.

## 2.5. Резонанс. Режим согласованной нагрузки

**2.62.** К последовательному  $rLC$ -контур, параметры индуктивной катушки которого известны:  $L = 2,26$  мГн,  $r = 10,6$  Ом, приложено напряжение  $U = 50$  мкВ с частотой, соответствующей длине волны радиостанции  $\lambda = 2000$  м.

Найти емкость  $C$  конденсатора, при которой контур настроен в резонанс, добротность контура и напряжение на катушке.

**2.63.** Источник тока  $J(t) = 10 \sin \omega t$  А, частота которого может изменяться, подключен к схеме (рис. 2.63) с параметрами  $r = 10$  Ом и  $C = 1$  мкФ. Напряжение на емкости в режиме резонанса равно 10 В.

Определить резонансную частоту и индуктивность.

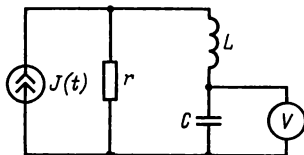


Рис. 2.63

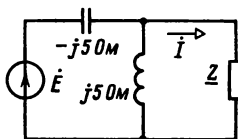


Рис. 2.64

**2.64.** Найти ток  $\dot{I}$  в схеме рис. 2.64 при  $\dot{E} = 10$  В. Решение провести двумя методами — путем преобразования источника с ЭДС  $\dot{E}$  в эквивалентный источник тока и применения свойства взаимности.

**2.65.** На рис. 2.65 показан параллельный контур, в котором индуктивная катушка представлена параллельной схемой замещения, а конденсатор можно считать идеальным.

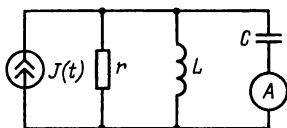


Рис. 2.65

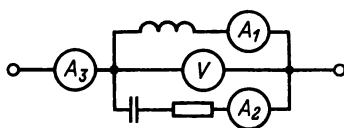


Рис. 2.66

Дано: ток источника  $J(t) = 10 \sin 10^3 t$  А, индуктивность  $L = 1$  мГн и добротность контура  $Q = 5$ .

Определить показание амперметра, емкость  $C$  и сопротивление  $r$ , если в цепи наблюдается резонанс.

**2.66.** Параллельный контур (рис. 2.66) настроен в резонанс. Дано:  $I_2 = 14,1$  А;  $U = 100$  В и  $I_1 = I_3$ .

Определить показания первого и третьего амперметров и параметры контура.

2.67. Для цепи рис. 2.67 в режиме резонанса известны показания приборов  $P = 4$  Вт,  $U = 4$  В и индуктивное сопротивление  $x_L = 2$  Ом.

Определить сопротивления  $r$  и  $x_C$ .

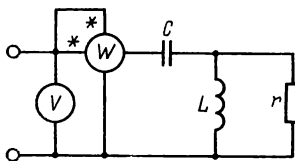


Рис. 2.67

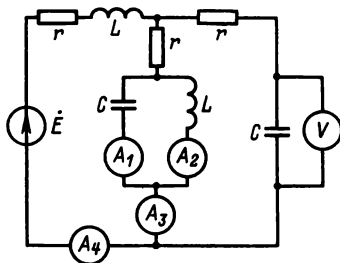


Рис. 2.68 →

2.68. В цепи рис. 2.68 определить показания приборов при  $r = 10$  Ом,  $x_L = x_C = 40$  Ом,  $E = 220$  В.

2.69. У электродвигателя при напряжении  $U = 220$  В и  $\cos \varphi = 0,4$  мощность  $P = 1,76$  кВт.

- 1) Найти ток двигателя.
- 2) Вычислить емкость конденсатора, при включении которого (рис. 2.69)  $\cos \varphi$  повысится до 0,8.
- 3) Определить ток сети при включении такого конденсатора.

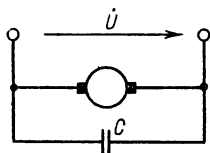


Рис. 2.69

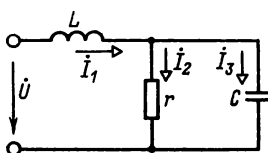


Рис. 2.70

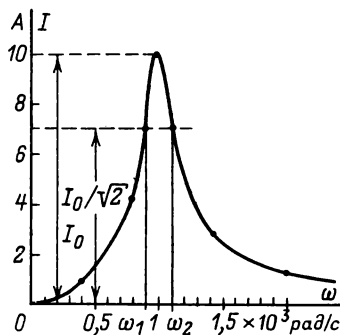
2.70. В схеме рис. 2.70 определить сопротивление  $r$  и токи, если в режиме резонанса  $x_L = 14,4$  Ом,  $x_C = 40$  Ом,  $U = 384$  В.

2.71. На рис. 2.71 показана резонансная кривая последовательного  $rLC$ -контура при напряжении питания, равном 100 В.

Определить полосу пропускания ( $\omega_1 - \omega_2$ ) и добротность контура, параметры  $rLC$ -контура и комплексные мощности при граничных частотах полосы пропускания.

**2.72.** В схеме рис. 2.72 известны параметры:  $C_1 = 3$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ;  $L = 4$  Гн;  $r = 100$  Ом и напряжение питания  $U = 200$  В.

Определить резонансные угловые частоты и токи при резонансных частотах.



← Рис. 2.71

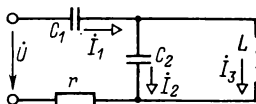


Рис. 2.72

**2.73(Р).** Двухполусник (рис. 2.73) настроен в резонанс, причем  $I_1 = I_2$ . Известны показания вольтметров:  $U_1 = 100$  В;  $U_2 = 40$  В.

Определить показания вольтметров  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  и  $U_6$ .

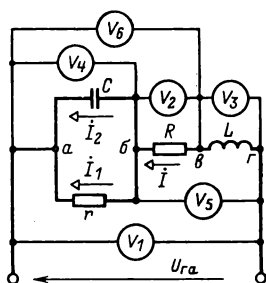


Рис. 2.73

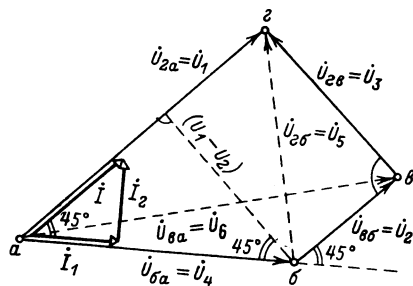


Рис. 2.73Р

**Решение.** Построим векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму (рис. 2.73Р). Начнем с вектора напряжения  $\dot{U}_{6a} = \dot{U}_4$  на разветвленной части цепи, отложив его по действительной оси и приняв потенциал точки  $a$  равным нулю.

Ток  $\dot{I}_1$  в активном сопротивлении  $r$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}_{6a}$ , ток  $\dot{I}_2$  опережает по фазе напряжение  $\dot{U}_{6a}$  на  $90^\circ$ , а общий ток  $\dot{I}$  равен их геометрической сумме и опережает по фазе напряжение  $\dot{U}_{6a}$  на  $45^\circ$  ( $I_1 = I_2$ ).

Из точки  $b$  параллельно току  $\vec{I}$  откладываем вектор напряжения  $\vec{U}_{6b}$  на активном сопротивлении  $R$  и из точки  $b$  — вектор напряжения на индуктивности  $\vec{U}_{2b}$ , опережающий по фазе ток  $\vec{I}$  на  $90^\circ$ . Получаем точку  $z$ . Сумма векторов  $\vec{U}_{6a}$ ,  $\vec{U}_{6b}$  и  $\vec{U}_{2b}$  равна вектору напряжения питания  $\vec{U}_{2a} = \vec{U}_1$ , которое совпадает по фазе с током  $\vec{I}$  (резонанс). Из диаграммы следует, что  $U_{2b} = U_3 = U_1 - U_2 = 60$  В;  $U_{6a} = U_4 = (U_1 - U_2)\sqrt{2} = 85$  В;  $U_{2b} = U_5 = \sqrt{U_3^2 + U_2^2} = 72$  В;  $U_{6a} = U_6 = \sqrt{(U_4 + U_2/\sqrt{2})^2 + (U_2/\sqrt{2})^2} = 117$  В.

2.74. Для цепи рис. 2.74 дано: угловая частота ЭДС  $\omega = 10^4$  рад/с, индуктивность катушки  $L = 0,1$  Гн.

Найти емкость  $C$  конденсатора, при которой действующее значение тока  $I$  не зависит от сопротивления резистора  $r$ . Определить, как изменится этот ток, если катушку и конденсатор поменять местами.

2.75. Определить индуктивное  $x_L$  и активное  $r$  сопротивления двухполосника (рис. 2.67), при которых его входное сопротивление  $Z_{вх} = 20$  Ом, если  $x_C = 40$  Ом.

2.76. Электрическая схема замещения магнитоэлектрического преобразователя без потерь представлена на рис. 2.76, где  $L_0 = 677$  мкГн — индуктивность обмотки преобразователя с магнитопроводом, индуктивность  $L = 2,6$  мкГн и емкость

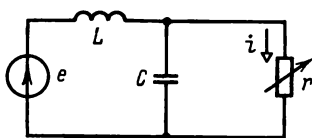


Рис. 2.74

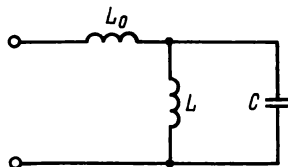


Рис. 2.76

$C = 0,584$  мкФ отражают механические свойства магнитной цепи.

Построить (качественно) частотную характеристику  $x(\omega)$  преобразователя и указать на ней частоты резонансов токов и напряжений.

2.77. Для пьезоэлектрического преобразователя составлена электрическая схема замещения, приведенная на рис. 2.77, где  $C_0 = 5,2$  пФ — статическая емкость электродной пары, индуктивность  $L_1 = 0,0557$  Гн и емкость  $C_1 = 0,01334$  пФ учитывают механические свойства пьезокерамики (потери в диэлектрике не учитываются).



Построить (качественно) частотную характеристику  $b(\omega)$  преобразователя. Записать условия резонанса напряжений и резонанса токов. Найти частоты резонансов и отметить их на характеристике.

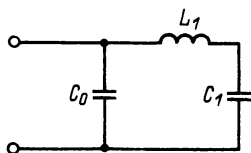


Рис. 2.77

**2.78(Р).** Для схемы рис. 2.78 в области частот, близких к резонансу, построить (качественно) резонансную кривую выходного напряжения  $U = F(\Omega)$ , где  $\Omega = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$  — относительная расстройка,  $\omega_0$  — резонансная частота каждого контура, причем контуры образуются закорачиванием соответствующих узлов (при закорачивании узлов 2 и 3 оставшиеся элементы  $L_1$ ,  $L_{12}$  и  $C_1$  образуют первый контур, при закорачивании узлов 1 и 3 элементы  $L_{12}$ ,  $L_2$  и  $C_2$  образуют второй контур).

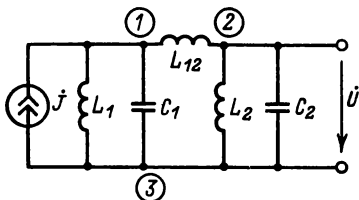


Рис. 2.78

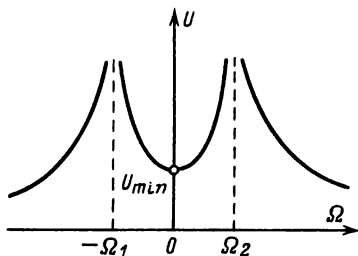


Рис. 2.78Р

**Указание.** Рекомендуется применить метод узловых потенциалов, так как схема содержит параллельно включенные элементы.

**Решение.** Выбрав  $\phi_3 = 0$ , запишем уравнения

$$(j\omega C_1 + 1/j\omega L_1 + 1/j\omega L_{12}) \phi_1 - (1/j\omega L_{12}) \phi_2 = J; \quad (1)$$

$$- (1/j\omega L_{12}) \phi_1 + (j\omega C_2 + 1/j\omega L_2 + 1/j\omega L_{12}) \phi_2 = 0. \quad (2)$$

**Определитель системы**

$$\Delta = (j\omega C_1 + 1/j\omega L_1 + 1/j\omega L_{12})(j\omega C_2 + 1/j\omega L_2 + 1/j\omega L_{12}) + (1/\omega L_{12})^2.$$

Алгебраическое дополнение при замене второго столбца свободными членами

$$\Delta_2 = j(1/j\omega L_{12}).$$

Напряжение на выходе схемы

$$\dot{U} = \dot{\phi}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = j \frac{1/j\omega L_{12}}{\Delta}. \quad (3)$$

Выражение (3) можно упростить, если ввести резонансные частоты контуров  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ , т. е.

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2 = 1/\left(\frac{L_1 L_{12}}{L_1 + L_{12}} C_1\right) = 1/\left(\frac{L_2 L_{12}}{L_2 + L_{12}} C_2\right), \quad (4)$$

и коэффициент связи как отношение индуктивной проводимости  $1/\omega L_{12}$ , общей для рассмотренных контуров, к геометрическому среднему индуктивных проводимостей, получающихся при закорачивании соответственно узлов 2 и 3 и узлов 1 и 3, т. е.

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{1/\omega L_{12}}{\sqrt{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})/\omega L_1 L_{12} \omega L_2 L_{12}}} = \\ &= \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (3) с учетом (4) и (5) приводится к виду

$$\dot{U} = \dot{\phi}_2 = j \frac{(\omega_0/\omega) k_{12}}{j\omega_0^2 C_1 C_2 [(\omega_0^2/\omega^2) k_{12}^2 - (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]} \quad (6)$$

В области частот, близких к резонансной,  $\omega_0/\omega \approx 1$  и выражение (6) упрощается:

$$\dot{U} = \dot{\phi}_2 = k_{12} j / j\omega_0^2 C_1 C_2 (k_{12}^2 - \Omega^2). \quad (7)$$

Функция претерпевает разрывы в точках, где  $k_{12}^2 - \Omega^2 = 0$ , т. е.  $\Omega_{1,2} = \pm k_{12}$ . В действительности элементы цепи имеют потери, и функция будет ограниченной. В точке  $\omega = \omega_0$ , т. е.  $\Omega = 0$ , знаменатель выражения (7) максимален, и функция имеет минимум:  $U_{min} = J/\omega_0^2 C_1 C_2 k_{12}$ . Качественно амплитудно-частотная характеристика напряжения представлена на рис. 2.78Р.

Данная методика может быть распространена на большее число контуров.

2.79. У источника ЭДС (рис. 2.79) амплитуда неизменна, а частота изменяется.

Составить выражение для тока  $\dot{I}$  в функции относительной расстройки  $\Omega = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$  и коэффициента связи  $k_{12}$  контуров  $L_1, C_1$  и  $L_2, C_2$ , т.е. для резонансной кривой при  $\omega/\omega_0$ , близком к 1.

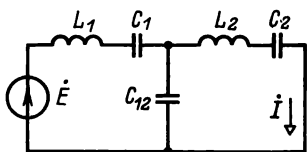


Рис. 2.79

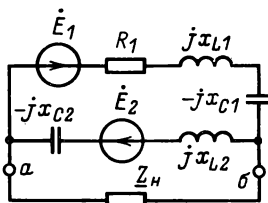


Рис. 2.80

У к а з а н и я : 1) При последовательном включении элементов для анализа проще применять метод контурных токов.

2) Резонансная частота контуров определяется элементами, остающимися в контуре при размыкании контуров слева и справа от рассматриваемого:

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1 C_{12} / (C_1 + C_{12})} = \frac{1}{L_2 C_2 C_{12} / (C_2 + C_{12})}.$$

3) Коэффициент связи равен отношению сопротивления, общего для двух контуров, к геометрическому среднему сопротивлений, получающихся при разрыве соответственно второго и первого контуров:

$$k_{12}^2 = C_1 C_2 / (C_1 + C_{12})(C_2 + C_{12}).$$

**2.80.** К точкам  $a$  и  $b$  цепи (рис. 2.80) подключен приемник с комплексным сопротивлением  $Z_H$ .

Определить, при каком  $Z_H$  активная мощность приемника  $P_H$  максимальна; найти при этом сопротивлении  $P_H$ .

Дано:  $R_1 = 500$  Ом;  $x_{L1} = 3,9$  кОм;  $x_{C1} = 3,4$  кОм;  $x_{L2} = 12,2$  кОм;  $x_{C2} = 12,7$  кОм;  $e_1 = 40 \sin(\omega t - 15^\circ)$  В;  $e_2 = 14,1 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В.

**2.81.** Определить реактивные сопротивления  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.81), при которых в сопротивлении нагрузки  $r_H = 100$  Ом будет максимальная мощность; параметры последовательной схемы замещения двухполюсника:  $Z = r = 10$  Ом и  $\dot{E} = 40$  В.

Определить максимальную мощность и найти, во сколько раз эта максимальная мощность отличается от мощности в сопротивлении нагрузки  $r_H$  при его непосредственном подключении к активному двухполюснику.

**2.82.** Определить сопротивления  $x_1$  и  $x_2$ , при включении которых между активным двухполюсником (рис. 2.82) и приемником с сопротивлением  $r_H = 10$  Ом мощность приемника максимальна. Эквивалентные параметры последовательной

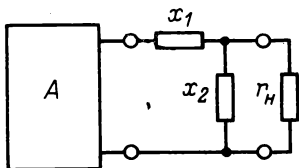


Рис. 2.81

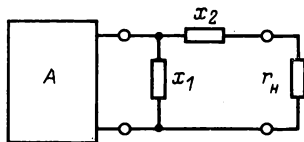


Рис. 2.82

схемы замещения активного двухполюсника:  $Z = r = 100$  Ом и  $E = 40$  В. Найти, какую часть этой максимальной мощности получит приемник при его непосредственном подключении к активному двухполюснику.

## 2.6. Электрические цепи с взаимной индукцией

**2.83.** Для катушек (рис. 2.83, а–г), имеющих индуктивную связь, произвести разметку выводов с указанием знака взаимной индуктивности.

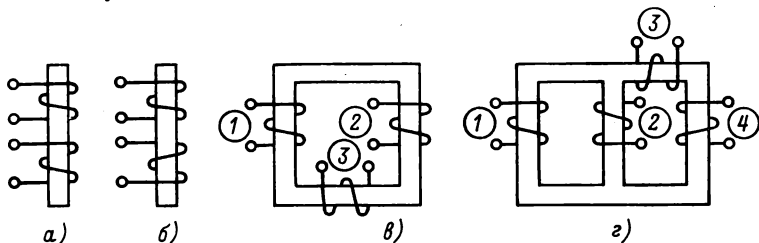


Рис. 2.83

**2.84.** Определить показание вольтметра в цепи рис. 2.84, если известны магнитные индукции:  $\vec{B}_1 = 0,5$  Тл;  $\vec{B}_2 = 0,4\sqrt{2} \angle 45^\circ$  Тл; числа витков катушек:  $w_1 = 100$ ;  $w_2 = 200$ ;  $w_3 = 300$ ; сечения магнитопровода:  $S_1 = 10$  см<sup>2</sup>;  $S_2 = 6$  см<sup>2</sup>;  $S_3 = 7,62$  см<sup>2</sup>; частота  $\omega = 10^3$  рад/с.

**2.85.** Разметить выводы трех катушек и найти показания вольтметров в схеме рис. 2.85.

Дано:  $\vec{I} = 2 \angle 40^\circ$  А;  $\omega = 1000$  рад/с;  $M_{13} = 3 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $M_{23} = 7 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $L = 3 \cdot 10^{-3}$  Гн.

**2.86.** В схемах рис. 2.86, *a–в* определить показания вольтметров: 1) при указанной разметке выводов; 2) при перемене местами выводов одной из катушек в каждой схеме.

Параметры схем:  $x_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_c = 10 \text{ Ом}$ ;  $r = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 10 \text{ Ом}$ ;  $E = 200 \text{ В}$ .

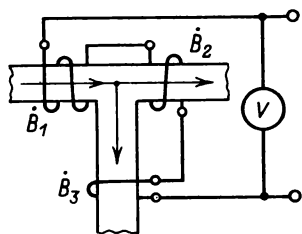


Рис. 2.84

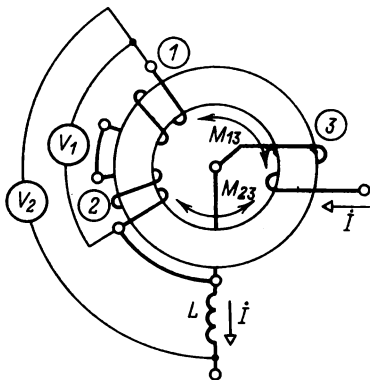
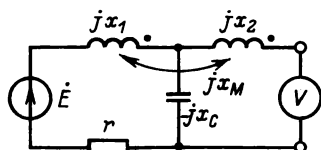
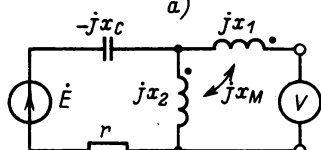


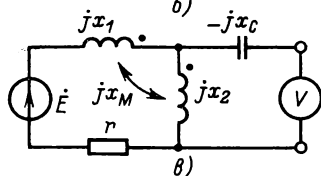
Рис. 2.85



*a)*



*б)*



*в)*

Рис. 2.86

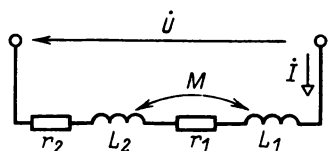


Рис. 2.87

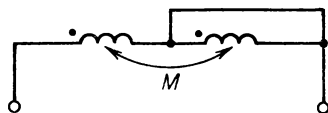


Рис. 2.88

**2.87.** Для двух последовательно включенных индуктивно связанных катушек (рис. 2.87) получено: 1) при встречном включении ток  $I_b = 1 \text{ А}$ , мощность  $P_b = 30 \text{ Вт}$ ; 2) при согласном включении ток  $I_c = 0,6 \text{ А}$ . Напряжение питания  $U = 100 \text{ В}$ , в обоих случаях частота  $f = 400 \text{ Гц}$ .

Определить взаимную индуктивность  $M$ .

**2.88.** Одна из двух одинаковых последовательно соединенных индуктивных катушек с сопротивлением  $\omega L = 2 \text{ кОм}$  закорочена (рис. 2.88). Катушки имеют индуктивную связь с коэффициентом  $k = 0,8$ .

Найти входное сопротивление цепи. Определить входное сопротивление при соединении катушек в узле одноименными выводами. Выяснить, можно ли подобрать коэффициент  $k$  и соединение так, чтобы сопротивление получалось емкостным.

**2.89.** Определить показания ваттметра и вольтметра в схеме рис. 2.89, если известны показания амперметра и параметры схемы:  $I = 4 \text{ А}$ ;  $x_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 15 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = r_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 5 \text{ Ом}$ ;  $r = 2 \text{ Ом}$ , одноименные выводы катушек в общем узле.

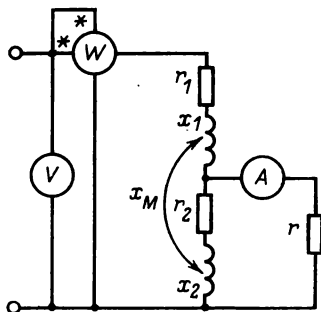


Рис. 2.89

**2.90.** В цепи рис. 2.90 определить показание амперметра.

Дано:  $x_1 = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_C = 50 \text{ Ом}$ ;  $k = 1$ ;  $E_1 = (80 - j60) \text{ В}$ ;  $E_2 = (40 + j30) \text{ В}$

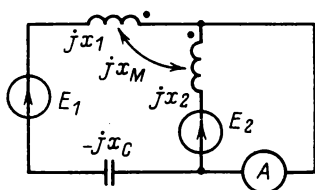


Рис. 2.90

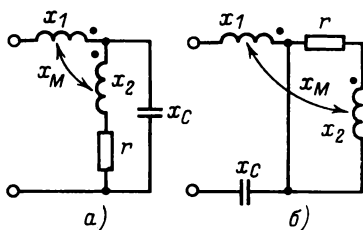


Рис. 2.91

**2.91.** Определить входные сопротивления для цепей рис. 2.91, а и б при  $x_C = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_1 = 50 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 10 \text{ Ом}$ ;  $r = 30 \text{ Ом}$ .

**У к а з а н и е.** Рекомендуются предварительно цепи преобразовать в эквивалентные схемы, не содержащие взаимной индуктивности.

**2.92.** Для цепи рис. 2.92 заданы ток  $I_3 = 1 \text{ А}$  и сопротивления  $x_{C1} = 35 \text{ Ом}$ ;  $x_{L1} = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $x_{L3} = 60 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 10 \text{ Ом}$ .

Определить токи и построить топографическую диаграмму при: 1) указанной разметке выводов; 2) соединении индуктивных катушек в узле  $b$  разноименными выводами; принять  $\phi_a = 0$ .

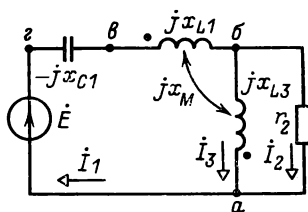


Рис. 2.92

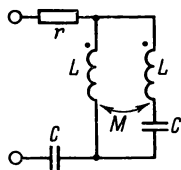


Рис. 2.93

**2.93.** Для двухполюсника (рис. 2.93) дано:  $r = \omega L = 2 \text{ кОм}$ ;  $1/\omega C = 1 \text{ кОм}$ ;  $k = 0,5$ .

- 1) Найти входное сопротивление двухполюсника.
- 2) Определить входное сопротивление при соединении индуктивных катушек в узле разноименными выводами.

**2.94.** Для двухполюсника (рис. 2.94) дано:  $x_{L1} = 80 \text{ Ом}$ ;  $x_{L2} = 240 \text{ Ом}$ ;  $x_{L3} = 160 \text{ Ом}$ ;  $x_{12} = x_{23} = 80 \text{ Ом}$ ;  $x_{13} = 40 \text{ Ом}$ . Частота напряжения питания  $\omega = 10^5 \text{ рад/с}$ .

Определить, при каком значении емкости  $C$  в двухполюснике будет наблюдаться резонанс.

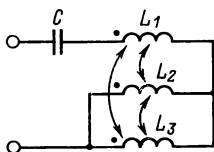
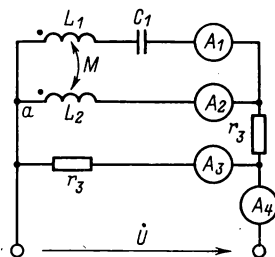


Рис. 2.94

Рис. 2.95 →



**2.95.** Для двухполюсника (рис. 2.95) дано:  $L_1 = 20 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 40 \text{ мГн}$ ;  $M = 20 \text{ мГн}$ ;  $r_3 = 1 \text{ кОм}$ ; напряжение питания  $U = 20 \text{ В}$  с частотой  $\omega = 10^5 \text{ рад/с}$ . Емкость  $C_1$  подобрана так, что вся цепь настроена в резонанс.

Определить при возможных резонансах показания приборов. Рассмотреть два варианта соединения катушек в узле  $a$ : 1) одноименными (рис. 2.95) и 2) разноименными выводами.

**2.96.** Найти, при каком сопротивлении конденсатора источник ЭДС (рис. 2.96) развивает максимальную мощность и определить эту мощность.

Дано:  $E = 100$  В;  $x_1 = 20$  Ом;  $x_2 = 30$  Ом;  $x_M = r = 10$  Ом.

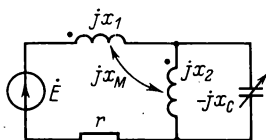


Рис. 2.96

**2.97.** Рассчитать токи в схемах рис. 2.97, а–г и найти показания приборов.

Дано:  $E = j180$  В;  $j = j15$  А;  $x_1 = 10$  Ом;  $x_2 = 20$  Ом;  $x_M = 10$  Ом;  $x_C = 20$  Ом;  $r = 15$  Ом.

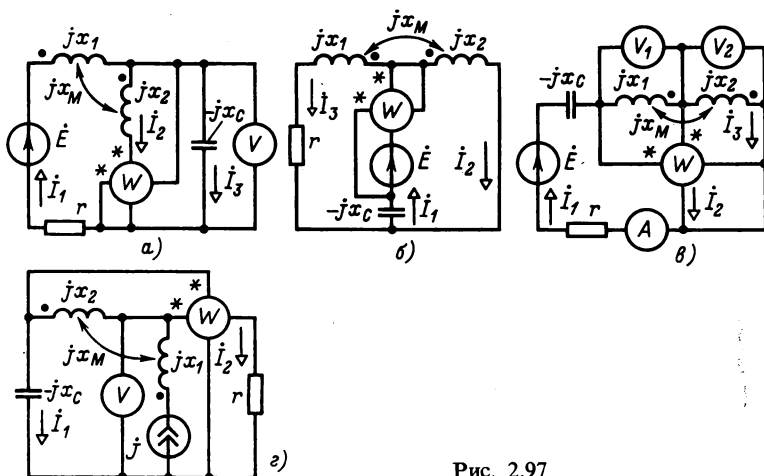


Рис. 2.97

**2.98.** Найти токи и построить топографическую диаграмму для схемы рис. 2.98, приняв  $\phi_a = 0$ .

Дано:  $E_1 = 100$  В;  $E_2 = 100 \angle 90^\circ$  В;  $r_1 = 20$  Ом;  $\omega L_1 = 20$  Ом;  $\omega L_2 = 60$  Ом;  $1/\omega C_2 = 30$  Ом;  $r_3 = 30$  Ом;  $\omega L_3 = 40$  Ом;  $\omega M = 20$  Ом.

**2.99.** Определить емкостное сопротивление  $x_C$ , при котором в схеме рис. 2.99 мощность, отдаваемая источником с напряжением  $\dot{U} = 100$  В, чисто активная; найти эту мощность.



Дано:  $r_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $x_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 10 \text{ Ом}$ .  
 Определить, если возможно, значение  $x_C$ , при котором полная мощность источника равна нулю.

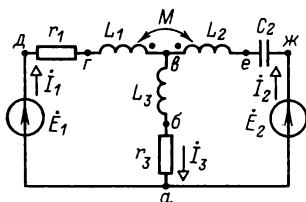


Рис. 2.98

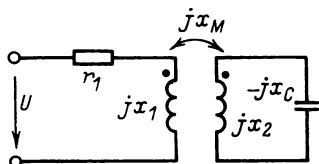


Рис. 2.99

**2.100(Р).** Для двухполюсника рис. 2.100 дано:  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 17 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 4,75 \text{ мГн}$ ;  $L_3 = 6,34 \text{ мГн}$ ;  $M_{12} = M_{23} = M_{31} = 1 \text{ мГн}$ ; угловая частота напряжения питания  $\omega = 10^4 \text{ рад/с}$ .

Пользуясь эквивалентными схемами без взаимных индуктивностей, найти: значения емкости, при которых будет резонанс; число возможных резонансов; входные сопротивления при резонансах.

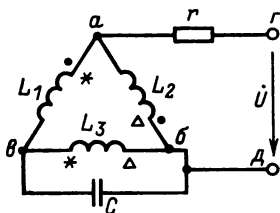


Рис. 2.100

**Решение.** Исключим индуктивную связь первой и второй катушек. Индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  подключены к узлу  $a$  разноименными выводами. Поэтому в ветви, содержащие  $L_1$  и  $L_2$ , включаем дополнительные индуктивности, равные  $M_{12}$ , а в третью ветвь  $ag$  — такую же индуктивность, но отрицательную. Для устранения

индуктивной связи второй и третьей катушек необходимо в ветви, содержащие  $L_2$  и  $L_3$ , включить отрицательные индуктивности, численно равные  $M_{23}$ , так как ветви подключены к узлу  $b$  одноименными выводами, а в третью ветвь  $b-d$  — такую же положительную индуктивность. Проведя аналогичные рассуждения для узла  $в$ , получим эквивалентную схему рис. 2.100Р, а.

Определим значения результирующих индуктивностей ветвей:

$$L_{AB} = L_2 + M_{12} - M_{23} = 4,75 + 1 - 1 = 4,75 \text{ мГн};$$

$$L_{BB} = L_3 + M_{13} - M_{23} = 6,34 + 1 - 1 = 6,34 \text{ мГн};$$

$$L_{BA} = L_1 + M_{13} + M_{12} = 17 + 1 + 1 = 19 \text{ мГн}.$$

Преобразуем треугольник  $AB\Gamma$ , состоящий из однородных элементов, в эквивалентную звезду (рис. 2.100Р, б):

$$L_A = L_{AB}L_{BA}/(L_{AB} + L_{BA} + L_{\Gamma A}) = 3,0 \text{ мГн}$$

и аналогично  $L_B = 1,0 \text{ мГн}$ ;  $L_\Gamma = 4,0 \text{ мГн}$ .

Как видно из рис. 2.100Р, б, в схеме возможны два резонанса: параллельный, когда проводимость параллельно включенных ветвей чисто активная, а в данном случае должна быть равна нулю, и последовательный, когда мнимая часть входного сопротивления двухполюсника равна нулю.

Запишем условие, при котором в цепи будет параллельный резонанс:

$$\frac{1}{\omega L_B + \omega M_{23}} + \frac{1}{\omega L_\Gamma - \omega M_{13} - 1/\omega C} = 0,$$

откуда найдем значение емкости:  $C = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$ .

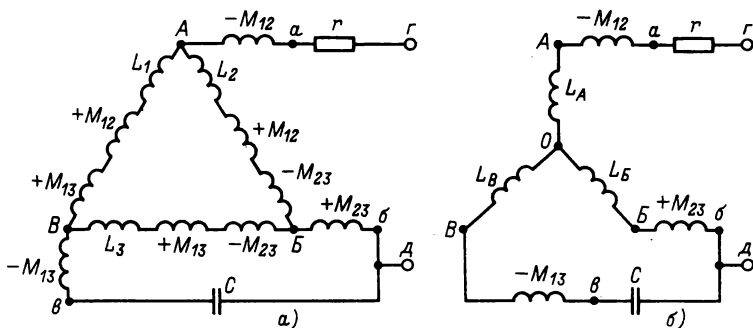


Рис. 2.100Р

Входное сопротивление двухполюсника

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = r + j \left[ \omega L_A - \omega M_{12} + \frac{(\omega L_B - \omega M_{13} - 1/\omega C)(\omega L_\Gamma + \omega M_{23})}{\omega L_\Gamma - \omega M_{13} - 1/\omega C + \omega L_B + \omega M_{23}} \right].$$

Приравняв нулю мнимую часть, найдем значение емкости, при которой в цепи будет последовательный резонанс:  $C = 40 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ .

Определим входные сопротивления при резонансах. При параллельном резонансе проводимости ветвей, включенных между точками О и б (рис. 2.100Р, б), равны и противоположны по знаку и, следовательно, суммарная проводимость равна нулю, т. е. входное сопротивление бесконечно большое.

При последовательном резонансе входное сопротивление равно  $r = 10 \text{ Ом}$ , так как его мнимая часть равна нулю.

**2.101.** Две индуктивно связанные катушки включены по схеме, показанной на рис. 2.101.

Дано:  $L_1 = 1 \text{ Гн}$ ;  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,5 \text{ Гн}$ ;  $C_1 = 1 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$ ; ток источника  $\dot{J} = 0,1 \text{ А}$ ;  $\omega = 10^3 \text{ рад/с}$ .

Определить показания приборов (не применяя преобразования схемы).

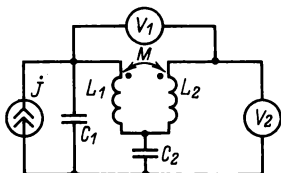


Рис. 2.101

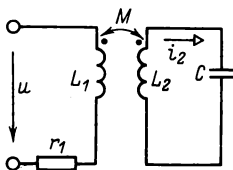


Рис. 2.102

**2.102.** Для цепи рис. 2.102 дано:  $\omega L_1 = \omega L_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $k = 0,5$ ;  $r_1 = 2 \text{ кОм}$  и напряжение питания  $u = 14,1 \sin(10^4 t + 34^\circ) \text{ В}$ .

Определить емкость  $C$ , при которой вся цепь будет настроена в резонанс, и ток  $i_2$  при резонансе. Выяснить, изменится ли значение емкости  $C$ , если разметку выводов у одной из катушек изменить на противоположную.

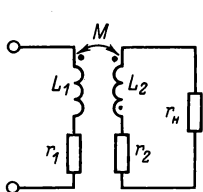


Рис. 2.103

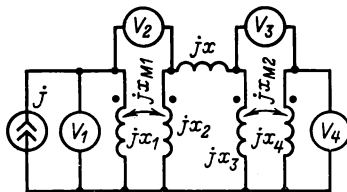


Рис. 2.104

**2.103.** Для трансформатора (рис. 2.103) дано:  $\omega L_1 = 1 \text{ кОм}$ ;  $\omega L_2 = 4 \text{ кОм}$ ;  $k = 0,6$ ;  $r_1 = 200 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 800 \text{ Ом}$  и  $r_n = 1 \text{ кОм}$ .

Определить комплексные сопротивления: вносимое из вторичной цепи трансформатора в первичную и входное.

**2.104.** В цепи рис. 2.104 определить показания вольтметров.

Дано:  $x_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_3 = 30 \text{ Ом}$ ;  $x_4 = 60 \text{ Ом}$ ;  $x = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_{M1} = 20 \text{ Ом}$ ;  $x_{M2} = 40 \text{ Ом}$ ;  $\dot{J} = 5 \text{ А}$ .

**2.105(Р).** С двухобмоточным трансформатором, подключенным к источнику с напряжением  $\dot{U}_1 = 200 \text{ В}$  (рис. 2.105), производятся опыты короткого замыкания и холостого хода на

вторичных выводах. В режиме короткого замыкания  $I_{1к} = 60,6 \angle -54^\circ 50' \text{ А}$ , в режиме холостого хода  $I_{1х} = 20(1 - j3) \text{ А}$ ,  $\dot{U}_{2х} = 60(3 + j1) \text{ В}$ .

Определить параметры трансформатора.

Решение. Для трансформатора нужно определить величины  $r_1$ ,  $x_1$ ,  $r_2$ ,  $x_2$  и  $x_M$ .

В режиме холостого хода:

входное сопротивление

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_{1х} = 1 + j3 \text{ Ом},$$

т. е.  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $x_1 = 3 \text{ Ом}$ ;

сопротивление взаимной индуктивности

$$\underline{Z}_M = jx_M = \dot{U}_{2х} / \dot{I}_{1х} = j3 \text{ Ом},$$

т. е.  $x_M = 3 \text{ Ом}$ .

В режиме короткого замыкания при выбранных направлениях токов справедливы следующие уравнения для первичного и вторичного контуров:

$$\dot{I}_{1к} \underline{Z}_1 - \dot{I}_{2к} \underline{Z}_M = \dot{U}_1; \dot{I}_{2к} \underline{Z}_2 - \dot{I}_{1к} \underline{Z}_M = 0,$$

откуда

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = \frac{x_M^2}{\dot{U}_1 / \dot{I}_{1к} - \underline{Z}_1} = 3(3 + j1) \text{ Ом},$$

т. е.  $r_2 = 9 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 3 \text{ Ом}$ .

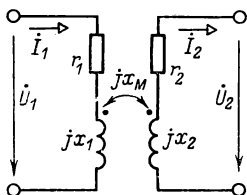


Рис. 2.105

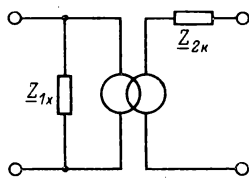


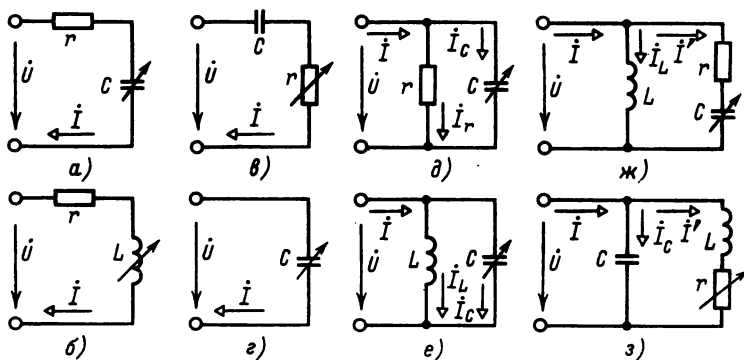
Рис. 2.106

**2.106.** Понижающий трансформатор мощностью  $S = 60 \text{ МВ} \cdot \text{А}$  с номинальными напряжениями  $U_1 = 36 \text{ кВ}$ ,  $U_2 = 5 \text{ кВ}$  в режиме холостого хода потребляет мощность  $P_x = 50 \text{ кВт}$  при токе  $I_{1х} = 0,05 I_1$ , а в режиме короткого замыкания — ток  $I_{1к} = I_1$  при  $U_{1к} = 0,09 U_1$  и  $P_k = 150 \text{ кВт}$ .

Определить параметры  $\underline{Z}_{1х}$  и  $\underline{Z}_{2к}$  эквивалентной схемы рис. 2.106.

## 2.7. Диаграммы для цепей с изменяющимися параметрами

2.107. Каждый из двухполюсников, представленных на рис. 2.107, *a–з*, присоединен к источнику синусоидального напряжения  $U = 10$  В. Неизменяющиеся элементы цепи имеют сопротивления по 100 Ом, сопротивление изменяющегося элемента принимает значения от 0 до  $\infty$ .



Построить круговую или линейную диаграммы входного тока для каждого из двухполюсников.

2.108. Для схемы рис. 2.108 определить, как изменяются значение и фаза  $\beta$  напряжения  $\dot{U}_{ab}$  при изменении емкостного сопротивления  $x_C$  от 0 до  $\infty$ , если  $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ ,  $r_2 = 5r_1$ .

Что изменится, если сопротивления  $r_1$  увеличить в 5 раз?

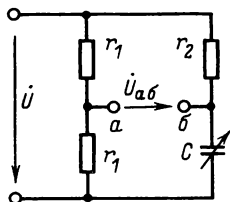


Рис. 2.108

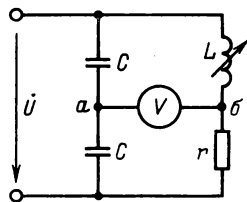


Рис. 2.109

2.109. При помощи круговой диаграммы показать, как изменяется показание вольтметра при изменении индуктивного сопротивления  $x_L$  от 0 до  $\infty$ , если цепь рис. 2.109 подключена к источнику синусоидального напряжения  $\dot{U} = 100$  В.

2.110. Построить круговые диаграммы токов  $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_C$  и напряжения  $\dot{U}_{ab}$  схемы рис. 2.110 при изменении емкости  $C$  в пределах от 0 до  $\infty$  и известных сопротивлениях  $r_L = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_C = 12,5 \text{ Ом}$ ;  $x_L = 30 \text{ Ом}$  и напряжении  $\dot{U} = 200 \text{ В}$ .

Определить из диаграмм: 1) значения тока  $\dot{I}_C$ , при которых общий ток  $\dot{I}$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}$ , и соответствующие сопротивления  $x_C$ ; 2) значение тока  $\dot{I}$ , при котором  $\dot{U}_{ab} = 0$ , и соответствующее сопротивление  $x_C$ .

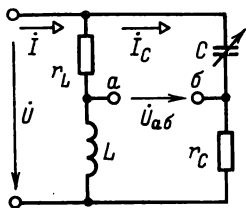


Рис. 2.110

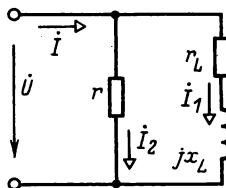


Рис. 2.111

2.111. При изменении частоты напряжения питания двухполюсника (рис. 2.111) в пределах  $0 \leq \omega \leq \infty$  годографом тока  $\dot{I}$  на комплексной плоскости является дуга окружности.

Найти: 1) значение  $x_L$ , при котором токи  $I_1 = I_2$ ; 2) значение  $x_L$ , при котором ток  $I = \sqrt{5}I_2$ ; 3) токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I$  при  $x_L = 2,5 \text{ Ом}$ , если  $U = 200 \text{ В}$ ,  $r_L = 10 \text{ Ом}$  и  $r = 20 \text{ Ом}$ .

2.112. В схеме рис. 1.112 сопротивление нагрузки  $r$  изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ .

Дано:  $x_1 = -20 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = -20 \text{ Ом}$ ;  $x_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E} = 120 \text{ В}$ .

При помощи круговой диаграммы тока  $\dot{I}$  найти: 1) при каком значении сопротивления  $r$  реактивная мощность источника

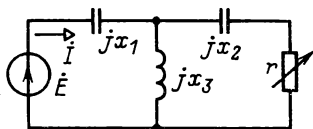


Рис. 2.112

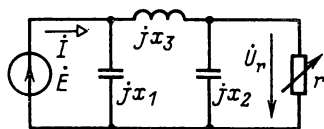


Рис. 2.113

равна нулю и активную мощность источника в этом режиме; 2) при каких значениях сопротивления  $r$  угол сдвига фаз между ЭДС  $\dot{E}$  и током  $\dot{I}$  равен: а)  $+45^\circ$  и б)  $-45^\circ$ .

2.113. Построить круговую диаграмму для тока  $\dot{I}$  схемы рис. 2.113 при изменении сопротивления  $r$  в пределах  $0 \leq r \leq \infty$ .

Дано:  $x_1 = -20 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = -20 \text{ Ом}$ ;  $x_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E} = 120 \text{ В}$ .

При помощи диаграммы: 1) определить, при каком сопротивлении  $r$  активная  $P$  и реактивная  $Q$  мощности источника численно одинаковы; найти их значения, а также ток  $I$  и напряжение  $U_r$  в этом режиме; 2) найти значения  $I$ ,  $U_r$ ,  $P$ ,  $Q$  и полной мощности источника  $S$  при  $r = 10 \text{ Ом}$ .

2.114. В схеме рис. 2.114 индуктивность изменяется в пределах  $0 \leq L \leq \infty$ .

Дано:  $\dot{E} = 100 \text{ В}$ ;  $r = 25 \text{ Ом}$ ;  $r_C = 45 \text{ Ом}$ ;  $x_C = 70 \text{ Ом}$ .

Построить круговую диаграмму тока  $\dot{I}$ . При помощи диаграммы определить значение тока  $I$  и сопротивление  $x_L$ : 1) в режиме, при котором реактивная мощность источника равна нулю; 2) в режиме, при котором сдвиг фаз между ЭДС  $\dot{E}$  и током максимален, найти значение этого сдвига фаз.

2.115. Для схемы рис. 2.115 дано:  $\dot{E}_1 = 400 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = j40 \text{ В}$ ;  $j = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ А}$ ;  $x_{L1} = 40 \text{ Ом}$ ;  $x_C = 20 \text{ Ом}$ ;  $r = 20 \text{ Ом}$ .

При помощи круговой диаграммы тока  $\dot{I}_2$  определить: 1) при каком сопротивлении  $x_L$  источник ЭДС  $\dot{E}_2$  отдает или потребляет максимальную активную мощность, значение этой мощности и угол сдвига фаз тока  $\dot{I}_2$  в этом режиме относительно этого же тока в режиме короткого замыкания ( $x_L = 0$ ); 2) при каком сопротивлении  $x_L$  потребляемая источником ЭДС  $\dot{E}_2$  мощность чисто активная и ее значение.

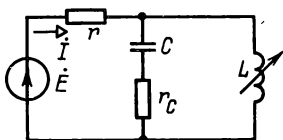


Рис. 2.114

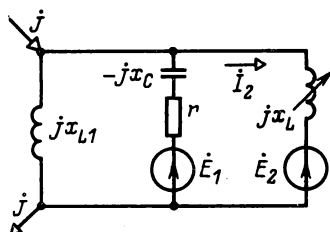


Рис. 2.115 →

2.116. По круговой диаграмме тока  $\dot{I}_1$  трансформатора (рис. 2.116) определить его значение при сопротивлении  $r = 75 \text{ Ом}$ ; вычислить полную, активную и реактивную мощности источника в этом режиме.

Дано:  $x_1 = 200 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = x_M = 100 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 100 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E} = 100 \text{ В}$ .

2.117(Р). Для трансформатора (рис. 2.117) построить круговую диаграмму тока  $\dot{I}_1$ .

Определить по диаграмме: 1) сопротивление  $x_C$ , при котором ток  $\dot{I}_1$  совпадает по фазе с ЭДС  $\dot{E}$ , и ток  $\dot{I}_1$  в этом режиме;

- 2) сопротивления  $x_C$ , при которых полная мощность трансформатора максимальна и минимальна, и значения этих мощностей;  
 3) сопротивление  $x_C$ , при котором максимальна активная составляющая тока  $\dot{I}_1$ , и комплексную мощность источника в этом режиме.

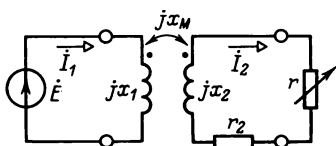


Рис. 2.116

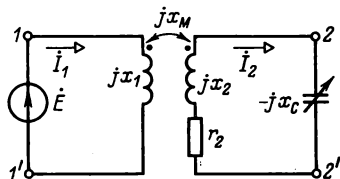


Рис. 2.117

Дано:  $\dot{E} = 100$  В;  $x_1 = 500$  Ом;  $x_2 = 30$  Ом;  $x_M = 100$  Ом;  
 $r_2 = 100$  Ом.

Решение. Определим токи  $\dot{I}_{1к} (x_C = 0)$  и  $\dot{I}_{1х} (x_C \rightarrow \infty)$ .

Из системы уравнений трансформатора при  $x_C = 0$

$$\begin{aligned} jx_1 \dot{I}_{1к} - jx_M \dot{I}_{2к} &= \dot{E}; \\ (r_2 + jx_2) \dot{I}_{2к} - jx_M \dot{I}_{1к} &= 0 \end{aligned}$$

получим

$$\dot{I}_{1к} = \frac{\dot{E}}{jx_1 + x_M^2/(r_2 + jx_2)} = 0,2 - j0,4 \text{ А};$$

при  $x_C \rightarrow \infty$  находим  $\dot{I}_{1х} = \dot{E}/jx_1 = -j0,2$  А.

Из опыта обратного короткого замыкания определим  $\underline{Z}_{2к}$  (короткозамкнуты выводы 1-1' и определяется сопротивление со стороны выводов 2-2'). Подключив источник ЭДС  $\dot{E}'$  между выводами 2-2', запишем уравнения

$$jx_1 \dot{I}'_1 - jx_M \dot{I}'_2 = 0; (r_2 + jx_2) \dot{I}'_2 - jx_M \dot{I}'_1 = \dot{E}',$$

откуда

$$\underline{Z}_{2к} = z_{2к} \angle \varphi_{2к} = \dot{E}'/\dot{I}'_2 = r_2 + jx_2 - jx_M^2/x_1 = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ Ом}.$$

На комплексной плоскости (рис. 2.117Р) построим в выбранном масштабе векторы  $\dot{I}_{1к}$  и  $\dot{I}_{1х}$  (на рисунке показаны только точки  $k$  и  $x$ ). Соединим точки  $k$  и  $x$  и проведем перпендикуляр  $ab$  через середину отрезка  $xk$ . Из точки  $x$  на отрезке отложим в некотором масштабе сопротивление  $z_{2к} = 10\sqrt{2}$  Ом (точка  $d$ ).

Из точки  $d$  под углом  $-\psi = \varphi_{2к} - \varphi_2 = 45^\circ - (-90^\circ) = 135^\circ$  проведем линию переменного параметра (ЛПП). На



ЛПП от точки  $\delta$  откладываем модуль сопротивления нагрузки  $x_C$  в том же масштабе сопротивлений, что и для  $z_{2k}$ .

Из точки  $x$  проведем перпендикуляр к ЛПП до пересечения с перпендикуляром  $ab$  в точке  $b$  — центре круговой диаграммы тока  $\dot{I}_1$ . Рабочая часть окружности находится с той же стороны отрезка  $xk$ , что и ЛПП. Векторы, соединяющие начало координат (точка 0) с точками окружности, изображают ток  $\dot{I}_1$ .

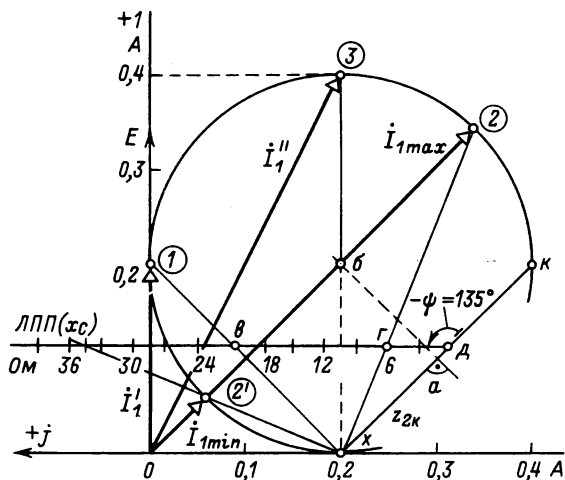


Рис. 2.117Р

Из диаграммы рис. 2.117Р следует:

1) Режим, при котором совпадают по фазе ток  $\dot{I}_1' = 0,2$  А и ЭДС  $\dot{E}$ , получается при  $x_C' = 20$  Ом (точка  $\delta$ ). Для определения этого значения  $x_C'$  соединяем прямой рабочую точку 1 дуги окружности с точкой  $x$ . Точка пересечения  $\delta$  прямой и ЛПП определяет искомое сопротивление.

2) Максимальная полная мощность получается при максимальном токе (точка 2 на дуге окружности)  $\dot{I}_{1max} = 0,477 \angle -45^\circ$  А. При этом  $x_C = 6$  Ом (точка  $z$ ) и полная мощность  $S_{max} = EI_{1max} = 48,7$  В·А.

Минимальная полная мощность получается при токе  $I_{1min} = 0,0835 \angle -45^\circ$  А (точка  $2'$ ); при этом  $x_C = 34,5$  Ом и  $S_{min} = EI_{1min} = 8,35$  В·А.

3) Режиму с максимальной активной составляющей тока  $\dot{I}_1$ , равной 0,4 А, соответствует рабочая точка 3, т. е. ток  $\dot{I}_1'' = 0,4 - j0,2$  А при  $x_C = 10,5$  Ом; комплексная мощность  $\underline{S} = \dot{E}(\dot{I}_1^*)'' = 40 + j20$  В·А.

## 2.8. Топологические методы анализа. Расчет схемных функций

2.118(Р). По топологической формуле (Мэзона) определить ток  $\dot{I}$  в цепи рис. 2.118 и найти сопротивление цепи для источника тока  $\dot{J} = 5 \angle 90^\circ$  А при  $r = x_L = x_C = 5$  Ом.

Решение. По топологической формуле (1.59) вычислим передачу  $\underline{H} = \dot{I}/\dot{J}$ , где  $\dot{I}$  — искомый ток,  $\dot{J}$  — источник тока.

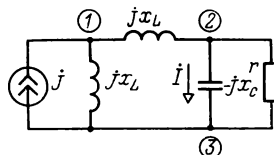


Рис. 2.118

Ток  $\dot{I}$  можно рассматривать как показание прибора — амперметра, условно вводимого в цепь (рис. 2.118Р, а).

Записываем проводимости всех ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 1/jx_L = -j0,2 \text{ См}; \quad \underline{Y}_3 = 1/(-jx_C) = j0,2 \text{ См}; \quad \underline{Y}_4 = 1/r = 0,2 \text{ См}.$$

Передача  $\underline{H}_1 = \sum_k \underline{P}'_k \underline{\Delta}'_k / \underline{\Delta}$ , где  $\underline{P}'_k$  и  $\underline{\Delta}'_k$  — соответственно

произведение проводимостей ветвей всех путей от источника через прибор и миноры этих путей;  $\underline{\Delta}$  — узловой определитель схемы.

В рассматриваемой схеме рис. 2.118Р, а только один такой путь, для которого  $\underline{P}'_1 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3$ ;  $\underline{\Delta}'_1 = 1$ .

При определении определителя  $\underline{\Delta}$  замыкаем накоротко амперметр, размыкаем ветвь с источником тока (рис. 2.118Р, б) и находим, что

$$\underline{\Delta} = (\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 = 0,04 - j0,008 \text{ См}^2.$$

Следовательно,

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2} = 0,447 \angle 63^\circ 20'.$$

Ток  $\dot{I} = \underline{H} \dot{J} = 2,235 \angle 153^\circ 20'$  А.

Сопротивление цепи для источника тока рассмотрим как передачу

$$\underline{H}_2 = \dot{U}/\dot{J},$$

где  $\dot{U}$  — показание прибора — вольтметра (рис. 2.118Р, в).

По топологической формуле (1.59) передача

$$\underline{H}_2 = \sum_k \underline{\Pi}_k \Delta'_k / \Delta,$$

причем имеется только один путь, для которого  $\underline{\Pi}'_1 = 1$ . Определяя минор, закорачиваем этот путь; получается граф, показанный на рис. 2.118Р,г. Следовательно, минор  $\Delta'_1 = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$ .

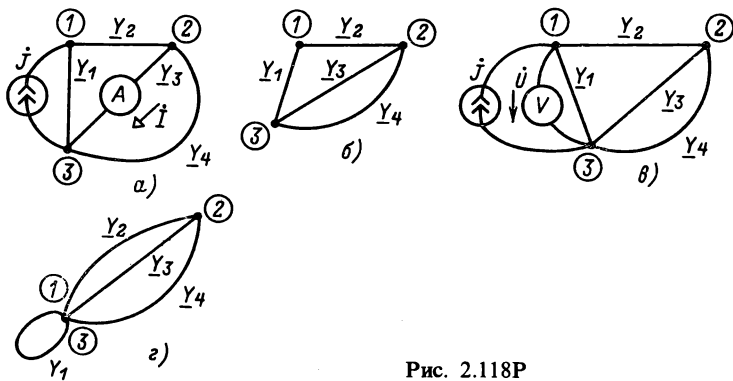


Рис. 2.118Р

Для вычисления определителя  $\Delta$  размыкаем ветви с вольтметром и источником тока; получаем граф рис. 2.118Р,б, для которого определитель был уже найден.

Таким образом,

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{H}_2 = \frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\Delta} = 2,24 \angle 63^\circ 25' \text{ Ом.}$$

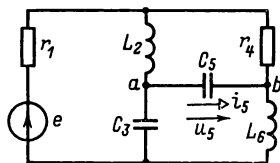


Рис. 2.119

2.119. Определить ток  $\underline{i}_5$  в схеме рис. 2.119 по топологической формуле (Мэзона) при  $r_1 = r_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = \omega L_6 = 1/\omega C_3 = 1/\omega C_5 = 2 \text{ Ом}$ ; ЭДС  $e = 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$ .

Найти напряжение  $\underline{U}_5$  при разомкнутой ветви  $ab$ .

**2.120.** Определить входное сопротивление цепи рис. 2.120 для источника ЭДС  $e = 24\sqrt{2} \sin \omega t$  В и найти показание вольтметра, применяя формулу Мэзона.

Дано:  $r_1 = x_1 = 2$  Ом;  $r_2 = r_6 = x_5 = -x_3 = -x_4 = 5$  Ом.

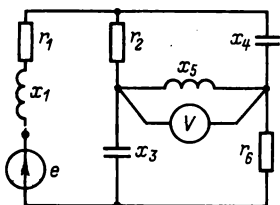


Рис. 2.120

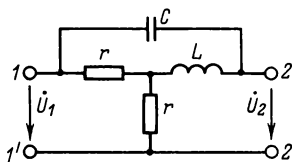


Рис. 2.121

**2.121.** Применяя топологическую формулу (Мэзона), определить коэффициенты  $A, B, C, D$  четырехполосника (рис. 2.121) и найти напряжение  $\dot{U}_2$  при заданном напряжении  $\dot{U}_1 = 20$  В и параметрах четырехполосника:  $r = 2$  Ом;  $\omega L = 1/\omega C = 5$  Ом.

## 2.9. Применение сигнальных графов

**2.122(Р).** Для схемы рис. 2.122 составить систему уравнений методом узловых потенциалов. По системе уравнений построить сигнальный граф. При помощи сигнального графа найти по формуле Мэзона (1.65) ток  $\dot{I}_2$ :

Дано:  $\dot{E}_1 = 24 \angle 0^\circ$  В;  $\dot{E}_2 = 12 \angle 90^\circ$  В;  $x_2 = -x_1 = -x_3 = 2$  Ом;  $r_1 = r_2 = 5$  Ом.

**Решение.** Запишем уравнения для узловых потенциалов узлов 1 и 2 при  $\phi_3 = 0$ :

$$\underline{Y}_{11}\phi_1 + \underline{Y}_{12}\phi_2 = \dot{E}_1 \underline{Y}_1; \quad \underline{Y}_{21}\phi_1 + \underline{Y}_{22}\phi_2 = \dot{E}_2 \underline{Y}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= 1/jx_1 + 1/r_1 + 1/r_2 = 0,64 \angle 51^\circ 20' \text{ См}; \quad \underline{Y}_{22} = 1/r_2 + \\ &+ 1/jx_3 + 1/jx_2 = 0,2 \text{ См}; \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -0,2 \text{ См}; \quad \underline{Y}_1 = \\ &= 1/jx_1 = j0,5 \text{ См}; \quad \underline{Y}_2 = 1/jx_2 = -j0,5 \text{ См}. \end{aligned}$$

Кроме того, по обобщенному закону Ома

$$\dot{I}_2 = (\dot{E}_2 - \phi_2)/\underline{Z}_2,$$

где  $\underline{Z}_2 = jx_2$ .

Приведем эти три уравнения в причинно-следственной форме:

$$\phi_1 = \frac{Y_1}{Y_{11}} \dot{E}_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \phi_2; \quad \phi_2 = \frac{Y_2}{Y_{22}} \dot{E}_2 - \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \phi_1;$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_2} \dot{E}_2 - \frac{1}{Z_2} \phi_2.$$

Последней системе уравнений соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 2.122Р. Граф имеет только один замкнутый контур, поэтому его определитель

$$\Delta = 1 - \left( -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \right) \left( -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \right) = 0,836 \angle 17^\circ 5'.$$

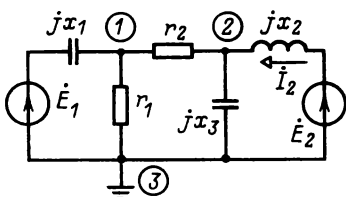


Рис. 2.122

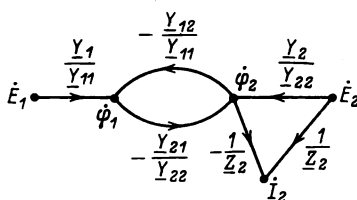


Рис. 2.122Р

Для вычисления тока  $I_2$  применим принцип наложения. От источника  $\dot{E}_1$  к столу  $I_2$  есть только один прямой путь с передачей

$$\Pi'_1 = \frac{Y_1}{Y_{11}} \left( -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \right) \left( -\frac{1}{Z_2} \right) = 0,39 \angle 128^\circ 40' \text{ См},$$

который касается замкнутого контура; поэтому минор этого пути  $\Delta'_1 = 1$ .

При помощи формулы (1.65) находим составляющую тока  $I_2$ , обусловленную источником ЭДС  $\dot{E}_1$ ,

$$\dot{I}_2 = \frac{\Pi'_1 \Delta'_1}{\Delta} \dot{E}_1 = 11,1 \angle 111^\circ 35' \text{ А}.$$

От источника  $\dot{E}_2$  к стоку  $I_2$  есть два прямых пути: первый путь с передачей  $\Pi'_2 = 1/Z_2 = -j0,5 \text{ См}$  и минором  $\Delta'_2 = \Delta$ , второй путь с передачей  $\Pi'_3 = (Y_2/Y_{22})(-1/Z_2) = 1,25 \text{ См}$  и минором  $\Delta'_3 = 1$ . Поэтому составляющая тока

$\dot{I}_2$ , обусловленная источником ЭДС  $\dot{E}_2$ ,

$$\dot{I}_2'' = \frac{(\Pi_1 \Delta_2' + \Pi_3 \Delta_3')}{\Delta} \dot{E}_2 = 2,03 \angle 56^\circ 45' \text{ A.}$$

Ток  $\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = 29,2 \angle 68^\circ 55' \text{ A.}$

**2.123.** Для схемы рис. 2.123 составить систему уравнений методом контурных токов. Построить сигнальный граф, соответствующий этой системе уравнений. При помощи сигнального графа определить напряжение  $\dot{U}_2$ .

Дано:  $r = x_L = x_C = 5 \text{ Ом}$ ;  $x_M = 2 \text{ Ом}$ ; ЭДС и ток источников:  $\dot{E}_1 = 6 \angle 0^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 6 \angle 90^\circ \text{ В}$ ;  $j = 2 \angle 45^\circ \text{ A}$ .

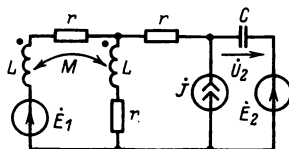


Рис. 2.123

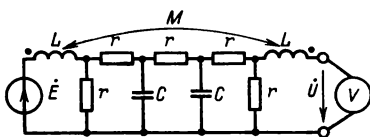


Рис. 2.124

**2.124.** Для схемы рис. 2.124 построить сигнальный граф, который соответствует системе уравнений, составленной методом контурных токов. Определить передачу  $H = \dot{U}/\dot{E}$  графа. Найти показание вольтметра электродинамической системы.

Дано:  $e = 100 \sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$ ;  $r = 4 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 2\omega M = 4 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 8 \text{ Ом}$ .

## Глава третья

### ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

#### Введение к гл. 3

*Соединение обмоток трехфазных источников.* При соединении обмоток источника звездой (рис. 3.А, а) линейные напряжения определяются через разности фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (3.1)$$

Для источника с симметричными напряжениями при правильном соединении обмоток фазные напряжения

$$\dot{U}_A = U_\phi \angle 0^\circ; \dot{U}_B = U_\phi \angle -120^\circ; \dot{U}_C = U_\phi \angle 120^\circ, \quad (3.2)$$

линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB} = U_\lambda \angle 30^\circ; \dot{U}_{BC} = U_\lambda \angle -90^\circ; \dot{U}_{CA} = U_\lambda \angle 150^\circ \quad (3.3)$$

(рис. 3.А, б). По модулю линейные напряжения  $U_{\text{л}}$  больше фазных  $U_{\text{ф}}$  в  $\sqrt{3}$  раз:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}. \quad (3.4)$$

При соединении обмоток источника треугольником (рис. 3.Б, а) линейные напряжения равны фазным (рис. 3.Б, б).

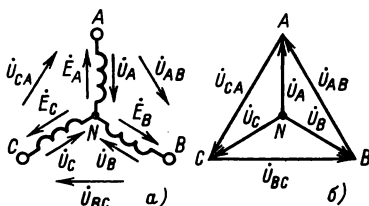


Рис. 3.А

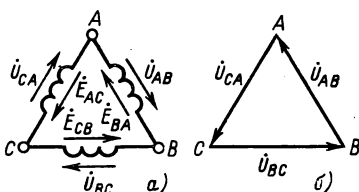


Рис. 3.Б

**Симметричный режим.** Для симметричного приемника, соединенного звездой (рис. 3.В, а),  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$ ; напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$  равно нулю, и токи в фазах

$$\dot{I}_A = \dot{U}_A / (\underline{Z} + \underline{Z}_{\text{л}}); \dot{I}_B = \dot{U}_B / (\underline{Z} + \underline{Z}_{\text{л}}); \dot{I}_C = \dot{U}_C / (\underline{Z} + \underline{Z}_{\text{л}}), \quad (3.5)$$

где  $\underline{Z}_{\text{л}}$  — сопротивление симметричной линии на фазу. По модулю токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный  $120^\circ$  (рис. 3.В, б):

$$I_A = I_B = I_C = U_{\text{ф}} / |\underline{Z} + \underline{Z}_{\text{л}}|. \quad (3.6)$$

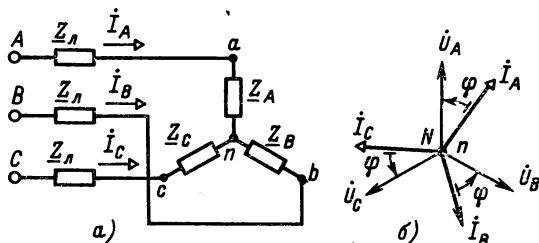


Рис. 3.В

Для симметричного приемника, соединенного треугольником (рис. 3.Г, а),  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$ . Если  $\underline{Z}_{\text{л}} = 0$ , то фазные токи приемника

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}; \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z}; \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z}. \quad (3.7)$$

По модулю токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный  $120^\circ$  (рис. 3.Г, б):

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\phi = U_\phi / |Z|. \quad (3.8)$$

Линейные токи приемника определяются через разности фазных:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (3.9)$$

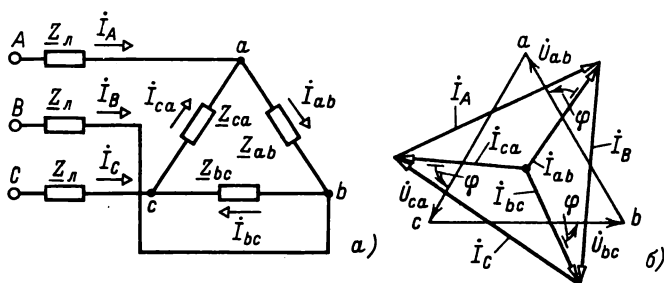


Рис. 3.Г

Как видно из векторной диаграммы (рис. 3.Г, б),

$$\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{ab} \angle -30^\circ; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_A \angle -120^\circ; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_A \angle 120^\circ. \quad (3.10)$$

По модулю линейные токи больше фазных в  $\sqrt{3}$  раз:

$$I_\phi = \sqrt{3} I_\phi. \quad (3.11)$$

Если  $Z_L \neq 0$ , то (после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду) линейные токи

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z/3 + Z_L}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z/3 + Z_L}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z/3 + Z_L}, \quad (3.12)$$

или

$$I_A = I_B = I_C = I_\phi = \frac{U_\phi}{|Z/3 + Z_L|}. \quad (3.13)$$

Фазные токи определяются через линейные:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ; \quad \dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} \angle -120^\circ; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} \angle 120^\circ. \quad (3.14)$$

Активная, реактивная и полная мощности симметричного приемника независимо от вида соединения

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos \varphi; \quad (3.15)$$



$$Q = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad (3.16)$$

$$S = 3 U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}, \quad (3.17)$$

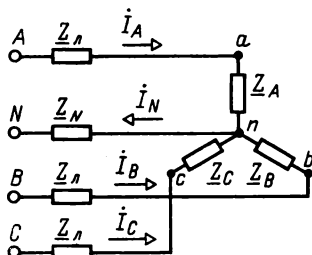
где  $\varphi$  — сдвиг по фазе между фазными напряжением и током.

**Несимметричный режим.** При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рис. 3.Д) напряжение смещения нейтрали

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (3.18)$$

где  $\underline{Y}_A = 1/(\underline{Z}_A + \underline{Z}_{\text{л}})$ ;  $\underline{Y}_B = 1/(\underline{Z}_B + \underline{Z}_{\text{л}})$ ;  $\underline{Y}_C = 1/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{л}})$ ;  $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$ ; линейные токи и ток в нейтральном проводе

$$i_A = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_{\text{л}}}; \quad i_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_{\text{л}}}; \quad i_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{л}}}; \quad i_N = \frac{\dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}. \quad (3.19)$$



← Рис. 3.Д

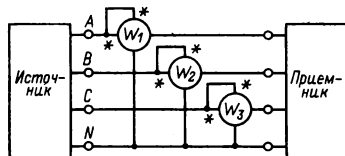


Рис. 3.Е

По первому закону Кирхгофа

$$i_N = i_A + i_B + i_C. \quad (3.20)$$

Если сопротивление  $\underline{Z}_N = 0$ , то  $\underline{Y}_N = \infty$ ,  $\dot{U}_{nN} = 0$  и

$$i_A = \dot{U}_A/(\underline{Z}_A + \underline{Z}_{\text{л}}); \quad i_B = \dot{U}_B/(\underline{Z}_B + \underline{Z}_{\text{л}}); \quad i_C = \dot{U}_C/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{л}}), \quad (3.21)$$

а ток  $i_N$  определяется по (3.20).

Если в цепи рис. 3.Д  $\underline{Z}_N = \infty$ , т. е.  $\underline{Y}_N = 0$ , то получается схема соединения звездой без нейтрального провода (рис. 3.В, а), для которой

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (3.22)$$

линейные токи определяются по (3.19). По первому закону Кирхгофа

$$i_A + i_B + i_C = 0. \quad (3.23)$$

Для приемника, соединенного звездой без нейтрального провода, токи можно определить без предварительного расчета напряжения смещения нейтрали:

$$\dot{U}_{An} = \frac{\dot{U}_{AB}\underline{Y}_B - \dot{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad \dot{U}_{Bn} = \frac{\dot{U}_{BC}\underline{Y}_C - \dot{U}_{AB}\underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C};$$

$$\dot{U}_{Cn} = \frac{\dot{U}_{CA}\underline{Y}_A - \dot{U}_{BC}\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad (3.24)$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{An}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_л}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{Bn}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_л}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{Cn}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_л}. \quad (3.25)$$

При соединении приемника треугольником (рис. 3.Г, а) и  $\underline{Z}_л = 0$  фазные токи

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{AB}/\underline{Z}_{ab}; \quad \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{BC}/\underline{Z}_{bc}; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{CA}/\underline{Z}_{ca}, \quad (3.26)$$

линейные токи определяются по (3.9).

Если  $\underline{Z}_л \neq 0$ , то треугольник сопротивлений можно преобразовать в эквивалентную звезду и для этого соединения рассчитать линейные токи, как показано выше. Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\dot{U}_{ab} = \underline{Z}'_A \dot{I}_A - \underline{Z}'_B \dot{I}_B; \quad \dot{U}_{bc} = \underline{Z}'_B \dot{I}_B - \underline{Z}'_C \dot{I}_C; \quad \dot{U}_{ca} = \underline{Z}'_C \dot{I}_C - \underline{Z}'_A \dot{I}_A; \quad (3.27)$$

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{ab}/\underline{Z}_{ab}; \quad \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{bc}/\underline{Z}_{bc}; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{ca}/\underline{Z}_{ca}, \quad (3.28)$$

где  $\underline{Z}'_A$ ,  $\underline{Z}'_B$ ,  $\underline{Z}'_C$  — сопротивления лучей звезды, эквивалентной треугольнику.

Активная и реактивная мощности приемника равны суммам соответствующих мощностей трех фаз.

*Измерение мощностей.* Для измерения активной мощности, передаваемой от источника к приемнику, в трехфазной цепи с нейтральным проводом при несимметричном режиме включают ваттметры в каждую фазу (рис. 3.Е). Активная мощность равна сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (3.29)$$

В случае симметричного режима достаточно одного ваттметра, включенного в какую-либо фазу, при этом измеряемая мощность

$$P = 3 P_W. \quad (3.30)$$

При отсутствии нейтрального провода активную мощность измеряют двумя ваттметрами, включенными по схеме, пока-

занной на рис. 3.Ж (и при симметричном, и при несимметричном режимах). Активная мощность равна алгебраической сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2}. \quad (3.31)$$

Для измерения реактивной мощности той же трехфазной системы применяют схему включения ваттметров, показанную на рис. 3.И. Реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3}(P_{W1} + P_{W2}). \quad (3.32)$$

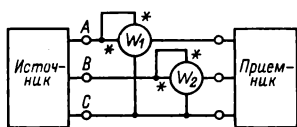


Рис. 3.Ж

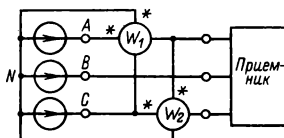


Рис. 3.И

При симметричном режиме реактивную мощность можно измерить одним ваттметром, включенным по схеме рис. 3.К. В этом случае

$$Q = \sqrt{3}P_W. \quad (3.33)$$

**Симметричные составляющие.** Любая несимметричная трехфазная система синусоидальных величин (токов, напряжений, ЭДС, магнитных потоков) может быть представлена в виде суммы трех симметричных систем (прямой, обратной и

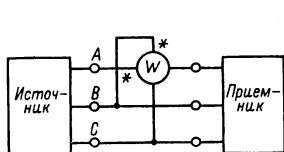


Рис. 3.К

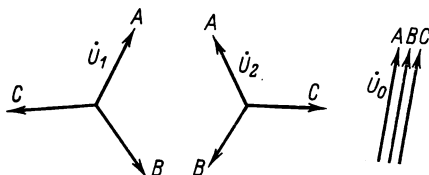


Рис. 3.Л

нулевой последовательностей) соответствующих величин. Например, для фазных напряжений (рис. 3.Л)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

где  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_0$  — векторы соответственно прямой, обратной

и нулевой последовательностей;  $a$  — фазный множитель:

$$a = 1 \angle 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2; a^2 = 1 \angle -120^\circ = -\frac{1}{2} - j\sqrt{3}/2,$$

причем  $1 + a + a^2 = 0$ .

Векторы  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  раскладываются на симметричные составляющие по формулам

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C); \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C); \\ \dot{U}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C). \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Сопротивления элементов цепи для токов различных последовательностей могут быть различными:

$$\underline{Z}_1 = \dot{U}_1/\dot{I}_1; \underline{Z}_2 = \dot{U}_2/\dot{I}_2; \underline{Z}_0 = \dot{U}_0/\dot{I}_0, \quad (3.36)$$

где  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_0$  — напряжения прямой, обратной и нулевой последовательностей на элементе;  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_0$  — токи прямой, обратной и нулевой последовательностей, вызванные в элементе напряжением соответствующей последовательности.

### 3.1. Соединение обмоток и разметка выводов трехфазных источников

3.1(Р). Для показанного на рис. 3.1 соединения обмоток трехфазного источника определить напряжение между выводами А и В, если фазная ЭДС равна 220 В.

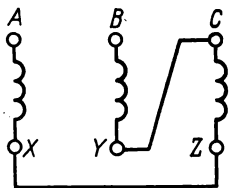


Рис. 3.1

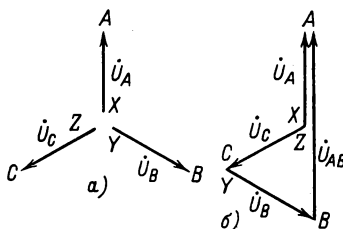


Рис. 3.1Р

**Решение.** Учитывая векторную диаграмму фазных напряжений источника (рис. 3.1Р, а), строим топографическую диаграмму для заданного соединения (рис. 3.1Р, б), из которой видно, что искомое напряжение  $U_{AB} = 2 U_\phi = 440$  В.

**3.2(Р).** Обмотки *I*, *II*, *III* симметричного трехфазного генератора имеют выводы 1–6 (рис. 3.2). Выводы 2, 4, 6 объединены. Показания вольтметров:  $U_1 = 220$  В;  $U_2 = 380$  В;  $U_3 = 220$  В.

Определить, какие выводы обмоток *II* и *III* соответствуют началам *H* и какие – концам *K*, если у обмотки *I* вывод 1 принят за начало *H*, а вывод 2 – за конец *K*.

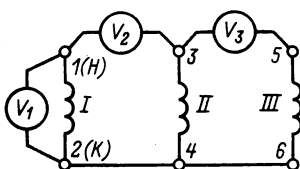
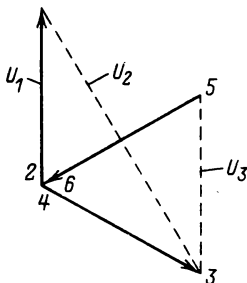


Рис. 3.2

Рис. 3.2Р →



**Решение.** Примем, что обмотка *I* является фазой *A*. Так как по данным задачи нельзя определить, какая из обмоток – *II* и *III* – является фазой *B* и какая фазой *C*, предположим, например, что обмотка *II* – фаза *B*, а обмотка *III* – фаза *C*, и по показаниям приборов построим топографическую диаграмму (рис. 3.2Р). Из диаграммы видно, что началам соответствуют выводы 3 и 6, а концам – 4 и 5.

Если принять, что обмотка *II* является фазой *C*, а обмотка *III* – фазой *B*, то топографическая диаграмма изменится, но ответ останется тем же.

**3.3.** На щитке трехфазного генератора (рис. 3.3) указана разметка выводов его обмоток.

Определить, как нужно соединить выводы, чтобы получить соединение обмоток; 1) звездой; 2) треугольником.

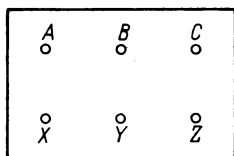


Рис. 3.3

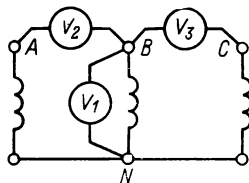


Рис. 3.4

**3.4.** Обмотки трехфазного генератора, соединенные звездой (рис. 3.4), образуют симметричную систему напряжений. Показания вольтметров:  $U_1 = 220$  В;  $U_2 = 380$  В;  $U_3 = 380$  В.

Определить показания вольтметров после обратного присоединения выводов обмотки: 1) в фазе  $A$ ; 2) в фазе  $B$ .

**3.5.** Определить напряжения между свободными концами вторичных обмоток трехфазного трансформатора для указанных на рис. 3.5,  $a - в$  их соединений при напряжениях на обмотках, равных 127 В.

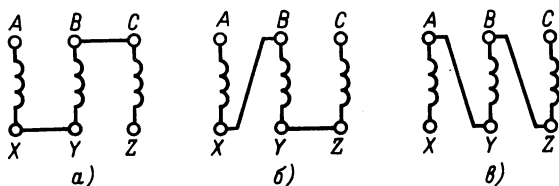


Рис. 3.5

**3.6.** Вторичные обмотки двух одинаковых трехфазных трансформаторов, соединенные звездой (рис. 3.6), имеют еще соединение между выводами  $C_1$  и  $B_2$ . Напряжения одноименных обмоток совпадают по фазе и численно равны 220 В.

Определить напряжения между выводами  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ .

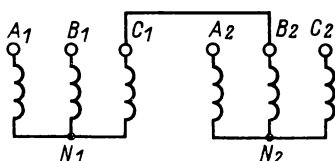


Рис. 3.6

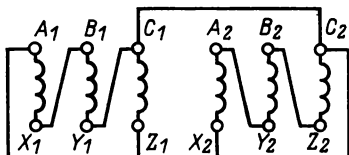


Рис. 3.7

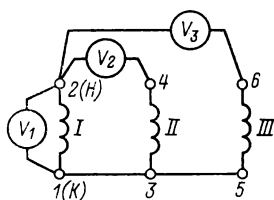


Рис. 3.8

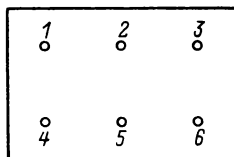


Рис. 3.9

**3.7.** Вторичные обмотки двух одинаковых трехфазных трансформаторов, соединенные треугольником, имеют еще соединение между выводами  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 3.7). Напряжения одноименных обмоток совпадают по фазе и численно равны 127 В.

Определить напряжения между выводами  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ .

**3.8.** Обмотки *I*, *II*, *III* симметричного трехфазного генератора имеют выводы 1–6 (рис. 3.8). Выводы 1, 3, 5 объединены. Показания вольтметров:  $U_1 = 127$  В;  $U_2 = 127$  В;  $U_3 = 127$  В.

Определить, какие выводы обмоток *II* и *III* соответствуют началам и какие — концам, если у обмотки *I* вывод 2 принят за начало *H*, а вывод 1 — за конец *K*.

**3.9.** Вольтметр, присоединенный к выводам трехфазного генератора 1 и 4, или 2 и 5, или 3 и 6 (рис. 3.9), показал 380 В. После соединения выводов 4, 5 и 6 вольтметр показал: между выводами 1 и 2 напряжение равно 380 В и между выводами 2 и 3 напряжение равно 380 В.

Определить, как надо соединить выводы, чтобы получить симметричную систему с линейным напряжением: 1) 660 В; 2) 380 В.

## 3.2. Симметричная нагрузка

**3.10(Р).** Найти токи в приемниках и линии цепи рис. 3.10, построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму при  $U_{\text{л}} = 380$  В в начале линии.

Дано:  $\omega L = 5$  Ом;  $r = 10$  Ом;  $1/\omega C = 30$  Ом.

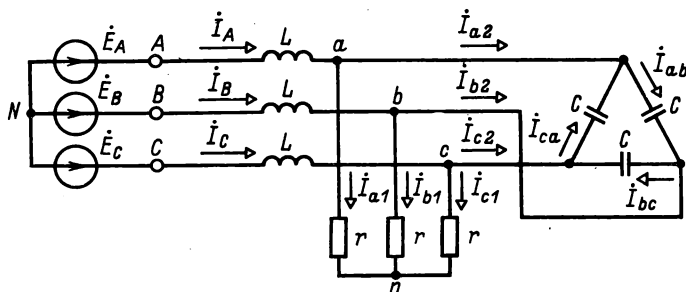


Рис. 3.10

**Решение.** Для симметричного источника, соединенного звездой, фазные ЭДС  $E_A = E_B = E_C = 380/\sqrt{3} = 220$  В. Примем  $\dot{E}_A = 220 \angle 0^\circ$  В, тогда аналогично (3.2)  $\dot{E}_B = 220 \angle -120^\circ$  В;  $\dot{E}_C = 220 \angle 120^\circ$  В.

Преобразуем треугольник сопротивлений  $1/\omega C$  в эквивалентную звезду с сопротивлением  $1/\omega C' = (1/3)(1/\omega C) = 10$  Ом.

Объединив нейтральные точки приемников с нейтралью источника (можно соединить, так как потенциалы одинако-

вые), получим расчетную схему для одной фазы (фазы  $A$ ), показанную на рис. 3.10Р, а. Для этой схемы

$$\underline{Z}_{\Sigma k} = j\omega L + \frac{r(-j/\omega C')}{r - j/\omega C'} = 5 \text{ Ом}; \quad \dot{I}_A = \dot{E}_A / \underline{Z}_{\Sigma k} = 44 \angle 0^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_{a1} = \dot{I}_A \frac{-j/\omega C'}{r - j/\omega C'} = 31,1 \angle -45^\circ \text{ А}; \quad \dot{I}_{a2} = \dot{I}_A \frac{r}{r - j/\omega C'} = 31,1 \angle 45^\circ \text{ А}.$$

Соответствующие токи в фазах  $B$  и  $C$ :  $\dot{I}_B = 44 \angle -120^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_C = 44 \angle 120^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{b1} = 31,1 \angle -165^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{b2} = 31,1 \angle -75^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{c1} = 31,1 \angle 75^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{c2} = 31,1 \angle 165^\circ \text{ А}$ .

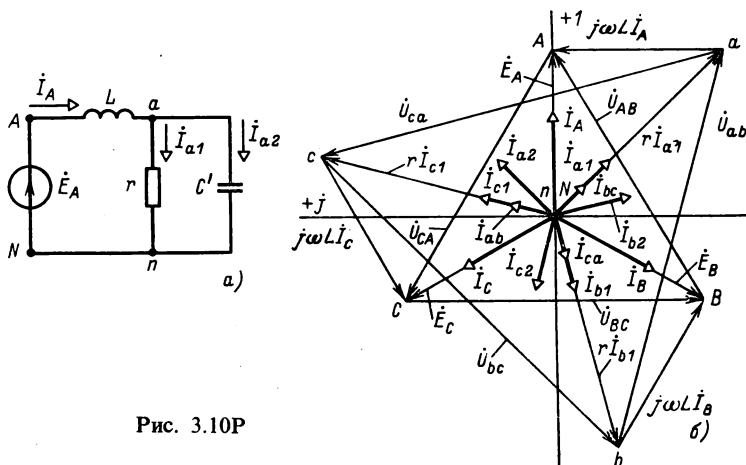


Рис. 3.10Р

Фазные токи приемника, соединенного треугольником, по (3.14)

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_{a2}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 17,95 \angle 75^\circ \text{ А}; \quad \dot{I}_{bc} = 17,95 \angle -45^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ca} = 17,95 \angle 195^\circ \text{ А}.$$

Для построения топографической диаграммы примем  $\dot{\phi}_N = \dot{\phi}_n = 0$ , тогда  $\dot{\phi}_A = \dot{E}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{\phi}_B = \dot{E}_B = 220 \angle -120^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{\phi}_C = \dot{E}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{\phi}_a = \dot{\phi}_n + r\dot{I}_{a1} = 10 \cdot 31,1 \angle -45^\circ = 311 \angle -45^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{\phi}_b = 311 \angle -165^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{\phi}_c = 311 \angle 75^\circ \text{ В}$ .

Векторная диаграмма токов и топографическая диаграмма показаны на рис. 3.10Р, б.



**3.11.** Три одинаковые индуктивные катушки, каждая из которых имеет сопротивление  $\omega L = 20$  Ом, присоединены звездой к трехфазной линии с линейным напряжением 380 В. Определить токи катушек.

**3.12.** От трехфазной линии с линейным напряжением 380 В получают питание три одинаковых приемника, соединенных звездой. Сопротивление каждого приемника  $\underline{Z} = 8 + j6$  Ом. Найти токи приемников.

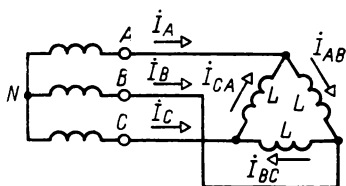


Рис. 3.13

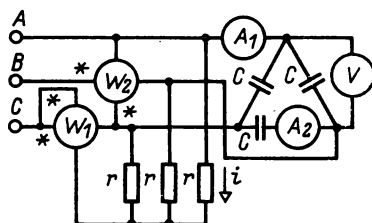


Рис. 3.16

**3.13.** К трехфазному трансформатору, обмотки которого соединены звездой, подключены соединенные треугольником три одинаковые индуктивные катушки (рис. 3.13). Фазное напряжение трансформатора равно 127 В, сопротивление катушки  $\omega L = 22$  Ом.

Определить токи в катушках и в обмотках трансформатора.

**3.14.** Три одинаковые группы ламп соединены треугольником и получают питание от трехфазного трансформатора, обмотки которого соединены звездой. Сопротивление каждой группы ламп 11 Ом, фазное напряжение трансформатора 127 В.

Определить токи в обмотках трансформатора и фазах приемника.

**3.15.** К трехфазному трансформатору присоединены треугольником три одинаковых приемника, сопротивление каждого из них  $\underline{Z} = 16 + j12$  Ом. Обмотки трансформатора соединены звездой с фазным напряжением 127 В.

Найти фазные и линейные токи.

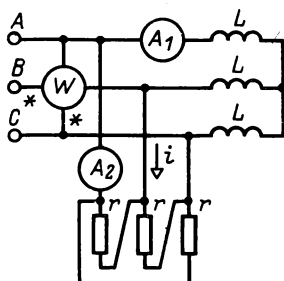
**3.16.** На рис. 3.16 представлена симметричная трехфазная система с параметрами  $x_C = 90$  Ом,  $r = 40$  Ом.

Определить показания приборов и ток  $i$  при  $\dot{U}_A = 120 \angle 0^\circ$  В.

3.17. На рис. 3.17 представлена симметричная трехфазная система.

Определить показания приборов и ток  $i$ , если  $r = 76 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 44 \text{ Ом}$ ,  $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ В}$ .

3.18. Трехфазная линия с линейным напряжением 380 В питает цепь, показанную на рис. 3.18, с параметрами  $r = 1/\omega C = 6 \text{ Ом}$ ,  $\omega L = 2 \text{ Ом}$ .



← Рис. 3.17

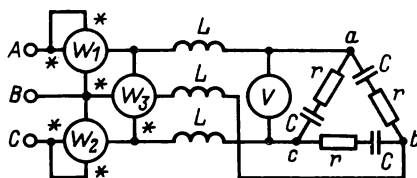


Рис. 3.18

Определить показания приборов, активную и реактивную мощности источника. Построить топографическую диаграмму.

3.19. К выводам генератора с линейным напряжением 6600 В через реакторы  $L_0$ , сопротивление каждого из которых 75 Ом, присоединен электродвигатель с сопротивлениями фаз  $r = \omega L = 50 \text{ Ом}$  (рис. 3.19). Сопротивление каждого из конденсаторов, соединенных треугольником,  $x_C = 300 \text{ Ом}$ .

Определить показание ваттметра и активную мощность цепи. Построить топографическую диаграмму.

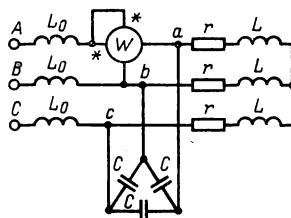


Рис. 3.19

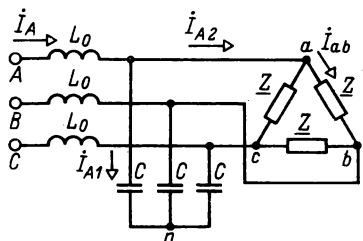


Рис. 3.20

3.20. К выводам генератора с линейным напряжением 380 В через реакторы  $L_0$  ( $x_L = 23 \text{ Ом}$ ) подключены (рис. 3.20) треугольник сопротивлений  $Z = 60 + j60 \text{ Ом}$  и три конденсатора ( $x_C = 40 \text{ Ом}$ ), соединенных звездой.

Определить токи  $I_A$ ,  $I_{A1}$ ,  $I_{A2}$ ,  $I_{ab}$ , построить топографическую диаграмму.

**3.21.** Для цепи рис. 3.21 дано:  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ;  $\omega L_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = 5 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 15 \text{ Ом}$ ;  $r = 30 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 30 \text{ Ом}$ .

Определить показания приборов и активную мощность цепи: 1) при включенной конденсаторной батарее; 2) при отключенной конденсаторной батарее.

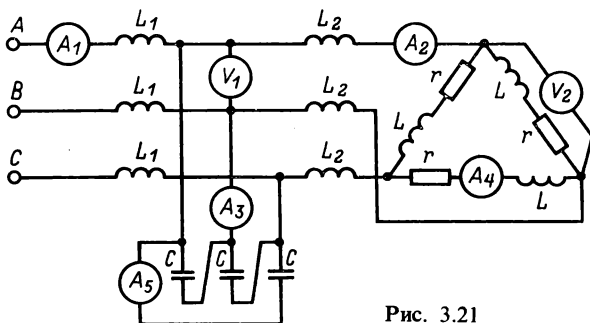


Рис. 3.21

**3.22.** В трехфазную сеть с линейным напряжением 380 В включен электродвигатель, фазы которого соединены звездой. Двигатель работает с  $\cos \varphi = 0,8$  при активной мощности 50 кВт.

Определить сопротивление  $\underline{Z} = r + jx_L$  каждой фазы звезды, эквивалентной двигателю.

**3.23.** Трехфазный электродвигатель работает с  $\cos \varphi = 0,8$  при активной мощности 50 кВт; обмотки двигателя соединены треугольником и включены на линейное напряжение 220 В.

Определить токи в подводящих проводах и обмотках двигателя.

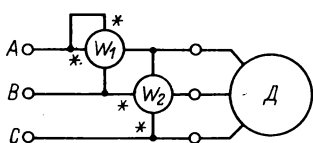


Рис. 3.24

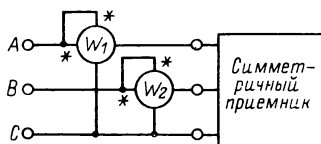


Рис. 3.26

**3.24.** В цепь электродвигателя Д (рис. 3.24) с линейным напряжением 380 В включены два ваттметра, показания которых соответственно равны 398 и 2670 Вт.

Определить активное и реактивное сопротивления каждой фазы звезды, эквивалентной двигателю.

**3.25.** К трехфазному генератору ( $U_{\text{л}} = 10,5 \text{ кВ}$ ;  $f = 50 \text{ Гц}$ ) подключен через сопротивления  $r = 6 \text{ Ом}$  симметричный при-

емник ( $\cos \varphi = 0,707$ ;  $\varphi > 0$ ;  $z = 700 \text{ Ом}$ ), фазы которого соединены звездой.

Определить емкости конденсаторов, которые нужно включить параллельно каждой фазе приемника для полной компенсации реактивной мощности. Сравнить мощности потерь в сопротивлениях  $r$  до и после компенсации.

3.26. К трехфазному генератору подключен симметричный приемник, фазы которого соединены звездой. Полное сопротивление фазы  $z = 100 \text{ Ом}$  при индуктивном  $\cos \varphi = 0,8$ .

Определить показания ваттметров (рис. 3.26) при  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ .

3.27. Решить задачу 3.26 при условии, что фазы приемника соединены треугольником.

### 3.3. Несимметричная нагрузка

3.28(P). Цепь рис. 3.28 получает питание от симметричного источника с линейным напряжением  $660 \text{ В}$ .

Дано:  $r = \omega L = 1/\omega C = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = \omega L_1 = 5 \text{ Ом}$ .

Найти токи в фазах приемников, соединенных звездой и треугольником, а также активную мощность цепи.

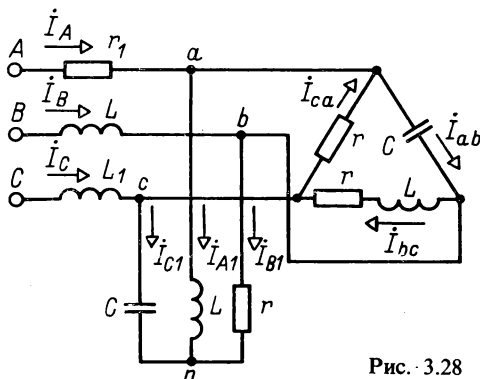


Рис. 3.28

Решение. Предположим, что фазы источника соединены звездой с фазными напряжениями  $U_A = U_B = U_C = 660/\sqrt{3} = 380 \text{ В}$  и  $\dot{U}_A = 380 \angle 0^\circ \text{ В}$ , при этом по (3.2) напряжения  $\dot{U}_B = 380 \angle -120^\circ \text{ В}$ ,  $\dot{U}_C = 380 \angle 120^\circ \text{ В}$ .

Преобразуем звезду сопротивлений в эквивалентный треугольник (рис. 3.28Р, а):

$$\underline{Z}_{ab} = j\omega L + r + \frac{j\omega L r}{-j(1/\omega C)} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{bc} = r - j \frac{1}{\omega C} + \frac{r[-j(1/\omega C)]}{j\omega L} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{ca} = -j \frac{1}{\omega C} + j\omega L + \frac{[-j(1/\omega C)]j\omega L}{r} = 10 \text{ Ом}.$$

Поскольку соответствующие фазы треугольников соединены параллельно, объединим сопротивления параллельно вклю-

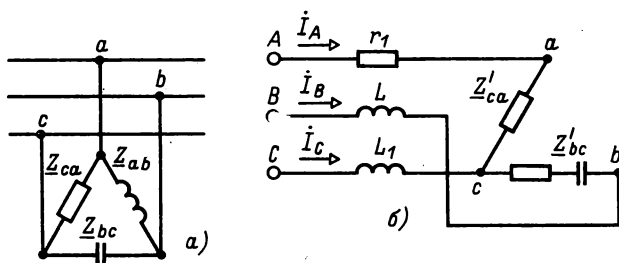


Рис. 3.28Р

ченных фаз и получим схему, представленную на рис. 3.28Р, б, для которой

$$\underline{Z}'_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ab}(-j/\omega C)}{\underline{Z}_{ab} - j/\omega C} = \frac{j10(-j10)}{j10 - j10} = \infty;$$

$$\underline{Z}'_{bc} = \frac{\underline{Z}_{bc}(r + j\omega L)}{\underline{Z}_{bc} + r + j\omega L} = 10 - j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{ca} = \underline{Z}_{ca}r/(\underline{Z}_{ca} + r) = 5 \text{ Ом}.$$

Сопротивление  $\underline{Z}'_{ab} = \infty$  вследствие резонанса токов в контуре из двух параллельных ветвей (на схеме рис. 3.28Р, б фаза  $ab$  разомкнута).

Полученную схему можно рассматривать как соединение звездой с нейтральной точкой  $c$ . Сопротивления фаз звезды  $\underline{Z}_A = r_1 + \underline{Z}'_{ca} = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_B = j\omega L + \underline{Z}'_{bc} = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_C = j\omega L_1 =$   
 $= j5 \text{ Ом}.$

Проводимости фаз

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0,1 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = 0,1 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = -j0,2 \text{ См}.$$

Напряжение смещения нейтрали по (3.22)

$$\dot{U}_{cN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = 301 \angle 48^\circ 25' \text{ В.}$$

Линейные токи по (3.19)

$$\dot{I}_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_{cN}) / \underline{Z}_A = 28,8 \angle -51^\circ 20' \text{ А;}$$

$$\dot{I}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_{cN}) / \underline{Z}_B = 67,8 \angle -125^\circ 10' \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_{cN}) / \underline{Z}_C = 80,7 \angle 75^\circ \text{ А.}$$

Проверка:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \approx 0$ .

Напряжения на фазах приемника, соединенного треугольником,  $\dot{U}_{ca} = -\underline{Z}'_{ca} \dot{I}_A = 144 \angle 128^\circ 40' \text{ В; } \dot{U}_{bc} = \underline{Z}'_{bc} \dot{I}_B = 956 \angle -170^\circ 10' \text{ В; } \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ca} - \dot{U}_{bc} = 1033 \angle 2^\circ 50' \text{ В.}$

Токи в фазах приемника

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \frac{\dot{U}_{ab}}{-j/\omega C} = 103,3 \angle 92^\circ 50' \text{ А; } \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{r + j\omega L} = \\ &= 67,8 \angle -215^\circ 10' \text{ А; } \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{r} = 14,4 \angle 128^\circ 40' \text{ А.} \end{aligned}$$

Напряжения  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  для приемника, соединенного звездой, — линейные. По (3.24) фазные напряжения приемника

$$\dot{U}_{an} = \frac{\dot{U}_{ab} \underline{Y}_{B1} - \dot{U}_{ca} \underline{Y}_{C1}}{\underline{Y}_{A1} + \underline{Y}_{B1} + \underline{Y}_{C1}} = 1152 \angle 7^\circ \text{ В}$$

и аналогично  $\dot{U}_{bn} = 144 \angle 38^\circ 45' \text{ В; } \dot{U}_{cn} = 1084 \angle 13^\circ 30' \text{ В,}$

$$\begin{aligned} \text{где } \underline{Y}_{A1} &= \frac{1}{j\omega L} = -j0,1 \text{ См; } \underline{Y}_{B1} = \frac{1}{r} = 0,1 \text{ См; } \underline{Y}_{C1} = \\ &= \frac{1}{-j/\omega C} = j0,1 \text{ См.} \end{aligned}$$

Токи  $\dot{I}_{A1} = \underline{Y}_{A1} \dot{U}_{an} = 115,2 \angle -83^\circ \text{ А; } \dot{I}_{B1} = \underline{Y}_{B1} \dot{U}_{bn} = 14,4 \angle 38^\circ 45' \text{ А; } \dot{I}_{C1} = \underline{Y}_{C1} \dot{U}_{cn} = 108,4 \angle 103^\circ 30' \text{ А.}$

Проверка:  $\dot{I}_{A1} + \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{C1} \approx 0$ .

Активная мощность цепи равна суммарной мощности потерь в резисторах:

$$P = r_1 I_A^2 + r I_{B1}^2 + r I_{bc}^2 + r I_{ca}^2 = 54,2 \text{ кВт.}$$

Эту мощность можно определить и как развиваемую источником:

$$P = \operatorname{Re}(\dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^*).$$

**3.29.** На выходных выводах трансформатора линейное напряжение равно 220 В. Трансформатор питает катушку с индуктивностью  $L$  и две лампы с сопротивлениями  $r$ , соединенные звездой с нейтральным проводом.

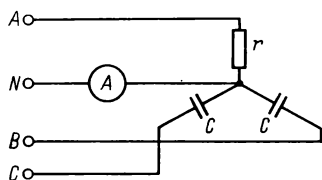


Рис. 3.30

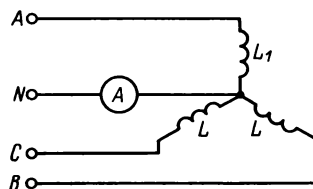


Рис. 3.31

Найти ток в нейтральном проводе при  $\omega L = r = 25,4$  Ом.

**3.30.** В трехфазной цепи рис. 3.30 известны фазные токи:  $I_A = 3$  А;  $I_B = 4$  А;  $I_C = 4$  А.

Определить показание амперметра в нейтральном проводе.

**3.31.** В трехфазной цепи рис. 3.31 известны фазные токи:  $I_A = 5$  А;  $I_B = 2$  А;  $I_C = 2$  А.

Определить показание амперметра в нейтральном проводе.

**3.32.** Найти показание ваттметра в схеме, показанной на рис. 3.32, при  $U_\phi = 100$  В,  $r = \omega L = 1/\omega C = 10$  Ом.

Определить, как нужно изменить активное сопротивление в фазе А, чтобы показание ваттметра равнялось нулю.

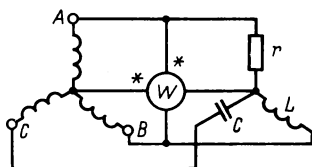


Рис. 3.32

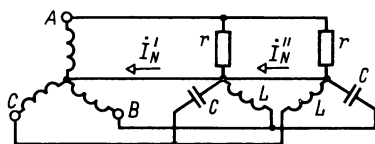


Рис. 3.33

**3.33.** К выводам трехфазного генератора с линейным напряжением 380 В присоединены звездой два приемника (рис. 3.33), у каждого из которых  $r = \omega L = 1/\omega C = 11$  Ом.

Определить токи на участках нейтрального провода.

**3.34.** Линейное напряжение трехфазного трансформатора, обмотки которого соединены звездой с нейтральным проводом, равно 220 В. В фазе А включено 30 одинаковых ламп, в фазе В — 20 ламп, в фазе С — 10 ламп (40 Вт и 127 В каждая).

Определить: 1) ток в нейтральном проводе; 2) напряжение на каждой группе ламп при обрыве нейтрального провода.

**3.35.** Определить токи в цепи рис. 3.35, если источник питания симметричен и  $r = \omega L = 1/\omega C = 2 \text{ Ом}$ ,  $\dot{U}_{AN} = 20 \angle 0^\circ \text{ В}$ .

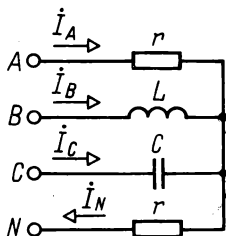


Рис. 3.35

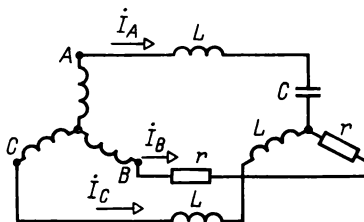


Рис. 3.39

**3.36.** Три группы ламп, имеющих сопротивления 2; 2,5 и 10 Ом, соединены звездой с нейтральным проводом, сопротивление которого 1 Ом, и подключены соответственно к фазам A, B и C трехфазного источника с линейным напряжением 380 В.

Пренебрегая сопротивлениями линейных проводов, найти напряжения на каждой группе ламп.

**3.37.** Найти напряжения на группах ламп задачи 3.36 при обрыве нейтрального провода.

**3.38.** К трехфазной линии без нейтрального провода с линейным напряжением 220 В подключены звездой: в фазе A — индуктивная катушка с малым активным сопротивлением, в фазах B и C — лампы с сопротивлением в каждой фазе, равным индуктивному сопротивлению катушки.

Найти напряжения на катушке и лампах. Построить топографическую диаграмму.

**3.39.** На рис. 3.39 изображена трехфазная цепь, соединенная звездой, с фазным напряжением генератора, равным 173 В.

Определить токи, если  $r = \omega L = 1/\omega C = 30 \text{ Ом}$ .

**3.40.** К трехпроводной трехфазной линии с линейным напряжением 220 В присоединены звездой без нейтрального провода: в фазе A — лампы, в фазе B — реактор, в фазе C — конденсатор. Реактивные сопротивления конденсатора и реактора равны каждое сопротивлению ламп.

Найти напряжения на приемниках и смещение нейтрали, построить топографическую диаграмму.



**3.41.** Определить показания ваттметров в цепи рис. 3.41. Линейное напряжение генератора 380 В. Сопротивления  $r = \omega L = 1/\omega C = 76 \text{ Ом}$ .

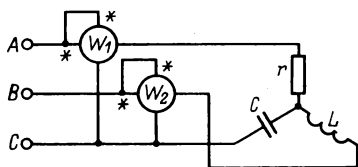


Рис. 3.41

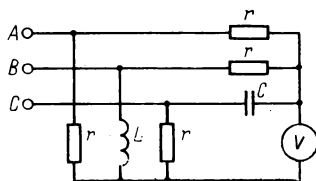


Рис. 3.42

**3.42.** Трехфазная линия с линейным напряжением 380 В питает соединенные звездой два приемника (рис. 3.42), у каждого из которых  $r = \omega L = 1/\omega C = 20 \text{ Ом}$ .

Определить показание вольтметра, включенного между нейтральными приемников.

**3.43.** В цепи рис. 3.43 с линейным напряжением  $10\sqrt{3} \text{ В}$  определить показание амперметра, если  $r = \omega L = 1/\omega C = 1 \text{ Ом}$ .

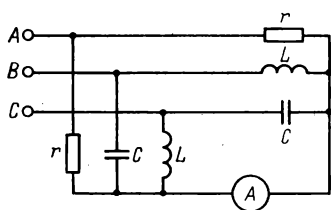


Рис. 3.43

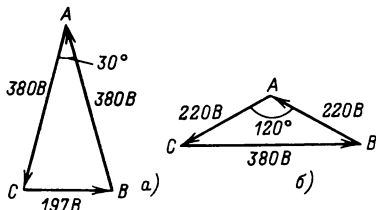


Рис. 3.44

**3.44.** В конце трехпроводной линии из-за неравномерной нагрузки линейные напряжения образуют равнобедренный треугольник: 1) рис. 3.44, а; 2) рис. 3.44, б. К линии подключен симметричный приемник, фазы которого с сопротивлениями  $r = 10 \text{ Ом}$  соединены звездой.

Определить токи в фазах приемника.

**3.45.** К выводам сети с линейными напряжениями: а) по рис. 3.44, а; б) по рис. 3.44, б присоединен приемник, сопротивления фаз которого (звезда)  $\underline{Z}_A = r$ ;  $\underline{Z}_B = jx_L$ ;  $\underline{Z}_C = -jx_C$ , причем  $r = x_L = x_C$ .

Определить: 1) напряжения на фазах приемника; 2) те же напряжения после перемены местами сопротивлений в фазах В и С.

3.46. Три амперметра включены в рассечку проводов, соединяющих выводы  $A$ ,  $B$  и  $C$  трехфазного генератора с выводами приемника, фазы которого соединены звездой (без нейтрали). При равномерной нагрузке амперметры показывают по 20 А.

Определить их показания после короткого замыкания фазы  $A$  приемника.

3.47. В схеме рис. 3.47 линейное напряжение равно  $100\sqrt{3}$  В,  $r = 10$  Ом.

Определить токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $I_N$  при следующих положениях переключателей: 1) ключи  $K_1$ ,  $K_2$  замкнуты,  $K_3$  разомкнут; 2) ключи  $K_1$ ,  $K_3$  замкнуты,  $K_2$  разомкнут; 3) ключи  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  разомкнуты.

3.48. Фазоуказатель, состоящий из двух одинаковых ламп (40 Вт; 220 В) и конденсатора  $x_C = r$ , подключен к линии с линейным напряжением 220 В.

Определить: 1) ток в фазе  $B$ , если конденсатор подключен к фазе  $A$ , а лампа в фазе  $B$  замкнута накоротко; 2) напряжения на конденсаторе и на лампах фазоуказателя после обрыва линейного провода фазы  $B$ .

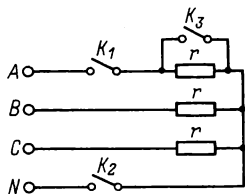


Рис. 3.47

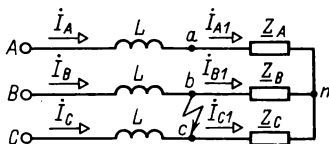


Рис. 3.49

3.49. В цепи рис. 3.49 определить токи в линии и в фазах приемника при коротком замыкании между точками  $b$  и  $c$ , если  $U_{\text{л}} = 380$  В;  $\omega L = 2$  Ом;  $Z_A = 10$  Ом;  $Z_B = j10$  Ом;  $Z_C = -j10$  Ом.

3.50. В цепи рис. 3.49 определить токи в линии и фазах приемника при коротком замыкании между точками  $b$  и  $c$ , если  $U_{\text{л}} = 380$  В;  $\omega L = 2$  Ом;  $Z_A = j3$  Ом;  $Z_B = Z_C = -j10$  Ом.

3.51. В цепи рис. 3.49 определить токи в линии и фазах приемника при коротком замыкании между точками  $b$  и  $c$ , если  $U_{\text{л}} = 380$  В;  $\omega L = 2$  Ом;  $Z_A = j5$  Ом;  $Z_B = Z_C = -j10$  Ом.

**3.52.** Для схемы рис. 3.52 построить геометрическое место нейтральной точки  $n$  при изменении индуктивности  $L_1$  в фазе  $B$  от 0 до  $\infty$  и определить наибольшее и наименьшее значения напряжения, измеряемого вольтметром. Фазное напряжение симметричного источника, соединенного звездой, равно 220 В.

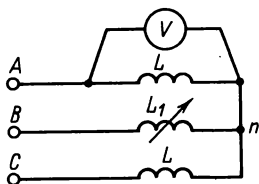


Рис. 3.52

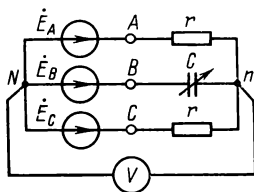


Рис. 3.53

**3.53.** Для схемы рис. 3.53 построить геометрическое место нейтральной точки  $n$  при изменении емкости в фазе  $B$  от 0 до  $\infty$  и определить наибольшее и наименьшее значения напряжения, измеряемого вольтметром. Линейное напряжение симметричного источника равно 220 В.

**3.54.** Для схемы рис. 3.54 определить фазные и линейные токи, построить векторную диаграмму токов, если известны: фазное напряжение источника, соединенного звездой, 220 В, сопротивления  $r = \omega L = 38 \text{ Ом}$ .

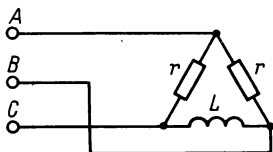
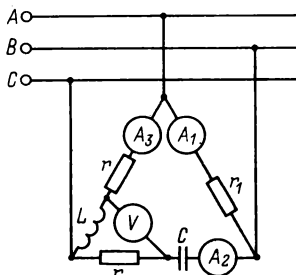


Рис. 3.54

Рис. 3.56 →



**3.55.** К симметричному трехфазному генератору с линейным напряжением 220 В подключен несимметричный приемник, фазы которого соединены треугольником с сопротивлениями  $Z_{AB} = 10 \text{ Ом}$ ;  $Z_{BC} = 10 - j10 \text{ Ом}$ ;  $Z_{CA} = 5 \text{ Ом}$ .

Определить фазные и линейные токи.

**3.56.** Определить показания приборов, включенных в цепь по рис. 3.56, и построить топографическую диаграмму, если  $U_\Delta = 220 \text{ В}$ ;  $r_1 = 22 \text{ Ом}$ ;  $r = 19 \text{ Ом}$ ;  $x_L = x_C = 11 \text{ Ом}$ .

3.57. Определить показания приборов в цепи рис. 3.57.

Дано:  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ;  $x_L = x_C = 11 \text{ Ом}$ ;  $r = 19 \text{ Ом}$ .

3.58. У трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой, линейное напряжение равно 220 В. Между его выводами  $A$  и  $B$  включена катушка, а между выводами

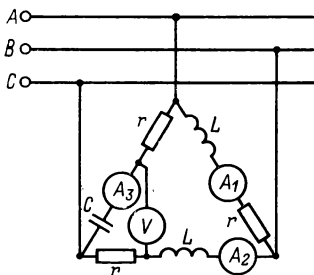


Рис. 3.57

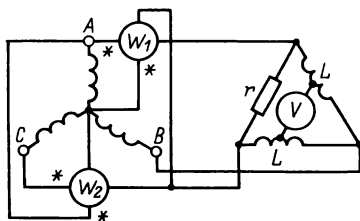


Рис. 3.58

$B$  и  $C$  — другая (рис. 3.58). К серединам обеих катушек присоединен вольтметр. Заданы параметры:  $r = \omega L = 22 \text{ Ом}$ .

Определить показания приборов. Сравнить сумму показаний ваттметров с реактивной мощностью.

3.59. Определить комплексные линейные напряжения в схеме рис. 3.59.

Дано:  $r = 57 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 1/\omega C = 78 \text{ Ом}$  и токи  $\dot{I}_A = 20\sqrt{2} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_B = 20 \angle -135^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_C = 20 \angle 135^\circ \text{ А}$ .

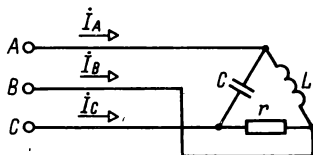


Рис. 3.59

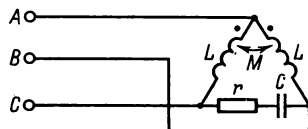


Рис. 3.60

3.60. К трехпроводной трехфазной линии с линейным напряжением 220 В присоединен приемник (рис. 3.60), параметры которого:  $\omega L = 100 \text{ Ом}$ ;  $\omega M = 50 \text{ Ом}$ ;  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 100 \text{ Ом}$ .

Определить линейные и фазные токи.

3.61. В схеме рис. 3.61 известно, что  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ;  $r = \omega L = 1/\omega C = 10 \text{ Ом}$ .

Определить линейные и фазные токи.

**3.62.** В конце трехпроводной линии линейные напряжения образуют равнобедренный треугольник: а) по рис. 3.44, а; б) по рис. 3.44, б. К линии подключен симметричный приемник, фазы которого с сопротивлениями  $r = 10$  Ом соединены треугольником.

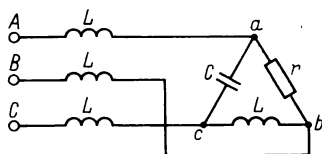


Рис. 3.61

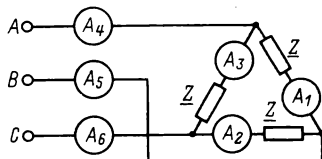


Рис. 3.64

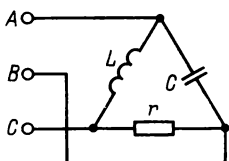
Определить фазные и линейные токи приемника.

**3.63.** К выводам сети с линейными напряжениями, показанными: а) на рис. 3.44, а и б) на рис. 3.44, б, подключен приемник, фазы которого с сопротивлениями  $Z_{AB} = j10$  Ом,  $Z_{BC} = 10$  Ом,  $Z_{CA} = -j10$  Ом соединены треугольником.

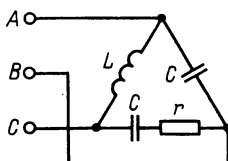
Найти фазные и линейные токи приемника.

**3.64.** В цепи рис. 3.64 амперметры, включенные в фазы приемника, показывают по 10 А, амперметры в линейных проводах — по 17,3 А.

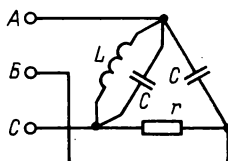
Найти показания амперметров: 1) после отключения фазы ВС приемника; 2) при обрыве линейного провода В.



а)



б)



в)

Рис. 3.66

**3.65.** Напряжение на вводе в дом трехфазной трехпроводной сети равно 120 В. На первом этаже 10 ламп по 50 Вт подключены к выводам А и В, на втором этаже 2 лампы по 25 Вт — к выводам В и С, на третьем этаже 18 ламп по 25 Вт — к выводам А и С.

Определить напряжения на лампах каждого этажа после обрыва провода фазы С, считая сопротивления ламп неизменными.

3.66. Для приемников по рис. 3.66, *a–в* известно:  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ;  $r = \omega L = 1/\omega C$ .

Найти напряжения на резисторах до и после обрыва линейного провода фазы *C*.

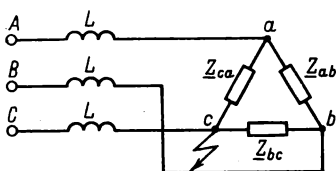


Рис. 3.67

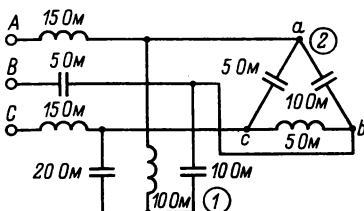


Рис. 3.69

3.67. В схеме рис. 3.67 определить токи в линии и фазах приемника при коротком замыкании между точками *b* и *c*, если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ;  $\omega L = 2 \text{ Ом}$ ;  $Z_{ab} = j10 \text{ Ом}$ ;  $Z_{bc} = 20 \text{ Ом}$ ;  $Z_{ca} = -j10 \text{ Ом}$ .

3.68. В схеме рис. 3.67 определить токи в линии и фазах приемника при коротком замыкании между точками *b* и *c*, если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ;  $\omega L = 2 \text{ Ом}$ ;  $Z_{ab} = Z_{ca} = -j4 \text{ Ом}$ ;  $Z_{bc} = 20 \text{ Ом}$ .

3.69. В схеме рис. 3.69 найти фазные токи приемников 1 и 2 при линейном напряжении на входе, равном 380 В.

### 3.4. Симметричные составляющие

3.70(Р). Найти симметричные составляющие линейных напряжений, показанных на рис. 3.70.

Решение. Примем  $\dot{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ В}$ , при этом  $\dot{U}_{BC} = 220 \angle -90^\circ \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{CA} = 311 \angle 135^\circ \text{ В}$ . По формулам разложения (3.35)

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a\dot{U}_{BC} + a^2\dot{U}_{CA}) = \frac{1}{3}(220 \angle 0^\circ + 220 \angle 30^\circ + \\ &+ 311 \angle 15^\circ) = 245 \angle 15^\circ \text{ В}; \dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a^2\dot{U}_{BC} + a\dot{U}_{CA}) = \\ &= 65,7 \angle -105^\circ \text{ В}; \dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}) = 0. \end{aligned}$$

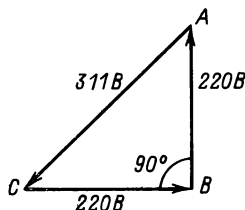
Таким образом, напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  можно представить следующими симметричными составляющими:

$$\dot{U}_{AB1} = 245 \angle 15^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{AB2} = 65,7 \angle -105^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{AB0} = 0;$$

$$\dot{U}_{BC1} = 245 \angle -105^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC2} = 65,7 \angle 15^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC0} = 0$$

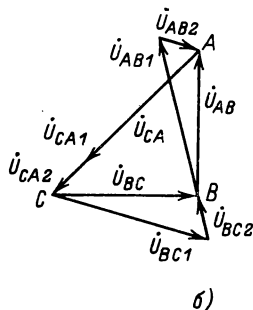
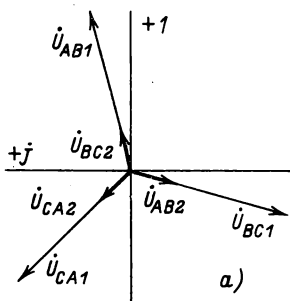
$$\dot{U}_{CA1} = 245 \angle 135^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA2} = 65,7 \angle -225^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA0} = 0.$$

На рис. 3.70Р показаны диаграммы найденных симметричных составляющих, а также построенный по ним треугольник заданных напряжений.



← Рис. 3.70

Рис. 3.70Р



**3.71.** Линейные напряжения в конце трехфазных трехпроводных линий вследствие неравномерной нагрузки образуют треугольники, показанные на рис. 3.71, а–з.

Для каждого случая определить коэффициент несимметрии напряжений  $U_2/U_1$ .

**3.72.** На рис. 3.72, а–д показаны векторы токов в несимметричных трехфазных системах.

Найти их симметричные составляющие  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_0$ .

**3.73(Р).** Для схемы рис. 3.73 определить сопротивления токам прямой  $\underline{Z}_1$ , обратной  $\underline{Z}_2$  и нулевой  $\underline{Z}_0$  последовательностей, если известно:  $\omega L = 10 \text{ Ом}$ ;  $\omega M = 2 \text{ Ом}$ ;  $r = 1 \text{ Ом}$ .

**Решение.** Пусть к рассматриваемой цепи приложены симметричные фазные напряжения  $\dot{U}_{A1}$ ,  $\dot{U}_{B1}$ ,  $\dot{U}_{C1}$  прямой после-

довательности, которые вызовут в фазах токи  $\dot{I}_{A1}$ ,  $\dot{I}_{B1}$ ,  $\dot{I}_{C1}$ . Вследствие симметрии цепи ток в нейтральном проводе равен нулю. Составим по второму закону Кирхгофа уравнение для контура фаза  $A$  – нейтральный провод:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A1} &= j\omega L \dot{I}_{A1} + j\omega M \dot{I}_{B1} + j\omega M \dot{I}_{C1} = \\ &= j\omega L \dot{I}_{A1} + j\omega M (\dot{I}_{B1} + \dot{I}_{C1}) = j\omega L \dot{I}_{A1} - j\omega M \dot{I}_{A1}.\end{aligned}$$

По (3.36)

$$\underline{Z}_1 = \dot{U}_{A1} / \dot{I}_{A1} = j\omega L - j\omega M = j8 \text{ Ом.}$$

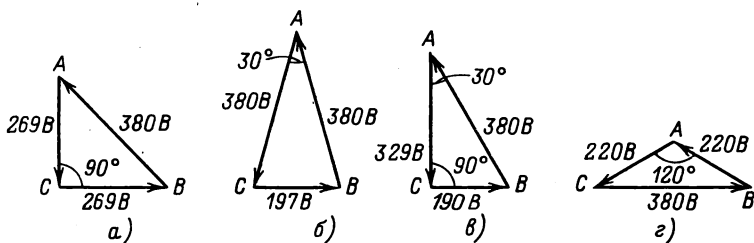


Рис. 3.71

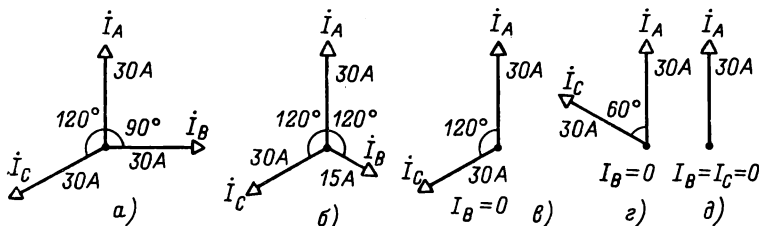


Рис. 3.72

Аналогично напряжения  $\dot{U}_{A2}$ ,  $\dot{U}_{B2}$ ,  $\dot{U}_{C2}$  обратной последовательности вызовут токи  $\dot{I}_{A2}$ ,  $\dot{I}_{B2}$ ,  $\dot{I}_{C2}$ . Уравнение для того же контура:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A2} &= j\omega L \dot{I}_{A2} + j\omega M \dot{I}_{B2} + j\omega M \dot{I}_{C2} = \\ &= j\omega L \dot{I}_{A2} + j\omega M (\dot{I}_{B2} + \dot{I}_{C2}) = j\omega L \dot{I}_{A2} - j\omega M \dot{I}_{A2}\end{aligned}$$

и

$$\underline{Z}_2 = \dot{U}_{A2} / \dot{I}_{A2} = j\omega L - j\omega M = j8 \text{ Ом.}$$

Если к цепи приложить напряжения нулевой последовательности  $\dot{U}_{A0} = \dot{U}_{B0} = \dot{U}_{C0} = \dot{U}_0$ , то они вызовут в фазах токи  $\dot{I}_{A0} = \dot{I}_{B0} = \dot{I}_{C0} = \dot{I}_0$ . В нейтральном проводе ток будет равен  $3\dot{I}_0$ .



Уравнение для того же контура:

$$\dot{U}_0 = j\omega L \dot{I}_0 + j\omega M \dot{I}_0 + j\omega M \dot{I}_0 + r \cdot 3 \dot{I}_0 = (3r + j\omega L + j2\omega M) \dot{I}_0$$

и

$$\underline{Z}_0 = \dot{U}_0 / \dot{I}_0 = 3r + j\omega L + j2\omega M = 3 + j14 \text{ Ом.}$$

**3.74.** Определить сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей для схемы рис. 3.74, если сопротивления взаимной индуктивности  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = j\omega M$ ;  $\underline{Z}_{AN} = \underline{Z}_{BN} = \underline{Z}_{CN} = j\omega M_N$ .

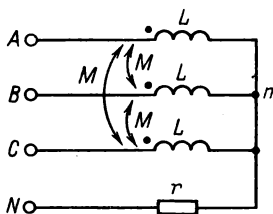


Рис. 3.73

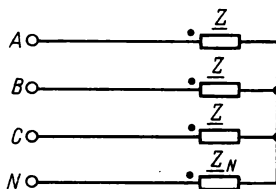


Рис. 3.74

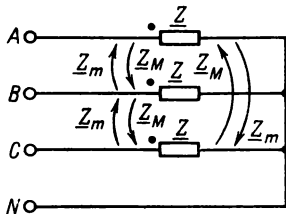


Рис. 3.75

**3.75.** Трехфазная машина при расчете режима может быть представлена схемой рис. 3.75, в которой взаимная индуктивность между фазами  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_M$ ;  $\underline{Z}_{BA} = \underline{Z}_{CB} = \underline{Z}_{AC} = \underline{Z}_m$ , причем  $\underline{Z}_M \neq \underline{Z}_m$ .

Полагая известными сопротивления  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Z}_M$  и  $\underline{Z}_m$ , выразить через них сопротивления схемы для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей.

**3.76(Р).** Трехфазный двигатель, фазы которого соединены звездой, подключен к сети с линейными напряжениями, показанными на рис. 3.70. Сопротивления фаз двигателя в рассматриваемом режиме для токов прямой последовательности  $\underline{Z}_1 = 2,82 + j2,82 \text{ Ом}$ , для токов обратной последовательности  $\underline{Z}_2 = 1 + j1,73 \text{ Ом}$ .

Найти токи в фазах двигателя.

**Решение.** Для определения токов разложим фазные напряжения источника на симметричные составляющие. В данном случае фазные напряжения можно взять любыми при

условии, что их разности равны заданным линейным напряжениям. Например, приняв нейтраль источника совпадающей с точкой  $B$  на рис. 3.70 и  $\dot{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ$  В, получим  $\dot{U}_A = \dot{U}_{AB}$ ;  $\dot{U}_B = 0$ ;  $\dot{U}_C = -\dot{U}_{BC} = 220 \angle 90^\circ$  В.

Симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей этих напряжений по (3.35)

$$\dot{U}_1 = 141,5 \angle -15^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_2 = 38,0 \angle -75^\circ \text{ В}.$$

Напряжение  $\dot{U}_0$  можно не находить, так как при любом его значении ток  $\dot{I}_0 = 0$  из-за отсутствия нейтрального провода.

Отметим, что найденные фазные напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  можно рассчитать по линейным напряжениям  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , полученным в задаче 3.70:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\phi 1} &= \frac{\dot{U}_{n1}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{245 \angle 15^\circ}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 141,5 \angle -15^\circ \text{ В}; \\ \dot{U}_{\phi 2} &= \frac{\dot{U}_{n2}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{65,7 \angle -105^\circ}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 38,0 \angle -75^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

По (3.36) находим составляющие токов:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_1 = 35,4 \angle -60^\circ \text{ А}; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_2 = 19 \angle -135^\circ \text{ А}.$$

По найденным симметричным составляющим определим фазные токи двигателя аналогично (3.34):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 44,3 \angle -84^\circ 25' \text{ А}; \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 17,7 \angle -163^\circ 55' \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 50,7 \angle 75^\circ 25' \text{ А}. \end{aligned}$$

**3.77.** Трехфазный двигатель, обмотки которого соединены звездой, подключен к сети с линейными напряжениями, показанными на рис. 3.71,  $a-z$ . В рассматриваемом режиме сопротивление каждой фазы двигателя для токов прямой последовательности равно  $j5$  Ом и для токов обратной последовательности равно  $j3$  Ом.

Определить токи в фазах двигателя.

**3.78(Р).** В конце трехфазной линии (рис. 3.78) произошло замыкание фазы  $A$  на землю через сопротивление  $\underline{Z} = j0,5$  Ом.

Определить напряжения и токи фаз генератора, ток в сопротивлении заземления нейтрали  $\underline{Z}_N$  и напряжения между точками  $a, b, c$  линии и землей.

Дано: фазная ЭДС генератора  $E = 220$  В; сопротивления различных последовательностей: генератора  $\underline{Z}_{r1} = j12$  Ом;

$\underline{Z}_{r2} = j2 \text{ Ом}; \underline{Z}_{r0} = j1 \text{ Ом};$  линии  $\underline{Z}_{л1} = \underline{Z}_{л2} = j1 \text{ Ом}; \underline{Z}_{л0} = j2 \text{ Ом}$  и  $\underline{Z}_N = j0,5 \text{ Ом}.$

**Решение.** Заменяем сопротивления несимметричного приемника в конце линии (рис. 3.78Р, а) источниками ЭДС (рис. 3.78Р, б), которые можно представить состоящими из источников ЭДС прямой, обратной и нулевой последовательностей (рис. 3.78Р, в).

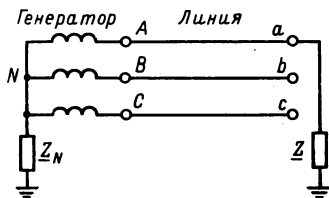


Рис. 3.78

Рассматривая каждую из последовательностей, получаем расчетные схемы для фазы А (рис. 3.78Р, з—е). Так как генератор симметричный, то  $\dot{E}_1 = \dot{E}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ В}; \dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0.$

(Если бы ЭДС генератора были несимметричными, то их необходимо было бы предварительно разложить на симметричные составляющие ЭДС в схеме.)

Основные уравнения для схем прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$(\underline{Z}_{r1} + \underline{Z}_{л1}) \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_1; \quad (1)$$

$$(\underline{Z}_{r2} + \underline{Z}_{л2}) \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0; \quad (2)$$

$$(\underline{Z}_{r0} + \underline{Z}_{л0} + 3\underline{Z}_N) \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0. \quad (3)$$

Дополнительные уравнения:

$$\underline{Z} \dot{I}_A = \dot{U}_{an}; \quad \dot{I}_B = 0; \quad \dot{I}_C = 0,$$

т. е.

$$\underline{Z} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0) = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \quad (4)$$

$$a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0; \quad (5)$$

$$a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0.$

Складывая соответственно левые и правые части уравнений (1)–(3) и учитывая (4) и полученное равенство токов, имеем:

$$(\underline{Z}_{r1} + \underline{Z}_{л1} + \underline{Z}_{r2} + \underline{Z}_{л2} + \underline{Z}_{r0} + \underline{Z}_{л0} + 3\underline{Z}_N + 3\underline{Z}) \dot{I}_1 = \dot{E}_1,$$

откуда  $\dot{I}_1 = -j10 \text{ А} = \dot{I}_2 = \dot{I}_0.$

Из (1)–(3) определим составляющие:  $\dot{U}_1 = 90 \text{ В}; \dot{U}_2 = -30 \text{ В}; \dot{U}_0 = -45 \text{ В}.$

Симметричные составляющие напряжений на фазах генератора

$$\dot{U}_{r1} = \dot{E}_1 - \underline{Z}_{r1} \dot{I}_1 = 100 \text{ В}; \quad \dot{U}_{r2} = -\underline{Z}_{r2} \dot{I}_2 = -20 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{r0} = -\underline{Z}_{r0} \dot{I}_0 = -10 \text{ В}.$$

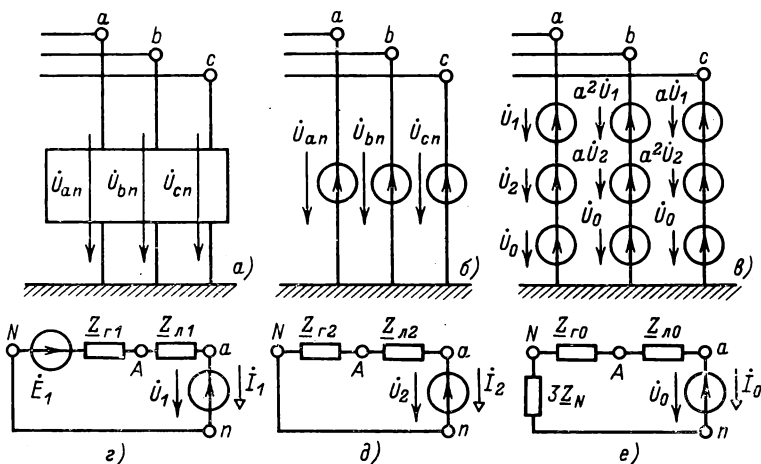


Рис. 3.78Р

Напряжения на фазах генератора по (3.34)

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{r1} + \dot{U}_{r2} + \dot{U}_{r0} = 70 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_{r1} + a \dot{U}_{r2} + \dot{U}_{r0} = -115,3 \angle 64^\circ 18' \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = a \dot{U}_{r1} + a^2 \dot{U}_{r2} + \dot{U}_{r0} = -115,3 \angle -64^\circ 18' \text{ В}.$$

Ток фазы А генератора  $\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 30 \angle -90^\circ \text{ А}.$

Для проверки найдем токи в фазах В и С:

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = -j10(a^2 + a + 1) = 0;$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = -j10(a + a^2 + 1) = 0.$$

В сопротивлении  $\underline{Z}_N$  ток  $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0 = 30 \angle -90^\circ \text{ А}.$

Напряжения между точками а, b, с и землей

$$\dot{U}_{an} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 15 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{bn} = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = -128,1 \angle 54^\circ 10' \text{ В};$$

$$\dot{U}_{cn} = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = -128,1 \angle -54^\circ 10' \text{ В}.$$

Проверка:  $\dot{U}_{an} = \underline{Z} \dot{I}_A = j0,5(-j30) = 15 \text{ В}.$

**3.79.** Определить ток фазы  $A$  и показания вольтметров в цепи рис. 3.79 (при однофазном коротком замыкании генератора), если сопротивления генератора прямой, обратной и нулевой последовательностей соответственно равны:  $j12$ ;  $j3$ ;  $j1$  Ом; фазная ЭДС равна 160 В.

**3.80.** Определить показания вольтметров и ток в фазе  $B$  при двухфазном коротком замыкании генератора (рис. 3.80).

Сопротивления генератора прямой и обратной последовательностей:  $j8$  и  $j2$  Ом; фазная ЭДС равна 100 В.

**3.81.** Трехфазный симметричный генератор питает линию, разомкнутую на конце (рис. 3.81).

Дано: фазная ЭДС генератора  $E = 280$  В; сопротивления различных последовательностей: генератора  $Z_{r1} = j7$  Ом;  $Z_{r2} = j1$  Ом;  $Z_{r0} = j0,5$  Ом и линии  $Z_{l1} = Z_{l2} = j1$  Ом;  $Z_{l0} = j2$  Ом; сопротивление заземления нейтрали генератора  $Z_N = j0,5$  Ом.

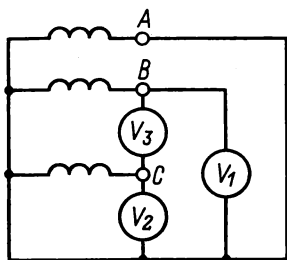


Рис. 3.79

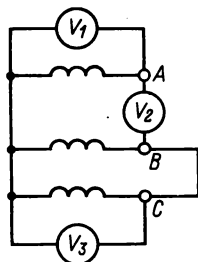


Рис. 3.80

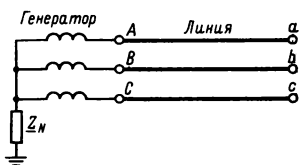


Рис. 3.81

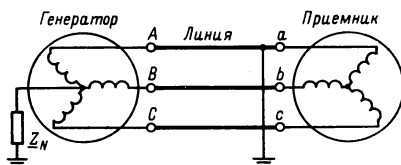


Рис. 3.82

Найти напряжения и токи фаз  $A$  и  $B$  генератора, ток в сопротивлении  $Z_N$ , а также напряжения между точками  $a$ ,  $c$  и землей, если в конце линии: 1) фаза  $A$  замкнута на землю; 2) фазы  $B$  и  $C$  замкнуты на землю; 3) между фазами  $B$  и  $C$  короткое замыкание; 4) между фазами  $B$  и  $C$  включен приемник с сопротивлением  $Z = j4$  Ом.

**3.82.** В конце линии (рис. 3.82) произошло замыкание фазы  $A$  на землю.

Дано: фазная ЭДС генератора  $E = 200$  В; сопротивления различных последовательностей: генератора  $Z_{r1} = j9$  Ом;  $Z_{r2} = j1$  Ом;  $Z_{r0} = j0,5$  Ом, линии  $Z_{л1} = Z_{л2} = j1$  Ом;  $Z_{л0} = j2$  Ом и приемника  $Z_{н1} = j10$  Ом;  $Z_{н2} = j2$  Ом. Сопротивление заземления нейтральной точки генератора  $Z_N = j0,5$  Ом.

Определить токи во всех фазах генератора и приемника.

**3.83.** К генератору с фазной ЭДС 220 В подключен приемник, фазы которого соединены звездой. На шинах генератора произошло однофазное замыкание фазы  $A$  на землю через сопротивление  $Z = 4,65$  Ом. Сопротивления различных последовательностей генератора:  $Z_{r1} = j10$  Ом;  $Z_{r2} = j1$  Ом;  $Z_{r0} = j10$  Ом; сопротивление фаз приемника  $Z_{н1} = j100$  Ом; сопротивление заземления нейтрали генератора  $Z_N = 2$  Ом.

Определить токи во всех фазах генератора и приемника.

**3.84.** Трехфазный двигатель получает питание по линии передачи от источника с линейным напряжением 380 В. Сопротивления различных последовательностей: линии  $Z_{л1} = Z_{л2} = j0,5$  Ом и двигателя  $Z_{д1} = j4$  Ом;  $Z_{д2} = j0,5$  Ом. На линии произошел обрыв провода фазы  $A$ .

Определить напряжения и токи фаз  $A$  и  $C$  двигателя и напряжение между точками обрыва, если сопротивления различных последовательностей остаются неизменными.

**3.85.** Для ограничения пусковых токов двигателя, обмотки которого соединены звездой, во все его фазы включают пусковые сопротивления  $Z$ , которые после пуска отключают. Вследствие неисправности выключателя одно из сопротивлений после пуска осталось включенным (рис. 3.85).

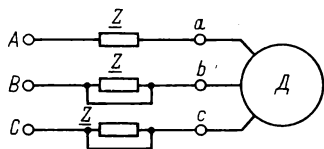


Рис. 3.85

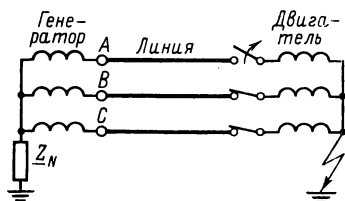


Рис. 3.86

Определить: 1) отношение токов обратной  $I_2$  и прямой  $I_1$  последовательностей; 2) напряжение на выводах пускового сопротивления, если сопротивления прямой и обратной последовательностей двигателя равны соответственно  $Z_1$  и  $Z_2$ , фазное напряжение симметричного источника питания равно  $U$ .

**3.86.** Трехфазный двигатель получает питание от генератора по линии передачи (рис. 3.86).

Дано: фазная ЭДС генератора  $E = 210$  В; сопротивления различных последовательностей: генератора  $Z_{r1} = j3$  Ом;  $Z_{r2} = j1$  Ом;  $Z_{r0} = j0,5$  Ом, линии  $Z_{л1} = j0,5$  Ом;  $Z_{л2} = j0,5$  Ом;  $Z_{л0} = j0,75$  Ом и двигателя  $Z_{н1} = j4$  Ом;  $Z_{н2} = j1$  Ом;  $Z_{н0} = j0,5$  Ом; сопротивление заземления нейтрали генератора  $Z_N = j0,25$  Ом. Вследствие неисправности пусковой аппаратуры произошло отключение фазы  $A$  и одновременно короткое замыкание нейтрали двигателя на землю.

Определить напряжение между разомкнутыми контактами выключателя и ток короткого замыкания, если сопротивления различных последовательностей остаются неизменными.

### 3.5. Вращающееся магнитное поле

3.87(Р). Катушки 1 и 2 с синусоидальными токами  $i_1 = I_m \sin \omega t$  и  $i_2 = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$  расположены в плоскостях, пересекающихся под углом  $60^\circ$  (рис. 3.87).

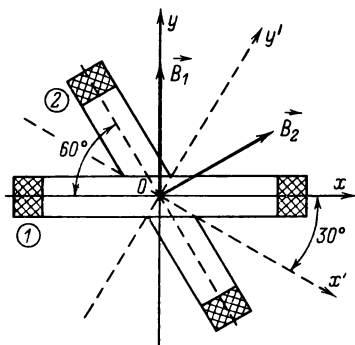


Рис. 3.87

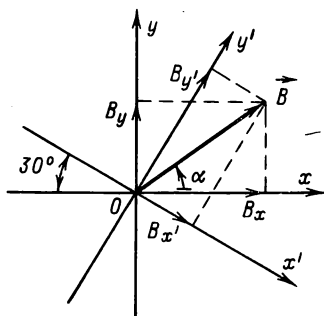


Рис. 3.87Р

Определить вектор индукции магнитного поля в точке  $O$ , находящейся в центре катушек, и его угловую скорость при указанных на рисунке положительных направлениях векторов магнитной индукции  $B_1$  и  $B_2$ , создаваемых соответственно токами  $i_1$  и  $i_2$ .

Решение. Индукции  $B_1$  и  $B_2$  магнитного поля в точке  $O$  пропорциональны токам, т. е.  $B_1 = kI_m \sin \omega t$ ;  $B_2 = kI_m \sin(\omega t + \pi/2) = kI_m \cos \omega t$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Для определения результирующего вектора магнитной индукции вычислим его составляющие по осям  $x$  и  $y$  как

сумму проекций векторов  $\underline{B}_1$  и  $\underline{B}_2$  на эти оси (рис. 3.87Р):

$$B_x = B_2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} kI_m \cos \omega t;$$

$$B_y = B_1 + B_2 \cos 60^\circ = kI_m \sin \omega t + \frac{1}{2} kI_m \cos \omega t.$$

Значение результирующего вектора

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = kI_m \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin 2\omega t}.$$

Из полученного выражения видно, что результирующий вектор магнитной индукции за период изменения тока дважды достигает максимального значения  $B_{\max} = kI_m \sqrt{3/2}$  и дважды имеет минимальное значение  $B_{\min} = kI_m / \sqrt{2}$ . Направление вектора  $\underline{B}$  в плоскости  $xu$  можно характеризовать, например, углом  $\alpha$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $x$  (рис. 3.87Р):

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{B_y}{B_x} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \operatorname{tg} \omega t + 1) \right].$$

Из этого выражения следует, что угол  $\alpha$  с течением времени увеличивается, т.е. вектор  $\underline{B}$  вращается вокруг точки  $O$  против направления движения часовой стрелки.

Угловая скорость вектора

$$d\alpha/dt = \sqrt{3} \omega / (2 + \sin 2\omega t),$$

т.е. не постоянная и за период изменения тока дважды достигает максимального значения  $(d\alpha/dt)_{\max} = \sqrt{3} \omega$  и дважды имеет минимальное значение  $(d\alpha/dt)_{\min} = \omega / \sqrt{3}$ .

Если перейти к системе координатных осей  $x'$  и  $y'$ , повернутой по отношению к осям  $x$  и  $y$  на угол  $30^\circ$  по направлению движения часовой стрелки (рис. 3.87 и 3.87Р), то получим:

$$B_{x'} = -B_1 \cos 60^\circ + B_2 \cos 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} kI_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$B_{y'} = B_1 \cos 30^\circ + B_2 \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} kI_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Следовательно,

$$B_{x'}^2 / B_{\min}^2 + B_{y'}^2 / B_{\max}^2 = 1,$$



т. е. годографом вектора  $\vec{B}$  является эллипс, большая ось которого, равная  $2B_{\max}$ , находится на оси  $y'$ , а малая ось, равная  $2B_{\min}$ , — на оси  $x'$ .

Таким образом, в рассматриваемой точке  $O$  получается эллиптическое вращающееся магнитное поле. Направление вращения — против направления движения часовой стрелки. Угловая скорость периодически изменяется с частотой, вдвое большей частоты тока.

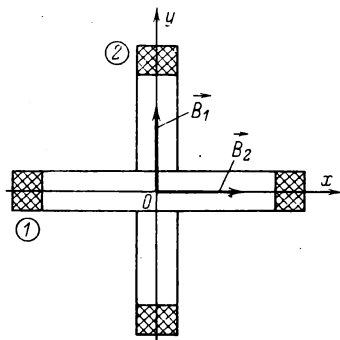


Рис. 3.88

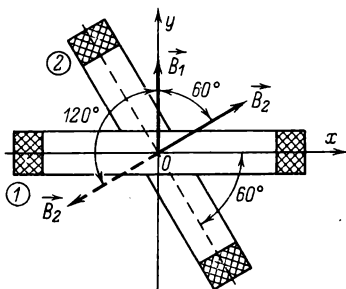


Рис. 3.89

**3.88.** По катушкам 1 и 2, которые расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 3.88), проходят синусоидальные токи  $i_1$  и  $i_2$ , создающие магнитные индукции с указанными на рисунке положительными направлениями векторов.

Определить характер вращающегося магнитного поля в точке  $O$ , находящейся в центре катушек. Найти значение результирующего вектора магнитной индукции и его угловую скорость для случаев:

- 1)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = I_m \sin (\omega t - \pi/2)$ ;
- 2)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$ ;
- 3)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = 2I_m \sin (\omega t - \pi/2)$ ;
- 4)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = \frac{1}{2} I_m \sin (\omega t + \pi/2)$ .

**3.89.** Катушки 1 и 2 с синусоидальными токами  $i_1 = I_m \sin \omega t$  и  $i_2 = I_m \sin (\omega t - \pi/2)$  расположены в плоскостях, пересекающихся под углом  $60^\circ$  (рис. 3.89).

Определить характер вращающегося магнитного поля в центре катушек (точка  $O$ ). Найти значение суммарного век-

тора магнитной индукции и его угловую скорость для случаев, когда угол между положительными направлениями векторов магнитной индукции  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ , создаваемых токами  $i_1$  и  $i_2$ , равен: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ .

**3.90.** Катушки 1–3 с синусоидальными токами  $i_1, i_2, i_3$  расположены в плоскостях, пересекающихся под углом  $60^\circ$  (рис. 3.90). В центре катушек указаны положительные направления соответствующих векторов индукции  $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ .

Определить характер вращающегося магнитного поля в центре катушек (точка 0). Найти значение суммарного вектора магнитной индукции и угловую скорость его для случаев:

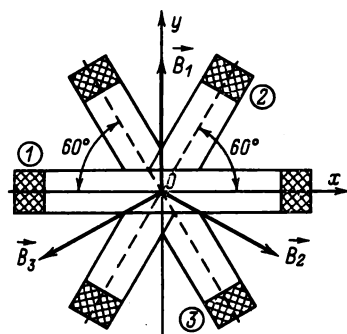


Рис. 3.90

- 1)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  
 $i_2 = I_m \sin (\omega t - 120^\circ)$ ;  
 $i_3 = I_m \sin (\omega t + 120^\circ)$ ;
- 2)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  
 $i_2 = I_m \sin (\omega t + 120^\circ)$ ;  
 $i_3 = I_m \sin (\omega t - 120^\circ)$ .

**3.91.** У катушек задачи 3.90 вектор  $\vec{B}_3$  имеет обратное положительное направление.

Определить характер вращающегося магнитного поля в центре катушек (точка 0). Найти результирующий вектор магнитной индукции и скорость его вращения для случаев:

- 1)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = i_3 = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$ ;
- 2)  $i_1 = I_m \sin \omega t$ ;  $i_2 = i_3 = \frac{I_m}{\sqrt{3}} \sin (\omega t - \pi/2)$ .

## Глава четвертая ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

### Введение к гл. 4

*Несимметричные пассивные четырехполюсники.* Режим пассивного взаимного (проходного) четырехполюсника задается напряжением  $\dot{U}_1 = U_1 \angle \psi_{u1}$  и током  $\dot{I}_1 = I_1 \angle \psi_{i1}$  на первичных 1-1' и напряжением  $\dot{U}_2 = U_2 \angle \psi_{u2}$  и током  $\dot{I}_2 = I_2 \angle \psi_{i2}$  на вторичных 2-2' выводах (рис. 4.А).

Напряжения и токи можно связать уравнениями с коэффициентами различного типа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2; \end{aligned} \right\} \text{или} \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{array} \right\| = \left\| \underline{A} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\|, \quad (4.1)$$

где  $\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{array} \right\|$  и  $\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\|$  — матрицы-столбцы напряжений и токов;

$\left\| \underline{A} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{array} \right\|$  — квадратная матрица коэффициентов;

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2; \end{aligned} \right\} \text{или} \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\| = \left\| \underline{Y} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\|; \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2; \end{aligned} \right\} \text{или} \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\| = \left\| \underline{Z} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\|; \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2; \end{aligned} \right\} \text{или} \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\| = \left\| \underline{H} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\|; \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{G}_{11}\dot{U}_1 + \underline{G}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \underline{G}_{21}\dot{U}_1 + \underline{G}_{22}\dot{I}_2; \end{aligned} \right\} \text{или} \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\| = \left\| \underline{G} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right\|. \quad (4.5)$$

Из четырех коэффициентов каждой системы уравнений только три независимых; справедливы уравнения связи

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} &= 1; \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{12}; \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_{12}; \\ \underline{H}_{12} &= \underline{H}_{21}; \underline{G}_{12} = \underline{G}_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

В табл. 4.1 дана связь коэффициентов уравнений различного типа при указанных на рис. 4.А положительных направлениях напряжений и токов.

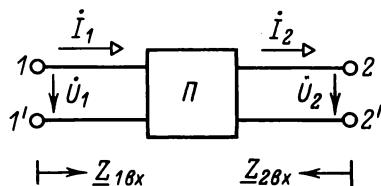


Рис. 4.А

Входные сопротивления со стороны первичных выводов  $\underline{Z}_{1вх}$  при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_{н2}$  на вторичных и со стороны вторичных  $\underline{Z}_{2вх}$  при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_{н1}$  на пер-

Таблица 4.1. Коэффициенты уравнений четырехполосника

Типы уравнений	Коэффициенты			
	A	Y	Z	H
A	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{A_{12}}{A_{22}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{1}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad -\frac{\Delta Z}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta H}{H_{21}} \quad \frac{H_{11}}{H_{21}}$
		$-\frac{\Delta Y}{Y_{21}} \quad \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}} \quad -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{H_{22}}{H_{21}} \quad \frac{1}{H_{21}}$
Y	$\frac{A_{22}}{A_{12}} \quad -\frac{1}{A_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z} \quad -\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	$\frac{1}{H_{11}} \quad -\frac{H_{12}}{H_{11}}$
	$\frac{1}{A_{12}} \quad -\frac{A_{11}}{A_{12}}$		$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\Delta H}{H_{11}}$
Z	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad -\frac{1}{A_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y} \quad -\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\underline{Z}_{11} \quad \underline{Z}_{12}$	$\frac{\Delta H}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$
	$\frac{1}{A_{21}} \quad -\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$\underline{Z}_{21} \quad \underline{Z}_{22}$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$
H	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{1}{A_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad -\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\underline{H}_{11} \quad \underline{H}_{12}$
	$\frac{1}{A_{22}} \quad -\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\underline{H}_{21} \quad \underline{H}_{22}$
G	$\frac{A_{21}}{A_{11}} \quad \frac{1}{A_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}} \quad -\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta H} \quad -\frac{H_{12}}{\Delta H}$
	$\frac{1}{A_{11}} \quad -\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$-\frac{H_{21}}{\Delta H} \quad \frac{H_{11}}{\Delta H}$

Примечание.  $\Delta Y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$ ;  $\Delta Z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$ ;  $\Delta H = \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21}$ .

В И Ч Н Ы Х:

$$\underline{Z}_{1bx} = \frac{\dot{U}_1}{I_1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{n2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{n2} + A_{22}} = \underline{Z}_{1x} \frac{\underline{Z}_{n2} + \underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{n2} + \underline{Z}_{2x}}; \quad (4.7)$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{\text{н1}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{\text{н1}} + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_{2\text{x}} \frac{\underline{Z}_{\text{н1}} + \underline{Z}_{1\text{x}}}{\underline{Z}_{\text{н1}} + \underline{Z}_{1\text{x}}}. \quad (4.8)$$

В частности, входные сопротивления при короткозамкнутых соответственно вторичных ( $\dot{U}_2 = 0$ ) и первичных ( $\dot{U}_1 = 0$ ) выводах

$$\underline{Z}_{1\text{x}} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22} = 1/\underline{Y}_{11}; \quad \underline{Z}_{2\text{x}} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11} = -1/\underline{Y}_{22}; \quad (4.9)$$

входные сопротивления при разомкнутых соответственно вторичных ( $\dot{I}_2 = 0$ ) и первичных ( $\dot{I}_1 = 0$ ) выводах

$$\underline{Z}_{1\text{x}} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{11}; \quad \underline{Z}_{2\text{x}} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21} = -\underline{Z}_{22} \quad (4.10)$$

и

$$\underline{Z}_{1\text{x}}/\underline{Z}_{1\text{x}} = \underline{Z}_{2\text{x}}/\underline{Z}_{2\text{x}}. \quad (4.11)$$

При известных  $\underline{Z}_{1\text{x}}, \underline{Z}_{1\text{k}}, \underline{Z}_{2\text{x}}, \underline{Z}_{2\text{k}}$

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\underline{Z}_{1\text{x}}(\underline{Z}_{2\text{x}} - \underline{Z}_{2\text{k}})}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2\text{k}}; \\ \underline{A}_{21} &= \underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1\text{x}}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{21}\underline{Z}_{2\text{x}} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2\text{x}}/\underline{Z}_{1\text{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Уравнения с характеристическими (вторичными) параметрами (характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{\text{c1}}, \underline{Z}_{\text{c2}}$  и постоянная передачи  $\Gamma$ ):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\underline{Z}_{\text{c1}}/\underline{Z}_{\text{c2}}} \dot{U}_2 \text{ch } \Gamma + \sqrt{\underline{Z}_{\text{c1}}\underline{Z}_{\text{c2}}} \dot{I}_2 \text{sh } \Gamma; \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 \text{sh } \Gamma / \sqrt{\underline{Z}_{\text{c1}}\underline{Z}_{\text{c2}}} + \sqrt{\underline{Z}_{\text{c2}}/\underline{Z}_{\text{c1}}} \dot{I}_2 \text{ch } \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{\text{c1}} &= \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{k}}\underline{Z}_{1\text{x}}}; \\ \underline{Z}_{\text{c2}} &= \sqrt{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}} = \sqrt{\underline{Z}_{2\text{k}}\underline{Z}_{2\text{x}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } \Gamma &= \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}; \quad \text{sh } \Gamma = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}; \\ \Gamma &= \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}); \\ \text{th } \Gamma &= \sqrt{\underline{Z}_{1\text{k}}/\underline{Z}_{1\text{x}}} = \sqrt{\underline{Z}_{2\text{k}}/\underline{Z}_{2\text{x}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

При питании со стороны первичных выводов и согласованной нагрузке  $\underline{Z}_{\text{н2}} = \underline{Z}_{\text{c2}}$  на вторичных

$$\begin{aligned} \Gamma &= A + jB = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}; \quad A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \text{ Нп}; \\ A &= 10 \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \text{ дБ}; \quad B = \frac{1}{2} (\psi_{u1} - \psi_{u2}) + \frac{1}{2} (\psi_{i1} - \psi_{i2}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $A$  — постоянная ослабления;  $B$  — постоянная фазы.

*Симметричные пассивные четырехполюсники.* Для пассивного взаимного симметричного четырехполюсника справедливы все приведенные выше уравнения и расчетные формулы (4.1)–(4.12), причем

$$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}; \underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}; \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}; |\underline{H}| = |\underline{G}| = -1, \quad (4.17)$$

где  $|\underline{H}|$  и  $|\underline{G}|$  — определители.

Уравнения с вторичными параметрами (характеристическим сопротивлением и постоянной передачи):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\Gamma}; \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\Gamma} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma}, \quad (4.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_c = z_c \angle \theta = \sqrt{A_{12}/A_{21}}; \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \underline{A}_{11}; \\ \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{A_{12}A_{21}}; \underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}). \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Входное сопротивление при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_n$

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_n + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_n + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_n \operatorname{th} \underline{\Gamma}} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x}. \quad (4.20)$$

В частности, в режимах короткого замыкания и холостого хода

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\Gamma}; \underline{Z}_x = \underline{Z}_c / \operatorname{th} \underline{\Gamma}, \quad (4.21)$$

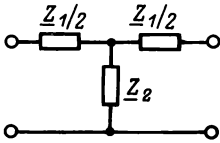
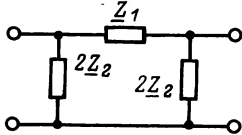
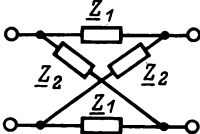
откуда

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_x}; \operatorname{th} \underline{\Gamma} = Te^{j\tau} = \sqrt{\underline{Z}_x / \underline{Z}_x}; \\ \underline{\Gamma} = A + jB = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + T \angle \tau}{1 - T \angle \tau} = \frac{1}{2} \ln we^{jk\xi}; \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} A = \frac{1}{2} \ln w; B_1 = \xi/2; B_2 = (\xi/2) \pm \pi; \\ w = \left| \frac{1 + T \angle \tau}{1 - T \angle \tau} \right|; \xi = \arg \frac{1 + T \angle \tau}{1 - T \angle \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

В табл. 4.2 приведены значения коэффициентов, вторичных параметров и сопротивлений Т-, П-образных и Х-образного (мостового) симметричных четырехполюсников. Для Т- и П-образных четырехполюсников следует всегда считать, что суммарное продольное сопротивление равно  $\underline{Z}_1$ , а суммарное поперечное равно  $\underline{Z}_2$ . В табл. 4.2 характеристическое сопротивление Т-образного четырехполюсника обозначено  $\underline{Z}_T$ , а П-образного обозначено  $\underline{Z}_П$ . Т- и П-образные четырехполюсники

Таблица 4.2. Коэффициенты и параметры симметричных четырехполюсников

Схема	Коэффициенты	
	$A$	$Y$
	$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$ $A_{12} = Z_1 \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right);$ $A_{21} = 1/Z_2;$ $A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$	$Y_{11} = -Y_{22} =$ $= \frac{2Z_1 + 4Z_2}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)};$ $Y_{21} = -Y_{12} =$ $= \frac{4Z_2}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}$
	$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$ $A_{12} = Z_1;$ $A_{21} = \frac{1}{Z_2} \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right);$ $A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$	$Y_{11} = -Y_{22} =$ $= \frac{1}{2Z_2} + \frac{1}{Z_1};$ $Y_{21} = -Y_{12} =$ $= \frac{1}{Z_1}$
	$A_{11} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} = A_{22};$ $A_{12} = \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1};$ $A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$	$Y_{11} = -Y_{22} =$ $= \frac{Z_2 + Z_1}{2Z_2Z_1};$ $Y_{21} = -Y_{12} =$ $= \frac{Z_2 - Z_1}{2Z_2Z_1}$

можно рассматривать как составленные из двух Г-образных. Коэффициенты и параметры Г-образного четырехполюсника приведены в табл. 4.3.

$Z$	Параметры	Сопротивления
$Z_{11} = -Z_{22} =$ $= \frac{Z_1}{2} + Z_2;$ $Z_{21} = -Z_{12} = Z_2$	$Z_c = Z_T =$ $= \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)};$ $\operatorname{ch} \Gamma = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$ $\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{Z_1/4Z_2}$	$\frac{Z_1}{2} = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} =$ $= Z_T \frac{\operatorname{ch} \Gamma - 1}{\operatorname{sh} \Gamma} = Z_T \operatorname{th} \frac{\Gamma}{2};$ $Z_2 = \frac{1}{A_{21}} = \frac{Z_T}{\operatorname{sh} \Gamma}$
$Z_{11} = -Z_{22} =$ $= \frac{(2Z_1 + 4Z_2) Z_2}{Z_1 + 4Z_2};$ $Z_{21} = -Z_{12} =$ $= \frac{4Z_2^2}{Z_1 + 4Z_2}$	$Z_c = Z_{\Pi} =$ $= \sqrt{Z_1 Z_2 \frac{1}{1 + Z_1/4Z_2}};$ $\operatorname{ch} \Gamma = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$ $\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{Z_1/4Z_2}$	$Z_1 = A_{12} = Z_{\Pi} \operatorname{sh} \Gamma;$ $2Z_2 = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1} =$ $= \frac{Z_{\Pi} \operatorname{sh} \Gamma}{\operatorname{ch} \Gamma - 1} =$ $= Z_{\Pi} \operatorname{cth} \frac{\Gamma}{2}$
$Z_{11} = -Z_{22} =$ $= \frac{1}{2}(Z_2 + Z_1);$ $Z_{21} = -Z_{12} =$ $= \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1)$	$Z_c = \sqrt{Z_1 Z_2};$ $\operatorname{ch} \Gamma = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1};$ $\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{Z_1/Z_2}$	$Z_1 = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} =$ $= Z_c \operatorname{th} \frac{\Gamma}{2};$ $Z_2 = \frac{A_{11} + 1}{A_{21}} =$ $= Z_c \operatorname{cth} \frac{\Gamma}{2}$

При согласованной нагрузке  $Z_n = Z_c$  уравнения (4.18) упрощаются:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\Gamma}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\Gamma}, \quad (4.24)$$



откуда при согласованной нагрузке

$$\Gamma = \ln (\dot{U}_1 / \dot{U}_2) = \ln (\dot{I}_1 / \dot{I}_2); \quad (4.25)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \text{ Нп}; \\ A &= 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ дБ}, \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

где  $S_1 = U_1 I_1$ ;  $S_2 = U_2 I_2$ ;  $P_1 = U_1 I_1 \cos \theta$ ;  $P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$ ;

$$B = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}. \quad (4.27)$$

Для цепочки симметричных четырехполюсников характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_н$  равно характеристическому сопротивлению одного звена  $\underline{Z}_c$ . Постоянная передачи цепочки

$$\Gamma_{ц} = n\Gamma, \quad (4.28)$$

где  $\Gamma$  — постоянная передачи одного звена;  $n$  — число звеньев.

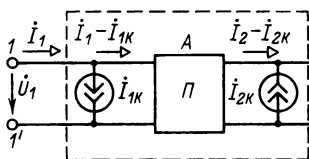


Рис. 4.Б

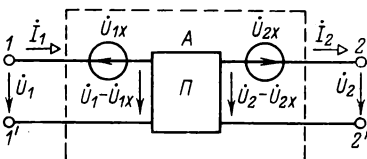


Рис. 4.В

При каскадном соединении любых пассивных четырехполюсников перемножаются матрицы  $\| \underline{A} \|$ , при параллельном соединении суммируются матрицы  $\| \underline{Y} \|$ , при последовательном — матрицы  $\| \underline{Z} \|$ , если соединения регулярные.

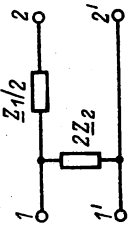
**Активные четырехполюсники.** Для активных четырехполюсников с зависимыми источниками (неавтономных) справедливы уравнения (4.1)–(4.5), но все четыре коэффициента каждого типа уравнений независимы, т.е. уравнения связи (4.6) не выполняются.

Для активных четырехполюсников с независимыми источниками (автономных) можно применять эквивалентные схемы, представленные на рис. 4.Б и 4.В. Уравнения типа А для схемы по рис. 4.Б:

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} (\dot{I}_2 - \dot{I}_{2K}); \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_{1K} = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} (\dot{I}_2 - \dot{I}_{2K}), \quad (4.29)$$

где  $\dot{I}_{1K} = \dot{J}_1$  и  $\dot{I}_{2K} = \dot{J}_2$  равны токам  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  при одновременном коротком замыкании первичных выводов и коротком замыка-

Таблица 4.3. Коэффициенты и параметры Г-образного четырехполюсника

Схема	Коэффициенты			Параметры
	$A$	$Y$	$Z$	
	$A_{11} = 1;$	$Y_{11} = \frac{Z_1 + 4Z_2}{2Z_1 Z_2};$	$Z_{11} = 2Z_2;$	$Z_{c1} = Z_{\Pi};$
	$A_{12} = Z_1/2;$			$Z_{c2} = Z_{\Pi} \text{ (см. табл. 4.2);}$
	$A_{21} = 1/2Z_2;$	$Y_{21} = -Y_{12} = 2/Z_1;$	$Z_{21} = -Z_{12} = 2Z_2;$	
	$A_{22} = 1 + Z_1/4Z_2$	$Y_{22} = -2/Z_1$	$Z_{22} =$ $= -\left(\frac{Z_1}{2} + 2Z_2\right)$	

нии вторичных выводов. Эти уравнения отличаются от уравнений (4.1) тем, что токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  заменены токами  $\dot{I}_1 - \dot{I}_{1x}$  и  $\dot{I}_2 - \dot{I}_{2x}$ . Такую же замену нужно сделать и в (4.2)–(4.5). Уравнения связи (4.6) выполняются, так что четырехполюсник характеризуется пятью независимыми параметрами.

Уравнения типа А для схемы рис. 4В:

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_{1x} = \underline{A}_{11}(\dot{U}_2 - \dot{U}_{2x}) + \underline{A}_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = \underline{A}_{21}(\dot{U}_2 - \dot{U}_{2x}) + \underline{A}_{22}\dot{I}_2, \quad (4.30)$$

где  $\dot{U}_{1x} = \dot{E}_1$  и  $\dot{U}_{2x} = \dot{E}_2$  равны напряжениям  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , когда одновременно разомкнуты первичные и вторичные выводы. В (4.2)–(4.5) напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  также нужно заменить напряжениями  $\dot{U}_1 - \dot{U}_{1x}$  и  $\dot{U}_2 - \dot{U}_{2x}$ .

**Передаточные функции четырехполюсников.** Передаточная функция четырехполюсника  $H(j\omega) = H(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ , как и для других цепей, делится на амплитудно-частотную  $H(\omega)$  и фазо-частотную  $\psi(\omega)$ . Для безразмерных передаточных функций логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика (ЛАХ)

$$\ln H(j\omega) = \ln H(\omega) + j\psi(\omega). \quad (4.31)$$

#### 4.1. Уравнения и коэффициенты пассивных четырехполюсников

**4.1(Р).** Составить матрицу  $\underline{A}$  для четырехполюсника по рис. 4.1 при  $\omega L = 2/\omega C = 20$  Ом; 1) записывая уравнения типа А в режимах холостого хода и короткого замыкания; 2) выражая коэффициенты через предварительно вычисленные

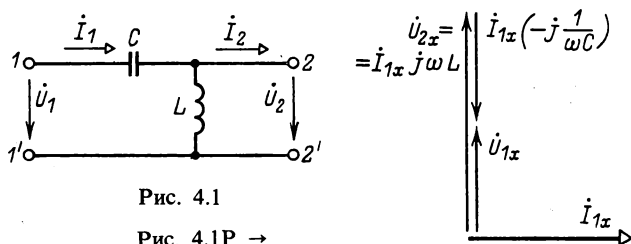


Рис. 4.1

Рис. 4.1Р →

сопротивления холостого хода и короткого замыкания. Убедиться, что коэффициенты удовлетворяют уравнению связи. При напряжении на первичных выводах 1-1', равном 20 В, найти напряжение на разомкнутых выводах 2-2'.

**Решение.** 1) При разомкнутых вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ) из уравнений типа А (4.1) получается:

$$\dot{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\dot{U}_{2x}; \quad \dot{I}_{1x} = \underline{A}_{21}\dot{U}_{2x}.$$

По схеме рис. 4.1

$$\dot{U}_{1x} = (-j1/\omega C + j\omega L) \dot{I}_{1x} = (-j10 + j20) \dot{I}_{1x} = j10 \dot{I}_{1x};$$

$$\dot{U}_{2x} = j\omega L \dot{I}_{1x} \text{ или } \dot{I}_{1x} = \dot{U}_{2x}/j20 \text{ и } \dot{U}_{1x} = j10 \dot{U}_{2x}/j20 = 0,5 \dot{U}_{2x}.$$

Следовательно,  $\underline{A}_{11} = 0,5$ ;  $\underline{A}_{21} = 1/j20 = -j0,05$  См.

При короткозамкнутых вторичных выводах ( $U_2 = 0$ ) из уравнений типа А (4.1) получается:

$$\dot{U}_{1k} = \underline{A}_{12} \dot{I}_{2k}; \quad \dot{I}_{1k} = \underline{A}_{22} \dot{I}_{2k}.$$

По схеме (рис. 4.1)

$$\dot{U}_{1k} = (-j1/\omega C) \dot{I}_{1k} = -j10 \dot{I}_{1k}; \quad \dot{I}_{1k} = \dot{I}_{2k}.$$

Следовательно,  $\underline{A}_{12} = -j10$  Ом,  $\underline{A}_{22} = 1$  и уравнение связи выполняется.

2) Сопротивления со стороны выводов 1-1' при соответственно короткозамкнутых и разомкнутых выводах 2-2'

$$\underline{Z}_{1k} = -j1/\omega C = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{1x} = -j1/\omega C + j\omega L = -j10 + j20 = j10 \text{ Ом}.$$

Аналогично со стороны выводов 2-2'

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{j\omega L(-j1/\omega C)}{j\omega L - j1/\omega C} = -j20 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{2x} = j\omega L = j20 \text{ Ом}.$$

По (4.12)

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}/(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})} = \sqrt{j10/(j20 + j20)} = \pm 0,5.$$

Из (4.1)  $\underline{A}_{11} = \dot{U}_{1x}/\dot{U}_{2x}$ , а из векторной диаграммы (рис. 4.1Р), построенной для четырехполюсника по рис. 4.1 при разомкнутых вторичных выводах, следует, что при заданных значениях  $\omega L$  и  $1/\omega C$  напряжение  $\dot{U}_{2x}$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}_{1x}$ , т. е.  $\underline{A}_{11} = +0,5$ .

По (4.12)  $\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2k} = -j10$  Ом;  $\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x} = -j0,05$  См;  $\underline{A}_{22} = \underline{A}_{21} \underline{Z}_{2x} = 1$ . Напряжение  $\dot{U}_{2x} = \dot{U}_{1x}/\underline{A}_{11} = 20/0,5 = 40$  В.

**4.2(Р).** Найти коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  для четырехполюсника по рис. 4.2 при  $1/\omega C = 35$  Ом,  $\omega L_1 = 20$  Ом,  $\omega L_2 = 60$  Ом,  $\omega M = 10$  Ом, сравнивая уравнения типа А с уравнениями, составленными по законам Кирхгофа.

**Решение.** Для четырехполюсника по рис. 4.2 по второму закону Кирхгофа для левого и правого контуров

$$\begin{aligned} \left(-j \frac{1}{\omega C} + j\omega L_1\right) \dot{I}_1 - j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j\omega L_2 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) - \\ - j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_1; \\ -j\omega L_2 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = 0. \end{aligned}$$

После подстановки тока  $\dot{I}_1$  из второго уравнения в первое и приведения уравнений к виду (4.1) при заданных числовых значениях сопротивлений получаем:

$$\dot{U}_1 = 0,5\dot{U}_2 - j20\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{j50} + \frac{6}{5}\dot{I}_2,$$

т. е.  $\underline{A}_{11} = 0,5$ ;  $\underline{A}_{12} = -j20$  Ом;  $\underline{A}_{21} = -j0,02$  См;  $\underline{A}_{22} = 1,2$ .

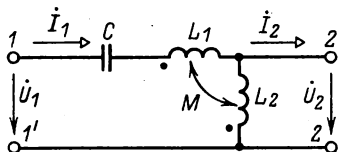


Рис. 4.2

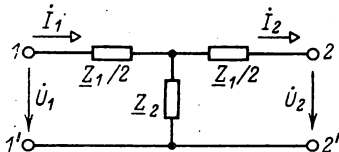
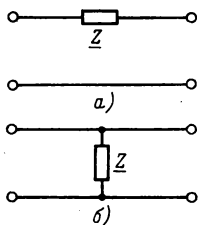


Рис. 4.3

4.3. Найти элементы матриц  $\underline{A}$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$ ,  $\underline{H}$  симметричного Т-образного четырехполюсника (рис. 4.3) при  $\underline{Z}_1 = r_1 = 10$  Ом,  $\underline{Z}_2 = r_2 = 5$  Ом. Проверить выполнение уравнений связи коэффициентов.

4.4. Найти элементы матриц  $\underline{A}$ ,  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  простейших четырехполюсников по рис. 4.4, а и б.



← Рис. 4.4

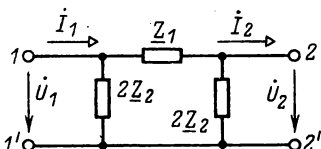


Рис. 4.5

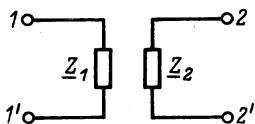


Рис. 4.6

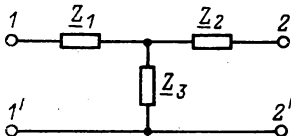


Рис. 4.8

4.5. Составить матрицы  $\underline{Y}$  и  $\underline{H}$  для П-образного симметричного четырехполюсника по рис. 4.5 при  $\underline{Z}_1 = r_1 = 20$  Ом,  $2\underline{Z}_2 = 2r_2 = 100$  Ом. Проверить выполнение уравнений связи коэффициентов.

4.6. Определить элементы матрицы  $\underline{Z}$  «разорванного» четырехполюсника (рис. 4.6). Записать матрицу для частных случаев: 1)  $\underline{Z}_1 = 0$ ; 2)  $\underline{Z}_2 = 0$ .

4.7. Определить элементы матрицы  $\underline{A}$  идеального трансформатора, имеющего  $w_1$  витков первичной обмотки и  $w_2$  — вторичной.

4.8(Р). Найти коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  несимметричного Т-образного четырехполюсника (рис. 4.8), предварительно вычислив сопротивления короткого замыкания и холостого хода со стороны первичных и со стороны вторичных выводов.

Решение. По схеме рис. 4.8 находим:

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{2к} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3};$$

$$\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{2х} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

После подстановки найденных величин в (4.12) получаем:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}.$$

4.9. Выразить коэффициенты системы уравнений четырехполюсника в форме  $\underline{Z}$  через известные сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

4.10. Определить коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  для четырехполюсников, представленных на рис. 4.10, а–в: 1) записывая для рассматриваемой схемы уравнения типа  $A$ , 2) по предварительно вычисленным сопротивлениям короткого замыкания и холостого хода. Проверить выполнение уравнения связи коэффициентов.

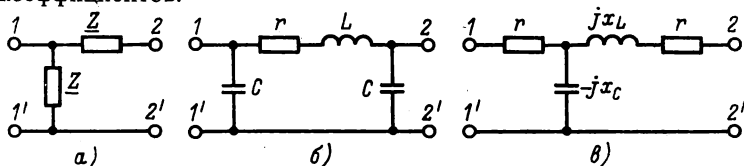


Рис. 4.10

Параметры четырехполюсника на рис. 4.10, б:  $r = \omega L = 20$  Ом;  $1/\omega C = 40$  Ом; на рис. 4.10, в:  $r = x_L = x_C = 10$  Ом.

При заданном напряжении на первичных выводах, равном 20 В, найти напряжение на разомкнутых вторичных.

4.11(Р). Измерены первичный и вторичный токи симметричного аттенуатора при замкнутом рубильнике  $P$  (рис. 4.11):  $I_{1к} = 3,2$  мА,  $I_{2к} = 1,6$  мА.

Определить токи при разомкнутом рубильнике, если  $\dot{E} = 48$  В,  $r_n = 5$  кОм.

**Решение.** При замкнутом рубильнике (режим короткого замыкания на вторичных выводах)  $\dot{U}_n = \dot{U}_2 = 0$ . Следовательно, по (4.1)  $\dot{U}_1 = \underline{A}_{12}\dot{I}_{2к}$ ;  $\dot{I}_{1к} = \underline{A}_{11}\dot{I}_{2к}$ , где учтено, что для симметричного четырехполюсника  $\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}$ . Токи и напряжения совпадают по фазе, так как аттенуатор состоит из резисторов, т. е.  $\underline{A}_{11} = \dot{I}_{1к}/\dot{I}_{2к} = 2 = \underline{A}_{22}$ ;  $\underline{A}_{12} = \dot{U}_1/\dot{I}_{2к} = \dot{E}/\dot{I}_{2к} = 30 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 30 \text{ кОм}$ . Коэффициент  $\underline{A}_{21} = 10^{-4}$  См определяется из уравнения связи (4.6).

При разомкнутом рубильнике  $P$  напряжение на сопротивлении нагрузки  $\dot{U}_2 = r_n \dot{I}_2$  и по (4.1)  $\dot{U}_1 = (\underline{A}_{11}r_n + \underline{A}_{12})\dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_1 = (\underline{A}_{21}r_n + \underline{A}_{22})\dot{I}_2$ , откуда при  $\dot{U}_1 = \dot{E} = 48 \text{ В}$  и  $r_n = 5 \text{ кОм}$  получается  $\dot{I}_2 = 1,2 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}_1 = 3 \text{ мА}$ .

**4.12.** Аттенуатор собран по Т-образной схеме рис. 4.3 с сопротивлениями  $\underline{Z}_1 = r_1 = 8 \text{ кОм}$  и  $\underline{Z}_2 = r_2 = 4 \text{ кОм}$ .

Определить ток источника питания  $I_1$  и напряжение на сопротивлении нагрузки  $U_2$  при напряжении источника питания  $U_1 = 48 \text{ В}$  и сопротивлении нагрузки  $r_n$ , равном: 1)  $\infty$ ; 2)  $6 \text{ кОм}$ ; 3)  $0$ .

**4.13(Р).** Для трансформатора (рис. 4.13) определить коэффициент  $\underline{Y}_{21}$ .

**Решение.** Из (4.2) следует, что  $\underline{Y}_{21} = \dot{I}_{2к}/\dot{U}_1$ . По схеме рис. 4.13 при коротком замыкании вторичных выводов

$$\underline{Z}_1 \dot{I}_{1к} - \underline{Z}_M \dot{I}_{2к} = \dot{U}_1; \quad \underline{Z}_2 \dot{I}_{2к} - \underline{Z}_M \dot{I}_{1к} = 0,$$

где  $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$ ;  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

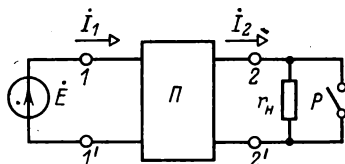


Рис. 4.11

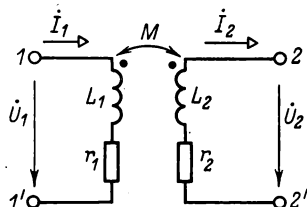


Рис. 4.13

Исключив ток  $\dot{I}_{1к}$  из этих уравнений, получим:

$$\dot{U}_1 = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_M - \underline{Z}_M) \dot{I}_{2к}, \text{ т. е. } \underline{Y}_{21} = \underline{Z}_M / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2).$$

**4.14.** Для четырехполюсника по рис. 4.14 (Г-образного) известны сопротивления  $\underline{Z}_1/2 = 2\underline{Z}_2 = 10 + j20 \text{ Ом}$ .

Определить: 1) коэффициенты матрицы  $\underline{A}$ ; 2) напряжение источника питания, при подключении которого напряжение на активном сопротивлении нагрузки  $10 \text{ Ом}$  составит  $20 \text{ В}$ ;

3) ток источника при питании четырехполюсника со стороны вторичных выводов и коротком замыкании первичных, если напряжение источника питания равно 100 мВ; 4) показание ваттметра, через токовую обмотку которого проходит первичный ток, а вольтметровая обмотка подключена к вторичным выводам, если последние разомкнуты, а к первичным подключен источник с напряжением  $u_1 = 80 \sin(\omega t + 45^\circ)$  В.

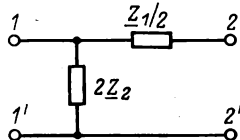


Рис. 4.14

**4.15(P).** 1) Составить матрицы  $\underline{Y}$  и  $\underline{Z}$  для симметричного мостового (X-образного) четырехполюсника (рис. 4.15) при  $\underline{Z}_1 = j10$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 10 - j10$  Ом.

2) Рассчитать режим четырехполюсника (определить  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_2$ ) при напряжении источника питания  $\dot{U}_1 = 100$  мВ: а) при короткозамкнутых и б) при разомкнутых вторичных выводах.

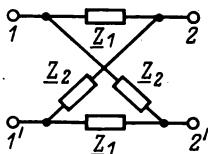


Рис. 4.15

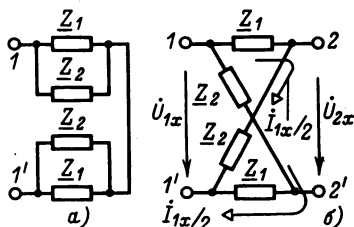


Рис. 4.15P →

**Решение.** 1) При коротком замыкании вторичных выводов ( $U_2 = 0$ ) из уравнений типа  $\underline{Y}$  (4.2) получаем  $\dot{I}_{1к} = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{1к}$ , т.е.  $\underline{Y}_{11}$  — величина, обратная входному сопротивлению со стороны первичных выводов при коротком замыкании вторичных:  $\underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}_{1к}$ . При коротком замыкании схему рис. 4.15 можно изобразить так, как показано на рис. 4.15P, а. Следовательно,

$$\underline{Z}_{1к} = 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \text{ и } \underline{Y}_{11} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)/2\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \\ = (2,5 - j2,5) \cdot 10^{-2} \text{ См.}$$

При разомкнутых вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ) из уравнений  $\underline{Y}$  получаем:  $0 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{1x} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{2x}$ , и так как для симметричного четырехполюсника  $\underline{Y}_{22} = -\underline{Y}_{11}$ , то  $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{2x}/\dot{U}_{1x}$ . В то же время при разомкнутых вторичных выводах (рис. 4.15P, б)

$$\dot{U}_{1x} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1) \dot{I}_{1x}/2; \quad \dot{U}_{2x} = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1) \dot{I}_{1x}/2, \quad (1)$$



или

$$\dot{U}_{2x}/\dot{U}_{1x} = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1),$$

поэтому

$$\underline{Y}_{21} = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)/2\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = -(2,5 + j7,5) \cdot 10^{-2} \text{ См} = -\underline{Y}_{12}.$$

Коэффициенты уравнений типа  $Z$  определяются проще. При разомкнутых вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ) из уравнений типа  $Z$  (4.3) получаем:

$$\dot{U}_{1x} = \underline{Z}_{11}\dot{I}_{1x}; \quad \dot{U}_{2x} = \underline{Z}_{21}\dot{I}_{1x}.$$

Для заданного четырехполосника при разомкнутых вторичных выводах (рис. 4.15Р, б) выше записаны уравнения (1). Сопоставляя их с последними уравнениями, находим:

$$\underline{Z}_{11} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)/2 = 5 \text{ Ом} = -\underline{Z}_{22};$$

$$\underline{Z}_{21} = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)/2 = 5 - j10 \text{ Ом} = -\underline{Z}_{12}.$$

Составить матрицу  $\underline{Z}$  по уже известной матрице  $\underline{Y}$  или наоборот можно и при помощи общих формул связи коэффициентов (табл. 4.1).

2а) При короткозамкнутых вторичных выводах ( $U_2 = 0$ ) по (4.2)

$$\dot{I}_{1k} = \underline{Y}_{11}\dot{U}_{1k} = 2,5\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 3,53 \angle -45^\circ \text{ мА};$$

$$\dot{I}_{2k} = \underline{Y}_{21}\dot{U}_{1k} = 7,91 \angle -108^\circ 25' \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 7,91 \angle -108^\circ 25' \text{ мА}.$$

2б) При разомкнутых вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ) по (4.3)

$$\dot{U}_{1x} = \underline{Z}_{11}\dot{I}_{1x}, \text{ т. е. } \dot{I}_{1x} = \dot{U}_{1x}/\underline{Z}_{11} = 100/5 = 20 \text{ мА};$$

$$\dot{U}_{2x} = \underline{Z}_{21}\dot{I}_{1x} \text{ и } \dot{U}_{2x} = 11,2 \angle -63^\circ 30' \cdot 20 = 224 \angle -63^\circ 30' \text{ мВ}.$$

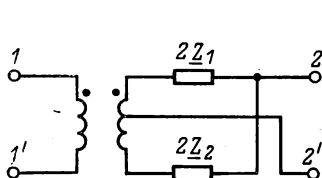


Рис. 4.16

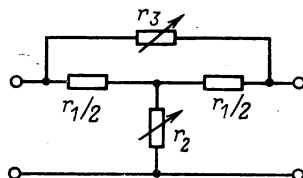


Рис. 4.17

**4.16.** Показать эквивалентность мостовой (рис. 4.15) и дифференциально-мостовой (рис. 4.16) схем при отношении чисел витков первичной и вторичной обмоток трансформатора  $w_1/w_2 = 1/2$ .

**4.17.** Для изменения уровня сигнала в аппаратуре связи часто применяется Т-образный мостовой аттенуатор (рис. 4.17),

так как в такой схеме необходимы только два переменных резистора.

Определить коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  аттенюатора при  $r_1/2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 1 \text{ кОм}$ .

**4.18.** Известны сопротивления двух четырехполюсников (рис. 4.8): первого  $\underline{Z}_1 = j11 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_2 = j10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_3 = -j6 \text{ Ом}$ ; второго  $\underline{Z}_1 = -j1 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_2 = -j2 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_3 = j6 \text{ Ом}$ .

Выяснить, можно ли отличить четырехполюсники: 1) после измерения сопротивлений холостого хода и короткого замыкания на частоте, для которой даны значения  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ ; 2) после повторного измерения, увеличив частоту на 10 %.

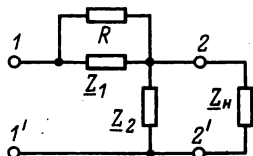


Рис. 4.19

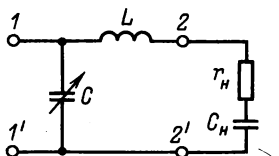


Рис. 4.21

**4.19.** Схема четырехполюсника для уменьшения амплитудных искажений сигналов показана на рис. 4.19. Сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_N = R$ .

Показать, что при любых  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ , удовлетворяющих условию  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R^2$  (обратные двухполюсники), входное сопротивление со стороны первичных выводов также равно  $R$ .

**4.20.** В схеме четырехполюсника рис. 4.19 элементы  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  — обратные двухполюсники. Элемент  $\underline{Z}_1$  состоит из параллельно соединенных резистора с сопротивлением  $r_1 = 1,6 \text{ кОм}$  и конденсатора емкостью  $C$ , элемент  $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$  — индуктивная катушка. Сопротивление нагрузки — резистор  $\underline{Z}_N = R = 400 \text{ Ом}$ .

Найти значения параметров  $C$ ,  $L$ ,  $r_2$ , если на частоте 1 кГц отношение напряжений и отношение токов на входе и выходе равны 2,23.

**4.21.** Состоящие из реактивных элементов четырехполюсники включают между генератором и потребителем для получения максимальной потребляемой мощности. Так, в установках диэлектрического нагрева применяют, например, Г-образную схему (рис. 4.21).

Определить, как следует выбрать емкость  $C$  подстроечного конденсатора и частоту генератора, чтобы входное сопротивление четырехполюсника было активным и равным  $2,85 \text{ кОм}$ , если в эквивалентной последовательной схеме сопротивление нагрузки  $r_N = 80 \text{ Ом}$  и  $C_N = 50 \text{ пФ}$ . Индуктивность  $L = 5 \text{ мкГн}$ .

Найти активную мощность в сопротивлении нагрузки при напряжении на входе четырехполюсника 3,1 кВ.

У к а з а н и е. Емкость  $C$  и частоту  $f$  следует выбирать так, чтобы входная проводимость контура (на выводах 1-1') была чисто активной, т. е.  $\underline{Y}_{вх} = g_{вх}$ .

## 4.2. Характеристические (вторичные) параметры

4.22(Р). Для П-образного четырехполюсника (рис. 4.5) известны сопротивления:  $\underline{Z}_1 = j50$  Ом;  $\underline{Z}_2 = -j10$  Ом.

Определить характеристическое сопротивление и постоянную передачи. Найти напряжение на сопротивлении согласованной нагрузки при напряжении питания 10 В.

Р е ш е н и е. Определим характеристическое сопротивление по сопротивлениям короткого замыкания и холостого хода (4.22). Для схемы рис. 4.5

$$\underline{Z}_x = \frac{2\underline{Z}_2\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = -j \frac{100}{3} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_x = \frac{2\underline{Z}_2(2\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)}{2\underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = -j60 \text{ Ом};$$

$\underline{Z}_c = \underline{Z}_n = \sqrt{\underline{Z}_x\underline{Z}_x} = \sqrt{2000 \angle (-180^\circ + 360^\circ)} = \pm j44,8 \text{ Ом}$   
(два значения согласованной нагрузки). Постоянная передачи по (4.19)

$$\text{ch } \underline{\Gamma} = \text{ch} (A + jB) = \text{ch } A \cos B + j \text{sh } A \sin B = \underline{A}_{11} = \dot{U}_1 / \dot{U}_{2x}.$$

По схеме рис. 4.5 при отсутствии сопротивления нагрузки на вторичных выводах

$$\dot{U}_1 / \dot{U}_{2x} = (\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2) / 2\underline{Z}_2 = -1,5 \text{ (действительное),}$$

поэтому  $\text{sh } A \sin B = 0$ . Если принять  $B = 0$ , то  $\cos B = 1$  и  $\text{ch } A = -1,5$ , чего не может быть. Значит,  $B = \pi$ ;  $\cos B = -1$ ;  $\text{ch } A = 1,5$  и два значения постоянной ослабления:  $A = \pm 0,96$  Нп.

Если выбрать  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = -j44,8$  Ом, то по схеме четырехполюсника рис. 4.5 с емкостной согласованной нагрузкой ( $\underline{Z}_n = -j44,8$  Ом) получаем  $U_2 = 0,383U_1 = 3,83$  В, т. е.  $U_2 < U_1$ , что соответствует  $A = +0,96$  Нп, так как по (4.26)  $U_1/U_2 = e^A = e^{+0,96}$ , и также получаем  $U_2 = 0,383U_1$ . При  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = +j44,8$  Ом соответственно  $A = -0,96$  Нп, так как получаем  $U_2 = 2,61U_1 = 26,1$  В.

4.23. В трактах телефонных сигналов аппаратуры телемеханики установлены симметричные уравновешенные аттенюаторы, схема которых показана на рис. 4.23.

Определить характеристическое сопротивление и постоянную передачи аттенюатора.

**4.24(P).** Для Т-образного симметричного четырехполюсника (рис. 4.3) при  $Z_1 = Z_2 = 5$  Ом определить: 1) характеристические параметры; 2) ток и мощность приемника в режиме согласованной нагрузки, мощность источника питания, если напряжение источника питания равно 10 В.

**Решение.** 1) Характеристические (вторичные) параметры можно найти по (4.19), предварительно вычислив коэффициенты матрицы  $\underline{A}$ , или по (4.22), предварительно вычислив сопротив-

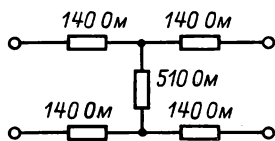


Рис. 4.23

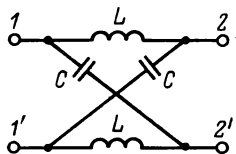


Рис. 4.26

ления  $\underline{Z}_k$  и  $\underline{Z}_x$ . Так как схема рис. 4.3 типовая, то для нее расчетные формулы даны в табл. 4.2:

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (1 + \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2)} = 5,58 \text{ Ом (активное);}$$

$$\text{ch } \underline{\Gamma} = \text{ch} (A + jB) = 1 + \underline{Z}_1 / 2 \underline{Z}_2 = 1,5.$$

Так как схема состоит из активных сопротивлений, то постоянная фазы  $B = 0$  и при  $\text{ch } A = 1,5$  постоянная ослабления  $A = +0,96$  Нп. Второе решение  $A = -0,96$  Нп нужно отбросить, так как у четырехполюсника, состоящего из активных сопротивлений, напряжение на выходе должно быть меньше, чем на входе.

2) При согласованной нагрузке симметричного четырехполюсника  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_n$  по (4.26) напряжение приемника  $U_2 = U_1 / e^A = 10 \cdot 0,383 = 3,83$  В. При активном характеристическом сопротивлении  $\underline{Z}_c = r_n = r_{\text{вх}}$  ток приемника  $I_2 = U_2 / r_n = 0,686$  А.

Мощность приемника  $P_2 = U_2^2 / r_n = 2,62$  Вт. Мощность источника  $P_1 = U_1^2 / r_{\text{вх}} = 17,9$  Вт.

**4.25.** Определить характеристические параметры для Т- и П-образных симметричных четырехполюсников по рис. 4.3 и 4.5 при  $\underline{Z}_1 = -j200$  Ом и  $\underline{Z}_2 = j50$  Ом.

**4.26.** Найти зависимость от частоты характеристического сопротивления, постоянных ослабления и фазы для четырехполюсника по рис. 4.26.

**4.27.** Для четырехполюсника по рис. 4.1 найти входные сопротивления со стороны первичных и со стороны вторичных выводов при согласованных нагрузках соответственно на вторичных и первичных выводах.

У к а з а н и е. Учесть, что при  $Z_{n2} = Z_{c2}$  получается  $Z_{1вх} = Z_{c1}$ ; при обратном питании и  $Z_{n1} = Z_{c1}$  получается  $Z_{2вх} = Z_{c2}$ .

**4.28.** Найти характеристические сопротивления четырехполюсника по рис. 4.10, а.

**4.29.** Определить, при каком сопротивлении нагрузки входное сопротивление четырехполюсника по рис. 4.10, б равно этому сопротивлению.

**4.30(Р).** Из трех резисторов с сопротивлениями 100, 100 и 50 Ом составлен: 1) симметричный Т-образный четырехполюсник, 2) симметричный П-образный четырехполюсник.

Найти характеристические сопротивления и постоянные ослабления этих четырехполюсников.

Р е ш е н и е. Схема четырехполюсника показана на рис. 4.3, где  $Z_1/2 = r_1/2 = 100$  Ом и  $Z_2 = r_2 = 50$  Ом. Вторичные параметры определяются, например, по (4.19) или (4.22). В первом случае коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  даны в табл. 4.2:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1 + r_1/2r_2 = 3; \underline{A}_{12} = r_1(1 + r_1/4r_2) = 400 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = 1/r_2 = 0,02 \text{ См.}$$

Во втором случае по схеме рис. 4.3  $Z_x = r_x = 150$  Ом;  $Z_x = r_x = 133,3$  Ом.

По (4.19) или (4.22) получаем  $\underline{Z}_c = 141$  Ом,  $A = 1,76$  Нп.

**4.31.** В приемнике одноканальной системы телемеханики для получения ослабления сигналов на 2 Нп применяется Т-образный аттенуатор (рис. 4.3) с характеристическим сопротивлением 100 Ом.

Найти мощность в сопротивлении согласованной нагрузки, если мощность источника питания равна 200 мВт. Рассчитать сопротивления схемы.

**4.32.** Определить характеристическое сопротивление и постоянную ослабления аттенуатора задачи 4.17.

### 4.3. Схемы замещения

**4.33(Р).** У симметричного четырехполюсника известны коэффициенты:  $\underline{A}_{11} = 0,8$ ;  $\underline{A}_{12} = j1,8$  Ом.

Определить сопротивления Т-образной схемы замещения и характеристическое сопротивление. Построить топографическую диаграмму напряжений при согласованной нагрузке, приняв  $I_2 = I_2 = 1$  А.

Р е ш е н и е. Для симметричного четырехполюсника  $\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}$ , коэффициент  $\underline{A}_{21}$  определяется из уравнения связи

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1, \text{ т.е. } \underline{A}_{21} = (\underline{A}_{11}^2 - 1)/\underline{A}_{12} = j0,2 \text{ См.}$$

Сопротивления Т-образной схемы замещения (см. табл. 4.2)

$$\underline{Z}_1/2 = (\underline{A}_{11} - 1)/\underline{A}_{21} = j1 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = 1/\underline{A}_{21} = -j5 \text{ Ом}.$$

Характеристическое сопротивление (см. табл. 4.2)  $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}} = 3 \text{ Ом}$ . Полученная схема и топографическая диаграмма показаны на рис. 4.33Р, а и б. При построении учтено, что постоянная ослабления  $A = 0$ ; это следует из соотношения  $\text{ch}(A + jB) = \underline{A}_{11} = 0,8$  или  $\text{ch} A \cos B + j \text{sh} A \sin B = 0,8$ . Если  $\sin B = 0$ , то  $\cos B = \pm 1$  и  $|\text{ch} A| < 1$ , чего не может быть. Значит,  $\text{sh} A = 0$  и  $A = 0$ . Следовательно,  $I_1 = I_2$  и  $U_1 = U_2$ .

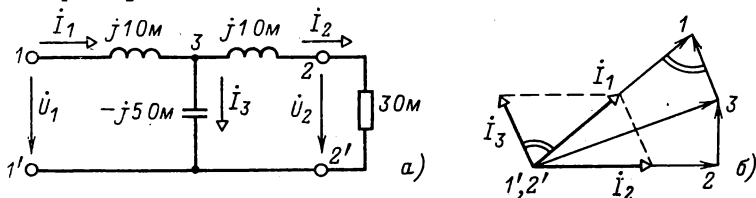


Рис. 4.33Р

**4.34.** Для составления Т-образной схемы замещения четырехполюсника, схема которого неизвестна, были измерены сопротивления холостого хода и короткого замыкания:  $\underline{Z}_{1x} = r_{1x} = 40 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{2x} = r_{2x} = 20 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{2k} = r_{2k} = 10 \text{ Ом}$ .

При помощи схемы замещения найти отношение первичного и вторичного токов при питании со стороны первичных выводов и коротком замыкании вторичных.

**4.35.** Чтобы составить схему замещения линии передачи электроэнергии (симметричный четырехполюсник), были проведены опыты холостого хода и короткого замыкания. Опыты дали:  $U_{1x} = 30 \text{ кВ}$ ;  $I_{1x} = 6 \text{ А}$ ;  $P_{1x} = 27 \text{ кВт}$ ;  $\varphi_{1x} < 0$ ;  $U_{1k} = 4,5 \text{ кВ}$ ;  $I_{1k} = 30 \text{ А}$ ;  $P_{1k} = 69 \text{ кВт}$ ;  $\varphi_{1k} > 0$ .

Определить входное сопротивление П-образной схемы замещения, если сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_n = r_n = 80 \text{ Ом}$ .

**4.36.** Для симметричного четырехполюсника заданы коэффициенты  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1,18 \angle -135^\circ$ ;  $\underline{A}_{12} = 7,10 \angle -80^\circ 50'$  Ом;  $\underline{A}_{21} = 0,235 \angle -135^\circ \text{ См}$ .

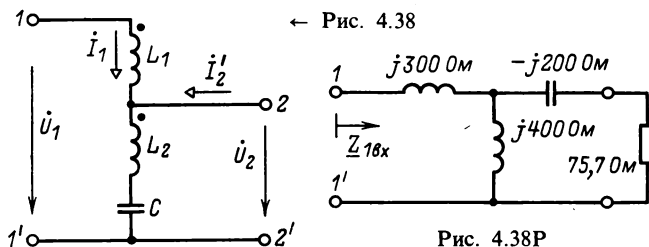
Составить: 1) Т-образную (рис. 4.3) и 2) мостовую (рис. 4.15) схемы замещения четырехполюсника.

**4.37.** В цепь включен трансформатор (рис. 4.13) как согласующий четырехполюсник.

Составить Т-образную схему замещения, предварительно вычислив элементы матрицы  $\underline{A}$ . Определить входное сопротивление трансформатора при активном сопротивлении на-

грузки  $r_n = 10 \text{ Ом}$  на вторичных выводах, если: 1)  $x_1 = x_2 = r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}$ ; коэффициент связи  $k = 0,5$  и 2)  $x_2 = 4x_1 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 4r_1 = 40 \text{ Ом}$ ;  $k = 0,5$ . Найти напряжение на сопротивлении нагрузки при напряжении источника питания  $184 \text{ В}$ .

**4.38(Р).** Для согласования воздушной и кабельной линий связи в месте их соединения включены автотрансформатор и конденсатор (рис. 4.38). На расчетной частоте сопротивления  $\omega L_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 700 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = 900 \text{ Ом}$ ; коэффициент связи  $k = 0,667$ . Потерями в трансформаторе и конденсаторе можно пренебречь.



← Рис. 4.38

Рис. 4.38Р

Составить Т-образную схему замещения этого четырех-полюсника. По схеме замещения вычислить входное сопротивление со стороны первичных выводов при сопротивлении нагрузки  $Z_n = r_n = 75,7 \text{ Ом}$ .

Решение. Для несимметричного Т-образного четырех-полюсника (рис. 4.8) можно вычислить значения сопротивлений  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , если, например, известны коэффициенты матрицы  $\underline{A}$ .

Коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{21}$  определяются из уравнений, составленных для схемы рис. 4.38 при разомкнутых вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ):

$$\dot{U}_{1x} = \dot{I}_{1x}(j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M - j1/\omega C);$$

$$\dot{U}_{2x} = \dot{I}_{1x}(j\omega L_2 + j\omega M - j1/\omega C),$$

откуда  $A_{11} = \dot{U}_{1x}/\dot{U}_{2x} = 1,75$ ;  $A_{21} = \dot{I}_{1x}/\dot{U}_{2x} = A_{11}\dot{I}_{1x}/\dot{U}_{1x} = -j2,5 \cdot 10^{-3}$  См. Коэффициент  $A_{22}$  найдем из уравнений, составленных для схемы по рис. 4.38 при обратном питании и разомкнутых первичных выводах ( $I_1 = 0$ ):

$$\dot{U}'_{2x} = \dot{I}'_{2x}(j\omega L_2 - j1/\omega C); \quad \dot{U}'_{1x} = \dot{U}'_{2x} + \dot{I}'_{2x}j\omega M,$$

откуда  $\dot{U}'_{2x}/\dot{U}'_{1x} = A_{22} = 0,5$ . Сопротивления  $Z_1 = j300 \text{ Ом}$ ;  $Z_2 = -j200 \text{ Ом}$ ;  $Z_3 = j400 \text{ Ом}$ .

Входное сопротивление можно найти по схеме рис. 4.38Р:  $Z_{1вх} = 265 \text{ Ом}$ . Эту схему можно составить и сразу для авто-

трансформатора как эквивалентную, не содержащую индуктивных связей.

**4.39.** У несимметричного четырехполосника известна матрица  $\underline{A}$ .

Определить сопротивления Т-образной схемы замещения (рис. 4.8).

**4.40(Р).** Составить П-образную схему замещения (рис. 4.5) для мостового четырехполосника (рис. 4.15) при  $\underline{Z}_1 = r_1 = 20$  Ом;  $\underline{Z}_2 = r_2 = 60$  Ом. Определить, во сколько раз напряжение на выходных выводах меньше, чем на входных, при согласованной нагрузке.

**Решение.** У П-образной схемы замещения должны быть такие же коэффициенты и параметры, как и у заданного четырехполосника. Например, по табл. 4.2 для Х-образного (мостового) четырехполосника

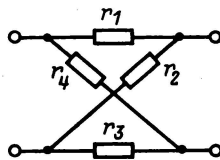


Рис. 4.41

$$\underline{A}_{11} = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} = 2; \quad \underline{A}_{12} = \frac{2r_2r_1}{r_2 - r_1} = 60 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = 2/(r_2 - r_1) = 0,05 \text{ См.}$$

Для П-образной схемы по табл. 4.2  $\underline{Z}_1 = \underline{A}_{12} = 60$  Ом;  $2\underline{Z}_2 = \underline{A}_{12}/(\underline{A}_{11} - 1) = 60$  Ом.

Расчет может быть выполнен и с применением сопротивлений короткого замыкания и холостого хода или вторичных параметров.

При согласованной нагрузке  $U_1/U_2 = e^A$ , где  $A$  — постоянная ослабления, которая одинакова у мостового четырехполосника и его П-образной схемы замещения.

**4.41.** Составить Т-образную схему замещения (рис. 4.8) для несимметричного мостового четырехполосника (рис. 4.41) при  $r_1 = r_2 = 8$  Ом;  $r_3 = 4$  Ом;  $r_4 = 12$  Ом.

#### 4.4. Соединения четырехполосников

**4.42(Р).** Симметричная мостовая схема (рис. 4.15) с  $\underline{Z}_1 = r_1$  и  $\underline{Z}_2 = r_2$  либо цепочка, состоящая из звеньев мостового типа, применяются в различной аппаратуре связи. Для таких четырехполосников часто необходимо знать зависимость входного сопротивления от сопротивления нагрузки  $r_n$ .

1) Составить эту зависимость для одного звена: а) при помощи уравнений четырехполосника типа  $A$ ; б) при помощи вторичных параметров.



2) Составить зависимость входного сопротивления от сопротивления нагрузки для цепочки, состоящей из трех звеньев, применив уравнения с гиперболическими функциями.

Дано:  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 60$  Ом.

Решение. 1) По (4.20) входное сопротивление

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{A}_{11}r_n + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}r_n + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_c \frac{r_n + \underline{Z}_c \operatorname{th} \Gamma}{\underline{Z}_c + r_n \operatorname{th} \Gamma}.$$

Коэффициенты  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$  и вторичные параметры заданного симметричного четырехполюсника можно выразить, например, через сопротивления короткого замыкания  $\underline{Z}_x$  и холостого хода  $\underline{Z}_x$ . Для схемы рис. 4.15

$$\underline{Z}_x = 2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 30 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_x = \frac{r_1 + r_2}{2} = 40 \text{ Ом}.$$

По (4.12) и (4.22)

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\underline{Z}_x / (\underline{Z}_x - \underline{Z}_x)} = 2; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_x = 60 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_x = 1/20 \text{ См}; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_x} = 34,7 \text{ Ом};$$

$$\operatorname{th} \Gamma = \operatorname{th} (A + jB) = \sqrt{\underline{Z}_x / \underline{Z}_x} = 0,865,$$

откуда  $A = |\Gamma| = 1,31$  Нп ( $B = 0$ ).

Входное сопротивление одного звена

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{2r_n + 60}{0,05r_n + 2} = 34,7 \frac{r_n + 34,7 \cdot 0,865}{34,7 + r_n \cdot 0,865} = 40 \frac{r_n + 30}{r_n + 40} \text{ Ом}.$$

2) Для цепочки из трех звеньев постоянная ослабления  $A_{ц} = 3A = 3,93$  и  $\operatorname{th} A_{ц} = 0,999 \approx 1$ , характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_{ц} = \underline{Z}_c$ .

По определению (4.20) входное сопротивление цепочки

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ц} (r_n + \underline{Z}_{ц} \operatorname{th} A_{ц}) / (\underline{Z}_{ц} + r_n \operatorname{th} A_{ц}),$$

и при  $\operatorname{th} A_{ц} \approx 1$  практически при любом  $r_n$  получается  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ц} = 37,4$  Ом.

**4.43(P).** Цепная схема состоит из трех одинаковых симметричных звеньев — аттенуаторов, для каждого из которых известны коэффициенты:  $\underline{A}_{11} = 3$ ;  $\underline{A}_{21} = 0,2$  См.

1) Найти характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_{ц}$  и постоянную ослабления  $A_{ц}$  цепочки.

2) При напряжении питания  $U_1 = 120$  В определить ток в сопротивлении согласованной нагрузки.

Решение. 1) Характеристическое сопротивление цепочки, состоящей из одинаковых симметричных звеньев, равно харак-

теристическому сопротивлению одного звена, т.е.  $Z_{\text{ц}} = Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}} = 14,1$  Ом, где из уравнения связи (4.6) для симметричного четырехполюсника имеем  $A_{12} = (A_{11}^2 - 1)/A_{21} = 40$  Ом.

Постоянная ослабления одного звена – аттенуатора по (4.19)  $\text{ch } \Gamma = \text{ch } A = A_{11} = 3$ , откуда  $A = 1,76$  Нп. Постоянная ослабления цепочки равна сумме постоянных ослабления трех звеньев, т.е.  $A_{\text{ц}} = 3A = 5,28$  Нп.

2) Напряжение на сопротивлении согласованной нагрузки  $U_2 = U_1 e^{-A_{\text{ц}}} = 0,61$  В. Ток в сопротивлении согласованной нагрузки  $I_2 = U_2/z_{\text{ц}} = 43,2$  мА.

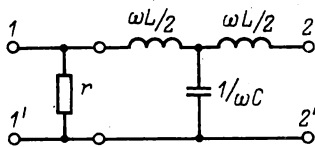


Рис. 4.45

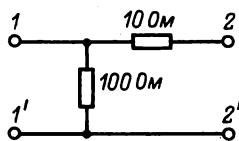


Рис. 4.46

**4.44.** Из двух одинаковых четырехполюсников по рис. 4.1 составлена Т-образная симметричная схема.

Определить вторичные параметры полученного четырехполюсника.

**4.45.** К входным выводам симметричного четырехполюсника, составленного из реактивных элементов  $\omega L/2 = 2,5$  Ом,  $1/\omega C = 5$  Ом (рис. 4.45), присоединен резистор с сопротивлением  $r = 100$  Ом.

Составить матрицу  $\underline{A}$  полученного четырехполюсника, рассматривая этот четырехполюсник как каскадное соединение простейшего четырехполюсника (рис. 4.4, б) и симметричного Т-образного (рис. 4.3).

**4.46.** Составить матрицу  $\underline{A}$  для Г-образного аттенуатора (рис. 4.46): 1) рассматривая схему рис. 4.46 как каскадное соединение простейших четырехполюсников (рис. 4.4, б и а); 2) предварительно составив матрицу  $\underline{Z}$  для двух последовательно соединенных четырехполюсников – «разорванного» (рис. 4.6) при  $\underline{Z}_1 = 0$  и простейшего (рис. 4.4, б). Проверить регулярность соединения.

**4.47(Р).** Двойной Т-образный четырехполюсник (рис. 4.47) применяется в аппаратуре телемеханики и связи для изменения фазы напряжения.

Определить сдвиг фаз между напряжениями  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  при  $1/\omega C = r$  и  $Z_{\text{н}} = r$ .

**Решение.** Рассматривая четырехполюсник по рис. 4.47 как параллельное соединение двух Т-образных схем, сначала

составим матрицу этого четырехполюсника  $\underline{Y} = \underline{Y}' + \underline{Y}''$ , где  $\underline{Y}'$  и  $\underline{Y}''$  — матрицы Т-образных схем. По табл. 4.2

$$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22} = \frac{2\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2)}; \quad \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{12} = \frac{4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2)},$$

где для первой схемы  $\underline{Z}_1 = r$ ;  $\underline{Z}_2 = -j1/\omega C = -jr$ , для второй  $\underline{Z}_1 = -jr$ ;  $\underline{Z}_2 = r$ , поэтому для первой схемы  $\underline{Y}'_{11} = \frac{2}{r} \frac{1-j2}{1-j4}$ ;  $\underline{Y}'_{21} = \frac{2}{r} \frac{-j2}{1-j4}$ , для второй  $\underline{Y}''_{11} = \frac{2}{r} \frac{-2+j1}{1+j4}$ ;  $\underline{Y}''_{21} = \frac{2}{r} \frac{-2}{1+j4}$  и для четырехполюсника по рис. 4.47

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} = \frac{2}{r} \frac{11+j11}{17}; \quad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} = \frac{2}{r} \frac{6+j6}{17}.$$

$$\text{По табл. 4.1 } \underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{11+j11}{6+j6}; \quad \underline{A}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = \frac{8,5r}{6+j6}.$$

Из (4.1) после подстановки  $\dot{I}_2 = \dot{U}_2/\underline{Z}_H = \dot{U}_2/r$  получим  $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/r = 2,62 \angle -15^\circ 3'$ , т. е. напряжение  $\dot{U}_2$  опережает по фазе напряжение  $\dot{U}_1$  на угол  $15^\circ 30'$ .

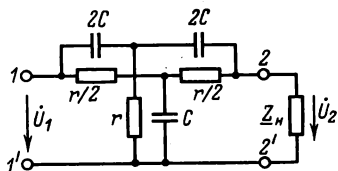


Рис. 4.47

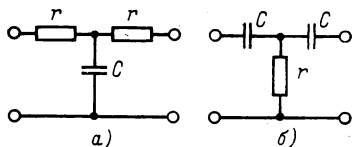


Рис. 4.48

**4.48.** Параллельно соединены два Т-образных симметричных четырехполюсника (рис. 4.48, а и б). Их матрицы  $\underline{A}'$  и  $\underline{A}''$  заданы:  $\underline{A}'_{11} = 1 + j1$ ;  $\underline{A}'_{12} = 10 + j5$  Ом;  $\underline{A}'_{21} = j0,2$  См;  $\underline{A}'_{22} = 1 + j1$ ;  $\underline{A}''_{11} = 1 - j1$ ;  $\underline{A}''_{12} = -5 - j10$  Ом;  $\underline{A}''_{21} = 0,2$  См;  $\underline{A}''_{22} = 1 - j1$ .

Составить матрицу  $\underline{A}$  для их параллельного соединения и проверить его регулярность.

**4.49.** Два одинаковых четырехполюсника по рис. 4.14 с параметрами  $\underline{Z}_1/2 = r$  и  $2\underline{Z}_2 = r$  соединены: 1) каскадно; 2) параллельно с соблюдением регулярности; 3) последовательно с соблюдением регулярности.

Определить коэффициенты матрицы  $\underline{A}$  для трех полученных несимметричных четырехполюсников.

**4.50.** Рассматривая аттенуатор по рис. 4.17 как параллельное соединение простейшего по рис. 4.4, *а* и симметричного Т-образного по рис. 4.3, составить матрицу  $\underline{Y}$  аттенуатора, если  $r_1/2 = r_2 = r_3 = 100 \text{ Ом}$ .

#### 4.5. Активные четырехполюсники

**4.51(P).** У электронной лампы — триода известны параметры:  $\mu = 50$  — статический коэффициент усиления,  $S = 10 \text{ мА/В}$  — крутизна анодно-сеточной характеристики,  $R_i = 5 \text{ кОм}$  — внутреннее сопротивление.

Составить матрицы  $\underline{A}$  и  $\underline{Z}$  для триода — активного четырехполюсника (рис. 4.51) при сопротивлении в цепи сетки  $r = 0,2 \text{ МОм}$ . Межэлектродные емкости лампы не учитывать.

Решение. При работе триода (рис. 4.51) в линейном режиме для определения синусоидальных составляющих напряжений и токов можно пользоваться любой из схем замещения, представленных на рис. 4.51P, *а* и *б*, где учтено, что параметры триода связаны соотношением  $\mu = SR_i$ .

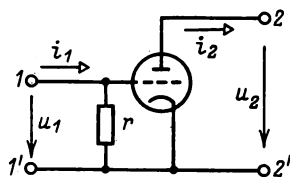


Рис. 4.51

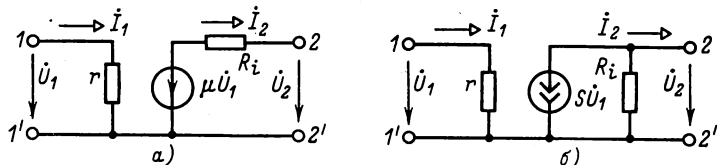


Рис. 4.51P

Из рис. 4.51P, *а* следует, что

$$r \dot{I}_1 = \dot{U}_1; \quad R_i \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = -\mu \dot{U}_1.$$

Эти уравнения легко приводятся к уравнениям типа *A* (4.1) и типа *Z* (4.3), которые справедливы и для активных четырехполюсников с зависимыми источниками (но все четыре коэффициента каждого типа уравнений независимы):

$$\dot{U}_1 = -\frac{1}{\mu} \dot{U}_2 - \frac{R_i}{\mu} \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = -\frac{1}{\mu r} \dot{U}_2 - \frac{R_i}{\mu r} \dot{I}_2,$$

$$\text{т. е. } \underline{A} = \begin{vmatrix} -1/\mu & -1/S \\ -1/\mu r & -1/Sr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,02 & -100 \text{ Ом} \\ -10^{-7} \text{ См} & -5 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix};$$

$$\dot{U}_1 = r \dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = -\mu r \dot{I}_1 - R_i \dot{I}_2,$$

т. е. 
$$\underline{Z} = \begin{vmatrix} r & 0 \\ -\mu r & -R_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 10^5 \text{ Ом} & 0 \\ -10^7 \text{ Ом} & -5 \cdot 10^3 \text{ Ом} \end{vmatrix}.$$

4.52. Для триода задачи 4.51 составить матрицу  $\underline{Y}$  при сопротивлении в цепи сетки  $r = \infty$ .

4.53(Р). Для простого каскада усиления по рис. 4.53 составить матрицу  $\underline{Y}$ , считая известными параметры триода  $\mu$ ,  $S$ ,  $R_i$  (см. задачу 4.51) и учитывая емкость  $C$  между анодом и сеткой (емкости между сеткой и катодом и между анодом и катодом отнесены соответственно к источнику питания и сопротивлению нагрузки).

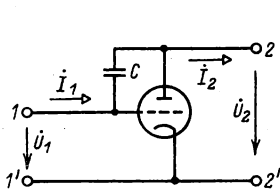


Рис. 4.53

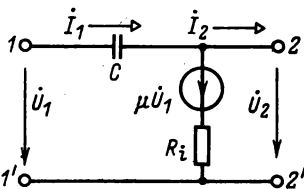


Рис. 4.53Р

Решение. Эквивалентная схема каскада с источником напряжения  $\mu \dot{U}_1$  для синусоидальных составляющих напряжений и токов показана на рис. 4.53Р. Для этой схемы

$$\underline{Z} \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_1, \text{ где } \underline{Z} = 1/j\omega C;$$

$$R_i (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + \dot{U}_2 = -\mu \dot{U}_1,$$

$$\text{откуда } \dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}} \dot{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = -\frac{\mu \dot{U}_1}{R_i} - \frac{\dot{U}_2}{R_i} + \dot{I}_1,$$

т. е.

$$\underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}; \quad \underline{Y}_{12} = -1/\underline{Z}; \quad \underline{Y}_{21} = 1/\underline{Z} - \mu/R_i; \quad \underline{Y}_{22} = -1/\underline{Z} - 1/R_i.$$

4.54. Для каскада усиления предыдущей задачи найти численное значение определителя  $\underline{\Delta}_4 = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}$  при заданных параметрах:  $\mu = 50$ ;  $S = 10 \text{ мА/В}$ ;  $R_i = 5 \text{ кОм}$ ;  $1/\omega C = 100 \text{ Ом}$ .

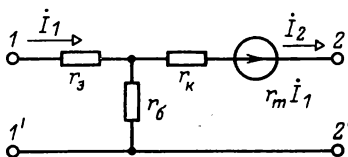


Рис. 4.55

4.55. Одна из схем замещения транзистора типа  $p-n-p$  представлена на рис. 4.55. Параметры схемы:  $r_3 = 50 \text{ Ом}$ ;  $r_k = 2 \text{ МОм}$ ;  $r_6 = 500 \text{ Ом}$ ;  $r_m = 1,9 \text{ МОм}$ .

Составить матрицу  $\underline{A}$  и найти численное значение ее определителя  $\underline{\Delta}_4$ .

4.56. Для транзистора задачи 4.55 составить матрицу  $\underline{H}$ .  
 4.57(Р). На рис. 4.57 представлена схема замещения активного четырехполюсника с зависимыми источниками, где  $r_1 = 200$  Ом;  $r_2 = 400$  Ом;  $r_3 = 300$  Ом;  $\dot{E}_1 = 0,1\dot{U}_2$ ;  $\dot{E}_2 = 60\dot{U}_1$ .

Найти элементы матрицы  $\underline{H}$ , предварительно построив сигнальный граф.

Решение. Если выбрать структуру сигнального графа так, чтобы ток  $\dot{I}_1$  и напряжение  $\dot{U}_2$  были представлены в нем узлами-истоками, то коэффициенты  $\underline{H}_{11}$ ,  $\underline{H}_{12}$ ,  $\underline{H}_{21}$ ,  $\underline{H}_{22}$  системы уравнений (4.4) определятся прямо по топологической формуле (Мэзона).

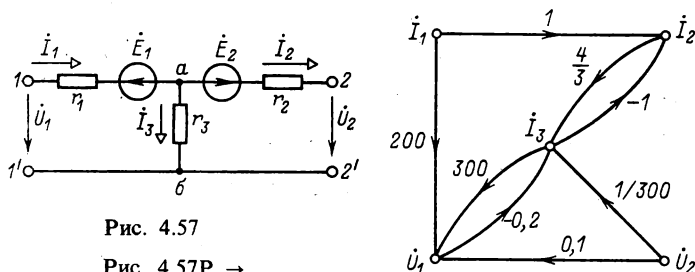


Рис. 4.57

Рис. 4.57Р →

Запишем уравнения Кирхгофа в виде

$$\dot{U}_1 = 0,1\dot{U}_2 + 200\dot{I}_1 + 300\dot{I}_3;$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3,$$

где  $\dot{I}_3 = \dot{U}_{a6}/r_3 = 4\dot{I}_2/3 - 0,2\dot{U}_1 + \dot{U}_2/300$ .

Сигнальный граф, построенный по этим уравнениям, приведен на рис. 4.57Р. Граф имеет два контура, передачи которых:  $\underline{L}_1 = -4/3 = -1,333$  и  $\underline{L}_2 = -60$ . Определитель графа  $\underline{\Delta} = 1 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2) = 62,33$ .

При  $\dot{U}_2 = 0$  по топологической формуле определяем  $\underline{H}_{11}$  и  $\underline{H}_{21}$ :

$$\underline{H}_{11} = \frac{\sum_k \underline{\Pi}_k \underline{\Delta}_k}{\underline{\Delta}} = \frac{\underline{\Pi}_1 \underline{\Delta}_1 + \underline{\Pi}_2 \underline{\Delta}_2}{\underline{\Delta}} = 13,9 \text{ Ом},$$

где  $\underline{\Pi}_1 = 200$ ;  $\underline{\Pi}_2 = 1(4/3)300$ ;  $\underline{\Delta}_1 = 1 - (-1,333)$ ;  $\underline{\Delta}_2 = 1$ ; аналогично

$$\underline{H}_{21} = \frac{(+1)(1 + 60) + (-0,2) \cdot 200(-1)}{62,33} = 1,620.$$

При  $\dot{I}_1 = 0$  по топологической формуле определяем  $\underline{H}_{12}$

и  $H_{22}$ :

$$H_{12} = \frac{0,1(1 + 1,333) + 0,0033 \cdot 300}{62,33} = 0,1802;$$

$$H_{22} = \frac{-0,1(-0,2) - 0,0033}{62,33} = 2,679 \cdot 10^{-4} \text{ См.}$$

**4.58(P).** Определить матрицу  $\underline{Y}$  четырехполосника с зависимым источником тока  $j = S\dot{U}_1$  (рис. 4.58).

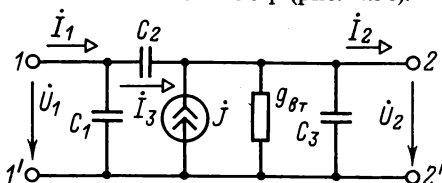


Рис. 4.58

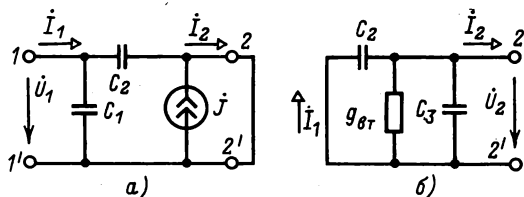


Рис. 4.58Р

Дано:  $C_1 = 4 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 0,14 \text{ пФ}$ ;  $C_3 = 3,3 \text{ пФ}$ ;  $S = 6 \text{ мА/В}$ ;  $g_{\delta r} = 10^{-4} \text{ См}$ ;  $f = 50 \text{ МГц}$ .

Решение. Из (4.2) следует, что параметры  $\underline{Y}_{11}$  и  $\underline{Y}_{21}$  определяют режим короткого замыкания на выходных выводах четырехполосника (2-2'), т. е. режим при  $\dot{U}_2 = 0$  (рис. 4.58Р, а), а параметры  $\underline{Y}_{12}$  и  $\underline{Y}_{22}$  — режим короткого замыкания на входных выводах (1-1'), т. е. режим при  $\dot{U}_1 = 0$  (рис. 4.58Р, б):

$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{j\omega(C_1 + C_2)\dot{U}_1}{\dot{U}_1} = j13,01 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1(j\omega C_2 - S)}{\dot{U}_1} = -60 \cdot 10^{-4} \angle -0,42^\circ \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -j\omega C_2 = -j0,4398 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -[g_{\delta r} + j\omega(C_2 + C_3)] = \\ &= -10,86 \cdot 10^{-4} \angle 84,71^\circ \text{ См.} \end{aligned}$$

**4.59(P).** Определить матрицу  $\underline{Y}$  четырехполюсника с зависимыми источниками тока  $\beta \dot{I}_1$  и напряжения  $\mu \dot{U}_3$  (рис. 4.59) при  $r_1 = 500$  Ом,  $r_2 = 2$  кОм,  $r_3 = 100$  Ом,  $\beta = 20$ ,  $\mu = 0,2$  при помощи предварительно построенного сигнального графа.

**Решение.** Из (4.2) видно, что структура сигнального графа должна быть такой, при которой переменные  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  представлены узлами-источками.

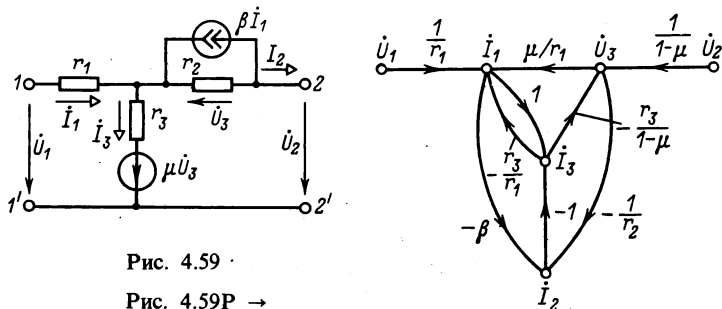


Рис. 4.59

Рис. 4.59P →

Систему уравнений Кирхгофа представим в виде

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{r_1} \dot{U}_1 + \frac{\mu}{r_1} \dot{U}_3 - \frac{r_3}{r_1} i_3; & \dot{U}_3 &= \frac{1}{1-\mu} \dot{U}_2 - \frac{r_3}{1-\mu} i_3; \\ i_2 &= -\beta i_1 - \frac{1}{r_2} \dot{U}_3; & i_3 &= i_1 - i_2. \end{aligned}$$

Сигнальный граф, построенный по этим уравнениям (рис. 4.59P), имеет пять контуров, передачи которых

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 &= -\beta \frac{r_3}{r_1}; & \underline{L}_2 &= -\beta \frac{r_3}{1-\mu} \mu \frac{1}{r_1}; & \underline{L}_3 &= -\frac{r_3}{r_1}; \\ \underline{L}_4 &= -\frac{r_3}{1-\mu} \frac{\mu}{r_1}; & \underline{L}_5 &= -\frac{r_3}{r_2(1-\mu)}. \end{aligned}$$

Определитель графа  $\underline{\Delta} = 1 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 + \underline{L}_5) = 6,252$ .

По топологической формуле (Мэзона) определяем:

$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{i_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\sum_k \underline{\Pi}_k \underline{\Delta}_k}{\underline{\Delta}} = \frac{\underline{\Pi}_1 \underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}} = 3,399 \cdot 10^{-4} \text{ См},$$

где

$$\underline{\Pi}_1 = 1/r_1; \quad \underline{\Delta}_1 = 1 - \underline{L}_5 = 1 + r_3/r_2(1-\mu).$$



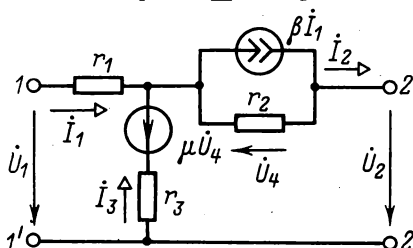
Аналогично

$$Y_{12} = \left. \frac{i_1}{U_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{\frac{\mu}{r_1(1-\mu)} - \frac{r_3}{r_1 r_2(1-\mu)}}{\Delta} = 5,998 \cdot 10^{-5} \text{ См};$$

$$Y_{21} = \left. \frac{i_2}{U_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\frac{1}{r_1} \left( -\beta + \frac{r_3}{r_2(1-\mu)} \right)}{\Delta} = -6,377 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{U_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{\frac{1}{1-\mu} \left[ -\frac{1}{r_2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_1} \right) - \beta \frac{\mu}{r_1} \right]}{\Delta} = -1,719 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

4.60. Составить сигнальный граф для четырехполосника по рис. 4.60 с зависимыми источниками тока и ЭДС и, применив топологическую формулу (Мэзона), определить элементы матрицы  $\underline{H}$  четырехполосника.



← Рис. 4.60

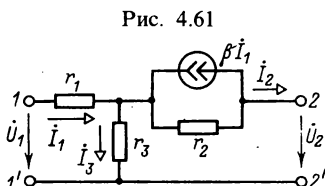


Рис. 4.61

4.61. Определить элементы матрицы  $\underline{Z}$  четырехполосника с зависимым источником тока (рис. 4.61) при  $r_1 = 400 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 50 \text{ кОм}$ ;  $r_3 = 25 \text{ Ом}$ ;  $\beta = 50$ .

4.62. Для четырехполосника с зависимым источником тока (рис. 4.61) известны коэффициенты:  $\underline{H}_{11} = 1400 \text{ Ом}$ ;  $\underline{H}_{12} = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\underline{H}_{21} = -40$ ;  $\underline{H}_{22} = -20 \text{ мксм}$ .

Определить параметры схемы  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $\beta$ .

4.63. Определить коэффициенты матрицы  $\underline{H}$  четырехполосника с зависимым источником тока (рис. 4.63) при параметрах:  $r_1 = 375 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 50 \text{ кОм}$ ;  $r_3 = 25 \text{ Ом}$ ;  $\beta = 40$ .

## 4.6. Передаточные функции

4.64(Р). Для симметричного Т-образного четырехполосника (рис. 4.3) определить передаточные функции: по напряжению в режиме холостого хода и по току в режиме короткого замыкания.

Параметры четырехполюсника:  $Z_1 = j40$  Ом;  $Z_2 = -j10$  Ом.

Решение. По определению передаточная функция по напряжению в режиме холостого хода  $\underline{H}_U = \underline{U}_{2x}/\underline{U}_{1x}$ . Для цепи по рис. 4.3

$$\underline{H}_U = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1/2 + \underline{Z}_2} = \frac{-j10}{j20 - j10} = -1.$$

Аналогично передаточная функция по току в режиме короткого замыкания

$$\underline{H}_I = \frac{\underline{I}_{2к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1/2} = -1.$$

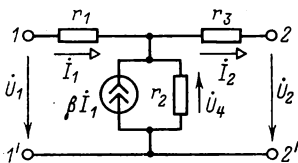


Рис. 4.63

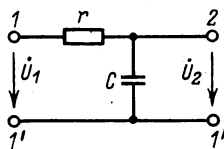


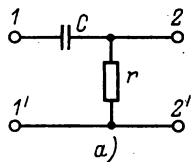
Рис. 4.66

**4.65.** Решить задачу 4.64 для симметричного П-образного четырехполюсника (рис. 4.5).

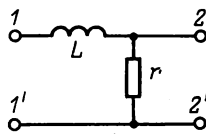
**4.66.** Определить передаточную функцию по напряжению для ненагруженного четырехполюсника по рис. 4.66.

**4.67.** Определить модуль и аргумент передаточной функции по напряжению  $\underline{H}_U = \underline{U}_2/\underline{U}_1$  для четырехполюсника по рис. 4.66 при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_н = r$ .

**4.68.** Решить задачу 4.66 для четырехполюсников по рис. 4.68, а и б.



а)



б)

Рис. 4.68

**4.69(Р).** Составить передаточную функцию по напряжению при разомкнутых вторичных выводах для двойной Т-образной схемы по рис. 4.69. Такой четырехполюсник применяется в технике связи.

Решение. Двойную Т-образную схему можно рассматривать как регулярное параллельное соединение двух Т-образных

четырехполюсников. Матрицу  $\underline{Y}$  такой схемы найдем суммированием матриц  $\underline{Y}$  отдельных четырехполюсников.

Для первого четырехполюсника с сопротивлениями  $\underline{Z}_1/2 = r$  и  $\underline{Z}_2 = jx/2$  коэффициенты

$$\underline{Y}'_{11} = -\underline{Y}'_{22} = \frac{2\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2)} = \frac{2 + jx/r}{2(r + jx)};$$

$$\underline{Y}'_{21} = -\underline{Y}'_{12} = \frac{4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2)} = \frac{jx/r}{2(r + jx)}$$

(см., например, табл. 4.2).

Для второго четырехполюсника с сопротивлениями  $\underline{Z}_1/2 = jx$  и  $\underline{Z}_2 = r/2$

$$\underline{Y}''_{11} = -\underline{Y}''_{22} = \frac{2 - jr/x}{2(r + jx)}; \quad \underline{Y}''_{21} = -\underline{Y}''_{12} = \frac{-jr/x}{2(r + jx)}.$$

Коэффициенты уравнений типа  $Y$  для заданной схемы

$$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22} = \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} = \frac{4 + j(x/r - r/x)}{2(r + jx)};$$

$$\underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{12} = \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} = \frac{j(x/r - r/x)}{2(r + jx)}.$$

Из (4.2) при разомкнутых вторичных выводах ( $\dot{I}_2 = 0$ ) находим передаточную функцию:

$$\underline{H}_U = \frac{\dot{U}_{2x}}{\dot{U}_{1x}} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} = \frac{j(x/r - r/x)}{4 + j(x/r - r/x)}.$$

**4.70.** На рис. 4.70 представлена схема замещения воспроизводящей головки магнитофона.

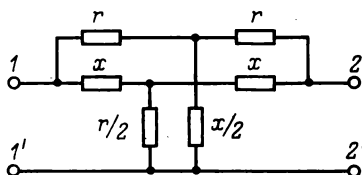


Рис. 4.69

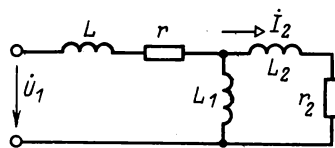


Рис. 4.70

Составить частотную характеристику передаточной функции  $H(\omega) = I_2/U_1$  головки. Параметры схемы:  $L = 0,04$  мГн;  $r = 0,3$  Ом;  $L_1 = 8$  мГн;  $L_2 = 0,06$  мГн;  $r_2 = 30$  Ом.

**4.71(Р).** Напряжение на выходе дифференцирующей схемы должно быть пропорционально напряжению на входе, мно-

женному на  $j\omega$ , т. е.  $\dot{U}_2 = -j\omega\tau\dot{U}_1$ , где  $\tau = rC$  — постоянная времени. Схема собрана по рис. 4.71 с усилителем, для которого  $\dot{U}_2 = -K\dot{U}_{\text{вх}}$  при данном сопротивлении нагрузки  $r_{\text{н}}$ .

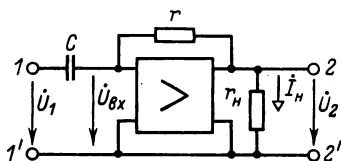


Рис. 4.71

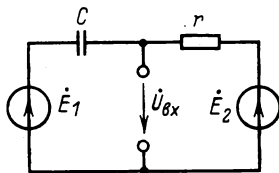


Рис. 4.71P

Составить для этой схемы передаточную функцию по напряжению в виде

$$\underline{H}_U = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = -j\omega\tau[1 + f(\omega)],$$

где  $f(\omega)$  — некоторая функция частоты;  $\tau = rC$ .

Решение. Составим эквивалентную расчетную схему с заданным источником ЭДС  $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$  и источником неизвестной ЭДС  $\dot{E}_2 = r_{\text{н}}\dot{I}_{\text{н}} = \dot{U}_2$  (рис. 4.71P). Для схемы рис. 4.71P по методу узловых потенциалов

$$\dot{U}_{\text{вх}} = (\dot{E}_1 j\omega C + \dot{E}_2/r)/(j\omega C + 1/r)$$

или после подстановки значений  $\dot{U}_1 = \dot{E}_1$ ;  $\dot{U}_2 = \dot{E}_2$  и  $\dot{U}_{\text{вх}}$ , которое по условию равно  $-\dot{U}_2/K$ ,

$$\dot{U}_2/K + \dot{U}_2/(1 + j\omega Cr) = -\dot{U}_1 j\omega Cr/(1 + j\omega Cr),$$

откуда следует, что

$$\underline{H}_U = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = -j\omega\tau[1 + f(\omega)],$$

где  $f(\omega) = -(1 + j\omega\tau)/(K + 1 + j\omega\tau)$ .

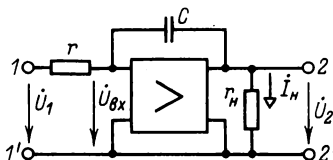


Рис. 4.72

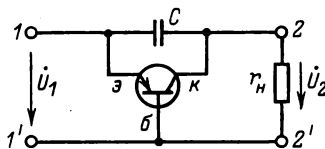


Рис. 4.73

**4.72.** Напряжение на выходе интегрирующей схемы должно быть пропорционально напряжению на входе, деленному на  $j\omega$ , т. е.  $\dot{U}_2 = -\dot{U}_1/j\omega\tau$ , где  $\tau = rC$  — постоянная времени. Схема собрана по рис. 4.72 с усилителем, для которого  $\dot{U}_2 = -K\dot{U}_{\text{вх}}$ .

Составить для этой схемы передаточную функцию по напряжению в виде

$$\underline{H}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = -1/j\omega\tau [1 + f(\omega)],$$

где  $f(\omega)$  — некоторая функция частоты.

**4.73.** Для транзисторного усилителя (рис. 4.73) определить передаточную функцию по напряжению при сопротивлении нагрузки  $r_n = 2$  кОм и конденсаторе емкостью  $C = 1,5$  мкФ.

Параметры транзистора (схема замещения рис. 4.55):  $r_3 = 20$  Ом;  $r_6 = 100$  Ом;  $r_k = 1$  МОм;  $r_m/r_k = 0,98$ .

**4.74(Р).** Активный четырехполосник, заданный коэффициентами  $\underline{H}_{11} = 1500$  Ом;  $\underline{H}_{12} = 10^{-3}$ ;  $\underline{H}_{21} = -50$ ;  $\underline{H}_{22} = -250$  мксм, имеет сопротивление нагрузки  $R_n = 5$  кОм и подключен к источнику с ЭДС  $\dot{E}$  и внутренним сопротивлением  $r_{\text{вт}} = 500$  Ом (рис. 4.74).

Определить ЭДС  $\dot{E}$ , если напряжение на сопротивлении нагрузки должно быть равно 3 В, и выходное сопротивление четырехполосника.

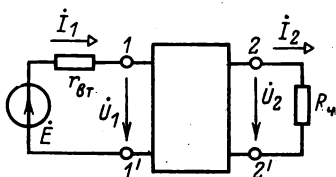


Рис. 4.74

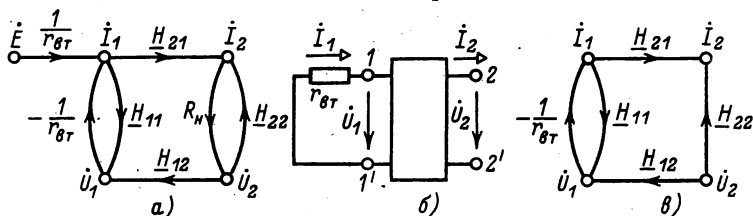


Рис. 4.74Р

**Решение.** Для схемы рис. 4.74 запишем систему уравнений (4.4):

$$\dot{U}_1 = \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2.$$

Кроме того,

$$\dot{I}_1 = -\dot{U}_1/r_{\text{вт}} + \dot{E}/r_{\text{вт}}; \quad \dot{U}_2 = R_n\dot{I}_2.$$

На рис. 4.74Р, а показан сигнальный граф, соответствующий этой системе уравнений и содержащий три контура, передачи которых

$$\underline{L}_1 = -\underline{H}_{11}/r_{\text{вт}} = -3; \quad \underline{L}_2 = \underline{H}_{22}R_n = -1,25;$$

$$\underline{L}_3 = -\underline{H}_{21}\underline{H}_{12}R_n/r_{\text{вт}} = 0,5.$$

Определитель графа  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 = 8,5$ .

Передающую функцию  $\underline{H}_U = \dot{U}_2 / \dot{E}$  рассчитаем по топологической формуле (Мэзона):

$$\underline{H}_U = \frac{\sum_k \Pi_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\Pi_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{(1/r_{\text{вт}}) \underline{H}_{21} R_{\text{н}}}{\Delta} = -58,82.$$

Приняв для напряжения  $\dot{U}_2 = U_2$ , получим  $\dot{E} = 51 \angle 180^\circ$  мВ. Выходное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{вых}} = -\dot{U}_2 / \dot{I}_2$  определим по схеме рис. 4.74Р, б. Это отношение найдем как передачу сигнального графа (рис. 4.74Р, в), построенного по системе уравнений (4.4) и при  $\dot{I}_1 = -\dot{U}_1 / r_{\text{вт}}$ .

Сигнальный граф содержит один контур с передачей  $L_1 = -\underline{H}_{11} / r_{\text{вт}}$ . Определитель графа  $\Delta = 1 + \underline{H}_{11} / r_{\text{вт}} = 4$ .

Так как  $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 / \underline{Z}_{\text{вых}}$ , то по топологической формуле

$$-\frac{1}{\underline{Z}_{\text{вых}}} = \frac{\underline{H}_{22} \Delta - \underline{H}_{21} \underline{H}_{12} / r_{\text{вт}}}{\Delta} = -225 \cdot 10^{-6} \text{ См},$$

откуда  $\underline{Z}_{\text{вых}} = 4444 \text{ Ом}$ .

**4.75.** Активный четырехполюсник задан коэффициентами:  $\underline{H}_{11} = 1500 \text{ Ом}$ ;  $\underline{H}_{12} = 10^{-3}$ ;  $\underline{H}_{21} = -50$ ;  $\underline{H}_{22} = -250 \text{ мкСм}$ .

Определить входное сопротивление четырехполюсника и передающую функцию тока  $\underline{H}_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$  при сопротивлении нагрузки  $R_{\text{н}} = 5 \text{ кОм}$ .

**4.76(Р).** Четырехполюсник (рис. 4.74) с зависимыми источниками задан коэффициентами (в сименсах):  $\underline{Y}_{11} = j26,01 \cdot 10^{-12} f$ ;  $\underline{Y}_{12} = -j0,8796 \cdot 10^{-12} f$ ;  $\underline{Y}_{21} = -6 \cdot 10^{-3} + j0,8796 \cdot 10^{-12} f$ ;  $\underline{Y}_{22} = -10^{-4} - j21,61 \cdot 10^{-12} f$ , где  $f$  — частота, Гц.

Определить напряжение на сопротивлении нагрузки  $R_{\text{н}} = 5 \text{ кОм}$ , если у источника ЭДС  $\dot{E} = 1 \text{ В}$ , внутреннее сопротивление  $r_{\text{вт}} = 10 \text{ кОм}$  и частота: 1)  $f = 10 \text{ кГц}$ , 2)  $f = 200 \text{ МГц}$ .

Решение. Для схемы рис. 4.74 справедлива система уравнений (4.2)

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2.$$

Кроме того,

$$\dot{U}_1 = \dot{E} - r_{\text{вт}} \dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = R_{\text{н}} \dot{I}_2.$$

Сигнальный граф, построенный по этой системе уравнений, показан на рис. 4.76Р. Передачи контуров графа:  $\underline{L}_1 =$

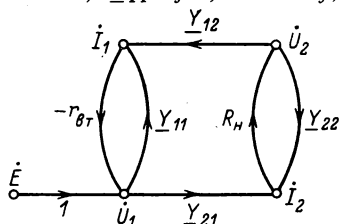


Рис. 4.76Р

$= -r_{\text{вт}} Y_{11}$ ;  $L_2 = R_{\text{н}} Y_{22}$ ;  $L_3 = -r_{\text{вт}} Y_{21} R_{\text{н}} Y_{12}$ . Определитель графа  $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 = 1 + j26,01 \cdot 10^{-8} f + 0,5(1 + j26,61 \cdot 10^{-8} f) + 5 \cdot 10^{-5} [j26,01(10^{-4} + j26,61 \cdot 10^{-12} f) - j0,8796(-6 \cdot 10^{-3} + j0,8796 \cdot 10^{-12} f)] f$ .

По топологической формуле (Мэзона) находим передаточную функцию:

$$\underline{H}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\sum_k \Pi_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\Pi_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{5(-6 + j0,8796 \cdot 10^{-9} f)}{\Delta}.$$

При частоте  $f = 10^4$  Гц получим  $\dot{U}_2 = -20 \angle -0,3^\circ$  В, и при частоте  $f = 2 \cdot 10^8$  Гц  $\dot{U}_2 = -2,159 \cdot 10^{-2} \angle -175,2^\circ$  В.

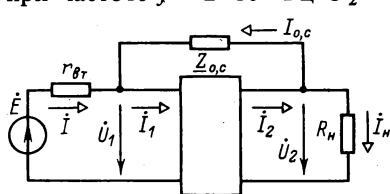


Рис. 4.78

Четырехполюсник этой задачи может быть представлен принципиальной схемой рис. 4.58. С увеличением частоты емкостные сопротивления  $x_{C1}$  и  $x_{C3}$  уменьшаются, в то время как сопротивления  $r_{\text{вт}}$  и  $R_{\text{н}}$  остаются неизменными ( $x_{C1} = 3,979 \times$

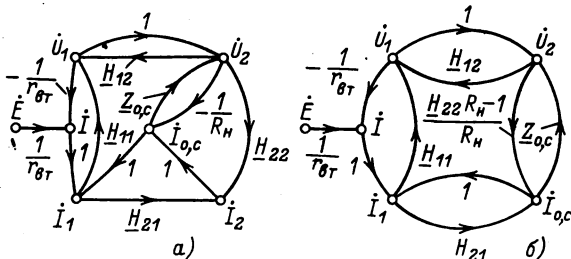


Рис. 4.78Р

$\times 10^6$  Ом при частоте  $f = 10^4$  Гц и  $x_{C1} = 198,9$  Ом при частоте  $f = 2 \cdot 10^8$  Гц). Именно поэтому получается существенное изменение модуля и аргумента передаточной функции при изменении частоты.

**4.77.** Для четырехполюсника предыдущей задачи определить передаточную функцию  $\underline{H}_U = \dot{U}_2/\dot{E}$  при частоте  $f = 200$  МГц, внутреннем сопротивлении  $r_{\text{вт}} = 100$  Ом и прежнем сопротивлении нагрузки.

**4.78(Р).** Четырехполюсник задачи 4.74 с сопротивлением обратной связи  $Z_{0,c}$  представлен на рис. 4.78. Определить передаточную функцию напряжения  $\underline{H}_U = \dot{U}_2/\dot{E}$  при  $R_{\text{н}} = 5$  кОм;

$r_{\text{вт}} = 500$  Ом и следующих значениях сопротивления обратной связи: а)  $\underline{Z}_{o, c} = 100$  кОм; б)  $\underline{Z}_{o, c} = 40$  кОм; в)  $\underline{Z}_{o, c} = -jx_C$  ( $C = 10^{-9}$  Ф).

Решение. Для схемы рис. 4.78 запишем систему уравнений (4.4)

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{H}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \frac{1}{r_{\text{вт}}}\dot{E} - \frac{1}{r_{\text{вт}}}\dot{U}_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \underline{Z}_{o, c}\dot{I}_{o, c}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{o, c} + \dot{I}; \quad \dot{I}_{o, c} = \dot{I}_2 - \frac{1}{R_H}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Сигнальный граф, построенный по этой системе уравнений, приведен на рис. 4.78Р, а. Упростим его, исключив узел  $\dot{I}_2$  (рис. 4.78Р, б). У графа, полученного после упрощения, передачи контуров,

$$\begin{aligned}\underline{L}_1 &= -\underline{H}_{11}/r_{\text{вт}}; \quad \underline{L}_2 = \underline{H}_{21}; \quad \underline{L}_3 = \underline{Z}_{o, c}(-1 + \underline{H}_{22}R_H)/R_H; \\ \underline{L}_4 &= \underline{H}_{12}; \quad \underline{L}_5 = \underline{H}_{11}(-1 + \underline{H}_{22}R_H)/R_H; \quad \underline{L}_6 = -\underline{H}_{21}\underline{H}_{12}\underline{Z}_{o, c}/r_{\text{вт}}.\end{aligned}$$

Определитель графа

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 + \underline{L}_5 + \underline{L}_6) + \\ &+ (\underline{L}_1\underline{L}_3 + \underline{L}_2\underline{L}_4) = 1/r_{\text{вт}}[0,85\underline{Z}_{o, c} + 27312].\end{aligned}$$

По топологической формуле (Мэзона)

$$\begin{aligned}\underline{H}_U &= \frac{\sum_k \underline{P}_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\underline{P}_1 \Delta_1 + \underline{P}_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{r_{\text{вт}}} \frac{[\underline{H}_{11} + \underline{Z}_{o, c}\underline{H}_{21}]}{\Delta} = \\ &= \frac{\underline{H}_{11} + \underline{H}_{21}\underline{Z}_{o, c}}{0,85\underline{Z}_{o, c} + 27312},\end{aligned}$$

где  $\underline{P}_1 = \underline{H}_{11}/r_{\text{вт}}$ ;  $\underline{P}_2 = \underline{H}_{21}\underline{Z}_{o, c}/r_{\text{вт}}$ ;  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ .

При  $\underline{Z}_{o, c} = 100$  кОм получаем  $\underline{H}_U = -44,5$ ; при  $\underline{Z}_{o, c} = 40$  кОм получаем  $\underline{H}_U = -32,6$ . При  $\underline{Z}_{o, c} = -jx_C$  результаты расчета сведены в таблицу:

$\omega$ , рад/с . . .	0	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$\underline{H}_U$ . . . . .	-58,82	$-56 \angle -17,83^\circ$	$-17,48 \angle -72,9^\circ$	$-1,831 \angle -89,9^\circ$



# Глава пятая

## ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### Введение к гл. 5

Для расчета режима однородной двухпроводной линии задаются ее первичные параметры: индуктивность  $L_0$ , активное сопротивление  $r_0$ , емкость  $C_0$  и активная проводимость  $g_0$  на единицу длины, т.е. при заданной частоте тока продольное сопротивление

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 \quad (5.1)$$

и поперечная проводимость

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 \quad (5.2)$$

на единицу длины. Значения первичных параметров зависят от конструкции линии и материалов, из которых она изготовлена.

При известных первичных параметрах мгновенные значения напряжения  $u = u(x, t)$  между проводами и тока  $i = i(x, t)$  в любом поперечном сечении (точке) линии связаны телеграфными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} -\partial u / \partial x &= r_0 i + L_0 \partial i / \partial t; \\ -\partial i / \partial x &= g_0 u + C_0 \partial u / \partial t, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где координата  $x$  поперечного сечения отсчитывается от начала линии (рис. 5.A).

В комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} -d\dot{U} / dx &= r_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}; \\ -d\dot{I} / dx &= g_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Вместо первичных параметров могут быть заданы вторичные: волновое (характеристическое) сопротивление

$$\underline{Z}_b = z_b e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} \quad (5.5)$$

и коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}. \quad (5.6)$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления;  $\beta$  — коэффициент фазы.

Решение уравнений (5.4):

$$\dot{U}(x) = \dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{встр}} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{+\gamma x}; \quad (5.7)$$

$$i(x) = i = i_{\text{пр}} - i_{\text{встр}} = \frac{\dot{A}_1}{Z_{\text{в}}} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_{\text{в}}} e^{+\gamma x}, \quad (5.8)$$

где  $\dot{A}_1 = A_1 \angle \psi_1$  и  $\dot{A}_2 = A_2 \angle \psi_2$  — постоянные интегрирования, которые определяются по заданным граничным условиям в начале  $x = 0$  и в конце  $x = l$  линии длиной  $l$ ;  $\dot{U}_{\text{пр}}$ ,  $\dot{I}_{\text{пр}}$  — напряжение и ток прямой волны (движется от начала к концу линии);  $\dot{U}_{\text{встр}}$ ,  $\dot{I}_{\text{встр}}$  — напряжение и ток встречной волны (движется от конца к началу линии).

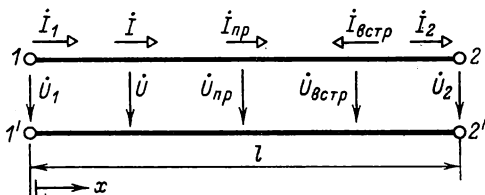


Рис. 5.А

Мгновенные значения:

$$u_{\text{пр}} = u_{\text{пр}}(x, t) = A_{1m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1);$$

$$u_{\text{встр}} = u_{\text{встр}}(x, t) = A_{2m} e^{+\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2);$$

$$i_{\text{пр}} = i_{\text{пр}}(x, t) = \frac{A_{1m}}{Z_{\text{в}}} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta);$$

$$i_{\text{встр}} = i_{\text{встр}}(x, t) = \frac{A_{2m}}{Z_{\text{в}}} e^{+\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta).$$

Фазовая скорость волны

$$c = dx/dt = \omega/\beta. \quad (5.9)$$

В воздушной линии без потерь ( $r_0 = 0$ ,  $g_0 = 0$ ) фазовая скорость наибольшая:  $c = c_0 = 3 \cdot 10^8$  м/с. В кабеле без потерь, изоляция которого имеет относительные диэлектрическую  $\epsilon_r$  и магнитную  $\mu_r$  проницаемости,

$$c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (5.10)$$

Длина волны в линии

$$\lambda = c/f = 2\pi/\beta, \quad (5.11)$$

где  $f = 1/T$  — частота тока;  $T$  — период.

При отсчете расстояния  $x$  от конца линии

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{встр}} = \dot{B}_1 e^{+\gamma x} + \dot{B}_2 e^{-\gamma x}; \quad (5.12)$$

$$i = i_{\text{пр}} - i_{\text{встр}} = \frac{\dot{B}_1}{Z_{\text{в}}} e^{+\gamma x} - \frac{\dot{B}_2}{Z_{\text{в}}} e^{-\gamma x}, \quad (5.13)$$

где  $\dot{B}_1 = \dot{A}_1 e^{-\gamma l}$  и  $\dot{B}_2 = \dot{A}_2 e^{+\gamma l}$  — постоянные интегрирования. При заданном режиме — напряжении  $\dot{U}_2$  и токе  $\dot{I}_2$  в конце ( $x = 0$ ) линии

$$\dot{B}_1 = \dot{U}_{2\text{пр}} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_b \dot{I}_2); \quad \dot{B}_2 = \dot{U}_{2\text{встр}} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_b \dot{I}_2). \quad (5.14)$$

Напряжение и ток в любой точке линии

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j\psi_u} = \dot{U}_2 \text{ch } \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \underline{Z}_b \text{sh } \underline{\gamma} x; \\ \dot{I} &= I e^{j\psi_i} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_b} \text{sh } \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \text{ch } \underline{\gamma} x. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

В частности, при  $x = l$  получается  $\dot{U} = \dot{U}_1$  и  $\dot{I} = \dot{I}_1$ .

Уравнения, связывающие режим в начале и конце линии, аналогичны уравнениям пассивного симметричного четырех-полюсника, причем

$$\underline{\gamma} l = \alpha l + j\beta l = \underline{\Gamma} = A + jB; \quad (5.16)$$

где  $\alpha$  измеряется в неперах (Нп) на единицу длины,  $\beta$  — в радианах (рад) на единицу длины.

Если источник питания (генератор) присоединен в начале линии, а приемник с сопротивлением  $\underline{Z}_н$  — в конце, то мощности генератора и приемника соответственно

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_1^*; \quad \underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_2^*. \quad (5.17)$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_b \frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_b \text{th } \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_б + \underline{Z}_н \text{th } \underline{\gamma} l}. \quad (5.18)$$

В частности, для короткозамкнутой линии

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_b \text{th } \underline{\gamma} l = \underline{Z}_b \text{th } (\alpha l + j\beta l) \quad (5.19)$$

и для ненагруженной — разомкнутой линии (холостой ход)

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_b \text{cth } \underline{\gamma} l = \underline{Z}_b \text{cth } (\alpha l + j\beta l), \quad (5.20)$$

откуда следует, что

$$\underline{Z}_b = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_x}; \quad \text{th } \underline{\gamma} l = \sqrt{\underline{Z}_x / \underline{Z}_x}; \quad (5.21)$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_н + \underline{Z}_x}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_x}. \quad (5.22)$$

При согласованной нагрузке, т.е.  $\underline{Z}_н = \underline{Z}_б$  и  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_б$ , встречная волна отсутствует, при несогласованной — зависит от коэффициента отражения

$$\underline{\rho} = \frac{\dot{U}_{2\text{встр}}}{\dot{U}_{2\text{пр}}} = \frac{\dot{B}_2}{B_1} = \frac{\underline{Z}_\text{н} - \underline{Z}_\text{в}}{\underline{Z}_\text{н} + \underline{Z}_\text{в}} \quad (5.23)$$

и

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_\text{в} \frac{1 + \underline{\rho} e^{-2\gamma l}}{1 - \underline{\rho} e^{-2\gamma l}}. \quad (5.24)$$

При согласованной нагрузке  $\dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}}; \dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}}; \dot{U}/\dot{I} = \dot{U}_1/I_1 = \dot{U}_2/I_2 = \underline{Z}_\text{в} = z_\text{в} \angle \theta; P = UI \cos \theta; Q = UI \sin \theta;$

$$\alpha l = A = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}; \quad (5.25)$$

$$\beta l = B = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}; \quad (5.26)$$

$$\gamma l = \Gamma = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}. \quad (5.27)$$

Для неискажающей линии ( $\alpha = \text{const}, c = \text{const}$ ) должно выполняться соотношение  $r_0/L_0 = g_0/C_0$ . В этом случае

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0} = g_0 z_\text{в}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}};$$

$$\underline{Z}_\text{в} = z_\text{в} = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (5.28)$$

У линии без потерь ( $r_0 = 0, g_0 = 0$ )  $\underline{Z}_\text{в} = z_\text{в} = \sqrt{L_0/C_0}$  — активное сопротивление;  $\theta = 0; \alpha = 0;$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad c = 1/\sqrt{L_0 C_0} = c_0; \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 z_\text{в} \sin \beta x; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{z_\text{в}} \sin \beta x + \dot{I}_2 \cos \beta x; \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_\text{в} \frac{\underline{Z}_\text{н} + j z_\text{в} \operatorname{tg} \beta l}{z_\text{в} + j \underline{Z}_\text{н} \operatorname{tg} \beta l} = z_\text{в} \frac{1 + \underline{\rho} e^{-j2\beta l}}{1 - \underline{\rho} e^{-j2\beta l}}. \quad (5.31)$$

При согласованной нагрузке ( $\underline{Z}_\text{н} = r_\text{н} = \underline{Z}_\text{в} = z_\text{в} = \underline{Z}_{\text{вх}} = r_{\text{вх}}, \underline{\rho} = 0$ ) нет встречной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta x}; \quad U = U_2; \quad I = I_2; \\ \dot{U}/\dot{I} &= U/I = z_\text{в}; \quad u = U_{2\text{м}} \sin(\omega t + \beta x); \\ i &= \frac{U_{2\text{м}}}{z_\text{в}} \sin(\omega t + \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

При разомкнутой линии, т. е. в режиме холостого хода ( $\underline{\rho}_\text{х} = 1$ ),

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x; \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_\text{в}} \sin \beta x; \quad (5.33)$$

$U_{min} = 0$  в узлах напряжения;  $U_{max} = U_2$  — в пучностях напряжения;  $I_{min} = 0$ ;  $I_{max} = U_2/z_B$ ;  $U_{пр} = U_{встр} = U_2/2$ ;  $I_{пр} = I_{встр} = U_2/2z_B$ ;

$$u = U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \quad i = \frac{U_{2m}}{z_B} \sin \beta x \sin (\omega t + 90^\circ); \quad (5.34)$$

$$\underline{Z}_x = -jz_B \operatorname{ctg} \beta l. \quad (5.35)$$

В режиме короткого замыкания ( $\rho_k = -1$ )

$$\dot{U} = jI_2 z_B \sin \beta x; \quad \dot{I} = I_2 \cos \beta x; \quad (5.36)$$

$I_{min} = 0$  в узлах тока;  $I_{max} = I_2$  — в пучностях тока;  $U_{min} = 0$ ;  $U_{max} = I_2 z_B$ ;  $I_{пр} = I_{встр} = I_2/2$ ;

$$U_{пр} = U_{встр} = I_2 z_B/2;$$

$$u = I_2 z_B \sin \beta x \sin (\omega t + 90^\circ); \quad i = I_2 \cos \beta x \sin \omega t; \quad (5.37)$$

$$\underline{Z}_x = jz_B \operatorname{tg} \beta l. \quad (5.38)$$

При произвольной нагрузке

$$\left. \begin{aligned} U_{max} &= U_{пр} + U_{встр} = z_B I_{max}; \quad U_{min} = U_{пр} - U_{встр} = z_B I_{min}; \\ I_{max} &= I_{пр} + I_{встр} = U_{max}/z_B; \quad I_{min} = I_{пр} - I_{встр} = U_{min}/z_B. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Коэффициенты бегущей и стоячей волн

$$k_6 = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |\underline{\rho}|}{1 + |\underline{\rho}|}; \quad k_c = \frac{1}{k_6}. \quad (5.40)$$

При расчете симметричных трехфазных линий в уравнения длинной линии входят фазные напряжения и токи, т.е.  $\dot{U} = \dot{U}_\phi$ ;  $\dot{I} = \dot{I}_\phi$ , и параметры  $r_0$ ,  $L_0$ ,  $g_0$ ,  $C_0$ , отнесенные к одной фазе.

Для линий постоянного тока во всех расчетных формулах следует считать  $\omega = 0$ .

## 5.1. Параметры линии

**5.1(Р).** Диспетчерская связь осуществляется по воздушной линии на частоте 100 кГц. На этой частоте были измерены сопротивления холостого хода и короткого замыкания линии:  $\underline{Z}_x = 767 \angle 4^\circ 30'$  Ом и  $\underline{Z}_k = 735 \angle -4^\circ 30'$  Ом. Передающий и приемный аппараты находятся на расстоянии 20 км.

Определить первичные и вторичные параметры линии связи, фазовую скорость и длину волны.

**Решение.** При заданных сопротивлениях  $\underline{Z}_x$  и  $\underline{Z}_k$  вторичные параметры определяются по (5.21):

$$\underline{Z}_B = z_B \angle \theta = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k} = 750 \angle 0^\circ \text{ Ом};$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{Z_{\text{с}}/Z_{\text{х}}} = T \angle \tau = 0,975 \angle -4^\circ 30',$$

где  $\gamma$  — коэффициент распространения;  $l$  — длина линии.

Второе возможное значение угла  $\tau = 175^\circ 30'$  не подходит, так как при дальнейших расчетах приводит к отрицательному значению коэффициента ослабления.

Коэффициенты ослабления  $\alpha$  и фазы  $\beta$  можно найти по номограммам гиперболического тангенса или выразить через  $T$  и  $\tau$ :

$$\gamma l = \alpha l + j\beta l = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + T \angle \tau}{1 - T \angle \tau} = \frac{1}{2} \ln W e^{j\xi},$$

откуда  $\alpha l = \frac{1}{2} \ln W = 1,6$  Нп;  $\beta l = \frac{1}{2} (\xi + 2k\pi) = (k - 0,2)\pi$ , рад, где  $k = 0, 1, 2, \dots$  — целое число полуволн, укладывающихся вдоль линии.

В воздушной линии с потерями фазовая скорость  $c$  меньше скорости света в вакууме, т.е. длина волны  $\lambda$  меньше длины волны в вакууме  $\lambda_0 = c_0/f = 3$  км, соответствующей частоте  $f = 100$  кГц.

Если принять  $\lambda = \lambda_0$ , то  $l/(\lambda/2) = 13,3$ , и получаем  $k_1 = 13$ , при  $\lambda < \lambda_0$  число  $k$  может быть и более 13 ( $k_2 = 14$ ;  $k_3 = 15$  и т.д.). Соответственно  $\beta_1 l = 12,8\pi$  рад;  $\beta_2 l = 13,8\pi$  рад;  $\beta_3 l = 14,8\pi$  рад и т.д.

Каждому значению  $\beta l$  соответствуют определенные значения фазовой скорости  $c$  и длины волны  $\lambda$ :  $c_1 = \omega/\beta_1 = 3,13 \cdot 10^5$  км/с;  $c_2 = 2,90 \cdot 10^5$  км/с;  $c_3 = 2,71 \cdot 10^5$  км/с и т.д.;  $\lambda_1 = c_1/f = 3,13$  км;  $\lambda_2 = 2,90$  км;  $\lambda_3 = 2,71$  км и т.д.

Первое решение, конечно, следует отбросить. Сделать выбор среди остальных решений, основываясь только на данных измерений сопротивлений холостого хода и короткого замыкания, нельзя.

Первичные параметры рассчитываются по (5.5), (5.6), откуда

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = \underline{Z}_{\text{с}} \gamma \quad \text{и} \quad \underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = \gamma / \underline{Z}_{\text{с}}.$$

Для второго решения  $r_0 = 60$  Ом/км;  $L_0 = 2,60$  мГн/км;  $g_0 = 106$  мкСм/км;  $C_0 = 4,60$  нФ/км; для третьего решения  $r_0 = 60$  Ом/км;  $L_0 = 2,79$  мкГн/км;  $g_0 = 106$  мкСм/км;  $C_0 = 4,94$  нФ/км и т.д.

**5.2.** Для определения первичных параметров линии были измерены сопротивления короткого замыкания и холостого хода при частоте 800 Гц. Измерения дали:  $\underline{Z}_{\text{с}} = 900 \angle 63^\circ$  Ом;  $\underline{Z}_{\text{х}} = 360 \angle -78^\circ$  Ом. Длина линии 59 км.

Рассчитать первичные параметры.

**5.3.** Воздушная линия связи имеет следующие параметры:  $r_0 = 2,84$  Ом/км;  $L_0 = 1,94$  мГн/км;  $g_0 = 0,70$  мкСм/км;  $C_0 = 6,25$  нФ/км. Увеличения дальности передачи сигналов по линии с заданными  $r_0$  и  $g_0$  можно добиться, если отношение индуктивности к емкости будет удовлетворять требованию  $L_0/C_0 = r_0/g_0$ . Это условие совпадает с условием отсутствия искажений, так как в этом случае  $\underline{Z}_b = \sqrt{L_0/C_0}$ ,  $\alpha = \sqrt{r_0 g_0}$ ,  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$  не зависят от частоты.

1) Найти индуктивность каждой из катушек, которые необходимо включить через каждые 0,5 км, чтобы линия стала неискажающей.

2) Выяснить, как изменится индуктивность, если учесть потери в катушках. На расчетной частоте 800 Гц добротность катушки  $Q = 200$ .

3) Определить фазовую скорость волны в неискажающей линии.

4) Найти, какую наибольшую длину могла бы иметь неискажающая линия при допустимом затухании 11,3 дБ.

**5.4.** Для определения параметров трехфазного кабеля длиной 100 км, работающего на частоте 50 Гц, были проведены опыты холостого хода и короткого замыкания. Данные опытов:  $U_{1x,л} = 10$  кВ;  $I_{1x} = 32$  А ( $\phi_{1x} < 0$ );  $P_{1x} = 54$  кВт;  $U_{1k,л} = 3$  кВ;  $I_{1k} = 32,4$  А ( $\phi_{1k} > 0$ );  $P_{1k} = 167$  кВт.

Определить первичные и вторичные параметры кабеля.

**5.5(Р).** Определить первичные параметры воздушной линии без потерь, волновое сопротивление которой равно 600 Ом.

Решение. По (5.29)  $\underline{Z}_b = 600$  Ом  $= \sqrt{L_0/C_0}$  и  $c_0 = 3 \cdot 10^5$  км/с  $= 1/\sqrt{L_0 C_0}$ , поэтому

$$L_0 = \underline{Z}_b / c_0 = \frac{600}{300 \cdot 10^3} = 2,0 \text{ мГн/км};$$

$$C_0 = \frac{1}{\underline{Z}_b c_0} = \frac{1}{600 \cdot 3 \cdot 10^5} = \frac{1}{180} \text{ мкФ/км} = 5,5 \text{ нФ/км}.$$

**5.6.** Для определения первичных параметров воздушной линии без потерь длиной 3 м было измерено при частоте 10 МГц входное сопротивление в режиме короткого замыкания:  $z_k = 290$  Ом.

Определить первичные и вторичные параметры линии.

**5.7(Р).** Определить волновое сопротивление кабеля без потерь, если входное сопротивление отрезка кабеля в режиме короткого замыкания в конце  $\underline{Z}_k = j90$  Ом, а в режиме холостого хода  $\underline{Z}_x = -j40$  Ом.

Решение. По (5.21)  $\underline{Z}_b = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k} = 60$  Ом.

## 5.2. Линия с потерями

**5.8(Р).** Известны первичные параметры воздушной линии связи:  $r_0 = 2,84$  Ом/км;  $L_0 = 1,94$  мГн/км;  $g_0 = 0,70$  мкСм/км;  $C_0 = 6,25$  нФ/км.

1) Определить, при каком сопротивлении приемника в линии отсутствует отраженная волна на средней расчетной частоте 800 Гц.

2) При этом приемнике найти напряжение, активную мощность источника и КПД линии длиной 59 км, если напряжение приемника равно 20 В.

3) Выяснить, можно ли рассчитать коэффициент ослабления как для линии с малыми потерями, если допустима погрешность не более 5 %.

**Решение.** 1) Отраженная волна отсутствует при сопротивлении нагрузки, равном волновому (характеристическому) сопротивлению линии, т. е. при  $Z_n = Z_0$ .

Для линии с потерями по (5.5)

$$Z_0 = \sqrt{Z_0/Y_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)/(g_0 + j\omega C_0)},$$

где  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 800 = 5,03 \cdot 10^3$  рад/с;  $\omega L_0 = 5,03 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \times 10^{-3} = 9,75$  Ом/км;  $\omega C_0 = 5,03 \cdot 10^3 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9} = 31,4 \cdot 10^{-6}$  См/км;  $Z_0 = r_0 + j\omega L_0 = 2,84 + j9,75 = 10,15 \angle 73^\circ 45'$  Ом/км;  $Y_0 = g_0 + j\omega C_0 = 0,70 \cdot 10^{-6} + j31,4 \cdot 10^{-6} \approx 31,4 \cdot 10^{-6}$  См/км.

Волновое сопротивление  $Z_0 = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом.

2) По (5.25)

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l},$$

где  $U_2 = 20$  В.

Коэффициент ослабления  $\alpha$  — действительная часть коэффициента распространения (5.6)

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha + j\beta &= \sqrt{Z_0 Y_0} = 17,9 \cdot 10^{-3} \angle 81^\circ 15' = \\ &= 2,72 \cdot 10^{-3} + j17,5 \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$

т. е.  $\alpha = 2,72 \cdot 10^{-3}$  Нп/км;  $\alpha l = 2,72 \cdot 10^{-3} \cdot 59 = 0,16$  Нп;  $U_1 = 20e^{0,16} = 20 \cdot 1,17 = 23,4$  В.

Активная мощность источника по (5.17)

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos \theta = \frac{U_1^2}{Z_0} \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_0} e^{2\alpha l} \cos \theta = \\ &= \frac{20^2}{568} 1,38 \cos(-7^\circ 30') = 0,96 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

3) Для линии с малыми потерями коэффициент ослабления



определяется по приближенной формуле

$$\alpha = \frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{g_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км},$$

т. е. погрешность менее 1 %.

**5.9(Р).** Определить, какую наибольшую длину может иметь линия задачи 5.8, если считать допустимым ослабление сигнала 11,3 дБ, и какое напряжение должно быть в начале линии, чтобы напряжение приемника осталось прежним.

**Решение.** При допустимом ослаблении сигнала в линии  $\alpha l = 11,3 \cdot 0,115 = 1,30$  Нп наибольшая длина линии  $l_{\max} = 1,30/\alpha$ , где  $\alpha = 2,72 \cdot 10^{-3}$  Нп/км (см. решение задачи 5.8).

Необходимое напряжение в начале линии при  $U_2 = 20$  В и  $l = l_{\max}$  по (5.25)  $U_1 = U_2 e^{\alpha l_{\max}} = 20 \cdot 3,68 = 73,5$  В.

**5.10(Р).** Для линии задачи 5.8 найти фазовую скорость волны и коэффициент отражения в случае чисто активного сопротивления приемника, равного  $z_b$ .

**Решение.** По (5.9) фазовая скорость при частоте тока  $f = 800$  Гц, т. е.  $\omega = 2\pi f = 5,03 \cdot 10^3$  рад/с, и коэффициенте фазы  $\beta = 17,5 \cdot 10^{-3}$  рад/км (см. решение задачи 5.8)

$$c = \omega/\beta = 286 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

При активном сопротивлении нагрузки  $Z_n = r_n = z_b = 568$  Ом и волновом сопротивлении  $Z_b = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом коэффициент отражения по формуле (5.23)

$$\rho = (z_b - Z_b)/(z_b + Z_b) = 0,065 \angle 90^\circ 40', \text{ т. е. } \rho = 6,5 \%.$$

**5.11(Р).** Для линии задачи 5.8 длиной 59 км найти напряжения прямой и встречной волн в конце и в начале линии при сопротивлении нагрузки  $Z_n = r_n = z_b$  и напряжении в конце линии 20 В. Вторичные параметры линии известны:  $Z_b = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом;  $\gamma = 17,9 \cdot 10^{-3} \angle 81^\circ 15'$  км<sup>-1</sup>.

**Решение.** Из (5.12) и (5.23)  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пр}} + \dot{U}_{2\text{встр}}$  и  $\rho = \dot{U}_{2\text{встр}}/\dot{U}_{2\text{пр}}$  при  $\dot{U}_2 = U_2 = 20$  В и  $\rho = 0,065 \angle 90^\circ 40'$  (см. решение задачи 5.10) находим:

$$\dot{U}_{2\text{пр}} = \dot{B}_1 = 19,91 \angle -3^\circ 47' \text{ В}; \quad \dot{U}_{2\text{встр}} = \dot{B}_2 = 1,31 \angle 86^\circ 13' \text{ В},$$

или, иначе, при  $Z_n = z_b$  по (5.14)

$$\dot{B}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \dot{U}_2 \pm Z_b \frac{\dot{U}_2}{z_b} \right) = \frac{U_2}{2} (1 \pm 1 \angle \theta)$$

и получаем тот же ответ.

В начале линии по (5.12) при  $x = l$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1\text{пр}} + \dot{U}_{1\text{встр}} = \dot{U}_{2\text{пр}}e^{\gamma l} + \dot{U}_{2\text{встр}}e^{-\gamma l};$$

$$U_{1\text{пр}} = U_{2\text{пр}}e^{\alpha l}; \quad U_{1\text{встр}} = U_{2\text{встр}}e^{-\alpha l},$$

где  $U_{2\text{пр}} = 19,91$  В;  $e^{\alpha l} = 1,17$  (см. решение задачи 5.8),  $U_{2\text{встр}} = 1,31$  В;  $e^{-\alpha l} = 1/1,17$ ;  $U_{1\text{пр}} = 23,3$  В;  $U_{1\text{встр}} = 1,1$  В.

**5.12(Р).** В конце линии задачи 5.8 отсоединили приемник. Напряжение в начале линии осталось прежним: 23,4 В. Определить, на сколько процентов изменится напряжение в конце линии.

**Решение.** При  $I_2 = 0$  по (5.15)  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l$ , где  $\operatorname{ch} \gamma l = \frac{1}{2}(e^{\alpha l}e^{j\beta l} + e^{-\alpha l}e^{-j\beta l})$ ;  $\alpha l = 0,16$  Нп;  $e^{\alpha l} = 1,17$ ;  $\beta = 17,5 \times 10^{-3}$  рад/км (см. решение задачи 5.8);  $\beta l = 59^\circ 15'$  и  $\operatorname{ch} \gamma l = 0,55 \angle 14^\circ$ .

Напряжение в конце линии  $U_2 = U_1 / |\operatorname{ch} \gamma l| = 23,4 / 0,55 = 42,6$  В. Напряжение в конце линии при подключенном приемнике было равно 20 В (см. задачу 5.8), т.е. изменилось более чем в 2 раза, или на

$$\frac{42,6 - 20}{20} 100 = 113 \, \%.$$

**5.13(Р).** Определить, каким двухполюсником можно заменить линию задачи 5.8, чтобы режим источника питания не изменился. Сопротивление нагрузки: 1)  $Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} = 568$  Ом; 2)  $Z_{\text{н}} = 568 \angle 7^\circ 30'$  Ом. Вторичные параметры линии известны:  $Z_{\text{в}} = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом;  $\gamma = 17,9 \cdot 10^{-3} \angle 81^\circ 15'$  км $^{-1}$ .

**Решение.** 1) Сопротивление двухполюсника должно равняться входному сопротивлению линии. При  $Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} = 568$  Ом по (5.24)

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{в}} \frac{1 + \rho e^{-2\gamma l}}{1 - \rho e^{-2\gamma l}},$$

где  $Z_{\text{в}} = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом;  $\alpha l = 0,16$  Нп;  $\beta l = 59^\circ 15'$ ;  $\rho = 0,065 \angle 90^\circ 40'$  (см. решения предыдущих задач) и  $Z_{\text{вх}} = 620 \angle -10^\circ$  Ом, т.е. активно-емкостное сопротивление.

**5.14(Р).** Определить, какая ошибка получится при определении длины волны в линии задачи 5.8, если не принимать во внимание потери в линии. Вторичные параметры линии известны:  $Z_{\text{в}} = 568 \angle -7^\circ 30'$  Ом;  $\gamma = 17,9 \cdot 10^{-3} \angle 81^\circ 15'$  км $^{-1}$ .

**Решение.** При учете потерь фазовая скорость волны (см. решение задачи 5.10)  $c = 286 \cdot 10^3$  км/с и частоте  $f = 800$  Гц соответствует длина волны  $\lambda = c/f = 357$  км.

Для линии без потерь фазовая скорость  $c = c_0 = 300 \times 10^3$  км/с и  $\lambda_0 = c_0/f = 374$  км.

$$\text{Погрешность} \quad \frac{374 - 357}{357} 100 = 4,8 \, \%.$$

**5.15(P).** В аппаратуре телеграфирования «постоянным током» все буквы алфавита передаются кодами Морзе или Бодо (комбинации посылок тока и пауз). Один из простейших испытательных сигналов — периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Найти сигнал в конце неискажающей линии с параметрами  $L_0 = 32,1$  мГн/км,  $C_0 = 6,25$  нФ/км,  $g_0 = 0,7$  мкСм/км при согласованной нагрузке, считая, что фильтр в конце линии пропускает только постоянную составляющую, 1-ю и 3-ю гармоники этого сигнала. Высота импульсов 20 В; длительность посылки равна длительности паузы и составляет 12,5 мс. Передача идет на расстояние 818 км.

Решение. Заданный сигнал, если отбросить гармоники выше 3-й, записывается в виде (см. разложение в ряд прямоугольных импульсов)

$$u = \frac{U_{\max}}{2} + \frac{2}{\pi} U_{\max} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t \right) = \\ = 10 + 12,7 \sin \omega_1 t + 4,25 \sin 3\omega_1 t \text{ В.}$$

Для неискажающей линии по формулам (5.28) находим параметры  $Z_b = \sqrt{L_0/C_0} = 2265$  Ом;  $\alpha = g_0 Z_b = 1,585$  мНп/км;  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0} = 7,07 \cdot 10^4$  км/с. Они не зависят от частоты, поэтому постоянная составляющая, 1-я и 3-я гармоники уменьшаются в одинаковое число раз ( $e^{\alpha l} = 3,67$ ). Сдвиг по фазе в конце линии для каждой гармоники пропорционален частоте:  $\beta l = \omega \sqrt{L_0 C_0} l$ , поэтому сигнал в конце линии имеет ту же форму, что и в начале, и запаздывает на  $t_1 = l/c = 11,6$  мс.

**5.16(P).** Сигналы телемеханики передаются по линии электропередачи.

Найти напряжение сигнала на вводах приемного устройства, если в линии длиной 50 км удалось создать режим бегущей волны. Коэффициент ослабления линии на частоте сигнала равен 96 мНп/км, волновое сопротивление равно  $640 \angle -10^\circ$  Ом и уровень сигнала в начале линии (по мощности) равен 4,6 Нп.

Решение. Уровень сигнала на вводах приемника меньше, чем в начале линии, на  $\alpha l = 96 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 4,8$  Нп, т. е. равен  $-0,2$  Нп.

Уровень сигнала  $a$  (по мощности) определяется по формуле

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0},$$

где  $P_0 = 1$  мВт;  $P = e^{2a}$  — мощность сигнала, мВт. При уровне  $a = -0,2$  Нп получается  $P = e^{-0,4} = 0,67$  мВт.

**5.17.** Для трехфазной сталеалюминиевой воздушной линии электропередачи сечением  $400 \text{ мм}^2$  и длиной  $900 \text{ км}$  известны первичные параметры:  $r_0 = 0,08 \text{ Ом/км}$ ;  $g_0 = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}$ ;  $x_0 = 0,42 \text{ Ом/км}$ ;  $b_0 = 2,7 \text{ мкСм/км}$ .

Найти фазное напряжение, ток и активную мощность в начале линии (на станции), если на приемном конце линейное напряжение  $330 \text{ кВ}$ , активная мощность всех приемников  $300 \text{ МВт}$  и коэффициент мощности нагрузки равен  $1$ .

**5.18.** Определить фазовую скорость волны, длину волны и КПД для линии задачи 5.17.

**5.19.** В конце линии задачи 5.17 произошел сброс нагрузки.

Определить линейное напряжение в конце линии и ток в начале, считая, что фазное напряжение на станции осталось неизменным и равным  $229 \text{ кВ}$ .

**5.20.** Определить естественную мощность в конце линии задачи 5.17. Для этого же режима найти линейное напряжение и ток в начале линии. Линейное напряжение в конце линии равно  $330 \text{ кВ}$ .

**5.21(Р).** Найти напряжения прямой и встречной волн в конце и в начале линии задачи 5.17, а также коэффициент отражения, считая, что фазное напряжение в конце линии  $\dot{U}_{2\text{ф}} = \dot{U}_2 = 190,5 \text{ кВ}$ . Вторичные параметры линии известны:  $\underline{Z}_в = 397 \angle -5^\circ 23' \text{ Ом}$ ;  $\gamma = 1,073 \cdot 10^{-3} \angle 84^\circ 37' \text{ км}^{-1}$ .

**Решение.** При активной нагрузке, фазном напряжении  $\dot{U}_2 = 190,5 \text{ кВ}$  и мощности  $P_2 = 300 \text{ МВт}$  фазный ток  $I_2 = = P_2/3U_2 = 525 \text{ А} = I_2$ .

Напряжения прямой и встречной волн в конце линии (при отсчете координаты  $x$  от конца) по (5.14) равны:

$$\dot{U}_{2\text{пр}} = (\dot{U}_2 + \underline{Z}_в I_2)/2 = 199,2 \angle -2^\circ 50' \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_{2\text{встр}} = (\dot{U}_2 - \underline{Z}_в I_2)/2 = 13,1 \angle 131^\circ 35' \text{ кВ}.$$

**В начале линии**

$$\dot{U}_{1\text{пр}} = \dot{U}_{2\text{пр}} e^{\gamma l} = 218 \angle 52^\circ 10' \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_{1\text{встр}} = \dot{U}_{2\text{встр}} e^{-\gamma l} = 12,0 \angle 76^\circ 35' \text{ кВ}.$$

**Коэффициент отражения по (5.23)**

$$\underline{\rho} = \dot{U}_{2\text{встр}}/\dot{U}_{2\text{пр}} = 0,066 \angle 134^\circ 25'.$$

**5.22.** При сбросе нагрузки фазное напряжение в конце линии задачи 5.17 равно  $394 \text{ кВ}$  при напряжении в начале  $229 \text{ кВ}$ .

Определить напряжение в конце линии при расчете по упрощенным эквивалентным схемам: 1) П-образной с продольным сопротивлением  $(r_0 + j\omega L_0)l$  и поперечными проводимостями  $(g_0 + j\omega C_0)l/2$ , включенными на входе и на выходе; 2) без учета проводимостей.

**5.23.** Последовательно соединенные воздушная линия ( $l_1 = 20$  км;  $r_{01} = 4,0$  Ом/км;  $g_{01} = 1$  мкСм/км) и кабель ( $l_2 = 40$  км;  $r_{02} = 0,5$  Ом/км;  $g_{02} = 0,5$  мкСм/км) подключены к генератору постоянного тока с напряжением 10 кВ. Кабель имеет согласованную нагрузку.

Определить мощности приемника и генератора; вычислить мощность по приближенным формулам, пренебрегая утечкой; сравнить КПД передачи в обоих случаях.

**5.24.** Определить мощность генератора задачи 5.23 при условии, что кабель на конце разомкнут.

### 5.3. Линия без потерь

**5.25(Р).** Измерено напряжение  $U_2 = 120$  В в конце воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением 600 Ом при сопротивлении нагрузки  $Z_n = r_n = 300$  Ом.

Определить, на каких расстояниях от конца линии напряжение: 1) минимально, 2) максимально. Вычислить значения этих напряжений. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии, откладывая расстояния в относительных единицах  $x/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны.

**Решение.** Напряжение минимально в тех точках линии, где фазы напряжений прямой  $\dot{U}_{пр}$  и встречной  $\dot{U}_{встр}$  волн отличаются на  $180^\circ$ , а максимально при одинаковой фазе  $\dot{U}_{пр}$  и  $\dot{U}_{встр}$ .

Коэффициент отражения в конце линии (5.23)

$$\underline{\rho} = (r_n - z_b)/(r_n + z_b) = -1/3,$$

т. е.  $\dot{U}_{2встр} = \rho \dot{U}_{2пр}$  в конце линии находится в противофазе с  $\dot{U}_{2пр}$ . Значит,  $U_2 = U_{min} = U_{пр} - U_{встр} = 2U_{пр}/3$ , и так как  $U_2 = 120$  В, то  $U_{пр} = 180$  В и  $U_{встр} = 60$  В. Следующие минимумы напряжения будут на расстояниях  $n\lambda/2$  от конца линии, где  $n$  — целое число.

Максимумы напряжения сдвинуты вдоль линии относительно минимумов на  $\lambda/4$  и  $U_{max} = U_{пр} + U_{встр} = 240$  В.

**5.26(Р).** В середине линии без потерь с волновым сопротивлением 400 Ом подключен генератор с ЭДС 12 В и активным внутренним сопротивлением  $r_{вт} = 300$  Ом. Длина линии равна  $\lambda/2$ .

Найти напряжения и токи на левом и правом концах линии, а также в точке подключения генератора, если на обоих концах линии произошло короткое замыкание. Построить графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

**Решение.** Длины левого и правого участков линии  $l_n = l_n = \lambda/4$  (рис. 5.26Р), поэтому по (5.38) входные сопротивления участков

$$\underline{Z}_{вх, л} = \underline{Z}_{вх, п} = jz_b \operatorname{tg} \beta l = jz_b \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \infty;$$

ток  $I_r$  генератора равен 0, а напряжение  $\dot{U}_r$  равно ЭДС.

При коротком замыкании линии наблюдается стоячая волна и напряжение в конце  $U_{л2} = U_{п2} = U_{min} = 0$  (узел напряжения). Пучность напряжения находится на расстоянии  $\lambda/4$  от узла, т. е.  $U_r = U_{max} = 12$  В. Узлы и пучности тока совпадают соответственно с пучностями и узлами напряжения, т. е. в точке подключения генератора узел тока  $I_{min} = I_r = 0$ , а на обоих концах линии — пучности тока. По (5.36)  $I_{max} = I_{л2} = I_{п2} = U_{max}/z_b = 30$  мА.

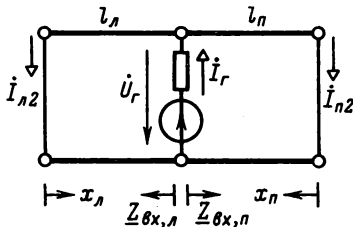


Рис. 5.26Р

Графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль обоих участков линии одинаковы и строятся по (5.36):

$$U = z_b I_2 |\sin \beta x|; \quad I = I_2 |\cos \beta x|.$$

**5.27.** Повторить расчет режима и построение графиков для линии задачи 5.26, если длина линии равна  $\lambda$  и линия на обоих концах разомкнута.

**5.28(Р).** Рассчитать режим и построить графики распределения действующих значений  $U$  и  $I$  для линии задачи 5.26, если длина линии слева от генератора равна  $\lambda/4$ , а справа  $\lambda/8$ .

**Решение.** Входные сопротивления участков линии (рис. 5.26Р) различны. По (5.38)

$$\underline{Z}_{вх, п} = jz_b \operatorname{tg} \beta l_p = jz_b \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = jz_b \operatorname{tg} 45^\circ = jz_b = j400 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{вх, л} = jz_b \operatorname{tg} \beta l_l = \infty.$$

В конце каждого короткозамкнутого участка линии имеют место узел напряжения, т. е.  $U_{л2} = U_{п2} = 0$ , и пучность тока.

Для построения графиков распределения напряжения и тока необходимо определить напряжение в начале каждого участка линии, т. е. напряжение генератора. Ток и напряжение генератора

$$\dot{I}_r = \frac{\dot{E}}{r_{BT} + \underline{Z}_{BX, n}}; \quad \dot{U}_r = \dot{I}_r \underline{Z}_{BX, n} = \frac{\dot{E}}{r_{BT} + jz_B} jz_B,$$

или

$$U_r = \frac{E z_B}{\sqrt{r_{BT}^2 + z_B^2}} = 9,6 \text{ В}; \quad I_r = \frac{U_r}{z_{BX, n}} = 24 \text{ мА}.$$

Для левого участка линии  $U_r = U_{л max}$  и по (5.36)  $I_{л2} = I_{л max} = U_{л max}/z_B = 24 \text{ мА}$ . Для правого участка напряжение в начале линии  $U_{п1} = U_r = 9,6 \text{ В}$  — не пучность, и ток  $I_{п1} = I_r = 24 \text{ мА}$ , так как  $I_{л1} = 0$ . Ток в конце правого участка линии по (5.36)  $I_{п1} = I_{п2} |\cos \beta l_n|$ , откуда  $I_{п2} = 34 \text{ мА}$ .

Построение графиков распределения действующих значений напряжений и токов см. в решении задачи 5.26.

**5.29.** Измерен ток  $I_2 = 0,1 \text{ А}$  в конце воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением  $600 \text{ Ом}$  при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_n = r_n = 1200 \text{ Ом}$ .

Определить, на каких расстояниях от конца линии напряжение 1) максимально и 2) минимально. Вычислить значения этих напряжений. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии, откладывая расстояния от конца линии в относительных единицах  $x/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны.

**5.30.** Измерено напряжение  $U_1 = 120 \text{ В}$  генератора, включенного в начале линии задачи 5.25; частота равна  $15 \text{ МГц}$ .

Построить график распределения действующего значения тока вдоль линии, если ее длина равна  $30 \text{ м}$ .

**5.31.** На концах двух одинаковых кабелей длиной  $100 \text{ см}$  с волновым сопротивлением  $200 \text{ Ом}$  и полиэтиленовой изоляцией ( $\epsilon_r = 2,4$ ) включены приемники с сопротивлениями соответственно  $\underline{Z}_{n1} = r_{n1} = 200 \text{ Ом}$  и  $\underline{Z}_{n2} = r_{n2} = 100 \text{ Ом}$ . Напряжение на вводах каждого приемника должно быть равно  $20 \text{ мВ}$ .

Определить необходимые напряжения двух генераторов, работающих на частоте  $75 \text{ МГц}$ . Найти, какое минимальное напряжение генератора можно получить при  $\underline{Z}_{n2} = r_{n2} = 100 \text{ Ом}$ , если изменять длину кабеля, и наименьшую длину кабеля, при которой получится это напряжение.

**5.32.** Определить, при какой длине линии без потерь значение напряжения в конце линии остается неизменным независимо от подключения и отключения согласованной нагрузки. Напряжение генератора поддерживается постоянным.

**5.33.** Генератор с внутренним сопротивлением  $r_1$  должен отдать максимальную мощность приемнику с сопротивлением  $r_2$ . Для согласования сопротивлений между генератором и приемником включена воздушная линия, потерями в которой можно пренебречь.

Найти наименьшую длину линии, а также ее индуктивность и емкость на единицу длины.

**5.34(Р).** В линии, соединяющей источник питания с приемником, сопротивление которого  $Z_H = 800 + j450$  Ом, должна быть бегущая волна. Для согласования применяется схема, показанная на рис. 5.34.

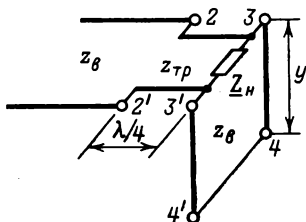


Рис. 5.34

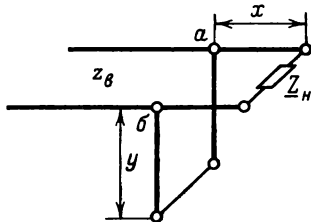


Рис. 5.36

Определить наименьшую длину короткозамкнутой линии (шлейфа)  $y = y_1$  и волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора  $z_{тр}$ . Волновое сопротивление линии и шлейфа 600 Ом. Длина волны генератора 20 м.

**Решение.** Линия будет работать в режиме согласованной нагрузки, если входное сопротивление трансформатора  $Z_{вх, тр}$  равно волновому сопротивлению линии  $z_0$  (активное сопротивление, так как линия без потерь). По (5.31) входное сопротивление трансформатора

$$Z_{вх, тр} = z_{тр} \frac{Z_3 + jz_{тр} \operatorname{tg} \beta l_{тр}}{z_{тр} + jZ_3 \operatorname{tg} \beta l_{тр}},$$

где  $Z_3$  — сопротивление нагрузки трансформатора, которое состоит из параллельно включенных сопротивлений  $Z_H$  и входного сопротивления шлейфа  $Z_x = jz_0 \operatorname{tg} \beta y_1$ .

Длина трансформатора  $l_{тр} = \lambda/4$ , т. е.  $\beta l_{тр} = \pi/2$ . Поэтому получается

$$Z_{вх, тр} = z_{тр} \frac{Z_3 \operatorname{ctg} \pi/2 + jz_{тр}}{z_{тр} \operatorname{ctg} \pi/2 + jZ_3} = \frac{z_{тр}^2}{Z_3}$$

и должно быть  $Z_{вх, тр} = z_0$ , т. е. необходимо выбрать  $z_{тр} = \sqrt{z_0 Z_3}$ . Волновое сопротивление трансформатора  $z_{тр}$  — актив-



ное (линия без потерь), поэтому и  $Z_3$  должно быть активным сопротивлением. Так как  $1/Z_3 = 1/Z_n + 1/Z_k = g_3 - jb_3$ , то должно быть  $b_3 = 0$ , т. е. при заданных условиях

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{800 + j450} + \frac{1}{j600 \operatorname{tg} \beta y_1} \right) = 0,$$

или  $-0,535 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{600 \operatorname{tg} \beta y_1} = 0$ , откуда  $\operatorname{tg} \beta y_1 = -3,12$ ;  $\beta y_1 = 360 y_1 / \lambda = 107,5^\circ$  и  $y_1 = 5,96$  м. При этой длине шлейфа

$$\frac{1}{Z_3} = g_3 = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{800 + j450} \right)$$

и  $Z_3 = r_3 = 1/g_3 = 1050$  Ом.

Волновое сопротивление трансформатора

$$z_{\text{тр}} = \sqrt{z_b r_3} = 795 \text{ Ом.}$$

**5.35.** Линия задачи 5.34 подключена к генератору с напряжением 200 В. Определить ток в сопротивлении нагрузки.

**5.36.** Для согласования нагрузки воздушной линии, соединяющей передатчик с антенной, применяется отрезок короткозамкнутой линии (шлейф) длиной  $y$  (рис. 5.36), подвешенный на расстоянии  $x$  от конца.

Определить необходимые минимальные длины  $x = x_1$  и  $y = y_1$ . Волновое сопротивление шлейфа и линии равно 600 Ом; входное сопротивление антенны  $Z_n = r_n = 800$  Ом. Длина волны генератора 20 м.

**5.37.** Длина линии задачи 5.36 равна 8 м.

Найти мощность, которую отдает передатчик с напряжением 200 В до согласования нагрузки и после согласования. Определить, во сколько раз напряжение падающей волны больше напряжения отраженной волны до согласования нагрузки и на каком расстоянии от конца линии находится ближайший минимум напряжения.

**5.38.** Для согласования нагрузки линии задачи 5.36 вместо короткозамкнутого отрезка применяется: 1) разомкнутый отрезок; 2) четвертьволновый трансформатор.

Определить: 1) наименьшую длину разомкнутого отрезка при длине  $x_1 = 2,72$  м, полученной в задаче 5.36; 2) волновое сопротивление трансформатора.

**5.39.** Длина линии задачи 5.36 равна 8 м.

Определить напряжение на сопротивлении нагрузки до ее согласования (шлейфа нет) и после согласования, если напряжение генератора остается неизменным и равным 200 В. Известно, что  $x = x_1 = 2,72$  м и  $y = y_1 = 4,12$  м.

**5.40(P).** После согласования нагрузки линии задачи 5.36 длиной 8 м произошло короткое замыкание в конце.

Определить, как изменится входное сопротивление линии. Считая, что напряжение генератора равно 200 В, найти напряжение  $U_{a6}$  (рис. 5.36), ток в короткозамыкающей перемычке шлейфа и ток короткого замыкания в конце линии. Известно, что  $x = x_1 = 2,72$  м и  $y = y_1 = 4,12$  м.

**Решение.** Проводимость параллельно соединенных шлейфа и короткозамкнутого участка длиной  $x_1$

$$\underline{Y}_{a6} = \frac{1}{jz_b \operatorname{tg} \beta y_1} + \frac{1}{jz_b \operatorname{tg} \beta x_1} = \frac{1,15}{jz_b}.$$

Таковую же входную проводимость или сопротивление имеет эквивалентный двум параллельно соединенным участкам короткозамкнутый отрезок линии длиной  $x_0$  (рис. 5.40P), определяемый из уравнения  $\underline{Z}_{a6} = jz_b \operatorname{tg} \beta x_0$ , откуда  $x_0 = 2,28$  м.

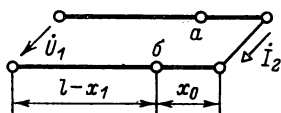


Рис. 5.40P

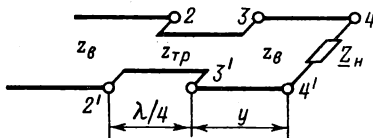


Рис. 5.41

Следовательно, линия с шлейфом длиной  $l = 8$  м может быть заменена эквивалентной без шлейфа длиной  $l_1 = (l - x_1) + x_0 = 7,56$  м. Входное сопротивление этой линии  $\underline{Z}_{вх} = jz_b \operatorname{tg} \beta l_1 = -j580$  Ом.

Ток в конце эквивалентной линии определяется по (5.36)  $\dot{U}_1 = jz_b \dot{I}_2 \sin \beta l_1$ , откуда при  $\dot{U}_1 = U_1 = 200$  В получается  $\dot{I}_2 = -j0,48$  А. Напряжение  $\dot{U}_{a6} = jz_b \dot{I}_2 \sin \beta x_0 = 189$  В. Такое же напряжение  $\dot{U}_{a6}$  будет и у заданной линии при  $\underline{Z}_н = 0$  (см. рис. 5.36). Ток в перемычке шлейфа  $\dot{I}_{ш}$  и ток короткого замыкания в конце линии  $\dot{I}_н$  определяются по (5.36):  $\dot{U}_{a6} = jz_b \dot{I}_{ш} \sin \beta y_1$ ;  $\dot{U}_{a6} = jz_b \dot{I}_н \sin \beta x_1$ , откуда  $\dot{I}_{ш} = -j0,328$  А;  $\dot{I}_н = -j0,418$  А.

**5.41.** Для согласования с воздушной линией приемника, сопротивление которого  $\underline{Z}_н = 800 + j450$  Ом, выбрана схема, показанная на рис. 5.41.

Определить наименьшую длину отрезка  $y = y_1$  и волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора  $z_{тр}$ . Волновое сопротивление линии и отрезка  $z_b = 600$  Ом. Длина волны генератора 20 м.

**5.42(P).** Определить ток генератора, питающего воздушную линию с индуктивностью  $L_0 = 5/3$  мГн/км, длиной  $l =$

= 100 м. Сопротивление нагрузки линии  $Z_n = r_n = 380$  Ом; напряжение генератора  $U_1 = 1,2$  кВ, длина волны  $\lambda = 60$  м.

**Решение.** Для воздушной линии без потерь волновое сопротивление  $Z_0 = z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ , фазовая скорость  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0} = c_0 = 300 \cdot 10^3$  км/с. Из этих двух формул получаем  $z_0 = 504$  Ом. Ток генератора  $I_1 = U_1/z_{вх}$ , где  $z_{вх}$  — входное сопротивление линии. По (5.31) имеем  $Z_{вх} = 553 \angle 12^\circ 40'$  Ом ( $\beta l = 600^\circ$ ,  $\text{tg } \beta l = 1,74$ ) и ток  $I_1 = 2,16$  А.

**5.43.** Линия без потерь длиной  $\lambda/4$  закорочена на обоих концах.

Найти зависимость сопротивления  $Z(x)$ , нагружающего генератор, при изменении места присоединения генератора к линии. Здесь  $x$  — расстояние от левого конца линии до точки присоединения генератора.

**5.44(Р).** Для измерения емкости конденсатора при высокой частоте найдено положение узлов напряжения вдоль линии без потерь, в конце которой включен конденсатор, а в начале — генератор заданной частоты.

Определить емкость конденсатора, если расстояние от конца воздушной линии с волновым сопротивлением  $z_0 = 550$  Ом до ближайшего узла напряжения  $x_1 = 10$  см, частота тока в линии 150 МГц.

**Решение.** Входное сопротивление участка линии относительно сечения  $x_1$ , в котором напряжение равно нулю (узел напряжения), также равно нулю. Следовательно, по (5.31)

$$Z_{вх}(x_1) = z_0 \frac{Z_n + jz_0 \text{tg } \beta x_1}{z_0 + jZ_n \text{tg } \beta x_1} = 0,$$

где  $Z_n = -j1/\omega C$ , или  $-j \frac{1}{\omega C} + jz_0 \text{tg } \frac{2\pi}{\lambda} x_1 = 0$ ,

откуда определяется емкость  $C = 5,9$  пФ.

Возможен и другой путь решения. Конденсатор можно заменить отрезком разомкнутой линии, входное сопротивление которой по (5.35)  $Z_x = -jz_0 \text{ctg } \beta l_0$ , где  $l_0$  — длина отрезка, которую нужно выбрать такой, чтобы в сечении  $x_1$  по-прежнему был узел напряжения. Ближайшее расстояние между узлами и пучностями напряжения равно  $\lambda/4$ , поэтому длину отрезка следует выбрать равной  $l_0 = \lambda/4 - x_1$ . Из уравнения  $-jz_0 \text{ctg } \beta l_0 = -j1/\omega C$  находим емкость.

**5.45.** Определить расстояние от конца линии задачи 5.44 до ближайшей пучности напряжения, если емкостное сопротивление конденсатора равно волновому сопротивлению линии.

**5.46.** При измерении емкости методом, указанным в задаче 5.44, не учитывалось влияние краевого эффекта в конце линии

(электрическое поле распространяется и за пределы линии, что эквивалентно некоторой включенной в конце линии емкости). Для определения этой емкости было измерено расстояние от конца линии до ближайшего узла напряжения при отключенном конденсаторе. Оказалось, что оно равно 45 см.

Определить поправку, которую следует внести в найденное в задаче 5.44 значение емкости конденсатора, если учесть краевой эффект (считая, что краевой эффект нагруженной и разомкнутой линий одинаков).

**5.47(P).** Коаксиальный кабель с полиэтиленовой изоляцией ( $\epsilon_r = 2,4$ ) имеет волновое сопротивление  $Z_0 = r_0 = 75$  Ом. Известно, что при частоте 70 МГц сопротивление нагрузки кабеля  $Z_n = 100 \angle 20^\circ$  Ом.

Найти первые две точки от конца, относительно которых входное сопротивление чисто активное.

**Решение.** Входное сопротивление линии в общем случае комплексное и определяется по (5.31):

$$Z_{вх} = z_0 \frac{1 + \rho \angle (-2\beta l + v)}{1 - \rho \angle (-2\beta l + v)},$$

где  $v$  — аргумент комплексного коэффициента отражения  $\rho = \rho \angle v$ . Входное сопротивление будет активным, если угол  $-2\beta l + v$  равен целому числу  $\pi$ , т. е.  $2\beta l - v = k\pi$  и

$$l = (v + k\pi)/2\beta.$$

При указанных в задаче значениях параметров по (5.23)  $\rho = 0,266 \angle 49^\circ 30'$  и  $v = 0,86$  рад; по (5.29)  $\beta = 2280$  рад/км.

Первая точка находится на расстоянии  $l_1 = v/2\beta = 0,19$  м, вторая — на расстоянии  $l_2 = (v + \pi)/2\beta = 0,88$  м.

**5.48.** У воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением 400 Ом было исследовано распределение напряжения вдоль линии. Оказалось, что первый минимум напряжения 12 В находится на расстоянии 0,4 м от конца линии, а первый максимум напряжения 16 В — на расстоянии 0,9 м.

Определить сопротивление нагрузки.

**5.49.** Воздушная линия без потерь имеет волновое сопротивление, равное 400 Ом. Измерения показали, что первый от конца минимум напряжения находится на расстоянии 2 м, а второй — на расстоянии 7 м и отношение  $U_{min}/U_{max} = 0,5$ .

Определить сопротивление нагрузки.

**5.50(P).** У генератора метровых волн, работающего с частотой 150 МГц, контур состоит из отрезка короткозамкнутой линии, которая служит индуктивностью. Линия выполнена из медных трубок с внешним диаметром 6 мм, находящихся на расстоянии 90 мм друг от друга. Короткозамыкающее устрой-

ство может перемещаться. Емкость контура 40 пФ состоит из межэлектродной емкости лампы и емкости монтажа.

Определить, на каком наименьшем расстоянии от начала линии должен находиться короткозамыкатель, чтобы контур был настроен на генерируемую частоту.

**Решение.** Входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь длиной  $l$  меньше четверти длины волны  $\lambda$  индуктивное, заменяет индуктивность контура и может быть найдено по (5.38):

$$Z_{\kappa} = jz_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l = j\omega L,$$

где  $L$  — необходимая индуктивность, значение которой определяется условиями резонанса:  $\omega L = 1/\omega C$ .

Индуктивность и емкость воздушной линии на единицу длины

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2D}{d}; \quad C_0 = \pi \epsilon_0 / \ln \frac{2D}{d},$$

где  $D$  — расстояние между осями проводов (трубок);  $d$  — диаметр провода.

После вычисления значений  $L$ ,  $z_{\text{в}}$  и  $\beta l$  находим, что  $l = 38$  см.

**5.51(Р).** Определить входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии длиной  $\lambda/4$  на частоте 10 МГц, учитывая активное сопротивление проводов  $r_0 = 0,087$  Ом/м (такое сопротивление имеет двухпроводная воздушная линия с диаметром медных проводов 3 мм и расстоянием между проводами 20 мм). Проводимостью  $g_0$  пренебречь, волновое сопротивление считать чисто активным и равным 585 Ом (линия с малыми потерями).

**Решение.** Входное сопротивление короткозамкнутой линии с потерями определяется по (5.19), где для линии с малыми потерями можно считать, как и для линии без потерь,  $z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$ ;  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ , а коэффициент ослабления (при  $g_0 = 0$ )  $\alpha = (r_0/2) \sqrt{C_0/L_0}$ .

Индуктивность  $L_0$  и емкость  $C_0$  рассчитываются по формулам, приведенным в решении задачи 5.50.

## 5.4. Схемы замещения линии

**5.52(Р).** Составить П-образную схему замещения для линии задачи 5.8; при помощи этой схемы определить напряжения в конце разомкнутой линии при напряжении в начале линии 23,4 В. Вторичные параметры линии:  $Z_{\text{в}} = 568 \angle -7,5^\circ$  Ом;  $\gamma = 17,9 \cdot 10^{-3} \angle 81^\circ 15'$  км<sup>-1</sup>.

**Решение.** При известных вторичных параметрах линии и частоте тока сопротивления схемы замещения рассчитываются так же, как и у пассивного симметричного четырехполюсника. В частности, для П-образной схемы (см. рис. 4.5 и табл. 4.2)

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_n \operatorname{sh} \underline{\Gamma}; \quad 2\underline{Z}_2 = \underline{Z}_n \operatorname{sh} \underline{\Gamma} / (\operatorname{ch} \underline{\Gamma} - 1) = \underline{Z}_n \operatorname{cth} (\underline{\Gamma}/2),$$

где в случае линии  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_b$ ;  $\underline{\Gamma} = \underline{\gamma}l = \alpha l + j\beta l$ .

Для вычисления гиперболических функций комплексного аргумента можно пользоваться формулами

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}); \quad \operatorname{ch} \underline{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l});$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma}l = \operatorname{sh} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{ch} \alpha l \sin \beta l;$$

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma}l = \operatorname{ch} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{sh} \alpha l \sin \beta l;$$

$$\operatorname{th} (\underline{\gamma}l/2) = (\operatorname{sh} \alpha l + j \sin \beta l) / (\operatorname{ch} \alpha l + \cos \beta l)$$

или номограммами этих функций.

При заданных параметрах  $\alpha l = 0,16$  Нп;  $\beta l = 1,03$  рад =  $= 59^\circ 15'$ ;  $\operatorname{sh} \underline{\gamma}l = 0,87 \angle 84^\circ 30'$ ;  $\operatorname{ch} \underline{\gamma}l = 0,55 \angle 14^\circ$ ;  $\underline{Z}_1 = = 495 \angle 77^\circ$  Ом;  $2\underline{Z}_2 = 1020 \angle -87^\circ$  Ом.

Напряжение в конце линии

$$\dot{U}_{2x} = 2\underline{Z}_2 \dot{U}_1 / (\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2) = \dot{U}_1 / \operatorname{ch} \underline{\gamma}l.$$

При заданных параметрах  $U_{2x} = 42,6$  В.

**5.53.** Диспетчерская связь осуществляется по линии электропередачи на частоте 100 кГц. Передающий и приемный аппараты находятся на расстоянии 20 км друг от друга и присоединяются между одной из фаз линии и землей. Параметры такой линии связи равны:  $\underline{Z}_b \approx r_b = 750$  Ом;  $\alpha = 0,08$  Нп/км; фазовая скорость  $2,9 \cdot 10^5$  км/с.

Составить Т-образную схему замещения линии связи и сравнить напряжения на приемном конце при подключенном и отключенном приемнике с сопротивлением  $\underline{Z}_n = r_n = 750$  Ом. Напряжение передающего аппарата в обоих случаях равно 200 В.

**5.54.** При составлении Т- или П-образной схемы замещения линии небольшой длины  $l$  можно пользоваться приближенными формулами  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_0 l$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/Y_0 l$ , где  $\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0$ ;  $\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$ .

1) По приближенным формулам составить П-образную схему замещения линии задачи 5.17, для которой  $\underline{Z}_0 = = 0,427 \angle 79^\circ 15'$  Ом/км;  $\underline{Y}_0 \approx 2,7 \cdot 10^{-6} \angle 90^\circ$  См/км. Вычислить в процентах ошибку при определении напряжения холостого хода в конце линии по приближенной схеме. Напряжение

в начале линии  $U_1 = 229$  кВ, напряжение в конце линии при холостом ходе, вычисленное по уравнениям длинной линии,  $U_{2x} = 394$  кВ.

2) Повторить расчет для линии задачи 5.8, для которой известно  $\underline{Z}_0 = 10,15 \angle 73^\circ 45'$  Ом/км;  $\underline{Y}_0 = 31,4 \angle 88^\circ 45'$  Ом/км;  $U_1 = 23,4$  В;  $U_{2x} = 42,6$  В.

3) Повторить расчет для линии задачи 5.53, для которой  $\underline{Z}_0 = 750$  Ом;  $\gamma l = 43,4 \angle 88^\circ 30'$ ;  $U_1 = 200$  В;  $U_{2x} = 80$  В. Объяснить, почему для этой линии ошибка так велика.

**5.55.** Для согласования нагрузки линии без потерь можно применить четвертьволновый трансформатор. Если длина линии-трансформатора меньше  $\lambda/4$ , то недостающий участок  $l$  можно заменить цепочкой из Т- или П-образных звеньев, а иногда даже одним звеном.

Определить элементы Т-образной схемы, если длина волны  $\lambda = 30$  м, волновое сопротивление трансформатора 600 Ом,  $l = 1,5$  м.

**5.56.** Телевизионная антенна соединена с телевизором коаксиальным кабелем без потерь с полиэтиленовой изоляцией ( $\epsilon_r = 2,4$ ) и волновым сопротивлением 75 Ом, так что в кабеле нет отраженной волны. Ввиду слишком большого уровня сигнала между кабелем и телевизором включили Т-образный аттенуатор.

Определить элементы аттенуатора, включение которого позволит снизить напряжение сигнала в 4 раза, причем в кабеле по-прежнему не должно быть отраженной волны.

**5.57.** Составить: 1) Т-, 2) П- и 3) Х-образные схемы замещения четвертьволнового трансформатора задачи 5.34.

**5.58.** Для определения вторичных параметров кабеля без потерь с полиэтиленовой изоляцией ( $\epsilon_r = 2,4$ ) было измерено на частоте 75 МГц сопротивление короткого замыкания  $\underline{Z}_K = -j171$  Ом отрезка длиной 1 м.

Рассчитать вторичные параметры и составить эквивалентную Т-образную схему замещения отрезка.

**5.59.** П-образный симметричный четырехполюсник работает на частоте 500 Гц и состоит из элементов:  $L = 10$  мГн;  $C_1 = C_2 = 2$  мкФ.

Определить длину и волновое сопротивление воздушной линии, эквивалентной четырехполюснику. Выяснить, при любой ли частоте этот четырехполюсник может быть заменен эквивалентной линией.

**5.60(Р).** Воздушная линия без потерь длиной  $l = 24$  м с волновым сопротивлением  $z_0 = 552$  Ом соединяет передатчик

с антенной (согласованная нагрузка). Длина волны передатчика  $\lambda = 36$  м.

Сравнить распределение напряжения вдоль линии и эквивалентной цепочки, состоящей из  $n = 10$  одинаковых Т-образных симметричных звеньев. Найти параметры звена. Вычислить напряжение на входе восьмого звена при согласованной нагрузке и в режиме холостого хода, если напряжение источника питания цепочки и линии 20 В. Определить, на каком расстоянии от передатчика будет такое же напряжение в линии.

Решение. Для линии  $\beta l = (2\pi/\lambda) l = 240^\circ$ . Так как цепочка состоит из  $n = 10$  звеньев, то постоянная фазы звена  $B = 24^\circ$ . По известным  $z_b$  и  $B$  четырехполосника ( $A = 0$ ) находим элементы Т-образного звена (см. табл. 4.2):  $Z_1/2 = jz_b \operatorname{tg}(B/2) = j117$  Ом — индуктивное сопротивление; индуктивность каждой катушки  $L/2 = 2,23$  мкГн;  $1/Z_2 = j \sin B/z_b = j7,38 \cdot 10^{-4}$  См — емкостная проводимость; емкость конденсатора  $C = 14,1$  пФ.

При согласованной нагрузке напряжение на входе и выходе любого звена одинаково и равно напряжению на входе цепочки  $U_1 = 20$  В.

При холостом ходе по (5.33)  $U_1 = U_2 \cos nB$  и аналогично  $U_k = U_2 \cos(n - k + 1)B$ , где  $k$  — номер звена;  $U_k$  — напряжение на входе  $k$ -го звена. Исключая напряжение на выходе цепочки  $U_2$ , при  $k = 8$  находим  $U_8 = 12,35$  В.

Распределение напряжения вдоль цепочки и линии одинаково. Напряжение на входе восьмого звена соответствует напряжению на расстоянии  $3l/n = 7,2$  м от конца линии.

5.61. Для измерения возможных режимов кабеля с согласованной нагрузкой собрана цепочка из десяти Т-образных четырехполосников. Каждый четырехполосник состоит из двух катушек и конденсатора. Индуктивность катушки 1 мГн, добротность 200, емкость конденсатора 1 мкФ, потерями в конденсаторе можно пренебречь.

Определить напряжение и активную и реактивную мощности источника питания цепочки, работающего на частоте 800 Гц, если напряжение в конце должно быть равно 100 мВ. Выяснить, какая часть активной мощности источника теряется в активных сопротивлениях катушек.

Указание. При заданной добротности сопротивление катушки  $r/2 = 0,025$  Ом много меньше индуктивного сопротивления  $\omega L/2 = 5$  Ом. Поэтому при расчете режима каждое звено можно рассматривать как четырехполосник без потерь. После расчета режима потери в каждой катушке определяются по формуле  $I^2 r/2$ , где  $I$  — ток в катушке.



## Глава шестая

# ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С НЕГАРМОНИЧЕСКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

### Введение к гл. 6

Источник несинусоидальной периодической ЭДС можно представить в виде последовательного соединения ряда источников с гармоническими ЭДС и источника постоянной ЭДС, источник несинусоидального периодического тока — параллельным соединением источников гармонических тока и источника постоянного тока. Примеры подобного представления приведены в решении задач 6.1 и 6.2. Такое представление основано на том, что любую периодическую функцию времени  $f(t)$  с периодом  $T$ , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно представить рядом Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_{km} \sin k\omega t + A''_{km} \cos k\omega t), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — частота основной гармоники;  $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt =$   
 $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t$  — постоянная составляющая;  $A_{km}$  и  $\psi_k$  — амплитуда и начальная фаза  $k$ -й гармоники;

$$\begin{aligned} A'_{km} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t; \\ A''_{km} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t. \end{aligned}$$

Примеры разложения некоторых простейших функций приведены в приложении 1.

Приведенные выше интегралы могут быть вычислены численными методами. Например, применение формулы прямоугольников приводит к следующим приближенным выраже-

ниями:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\approx \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} f_i; & A'_{km} &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n-1} f_i \sin(ki\pi/n); \\ A''_{km} &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n-1} f_i \cos(ki\pi/n), \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где предполагается, что период  $T$  разделен на  $2n$  равных частей, а  $f_i$  — значение функции  $f(t)$  при  $t = Ti/2n$ .

При указанном представлении источников периодических ЭДС и токов можно для анализа линейных цепей применять принцип наложения, т.е. отдельно рассматривать цепь при действии источников постоянных ЭДС и токов и при действии каждого из гармонических источников или группы источников с одинаковой частотой.

При применении комплексного метода необходимо учесть, что индуктивное сопротивление для тока  $k$ -й гармоники  $x_{Lk}$  в  $k$  раз больше, чем для тока первой (основной) гармоники  $x_L = \omega L$ , так как  $x_{Lk} = k\omega L = kx_L$ , а емкостное сопротивление  $x_{Ck}$  в  $k$  раз меньше, чем  $x_C = 1/\omega C$ , так как  $x_{Ck} = 1/k\omega C = x_C/k$ .

Результирующее мгновенное значение тока (напряжения) равно сумме постоянной составляющей и мгновенных значений токов (напряжений) всех учтенных при расчете гармоник:

$$i \approx I_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n,$$

где  $i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$  — мгновенное значение  $k$ -й гармоники тока.

*Действующие значения тока и напряжения*

$$\left. \begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \approx \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots + I_n^2}; \\ U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \approx \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots + U_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

где  $I_0$  и  $U_0$  — постоянные составляющие тока и напряжения;  $I_k$  и  $U_k$  — действующие значения тока и напряжения  $k$ -й гармоники.

*Мощность*, потребляемая двухполюсником при негармонических периодических токе и напряжении,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (6.4)$$

где  $\varphi_k$  — угол сдвига по фазе тока относительно напряжения для  $k$ -й гармоники.

Периодические функции, симметричные относительно оси абсцисс, т.е.  $f(t) = -f(t + T/2)$ , либо такие, которые смещением по оси абсцисс могут быть приведены к функциям, симметричным относительно начала координат, т.е.  $f(t) = -f(-t)$ , характеризуют следующими коэффициентами:  $k_\Phi = F/F_{cp}$  — коэффициентом формы,  $k_a = F_{max}/F$  — коэффициентом амплитуды,  $k_{иск} = F_1/F$  — коэффициентом искажения, где  $F$  — действующее значение;  $F_1$  — действующее значение первой (основной) гармоники;  $F_{cp}$  — среднее по модулю значение функции;  $F_{max}$  — максимальное значение функции.

При измерениях негармонических периодических токов и напряжений следует иметь в виду, что показания приборов в зависимости от их устройства определяются различными параметрами измеряемой величины. Магнитоэлектрические приборы показывают постоянную составляющую измеряемой величины, а электромагнитные, электродинамические, электростатические и тепловые — ее действующее значение. Показания электронных приборов в зависимости от устройства входного преобразователя могут определяться: действующим значением измеряемой величины; средним по модулю значением; усредненным за период положительным (или отрицательным) зна-

чением измеряемой величины  $\left[ \frac{1}{T} \int_0^T kf(t) \, dt, \text{ где } k = 1 \text{ (или } 0), \right.$   
если  $f(t) \geq 0$  и  $k = 0$  (или 1), если  $f(t) < 0$   $\left. \right]$ ; максимальным

( $F_{max} > 0$ ) или минимальным ( $F_{min} < 0$ ) значениями измеряемой величины.

На входе электронного прибора может быть включен конденсатор, который не пропускает на вход преобразователя постоянную составляющую измеряемой величины. В этом случае показание прибора определяется соответствующим параметром переменной составляющей измеряемой величины.

Группа электронных приборов, которая предназначена для измерений в цепях синусоидальных токов и напряжений, вне зависимости от того, на какой параметр периодической кривой прибор реагирует, градуируется так, что при синусоидальной измеряемой величине выходное устройство (стрелка или цифровой индикатор) показывает действующее значение этой величины.

В задачах этой главы требуется рассчитывать показания электронных вольтметров трех типов:

1) вольтметра ВЗ-40, предназначенного для измерения синусоидального напряжения; показание прибора пропорционально действующему значению, но на входе прибора включен конденсатор, поэтому при измерении негармонических напряжений прибор показывает

$$U_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - U_0]^2 dt}; \quad (6.5)$$

2) вольтметра ВЗ-38, предназначенного для измерения синусоидального напряжения; на входе этого прибора включен конденсатор, не пропускающий постоянной составляющей напряжения на преобразователь, который устроен так, что показание прибора пропорционально среднему по модулю значению напряжения, приложенному ко входу преобразователя, и при измерении негармонических напряжений прибор показывает

$$U_{\text{пр}} = 1,11 \left( \frac{1}{T} \int_0^T |u(t) - U_0| dt \right); \quad (6.6)$$

3) комбинированного вольтметра ВК7-15, который при соответствующем положении переключателя предназначен для измерения синусоидального напряжения; так как при этом положении переключателя на входе прибора включен конденсатор, а преобразователь реагирует на амплитуду отрицательной полуволны приложенного к нему напряжения, то прибор при измерении негармонического периодического напряжения показывает

$$U_{\text{пр}} = 0,707 |u_{\text{min}} - U_0|. \quad (6.7)$$

В последовательном резонансном контуре  $r$ ,  $L$ ,  $C$  при изменении частоты основной гармоники  $\omega$  резонанс напряжения на  $k$ -й гармонике наступает при выполнении условия

$$k\omega L = 1/k\omega C, \quad (6.8)$$

т. е. при частоте

$$\omega = 1/k\sqrt{LC}. \quad (6.9)$$

Если резонанс на  $k$ -й гармонике достигается изменением емкости (индуктивности), то резонансная емкость  $C_k$  (индуктивность  $L_k$ ) в  $k$  раз меньше емкости (индуктивности), при которой наблюдается резонанс на частоте основной гармоники.

При параллельном соединении ветвей  $r_1$ ,  $L$  и  $r_2$ ,  $C$  условие резонанса токов на  $k$ -й гармонике имеет вид:

$$\frac{k\omega L}{(k\omega L)^2 + r_1^2} = \frac{1/k\omega C}{(1/k\omega C)^2 + r_2^2}. \quad (6.10)$$

Если при указанном соединении  $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ , то резонанс токов наблюдается на частотах всех гармоник приложенного напряжения и форма кривой тока повторяет форму кривой напряжения.

В трехфазных симметричных цепях при анализе периодических процессов следует иметь в виду, что сдвиг по фазе на  $120^\circ$  между фазными напряжениями (токами) основной гармоники приводит к сдвигу на  $k \cdot 120^\circ$  для гармоник с номером  $k$ . Вследствие этого все гармоники, кратные трем (3, 6, 9 ...), образуют систему нулевой последовательности фаз:

$$\dot{E}_{A(3, 6, 9 \dots)} = \dot{E}_{B(3, 6, 9 \dots)} = \dot{E}_{C(3, 6, 9 \dots)}. \quad (6.11)$$

Гармоники 1, 4, 7 ... образуют прямую последовательность фаз, т. е.

$$\dot{E}_{B(1, 4, 7 \dots)} = a^2 \dot{E}_{A(1, 4, 7 \dots)}; \quad \dot{E}_{C(1, 4, 7 \dots)} = a \dot{E}_{A(1, 4, 7 \dots)}, \quad (6.12)$$

а гармоники 2, 5, 8 ... — обратную последовательность фаз, т. е.

$$\dot{E}_{B(2, 5, 8 \dots)} = a \dot{E}_{A(2, 5, 8 \dots)}; \quad \dot{E}_{C(2, 5, 8 \dots)} = a^2 \dot{E}_{A(2, 5, 8 \dots)}, \quad (6.13)$$

где  $a = e^{j120^\circ}$  и  $a^2 = e^{-j120^\circ}$ .

Так как гармоники фазных ЭДС, кратные трем, совпадают по фазе, то при соединении фаз источника треугольником в линейных напряжениях нет гармоник, кратных трем. При соединении звезда — звезда в симметричной системе без нейтрального провода отсутствуют токи гармоник, кратных трем, а в системе с нейтральным проводом ток в этом проводе содержит только гармоники, кратные трем.

## 6.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье

6.1(Р). На рис. 6.1 изображена кривая напряжения  $u(t)$ . Записать четыре первые гармоники разложения этого напряжения в ряд Фурье. Составить схему замещения источника, учитывающую эти четыре гармоники.

**Решение.** Воспользуемся разложением, приведенным в приложении 1:

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right).$$

После подстановки значений  $U_m = 6$  В и  $\alpha = \pi/4$  получим:

$$u = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 = 6,88 \sin \omega t + 0,764 \sin 3\omega t + 0,275 \sin (5\omega t - 180^\circ) + 0,140 \sin (7\omega t - 180^\circ) \text{ В.}$$

Схема замещения представлена на рис. 6.1Р.

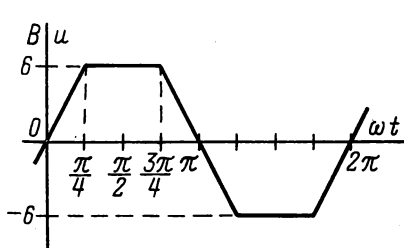


Рис. 6.1

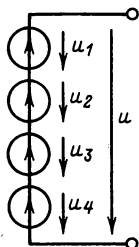


Рис. 6.1Р

**6.2(Р).** Ток  $J(t)$  источника тока является периодической функцией времени, представленной на рис. 6.2. Составить схему замещения этого источника, учитывающую постоянную составляющую и три первые гармоники тока.

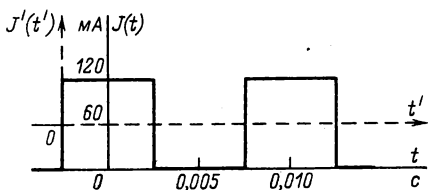


Рис. 6.2

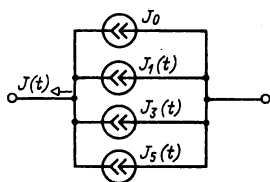


Рис. 6.2Р

**Решение.** При смещении начала координат на 60 мА вверх и на  $T/4$  влево получим кривую, разложение в ряд которой приведено в приложении 1. В соответствии с таблицей

$$J'(t') = \frac{4I'_m}{\pi} \left( \sin \omega t' + \frac{1}{3} \sin 3\omega t' + \frac{1}{5} \sin 5\omega t' \right),$$

подставив  $I'_m = 60$  мА, получим:

$$J'(t') = 76,4 \sin \omega t' + 25,5 \sin 3\omega t' + 15,3 \sin 5\omega t' \text{ мА.}$$

Учитывая, что  $t' = t + T/4$  и кривая  $J'(t')$  получена смещением кривой  $J(t)$  на 60 мА, найдем ток источника:

$$J(t) = J_0 + J_1(t) + J_3(t) + J_5(t) = \\ = 60 + 76,4 \cos \omega t - 25,5 \cos 3\omega t + 15,3 \cos 5\omega t \text{ мА,}$$

где частота основной гармоники  $\omega = 2\pi/T = 628$  рад/с.

Схема замещения представлена на рис. 6.2Р.

**6.3.** Определить постоянную составляющую и три первые гармоники напряжения, представленного на рис. 6.3.

**У к а з а н и е.** Если для кривой 2 в приложении 1 положить  $\alpha = \pi/2$ , сдвинуть ее вверх на  $A_m/2$  и вправо на  $\pi/2$ , то получим кривую, заданную в условии задачи.

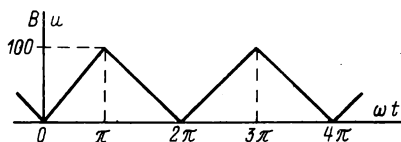
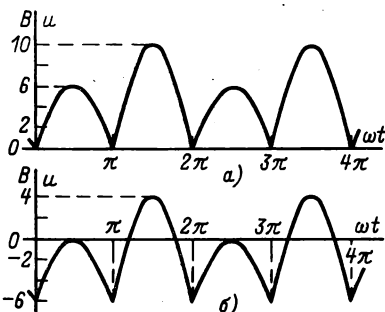


Рис. 6.3

Рис. 6.4 →



**6.4.** Вычислить постоянную составляющую и три первые гармоники напряжения, изображенного: а) на рис. 6.4, а и б) на рис. 6.4, б. Каждый из импульсов напряжения представляет собой полувольту синусоиды.

**У к а з а н и е.** Воспользоваться разложением в ряд функции, представленной в пятой строке приложения 1.

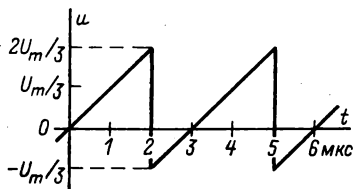


Рис. 6.5

**6.5.** Постоянная составляющая напряжения, представленного на рис. 6.5, равна 100 В.

Определить амплитуды и начальные фазы трех первых гармоник.

**6.6(Р).** На рис. 6.6 показана осциллограмма периодического напряжения на участке цепи.

Вычислить постоянную составляющую и две первые гармоники.

**Решение.** Делим период  $T$  на  $2n = 12$  равных частей. Составляем расчетную таблицу (табл. 6.6), в которой во втором столбце записываем значения  $u_i$  напряжения при  $t_i = iT/12$ , где

Таблица 6.6

i	u <sub>i</sub>	1-я гармоника				2-я гармоника			
		$\frac{i\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n}$	$\frac{i\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n}$	$u_i \sin \frac{i\pi}{n}$	$u_i \cos \frac{i\pi}{n}$	$\frac{2i\pi}{n} \sin \frac{2i\pi}{n}$	$\frac{2i\pi}{n} \cos \frac{2i\pi}{n}$	$u_i \sin \frac{2i\pi}{n}$	$u_i \cos \frac{2i\pi}{n}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0,000	1,000	0,00	0,00	0,000	1,000	0,00	0,00
1	10	0,500	0,866	5,00	8,66	0,866	0,500	8,66	5,00
2	14	0,866	0,500	12,12	7,00	0,866	-0,500	12,12	-7,00
3	16	1,000	0,000	16,00	0,00	-1,000	-1,000	0,00	-16,00
4	18	0,866	-0,500	15,59	-9,00	-0,866	-0,500	-15,59	-9,00
5	24	0,500	-0,866	12,00	-20,78	-0,866	0,500	-20,78	12,00
6	44	0,000	-1,000	0,00	-40,00	0,000	1,000	0,00	44,00
7	60	-0,500	-0,866	-30,00	-51,96	0,866	0,500	51,96	30,00
8	0	-0,866	-0,500	0,00	0,00	0,866	-0,500	0,00	0,00
9	-6	-1,000	0,000	6,00	0,00	0,000	-1,000	0,00	6,00
10	-8	-0,866	0,500	6,93	-4,00	-0,866	-0,500	6,93	-4,00
11	-6	-0,500	0,866	3,00	-5,20	-0,866	0,500	5,20	-3,00
Σ	166	—	—	46,64	-119,28	—	—	48,50	66,00



$i$  – номер отсчета. Сумма строк этого столбца дает сумму, стоящую в первом выражении (6.2). Следовательно, постоянная составляющая напряжения  $U_0 = 166/12 = 13,8$  В.

После деления на  $n = 6$  суммы чисел в пятом и шестом столбцах таблицы в соответствии с (6.2) получим амплитуды синусной и косинусной составляющих 1-й гармоники. Таким образом,

$$u_1 = 3,89 \sin \omega t - 9,94 \cos \omega t = 10,67 \sin (\omega t - 68^\circ 40') \text{ В.}$$

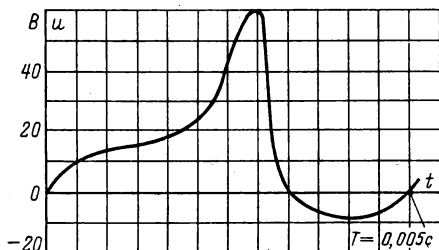


Рис. 6.6

Аналогично после суммирования чисел в девятом и десятом столбцах и деления результатов на  $n = 6$  получим 2-ю гармонику напряжения:

$$u_2 = 4,04 \sin 2\omega t + 5,50 \cos 2\omega t = 6,82 \sin (2\omega t + 53^\circ 40') \text{ В.}$$

Частота основной гармоники  $f = 1/T = 200$  Гц ( $\omega = 1256$  рад/с).

**6.7.** Периодически изменяющийся ( $T = 0,02$  с) ток  $i$  содержит только 1-ю и 2-ю гармоники.

Найти амплитуды и начальные фазы этих гармоник по известным мгновенным значениям тока (в амперах) в 24 точках, заданных через каждую  $1/24$  часть периода:  $-0,10; +2,04; +4,33; +6,33; +7,60; +7,83; +6,93; +5,04; +2,50; -2,06; -2,60; -4,29; -5,10; -5,04; -4,33; -3,33; -2,40; -1,83; -1,73; -2,04; -2,50; -2,79; -2,60; -1,71$ .

Построить зависимость  $i(t)$  как сумму двух гармоник и сопоставить значение тока, полученного в результате суммирования гармоник, со значениями, заданными в условии задачи.

## 6.2. Периодические процессы в линейных цепях

**6.8(Р).** Определить мгновенные значения токов  $i$  в схемах рис. 6.8, а и б.

Дано:  $r = 100$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 10$  мкФ и ЭДС  $e =$

$= 100 \sin \omega t + 100 \sin 2\omega t$  В, где  $\omega = 1000$  рад/с. Сравнить отношения амплитуд  $I_{2m}/I_{1m}$  для схем рис. 6.8, а и б.

**Решение.** В схеме рис. 6.8, а для 1-й гармоники комплексное сопротивление  $\underline{Z}_1 = r + j\omega L = 100 + j100 = 141 \angle 45^\circ$  Ом, комплексная амплитуда ЭДС  $\dot{E}_{1m} = 100 \angle 0^\circ$  В, комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_{1m} = \dot{E}_{1m}/\underline{Z}_1 = 0,707 \angle -45^\circ$  А. Для второй гармоники  $\underline{Z}_2 = r + j2\omega L = 100 + j200 = 224 \angle 63^\circ 20'$  Ом и  $\dot{E}_{2m} = 100 \angle 0^\circ$  В, следовательно,  $\dot{I}_{2m} = 0,446 \angle -63^\circ 20'$  А. Мгновенное значение тока  $i = 0,707 \sin(\omega t - 45^\circ) + 0,446 \sin(2\omega t - 63^\circ 20')$  А.

Для схемы рис. 6.8, б

$$\underline{Z}_1 = r - j1/\omega C = 100 - j100 = 141 \angle -45^\circ \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{1m} = 0,707 \angle +45^\circ \text{ А};$$

$$\underline{Z}_2 = r - j1/2\omega C = 100 - j50 = 112 \angle -26^\circ 35' \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{2m} = 0,893 \angle +26^\circ 35' \text{ А}.$$

Мгновенное значение тока

$$i = 0,707 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,893 \sin(2\omega t + 26^\circ 35') \text{ А}.$$

Отношение амплитуд тока для схемы 6.8, а равно 0,63, а для схемы 6.8, б равно 1,26 (индуктивность подавляет высшие гармоники в кривой тока).

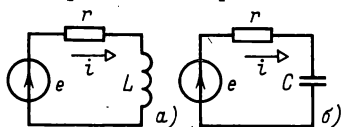


Рис. 6.8

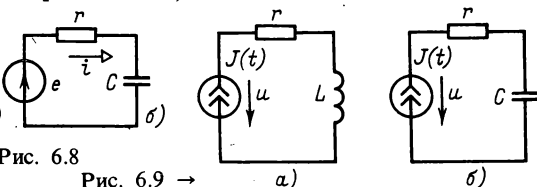
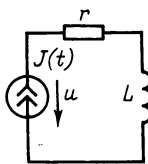
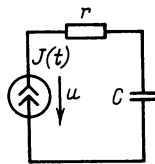


Рис. 6.9 →



а)



б)

**6.9.** Вычислить мгновенные значения напряжений  $u$  на выходах источников тока в схемах рис. 6.9, а и б.

Дано:  $J(t) = 2 \sin \omega t + 1 \sin 3\omega t$  А;  $r = 12$  Ом;  $\omega L = 12$  Ом;  $1/\omega C = 12$  Ом.

**6.10.** В цепи рис. 6.10 действует источник ЭДС  $e = 20 + 12 \sin \omega t - 3 \sin 2\omega t$  В.

Найти мгновенное значение тока  $i$  при  $r = 50$  Ом,  $1/\omega C = 100$  Ом,  $\omega L = 50$  Ом.

**6.11(Р).** На вход цепи рис. 6.11, а с параметрами  $r = 10$  Ом,  $L = 31,8$  мГн,  $C = 318$  мкФ подается напряжение  $u_{вх}$  в виде прямоугольных импульсов (рис. 6.11, б).

Определить мгновенное и действующее значения напряжения на выходе, учитывая гармоники до 7-й включительно. Найти действующее значение напряжения на входе и сравнить

его с действующим значением, рассчитанным по постоянной составляющей и трем первым гармоникам.

**Решение.** Записываем  $u_{вх}$  в виде ряда (см. приложение 1), учитывая, что заданная кривая смещена по сравнению с табличной на 50 В вверх:

$$u_{вх} = 50,0 + 63,7 \sin \omega t + 21,2 \sin 3\omega t + 12,7 \sin 5\omega t + 9,1 \sin 7\omega t \text{ В,}$$

где частота основной гармоники  $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0,02 = 314 \text{ рад/с}$ ; сопротивление  $\omega L = 10 \text{ Ом}$ ; проводимость  $\omega C = 0,10 \text{ См}$ .

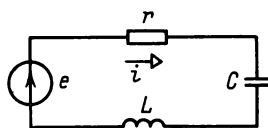


Рис. 6.10

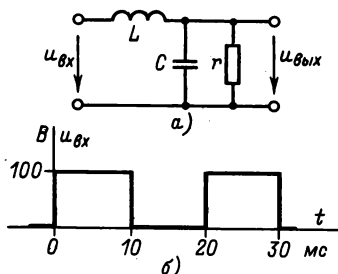


Рис. 6.11

Отношение напряжений  $k$ -й гармоники

$$\underline{M}_k = \frac{\dot{U}_{вх}}{\dot{U}_{вых}} = \frac{r}{r(1 - k^2\omega L\omega C) + jk\omega L} = \frac{1}{(1 - k^2) + jk}.$$

Отметим, что полученное выражение справедливо и для вычисления отношения постоянных составляющих ( $k = 0$ ).

Дальнейший расчет целесообразно вести в табличной форме (табл. 6.11).

Напряжение на выходе

$$\begin{aligned} u_{вых} &= 50,0 + 63,7 \sin(\omega t - 90^\circ) + 2,48 \sin(3\omega t - 159^\circ 25') + \\ &+ 0,518 \sin(5\omega t - 168^\circ 15') + 0,188 \sin(7\omega t - 171^\circ 40') + \dots \text{ В;} \\ U_{вых} &= \sqrt{50,0^2 + (63,7/\sqrt{2})^2 + (2,48/\sqrt{2})^2 + (0,518/\sqrt{2})^2 + (0,188/\sqrt{2})^2} = \\ &= 67,3 \text{ В.} \end{aligned}$$

Таблица 6.11

$k$	$\dot{U}_{вхm}$	$(1 - k^2) + jk$	$\underline{M}_k$	$\dot{U}_{выхm}$
0	50,0	1	1	50,0
1	$63,7 \angle 0^\circ$	$0 + j1$	$1 \angle -90^\circ$	$63,7 \angle -90^\circ$
3	$21,2 \angle 0^\circ$	$-8 + j3$	$0,117 \angle -159^\circ 25'$	$2,48 \angle -159^\circ 25'$
5	$12,7 \angle 0^\circ$	$-24 + j5$	$0,0408 \angle -168^\circ 15'$	$0,518 \angle -168^\circ 15'$
7	$9,1 \angle 0^\circ$	$-48 + j7$	$0,0206 \angle -171^\circ 40'$	$0,188 \angle -171^\circ 40'$

Действующее значение напряжения на входе

$$U_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} 100^2 dt} = 70,7 \text{ В},$$

а при учете только трех первых гармоник

$$U'_{\text{вх}} = \sqrt{50,0^2 + (63,7/\sqrt{2})^2 + (21,2/\sqrt{2})^2 + (12,7/\sqrt{2})^2} = 69,5 \text{ В}.$$

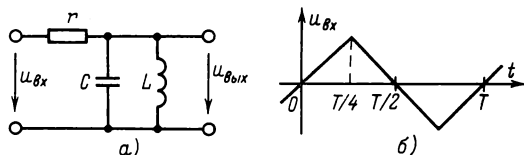


Рис. 6.12

**6.12.** Напряжение на входе схемы рис. 6.12, а имеет форму периодических треугольных импульсов (рис. 6.12, б) с действующим значением 100 В.

Дано:  $r = 20 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 90 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 10 \text{ Ом}$ .

Определить действующее значение выходного напряжения, учитывая первые три гармоники напряжения на входе.

**6.13.** Найти ток  $i$  в цепи, представленной на рис. 6.13.

Дано:  $e_1 = 100 \text{ В}$ ;  $e_2 = 100 \sin \omega t + 50 \sin (3\omega t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $\omega = 500 \text{ рад/с}$ ;  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 1 \text{ Гн}$ ;  $C_1 = 4 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 20 \text{ мкФ}$ .

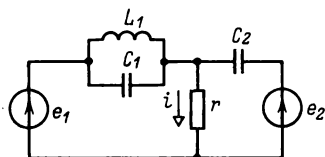


Рис. 6.13

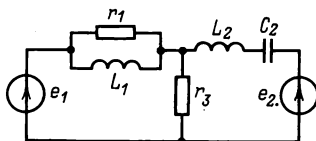


Рис. 6.14

**6.14.** Для схемы рис. 6.14 рассчитать мощность тепловых потерь в сопротивлении  $r_3$ .

Дано:  $e_1 = 26 \text{ В}$ ;  $e_2 = 18 \sin \omega t + 6 \sin 3\omega t \text{ В}$ ;  $r_1 = 160 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 20 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1 = 160 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C_2 = 90 \text{ Ом}$ .

**6.15.** На вход фазовращателя, изображенного на рис. 6.15, подается напряжение

$$u_{\text{вх}} = 20 \sin \omega t + 10 \sin 3\omega t + 6 \sin 5\omega t \text{ В}.$$

Рассчитать напряжение на выходе  $u_{\text{вых}}$  при  $r = 1/\omega C = 1 \text{ кОм}$ .

**6.16.** При разомкнутых выходных выводах фазовращатель (рис. 6.16) с параметрами  $r = 1/\omega C = 1$  кОм дает сдвиг по фазе первой гармоники приложенного напряжения на  $\pi/2$ .

1) Найти мгновенное значение напряжения на выходе  $u_{\text{вых}}$  при напряжении на входе  $u_{\text{вх}} = 20 \sin \omega t + 20 \sin 2\omega t$  В.

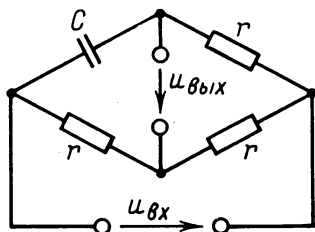


Рис. 6.15

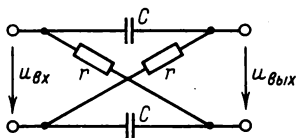


Рис. 6.16

2) Найти мгновенное значение напряжения на выходе при том же напряжении на входе при сопротивлении нагрузки фазовращателя  $r_n = 10$  кОм.

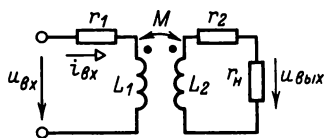


Рис. 6.17

**6.17.** На входе трансформатора (рис. 6.17) ток  $i_{\text{вх}} = 2 \sin \omega t + 1 \sin 3\omega t$  А. Сопротивление нагрузки трансформатора  $r_n = 100$  Ом.

Рассчитать напряжения на входе и выходе при двух вариантах параметров трансформатора: 1)  $r_1 = r_2 = \omega L_1 = \omega L_2 = 10$  Ом; коэффициент связи  $k = 0,5$ ; 2)  $r_1 = r_2 = 10$  Ом;  $\omega L_1 = \omega L_2 = 1$  кОм;  $k = 1$ . Убедиться, что при параметрах варианта 2 у трансформатора, близкого к идеальному, форма кривой напряжения почти не искажается:  $U_{3\text{т вх}}/U_{1\text{т вх}} \approx \approx U_{3\text{т вых}}/U_{1\text{т вых}}$  и  $\psi_{1\text{вых}} - \psi_{1\text{вх}} \approx 3(\psi_{3\text{вых}} - \psi_{3\text{вх}})$ .

### 6.3. Мощность. Коэффициенты, характеризующие формы периодических кривых. Измерения в цепях несинусоидального тока

**6.18(Р).** Задано напряжение на входе двухполюсника (рис. 6.18)  $u = 20 + 50 \sin \omega t + 25 \sin(3\omega t + 90^\circ)$  В и параметры  $r = 11,2$  Ом;  $r_1 = 7$  Ом;  $\omega L = 10$  Ом;  $1/\omega C = 90$  Ом.

Найти мгновенные значения тока  $i$  и напряжения на емкости, активную мощность двухполюсника и показания магнитоэлектрических приборов  $A_1$  и  $V_1$  и электромагнитных приборов  $A_2$  и  $V_2$ .

**Решение.** Применив принцип наложения, вычислим общий ток

$$i = 2,86 + 3,62 \sin(\omega t - 24^\circ) + 1,37 \sin(3\omega t + 90^\circ) \text{ А}$$

и напряжение на емкости

$$u_C = 28,8 \sin(\omega t + 66^\circ) + 16,3 \sin(3\omega t + 90^\circ) \text{ В.}$$

Активная мощность по (6.4)

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} I_{km} \cos \varphi_k = 157,0 \text{ Вт.}$$

Показания амперметров:

$$A_1 = 2,86 \text{ А}; \quad A_2 = \sqrt{2,86^2 + (3,62/\sqrt{2})^2 + (1,37/\sqrt{2})^2} = 3,96 \text{ А.}$$

Показания вольтметров:

$$V_1 = 0; \quad V_2 = \sqrt{(28,8/\sqrt{2})^2 + (16,3/\sqrt{2})^2} = 23,1 \text{ В.}$$

Мощность потерь можно найти по закону Джоуля-Ленца:

$$P_r = r_1 I^2 + U_C^2/r = 7 \cdot 3,96^2 + 23,1^2/11,2 = 156,4 \text{ Вт,}$$

и проверить баланс активной мощности ( $P = P_r$ ):  $157,0 \approx 156,4$ .

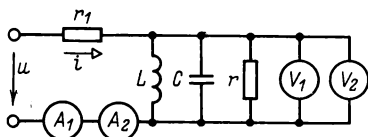


Рис. 6.18

**6.19.** Определить показания приборов электромагнитной системы в цепи рис. 6.19 при  $u = 20\sqrt{2} \sin \omega t + 6,5\sqrt{2} \sin 2\omega t \text{ В}$ ;  $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = r$ ;  $2\omega L_2 = 1/2\omega C_2$ .

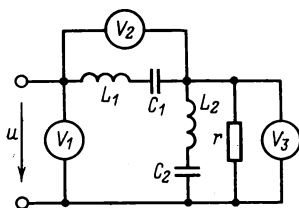


Рис. 6.19

**6.20.** Напряжение на входе двухполюсника (рис. 6.20)  $u = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 70\sqrt{2} \sin(3\omega t + 120^\circ) \text{ В}$ .

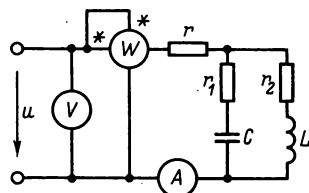


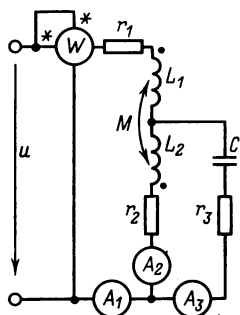
Рис. 6.20

Найти показания приборов электромагнитной системы при  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 10 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 60 \text{ Ом}$ .

**6.21.** В цепи рис. 6.21 найти показания ваттметра и амперметров электромагнитной системы при напряжении  $u =$

$= 120\sqrt{2} \sin \omega t - 30\sqrt{2} \cos 2\omega t$  В и параметрах  $r_1 = 60$  Ом;  $r_2 = r_3 = 30$  Ом;  $\omega L_1 = 40$  Ом;  $\omega L_2 = 20$  Ом;  $\omega M = 20$  Ом;  $1/\omega C = 80$  Ом.

**6.22.** В цепи по рис. 6.22 найти: 1) показание вольтметра при разомкнутом ключе; 2) показания вольтметра и амперметра при замкнутом ключе.



← Рис. 6.21

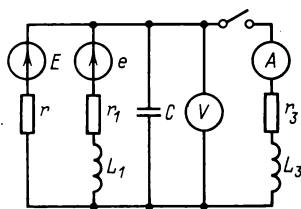


Рис. 6.22

Заданы ЭДС и параметры:  $E = 12$  В;  $e = 12\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 2\omega t$  В;  $r = r_1 = 40$  Ом;  $r_3 = 10$  Ом;  $\omega L_1 = 40$  Ом;  $\omega L_3 = 10$  Ом;  $1/\omega C = 20$  Ом. Приборы электромагнитной системы.

**6.23.** Мост (рис. 6.23) уравновешен на частоте основной гармоники напряжения  $u_{вх}$ .

Найти действующее значение напряжения  $u_{вых}$  на диагонали моста при  $u_{вх} = 12 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t$  В;  $r_1 = 1$  кОм;  $r_2 = = r_4 = 1/\omega C_2 = 100$  Ом.

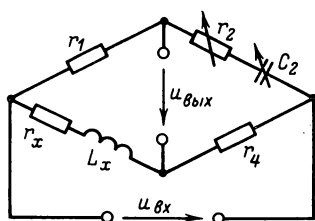


Рис. 6.23

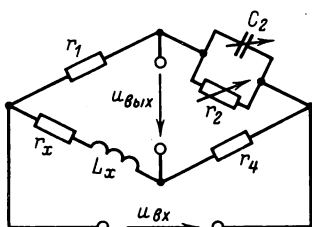


Рис. 6.24

**6.24.** Доказать, что если мост, представленный на рис. 6.24, уравновешен при синусоидальном напряжении  $u_{вх}$ , то и при наличии высших гармоник у напряжения  $u_{вх}$  напряжение  $u_{вых} = 0$ .

**6.25.** В цепи рис. 6.25 найти показания всех приборов. Амперметры  $A_1, A_2, A_3$  и вольтметр электромагнитной системы, амперметр  $A_4$  — магнитоэлектрической.

Дано:  $u = 180 + 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 10^\circ) + 40\sqrt{2} \sin(3\omega t + 20^\circ)$  В;  
 $E = 60$  В;  $r = 20$  Ом;  $\omega L = 10$  Ом;  $\omega L_1 = 8,75$  Ом;  $1/\omega C = 90$  Ом.

**6.26(P).** При измерении индуктивности по схеме рис. 6.26 применяются приборы электромагнитной системы. Известно, что напряжение источника питания содержит основную и третью гармоники; коэффициент искажения равен 0,92.

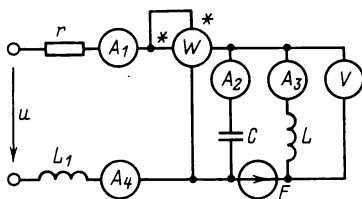


Рис. 6.25

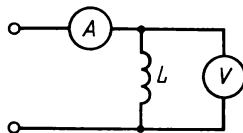


Рис. 6.26

Рассчитать методическую погрешность измерения, обусловленную искажением формы кривой приложенного напряжения.

**Решение.** Истинное значение индуктивности  $L = U_1/\omega I_1$ , измеренное значение

$$L' = \frac{U}{\omega I} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{U_1^2 + U_3^2}{I_1^2 + I_3^2}} = L \sqrt{\frac{1 + (U_3/U_1)^2}{1 + (I_3/I_1)^2}}.$$

Обозначив  $U_3/U_1 = \alpha$ , найдем, что

$$I_3/I_1 = \alpha/3 \text{ и } L' = L \sqrt{(1 + \alpha^2)/(1 + \alpha^2/9)}.$$

Для заданного напряжения  $k_{\text{иск}} = U_1/\sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 1/\sqrt{1 + \alpha^2}$ , т. е.  $\alpha = \sqrt{(1/k_{\text{иск}})^2 - 1} = 0,426$ , и, следовательно,  $L'/L = 1,076$ . Методическая погрешность измерения равна 7,6%.

**6.27.** При измерении емкости конденсатора по схеме рис. 6.27 применяются приборы электромагнитной системы. Питание цепи: 1) от источника напряжения или 2) от источника тока, которые кроме основной содержат еще 3-ю гармонику.

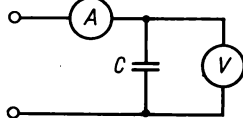


Рис. 6.27

Определить максимально допустимое значение коэффициента искажения соответственно напряжения или тока источника, при котором методическая погрешность измерения не превышает 5%.



**6.28(P).** Измеряются напряжения:

$$u' = 70 + 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t \text{ В;}$$

$$u'' = 70 + 100 \sin \omega t - 50 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Найти показания: а) магнитоэлектрического вольтметра; б) электромагнитного вольтметра; в) вольтметра действующего значения (В3-40); г) вольтметра среднего по модулю значения (В3-38); д) вольтметра ВК7-15 с амплитудным детектором. При решении задачи учесть (6.5)–(6.7).

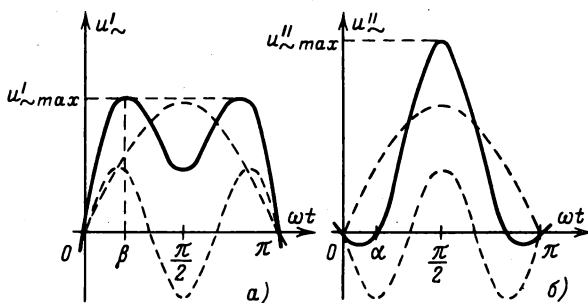


Рис. 6.28Р

**Решение.** а) Магнитоэлектрический вольтметр в обоих случаях покажет постоянную составляющую  $U_0 = 70 \text{ В}$ .

б) Электромагнитный прибор в обоих случаях покажет действующее значение  $U = \sqrt{70^2 + (100/\sqrt{2})^2 + (50/\sqrt{2})^2} = 105,6 \text{ В}$ .

в) Конденсатор, включенный во входную цепь прибора, не пропустит постоянной составляющей. Следовательно, вольтметр В3-40 в обоих случаях покажет действующее значение переменной составляющей  $U_{\sim} = \sqrt{(100/\sqrt{2})^2 + (50/\sqrt{2})^2} = 79,1 \text{ В}$ .

г) Конденсатор, включенный во входную цепь прибора, не пропустит постоянной составляющей. Следовательно, на входе преобразователя действуют напряжения  $u'_{\sim}$  или  $u''_{\sim}$ , которые содержат только 1-ю и 3-ю гармоники (рис. 6.28Р). Прибор покажет среднее по модулю значение указанных напряжений  $u'_{\sim}$  и  $u''_{\sim}$ , умноженное на коэффициент 1,11.

Напряжение  $u'_{\sim}$  не изменяется по знаку в течение полу-периода, следовательно,

$$U'_{\text{ср}\sim} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (100 \sin \omega t + 50 \sin (3\omega t)) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t) d(\omega t) = \\
 &= (100 \cdot 2/\pi) + (3 \cdot 50 \cdot 2/\pi) = 74,3 \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Показание прибора  $U'_{\text{пр}} = 1,11 \cdot 74,3 = 82,4 \text{ В.}$

Напряжение  $u_{\sim}$  в пределах каждого полупериода изменяется по знаку, следовательно,

$$\begin{aligned}
 U''_{\text{ср}\sim} &= \frac{1}{T} \int_0^T |100 \sin \omega t - 50 \sin 3\omega t| dt = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha} (50 \sin 3\omega t - 100 \sin \omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\pi/2} (100 \sin \omega t - \right. \\
 &\left. - 50 \sin 3\omega t) d\omega t \right] = \frac{2}{\pi} \left[ 100 (2 \cos \alpha - 1) + \frac{50}{3} (1 - 2 \cos 3\alpha) \right].
 \end{aligned}$$

Угол  $\alpha$  найдем из условия  $100 \sin \alpha - 50 \sin 3\alpha = 0$ . Учитывая, что  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ , получаем  $\sin \alpha = 0,5$ ;  $\alpha = 30^\circ$  и  $U''_{\text{ср}\sim} = 57,2 \text{ В.}$  Показание прибора  $U''_{\text{пр}} = 1,11 U''_{\text{ср}\sim} = 63,5 \text{ В.}$

д) Конденсатор на входе прибора не пропускает постоянной составляющей. У кривых на рис. 6.28Р (симметричных относительно начала координат)  $u_{\sim \max} = |u_{\sim \min}|$ . Поэтому далее вычислим  $u_{\sim \max}$ .

Для напряжения  $u_{\sim}$  из условия  $du_{\sim}/dt = 100 \cos \omega t + 50 \cdot 3 \cos 3\omega t = 0$  при  $\omega t = \beta$  и, учитывая, что  $\cos 3\omega t = 4 \cos^3 \omega t - 3 \cos \omega t$ , находим угол  $\beta = 40^\circ 15'$ , при котором у напряжения первый максимум

$$u'_{\sim \max} = 100 \sin 40^\circ 15' + 50 \sin 120^\circ 45' = 107,6 \text{ В.}$$

Показание прибора  $U'_{\text{пр}} = 0,707 u'_{\sim \max} = 76,1 \text{ В.}$

Для напряжения  $u''_{\sim}$ , как видно из рис. 6.28Р, б,  $u''_{\sim \max} = 100 + 50 = 150 \text{ В.}$  Следовательно,  $U''_{\text{пр}} = 0,707 u''_{\sim \max} = 106 \text{ В.}$

**6.29.** Найти показания вольтметров задачи 6.28 при измерении напряжений, представленных на рис. 6.29.

**6.30.** Найти показания вольтметров задачи 6.28 при измерении напряжений:

1)  $u' = 10 \sin \omega t + 5 \sin 2\omega t \text{ В;}$  2)  $u'' = 10 \sin \omega t - 5 \sin 2\omega t \text{ В.}$

**6.31.** Вольтметр электромагнитной системы при измерении напряжений (рис. 6.31) показывает 10 В. Найти показания вольтметров других систем, указанных в задаче 6.28.

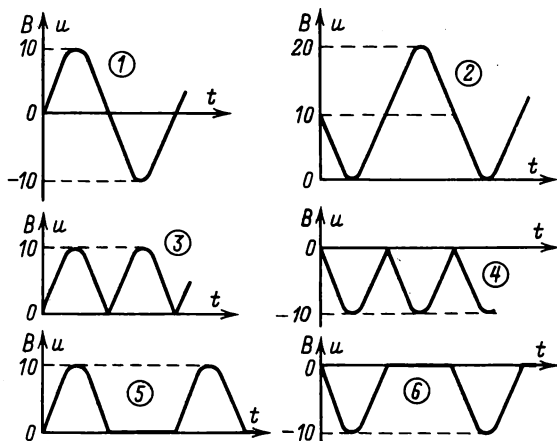


Рис. 6.29

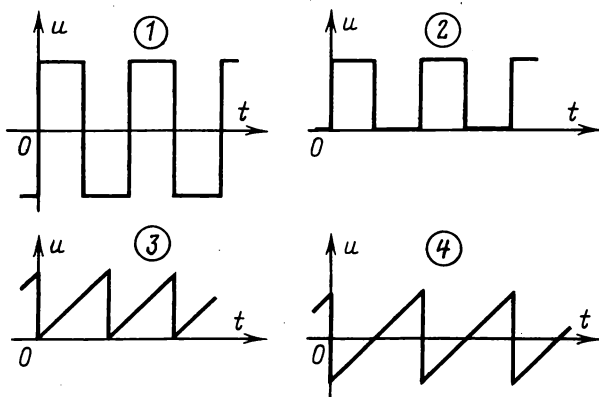


Рис. 6.31

**6.32.** Рассчитать мощность потерь в резисторе с сопротивлением 1 МОм при токах, осциллограммы которых приведены на рис. 6.32, а–е. На рис. 6.32, г длительность положительного импульса равна  $1/3$  периода.

**6.33.** К резистору с сопротивлением 2 кОм приложено периодическое напряжение, изменяющееся по закону

$$u = \begin{cases} 120 - 90e^{-t/\tau_1} \text{ В при } 0 \leq t \leq t_1 = 11,78 \text{ мс;} \\ 70e^{-(t-t_1)/\tau_2} \text{ В при } t_1 < t \leq T = 20,23 \text{ мс.} \end{cases}$$

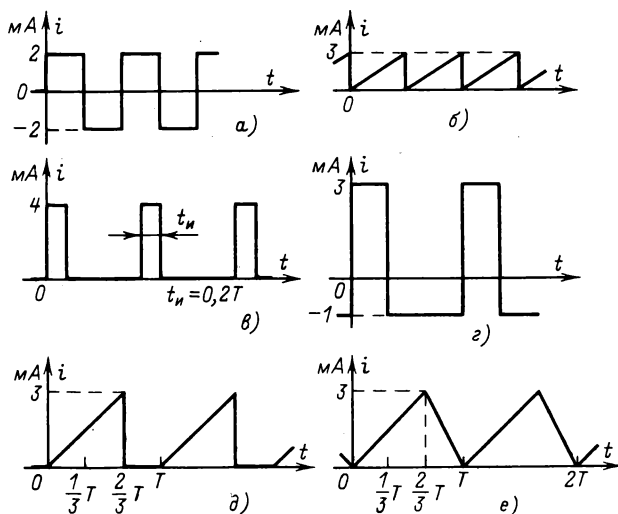


Рис. 6.32

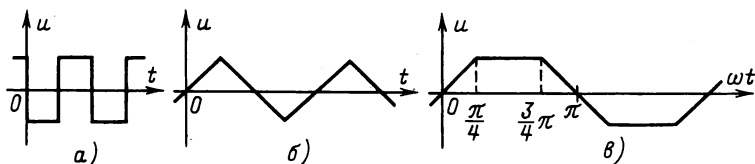


Рис. 6.34

Найти мощность потерь в резисторе, если  $\tau_1 = 0,02$  с;  
 $\tau_2 = 0,01$  с.

**6.34.** Определить коэффициенты формы, амплитуды и искажения для напряжений, представленных на рис. 6.34, а–в.

#### 6.4. Резонанс в цепях несинусоидального тока

**6.35(Р).** Определить, при каких значениях параметров  $C_1$ ,  $C_2$  и  $L_2$  в двухполюснике (рис. 6.35) будут резонансы токов на частотах 1-й и 5-й гармоник и резонанс напряжений на частоте 3-й гармоники, если индуктивность  $L_1 = 0,1$  Гн, частота основной гармоники  $f = 1$  кГц и  $L_2 < L_1$ .

Найти ток в сопротивлении  $r = 200$  Ом при напряжении питания  $u = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$  В и полученных значениях параметров.

**Решение.** Из условий резонансов токов на частотах 1-й и 5-й гармоник следует, что

$$1/L_1 C_1 = \omega^2; \quad (1)$$

$$1/L_2 C_2 = 25\omega^2. \quad (2)$$

Из условия резонанса напряжений на частоте 3-й гармоники следует, что

$$\frac{3\omega L_1/3\omega C_1}{3\omega L_1 - 1/3\omega C_1} + \frac{3\omega L_2/3\omega C_2}{3\omega L_2 - 1/3\omega C_2} = 0,$$

или после преобразований

$$\frac{L_1}{9\omega^2 L_1 C_1 - 1} + \frac{L_2}{9\omega^2 L_2 C_2 - 1} = 0. \quad (3)$$

После подстановки в (3)  $L_1 C_1 = \omega^{-2}$  из (1) и  $L_2 C_2 = \omega^{-2}/25$  из (2) получим  $L_2 = L_1/12,5 = 0,008$  Гн. Если предположить, что  $1/L_1 C_1 = 25\omega^2$  и  $1/L_2 C_2 = \omega^2$ , т. е. что резонанс тока на частоте 1-й гармоники будет в контуре  $L_2, C_2$ , а на частоте 5-й — в контуре  $L_1, C_1$ , то условие задачи  $L_2 < L_1$  не выполняется. Из (1) и (2) найдем  $C_1 = 0,253$  мкФ и  $C_2 = 0,127$  мкФ.

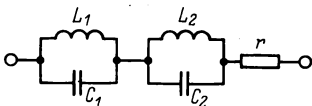


Рис. 6.35

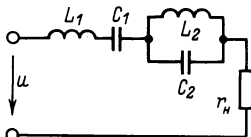


Рис. 6.36

Сопrotивление контура  $L_1, C_1$  бесконечно большое при частоте 1-й гармоники, а контура  $L_2, C_2$  — при частоте 5-й, поэтому в сопротивлении  $r$  нет токов с частотами 1-й и 5-й гармоник. Общее сопротивление контуров  $L_1, C_1$  и  $L_2, C_2$  имеет нулевое сопротивление для 3-й гармоники тока, поэтому  $i = u_3/r = 0,25 \sin 3\omega t$  А.

**6.36.** Показанный на рис. 6.36 электрический фильтр не пропускает в сопротивление нагрузки 5-й гармоники тока и не создает сопротивления 3-й гармонике тока.

Найти напряжение на сопротивлении  $r_n = 1$  кОм при  $L_1 = L_2 = 10$  мГн,  $f = 2$  кГц и  $u = 120 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$  В.

**6.37.** В двухполюснике, изображенном на рис. 6.37, имеет место резонанс напряжений на частотах 1-й и 3-й гармоник и резонанс тока на частоте 2-й гармоники.

Определить параметры  $C_1, C_2$  и  $L_2$ , если  $L_1 = 10$  Гн,  $\omega = 1000$  рад/с и известно, что  $C_1 > C_2$ .

**6.38.** Рассчитать, при каких значениях емкостей  $C_1$  и  $C_2$  двухполюсника (рис. 6.38) на сопротивлении  $r_n$  напряжение  $u_n = 100 \sin \omega t$  В и не зависит от значения сопротивления  $r_n$ .

Дано:  $L_1 = 2,5$  Гн;  $u = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t$  В;  $f = 50$  Гц.

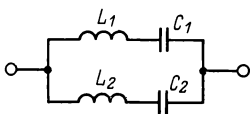


Рис. 6.37

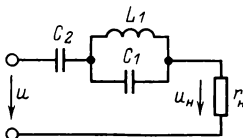


Рис. 6.38

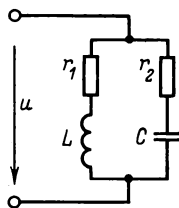
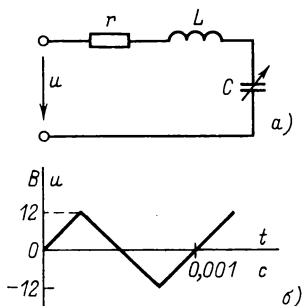


Рис. 6.39

**6.39.** Найти общий ток двухполюсника (рис. 6.39) при резонансе на частоте 1-й гармоники.

Дано:  $\omega L = 10$  Ом;  $1/\omega C = 40$  Ом;  $r = 200$  Ом;  $u = 120 \sin \omega t + 100 \cos 2\omega t + 50 \sin 3\omega t$  В.

**6.40.** Для двухполюсника (рис. 6.40, а) с параметрами  $r = 100$  Ом,  $L = 15,9$  Гн задано напряжение питания в виде треугольных импульсов (рис. 6.40, б).



← Рис. 6.40

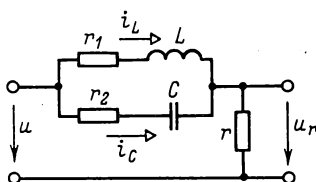


Рис. 6.41

Найти мгновенное и действующее значения тока при условии, что контур настроен в резонанс: 1) на частоте 1-й гармоники; 2) на частоте 3-й гармоники и 3) на частоте 5-й гармоники. При расчете учитывать три первые гармоники разложения в ряд Фурье напряжения питания.

**6.41.** Рассчитать напряжение  $u_r$  и токи  $i_L$ ,  $i_C$  в цепи по рис. 6.41. При определении токов учесть три первые гармоники разложения в ряд Фурье напряжения  $u$  на входе (рис. 6.40, б).

Дано:  $L = 0,1$  Гн;  $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C} = 1$  кОм;  $r = 2$  кОм.

## 6.5. Несинусоидальные режимы симметричных трехфазных цепей

**6.42(Р).** Обмотки симметричного трехфазного генератора соединены звездой. Задано напряжение фазы  $A$ :  $u_A = 100 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t + 15 \sin 5\omega t$  В.

Найти мгновенные значения всех фазных и линейных напряжений и действующие значения фазного и линейного напряжений.

**Решение.** В симметричной цепи 1-е гармоники напряжения образуют систему прямой последовательности (6.12), 3-и — нулевой (6.11), а 5-е — обратной (6.13), следовательно,

$$u_B = 100 \sin(\omega t - 120^\circ) + 20 \sin 3\omega t + 15 \sin(5\omega t + 120^\circ) \text{ В};$$

$$u_C = 100 \sin(\omega t + 120^\circ) + 20 \sin 3\omega t + 15 \sin(5\omega t - 120^\circ) \text{ В}.$$

Линейные напряжения найдем как разность фазных:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB1} &= (100/\sqrt{2}) \angle 0^\circ - (100/\sqrt{2}) \angle -120^\circ = \\ &= (100/\sqrt{2}) \sqrt{3} \angle +30^\circ \text{ В};\end{aligned}$$

$$\dot{U}_{AB3} = (20/\sqrt{2}) \angle 0^\circ - (20/\sqrt{2}) \angle 0^\circ = 0;$$

$$\dot{U}_{AB5} = (15/\sqrt{2}) \angle 0^\circ - (15/\sqrt{2}) \angle +120^\circ = (15/\sqrt{2}) \sqrt{3} \angle -30^\circ \text{ В}.$$

Следовательно,

$$u_{AB} = 173 \sin(\omega t + 30^\circ) + 26 \sin(5\omega t - 30^\circ) \text{ В};$$

$$u_{BC} = 173 \sin(\omega t - 90^\circ) + 26 \sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ В};$$

$$u_{CA} = 173 \sin(\omega t + 150^\circ) + 26 \sin(5\omega t - 150^\circ) \text{ В}.$$

Действующие значения по (6.3):

$$U_\phi = (1/\sqrt{2}) \sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2} = 72,9 \text{ В};$$

$$U_\lambda = (1/\sqrt{2}) \sqrt{173^2 + 26^2} = 123,1 \text{ В}.$$

**6.43.** Три обмотки трехфазного симметричного генератора соединены треугольником.

Найти показание электромагнитного вольтметра, включенного в рассечку треугольника. Известна ЭДС одной из фаз:  $e = 120 \sin \omega t - 10 \sin 3\omega t + 5 \sin 5\omega t + 4 \sin 7\omega t + 3 \sin 9\omega t$  В.

**6.44.** Вторичные обмотки трансформатора соединены треугольником (рис. 6.44). Фазное напряжение  $u_\phi = 120 \sqrt{2} \sin \omega t - 50 \sqrt{2} \sin 3\omega t + 40 \sqrt{2} \sin 5\omega t - 30 \sqrt{2} \sin 7\omega t + 20 \sqrt{2} \sin 9\omega t$  В.

Найти показания вольтметров электромагнитной системы при 1) замкнутом и 2) разомкнутом ключе.

**6.45.** Вторичные обмотки трех одинаковых однофазных трансформаторов соединены треугольником (рис. 6.45). Активное сопротивление каждой обмотки  $r = 5$  Ом, индуктивность  $L = 15,92$  мГн. Фазная ЭДС  $e_{\phi} = 220\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin 3\omega t + 40\sqrt{2} \sin 5\omega t - 30\sqrt{2} \sin 7\omega t + 25\sqrt{2} \sin 9\omega t$  В;  $f = 50$  Гц.

Найти показание амперметра электромагнитной системы.

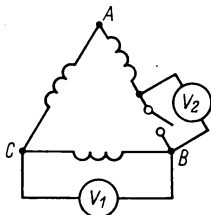


Рис. 6.44

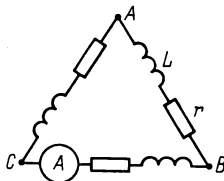


Рис. 6.45

**6.46(P).** Электродвижущая сила фазы A трехфазного симметричного генератора (рис. 6.46)

$$e_A = 120 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t \text{ В.}$$

Пренебрегая внутренним сопротивлением генератора, найти мгновенные значения линейных и фазных токов, показания ваттметров и показания вольтметров и амперметров электромагнитной системы.

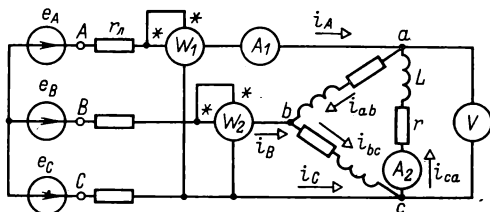


Рис. 6.46

Дано:  $r = 60$  Ом;  $\omega L = 30$  Ом; сопротивление проводов линии  $r_{\text{л}} = 10$  Ом.

**Решение.** Так как 3-и гармоники образуют систему нулевой последовательности, то в схеме рис. 6.46 3-х гармоник токов не будет. Поэтому расчет выполним для 1-й и 5-й гармоник.

Преобразуем сопротивления нагрузки, соединенные треугольником в эквивалентную звезду:

$$\underline{Z}_{\Delta 1} = \underline{Z}_{\Delta 1} / 3 = (20 + j10) = 22,4 \angle 26^\circ 35' \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{\Delta 5} = \underline{Z}_{\Delta 5} / 3 = (20 + j50) = 53,9 \angle 68^\circ 10' \text{ Ом.}$$



### Линейные токи

$$\dot{I}_{A1} = \dot{E}_{A1}/(\underline{Z}_{A1} + r_n) = 120 \angle 0^\circ / \sqrt{2} (30 + j10) = 2,68 \angle -18^\circ 20' \text{ А};$$

$$\dot{I}_{A5} = \dot{E}_{A5}/(\underline{Z}_{A5} + r_n) = 20 \angle 0^\circ / \sqrt{2} (30 + j50) = 0,243 \angle -59^\circ 0' \text{ А}.$$

Амперметр  $A_1$  показывает действующее значение линейного тока  $I_1 = \sqrt{2,68^2 + 0,243^2} = 2,69 \text{ А}$ . Мгновенное значение тока в линейном проводе фазы  $A$

$$i_A = 3,79 \sin(\omega t - 18^\circ 20') + 0,343 \sin(5\omega t - 59^\circ 0') \text{ А}.$$

Учитывая, что  $\dot{I}_{B1} = a^2 \dot{I}_{A1}$ ;  $\dot{I}_{C1} = a \dot{I}_{A1}$  и  $\dot{I}_{B5} = a \dot{I}_{A5}$ ;  $\dot{I}_{C5} = a^2 \dot{I}_{A5}$ , где  $a = 1 \angle 120^\circ$ , получаем:

$$i_B = 3,79 \sin(\omega t - 138^\circ 20') + 0,343 \sin(5\omega t + 61^\circ 0') \text{ А};$$

$$i_C = 3,79 \sin(\omega t + 101^\circ 40') + 0,343 \sin(5\omega t - 179^\circ 0') \text{ А}.$$

Так как  $i_A = i_{ab} - i_{bc}$ , то  $\dot{I}_{A1} = \dot{I}_{ab1} (1 - a) = \dot{I}_{ab1} \sqrt{3} \angle -30^\circ$ , следовательно,  $\dot{I}_{ab1} = (\dot{I}_{A1} / \sqrt{3}) \angle 30^\circ = 1,55 \angle 11^\circ 40' \text{ А}$ . Аналогично  $\dot{I}_{A5} = \dot{I}_{ab5} (1 - a^2) = \dot{I}_{ab5} \sqrt{3} \angle +30^\circ$ , следовательно,  $\dot{I}_{ab5} = (\dot{I}_{A5} / \sqrt{3}) \angle -30^\circ = 0,140 \angle -89^\circ 0' \text{ А}$ .

Амперметр  $A_2$  показывает действующее значение фазного тока  $I_2 = \sqrt{1,55^2 + 0,14^2} = 1,56 \text{ А}$ . Мгновенные значения токов в сопротивлении нагрузки

$$i_{ab} = 2,19 \sin(\omega t + 11^\circ 40') + 0,198 \sin(5\omega t - 89^\circ 0') \text{ А};$$

$$i_{bc} = 2,19 \sin(\omega t - 108^\circ 20') + 0,198 \sin(5\omega t + 31^\circ 0') \text{ А};$$

$$i_{ca} = 2,19 \sin(\omega t + 131^\circ 40') + 0,198 \sin(5\omega t + 151^\circ 0') \text{ А}.$$

Показания ваттметров:

$$P_{W1} = \operatorname{Re}(\dot{U}_{ac1} \dot{I}_{A1}^*) + \operatorname{Re}(\dot{U}_{ac5} \dot{I}_{A5}^*);$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re}(\dot{U}_{bc1} \dot{I}_{B1}^*) + \operatorname{Re}(\dot{U}_{bc5} \dot{I}_{B5}^*),$$

где  $\dot{U}_{ac1} = -\underline{Z}_{A1} \dot{I}_{ca1} = 104 \angle -21^\circ 45' \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{ac5} = -\underline{Z}_{A5} \dot{I}_{ca5} = 22,6 \angle 40^\circ 10' \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{bc1} = \dot{U}_{ac1} \angle -60^\circ = 104 \angle -81^\circ 45' \text{ В}$  и  $\dot{U}_{bc5} = \dot{U}_{ac5} \angle 60^\circ = 22,6 \angle 100^\circ 10' \text{ В}$ , следовательно,

$$P_{W1} = 104 \cdot 2,68 \cos 3^\circ 25' + 22,6 \cdot 0,243 \cos 99^\circ 10' = 277 \text{ Вт};$$

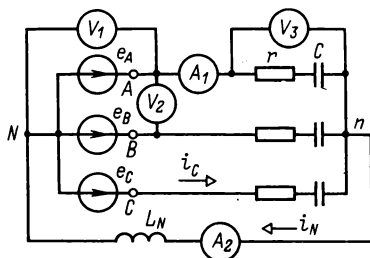
$$P_{W2} = 104 \cdot 2,68 \cos 56^\circ 35' + 22,6 \cdot 0,243 \cos 43^\circ 10' = 157 \text{ Вт}.$$

Баланс активных мощностей:  $P_{W1} + P_{W2} = P_r$ ;  $P_{W1} + P_{W2} = 434 \text{ Вт}$ ;  $P_r = 3(rI_2^2) = 3 \cdot 1,56^2 \cdot 60 = 432 \text{ Вт}$ .

Погрешность расчета меньше 0,5%.

**6.47.** Симметричный трехфазный генератор с фазной ЭДС  $e_A = 120 \sin \omega t + 80 \sin(3\omega t - 45^\circ) + 30 \sin(5\omega t - 90^\circ) \text{ В}$  соединен звездой (рис. 6.47).

Найти мгновенные значения токов  $i_C$ ,  $i_N$ , напряжения  $u_{Bn}$  и показания приборов электромагнитной системы при  $r = 3 \text{ Ом}$ ,  $\omega L_N = 1 \text{ Ом}$ ,  $1/\omega C = 9 \text{ Ом}$ .



← Рис. 6.47

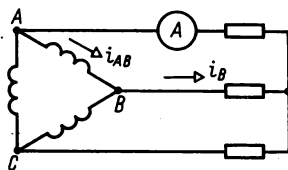


Рис. 6.48

**6.48.** Вторичные обмотки трансформатора симметричной трехфазной системы соединены треугольником, фазы приемника — звездой (рис. 6.48). Известен ток  $i_{AB} = 12 \sin \omega t + 0,5 \sin 3\omega t + 3 \sin 5\omega t \text{ А}$ .

Определить мгновенное значение тока  $i_B$  и показания амперметра электромагнитной системы.

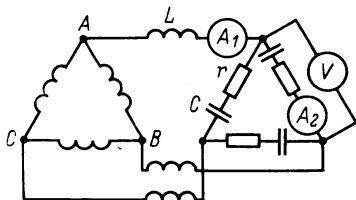


Рис. 6.49

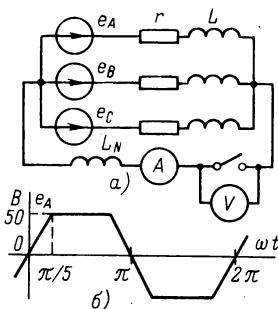


Рис. 6.50 →

**6.49.** Найти показания приборов электромагнитной системы в цепи рис. 6.49 при фазном напряжении генератора  $u_{AB} = 220 \sin \omega t + 80 \sin 5\omega t \text{ В}$  и сопротивлениях  $r = 60 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 1 \text{ Ом}$ ;  $1/\omega C = 75 \text{ Ом}$ .

**6.50.** Найти показание вольтметра (при разомкнутом ключе) и показание амперметра (при замкнутом ключе) в схеме рис. 6.50, а с параметрами  $r = 48 \text{ Ом}$ ,  $\omega L = 4 \text{ Ом}$ ,  $\omega L_N = 4 \text{ Ом}$ .

Фазная ЭДС симметричного трехфазного генератора представлена на рис. 6.50, б. Приборы электромагнитной системы. Учесть все гармоники ЭДС до девятой включительно.

## Глава седьмая

### ФИЛЬТРЫ

#### Введение к гл. 7

Для фильтров-четыреполюсников, собранных из катушек и конденсаторов, потерями в которых можно пренебречь, т.е. для фильтров из реактивных элементов, полоса пропускания (прозрачности) определяется условием

$$A = 0 \quad (7.1)$$

(постоянная ослабления равна нулю).

У симметричных Т-образных (см. рис. 4.3) и П-образных (см. рис. 4.5) фильтров в полосе пропускания продольное  $Z_1 = \pm jz_1$  и поперечное  $Z_2 = \pm jz_2$  сопротивления должны быть разного характера (одно — индуктивное, другое — емкостное) и удовлетворять уравнению

$$-1 \leq -\frac{z_1}{4z_2} \leq 0, \quad (7.2)$$

откуда определяются граничные частоты полосы пропускания при

$$z_1 = 0 \quad \text{или} \quad z_2 = \infty \quad \text{и} \quad z_1 = 4z_2. \quad (7.3)$$

В этой полосе постоянная фазы  $B$  удовлетворяет условию

$$\cos B = 1 - z_1/2z_2 \quad \text{или} \quad \sin(B/2) = \pm \sqrt{z_1/4z_2}. \quad (7.4)$$

В полосе задерживания (непропускания)  $A \neq 0$  и 1)  $\cos B = +1$  ( $B = 0$ ) для полосы частот, в которой  $Z_1$  и  $Z_2$  одинакового характера, или 2)  $\cos B = -1$  ( $B = \pm \pi$ ) для полосы частот, в которой  $Z_1$  и  $Z_2$  разного характера.

В случае 1 постоянная ослабления удовлетворяет условию

$$\operatorname{ch} A = 1 + z_1/2z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}(A/2) = \sqrt{z_1/4z_2}, \quad (7.5)$$

в случае 2 — условию

$$\operatorname{ch} A = -1 + z_1/2z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}(A/2) = \sqrt{z_1/4z_2}. \quad (7.6)$$

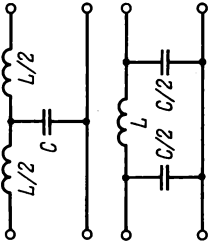
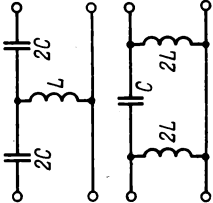
Характеристическое сопротивление рассчитывается по формулам для  $Z_T$  и  $Z_P$ , приведенным в табл. 4.2.

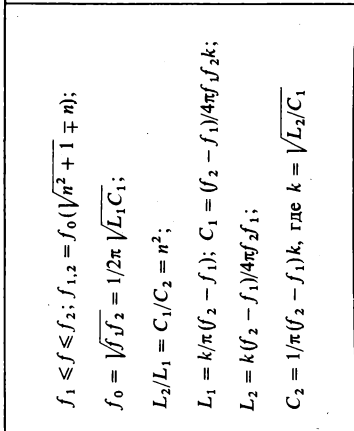
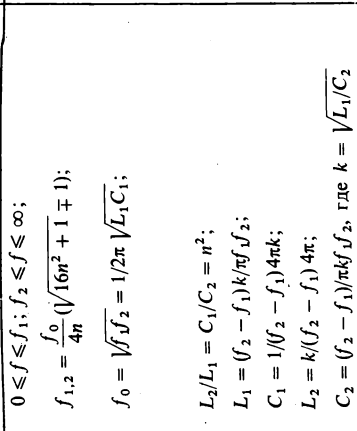
В частности, для фильтров типа  $k$

$$Z_1 Z_2 = k^2, \quad (7.7)$$

где  $k$  — действительное число, т.е.  $Z_1$  и  $Z_2$  — обратные двухполюсники, и, следовательно, они разного характера. Схемы, граничные частоты, частотные зависимости постоянных ослабления и фазы, рассчитанные по (7.3)–(7.6), и параметры фильтров типа  $k$  приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1      Фильтры типа  $k$

Схема и название	Полоса пропускания и параметры	Вторичные параметры
<p>Низкочастотный</p> 	$0 = f_1 \leq f \leq f_2 = 1/\pi\sqrt{LC};$ $L = k/\pi f_2; C = 1/\pi f_2 k, \text{ где } k = \sqrt{L/C}$	$Z_{\pi} = k \sqrt{1 - f^2/f_2^2}; Z_{\Pi} = k/\sqrt{1 - f^2/f_2^2};$ $\operatorname{ch}(A/2) = f/f_2;$ $\cos B = 1 - 2f^2/f_2^2; \sin(B/2) = f/f_2$
<p>Высокочастотный</p> 	$1/4\pi\sqrt{LC} = f_1 \leq f \leq f_2 = \infty;$ $L = k/4\pi f_1; C = 1/4\pi f_1 k, \text{ где } k = \sqrt{L/C}$	$Z_{\pi} = k \sqrt{1 - f_1^2/f^2}; Z_{\Pi} = k/\sqrt{1 - f_1^2/f^2}$ $\operatorname{ch}(A/2) = f_1/f;$ $\cos B = 1 - 2f_1^2/f^2; \sin(B/2) = -f_1/f$

<p>Полосовой (полосный)</p> 	$f_1 \leq f \leq f_2; f_{1,2} = f_0(\sqrt{n^2 + 1} \mp n);$ $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 1/(2\pi \sqrt{L_1 C_1});$ $L_2/L_1 = C_1/C_2 = n^2;$ $L_1 = k/\pi(f_2 - f_1); C_1 = (f_2 - f_1)/(4\pi f_2 f_1);$ $L_2 = k(f_2 - f_1)/(4\pi f_2 f_1);$ $C_2 = 1/\pi(f_2 - f_1)k, \text{ где } k = \sqrt{L_2/C_1}$	$\text{ch } A = \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{2n^2} - 1;$ $\cos B = 1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{2n^2};$ $\underline{Z}_T = k \sqrt{1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{4n^2}};$ $\underline{Z}_\Pi = k/\sqrt{1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{4n^2}}$
<p>Заграждающий</p> 	$0 \leq f \leq f_1; f_2 \leq f \leq \infty;$ $f_{1,2} = \frac{f_0}{4n}(\sqrt{16n^2 + 1} \mp 1);$ $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 1/(2\pi \sqrt{L_1 C_1});$ $L_2/L_1 = C_1/C_2 = n^2;$ $L_1 = (f_2 - f_1)k/\pi f_2 f_1;$ $C_1 = 1/(f_2 - f_1)4\pi k;$ $L_2 = k(f_2 - f_1)4\pi;$ $C_2 = (f_2 - f_1)/\pi k f_2, \text{ где } k = \sqrt{L_1/C_1}$	$\text{ch } A = \frac{1}{2n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2} - 1;$ $\cos B = 1 - \frac{1}{2n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2};$ $\underline{Z}_T = k \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2}};$ $\underline{Z}_\Pi = k/\sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2}}$

Простейшие несимметричные фильтры собираются по Г-образной схеме (рис. 4.14), у которой два характеристических сопротивления:  $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{\Pi}$  и  $\underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{\Gamma}$  (см. табл. 4.3), а постоянные ослабления и фазы вдвое меньше, чем у Т- и П-образных схем.

Для последовательно-производных фильтров типа  $m$

$$\underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1; \quad \underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{(1 - m^2) \underline{Z}_1}{4m}, \quad (7.8)$$

где  $m$  — действительный коэффициент, удовлетворяющий условию  $0 < m < 1$ .

Для параллельно-производных фильтров типа  $m$

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m}; \quad \frac{2}{\underline{Z}_{1m}} = \frac{2}{m\underline{Z}_1} + \frac{(1 - m^2)}{2m\underline{Z}_2}. \quad (7.9)$$

Характеристические сопротивления фильтра типа  $m$

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{\Pi m} &= \sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \underline{Z}_{1m}/4\underline{Z}_{2m}}}; \\ \underline{Z}_{\Gamma m} &= \sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}} \sqrt{1 + \underline{Z}_{1m}/4\underline{Z}_{2m}} \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

причем у последовательно-производного фильтра  $\underline{Z}_{\Gamma m} = \underline{Z}_{\Gamma}$ , а у параллельно-производного  $\underline{Z}_{\Pi m} = \underline{Z}_{\Pi}$ .

Полоса пропускания совпадает с полосой пропускания соответствующего фильтра типа  $k$ . В полосе задерживания постоянная ослабления может быть вычислена по (7.5) и (7.6) после замены  $z_1$  и  $z_2$  на  $z_{1m}$  и  $z_{2m}$ .

Для мостового фильтра-четырёхполюсника (см. рис. 4.15), собранного из реактивных элементов  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ , полоса пропускания, определяемая по (7.1), получается в диапазоне частот, для которых сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  разного характера. Граничные частоты задаются условиями

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = 0. \quad (7.11)$$

Постоянная фазы удовлетворяет условию

$$\cos B = (\pm z_2 \mp z_1)/(\pm z_2 \pm z_1). \quad (7.12)$$

В полосе задерживания сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  одинакового характера. Постоянная ослабления удовлетворяет условию

$$\operatorname{ch} A = |(z_2 + z_1)/(z_2 - z_1)|, \quad (7.13)$$

а постоянная фазы — условию  $\cos B = \pm 1$ . Характеристическое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}. \quad (7.14)$$

## 7.1. Фильтры типа $k$

**7.1(Р).** Составить Т-образную схему низкочастотного фильтра типа  $k$ , у которого номинальное значение характеристического сопротивления в полосе пропускания равно 600 Ом и постоянная ослабления на частоте 100 Гц равна 40 дБ. При этой же частоте определить постоянные фазы и передачи, отношение напряжений на входе и выходе при согласованной нагрузке и граничные частоты.

**Решение.** За номинальное значение характеристического сопротивления фильтров типа  $k$  принято считать характеристическое сопротивление, равное параметру  $k$ , т.е. определяемое по (7.7):  $k = \sqrt{Z_1 Z_2}$ . Такое активное характеристическое сопротивление фильтр имеет при одной из частот полосы пропускания.

Для низкочастотного фильтра  $Z_1 = j\omega L$  и  $Z_2 = -j1/\omega C$ , т.е.  $k = \sqrt{L/C}$ , и по условию задачи

$$600 = \sqrt{L/C}. \quad (1)$$

Постоянная ослабления для фильтров типа  $k$  определяется по (7.6), т.е. при  $z_1 = \omega L$  и  $z_2 = 1/\omega C$  имеем:

$$\text{ch } A = -1 + \omega^2 LC/2, \quad (2)$$

где  $A = 40$  дБ  $= 4,6$  Нп;  $\text{ch } A = 49,75$ ;  $\omega = 2\pi f = 628$  рад/с.

Из двух уравнений (1) и (2) получается  $L/2 = 4,8$  Гн и  $C = 26,6$  мкФ. Схема фильтра показана в табл. 7.1.

Постоянная ослабления задана (4,6 Нп), постоянная фазы  $\beta$  в полосе пропускания для низкочастотных фильтров типа  $k$  равна  $\pi$ . Поэтому постоянная передачи  $\Gamma = A + jB = 4,6 + j3,14$ .

При согласованной нагрузке по (4.26)  $A = 20 \lg (U_1/U_2)$ , т.е. при  $A = 40$  дБ  $U_1/U_2 = 100$  (полоса задерживания).

Фильтр низкочастотный, поэтому первая граничная частота  $f_1 = 0$  ( $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$ ), вторая граничная частота по (7.3) определяется из уравнения  $2\pi f_2 L = 4/2\pi f_2 C$ , откуда  $f_2 = 20$  Гц.

Пользуясь табл. 7.1, можно сначала определить граничную частоту  $f_2$  из формулы  $\text{ch}(A/2) = f/f_2$ , где  $A = 4,6$  Нп и  $f_2 = 20$  Гц, затем индуктивность и емкость по формулам  $L = k/\pi f_2$  и  $C = 1/\pi f_2 k$ .

**7.2(Р).** Известны параметры Т-образного низкочастотного фильтра типа  $k$ : индуктивность  $L = 9,6$  Гн и емкость  $C = 26,6$  мкФ. Сопротивление нагрузки фильтра  $r_n = \sqrt{L/C} = 600$  Ом (постоянное), так что режим согласованной нагрузки получается только на одной частоте полосы пропускания.

Определить отношение напряжений на входе и выходе фильтра на граничной частоте 20 Гц и на частоте 100 Гц и сравнить их с отношением напряжений при согласованной нагрузке.

Построить график зависимости отношения  $U_1/U_2$  от частоты при постоянном сопротивлении нагрузки  $r_n$ . По графику определить полосу пропускания, считая, что фильтр пропускает при условии  $U_2 \geq U_1/\sqrt{2}$ . На этом же графике построить зависимость отношения  $U_1/U_2$  от частоты при согласованной нагрузке. Какое заключение о фильтрующих свойствах схемы при постоянном сопротивлении нагрузки по сравнению со случаем согласованной нагрузки можно сделать, сравнивая построенные кривые?

Решение. При согласованной нагрузке четырехполюсника и, в частности, фильтра отношение напряжений на входе и на выходе определяется постоянной ослабления по (4.26).

Для Т-образного низкочастотного фильтра типа  $k$  характеристическое сопротивление  $Z_T$  (согласованная нагрузка) может быть найдено, как и для любого симметричного Т-образного четырехполюсника, по формуле (см. табл. 4.2)

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 (1 + Z_1/4Z_2)},$$

которая получена из (4.22) и в которой  $Z_1 = j\omega L$  и  $Z_2 = -j1/\omega C$ .

Характеристическое сопротивление можно вычислить и по формуле (табл. 7.1)

$$Z_T = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - f^2/f_2^2},$$

где  $f_2 = 1/\pi\sqrt{LC} = 20$  Гц — граничная частота. При этой частоте  $Z_T = 0$ ; при частоте 100 Гц (в полосе задерживания)  $Z_T$  — реактивное сопротивление. Следовательно, при заданном активном сопротивлении нагрузки  $r_n = 600$  Ом фильтр на частотах 20 и 100 Гц не работает в режиме согласованной нагрузки и отношение напряжений на входе и выходе не определяется по формулам (4.26).

Отношение напряжений можно найти, как и для всякого четырехполюсника при заданном сопротивлении нагрузки, при помощи уравнений четырехполюсника, справедливых при любом сопротивлении нагрузки. Например, по первому уравнению (4.1)

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2 = (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/r_n)\dot{U}_2.$$

Для Т-образного симметричного четырехполюсника коэф-



коэффициенты (см. табл. 4.2) равны:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = 1 - 2 \frac{f^2}{f_2^2} - \text{действительный};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right) = j2\pi fL \left( 1 - \frac{f^2}{f_2^2} \right) - \text{мнимый};$$

$\underline{A}_{12}/r_n$  — мнимая величина, поэтому

$$U_1/U_2 = \sqrt{A_{11}^2 + (|\underline{A}_{12}|/r_n)^2}. \quad (1)$$

При  $f = f_2 = 20$  Гц получаем  $\underline{A}_{11} = -1$ ;  $\underline{A}_{12} = 0$ , т. е.  $U_1 = U_2$ . При  $f = 100$  Гц получаем  $\underline{A}_{11} = -49$ ;  $\underline{A}_{12} = -j14,5 \cdot 10^4$  Ом и  $U_1/U_2 = 246$ .

При согласованной нагрузке на граничной частоте, как и во всей полосе пропускания,  $A = 0$ , т. е.  $U_1 = U_2$  (теорети-

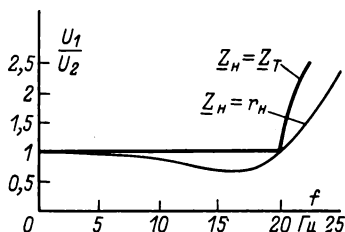


Рис. 7.2Р

чески, так как при этой частоте сопротивление согласованной нагрузки  $\underline{Z}_T = 0$  и  $\underline{Z}_{вх} = 0$ ). При частоте 100 Гц из формулы (табл. 7.1)  $\text{ch}(A/2) = f/f_2 = 5$  получаем  $A = 4,6$  Нп  $= 4,6 \cdot 8,7 = 40$  дБ, и так как по (4.26)  $A = 20 \lg(U_1/U_2)$  дБ, то  $U_1/U_2 = 100$ .

График зависимости отношения  $U_1/U_2$  от частоты при  $\underline{Z}_n = r_n = 600$  Ом, построенный по (1), и график этой же зависимости при  $\underline{Z}_n = \underline{Z}_T$ , построенный по (4.26), представлены на рис. 7.2Р. Из графиков следует, что при  $r_n = 600$  Ом и поставленном условии  $U_2 \geq U_1/\sqrt{2}$ , т. е.  $U_1/U_2 \leq \sqrt{2}$ , граничная частота равна 22 Гц и в полосе задерживания фильтрующие свойства хуже, чем при согласованной нагрузке ( $U_1/U_2$  меньше).

7.3. Решить задачу 7.1, заменив Т-образную схему низкочастотного фильтра П-образной.

7.4. Для разделения входной и выходной цепей в аппаратуре высокочастотного телефонирования применяется низкочастотный П-образный фильтр типа  $k$ .

Определить индуктивность катушки и емкость каждого конденсатора фильтра с нижней граничной частотой 25 кГц, если входное сопротивление фильтра в полосе пропускания при согласованной нагрузке должно быть не менее 800 Ом. Вычислить постоянную ослабления фильтра при частоте 50 кГц.

7.5. Низкочастотный П-образный фильтр типа  $k$  с номинальным значением характеристического сопротивления в по-

лосе пропускания 600 Ом и постоянной ослабления на частоте 100 Гц, равной 40 дБ, работает в режиме холостого хода.

Найти отношение напряжений на входе и выходе при частотах  $f = 0; 0,4f_2; 0,8f_2; f_2; 1,2f_2$ , где  $f_2$  — верхняя граничная частота. Построить график зависимости отношения напряжений на входе и выходе  $U_1/U_2$  от частоты в режиме холостого хода. По графику определить полосу пропускания, считая, что фильтр пропускает при  $U_2 \geq U_1/\sqrt{2}$ .

**7.6(Р).** Высокочастотный П-образный фильтр состоит из двух звеньев типа  $k$  с параметрами  $L = 20$  мГн,  $C = 2$  мкФ.

Определить полосу пропускания фильтра и постоянную передачи при угловой частоте  $\omega = 1250$  рад/с. При частоте  $\omega = 5000$  рад/с, напряжении на входе 100 В и согласованной нагрузке найти ток на входе.

**Решение.** Полоса пропускания фильтра совпадает с полосой пропускания одного звена, схема которого приведена в табл. 7.1, причем продольное сопротивление  $\underline{Z}_1 = -j1/\omega C$  и поперечное  $\underline{Z}_2 = j\omega L$ .

Граничные частоты определяются по (7.3) или по формулам табл. 7.1:  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 1/2\sqrt{LC} = 2500$  рад/с,  $\omega_2 = \infty$ .

В полосе задерживания при частоте  $\omega = 1250$  рад/с постоянная ослабления одного звена определяется по (7.6) или по формулам табл. 7.1:  $\text{ch}(A/2) = f_1/f = \omega_1/\omega = 2$ , откуда  $A = 2,64$  Нп, а постоянная фазы  $B = \pm\pi$ . Для фильтра из двух звеньев постоянные в 2 раза больше.

При согласованной нагрузке симметричного четырехполюсника входное сопротивление равно характеристическому. Для фильтра, состоящего из двух одинаковых звеньев, характеристическое сопротивление равно характеристическому сопротивлению одного звена, поэтому  $I_1 = U_1/z_{\Pi}$ , где характеристическое сопротивление находится по формулам табл. 4.2 или 7.1:  $\underline{Z}_{\Pi} = z_{\Pi} = 100/(\sqrt{3}/2)$  Ом и  $I_1 = \sqrt{3}/2$  А.

**7.7.** У фильтра задачи 7.6 известен выходной ток первого звена  $\dot{I}_{1,2} = 1$  А. При частоте  $\omega = 5000$  рад/с и согласованной нагрузке фильтра найти напряжение  $U_{1,2}$  между звеньями, отношение напряжений на входе и выходе звена и сдвиг по фазе между ними.

**7.8.** Сопротивление нагрузки фильтра задачи 7.6 постоянно:  $\underline{Z}_n = r_n = 100$  Ом. Напряжение на входе равно 100 В. Определить напряжение на выходе при частотах 1000 и 5000 рад/с.

**7.9.** Из двух конденсаторов емкостью 4 нФ каждый и катушки с индуктивностью 0,34 мГн, потерями в которых можно пренебречь, сначала собрали низкочастотный фильтр, а затем высокочастотный.

Сравнить полосы пропускания этих фильтров, а также постоянные ослабления на двух частотах: 1) 120 кГц, 2) 240 кГц (при согласованной нагрузке).

**7.10.** Высокочастотный Т-образный фильтр типа  $k$  собран из двух конденсаторов емкостью 4 нФ каждый и катушки с индуктивностью 0,34 мГн, потерями в которых можно пренебречь.

Определить, при какой частоте сопротивление согласованной нагрузки активное и равно 300 Ом.

**7.11.** Высокочастотный П-образный фильтр типа  $k$  с граничной частотой 96 кГц применяется для подавления мешающего сигнала на частоте 64 кГц и пропускания сигналов более высоких частот. Емкость конденсатора фильтра равна  $4 \cdot 10^3$  пФ.

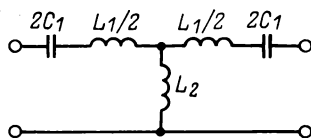


Рис. 7.12Р

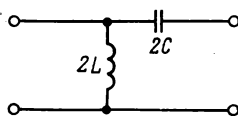


Рис. 7.14

Найти индуктивность каждой катушки фильтра. Определить, достаточно ли одного звена для уменьшения уровня мешающего сигнала на 40 дБ, а если нет, то из скольких звеньев должен быть собран фильтр.

**7.12(Р).** Полосовой Т-образный фильтр типа  $k$  имеет следующие параметры:  $L_1 = 10$  мГн;  $C_1 = 0,2$  мкФ;  $L_2 = 10$  мГн;  $C_2 = 0,2$  мкФ. При сборке фильтра конденсатор  $C_2$  не был присоединен.

Определить, как при этом изменилась полоса пропускания фильтра.

Решение. Для полосового фильтра типа  $k$  граничные частоты рассчитываются по (7.3) или по формулам табл. 7.1:

$$f_{1,2} = f_0 (\sqrt{n^2 + 1} \mp n),$$

где  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{L_1 C_1} = 1/2\pi \sqrt{L_2 C_2}$ ;  $n^2 = L_2/L_1 = C_1/C_2$ .

При заданных параметрах  $f_0 = 3,55$  кГц;  $n^2 = 1$ ;  $f_1 = 1,45$  кГц;  $f_2 = 8,55$  кГц.

Схема фильтра без конденсатора  $C_2$  показана на рис. 7.12Р. Продольное сопротивление  $Z_1 = j(\omega L - j1/\omega C)$ , поперечное  $Z_2 = j\omega L$ , где обозначено  $L = L_1 = L_2$ ;  $C = C_1$ .

Из условия (7.3) находим граничные частоты:  $z_1 = |\omega L - 1/\omega C| = 0$ , откуда  $f = f_2 = f_0 = 3,55$  кГц;  $z_1 = 4z_2$  или  $|\omega L -$

$-1/\omega C| = 4\omega L$ , откуда  $f = f_1 = f_0/\sqrt{5} = 1,58$  кГц. Условие  $z_2 = \infty$ , т.е.  $\omega_2 = \infty$  не подходит, так как дает значение, большее 3,55 кГц.

**7.13.** Заграждающий Т-образный фильтр типа  $k$  содержит три катушки и три конденсатора, потерями в которых можно пренебречь. Индуктивности двух катушек равны по 18 мГн, емкости двух конденсаторов — по 0,04 мкФ, параметр  $k = 600$  Ом.

Найти индуктивность третьей катушки и емкость третьего конденсатора, а также ширину полосы задерживания.

**7.14(P).** Найти полосу пропускания и зависимость постоянной ослабления  $A_\Gamma$  от частоты для Г-образного высокочастотного фильтра (рис. 7.14). Сравнить  $A_\Gamma$  с постоянной ослабления высокочастотного П- или Т-образного фильтра типа  $k$ .

Решение. Из двух Г-образных четырехполюсников (рис. 4.14) каскадным соединением можно составить Т-образную схему (рис. 4.3) или П-образную (рис. 4.5). Полоса пропускания Т- или П-образного фильтра получается такой же, как и у Г-образного, так как соединение выполняется с соблюдением согласования, т.е. для высокочастотного фильтра (табл. 7.1)  $f_1 = 1/4\pi\sqrt{LC}$ ;  $f_2 = \infty$ . Постоянная ослабления Г-образного фильтра (полузвена) вдвое меньше, чем у Т- или П-образного (звена), т.е. определяется (см. табл. 7.1) по формуле  $\text{ch } A_\Gamma = f_1/f$ .

**7.15.** У П-образного высокочастотного фильтра с параметрами  $L = 2$  мГн,  $C = 2$  мкФ отпаялся провод, присоединяющий одну из катушек.

Определить, как изменится граничная частота фильтра.

**7.16.** Для Т-образного низкочастотного фильтра типа  $k$  определить, при какой частоте полосы задерживания характеристическое сопротивление по модулю равно параметру  $k = \sqrt{L/C}$ . Найти постоянную ослабления фильтра при этой частоте и частоту, начиная с которой постоянная ослабления больше 2,2 Нп.

**7.17.** В системе связи по распределительным электрическим сетям передающую и приемную аппаратуру защищают

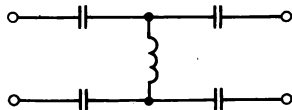


Рис. 7.17

от напряжения сети 500 В уравновешенным Т-образным высокочастотным фильтром типа  $k$  (рис. 7.17). Емкость каждого конденсатора фильтра 0,15 мкФ, характеристическое сопротивление с увеличением частоты приближается к значению 600 Ом.

Найти граничную частоту фильтра, постоянную ослабления на частоте сети и напряжение сети на выходе фильтра, считая нагрузку согласованной.

**7.18(Р).** На вход П-образного низкочастотного фильтра типа  $k$  с параметрами  $L = 0,956$  мГн,  $C = 26,6 \cdot 10^2$  пФ (граничная частота 200 кГц,  $k = 600$  Ом) подается сигнал, модулированный по амплитуде:  $u = U_{1m}(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$ , где  $U_{1m} = 1$  В и коэффициент модуляции  $m = 1$ .

Найти напряжение на выходе фильтра при модулирующей частоте  $F = \Omega/2\pi = 10$  кГц и несущих частотах 1)  $f_{н1} = \omega_1/2\pi = 150$  кГц; 2)  $f_{н2} = 200$  кГц и 3)  $f_{н3} = 250$  кГц, считая сопротивление нагрузки согласованным на каждой из частот.

**Решение.** Напряжение на входе можно представить в виде суммы трех гармоник: нижней боковой, несущей и верхней боковой:

$$u_1 = (1 + \cos \Omega t) \cos \omega t = 0,5 \cos (\omega - \Omega) t + \\ + 1 \cos \omega t + 0,5 \cos (\omega + \Omega) t.$$

1) При согласованной нагрузке и  $f_{н1} = 150$  кГц все три гармоники попадают в полосу пропускания фильтра, поэтому постоянная ослабления  $A = 0$ , т.е. амплитудных искажений нет. Сдвиг по фазе любой гармоники определяется постоянной фазы В. Для низкочастотного фильтра (см. табл. 7.1) в полосе пропускания  $\sin(B/2) = f/f_2$  и при частотах  $f = f_{н1} - F = 140$  кГц,  $f = f_{н1} = 150$  кГц и  $f = f_{н1} + F = 160$  кГц постоянная фазы соответственно равна 89, 97 и 106°, поэтому

$$u_2 = 0,5 \cos (2\pi \cdot 140 \cdot 10^3 t - 89^\circ) + 1 \cos (2\pi \cdot 150 \cdot 10^3 t - 97^\circ) + \\ + 0,5 \cos (2\pi \cdot 160 \cdot 10^3 t - 106^\circ) \text{ В.}$$

Так как постоянная фазы не пропорциональна частоте, то фазовые искажения есть.

2) При  $f_{н2} = 200$  кГц нижняя боковая и несущая находятся в полосе пропускания; для них  $A = 0$ . Верхняя боковая попадает в полосу задерживания. Постоянную ослабления на этой частоте найдем по формуле  $\text{ch}(A/2) = f/f_2$ . При  $f = f_{н2} + F = 210$  кГц получаем  $A = \ln(U_1/U_2) = 0,66$  Нп и  $U_1 = 1,95U_2$ . Постоянная фазы при частоте  $f = f_{н2} - F = 190$  кГц равна 144°, а при граничной частоте  $f = f_{н2} = 200$  кГц и в полосе задерживания при частоте  $f = f_{н2} + F = 210$  кГц не изменяется и равна 180°, следовательно,

$$u_2 = 0,5 \cos (2\pi \cdot 190 \cdot 10^3 t - 144^\circ) + 1 \cos (2\pi \cdot 200 \cdot 10^3 t - 180^\circ) + \\ + 0,26 \cos (2\pi \cdot 210 \cdot 10^3 t - 180^\circ) \text{ В.}$$

3) Для третьего сигнала, спектр которого целиком находится в полосе задерживания (подавляемый сигнал), проводим расчет так же, как и для верхней боковой в случае 2:

$f$ . . . . .	$f_{н3} - F$	$f_{н3}$	$f_{н3} + F$
$A, \text{ Нп}$ . . . . .	1,24	1,38	1,51
$U_1/U_2$ . . . . .	3,47	3,98	4,54

## 7.2. Другие типы фильтров

**7.19(Р).** Заданы параметры последовательно-производного полузвена типа  $m$  высокочастотного фильтра:  $k = 400 \text{ Ом}$ ,  $m = 0,6$ .

Составить схему фильтра и найти индуктивности и емкости его катушек и конденсаторов, если необходимо иметь постоянную ослабления, равную  $\infty$ , на частоте  $50 \text{ кГц}$ .

**Решение.** Схема Г-образного полузвена типа  $m$  показана на рис. 7.19Р, а, где  $Z_{1m}$  и  $Z_{2m}$  рассчитываются по (7.8), причем для высокочастотного фильтра (см. табл. 7.1)  $Z_1 = -j1/\omega C$ ,  $Z_2 = j\omega L$  и

$$k = \sqrt{L/C}. \quad (1)$$

Постоянная ослабления  $A$  для Т- или П-образного звена, т.е.  $A/2$  для Г-образного, как и для фильтров типа  $k$ , определяется по (7.5) или (7.6) после замены  $z_1$  и  $z_2$  на  $z_{1m}$  и  $z_{2m}$ , т.е.

$$\text{sh} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{z_{1m}}{4z_{2m}}} \quad \text{или} \quad \text{ch} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{z_{1m}}{4z_{2m}}}.$$

В обоих случаях  $A = \infty$  при  $z_{2m} = 0$  или по (7.8)

$$4Z_2 + (1 - m^2)Z_1 = 0 \quad \text{или} \quad 4\omega_\infty L = (1 - m^2)/\omega_\infty C,$$

откуда

$$f_\infty = \sqrt{1 - m^2} f_1, \quad (2)$$

где  $f_1 = 1/4\pi\sqrt{LC}$  — граничная частота, одинаковая для фильтров типов  $k$  и  $m$ . Из (1) и (2) при  $k = 400$  и  $f_\infty = 50 \text{ кГц}$  получаем:  $L = 50,7 \text{ мкГн}$ ;  $C = 31,7 \text{ нФ}$ .

Продольное сопротивление последовательно-производного фильтра

$$Z_{1m} = mZ_1 = -j \frac{m}{\omega C} = -j \frac{1}{\omega C_{1m}},$$

где  $C_{1m} = C/m = 31,7/0,6 = 52,8 \text{ нФ}$ .

Поперечное сопротивление по (7.8)

$$Z_{2m} = \frac{j\omega L}{m} + \frac{1 - m^2}{4m} \left( -j \frac{1}{\omega C} \right),$$

т.е. состоит из последовательно соединенных  $L_{2m} = L/m = 84,5$  мкГн и  $C_{2m} = 4mC/(1 - m^2) = 119$  нФ. Схема фильтра показана на рис. 7.19Р, б.

**7.20.** Для П-образного низкочастотного последовательно-производного фильтра типа  $m$  при  $L = 31,8$  мкГн;  $C = 200$  пФ и  $m = 0,5$  найти: 1) граничные частоты; 2) частоту, при которой постоянная ослабления бесконечно велика; 3) частоты, при которых  $z_{Пм} = \sqrt{L/C}$ .

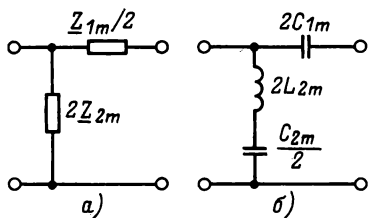


Рис. 7.19Р

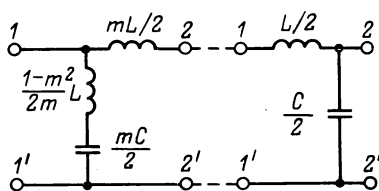


Рис. 7.21

**7.21.** Определить постоянную ослабления каскадного соединения Г-образных полувеньев типа  $m$  и типа  $k$ , выполненного по принципу согласования (рис. 7.21), на частоте 4,4 МГц, если  $L = 31,8$  мкГн;  $C = 200$  пФ;  $m = 0,5$ . Найти, во сколько раз при этой частоте и согласованной нагрузке напряжение на выходе соединения меньше, чем на входе.

**7.22.** Г-образные полувенья задачи 7.21 поменяли местами (к вторичным выводам полувенья типа  $k$  присоединили первичные полувенья типа  $m$ ).

Определить, останется ли постоянная ослабления соединения прежней.

**7.23.** Для П-образного низкочастотного фильтра типа  $k$  с параметрами  $L = 0,2$  Гн и  $C = 0,1$  мкФ составить параллельно-производное Г-образное полувенью типа  $m$ . Найти индуктивности и емкости составляющих его катушек и конденсаторов при  $m = 0,5$ .

**7.24.** Для Г-образного высокочастотного параллельно-производного полувенья типа  $m$  известны параметры:  $k = 400$  Ом и  $m = 0,6$ .

Составить схему фильтра и найти индуктивности и емкости его катушек и конденсаторов, если необходимо получить бесконечно большую постоянную ослабления на частоте 50 кГц.

**7.25.** Для мостового фильтра по рис. 7.25 с параметрами  $L_1 = 40$  мГн;  $L_2 = 20$  мГн;  $C_1 = 0,04$  мкФ найти полосу пропускания. Определить, при какой частоте постоянная ослабления фильтра бесконечно велика и как изменится полоса про-

пускания, если поменять местами ветви с сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ .

7.26. Для мостового фильтра задачи 7.25 найти характеристическое сопротивление: 1) на средней частоте полосы пропускания, 2) на частоте, при которой постоянная ослабления бесконечно велика.

7.27. У мостового фильтра задачи 7.25 закоротили индуктивности  $L_1$ . Как изменится полоса пропускания?

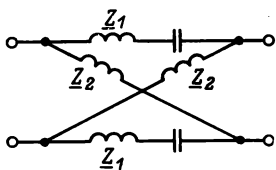


Рис. 7.25

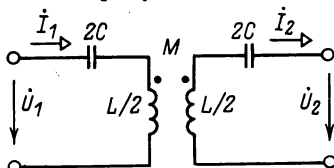


Рис. 7.28

7.28(Р). Схема полосового фильтра, состоящего из двух индуктивно связанных контуров, потерями в которых можно пренебречь, показана на рис. 7.28. Известны параметры фильтра:  $L/2 = 5$  мкГн;  $2C = 40$  пФ;  $M = 1$  мкГн.

Определить полосу пропускания фильтра и характеристическое сопротивление при частоте  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 11,25$  МГц.

Решение. Запишем уравнения цепи при отсутствии сопротивления нагрузки:

$$\dot{U}_{1x} = \dot{I}_{1x} \underline{Z}_1 / 2; \quad 0 = \dot{U}_{2x} - \dot{I}_{1x} \underline{Z}_M,$$

где  $\underline{Z}_1 = j(\omega L - 1/\omega C)$ ;  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

По определению для симметричного четырехполюсника и, в частности, фильтра по рис. 7.28

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \operatorname{ch}(A + jB) = \underline{A}_{11} = \dot{U}_{1x} / \dot{U}_{2x}$$

или с учетом уравнений цепи  $\operatorname{ch} A \cos B + j \operatorname{sh} A \sin B = \underline{Z}_1 / 2 \underline{Z}_M = (\omega L - 1/\omega C) / 2\omega M$  — действительная величина.

В полосе пропускания  $A = 0$ , т. е.  $\operatorname{ch} A = 1$  и  $\operatorname{sh} A = 0$ . Следовательно,

$$\cos B = (\omega L - 1/\omega C) / 2\omega M. \quad (1)$$

Граничные значения  $\cos B = \pm 1$  определяют полосу пропускания. При  $\cos B = -1$  из (1) находим, что

$$\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{LC(1 + k_{св})} = 64,5 \cdot 10^6 \text{ рад/с},$$

где  $k_{св} = M/\sqrt{L_1 L_2} = 2M/L = 0,2$ . При  $\cos B = +1$  получаем:

$$\omega = \omega_2 = 1/\sqrt{LC(1 - k_{св})} = 78,7 \cdot 10^6 \text{ рад/с},$$



откуда граничные частоты полосы пропускания  $f_1 = 10,25$  МГц;  $f_2 = 12,55$  МГц.

Характеристическое сопротивление симметричного четырехполосника определяется по (4.22). Входное сопротивление фильтра при разомкнутых вторичных выводах  $\underline{Z}_x = \underline{Z}_1/2$ , а при короткозамкнутых определяется из уравнений

$$\dot{U}_{1к} = \dot{I}_{1к}Z_1/2 - \dot{I}_{2к}Z_M; \quad 0 = \dot{I}_{2к}Z_1/2 - \dot{I}_{1к}Z_M,$$

откуда  $\underline{Z}_к = \dot{U}_{1к}/\dot{I}_{1к} = \underline{Z}_1/2 - 2\underline{Z}_M^2/\underline{Z}_1$ .

Подставив  $\underline{Z}_к$  и  $\underline{Z}_x$  в (4.22), получим:  $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1^2/4 - \underline{Z}_M^2}$ .

При частоте  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  сопротивление  $\underline{Z}_1 = 0$  и  $\underline{Z}_c = = \omega_0 M = \frac{k_{св}}{2} \sqrt{L/C} = 70,7$  Ом.

Задачу можно также решить, составив эквивалентную схему фильтра без индуктивной связи.

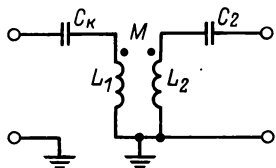


Рис. 7.29

7.29. На рис. 7.29 показан фильтр присоединения с конденсатором связи  $C_k$ . При помощи такого фильтра высокочастотную аппаратуру подключают к линии электропередачи, по которой передаются сигналы телемеханики и связи. Известны параметры фильтра:  $C_k = C_2 = 1100$  пФ;  $L_1 = L_2 = 4,84$  мГн.

Определить коэффициент связи катушек, при котором полоса пропускания фильтра равна 55–110 кГц.

7.30(Р). Для П-образного фильтра по рис. 7.30 определить граничные частоты и постоянную ослабления при двух частотах полосы непропускания, отличающихся от граничных на 0,9 кГц.

Параметры фильтра:  $L_1 = 10$  мГн;  $C_1 = C_2 = 0,25$  мкФ.

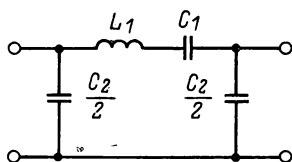


Рис. 7.30

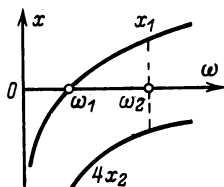


Рис. 7.30Р

Решение. Для всех симметричных Т- и П-образных фильтров в полосе пропускания продольное  $\underline{Z}_1$  и поперечное  $\underline{Z}_2$  сопротивления должны быть разного характера и удовлет-

входят в уравнению (7.2). Следовательно, полоса пропускания определяется как интервал частот, в котором  $x_1$  и  $x_2$  различны по знаку и  $|x_1| \leq |4x_2|$ .

Найдем этот интервал частот графически. На рис. 7.30Р построены зависимости  $x_1(\omega)$  и  $4x_2(\omega)$ . Из рис. 7.30Р видно, что граничная частота  $\omega_1$  определяется равенством  $x_1 = 0$  или  $\omega_1 L_1 - 1/\omega_1 C_1 = 0$ , т. е.  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 2,0 \cdot 10^4$  рад/с, а граничная частота  $\omega_2$  — равенством  $|x_1| = |4x_2|$  или  $|\omega_2 L_1 - 1/\omega_2 C_1| = 4/\omega_2 C_2$ , т. е.  $\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + 4/L_1 C_2} = 4,48 \cdot 10^4$  рад/с, или  $f_1 = 3,19$  кГц;  $f_2 = 7,14$  кГц.

Постоянную ослабления нужно найти на частотах  $f_3 = 3,19 - 0,9 = 2,29$  кГц и  $f_4 = 7,14 + 0,9 = 8,04$  кГц. При частоте  $f_3 < f_1$  сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  емкостные (рис. 7.30Р) и постоянная ослабления определяется по (7.5):

$$\text{sh}(A/2) = \sqrt{z_1(f_3)/4z_2(f_3)} = 0,347 \text{ и } A = 0,68 \text{ Нп.}$$

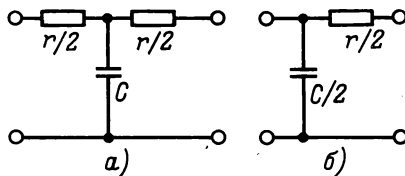


Рис. 7.31

При частоте  $f_4$  сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют разный характер (рис. 7.30Р) и постоянная ослабления определяется по (7.6):  $\text{ch}(A/2) = \sqrt{z_1(f_4)/4z_2(f_4)} = 1,15$  и  $A = 1,08$  Нп.

**7.31(Р).** Найти характеристическое сопротивление Т-образного низкочастотного фильтра  $rC$  (рис. 7.31, а) на верхней граничной частоте полосы пропускания, если параметры фильтра  $r = 2$  кОм;  $C = 500$  пФ.

**Решение.** Верхняя граничная частота фильтра определяется из условия равенства активного и реактивного сопротивлений соответствующего Г-образного полувзвена (рис. 7.31, б), т. е.

$$2/\omega_2 C = r/2, \text{ откуда } f_2 = \omega_2/2\pi = 637 \text{ кГц.}$$

Для симметричного четырехполюсника характеристическое сопротивление можно определить по (4.22):  $Z_c = \sqrt{Z_x Z_x}$ , где для фильтра по рис. 7.31, а на граничной частоте

$$Z_x = \frac{r}{2} + \frac{r/2(-j1/\omega_2 C)}{r/2 - j1/\omega_2 C}; \quad Z_x = \frac{r}{2} - j1/\omega_2 C$$

и  $Z_c = 1,19 \angle -22^\circ 30' \text{ кОм.}$

7.32. Для фильтра предыдущей задачи определить постоянную ослабления на верхней граничной частоте.

7.33. Из резисторов и конденсатора задачи 7.31 собрали симметричный высокочастотный фильтр.

Найти граничную частоту этого фильтра.

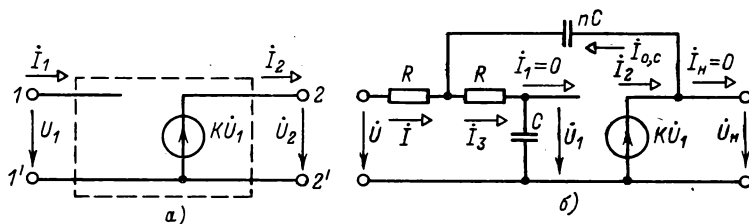


Рис. 7.34

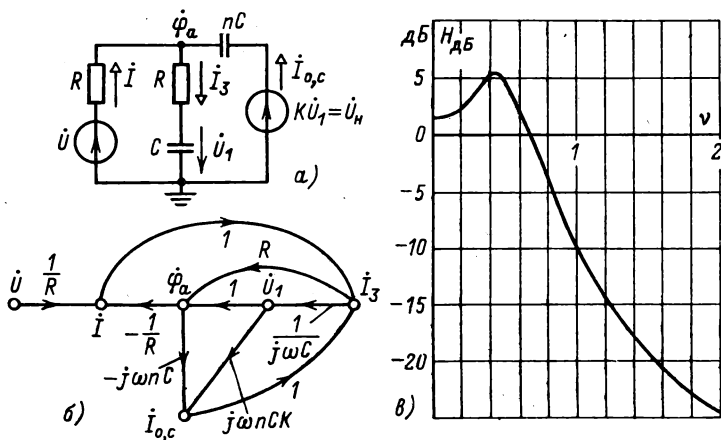


Рис. 7.34Р

7.34(Р). Схема замещения четырехполюсника с зависимым источником напряжения  $K\dot{U}_1$ , обладающего бесконечно большим входным сопротивлением и нулевым выходным сопротивлением, приведена на рис. 7.34, а. Подключив к этому четырехполюснику резисторы и конденсаторы, как показано на рис. 7.34, б, получим схему активного RC-фильтра низкой частоты.

Составить выражение для модуля передаточной функции этой схемы  $H = |\dot{U}_H/\dot{U}|$  в относительных единицах и в децибелах:  $H_{дБ} = 20 \lg H$ . Построить амплитудно-частотную характеристику  $H_{дБ}(\nu)$ , если  $R = 1 \text{ МОм}$ ;  $C = 1,417 \text{ нФ}$ ;  $n = 4$ ;  $K = 1,166$ ;  $\nu = \omega RC$ .

**Решение.** В более удобном для анализа виде схема фильтра показана на рис. 7.34Р, а. Систему уравнений, описывающих режим этой схемы, запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{U}/R - \dot{\phi}_a/R; \quad \dot{\phi}_a = \dot{U}_1 + R\dot{I}_3; \\ \dot{U}_1 &= \dot{I}_3/j\omega C; \quad \dot{I}_{o, c} = j\omega nCK\dot{U}_1 - j\omega nC\dot{\phi}_a; \\ \dot{I}_3 &= \dot{I} + \dot{I}_{o, c}. \end{aligned}$$

Передачи контуров сигнального графа (рис. 7.34Р, б), построенного по этим уравнениям,  $\underline{L}_1 = nK$ ;  $\underline{L}_2 = -n$ ;  $\underline{L}_3 = -jvn$ ;  $\underline{L}_4 = -1$ ;  $\underline{L}_5 = -1/jv$ . Определитель графа

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 + \underline{L}_5) = \\ &= (1/jv) [(1 - v^2n) + jv(2 + n - nK)]. \end{aligned}$$

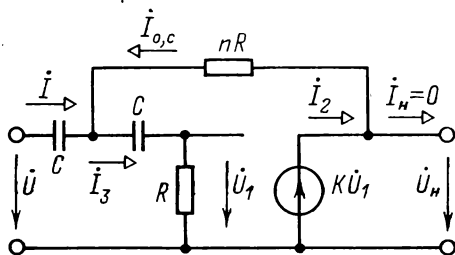


Рис. 7.35

Передачная функция по топологической формуле (Мэ-зона)

$$\underline{H} = \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}} = \frac{K\dot{U}_1}{\dot{U}} = \frac{K \sum_k \underline{\Pi}_k \Delta_k}{\underline{\Delta}} = \frac{K}{(1 - nv^2) + jv[2 + n(1 - K)]}.$$

Модуль передачной функции:  
в относительных единицах

$$H = \sqrt{\frac{K^2}{(1 - nv^2)^2 + v^2[2 + n(1 - K)]^2}};$$

в децибелах

$$H_{дБ} = 20 \lg K - 10 \lg [(1 + nv^2)^2 + n^2v^2(1 - K)^2 + 4v^2(1 - nK)].$$

Результаты расчета амплитудно-частотной характеристики приведены:

$v$	0	0,1	0,3	0,44	0,5	0,6	0,9	5,0
$H_{дБ}$	1,33	1,61	3,77	5,35	4,84	2,11	-6,77	-38,6

График амплитудно-частотной характеристики показан на рис. 7.34Р, в.

**7.35.** Получить выражение для модуля передаточной функции в относительных единицах  $H = |\dot{U}_н/\dot{U}|$  и в децибелах  $H_{дБ} = 20 \lg H$  активного высокочастотного RC-фильтра (рис. 7.35). Построить амплитудно-частотную характеристику фильтра  $H_{дБ}(\nu)$  при  $R = 0,1$  МОм;  $C = 2$  нФ;  $n = 0,25$ ;  $K = 1,1$ ;  $\nu = \omega RC$ .

## Глава восьмая

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### Введение к гл. 8

*При анализе переходного процесса в электрической цепи классическим методом можно рекомендовать, например, следующий порядок расчета искомой величины:*

1) Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивностях  $i_L(0-)$  и напряжения на емкостях  $u_C(0-)$  в момент коммутации  $t = 0$ , т. е. независимые начальные условия.

2) Получить дифференциальное уравнение цепи после коммутации и представить искомую величину в виде суммы установившихся и свободных составляющих.

3) Рассчитать установившийся режим в цепи после коммутации.

4) Составить характеристическое уравнение и определить его корни.

5) В зависимости от вида корней характеристического уравнения записать решения для свободных составляющих.

6) Составить систему уравнений для определения постоянных интегрирования.

7) Найти начальные значения свободных токов в индуктивностях  $i_{Lсв}(0+)$  и свободных напряжений на емкостях  $u_{Cсв}(0+)$  после коммутации.

8) Записать уравнения Кирхгофа для свободных составляющих.

9) Определить начальные условия для свободной составляющей искомой величины.

10) Вычислить постоянные интегрирования.

11) Искомую величину записать в виде суммы установившейся и свободной составляющих.

*Составление характеристического уравнения.* 1) Для цепи после коммутации записать систему уравнений Кирхгофа для мгновенных значений. Разрешив систему уравнений Кирхгофа относительно искомой величины (или какой-либо другой переменной), получить дифференциальное уравнение относительно этой величины. Характеристическое уравнение получится после замены символов дифференцирования  $d/dt$  символами  $p$  в соответствующем однородном дифференциальном уравнении и приравнивания полученного алгебраического уравнения к нулю. Примеры приведены в задачах 8.8—8.10, 8.22, 8.36, 8.37.

2) В цепи после коммутации разорвать ветвь с искомой величиной (или какую-либо другую ветвь). Найти комплексное входное сопротивление цепи  $\underline{Z}(j\omega)$  относительно точек разрыва. Характеристическое уравнение получится после замены символов  $j\omega$  на  $p$  и приравнивания входного сопротивления к нулю:

$$Z(p) = 0. \quad (8.1)$$

Примеры приведены в задачах 8.55, 8.56, 8.63, 8.64, 8.70.

3) Для цепи после коммутации записать комплексные уравнения методом контурных токов (при синусоидальном токе). Символы  $j\omega$  заменить на  $p$  и составить главный определитель системы уравнений, который для получения характеристического уравнения приравнять к нулю. Пример приведен в задаче 8.87.

*Решение для свободных составляющих*, например тока, записывается различно в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Если корни  $p_1, p_2 \dots$  действительные и различные, то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots \quad (8.2)$$

Если корни  $p_1, p_2 \dots$  действительные и равные, т. е.

$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p$ , то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} + A_3 t^2 e^{pt} + \dots \quad (8.3)$$

Для каждой пары комплексных сопряженных корней  $p_1 = \alpha + j\omega_{\text{св}}$  и  $p_2^* = \alpha - j\omega_{\text{св}}$  свободная составляющая

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{\alpha t} \sin \omega_{\text{св}} t + A_2 e^{\alpha t} \cos \omega_{\text{св}} t = B e^{\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \beta). \quad (8.4)$$

Начальные значения (при  $t = 0+$ ) свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости после коммутации (независимые начальные условия) находятся из

$$i_{L\text{св}}(0+) = i_L(0+) - i_{Ly}(0+); \quad (8.5)$$

$$u_{C\text{св}}(0+) = u_C(0+) - u_{Cy}(0+). \quad (8.6)$$

В (8.5) и (8.6) начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости находятся из законов коммутации:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = i_L(0); \quad (8.7)$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = u_C(0). \quad (8.8)$$

Все остальные начальные значения — зависимые начальные условия — находятся из уравнений Кирхгофа для момента времени  $t = 0+$  (см. решения задач 8.63—8.65).

При анализе переходного процесса в электрической цепи операторным методом рекомендуется следующий порядок расчета:

1) Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивностях  $i_L(0-)$  и напряжения на емкостях  $u_C(0-)$ .

2) По виду исследуемой электрической цепи после коммутации составить эквивалентную операторную схему (если целесообразно, то для свободных составляющих). По эквивалентной операторной схеме известными методами расчета цепей найти изображение искомой величины.

Изображение искомой величины можно получить и другим способом. Для цепи после коммутации записать систему уравнений Кирхгофа для мгновенных значений, затем все величины представить их изображениями и полученную систему уравнений разрешить относительно изображения искомой величины.

3) По изображению искомой величины найти оригинал, т. е. искомую функцию времени.

Если задана функция действительного переменного  $f(t)$  (оригинал), то соответствующая функция комплексного переменного  $F(p)$  (изображение) — прямое преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (8.9)$$

Эквивалентные операторные схемы элементов цепи представлены на рис. 8.А. Операторная схема для индуктивности  $L$  содержит операторное сопротивление  $pL$  и источник с ЭДС  $Li(0)$ , направленной по току  $i$ , а операторная схема для емкости  $C$  содержит операторное сопротивление  $1/pC$  и источник с ЭДС  $u_C(0)/p$ , направленной против напряжения на емкости  $u_C$ .

*Способы перехода от изображения к оригиналу*

1. Применение теоремы разложения. Если изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0} =$$

$$= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_n (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n)}, \quad (8.10)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — действительные числа;  $p_1, p_2, \dots$  — действительные и различные корни характеристического уравнения  $F_2(p) = 0$ , то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}. \quad (8.11)$$

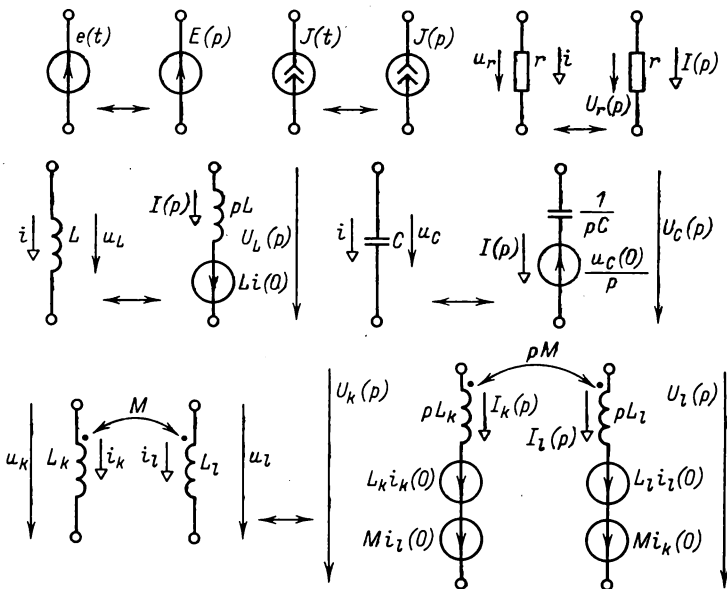


Рис. 8.А

Если многочлен  $F_2(p)$  имеет один нулевой корень, т. е.  $F_2(p) = p F_3(p)$ , то

$$\frac{F_1(p)}{p F_3(p)} = f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F'_3(p_k)} e^{p_k t}. \quad (8.12)$$

Если многочлен  $F_2(p)$  имеет  $n$  пар комплексных сопряженных корней, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left( \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} \right) \quad (8.13)$$



и при одном нулевом корне.

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left( \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right). \quad (8.14)$$

Примеры применения теоремы разложения приведены в задачах 8.94, 8.96, 8.97.

2. Применение метода неопределенных коэффициентов. Пример дан в решении задачи 8.92.

3. Применение таблицы соответствия оригиналов и изображений (см. приложение 2).

Для расчета переходного процесса *при воздействии* на электрическую цепь *источников напряжения или тока произвольной формы* можно применить формулы Дюамеля. Ниже приведены четыре наиболее часто применяемые формы интеграла Дюамеля, где  $h(t)$  — переходная функция, т. е. реакция цепи на единичный скачок входного воздействия,  $x(t)$  — входная величина (воздействие),  $y(t)$  — искомая величина (реакция цепи на воздействие).

Первая форма записи интеграла Дюамеля при непрерывном воздействии  $x(t)$ :

$$y(t) = x(0) h(t) + \int_0^t x'(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где  $x'(\tau) = dx/d\tau|_{\tau=\tau}$ ; при различных законах воздействия  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в интервалах времени  $0 \leq t \leq t_1$  и  $t \geq t_1$

$$y(t) = x_1(0) h(t) + \int_0^t x_1'(\tau) h(t - \tau) d\tau; \quad (8.15a)$$

$$y(t) = x_1(0) h(t) + \int_0^{t_1} x_1'(\tau) h(t - \tau) d\tau + \\ + [x_2(t_1) - x_1(t_1)] h(t - t_1) + \int_{t_1}^t x_2'(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (8.15b)$$

и аналогично при большем числе интервалов.

Вторая форма записи интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x_1(0) h(t) + \int_0^t x_1'(t - \tau) h(\tau) d\tau; \quad (8.16a)$$

$$y(t) = x_1(0) h(t) + \int_{t-t_1}^t x_1'(t - \tau) h(\tau) d\tau + \\ + [x_2(t_1) - x_1(t_1)] h(t - t_1) + \int_0^{t-t_1} x_2'(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (8.16b)$$

Третья форма записи интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x_1(t) h(0) + \int_0^t x_1(\tau) h'(t - \tau) d\tau; \quad (8.17a)$$

$$y(t) = x_2(t) h(0) + \int_0^{t_1} x_1(\tau) h'(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t x_2(\tau) h'(t - \tau) d\tau. \quad (8.17b)$$

Четвертая форма записи интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x_1(t) h(0) + \int_0^t x_1(t - \tau) h'(\tau) d\tau; \quad (8.18a)$$

$$y(t) = x_2(t) h(0) + \int_{t-t_1}^t x_1(t - \tau) h'(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{t-t_1} x_2(t - \tau) h'(\tau) d\tau. \quad (8.18b)$$

При переходе от электрической цепи к расчетной схеме в последней могут в результате коммутации две (или более) емкости с разными начальными напряжениями оказаться соединенными параллельно или две (или более) индуктивности с разными начальными токами оказаться соединенными последовательно. В этих случаях независимые начальные условия определяются из соотношений:

для двух параллельно соединенных емкостей

$$(C_1 + C_2) u(0) = C_1 u_1(0_-) + C_2 u_2(0_-); \quad (8.19)$$

для двух последовательно соединенных индуктивностей

$$(L_1 + L_2) i(0) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-). \quad (8.20)$$

При решении задач *методом переменных состояния* уравнение состояния записывается в виде

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 v, \quad (8.21)$$

где  $x$  и  $\dot{x}$  — столбцовые матрицы размера  $n \times 1$  переменных состояния, в качестве которых выбираются напряжения на емкостях и токи в индуктивностях и их производные;  $A_1$  — квадратная матрица порядка  $n$ ;  $B_1$  — матрица размера  $n \times q$ , причем  $q$  равно общему числу источников ЭДС и тока;  $v$  — столбцовая матрица размера  $q \times 1$  напряжений источников ЭДС и токов источников тока.

Элементы матриц  $A_1$  и  $B_1$  определяются только параметрами схемы и ее топологией.

К (8.21) необходимо добавить еще уравнение для выходных переменных:

$$y = A_2 x + B_2 v, \quad (8.22)$$

где  $y$  — столбцовая матрица выходных переменных размера  $m \times 1$ , причем  $m$  — число выходных переменных;  $A_2$  и  $B_2$  — матрицы, имеющие размеры  $m \times n$  и  $m \times q$  соответственно, элементы которых определяются параметрами и топологией схемы.

Решение (8.21) имеет вид:

$$x = e^{A_1 t} x(0) + e^{A_1 t} \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 v(\tau) d\tau \quad (8.23)$$

или, если  $v$  не зависит от времени,

$$x = e^{A_1 t} x(0) + (e^{A_1 t} - I) A_1^{-1} B_1 v, \quad (8.24)$$

где

$$e^{A_1 t} = \alpha_0 I + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} A_1^{n-1}. \quad (8.25)$$

Коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

где различные коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A_1$ , т.е. корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A_1) = 0. \quad (8.27)$$

Матрицы  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  могут быть определены из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_{CC} & H_{CL} \\ H_{LC} & H_{LL} \end{pmatrix}; \\ B_1 &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_{Ce} & H_{CJ} \\ H_{Le} & H_{LJ} \end{pmatrix}; \\ A_2 &= \begin{pmatrix} H_{1C} & H_{1L} \\ H_{2C} & H_{2L} \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} H_{1e} & H_{1J} \\ H_{2e} & H_{2J} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

где

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & C_{n'} & \\ & & & L_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & L_{n''} \end{pmatrix}; \quad n' + n'' = n,$$

а матрицы  $\mathbf{H}$  — это входные и взаимные проводимости или сопротивления, или передаточные функции по току или напряжению, которые определяются по методу наложения из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{CC} & H_{CL} \\ H_{LC} & H_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{Ce} & H_{CJ} \\ H_{Le} & H_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}; \\ y = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{1C} & H_{1L} \\ H_{2C} & H_{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1e} & H_{1J} \\ H_{2e} & H_{2J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

где  $\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = x$ ;  $\begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix} = v$ ;

$i_C$ ,  $u_L$  — столбцовые матрицы токов в емкостях и напряжений на индуктивностях;  $i_1$ ,  $u_2$  — столбцовые матрицы выходных токов и напряжений.

## 8.1. Переходные процессы в цепях $rL$ (классический метод расчета)

*Свободные процессы в цепях  $rL$*

**8.1(Р).** Обмотка возбуждения электрической машины отключается от источника с ЭДС  $E = 200$  В и внутренним сопротивлением  $r_1 = 20$  Ом и закорачивается без разрыва цепи (рис. 8.1). Индуктивность обмотки  $L = 0,2$  Гн, сопротивление обмотки  $r = 20$  Ом.

Найти ток в обмотке и построить график зависимости  $i(t)$ .

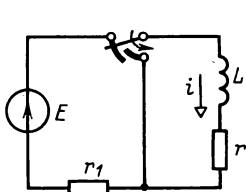
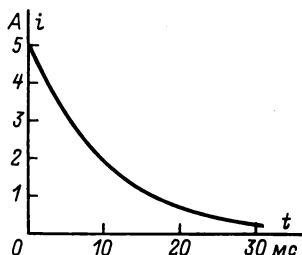


Рис. 8.1

Рис. 8.1Р →



**Решение.** Находим ток в обмотке до коммутации

$$i(0_-) = E/(r + r_1) = 5 \text{ A.}$$

Дифференциальное уравнение для тока после коммутации однородное:

$$L di/dt + ri = 0. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + r = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -r/L = -100 \text{ с}^{-1}$ .

Установившегося тока после коммутации нет (дифференциальное уравнение для тока однородное), поэтому решение уравнения (1) представим в виде

$$i = Ae^{p_1 t}. \quad (2)$$

Для вычисления постоянной интегрирования  $A$  запишем решение (2) при  $t = 0$ , т. е. начальное значение:  $i(0) = A$ . По закону коммутации ток в индуктивности не изменяется скачком, следовательно,  $i(0) = i(0_-) = 5 \text{ А}$  и  $A = i(0) = 5 \text{ А}$ .

Таким образом, ток в обмотке возбуждения

$$i = 5e^{-100t} \text{ А}.$$

График тока представлен на рис. 8.1Р.

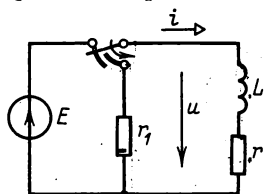


Рис. 8.2

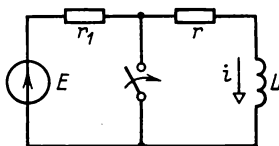


Рис. 8.3

**8.2(Р).** Для ускорения процесса спада тока в обмотке возбуждения электрической машины с параметрами  $L$ ,  $r$  ее присоединяют без разрыва цепи к резистору с сопротивлением  $r_1$  (рис. 8.2).

Найти ток  $i$  и напряжение  $u$  на обмотке. Вычислить время  $t_1$  спада тока до значения, равного 5% начального; сравнить его с временем  $t_2$  спада в случае  $r_1 = 0$ .

Дано:  $E = 40 \text{ В}$ ;  $L = 1 \text{ Гн}$ ;  $r = 1 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ .

Решение. Ток в индуктивности до коммутации

$$i(0_-) = E/r = 40 \text{ А}.$$

Дифференциальное уравнение для тока после коммутации однородное:

$$L \frac{di}{dt} + (r + r_1) i = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + (r + r_1) = 0.$$

имеет корень

$$p_1 = -(r + r_1)/L = -11 \text{ с}^{-1}.$$

Решение однородного дифференциального уравнения запишем в виде

$$i = Ae^{p_1 t}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  находим из начальных условий ( $t = 0$ ). По закону коммутации для тока в индуктивности начальное значение

$$i(0) = A = i(0-) = 40 \text{ А}.$$

Ток в обмотке возбуждения

$$i = 40e^{-11t} \text{ А}.$$

Напряжение на обмотке возбуждения

$$u = -r_1 i = -400e^{-11t} \text{ В}.$$

Время спада тока до значения, равного 5% начального, найдем из уравнения

$$0,05 \cdot 40 = 40e^{-11t_1},$$

откуда

$$t_1 = \ln 0,05 / (-11) = 0,272 \text{ с}.$$

При  $r_1 = 0$  корень  $p_1 = -1 \text{ с}^{-1}$  и ток  $i = 40e^{-t} \text{ А}$ . Время спада тока получим из уравнения  $0,05 \cdot 40 = 40e^{-t_2}$ , откуда  $t_2 = -\ln 0,05 = 2,99 \text{ с}$ .

Таким образом, чем больше сопротивление  $r_1$ , тем быстрее спадает ток. Однако чрезмерно увеличивать это сопротивление нельзя, поскольку начальное напряжение на обмотке  $u(0) = -r_1 i(0)$  может быть больше допустимого напряжения и произойдет пробой изоляции обмотки.

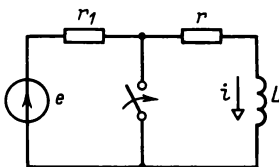


Рис. 8.4

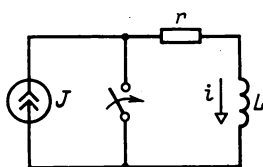


Рис. 8.5

**8.3.** В схеме рис. 8.3 происходит замыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 90 \text{ В}$ ;  $r_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r = 15 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Найти и построить зависимость  $i(t)$ .

**8.4.** Для схемы рис. 8.4 дано:  $e = 50\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r = 30 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,5 \text{ Гн}$ .

Найти ток  $i$  после замыкания ключа.

8.5. Определить ток  $i$  в схеме рис. 8.5 после замыкания ключа.

Дано:  $J = 6$  А;  $r = 10$  Ом;  $L = 0,25$  Гн.

8.6. Заданы параметры схемы рис. 8.6:  $J(t) = 0,5 \sin(1000t + 53,13^\circ)$  А;  $r = 120$  Ом;  $L = 0,1$  Гн.

Найти ток  $i$  после коммутации.

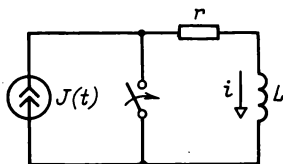


Рис. 8.6

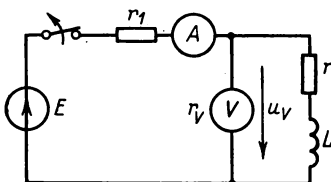


Рис. 8.7

8.7. Для измерения сопротивления обмотки индуктивной катушки постоянному току собрана цепь по рис. 8.7. Показание амперметра 2 А, показание вольтметра 5 В, сопротивление вольтметра  $r_V = 1500$  Ом.

Определить начальное напряжение на вольтметре  $u_V(0)$  при размыкании ключа.

### *Переходные процессы в цепях $rL$ при воздействии источников постоянных напряжения и тока*

8.8(Р). Для ускорения процесса гашения тока в обмотке возбуждения электрической машины ее отключили от источника ЭДС  $E_1$  в момент времени, который принят за  $t = 0$ , и подключили к источнику ЭДС  $E$  обратной полярности (рис. 8.8). В момент времени  $t_1$ , когда ток спадет до нуля, обмотка возбуждения отключится от источника ЭДС  $E$ .

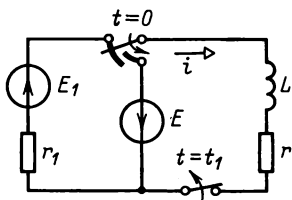


Рис. 8.8

1) Определить ток  $i$  в обмотке возбуждения и момент времени  $t_1$ .

2) Сравнить время  $t_1$  с временем спада тока  $t_2$  при  $E = 0$

(короткое замыкание обмотки), где  $t_2$  — время, в течение которого значение тока уменьшается до 3% начального.

Параметры цепи:  $E_1 = 20$  В;  $E = 120$  В;  $r = 0,5$  Ом;  $r_1 = 0,5$  Ом;  $L = 0,5$  Гн.

Решение. 1) Ток в индуктивности до коммутации

$$i(0-) = E_1/(r + r_1) = 20 \text{ A.}$$

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации:

$$L \frac{di}{dt} + ri = -E.$$

Решение этого неоднородного уравнения найдем в виде суммы частного решения неоднородного уравнения — тока установившегося режима  $i_y$  и общего решения соответствующего однородного уравнения — свободной составляющей тока  $i_{св}$ :

$$i = i_y + i_{св}.$$

Ток  $i_y$  находим либо расчетом цепи постоянного тока, которая получается (рис. 8.8) после первой коммутации, либо из дифференциального уравнения при  $di/dt = 0$ :

$$i_y = -E/r = -240 \text{ A.}$$

Характеристическое уравнение  $Lp + r = 0$  имеет один корень  $p_1 = -r/L = -1 \text{ с}^{-1}$ .

Поэтому свободная составляющая тока

$$i_{св} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-1t}$$

и ток

$$i = i_y + i_{св} = -240 + Ae^{-1t}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  находим, учитывая начальные условия (при  $t = 0$ ) для тока в индуктивности  $i(0) = i(0-) = 20 \text{ A}$ , т.е. из уравнения  $20 = -240 + A$ , откуда  $A = 260$ . Следовательно, ток

$$i = -240 + 260e^{-1t} \text{ A.}$$

Время  $t_1$  определим, приняв в решении согласно условию  $i(t_1) = 0$ , т.е.

$$0 = -240 + 260e^{-1t_1},$$

$$\text{откуда } t_1 = -\ln(240/260) = 0,08 \text{ с.}$$

2) При  $E = 0$  (короткое замыкание обмотки) после коммутации существует только свободный процесс и ток

$$i = 20e^{-1t} \text{ A.}$$

Время  $t_2$  спада тока получим из уравнения

$$0,03 \cdot 20 = 20e^{-1t_2},$$

откуда  $t_2 = -\ln 0,03 = 3,50 \text{ с.}$

Таким образом, в заданной цепи введение форсирующего источника ЭДС  $E$  ускоряет процесс спада тока в  $t_2/t_1 \approx 44$  раза.



**8.9(Р).** Найти токи во всех ветвях схемы рис. 8.9 при замыкании ключа во второй ветви.

Дано:  $E = 150 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Решение. Находим независимое начальное условие — ток в индуктивности  $i_2(0-) = 0$ .

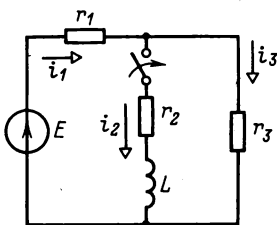


Рис. 8.9

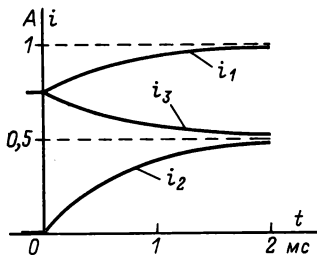


Рис. 8.9Р

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad (1)$$

$$r_1 i_1 + r_3 i_3 = E; \quad (2)$$

$$r_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - r_3 i_3 = 0. \quad (3)$$

Преобразуем систему уравнений Кирхгофа в уравнение относительно одной переменной, например тока  $i_2$ . Для этого исключим переменные  $i_1$  и  $i_3$ . Получим дифференциальное уравнение для тока  $i_2$ :

$$L \frac{di_2}{dt} + \left( r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} \right) i_2 = E \frac{r_3}{r_1 + r_3}. \quad (4)$$

Аналогичные уравнения можно записать и для других переменных ( $i_1$  и  $i_3$ ), но в этом нет необходимости, поскольку характеристическое уравнение схемы (при отсутствии в ней особенностей) для всех переменных одинаково (особенностью может быть, например, короткое замыкание параллельных ветвей).

Решение будем искать в виде

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2св}; \quad i_3 = i_{3y} + i_{3св}.$$

В установившемся режиме токи:

$$i_{1y} = \frac{E}{r_1 + r_2 r_3 / (r_2 + r_3)} = 1 \text{ А}; \quad i_{2y} = i_{1y} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 0,5 \text{ А};$$

$$i_{3y} = i_{1y} \frac{r_2}{r_2 + r_3} = 0,5 \text{ А}.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + \left( r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} \right) = 0$$

имеет один корень

$$p_1 = - \frac{r_2 + r_1 r_3 / (r_1 + r_3)}{L} = -1500 \text{ с}^{-1},$$

т. е. свободные составляющие токов:

$$i_{1\text{св}} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{2\text{св}} = Be^{p_1 t}; \quad i_{3\text{св}} = Ce^{p_1 t}.$$

При этом токи:

$$i_1 = 1 + Ae^{p_1 t}; \quad i_2 = 0,5 + Be^{p_1 t}; \quad i_3 = 0,5 + Ce^{p_1 t}.$$

В частности, при  $t = 0$  токи:

$$i_1(0) = 1 + A; \quad i_2(0) = 0,5 + B; \quad i_3(0) = 0,5 + C. \quad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования найдем начальные значения токов. По закону коммутации независимое начальное условие — ток в индуктивности  $i_2(0) = i_2(0-) = 0$ .

Начальные значения остальных токов  $i_1(0)$  и  $i_3(0)$  — зависимые начальные условия определим из двух первых уравнений Кирхгофа, записанных для момента времени  $t = 0$ :

$$-i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) = 0;$$

$$r_1 i_1(0) + r_3 i_3(0) = E,$$

откуда

$$i_1(0) = i_3(0) = E / (r_1 + r_3) = 0,75 \text{ А}.$$

Из уравнений (5) находим постоянные интегрирования

$$A = -0,25 \text{ А}; \quad B = -0,5 \text{ А}; \quad C = 0,25 \text{ А}.$$

Таким образом, токи:

$$i_1 = 1 - 0,25e^{-1500t} \text{ А}; \quad i_2 = 0,5 - 0,5e^{-1500t} \text{ А};$$

$$i_3 = 0,5 + 0,25e^{-1500t} \text{ А}.$$

Соответствующие зависимости представлены на рис. 8.9Р. До коммутации  $i_1 = i_3 = E / (r_1 + r_3) = 0,75 \text{ А}$ .

**8.10(Р).** Определить токи во второй и третьей ветвях при размыкании ключа в первой ветви (рис. 8.10) при параметрах:  $E = 120 \text{ В}$ ;  $J = 6 \text{ А}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,05 \text{ Гн}$ .

Решение. Ток в индуктивности до коммутации (постоянный ток) найдем, например, методом наложения от действия источника ЭДС  $E$  и источника тока  $J$ :

$$i_3(0-) = i_3'(0-) + i_3''(0-) = 4 \text{ А} + 2 \text{ А} = 6 \text{ А}.$$

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-J - i_2 + i_3 = 0; \quad (1)$$

$$r_2 i_2 + L \frac{di_3}{dt} + r_3 i_3 = E. \quad (2)$$

Исключив из уравнений (1) и (2) ток  $i_2$ , получим дифференциальное уравнение для тока  $i_3$ :

$$L \frac{di_3}{dt} + (r_2 + r_3) i_3 = E + r_2 J. \quad (3)$$

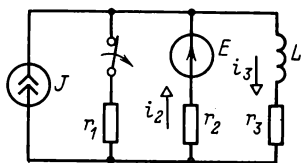
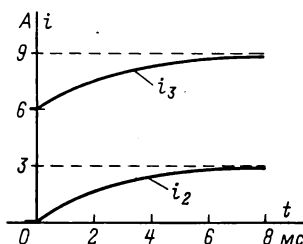


Рис. 8.10

Рис. 8.10Р



Искомые токи:

$$i_2 = i_{2y} + i_{2св}; \quad i_3 = i_{3y} + i_{3св}.$$

Токи установившегося режима найдем методом наложения:

$$i_{2y} = E/(r_2 + r_3) - Jr_3/(r_2 + r_3) = 3 \text{ A};$$

$$i_{3y} = E/(r_2 + r_3) + Jr_2/(r_2 + r_3) = 9 \text{ A}.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + (r_2 + r_3) = 0$$

имеет корень  $p_1 = -(r_2 + r_3)/L = -400 \text{ с}^{-1}$ , и свободные составляющие токов:

$$i_{2св} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{3св} = Be^{p_1 t}.$$

Следовательно, токи:

$$i_2 = 3 + Ae^{p_1 t} \text{ A}; \quad i_3 = 9 + Be^{p_1 t} \text{ A}. \quad (4)$$

Уравнения для определения постоянных интегрирования получим из (4) при  $t = 0$ :

$$i_2(0) = 3 + A; \quad i_3(0) = 9 + B.$$

Независимое начальное условие — ток в индуктивности  $i_3(0)$  находим по закону коммутации:  $i_3(0) = i_3(0-) = 6 \text{ A}$ .

Зависимое начальное условие  $i_2(0)$ , т. е. начальное значение, определим из уравнения (1) для момента времени  $t = 0$ , откуда  $i_2(0) = i_3(0) - J = 0$  и постоянные интегрирования:  $A = i_2(0) - -3 = -3A$ ;  $B = i_3(0) - 9 = -3A$ .

Токи:

$$i_2 = 3 - 3e^{-400t} \text{ А}; \quad i_3 = 9 - 3e^{-400t} \text{ А}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 8.10Р.

**8.11.** Найти ток первичной цепи  $i_1$  и напряжение на вторичной разомкнутой обмотке  $u_2$  трансформатора (рис. 8.11) после замыкания ключа при параметрах:  $E = 30 \text{ В}$ ;  $r_1 = 150 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,4 \text{ Гн}$ .

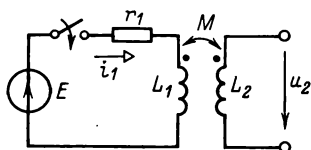


Рис. 8.11

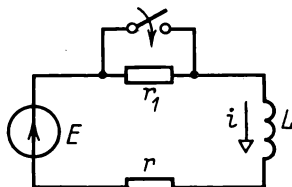


Рис. 8.12

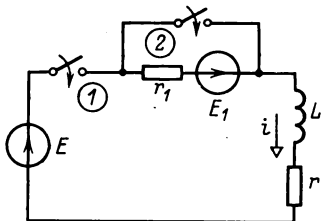


Рис. 8.13

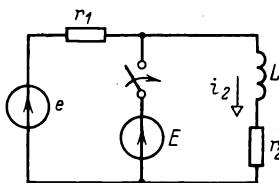


Рис. 8.14

**8.12.** Найти ток  $i$  в цепи рис. 8.12 после замыкания ключа при параметрах:  $E = 80 \text{ В}$ ;  $r_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,02 \text{ Гн}$ .

**8.13.** Для ускорения процесса нарастания тока  $i$  в обмотке возбуждения ( $L, r$ ) электрической машины (рис. 8.13) в момент  $t = 0$  замыкается первый ключ. При этом последовательно с основным источником ЭДС  $E$  включается дополнительный источник с ЭДС  $E_1$  и внутренним сопротивлением  $r_1$ . В момент времени  $t_1$ , когда ток  $i$  достигнет номинального значения  $i_{\text{ном}} = E/r$ , замыкается второй ключ, т. е. дополнительный источник отключается.

Определить ток  $i$  и время  $t_1$  его нарастания до номинального значения. Сравнить время  $t_1$  с временем  $t_2$  нарастания тока до значения, равного 95% номинального, при отсутствии дополнительного источника ( $r_1 = 0$ ;  $E_1 = 0$ ).

Параметры цепи:  $r = 50 \text{ Ом}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $E = 100 \text{ В}$ ;  $E_1 = 260 \text{ В}$ .

**8.14.** В цепь синусоидального тока (рис. 8.14) с параметрами:  $e = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 75^\circ)$  В;  $r_1 = 75$  Ом;  $r_2 = 25$  Ом;  $L = 0,1$  Гн включается источник постоянной ЭДС  $E = 50$  В.

Определить ток  $i_2$ .

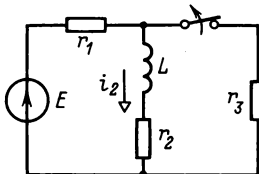


Рис. 8.15

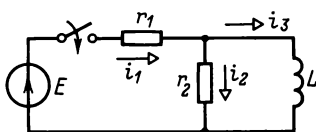


Рис. 8.16

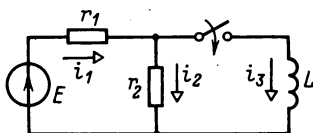


Рис. 8.17

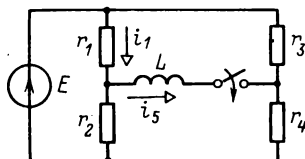


Рис. 8.18

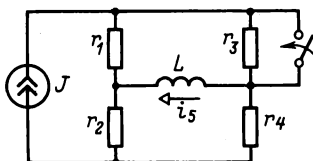


Рис. 8.19

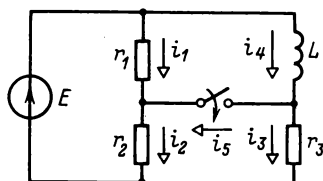


Рис. 8.20

**8.15.** Определить ток  $i_2$  в схеме рис. 8.15 после размыкания ключа в третьей ветви.

Заданы параметры:  $E = 24$  В;  $r_1 = 6$  Ом;  $r_2 = 12$  Ом;  $r_3 = 6$  Ом;  $L = 0,05$  Гн.

**8.16.** Найти токи во всех ветвях схемы рис. 8.16 после коммутации при  $E = 36$  В;  $r_1 = 12$  Ом;  $r_2 = 24$  Ом;  $L = 0,02$  Гн.

**8.17.** Определить токи  $i_1$  и  $i_3$  в схеме рис. 8.17 при замыкании ключа в третьей ветви.

Дано:  $E = 50$  В;  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $L = 0,01$  Гн.

**8.18.** В схеме рис. 8.18 найти токи  $i_1$  и  $i_5$  во время переходного процесса при  $E = 80$  В;  $r_1 = r_4 = 20$  Ом;  $r_2 = r_3 = 80$  Ом;  $L = 0,02$  Гн.

**8.19.** Определить ток  $i_5$  в схеме рис. 8.19 при замыкании ключа.

Параметры схемы:  $J = 2$  А;  $r_1 = r_4 = 80$  Ом;  $r_2 = r_3 = 20$  Ом;  $L = 0,01$  Гн.

**8.20.** Рассчитать токи во всех ветвях схемы рис. 8.20 после коммутации при  $E = 90 \text{ В}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 15 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,04 \text{ Гн}$ .

*Переходные процессы в цепях  $rL$  при гармоническом воздействии и при воздействии нескольких источников*

**8.21(Р).** Найти ток переходного процесса  $i$  в индуктивной катушке (рис. 8.21) при  $e = 100 \sin(2500t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $r_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $r = 20 \text{ Ом}$ ;  $C = 4 \text{ мкФ}$ ;  $L = 0,04 \text{ Гн}$ .

Решение. Находим ток в индуктивности до коммутации. Его комплексная амплитуда

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{r + r_1 + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{100 \angle 30^\circ}{20 + 30 + j100 - j100} = 2 \angle 30^\circ \text{ А}$$

и мгновенное значение

$$i = 2 \sin(2500t + 30^\circ) \text{ А.}$$

Следовательно, при  $t = 0$  ток  $i(0-) = 2 \sin 30^\circ = 1 \text{ А}$ .

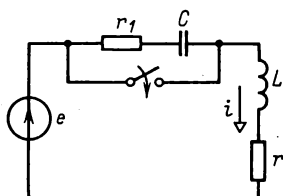


Рис. 8.21

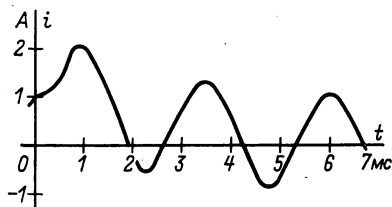


Рис. 8.21Р

Уравнение Кирхгофа для схемы после коммутации

$$L \frac{di}{dt} + ri = e.$$

Решение для тока ищем в виде

$$i = i_y + i_{св}.$$

Комплексная амплитуда тока установившегося режима

$$\dot{I}_{my} = \frac{\dot{E}_m}{r + j\omega L} = \frac{100 \angle 30^\circ}{20 + j100} = 0,980 \angle -48,7^\circ \text{ А,}$$

мгновенное значение тока

$$i_y = 0,980 \sin(2500t - 48,7^\circ) \text{ А.}$$

Характеристическое уравнение цепи  $Lp + r = 0$  имеет корень  $p_1 = -r/L = -500 \text{ с}^{-1}$ , т.е. свободная составляющая тока

$$i_{св} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-500t}$$

и ток

$$i = 0,980 \sin(2500t - 48,7^\circ) + Ae^{-500t}.$$

Для определения постоянной интегрирования  $A$  запишем при  $t = 0$  ток

$$i(0) = 0,980 \sin(-48,7^\circ) + A,$$

где начальное значение тока в индуктивности по закону коммутации  $i(0) = i(0-) = 1$  А, т. е.  $A = 1,74$  А.

Таким образом, ток

$$i = 0,980 \sin(2500t - 48,7^\circ) + 1,74e^{-500t} \text{ А.}$$

График тока представлен на рис. 8.21Р.

**8.22(Р).** Найти токи  $i_1$  и  $i_2$  в схеме рис. 8.22 при размыкании ключа.

Дано:  $e = 100 \sin(1000t + 90^\circ)$  В;  $J = 2$  А;  $r_1 = r_2 = 50$  Ом;  $L = 0,1$  Гн.

Решение. До коммутации ветвь  $r_2L$  была закорочена. Следовательно, непосредственно перед коммутацией ток в индуктивности  $i_2(0-) = 0$ .

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-J - i_1 + i_2 = 0; \quad (1)$$

$$L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + r_1 i_1 = e. \quad (2)$$

Преобразуем систему уравнений Кирхгофа в дифференциальное уравнение относительно одной переменной, например тока  $i_2$ , исключив из уравнений (1) и (2) ток  $i_1$ ; тогда получим:

$$L \frac{di_2}{dt} + (r_1 + r_2) i_2 = e + Jr_1. \quad (3)$$

Решение будем искать в виде

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2\text{св}}.$$

Найдем токи установившегося режима, применив метод наложения. От действия источника синусоидальной ЭДС  $e$  токи

$$i'_{1m} = i'_{2m} = \frac{\dot{E}_m}{r_1 + r_2 + j\omega L} = \frac{100 \angle 90^\circ}{100 + j100} = 0,707 \angle 45^\circ \text{ А,}$$

т. е.

$$i'_{1y} = i'_{2y} = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ А.}$$

От действия источника постоянного тока  $J$  токи

$$i''_{1y} = -J \frac{r_2}{r_1 + r_2} = -1 \text{ А; } i''_{2y} = J \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 1 \text{ А.}$$

Таким образом,

$$i_{1y} = i'_{1y} + i''_{1y} = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) - 1 \text{ A};$$

$$i_{2y} = i'_{2y} + i''_{2y} = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) + 1 \text{ A}.$$

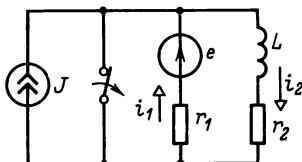


Рис. 8.22

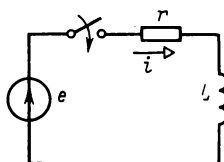


Рис. 8.23

Для дифференциального уравнения (3) записываем характеристическое уравнение и находим его корень:

$$Lp + (r_1 + r_2) = 0; \quad p_1 = -(r_1 + r_2)/L = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

Свободные составляющие токов:

$$i_{1\text{св}} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{2\text{св}} = Be^{p_1 t}$$

и токи

$$i_1 = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) - 1 + Ae^{p_1 t}; \quad (4)$$

$$i_2 = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) + 1 + Be^{p_1 t}. \quad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования запишем при  $t = 0$  токи:

$$\left. \begin{aligned} i_1(0) &= 0,707 \sin 45^\circ - 1 + A; \\ i_2(0) &= 0,707 \sin 45^\circ + 1 + B. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Определим начальные значения токов  $i_1(0)$  и  $i_2(0)$ . Независимое начальное условие — ток в индуктивности  $i_2(0)$  находим по закону коммутации:  $i_2(0) = i_2(0-) = 0$ .

Начальное значение тока  $i_1(0)$  найдем из уравнения Кирхгофа (1); для момента времени  $t = 0$  имеем:  $i_1(0) = i_2(0) - J = -2 \text{ A}$  и из (6) постоянные интегрирования  $A = -1,5 \text{ A}$ ;  $B = -1,5 \text{ A}$ .

Токи переходного процесса:

$$i_1 = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) - 1 - 1,5e^{-1000t} \text{ A};$$

$$i_2 = 0,707 \sin(1000t + 45^\circ) + 1 - 1,5e^{-1000t} \text{ A}.$$

**8.23.** В схеме рис. 8.23 с параметрами  $r = 5 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$  происходит замыкание ключа в момент, который принят за  $t = 0$ .



Найти: 1) ток  $i$  при ЭДС  $e = 50 \sin(314t + 30^\circ)$  В; 2) начальную фазу  $\alpha_1$  ЭДС  $e = 50 \sin(314t + \alpha_1)$  В, при которой переходный процесс отсутствует, и ток  $i$  в этом режиме; 3) начальную фазу  $\alpha_2$  ЭДС  $e = 50 \sin(314t + \alpha_2)$  В, при которой максимальное значение тока во время переходного процесса получается наибольшим, и это максимальное значение тока.

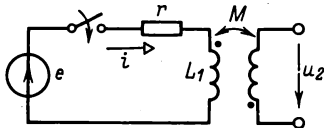


Рис. 8.24

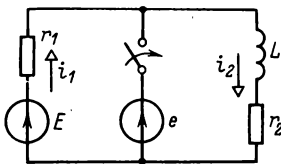


Рис. 8.25

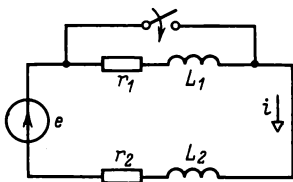


Рис. 8.26

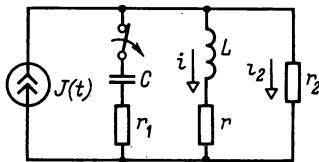


Рис. 8.27

**8.24.** Найти ток  $i_1$  и напряжение  $u_2$  трансформатора (рис. 8.24) во время переходного процесса при ЭДС  $e = 100 \sin(1000t - 30^\circ)$  В и параметрах:  $r = 100$  Ом;  $L_1 = 0,1$  Гн;  $M = 0,2$  Гн.

**8.25.** В схеме рис. 8.25 до замыкания ключа протекал постоянный ток.

Определить ток  $i_2$  после коммутации при параметрах:  $r_1 = 50$  Ом;  $r_2 = 50$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $E = 100$  В;  $e = 80 \sin(2500t + 15^\circ)$  В.

**8.26.** Найти ток  $i$  в схеме рис. 8.26 после замыкания ключа.

Дано:  $r_1 = 80$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $L_1 = 0,1$  Гн;  $L_2 = 0,2$  Гн;  $e = 100 \sin(314t + 120^\circ)$  В.

**8.27.** Определить токи  $i$  и  $i_2$  в цепи рис. 8.27 с источником тока  $J(t) = 1 \sin(1000t + 30^\circ)$  А после размыкания ключа при  $r_1 = r = r_2 = 100$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 10$  мкФ.

## 8.2. Переходные процессы в цепях $rC$ (классический метод расчета)

*Свободные процессы в цепях  $rC$*

**8.28(P).** В цепи рис. 8.28 отключается источник с ЭДС  $E = 120$  В и внутренним сопротивлением  $r_1 = 10$  Ом.

Рассчитать и построить зависимости напряжения  $u_C$  на конденсаторе  $C = 20$  мкФ и тока  $i$  в резисторе  $r = 50$  Ом.

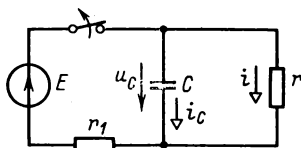
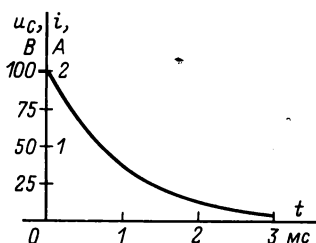


Рис. 8.28

Рис. 8.28P →



**Решение.** Напряжение на конденсаторе до коммутации

$$u_C(0-) = Er/(r + r_1) = 100 \text{ В.}$$

Записываем дифференциальное уравнение цепи после коммутации, принимая во внимание, что  $i = -i_C = -C du_C/dt$ :

$$u_C + rC \frac{du_C}{dt} = 0.$$

Так как уравнение однородное, то установившееся значение напряжения на конденсаторе равно нулю.

Характеристическое уравнение

$$1 + rCp = 0$$

имеет один корень

$$p_1 = -1/rC = -1000 \text{ с}^{-1},$$

т. е. решение однородного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{p_1 t}.$$

Для определения постоянной интегрирования  $A$  положим  $t = 0$  и получим:  $u_C(0) = A$ , где  $u_C(0)$  — независимое начальное условие, которое определим по закону коммутации (напряжение на емкости не изменяется скачком):  $u_C(0) = u_C(0-) = 100$  В, т. е.  $A = 100$  В.

Таким образом, напряжение на конденсаторе

$$u_C = 100e^{-1000t} \text{ В.}$$

Ток резистора

$$i = u_C / r = 2e^{-1000t} \text{ А.}$$

Зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$  представлены на рис. 8.28Р.

**8.29(Р).** К заряженному до напряжения  $U_1 = 120 \text{ В}$  конденсатору емкостью  $C_1 = 4 \text{ мкФ}$  подключаются последовательно соединенные резистор с сопротивлением  $r = 1 \text{ кОм}$  и конденсатор емкостью  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$  (рис. 8.29).

Определить напряжения  $u_1$  и  $u_2$  на конденсаторах и ток  $i$  в цепи во время переходного процесса.

**Решение.** Напряжения на конденсаторах до коммутации:

$$u_1(0-) = U_1 = 120 \text{ В}; \quad u_2(0-) = 0.$$

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$-u_1 + u_2 + ri = 0, \quad (1)$$

где

$$i = C_2 \frac{du_2}{dt} = -C_1 \frac{du_1}{dt}. \quad (2)$$

Исключив из (1) и (2) все переменные, кроме одной, например  $u_2$ , получим:

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)u_2 + rC_2 \frac{du_2}{dt} = U_1. \quad (3)$$

Напряжения и ток запишем в виде

$$u_1 = u_{1y} + u_{1cb}; \quad u_2 = u_{2y} + u_{2cb}; \quad i = i_{cb},$$

где учтено, что в установившемся режиме тока в цепи нет.

Установившиеся напряжения на конденсаторах найдем из закона сохранения заряда: суммарный заряд до коммутации равен суммарному заряду в любой момент после коммутации и, в частности, в установившемся режиме:

$$C_1 u_1(0-) + C_2 u_2(0-) = C_1 u_{1y} + C_2 u_{2y}.$$

Кроме того, ясно, что в установившемся режиме  $u_{1y} = u_{2y}$ .

Из этих двух уравнений находим:  $u_{1y} = u_{2y} = 80 \text{ В}$ .

Для дифференциального уравнения (3) характеристическое уравнение

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) + rC_2 p = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -750 \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом,

$$u_1 = 80 + Ae^{p_1 t}; \quad u_2 = 80 + Be^{p_1 t}; \quad i = Ce^{p_1 t},$$

и при  $t = 0$

$$u_1(0) = 80 + A; \quad u_2(0) = 80 + B; \quad i(0) = C,$$

где начальные значения напряжений на конденсаторах находим по закону коммутации:

$$u_1(0) = u_1(0-) = 120 \text{ В}; \quad u_2(0) = u_2(0-) = 0$$

и начальное значение тока

$$i(0) = [u_1(0) - u_2(0)]/r = 0,12 \text{ А}.$$

Следовательно,  $A = 40 \text{ В}$ ;  $B = -80 \text{ В}$ ;  $C = 0,12 \text{ А}$  и

$$u_1 = 80 + 40e^{-750t} \text{ В}; \quad u_2 = 80 - 80e^{-750t} \text{ В}; \quad i = 0,12e^{-750t} \text{ А}.$$

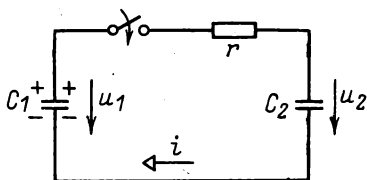


Рис. 8.29

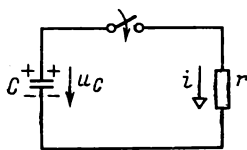


Рис. 8.30

**8.30.** В цепи рис. 8.30 заряженный до напряжения  $U_0 = 100 \text{ В}$  конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  подключается к резистору с сопротивлением  $r = 2 \text{ кОм}$ .

Рассчитать зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

**8.31.** В схеме рис. 8.31 с параметрами:  $J = 0,3 \text{ А}$ ;  $r_1 = 500 \text{ Ом}$ ;  $C = 10 \text{ мкФ}$ ;  $r = 250 \text{ Ом}$  происходит размыкание ключа.

Найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

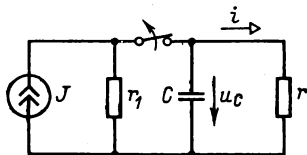


Рис. 8.31

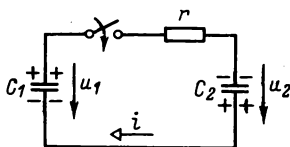


Рис. 8.32

**8.32.** Определить напряжения  $u_1$ ,  $u_2$  на конденсаторах и ток  $i$  в цепи рис. 8.32 после коммутации.

Конденсаторы емкостью  $C_1 = 8 \text{ мкФ}$  и  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$  предварительно заряжены соответственно до напряжений  $u_1(0) = U_{10} = 120 \text{ В}$  и  $u_2(0) = U_{20} = -180 \text{ В}$ . Сопротивление резистора  $r = 250 \text{ Ом}$ .

**8.33.** В схеме рис. 8.33 с синусоидальной ЭДС  $e = 100 \sin(2500t - 30^\circ)$  В происходит размыкание ключа.

Параметры схемы:  $r_1 = 100$  Ом;  $r = 500$  Ом;  $C = 2$  мкФ.

Найти напряжение на емкости  $u_C$ .

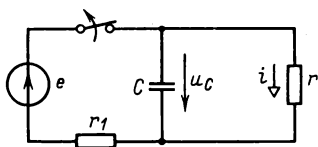


Рис. 8.33

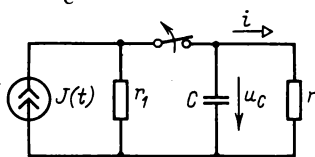


Рис. 8.34

**8.34.** В схеме рис. 8.34 найти напряжение на емкости  $u_C$  и ток  $i$  после коммутации.

Дано:  $J(t) = 0,4 \sin(314t + 90^\circ)$  А;  $r_1 = 800$  Ом;  $r = 800$  Ом;  $C = 10$  мкФ.

*Переходные процессы в цепях  $rC$  при воздействии источников постоянных напряжения и тока*

**8.35(Р).** В цепи рис. 8.35 два предварительно заряженных конденсатора емкостью  $C_1 = 6$  мкФ и  $C_2 = 4$  мкФ подключаются через резистор с сопротивлением  $r = 250$  Ом к источнику ЭДС  $E = 100$  В.

Определить напряжения  $u_1$  и  $u_2$  и ток  $i$  при  $u_1(0-) = 20$  В и  $u_2(0-) = 10$  В.

**Решение.** В данной задаче независимые начальные условия  $u_1(0-)$  и  $u_2(0-)$  заданы.

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$u_1 + u_2 + ri = E, \quad (1)$$

где

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt}. \quad (2)$$

Исключив из (1) и (2) все переменные, кроме одной, например тока  $i$ , получим однородное дифференциальное уравнение

$$r \frac{di}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0. \quad (3)$$

Цепь содержит предварительно заряженные конденсаторы и источник ЭДС  $E$ , поэтому решения для напряжений будем искать в виде суммы установившейся и свободной составляющих:

$$u_1 = u_{1y} + u_{1св}; \quad u_2 = u_{2y} + u_{2св}.$$

Тока в установившемся режиме нет, т. е.  $i = i_{\text{св}}$ .

Найдем установившиеся напряжения на конденсаторах. По второму закону Кирхгофа для установившегося режима

$$u_{1y} + u_{2y} + ri_y = u_{1y} + u_{2y} = E, \quad (4)$$

так как  $i_y = 0$ .

Для точки  $a$  по закону сохранения заряда

$$-q_{1y} + q_{2y} = -q_1(0-) + q_2(0-),$$

или

$$-C_1 u_{1y} + C_2 u_{2y} = -C_1 u_1(0-) + C_2 u_2(0-). \quad (5)$$

Решив совместно уравнения (4)

и (5), получим:  $u_{1y} = 48$  В;  $u_{2y} = 52$  В.

Для дифференциального уравнения (3) характеристическое уравнение

$$rp + (1/C_1 + 1/C_2) = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -1666 \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом, напряжения и ток можно представить в виде

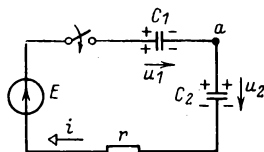


Рис. 8.35

$$u_1 = 48 + Ae^{p_1 t}; \quad u_2 = 52 + Be^{p_1 t}; \quad i = Ce^{p_1 t}.$$

В частности, при  $t = 0$  получим:

$$u_1(0) = 48 + A; \quad u_2(0) = 52 + B; \quad i(0) = C. \quad (6)$$

Начальные напряжения  $u_1(0)$  и  $u_2(0)$  определим по независимым начальным условиям:  $u_1(0) = u_1(0-) = 20$  В;  $u_2(0) = u_2(0-) = 10$  В.

Начальное значение тока найдем из уравнения (1) при  $t = 0$ , откуда  $i(0) = 0,28$  А.

Постоянные интегрирования находим из (6):  $A = -28$  В;  $B = -42$  В;  $C = 0,28$  А.

Таким образом,

$$u_1 = 48 - 28e^{-1666t} \text{ В}; \quad u_2 = 52 - 42e^{-1666t} \text{ В}; \quad i = 0,28e^{-1666t} \text{ А}.$$

**8.36(Р).** В схеме рис. 8.36 с параметрами:  $E = 120$  В;  $r_1 = 250$  Ом;  $r_2 = 250$  Ом;  $r_3 = 500$  Ом;  $C = 10$  мкФ происходит замыкание ключа.

Найти напряжение на емкости и все токи.

Решение. Напряжение на емкости до коммутации

$$u_C(0-) = Er_2/(r_3 + r_1 + r_2) = 30 \text{ В}.$$

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad (1)$$

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 = E; \quad (2)$$

$$u_C - r_2 i_2 = 0, \quad (3)$$

где  $i_3 = C \, du_C/dt$ .

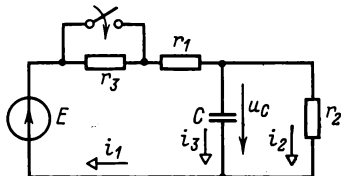
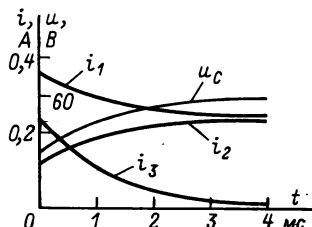


Рис. 8.36

Рис. 8.36Р →



Разрешив систему уравнений (1)–(3) относительно одной переменной, например  $u_C$ , получим дифференциальное уравнение

$$r_1 C \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) u_C = E. \quad (4)$$

Напряжение и токи представим в виде сумм установившейся и свободной составляющих:

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв};$$

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2св}; \quad i_3 = i_{3y} + i_{3св}.$$

В установившемся режиме токи и напряжение постоянны:

$$i_{1y} = i_{2y} = E/(r_1 + r_2) = 0,24 \text{ А}; \quad i_{3y} = 0; \quad u_{Cy} = r_2 i_{2y} = 60 \text{ В}.$$

Для дифференциального уравнения (4) характеристическое уравнение

$$r_1 C p + (1 + r_1/r_2) = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -800 \text{ с}^{-1}$ , т.е. свободные составляющие  $u_{Cсв} = Ae^{p_1 t}$ ;  $i_{1св} = Be^{p_1 t}$ ;  $i_{2св} = Ce^{p_1 t}$ ;  $i_{3св} = De^{p_1 t}$ .

Следовательно,

$$u_C = 60 + Ae^{p_1 t}; \quad i_1 = 0,24 + Be^{p_1 t}; \quad i_2 = 0,24 + Ce^{p_1 t}; \quad i_3 = De^{p_1 t},$$

и при  $t = 0$  начальные значения:

$$u_C(0) = 60 + A; \quad i_1(0) = 0,24 + B; \quad i_2(0) = 0,24 + C; \quad i_3(0) = D.$$

Независимое начальное условие — напряжение на емкости находим из закона коммутации  $u_C(0) = u_C(0-) = 30 \text{ В}$ .

Зависимые начальные условия — начальные значения токов определим из системы уравнений Кирхгофа (1)–(3), записанных для момента времени  $t = 0$ :

$$-i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) = 0; \quad r_1 i_1(0) + r_2 i_2(0) = E;$$

$$u_C(0) - r_2 i_2(0) = 0,$$

откуда  $i_2(0) = 0,12$  А;  $i_1(0) = 0,36$  А;  $i_3(0) = 0,24$  А, и постоянные интегрирования  $A = -30$  В;  $B = 0,12$  А;  $C = -0,12$  А;  $D = 0,24$  А.

Записываем искомые величины:

$$u_C = 60 - 30e^{-800t} \text{ В}; \quad i_1 = 0,24 + 0,12e^{-800t} \text{ А};$$

$$i_2 = 0,24 - 0,12e^{-800t} \text{ А}; \quad i_3 = 0,24e^{-800t} \text{ А}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 8.36Р.

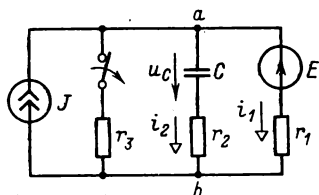
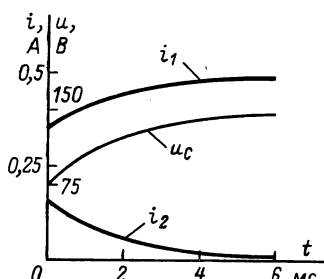


Рис. 8.37

Рис. 8.37Р →



**8.37(Р).** В схеме рис. 8.37 с источниками ЭДС  $E = 50$  В и тока  $J = 0,5$  А определить токи  $i_1$  и  $i_2$  и напряжение  $u_C$  после коммутации, если  $r_1 = 200$  Ом;  $r_2 = 300$  Ом;  $r_3 = 200$  Ом;  $C = 4$  мкФ.

**Решение.** Напряжение на емкости до коммутации определим, например, методом узловых потенциалов:

$$u_C(0-) = u_{ab}(0-) = \frac{\sum E g + \sum J}{\sum g} = \frac{E_1/r_1 + J}{1/r_1 + 1/r_3} = 75 \text{ В}.$$

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$i_1 + i_2 = J; \quad (1)$$

$$u_C + r_2 i_2 - r_1 i_1 = E, \quad (2)$$

где  $i_2 = C \, du_C/dt$ .

Разрешив систему уравнений (1) и (2) относительно одной переменной, например  $u_C$ , получим:

$$C(r_1 + r_2) \frac{du_C}{dt} + u_C = E + r_1 J. \quad (3)$$



Напряжение и токи запишем в виде двух составляющих:

$$u_C = u_{Cy} + u_{Ccb}; \quad i_1 = i_{1y} + i_{1cb}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2cb}.$$

В установившемся режиме

$$i_{1y} = J = 0,5 \text{ A}; \quad i_{2y} = 0; \quad u_{Cy} = E + Jr_1 = 150 \text{ В}.$$

Характеристическое уравнение

$$C(r_1 + r_2)p + 1 = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -500 \text{ с}^{-1}$ ; поэтому свободные составляющие

$$u_{Ccb} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{1cb} = Be^{p_1 t}, \quad i_{2cb} = Ce^{p_1 t}$$

и искомые величины

$$u_C = 150 + Ae^{p_1 t}; \quad i_1 = 0,5 + Be^{p_1 t}; \quad i_2 = Ce^{p_1 t}.$$

В частности, при  $t = 0$  имеем:  $u_C(0) = 150 + A$ ;  $i_1(0) = 0,5 + B$ ;  $i_2(0) = C$ .

Для вычисления постоянных интегрирования определим начальные значения. По закону коммутации независимое начальное условие – напряжение на емкости  $u_C(0) = u_C(0-) = 75 \text{ В}$ . Начальные значения токов в ветвях найдем из уравнений Кирхгофа (1), (2), записанных для момента времени  $t = 0$ :

$$J = i_1(0) + i_2(0); \quad u_C(0) + r_2 i_2(0) - r_1 i_1(0) = E,$$

откуда  $i_2(0) = 0,15 \text{ A}$ ;  $i_1(0) = 0,35 \text{ A}$ , и постоянные интегрирования  $A = -75 \text{ В}$ ;  $B = -0,15 \text{ A}$ ;  $C = 0,15 \text{ A}$ .

Записываем искомые величины:

$$u_C = 150 - 75e^{-500t} \text{ В};$$

$$i_1 = 0,5 - 0,15e^{-500t} \text{ A}; \quad i_2 = 0,15e^{-500t} \text{ A}.$$

Соответствующие зависимости представлены на рис. 8.37Р.

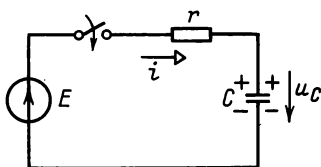


Рис. 8.38

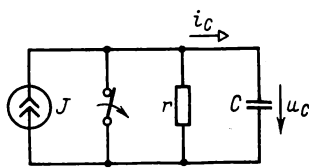


Рис. 8.39

**8.38.** В цепи рис. 8.38 конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  подключается через резистор  $r = 2500 \text{ Ом}$  к источнику ЭДС  $E = 100 \text{ В}$ .

Рассчитать зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$  для трех случаев:

- 1)  $u_C(0-) = 0 \text{ В}$ ; 2)  $u_C(0-) = 50 \text{ В}$ ; 3)  $u_C(0-) = -50 \text{ В}$ .

8.39. В схеме рис. 8.39 при размыкании ключа параллельно включенные емкость и сопротивление подключаются к источнику тока. Параметры схемы:  $J = 0,2$  А;  $r = 1000$  Ом;  $C = 2$  мкФ.

Найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i_C(t)$ .

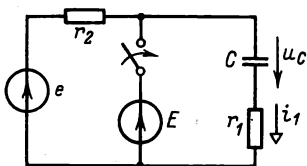


Рис. 8.40

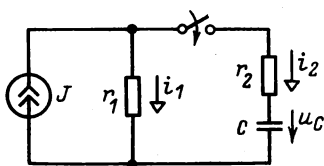


Рис. 8.41

8.40. В цепи рис. 8.40 последовательно включенные конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ и резистор с сопротивлением  $r_1 = 250$  Ом подключаются к источнику постоянной ЭДС  $E = 80$  В. До замыкания ключа цепь питается от источника с гармонической ЭДС  $e = 100\sqrt{2} \sin(2500t - 45^\circ)$  В и внутренним сопротивлением  $r_2 = 150$  Ом.

Определить  $u_C$  и  $i_1$  после коммутации.

8.41. В схеме рис. 8.41 происходит замыкание ключа. Параметры схемы  $J = 0,5$  А;  $r_1 = 200$  Ом;  $r_2 = 300$  Ом;  $C = 10$  мкФ.

Найти зависимости  $u_C(t)$ ,  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ .

8.42. Определить напряжение  $u_C$  и токи  $i_1$ ,  $i_2$  в схеме рис. 8.42 после коммутации.

Дано:  $E = 180$  В;  $r_1 = 240$  Ом;  $r_2 = 120$  Ом;  $C = 25$  мкФ.

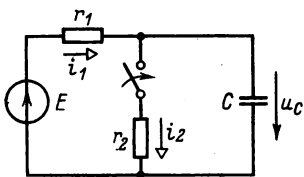


Рис. 8.42

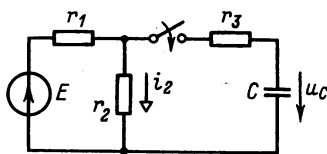


Рис. 8.43

8.43. В схеме рис. 8.43 происходит замыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 120$  В;  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 80$  Ом;  $r_3 = 120$  Ом;  $C = 15$  мкФ.

Рассчитать зависимости  $u_C(t)$  и  $i_2(t)$ .

8.44. Определить  $u_C$  и  $i_1$  в схеме рис. 8.44 после коммутации при  $J = 1$  А;  $r_1 = 100$  Ом;  $r_2 = 150$  Ом;  $r_3 = 50$  Ом;  $C = 16$  мкФ.

**8.45.** Найти напряжение  $u_C$  и ток  $i_1$  в схеме рис. 8.45 после коммутации.

Дано:  $E = 100$  В;  $r_1 = r_4 = 20$  Ом;  $r_2 = r_3 = 80$  Ом;  $C = 50$  мкФ.

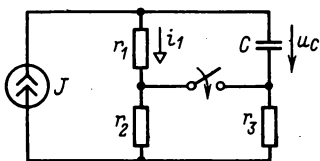


Рис. 8.44

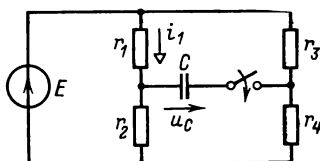


Рис. 8.45

**8.46.** В результате увеличения сопротивления в одной из ветвей цепи рис. 8.46 возникает переходный процесс.

Определить напряжение  $u_C$  и токи  $i_1$ ,  $i_2$  при заданных параметрах:  $E = 180$  В;  $r_1 = 60$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом;  $r_3 = 100$  Ом;  $C = 25$  мкФ.

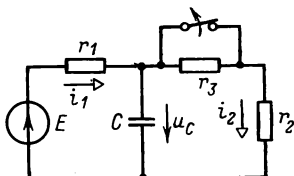


Рис. 8.46

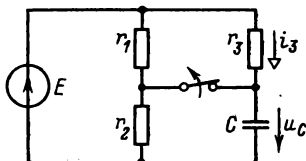


Рис. 8.47

**8.47.** В схеме рис. 8.47 размыкается ключ. Параметры схемы:  $E = 80$  В;  $r_1 = r_3 = 100$  Ом;  $r_2 = 50$  Ом;  $C = 12,5$  мкФ.

Найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i_3(t)$ .

**8.48.** Определить токи  $i_1$ ,  $i_2$ , напряжение на емкости  $u_C$  и напряжение источника тока  $u$  в схеме рис. 8.48 после размыкания ключа

при  $J = 2$  А;  $r_1 = 40$  Ом;  $r_2 = 60$  Ом;  $r_3 = 20$  Ом;  $C = 25$  мкФ.

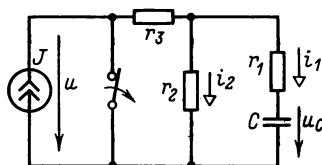


Рис. 8.48

*Переходные процессы в цепях rC при гармоническом воздействии и при воздействии нескольких источников*

**8.49(Р).** Участок с параметрами  $r_2 = 30$  Ом;  $L = 0,04$  Гн неразветвленной цепи переменного тока, в которой действует ЭДС  $e = 100 \sin(2500t + 60^\circ)$  В, замыкается накоротко (рис. 8.49).

Определить ток  $i$  в участке цепи с параметрами  $r_1 = 20$  Ом;  $C = 4$  мкФ и напряжение  $u_C$  на конденсаторе.

Решение. Из режима цепи до коммутации определим начальное напряжение  $u_C(0-)$ . Комплексная амплитуда напряжения  $u_C$  до коммутации

$$\begin{aligned}\dot{U}_{Cm} &= \frac{\dot{E}_m [-j(1/\omega C)]}{r_1 + r_2 + j\omega L - j(1/\omega C)} = \\ &= \frac{100 \angle 60^\circ (-j100)}{20 + 30 + j100 - j100} = 200 \angle -30^\circ \text{ В.}\end{aligned}$$

Мгновенное значение напряжения

$$u_C = 200 \sin(2500t - 30^\circ) \text{ В.}$$

Следовательно, при  $t = 0$  напряжение

$$u_C(0-) = 200 \sin(-30^\circ) = -100 \text{ В.}$$

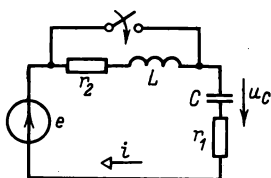


Рис. 8.49

Уравнение Кирхгофа для цепи после коммутации

$$r_1 C du_C/dt + u_C = e. \quad (1)$$

Решения для искомых величин запишем в виде

$$i = i_y + i_{св}; \quad u_C = u_{Cy} + u_{Cсв}.$$

Рассчитаем ток и напряжение установившегося режима:

$$\dot{I}_{my} = \frac{\dot{E}_m}{r_1 - j \cdot 1/\omega C} = \frac{100 \angle 60^\circ}{20 - j100} = 0,98 \angle 138,7^\circ \text{ А};$$

$$i_y = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{U}_{Cmy} = \dot{I}_{my} (-j \cdot 1/\omega C) = 0,98 \angle 138,7^\circ \cdot 100 \angle -90^\circ = 98 \angle 48,7^\circ \text{ В};$$

$$u_{Cy} = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) \text{ В.}$$

Характеристическое уравнение

$$r_1 C p + 1 = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -12\,500 \text{ с}^{-1}$ . Поэтому свободные составляющие

$$u_{Cсв} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{св} = Be^{p_1 t},$$

и

$$u_C = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) + Ae^{p_1 t};$$

$$i = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) + Be^{p_1 t}.$$

При  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= 98 \sin 48,7^\circ + A; \\ i(0) &= 0,98 \sin 138,7^\circ + B. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Начальное напряжение на емкости находим из закона коммутации:

$$u_C(0) = u_C(0-) = -100 \text{ В.}$$

Начальное значение тока найдем из уравнения (1), записанного для момента времени  $t = 0$ :

$$u_C(0) + ri(0) = e(0),$$

откуда  $i(0) = 9,33 \text{ А}$  и из (2) постоянные интегрирования  $A = -173,6 \text{ В}$ ;  $B = 8,68 \text{ А}$ . Следовательно,

$$u_C = 98 \sin(2500t + 48,7^\circ) - 173,6e^{-12500t} \text{ В};$$

$$i = 0,98 \sin(2500t + 138,7^\circ) + 8,68e^{-12500t} \text{ А.}$$

**8.50(Р).** В схеме рис. 8.50 происходит размыкание ключа. Параметры схемы:  $J = 2 \text{ А}$ ;  $e = 120 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 50 \text{ Ом}$ ;  $C = 10 \text{ мкФ}$ .

Найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i_1(t)$ .

**Решение.** Определим напряжение на емкости до коммутации  $u_C(0-)$ . Поскольку в этом режиме ветвь  $r_2C$  замкнута, то  $u_C(0-) = 0$ .

Уравнения Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-J + i_1 + i_2 = 0; \quad (1)$$

$$r_2 i_2 + u_C - r_1 i_1 = e. \quad (2)$$

Решение будем искать в виде

$$u_C = u_{Cy} + u_{C\text{св}};$$

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}}.$$

Найдем установившийся режим после коммутации, применяя метод наложения. От действия источника постоянного тока  $J$  имеем:

$$i'_{1y} = J = 2 \text{ А}; \quad u'_{Cy} = r_1 i'_{1y} = 100 \text{ В.}$$

От действия гармонической ЭДС  $e$  имеем

$$i''_{1m} = -i''_{2m} = \frac{-\dot{E}_m}{r_1 + r_2 - j/\omega C} = -0,848 \angle 75^\circ \text{ А};$$

$$\dot{U}''_{Cm} = i''_{2m}(-j/\omega C) = 84,8 \angle -15^\circ \text{ В,}$$

т. е.

$$i''_{1y} = -0,848 \sin(1000t + 75^\circ) \text{ А};$$

$$u''_{Cy} = 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) \text{ В.}$$

Таким образом,

$$u_{Cy} = u'_{Cy} + u''_{Cy} = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) \text{ В};$$

$$i_{1y} = i'_{1y} + i''_{1y} = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) \text{ А.}$$

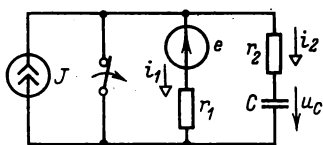
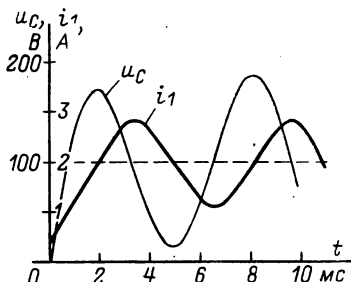


Рис. 8.50

Рис. 8.50Р →



Методом входного сопротивления (8.1) составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = r_2 + 1/pC + r_1 = 0,$$

корень которого  $p_1 = -1000 \text{ с}^{-1}$ .

Следовательно,

$$u_{C\text{св}} = Ae^{p_1 t}; \quad i_{1\text{св}} = Be^{p_1 t}.$$

Искомые величины:

$$u_C = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) + Ae^{p_1 t};$$

$$i_1 = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) + Be^{p_1 t},$$

и, в частности, при  $t = 0$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0) &= 100 + 84,8 \sin(-15^\circ) + A; \\ i_1(0) &= 2 - 0,848 \sin 75^\circ + B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Начальное значение напряжения на емкости найдем из закона коммутации:  $u_C(0) = u_C(0-) = 0$ . Начальное значение тока  $i_1(0)$  найдем из уравнений Кирхгофа (1) и (2). При  $t = 0$  из уравнений

$$-J + i_1(0) + i_2(0) = 0;$$

$$r_2 i_2(0) + u_C(0) - r_1 i_1(0) = e(0)$$

получим  $i_1(0) = 0,4 \text{ А}$  и из (3) постоянные интегрирования  $A = -78 \text{ В}; B = -0,78 \text{ А}$ .

Записываем искомые зависимости:

$$u_C(t) = 100 + 84,8 \sin(1000t - 15^\circ) - 78e^{-1000t} \text{ В};$$

$$i_1(t) = 2 - 0,848 \sin(1000t + 75^\circ) - 0,78e^{-1000t} \text{ А}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 8.50P.

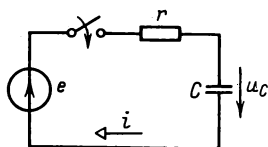


Рис. 8.51

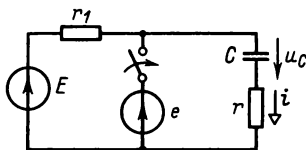


Рис. 8.52

**8.51.** Цепь  $rC$  (рис. 8.51) с параметрами  $r = 250 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$  подключается к источнику синусоидальной ЭДС  $e$ .

Найти: 1) напряжение  $u_C$  и ток  $i$  при ЭДС  $e = 312 (\sin 314t + 30^\circ) \text{ В}$ ; 2) начальную фазу  $\alpha_1$  ЭДС  $e = 312 \sin(314t + \alpha_1) \text{ В}$ , при которой отсутствуют переходный процесс и напряжение  $u_C$  в этом режиме; 3) начальную фазу  $\alpha_2$  ЭДС  $e = 312 \sin(314t + \alpha_2) \text{ В}$ , при которой напряжение  $u_C$  во время переходного процесса получается наибольшим, и максимальное значение этого напряжения.

**8.52.** В цепи рис. 8.52 до коммутации начальный режим определялся источником с постоянной ЭДС  $E = 30 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r_1 = 75 \text{ Ом}$ . После замыкания ключа цепь  $rC$  с параметрами  $r = 125 \text{ Ом}$ ,  $C = 80 \text{ мкФ}$  подключается к источнику гармонической ЭДС  $e = 180 \sin(314t + 30^\circ) \text{ В}$ .

Рассчитать зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

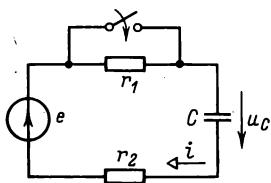


Рис. 8.53

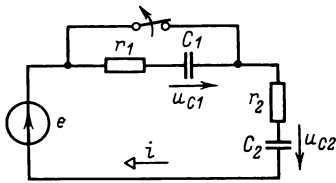


Рис. 8.54

**8.53.** Определить напряжение  $u_C$  в цепи  $rC$  (рис. 8.53) при уменьшении сопротивления от значения  $r_1 + r_2$  до значения  $r_2$ , где  $r_1 = 400 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 200 \text{ Ом}$ . Электродвижущая сила источника  $e = 200 \sin(314t + 30^\circ) \text{ В}$ , емкость конденсатора  $C = 10 \text{ мкФ}$ .

**8.54.** В схеме рис. 8.54 происходит размыкание ключа. Параметры схемы:  $e = 250 \sin(314t + 10^\circ)$  В;  $r_1 = 400$  Ом;  $r_2 = 100$  Ом;  $C_1 = 60$  мкФ;  $C_2 = 20$  мкФ.

Найти напряжения на емкостях  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$ .

### 8.3. Переходные процессы в цепях с несколькими реактивными элементами (классический метод расчета)

*Свободные процессы в цепях с несколькими реактивными элементами*

**8.55(Р).** После замыкания ключа источник тока  $J = 1$  А отключается от цепи (рис. 8.55) с параметрами:  $r = 100$  Ом;  $L = 2,083$  Гн;  $C = 50$  мкФ.

Определить напряжение  $u_C$  и токи  $i_1$  и  $i_2$ .

Решение. Рассчитаем сначала напряжение на емкости  $u_C$ , после чего токи найдем из соотношений

$$i_2 = u_C/r; \quad i_1 = i_2 + C du_C/dt.$$

Находим ток в индуктивности и напряжение на емкости до коммутации:

$$i_1(0-) = J = 1 \text{ А}; \quad u_C(0-) = Jr = 100 \text{ В}.$$

Так как источник отключается, то составляющие установившегося режима отсутствуют:

$$i_{1y} = 0; \quad i_{2y} = 0; \quad u_{Cy} = 0.$$

Характеристическое уравнение составим методом входного сопротивления (8.1). Например, при разрыве ветви с индуктивностью получим

$$Z(p) = pL + \frac{r(1/pC)}{r + 1/pC} = 0;$$

и характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{1}{rC}p + \frac{1}{LC} = 0$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -1/2rC \pm \sqrt{1/4r^2C^2 - 1/LC}, \text{ т. е. } p_1 = -80 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -120 \text{ с}^{-1}.$$

В случае двух различных действительных корней решение для свободной составляющей запишем по (8.2) в виде

$$u_C = u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$



Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования. Поскольку для определения двух постоянных интегрирования необходимо иметь два уравнения, то дополнительно запишем производную искомого напряжения

$$du_C/dt = du_{C\text{св}}/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Запишем систему уравнений для определения постоянных интегрирования ( $t = 0$ ):

$$u_C(0) = A_1 + A_2; \quad du_C/dt|_0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (1)$$

Для вычисления постоянных интегрирования из (1) необходимо найти начальные условия — искомую величину и ее первую производную при  $t = 0$ .

Начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости — это независимые начальные условия, которые находим из законов коммутации (8.7) и (8.8):  $i_1(0) = i_1(0-) = 1 \text{ А}$ ;  $u_C(0) = u_C(0-) = 100 \text{ В}$ . Все остальные начальные условия являются зависимыми. Они находятся из уравнений Кирхгофа для мгновенных значений:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad (2)$$

$$L di_1/dt + ri_2 = 0; \quad (3)$$

$$u_C - ri_2 = 0, \quad (4)$$

причем напряжение  $u_C$  и ток  $i_3$  связаны соотношением

$$i_3 = C du_C/dt. \quad (5)$$

В частности, для момента времени  $t = 0$

$$-i_1(0) + i_2(0) + i_3(0) = 0; \quad (2a)$$

$$L di_1/dt|_0 + ri_2(0) = 0; \quad (3a)$$

$$u_C(0) - ri_2(0) = 0. \quad (4a)$$

Это три уравнения с тремя неизвестными величинами. Из этих уравнений находим:

$$i_2(0) = u_C(0)/r = 1 \text{ А}; \quad i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0$$

и из (5) при  $t = 0$  имеем:

$$du_C/dt|_0 = i_3(0)/C = 0.$$

При найденных значениях  $u_C(0)$  и  $du_C/dt|_0$  из системы (1) получим:  $A_1 = 300 \text{ В}$ ;  $A_2 = -200 \text{ В}$ .

Записываем искомое решение для напряжения на емкости:

$$u_C = 300e^{-80t} - 200e^{-120t} \text{ В}.$$

Находим токи

$$i_2 = u_C / r = 3e^{-80t} - 2e^{-120t} \text{ А};$$

$$i_1 = i_2 + C du_C / dt = 1,8e^{-80t} - 0,8e^{-120t} \text{ А}.$$

**8.56(Р).** В схеме рис. 8.56 происходит замыкание ключа.

Найти ток  $i$  и напряжение на емкости  $u_C$  в двух случаях:

- 1) параметры схемы:  $r = 80 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,5 \text{ Гн}$ ;  $C = 122 \text{ мкФ}$ ;
  - 2) параметры схемы:  $r = 200 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $C = 20 \text{ мкФ}$ .
- Ток источника  $J(t) = 2 \sin(250t + 90^\circ) \text{ А}$ .

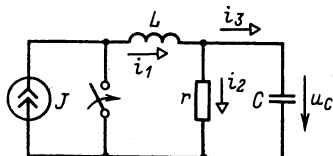


Рис. 8.55

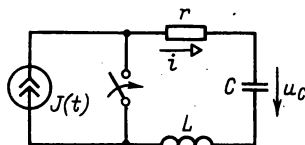


Рис. 8.56

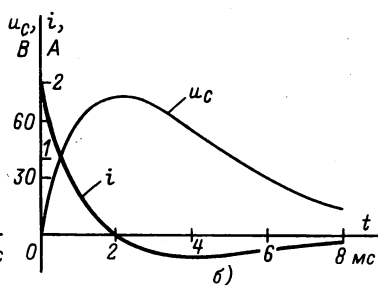
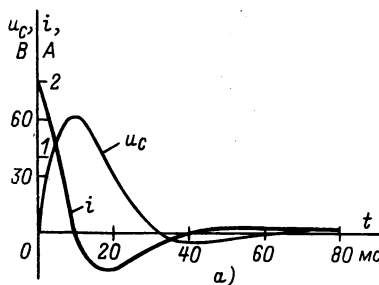


Рис. 8.56Р

**Решение (для случая 1).** Из схемы до коммутации находим ток в индуктивности и напряжение на емкости при  $t = 0$ :

$$i(0-) = 2 \sin 90^\circ = 2 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{J}_m (-jX_C) = 2 \angle 90^\circ (-j32,79) = 65,58 \angle 0^\circ \text{ В},$$

т. е.  $u_C = 65,58 \sin 250t \text{ В}$  и, в частности,  $u_C(0-) = 0$ .

Поскольку после замыкания ключа схема отключается от источника тока, установившиеся значения равны нулю, т. е. ток и напряжение равны свободным составляющим:  $i = i_{св}$ ,  $u_C = u_{Cсв}$ .

Характеристическое уравнение составим методом входного сопротивления (8.1) для схемы после коммутации:

$$Z(p) = r + pL + 1/pC = 0,$$

откуда после элементарных преобразований получим:

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -r/2L \pm \sqrt{r^2/4L^2 - 1/LC}$$

получаются комплексные сопряженные:

$$p_1 = (-80 + j100) \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = (-80 - j100) \text{ с}^{-1}.$$

В этом случае свободные составляющие можно записать по (8.4) в виде

$$i_{\text{св}} = i = Ae^{-80t} \sin(100t + \alpha);$$

$$u_{\text{св}} = u_C = Be^{-80t} \sin(100t + \beta).$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\beta$  — постоянные интегрирования.

Для отыскания двух постоянных интегрирования каждой из величин вычислим производные тока и напряжения:

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} = \frac{di}{dt} = -80Ae^{-80t} \sin(100t + \alpha) + 100Ae^{-80t} \cos(100t + \alpha);$$

$$\frac{du_{\text{св}}}{dt} = \frac{du_C}{dt} = -80Be^{-80t} \sin(100t + \beta) +$$

$$+ 100Be^{-80t} \cos(100t + \beta).$$

Для определения постоянных интегрирования запишем значения каждой из величин и их производных при  $t = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{св}}(0) &= i(0) = A \sin \alpha; \\ \frac{di_{\text{св}}}{dt} \Big|_0 &= \frac{di}{dt} \Big|_0 = -80A \sin \alpha + 100A \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{св}}(0) &= u_C(0) = B \sin \beta; \\ \frac{du_{\text{св}}}{dt} \Big|_0 &= \frac{du_C}{dt} \Big|_0 = -80B \sin \beta + 100B \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В данной задаче свободные составляющие равны искомым величинам, поэтому далее их будем сразу записывать.

Независимые начальные условия — ток в индуктивности и напряжение на емкости найдем из законов коммутации:  $i(0) = i(0-) = 2 \text{ А}$ ;  $u_C(0) = u_C(0-) = 0$ .

Уравнение Кирхгофа для цепи после коммутации

$$ri + L di/dt + u_C = 0, \quad (3)$$

где

$$i = C du_C/dt, \quad (4)$$

и, в частности, при  $t = 0$

$$ri(0) + L di/dt|_0 + u_C(0) = 0. \quad (3a)$$

Из (3a) находим  $\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = -320 \text{ А/с}.$

Начальное значение производной напряжения на емкости получим из (4):

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} = 16,39 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

При найденных начальных значениях из системы уравнений (1) и (2) определим постоянные интегрирования:

$$A = -2,56 \text{ А}; \quad \alpha = -51,34^\circ; \quad B = 163,9 \text{ В}; \quad \beta = 0^\circ.$$

Записываем искомые величины:

$$i = -2,56e^{-80t} \sin(100t - 51,34^\circ) \text{ А};$$

$$u_C = 163,9e^{-80t} \sin(100t) \text{ В}.$$

Эти величины представлены на рис. 8.56Р, а.

Решение (для случая 2). В этом случае корни характеристического уравнения получаются действительными и равными:  $p_1 = p_2 = -500 \text{ с}^{-1}$ .

В случае двух равных корней решение для свободных составляющих записывается по (8.3) в виде

$$i_{\text{св}} = i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 t e^{p_2 t};$$

$$u_{\text{св}} = u_C = B_1 e^{p_1 t} + B_2 t e^{p_2 t}.$$

Производные искомых величин

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} = \frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + p_2 A_2 t e^{p_2 t};$$

$$\frac{du_{\text{св}}}{dt} = \frac{du_C}{dt} = p_1 B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + p_2 B_2 t e^{p_2 t}.$$

При  $t = 0$  получим системы уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$i_{\text{св}}(0) = i(0) = A_1; \quad \left. \frac{di_{\text{св}}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = p_1 A_1 + A_2; \quad (5)$$

$$u_{\text{св}}(0) = u_C(0) = B_1; \quad \left. \frac{du_{\text{св}}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = p_1 B_1 + B_2. \quad (6)$$

Независимые начальные условия те же, что и в случае 1:  $i(0) = i(0-) = 2 \text{ А}; u_C(0) = u_C(0-) = 0.$

Зависимые начальные условия находим опять из (3) и (4):

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = -2000 \text{ А/с}; \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = 10^5 \text{ В/с}.$$

Постоянные интегрирования находим из (5) и (6):

$$A_1 = 2 \text{ А}; \quad A_2 = -1000 \text{ А/с}; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = 10^5 \text{ В/с}.$$

Следовательно, искомые величины  $i = 2e^{-500t} - 1000te^{-500t} \text{ А}; u_C = 10^5 te^{-500t} \text{ В}.$

Эти зависимости представлены на рис. 8.56Р, 6.

**8.57(Р).** Параллельный колебательный контур с параметрами  $g = 10^{-3} \text{ См}; C = 5 \text{ мкФ}; L = 0,2 \text{ Гн}$  при нулевых начальных условиях подключается к источнику тока  $J = 0,1 \text{ А}$  (рис. 8.57).

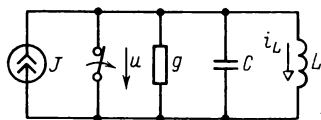


Рис. 8.57

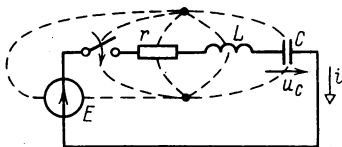


Рис. 8.57Р

Найти зависимости от времени напряжения на контуре  $u$  и тока в индуктивности  $i_L$ .

**Решение.** Для отыскания напряжения и тока применим свойство дуальности. На рис. 8.57Р представлена схема последовательного колебательного контура, дуального заданному контуру. Решения для тока  $i$  и напряжения на емкости  $u_C$  последовательного контура полагаем известными:

$$i = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\frac{r}{2L}t} \sin \omega_0 t;$$

$$u_C = E - E e^{-\frac{r}{2L}t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{r}{2L\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

где  $\omega_0 = \sqrt{1/LC - r^2/4L^2}$ .

Для обоих контуров дуальны величины  $i$  и  $u$ ,  $u_C$  и  $i_L$ ,  $E$  и  $J$ ,  $r$  и  $g$ ,  $L$  и  $C$ ,  $C$  и  $L$ . Чтобы получить искомые решения, заменим в известных решениях электрические величины и параметры соответствующими дуальными величинами, т. е.

$$u = \frac{J}{\omega_0 C} e^{-\frac{g}{2C}t} \sin \omega_0 t;$$

$$i_L = J - J e^{-\frac{g}{2C}t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{g}{2C\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

где  $\omega_0 = \sqrt{1/CL - g^2/4C^2}$ .

При заданных параметрах контура имеем:

$$u = 20,1 e^{-100t} \sin 995t \text{ В};$$

$$i_L = 0,1 - 0,1 e^{-100t} (\cos 995t + 0,1005 \sin 995t) = \\ = 0,1 - 0,1005 e^{-100t} \sin (995t + 84,26^\circ) \text{ А}.$$

**8.58.** Предварительно заряженный до напряжения  $u_C(0-) = 40 \text{ В}$  конденсатор емкостью  $C = 200 \text{ мкФ}$  подключается к цепи  $rL$  (рис. 8.58) с параметрами:  $r = 20 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,2 \text{ Гн}$ .

Рассчитать зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

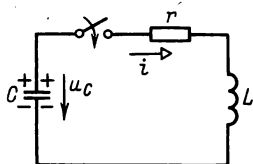


Рис. 8.58

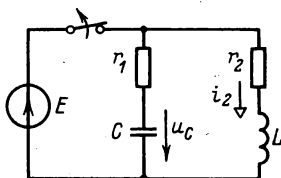


Рис. 8.59

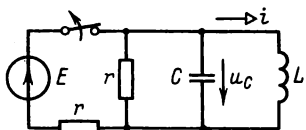


Рис. 8.60

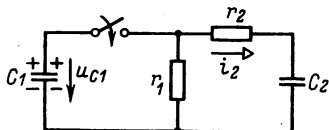


Рис. 8.61

**8.59.** От цепи, состоящей из двух параллельных ветвей с параметрами  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $C = 80 \text{ мкФ}$  и  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,25 \text{ Гн}$ , отключается источник ЭДС  $E = 50 \text{ В}$  (рис. 8.59).

Определить напряжение на конденсаторе  $u_C$  и ток в катушке  $i_2$ .

**8.60.** В схеме рис. 8.60 происходит размыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 100 \text{ В}$ ;  $r = 500 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $C = 10 \text{ мкФ}$ .

Найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i(t)$ .

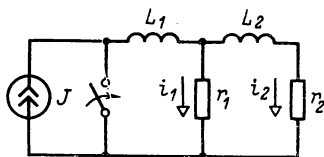


Рис. 8.62

**8.61.** Определить напряжение  $u_{C1}$  и ток  $i_2$  в схеме рис. 8.61 после коммутации.

Дано:  $u_{C1}(0-) = 100$  В;  $C_1 = 10$  мкФ;  $C_2 = 5$  мкФ;  $r_1 = 100$  Ом;  $r_2 = 250$  Ом.

**8.62.** В схеме рис. 8.62 происходит замыкание ключа.

Рассчитать зависимости  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  при  $J = 1,4$  А;  $r_1 = 20$  Ом;  $r_2 = 50$  Ом;  $L_1 = 0,05$  Гн;  $L_2 = 0,1$  Гн.

*Переходные процессы в цепях с несколькими реактивными элементами при воздействии постоянных и гармонических источников напряжения и тока*

**8.63(Р).** В схеме рис. 8.63 происходит замыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 200$  В;  $J = 1$  А;  $r_1 = 100$  Ом;  $r_2 = 100$  Ом;  $L = 0,5$  Гн;  $C = 400$  мкФ. Найти зависимости токов ветвей от времени:  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$ .

Решение. Порядок решения прием следующим. Сначала найдем напряжение на емкости  $u_C$ . Затем ток  $i_1$  определим по закону Ома  $i_1 = (E - u_C)/r_1$ , ток в емкости  $i_3 = C du_C/dt$ , а ток  $i_2$  найдем по первому закону Кирхгофа  $i_2 = J + i_1 - i_3$ .

Ток в индуктивности и напряжение на емкости до коммутации:  $i_2(0-) = J = 1$  А;  $u_C(0-) = E = 200$  В.

Применяя метод наложения, вычисляем токи и напряжение установившегося режима в схеме после коммутации:

$$i_{1y} = \frac{E}{r_1 + r_2} - J \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,5 \text{ А;}$$

$$i_{2y} = \frac{E}{r_1 + r_2} + J \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 1,5 \text{ А;}$$

$$i_{3y} = 0; \quad u_{Cy} = r_2 i_{2y} = 150 \text{ В.}$$

Для составления характеристического уравнения по (8.1) составим входное сопротивление относительно точек разрыва ветви с индуктивностью и приравняем его нулю:

$$Z(p) = r_2 + pL + \frac{r_1(1/pC)}{r_1 + 1/pC} = 0,$$

откуда при заданных параметрах схемы получим характеристическое уравнение

$$p^2 + 225p + 10^4 = 0,$$

корни которого  $p_1 = -61 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -164 \text{ с}^{-1}$ . Следовательно, по (8.2) свободная составляющая напряжения

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Напряжение на емкости представим в виде суммы установившейся и свободной составляющих:  $u_C = u_{Cy} + u_{Ccb}$ .

Для определения двух постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  дополнительно запишем производную напряжения:

$$du_C/dt = du_{Ccb}/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

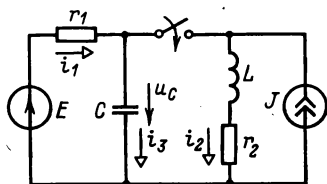


Рис. 8.63

В частности, при  $t = 0$

$$u_{Ccb}(0) = A_1 + A_2; \quad (1)$$

$$\left. \frac{du_{Ccb}}{dt} \right|_0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (2)$$

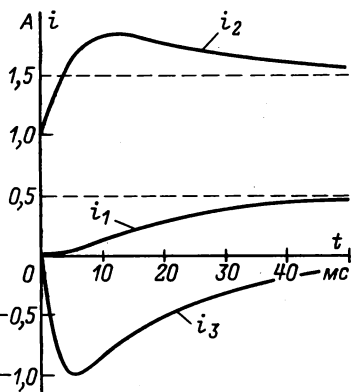


Рис. 8.63Р

Это система уравнений для определения постоянных интегрирования.

Для вычисления постоянных интегрирования необходимо найти начальные условия — начальное значение свободной составляющей напряжения на емкости и ее производной.

По законам коммутации ток в индуктивности и напряжение на емкости не изменяются скачком, т. е.  $i_2(0) = i_2(0-) = 1$  А;  $u_C(0) = u_C(0-) = 200$  В.

Начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости:

$$i_{2cb}(0) = i_2(0) - i_{2y}(0) = 1 - 1,5 = -0,5 \text{ А};$$

$$u_{Ccb}(0) = u_C(0) - u_{Cy}(0) = 200 - 150 = 50 \text{ В}.$$

Запишем уравнения Кирхгофа для свободных составляющих схемы после коммутации. При этом идеальный источник ЭДС  $E$  заменяем короткозамкнутым участком, а ветвь с идеальным источником тока  $J$  разрываем:

$$-i_{1cb} + i_{2cb} + i_{3cb} = 0; \quad (3)$$

$$r_1 i_{1cb} + u_{Ccb} = 0; \quad (4)$$

$$L di_{2cb}/dt + r_2 i_{2cb} - u_{Ccb} = 0. \quad (5)$$



В частности, для момента времени  $t = 0$

$$-i_{1\text{св}}(0) + i_{2\text{св}}(0) + i_{3\text{св}}(0) = 0; \quad (3a)$$

$$r_1 i_{1\text{св}}(0) + u_{\text{св}}(0) = 0. \quad (4a)$$

В двух последних уравнениях две известные величины:  $i_{2\text{св}}(0)$  и  $u_{\text{св}}(0)$ ; две другие находим:

$$i_{1\text{св}}(0) = -u_{\text{св}}(0)/r_1 = -0,5 \text{ А};$$

$$i_{3\text{св}}(0) = i_{1\text{св}}(0) - i_{2\text{св}}(0) = 0.$$

Производная свободной составляющей напряжения на емкости  $du_{\text{св}}/dt = i_{3\text{св}}/C$  в момент времени  $t = 0$  равна нулю:

$$\left. \frac{du_{\text{св}}}{dt} \right|_0 = \frac{i_{3\text{св}}(0)}{C} = 0.$$

При найденных значениях  $u_{\text{св}}(0)$  и  $du_{\text{св}}/dt|_0$  из (1) и (2) определим постоянные:  $A_1 = 79,6 \text{ В}$ ;  $A_2 = -29,6 \text{ В}$ .

Таким образом, решение для напряжения на емкости получено:

$$u_{\text{св}} = 150 + 79,6e^{-61t} - 29,6e^{-164t} \text{ В}.$$

Находим токи:

$$i_1 = (E - u_{\text{св}})/r_1 = 0,5 - 0,796e^{-61t} + 0,296e^{-164t} \text{ А};$$

$$i_3 = C du_{\text{св}}/dt = -1,942e^{-61t} + 1,942e^{-164t} \text{ А};$$

$$i_2 = J + i_1 - i_3 = 1,5 + 1,146e^{-61t} - 1,646e^{-164t} \text{ А}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 8.63Р.

**8.64(Р).** В схеме рис. 8.64 размыкается ключ. Параметры схемы:  $J(t) = 2 \sin(2500t + 30^\circ) \text{ А}$ ;  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $L = 0,2 \text{ Гн}$ .

Найти зависимости  $u_{\text{св}}(t)$  и  $i_2(t)$ .

**Решение.** Напряжение на емкости и ток в индуктивности в момент  $t = 0$  до коммутации:  $u_{\text{св}}(0-) = 0$ ,  $i_1(0-) = 0$ .

Искомые величины представим в виде суммы установившейся и свободной составляющих:  $u_{\text{св}} = u_{\text{св}} + u_{\text{свсв}}$ ;  $i_2 = i_{2y} + i_{2\text{свсв}}$ .

Найдем комплексные амплитуды и мгновенные значения токов и напряжения на конденсаторе для установившегося режима после коммутации:

$$i_{1m} = j_m \frac{r}{r + jx_L - jx_C} = 2 \angle 30^\circ \frac{100}{100 + j500 - j400} =$$

$$= \sqrt{2} \angle -15^\circ \text{ А};$$

$$i_{2m} = j_m \frac{jx_L - jx_C}{r + jx_L - jx_C} = \sqrt{2} \angle 75^\circ \text{ А};$$

$$U_{Cm} = I_{1m}(-jx_C) = \sqrt{2} \angle -15^\circ (-j400) = 400 \sqrt{2} \angle -105^\circ \text{ В};$$

$$i_{1y} = \sqrt{2} \sin(2500t - 15^\circ) \text{ А};$$

$$i_{2y} = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) \text{ А};$$

$$u_{Cy} = 400 \sqrt{2} \sin(2500t - 105^\circ) \text{ В}.$$

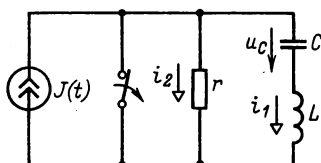


Рис. 8.64

Методом входного сопротивления (8.1) составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = r + pL + 1/pC = 0.$$

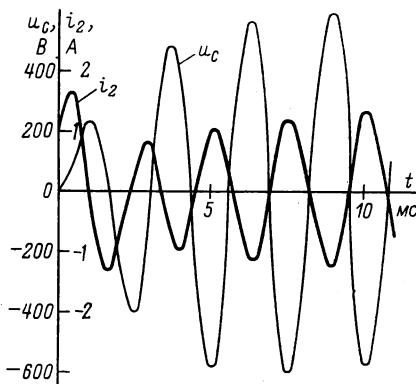


Рис. 8.64P

Это характеристическое уравнение

$$p^2 + 500p + 5 \cdot 10^6 = 0$$

имеет корни комплексные сопряженные  $p_{1,2} = -250 \pm j2220 \text{ с}^{-1}$ .

Следовательно, свободные составляющие можно по (8.4) записать в виде

$$u_{C\text{св}} = Ae^{-250t} \sin(2220t + \alpha);$$

$$i_{2\text{св}} = Be^{-250t} \sin(2220t + \beta).$$

Найдем свободные составляющие. Составим системы уравнений для определения постоянных интегрирования  $A$ ,  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\beta$ . Для определения двух постоянных интегрирования каждой из искомых величин вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{du_{C\text{св}}}{dt} &= -250Ae^{-250t} \sin(2220t + \alpha) + \\ &+ 2220Ae^{-250t} \cos(2220t + \alpha); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{2\text{св}}}{dt} &= -250Be^{-250t} \sin(2220t + \beta) + \\ &+ 2220Be^{-250t} \cos(2220t + \beta). \end{aligned}$$

Уравнения для определения постоянных интегрирования (момент времени  $t = 0$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{C_{CB}}(0) &= A \sin \alpha; \\ \left. \frac{du_{C_{CB}}}{dt} \right|_0 &= -250A \sin \alpha + 2220A \cos \alpha; \\ i_{2CB}(0) &= B \sin \beta; \\ \left. \frac{di_{2CB}}{dt} \right|_0 &= -250B \sin \beta + 2220B \cos \beta. \end{aligned}$$

Для вычисления постоянных интегрирования найдем начальные условия для свободных составляющих. Из законов коммутации следует, что  $u_C(0) = u_C(0-) = 0$ ;  $i_1(0) = i_1(0-) = 0$ . Поэтому начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости

$$\begin{aligned} i_{1CB}(0) &= i_1(0) - i_{1Y}(0) = -\sqrt{2} \sin(-15^\circ) = 0,366 \text{ A}; \\ u_{C_{CB}}(0) &= u_C(0) - u_{CY}(0) = -400 \sqrt{2} \sin(-105^\circ) = 546 \text{ В}. \end{aligned}$$

Запишем уравнения Кирхгофа для свободных составляющих, отключив ветвь с идеальным источником тока:

$$\begin{aligned} -i_{2CB} - i_{1CB} &= 0; \\ u_{C_{CB}} + L \frac{di_{1CB}}{dt} - ri_{2CB} &= 0, \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

где

$$i_{1CB} = C \frac{du_{C_{CB}}}{dt} \quad (3)$$

и, в частности, для момента времени  $t = 0$

$$-i_{2CB}(0) - i_{1CB}(0) = 0; \quad (1a)$$

$$u_{C_{CB}}(0) + L \left. \frac{di_{1CB}}{dt} \right|_0 - ri_{2CB}(0) = 0; \quad (2a)$$

$$i_{1CB}(0) = C \left. \frac{du_{C_{CB}}}{dt} \right|_0, \quad (3a)$$

причем в этих уравнениях известны  $u_{C_{CB}}(0)$  и  $i_{1CB}(0)$ .

Из (1a), (2a) и (3a) находим  $i_{2CB}(0) = -0,366 \text{ A}$ ;  $di_{1CB}/dt|_0 = -2913 \text{ A/c}$ ;  $du_{C_{CB}}/dt|_0 = 366 \cdot 10^3 \text{ В/с}$ .

Для определения производной второго тока дифференцируем уравнение (1):  $di_{2CB}/dt = -di_{1CB}/dt$ , откуда следует, что для момента времени  $t = 0$  производная  $di_{2CB}/dt|_0 = -di_{1CB}/dt|_0 = 2913 \text{ A/c}$ .

Из уравнений для определения постоянных интегрирования находим:  $A = 591 \text{ В}$ ;  $\alpha = 67,5^\circ$ ;  $B = 1,321 \text{ A}$ ;  $\beta = -16,08^\circ$ .

Записываем искомые величины:

$$u_C(t) = 400\sqrt{2} \sin(2500t - 105^\circ) + 591e^{-250t} \sin(2220t + 67,5^\circ) \text{ В};$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) + 1,321e^{-250t} \sin(2220t - 16,08^\circ) \text{ А}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 8.64Р.

**8.65(Р).** Определить ток  $i_1$  источника ЭДС (рис. 8.65) с параметрами  $E = 80 \text{ В}$  и  $r_1 = 200 \text{ Ом}$  после коммутации при  $r_2 = r_1$ ;  $C = 40 \text{ мкФ}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Решение. Напряжение на емкости и ток в индуктивности до коммутации:  $u_C(0-) = E = 80 \text{ В}$ ;  $i_3(0-) = 0$ .

Искомый ток представим в виде суммы двух составляющих:

$$i_1 = i_{1y} + i_{1cb},$$

где после коммутации

$$i_{1y} = E/(r_1 + r_2) = 0,2 \text{ А}.$$

Кроме того,  $i_{3y} = 0$  и  $u_{Cy} = Er_2/(r_1 + r_2) = 40 \text{ В}$ .

Приравняв нулю входное сопротивление относительно точек разрыва первой ветви

$$Z(p) = r_1 + \frac{r_2(pL + 1/pC)}{r_2 + pL + 1/pC},$$

получим по (8.1) характеристическое уравнение

$$p^2 + 1000p + 250 \cdot 10^3 = 0,$$

корни которого равные действительные:  $p_1 = p_2 = -500 \text{ с}^{-1}$ .

Поэтому свободную составляющую искомого тока запишем по (8.3) в виде

$$i_{1cb} = A_1 e^{-500t} + A_2 t e^{-500t}.$$

Чтобы определить две постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , дополнительно вычислим производную свободной составляющей:

$$di_{1cb}/dt = -500A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-500t} - 500A_2 t e^{-500t}.$$

В частности, при  $t = 0$  имеем:

$$i_{1cb}(0) = A_1 \quad \text{и} \quad di_{1cb}/dt|_0 = -500A_1 + A_2. \quad (1)$$

Для вычисления  $A_1$  и  $A_2$  из этой системы найдем начальные значения свободного тока и его производной.

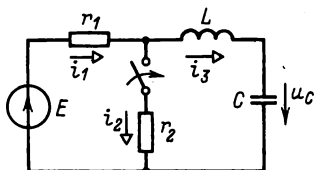


Рис. 8.65

По законам коммутации (8.7) и (8.8) напряжение на емкости и ток в индуктивности не изменяются скачком, т.е.  $u_C(0) = u_C(0-) = 80$  В;  $i_3(0) = i_3(0-) = 0$ .

Найдем еще начальные значения свободных составляющих напряжения на емкости и тока в индуктивности:

$$u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C_y}(0) = 40 \text{ В}; \quad i_{3\text{св}}(0) = i_3(0) - i_{3_y}(0) = 0.$$

Уравнения Кирхгофа для свободных составляющих цепи после коммутации (в ветви с источником оставляем только сопротивление  $r_1$ ):

$$-i_{1\text{св}} + i_{2\text{св}} + i_{3\text{св}} = 0; \quad (2)$$

$$r_1 i_{1\text{св}} + r_2 i_{2\text{св}} = 0; \quad (3)$$

$$L \frac{di_{3\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} - r_2 i_{2\text{св}} = 0 \quad (4)$$

и, в частности, для момента времени  $t = 0$

$$-i_{1\text{св}}(0) + i_{2\text{св}}(0) + i_{3\text{св}}(0) = 0; \quad (2a)$$

$$r_1 i_{1\text{св}}(0) + r_2 i_{2\text{св}}(0) = 0; \quad (3a)$$

$$L \frac{di_{3\text{св}}}{dt}|_0 + u_{C\text{св}}(0) - r_2 i_{2\text{св}}(0) = 0. \quad (4a)$$

В этих уравнениях уже известны  $u_{C\text{св}}(0)$  и  $i_{3\text{св}}(0)$ ; находим:

$$i_{1\text{св}}(0) = 0; \quad i_{2\text{св}}(0) = 0; \quad \frac{di_{3\text{св}}}{dt}|_0 = -400 \text{ А/с}.$$

Для определения производной первого тока дифференцируем уравнения (2) и (3):

$$- \frac{di_{1\text{св}}}{dt} + \frac{di_{2\text{св}}}{dt} + \frac{di_{3\text{св}}}{dt} = 0; \quad (5)$$

$$r_1 \frac{di_{1\text{св}}}{dt} + r_2 \frac{di_{2\text{св}}}{dt} = 0 \quad (6)$$

и, в частности, для момента времени  $t = 0$

$$- \frac{di_{1\text{св}}}{dt}|_0 + \frac{di_{2\text{св}}}{dt}|_0 + \frac{di_{3\text{св}}}{dt}|_0 = 0; \quad (5a)$$

$$r_1 \frac{di_{1\text{св}}}{dt}|_0 + r_2 \frac{di_{2\text{св}}}{dt}|_0 = 0. \quad (6a)$$

Из двух уравнений (5a) и (6a), в которых  $\frac{di_{3\text{св}}}{dt}|_0$  известно, находим  $\frac{di_{1\text{св}}}{dt}|_0 = -200$  А/с. Теперь из системы уравнений (1) находим  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = -200$  А.

Искомое решение

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}} = 0,2 - 200te^{-500t} \text{ А}.$$

**8.66.** В схеме рис. 8.66 происходит замыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 100$  В;  $r_1 = r_2 = 100$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 10$  мкФ.

Найти начальные значения:  $i_{1\text{св}}(0)$ ,  $i_{2\text{св}}(0)$ ,  $i_{3\text{св}}(0)$ ,  $u_{C\text{св}}(0)$ ,  $u_{L\text{св}}(0)$ ,  $\frac{di_{1\text{св}}}{dt}|_0$ ,  $\frac{di_{2\text{св}}}{dt}|_0$ ,  $\frac{di_{3\text{св}}}{dt}|_0$ ,  $\frac{du_{C\text{св}}}{dt}|_0$ ,  $\frac{du_{L\text{св}}}{dt}|_0$ .

**8.67.** В схеме рис. 8.67 замыкается ключ. Параметры схемы:  $E = 80 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,05 \text{ Гн}$ ;  $C = 5 \text{ мкФ}$ .

Найти начальные значения:  $i_{1\text{св}}(0)$ ,  $i_{2\text{св}}(0)$ ,  $i_{3\text{св}}(0)$ ,  $i_{4\text{св}}(0)$ ,  $u_{C\text{св}}(0)$ ,  $u_{L\text{св}}(0)$ ,  $di_{1\text{св}}/dt|_0$ ,  $di_{2\text{св}}/dt|_0$ ,  $di_{3\text{св}}/dt|_0$ ,  $di_{4\text{св}}/dt|_0$ ,  $du_{C\text{св}}/dt|_0$ ,  $du_{L\text{св}}/dt|_0$ .

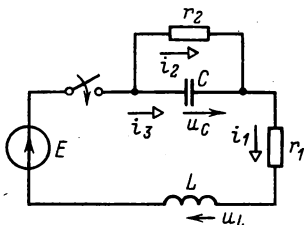


Рис. 8.66

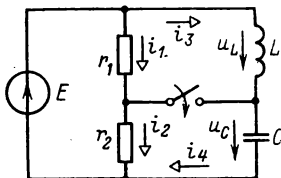


Рис. 8.67

**8.68.** Определить токи переходного процесса  $i$  и  $i_2$  в схеме рис. 8.68 при  $E = 60 \text{ В}$ ;  $r = 80 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ .

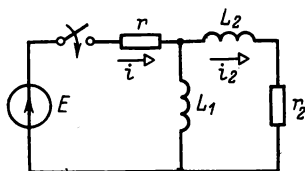


Рис. 8.68

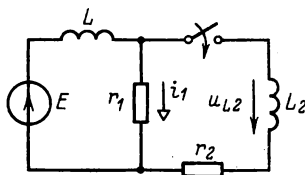


Рис. 8.69

**8.69.** В схеме рис. 8.69 параллельно ветви с сопротивлением  $r_1 = 30 \text{ Ом}$  подключается ветвь с сопротивлением  $r_2 = 60 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L_2 = 0,5 \text{ Гн}$ .

Рассчитать ток  $i_1$  и напряжение  $u_{L2}$  после коммутации при  $E = 85 \text{ В}$ ;  $L = 0,6 \text{ Гн}$ .

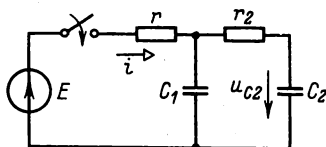


Рис. 8.70

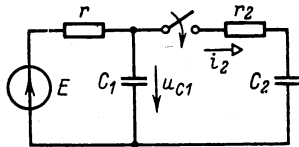


Рис. 8.71

**8.70.** В цепи рис. 8.70 с параметрами  $E = 80 \text{ В}$ ;  $r = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 50 \text{ Ом}$ ;  $C_1 = 50 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 10 \text{ мкФ}$  происходит замыкание ключа.

Найти зависимости  $i(t)$  и  $u_{C2}(t)$ .

**8.71.** Параллельно ветви с емкостью  $C_1 = 500$  мкФ (рис. 8.71) подключается ветвь с параметрами  $r_2 = 10$  Ом;  $C_2 = 150$  мкФ. Известны параметры источника постоянной ЭДС:  $E = 50$  В;  $r = 7$  Ом.

Определить ток  $i_2$  и напряжение  $u_{C1}$ .

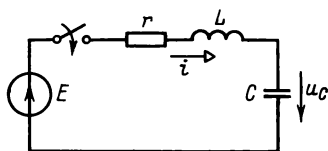


Рис. 8.72

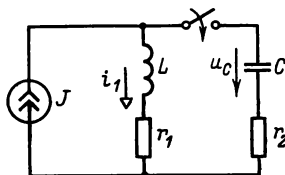


Рис. 8.73

**8.72.** Последовательный контур  $rLC$  подключается к источнику постоянной ЭДС  $E$  (рис. 8.72).

Определить ток  $i$  и напряжение  $u_C$ , а также их максимальные значения во время переходного процесса, если  $E = 120$  В;  $r = 20$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 2,49$  мкФ.

**8.73.** Параллельно ветви  $r_1L$  подключается ветвь  $r_2C$  (рис. 8.73).

Рассчитать зависимости  $i_1(t)$  и  $u_C(t)$  при параметрах ветвей:  $r_1 = 300$  Ом;  $L = 1,25$  Гн;  $r_2 = 200$  Ом;  $C = 10$  мкФ и токе источника  $J = 0,125$  А.

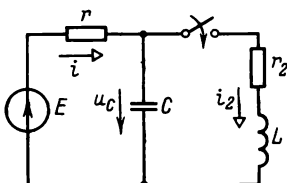


Рис. 8.74

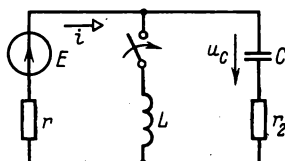


Рис. 8.75

**8.74.** К источнику с постоянной ЭДС  $E = 100$  В и внутренним сопротивлением  $r = 20$  Ом (рис. 8.74) дополнительно подключается катушка с индуктивностью  $L = 0,05$  Гн и сопротивлением  $r_2 = 30$  Ом.

Определить токи  $i$ ,  $i_2$  и напряжение  $u_C$  на емкости конденсатора  $C = 50$  мкФ.

**8.75.** Определить ток  $i$  и напряжение  $u_C$  в схеме рис. 8.75 после коммутации. Параметры схемы:  $E = 150$  В;  $r = 50$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $L = 0,05$  Гн;  $C = 100$  мкФ.

**8.76.** В схеме рис. 8.76 параллельно ветви  $r_2C$  подключается ветвь с сопротивлением  $r_1$ .

Найти зависимости  $i_1(t)$  и  $u_C(t)$  при  $E = 10$  В;  $r_1 = r_2 = 100$  Ом;  $L = 1,0$  Гн;  $C = 10$  мкФ.

8.77. Определить ток  $i_2$  и напряжение  $u_1$  в цепи рис. 8.77. Дано:  $E = 10$  В;  $r_1 = r_2 = 100$  Ом;  $L = 1,0$  Гн;  $C = 10$  мкФ.

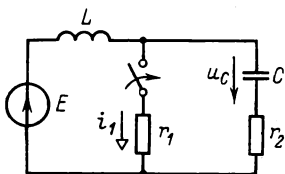


Рис. 8.76

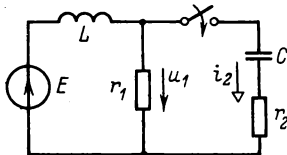


Рис. 8.77

8.78. К параллельному контуру с параметрами  $L = 1,0$  Гн;  $C = 100$  мкФ;  $r_1 = 80$  Ом;  $r_2 = 120$  Ом подключается источник тока  $J = 1$  А (рис. 8.78).

Найти зависимости  $i_1(t)$  и  $u_2(t)$ .

8.79. Определить ток  $i$  и напряжение  $u_L$  в схеме рис. 8.79 после коммутации. Параметры схемы:  $E = 100$  В;  $r = 5$  Ом;  $r_2 = 3$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 200$  мкФ.

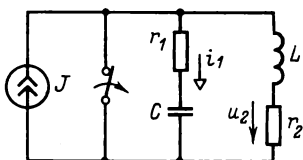


Рис. 8.78

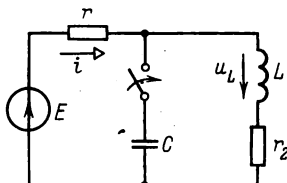


Рис. 8.79

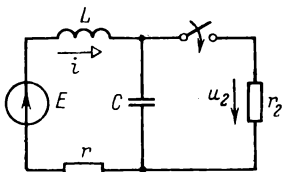


Рис. 8.80

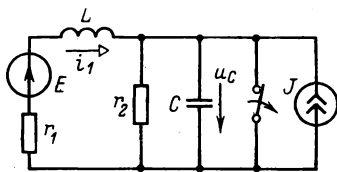


Рис. 8.81

8.80. В цепи рис. 8.80 параллельно конденсатору емкостью  $C = 200$  мкФ подключается резистор с сопротивлением  $r_2 = 5$  Ом.

Определить ток  $i$  и напряжение  $u_2$  на резисторе при  $E = 100$  В;  $r = 3$  Ом;  $L = 0,1$  Гн.



**8.81.** В схеме рис. 8.81 происходит размыкание ключа. Параметры схемы:  $E = 100$  В;  $J = 1$  А;  $r_1 = r_2 = 10$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 1000$  мкФ.

Найти зависимости  $i_1(t)$  и  $u_C(t)$ .

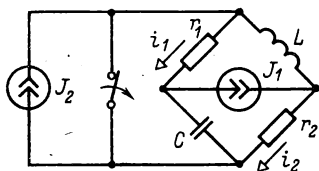


Рис. 8.82

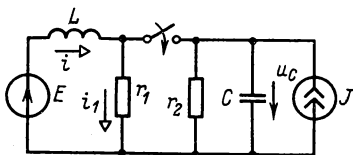


Рис. 8.83

**8.82.** В цепь рис. 8.82 включается дополнительный источник тока  $J_2$ . При известных параметрах  $J_1 = 1$  А;  $J_2 = 2$  А;  $r_1 = 80$  Ом;  $r_2 = 120$  Ом;  $L = 1,0$  Гн;  $C = 100$  мкФ определить токи  $i_1$  и  $i_2$  в резисторах.

**8.83.** Найти токи  $i_1$ ,  $i$  и напряжение  $u_C$  в схеме рис. 8.83 после коммутации при параметрах:  $E = 100$  В;  $J = 1$  А;  $r_1 = r_2 = 200$  Ом;  $L = 0,5$  Гн;  $C = 10$  мкФ.

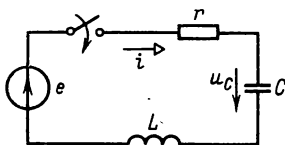


Рис. 8.84

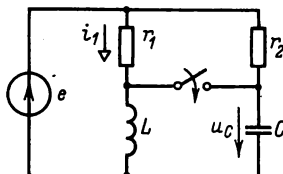


Рис. 8.85 →

**8.84.** Последовательный контур  $rLC$  при нулевых начальных условиях подключается к источнику гармонической ЭДС  $e$  (рис. 8.84).

Рассчитать ток контура  $i$  и напряжение на конденсаторе  $u_C$  для трех режимов:

1) Резонансный режим, когда частоты ЭДС источника  $e = 5 \sin 10^4 t$  В и собственных колебаний контура совпадают. Параметры контура:  $r = 10$  Ом;  $L = 50$  мГн;  $C = 0,2$  мкФ.

2) Режим сверхтока, когда частота ЭДС источника  $e = 5 \sin(10^4 t - 90^\circ)$  В значительно меньше частоты собственных колебаний контура и установившаяся составляющая тока в момент включения близка к нулю. Параметры контура:  $r = 10$  Ом;  $L = 10$  мГн;  $C = 0,01$  мкФ. Для этого режима вычислить отношение максимального тока переходного процесса к амплитуде тока установившегося режима.

3) Режим перенапряжения на конденсаторе, когда частота ЭДС источника  $e = 5 \sin 10^5 t$  В значительно больше частоты собственных колебаний контура и установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе в момент включения близка к нулю. Параметры контура:  $r = 10$  Ом;  $L = 50$  мГн;  $C = 0,2$  мкФ. Для этого режима найти также отношение максимального напряжения на конденсаторе к амплитуде напряжения установившегося режима.

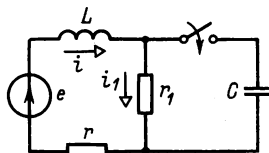


Рис. 8.86

**8.85.** Определить ток  $i_1$  и напряжение  $u_C$  в схеме рис. 8.85 после коммутации.

Дано:  $e = 100 \sin 10^5 t$  В;  $r_1 = r_2 = 20$  Ом;  $L = 0,1$  Гн;  $C = 0,25$  мкФ.

**8.86.** В цепи рис. 8.86 к выводам резистора с сопротивлением  $r_1 = 30$  Ом подключается конденсатор емкостью  $C = 10$  мкФ.

Найти зависимости  $i_1(t)$  и  $i(t)$  при  $e = 127 \sin(10^4 t + 60^\circ)$  В;  $r = 8$  Ом;  $L = 6,35$  мГн.

*Переходные процессы в цепях с взаимной индукцией*

**8.87(Р).** Определить токи  $i_1$  и  $i_2$  в индуктивностях (рис. 8.87) после коммутации при заданных параметрах:  $E = 60$  В;  $r_1 = 50$  Ом;  $r_2 = r_3 = 20$  Ом;  $L_1 = 0,6$  Гн;  $L_2 = 0,5$  Гн;  $M = 0,45$  Гн.

**Решение.** До коммутации токи отсутствуют, т. е.  $i_1(0-) = 0$ ;  $i_2(0-) = 0$ . Поэтому по закону коммутации  $i_1(0) = 0$ ;  $i_2(0) = 0$ .

После коммутации

$$i_1 = i_{1y} + i_{1cb}; \quad i_2 = i_{2y} + i_{2cb},$$

$$\text{где } i_{1y} = \frac{E}{r_1 + r_2 r_3 / (r_2 + r_3)} = 1 \text{ А; } i_{2y} = i_{1y} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 0,5 \text{ А.}$$

Чтобы получить характеристическое уравнение, составим главный определитель, выбрав контуры I и II, как показано на рис. 8.87, и заменив оператор  $j\omega$  на  $p$ :

$$\begin{vmatrix} r_1 + r_2 + p(L_1 + L_2 + 2M) & r_2 + p(L_2 + M) \\ r_2 + p(L_2 + M) & r_2 + r_3 + pL_2 \end{vmatrix}.$$

Приравняв определитель нулю, получим характеристическое уравнение

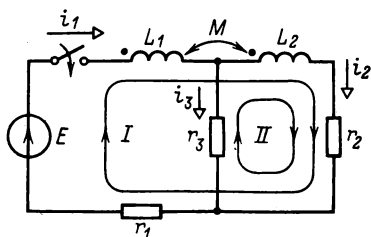
$$p^2 + 790p + 24\,615 = 0,$$

корни которого действительные:  $p_1 = -33 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -757 \text{ с}^{-1}$ . Поэтому свободные составляющие токов запишем по (8.2) в виде

$$\begin{aligned} i_{1\text{св}} &= A_1 e^{-33t} + A_2 e^{-757t}; \\ i_{2\text{св}} &= B_1 e^{-33t} + B_2 e^{-757t}. \end{aligned}$$

Найдем начальные значения свободных составляющих токов в индуктивностях:

$$i_{1\text{св}}(0) = i_1(0) - i_{1y}(0) = -1 \text{ А}; \quad i_{2\text{св}}(0) = i_2(0) - i_{2y}(0) = -0,5 \text{ А}.$$



← Рис. 8.87

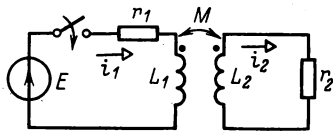


Рис. 8.88

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left. \begin{aligned} i_{1\text{св}}(0) &= A_1 + A_2; \\ di_{1\text{св}}/dt|_0 &= -33A_1 - 757A_2; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{2\text{св}}(0) &= B_1 + B_2; \\ di_{2\text{св}}/dt|_0 &= -33B_1 - 757B_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения Кирхгофа для свободных составляющих имеют вид:

$$-i_{1\text{св}} + i_{2\text{св}} + i_{3\text{св}} = 0;$$

$$r_1 i_{1\text{св}} + L_1 \frac{di_{1\text{св}}}{dt} + M \frac{di_{2\text{св}}}{dt} + r_3 i_{3\text{св}} = 0;$$

$$L_2 \frac{di_{2\text{св}}}{dt} + M \frac{di_{1\text{св}}}{dt} + r_2 i_{2\text{св}} - r_3 i_{3\text{св}} = 0$$

и, в частности, для начального момента времени ( $t = 0$ )

$$-i_{1\text{св}}(0) + i_{2\text{св}}(0) + i_{3\text{св}}(0) = 0;$$

$$r_1 i_{1\text{св}}(0) + L_1 \left. \frac{di_{1\text{св}}}{dt} \right|_0 + M \left. \frac{di_{2\text{св}}}{dt} \right|_0 + r_3 i_{3\text{св}}(0) = 0;$$

$$L_2 \left. \frac{di_{2\text{св}}}{dt} \right|_0 + M \left. \frac{di_{1\text{св}}}{dt} \right|_0 + r_2 i_{2\text{св}}(0) - r_3 i_{3\text{св}}(0) = 0,$$

откуда находим зависимые начальные условия:

$$di_{1cb}/dt|_0 = 308 \text{ А/с}; \quad di_{2cb}/dt|_0 = -277 \text{ А/с}.$$

Из систем уравнений (1) и (2) находим:  $A_1 = -0,620 \text{ А}$ ;  $A_2 = -0,380 \text{ А}$ ;  $B_1 = -0,905 \text{ А}$ ;  $B_2 = 0,405 \text{ А}$ . Искомые величины:  $i_1 = 1 - 0,620e^{-33t} - 0,380e^{-757t} \text{ А}$ ;  $i_2 = 0,5 - 0,905e^{-33t} + 0,405e^{-757t} \text{ А}$ .

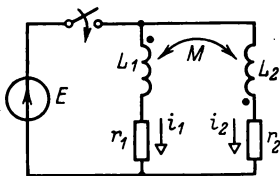


Рис. 8.89

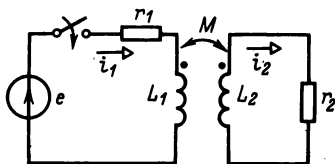


Рис. 8.90

**8.88.** Воздушный трансформатор (рис. 8.88) подключается к источнику постоянной ЭДС  $E = 100 \text{ В}$ . Известны параметры трансформатора:  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 0,18 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,107 \text{ Гн}$  ( $k = 0,8$ ) и сопротивление нагрузки  $r_2 = 30 \text{ Ом}$ .

Найти токи  $i_1$  и  $i_2$ .

**8.89.** Определить токи  $i_1$  и  $i_2$  в цепи рис. 8.89 после замыкания ключа, если  $E = 200 \text{ В}$ ;  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,12 \text{ Гн}$  ( $k = 0,85$ ).

**8.90.** Нагруженный трансформатор (рис. 8.90) с параметрами  $L_1 = 0,5 \text{ Гн}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 0,6 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,5 \text{ Гн}$  подключается к источнику гармонической ЭДС  $e = 100 \sin 100t \text{ В}$ . Сопротивление нагрузки  $r_2 = 100 \text{ Ом}$ .

Определить токи  $i_1$  и  $i_2$ .

**8.91.** В цепи рис. 8.91 к трансформатору, который питается от источника гармонической ЭДС  $e = 100 \sin 100t \text{ В}$ , подключается резистор с сопротивлением  $r_2 = 50 \text{ Ом}$ . Параметры трансформатора:  $L_1 = 0,5 \text{ Гн}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 0,6 \text{ Гн}$ ;  $M = 0,5 \text{ Гн}$ .

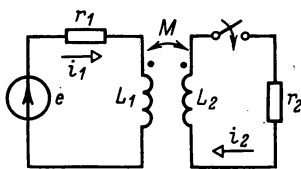


Рис. 8.91

Рассчитать зависимости  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ .

#### 8.4. Операторный метод расчета переходных процессов

**8.92(Р).** Цепь  $rC$  с незаряженным конденсатором (рис. 8.92) подключается (при  $t = 0$ ) к источнику линейно изменяющегося

напряжения  $u(t) = kt$ , где  $k = 1000$  В/с. Параметры цепи:  $r = 100$  Ом,  $C = 100$  мкФ.

Определить ток  $i$  в цепи и напряжение на конденсаторе  $u_C$ .

Решение. До коммутации конденсатор не был заряжен, т. е.  $u_C(0-) = 0$ ; следовательно,  $u_C(0) = u_C(0-) = 0$ .

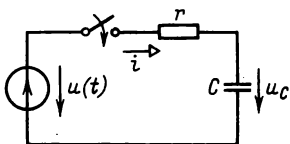


Рис. 8.92

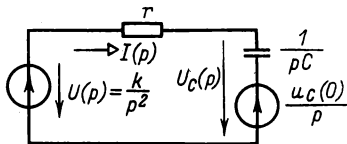


Рис. 8.92Р

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$ri + u_C = u(t).$$

Операторная форма этого уравнения:

$$rI(p) + U_C(p) = U(p)$$

или

$$rI(p) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = U(p), \quad (1)$$

где по закону коммутации  $u_C(0) = 0$ . Операторная схема, соответствующая уравнению (1), представлена на рис. 8.92Р, где  $U(p) = k/p^2$  — изображение линейно изменяющегося напряжения  $u(t) = kt$ .

Из (1) находим изображение искомого тока:

$$I(p) = \frac{k/r}{p(p + 1/rC)}. \quad (2)$$

Для определения оригинала тока применим метод неопределенных коэффициентов. Изображение представим в виде суммы

$$I(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 1/rC} = \frac{A(p + 1/rC) + Bp}{p(p + 1/rC)}. \quad (3)$$

Сравнивая числители уравнений (2) и (3), запишем:

$$k/r = Ap + A/rC + Bp,$$

откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , получим:  $0 = A + B$  и  $k/r = A/rC$ .

Из этой системы уравнений находим постоянные  $A = kC$ ;  $B = -kC$ . Таким образом,

$$I(p) = \frac{kC}{p} - \frac{kC}{p + 1/rC}.$$

Первое слагаемое является изображением постоянной величины, второе — экспоненты, т. е. ток

$$i = kC - kCe^{-t/rC}.$$

Напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = kt + krCe^{-t/rC} + D.$$

Постоянную интегрирования  $D$  найдем из начальных условий. Так как  $u_C(0) = krC + D = 0$ , то  $D = -krC$  и

$$u_C = -krC + kt + krCe^{-t/rC}.$$

С учетом заданных параметров схемы имеем:

$$i = 0,1 - 0,1e^{-100t}, \text{ А; } u_C = -10 + 1000t + 10e^{-100t}, \text{ В.}$$

**8.93(Р).** Последовательная цепь  $rL$  (рис. 8.93) при нулевых начальных условиях подключается ( $t = 0$ ) к экспоненциально затухающему напряжению  $u(t) = U_0 e^{-\alpha t}$ . Параметры цепи:  $U_0 = 100 \text{ В}$ ;  $\alpha = 2000 \text{ 1/с}$ ;  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ .

Найти ток цепи  $i(t)$ .

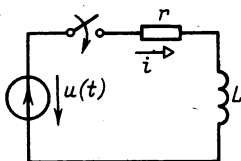


Рис. 8.93

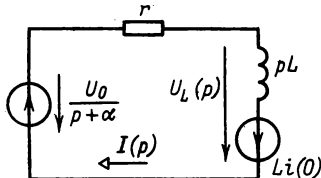


Рис. 8.93Р

**Решение.** Из режима цепи до коммутации имеем  $i(0-) = 0$ ; следовательно,  $i(0) = i(0-) = 0$ .

Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$ri + L di/dt = U_0 e^{-\alpha t}.$$

Операторная запись этого уравнения:

$$rI(p) + pLI(p) - Li(0) = U_0/(p + \alpha), \quad (1)$$

где по закону коммутации  $Li(0) = 0$ .

Операторная схема, соответствующая уравнению (1), представлена на рис. 8.93Р, где учтено, что изображением напряжения  $U_0 e^{-\alpha t}$  является функция  $U_0/(p + \alpha)$  (см. приложение 2).

Из (1) находим изображение искомого тока:

$$I(p) = \frac{U_0/L}{(p + \alpha)(p + r/L)}.$$

Для перехода к оригиналу выпишем соотношение из таблицы оригиналов и изображений (приложение 2):

$$\frac{1}{(p + a)(p + b)} = \frac{1}{a - b}(e^{-bt} - e^{-at}).$$

Следовательно, ток

$$i(t) = \frac{U_0/L}{\alpha - r/L}(e^{-rt/L} - e^{-\alpha t})$$

и при заданных параметрах цепи

$$i(t) = e^{-1000t} - e^{-2000t} \text{ А.}$$

**8.94(P).** Определить, применяя операторный метод расчета, напряжение на емкости  $u_C$  в схеме рис. 8.36 при параметрах, приведенных в задаче 8.36.

**Решение.** До коммутации напряжение на емкости  $u_C(0-) = Er_2/(r_1 + r_2 + r_3) = 30 \text{ В}$ ; следовательно,  $u_C(0) = u_C(0-) = 30 \text{ В}$ .

Составим эквивалентную операторную схему (рис. 8.94Р). В этой схеме учтено, что изображение постоянной величины  $E$  равно  $E/p$ .

Найдем изображение напряжения на емкости, например, методом узловых потенциалов (по формуле для схемы с двумя узлами):

$$\begin{aligned} U_C(p) = U_{ab}(p) &= \frac{(E/p)(1/r_1) + (u_C(0)/p)pC}{1/r_1 + 1/r_2 + pC} = \\ &= \frac{120 + 0,075p}{p(2,5 \cdot 10^{-3}p + 2)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}. \end{aligned}$$

Корень характеристического уравнения определим из уравнения  $F_3(p) = 0$ , т.е.  $2,5 \cdot 10^{-3}p + 2 = 0$ , откуда  $p_1 = -800 \text{ с}^{-1}$ .

Оригинал искомого напряжения найдем по теореме разложения (8.12):

$$\begin{aligned} u_C = u_{ab} &= \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} = \\ &= \frac{120}{2} + \frac{120 + 0,075(-800)}{(-800) \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} e^{-800t} = 60 - 30e^{-800t}, \text{ В.} \end{aligned}$$

**8.95(P).** Решить задачу 8.21 операторным методом.

**Решение.** Электродвижущая сила  $e = 100 \sin(2500t + 30^\circ)$  В имеет достаточно сложное изображение:

$$E(p) = \frac{100(p \sin 30^\circ + 2500 \cos 30^\circ)}{p^2 + 2500^2},$$

поэтому целесообразно применить операторный метод к расчету свободной составляющей тока.

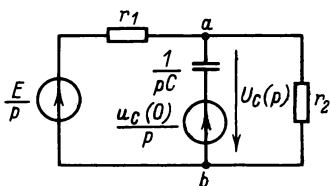


Рис. 8.94P

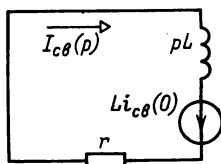


Рис. 8.95P

Составим эквивалентную операторную схему для свободных составляющих (рис. 8.95P), которая не содержит источника ЭДС  $E(p)$ .

Для расчета тока  $I_{cb}(p)$  необходимо определить

$$i_{cb}(0) = i(0) - i_y(0),$$

где по закону коммутации  $i(0) = i(0-) = 1$  А, а  $i_y = 0,980 \sin(2500t - 48,7^\circ)$  А (см. решение задачи 8.21), т. е.  $i_y(0) = -0,736$  А и  $i_{cb}(0) = 1,736$  А.

Из схемы (рис. 8.95P) следует, что изображение свободной составляющей тока

$$I_{cb}(p) = \frac{Li_{cb}(0)}{(r + pL)} = \frac{i_{cb}(0)}{p + r/L} = \frac{1,736}{p + 500}$$

и оригинал

$$i_{cb} = 1,736e^{-500t}, \text{ А.}$$

Следовательно, искомый ток

$$i = i_y + i_{cb} = 0,980 \sin(2500t - 48,7^\circ) + 1,736e^{-500t}, \text{ А.}$$

**8.96(P).** Определить операторным методом ток  $i_3$  в схеме рис. 8.63 при параметрах, приведенных в задаче 8.63.

**Решение.** Применим операторный метод для определения свободной составляющей. Начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости найдены в решении задачи 8.63:  $i_{2cb}(0) = -0,5$  А;  $u_{Ccb}(0) = 50$  В.



Составим эквивалентную операторную схему для свободных составляющих (рис. 8.96Р). Для этой схемы, применяя любой из методов расчета линейных цепей, находим операторное изображение искомого тока:

$$I_{3\text{св}}(p) = \frac{-p[r_1 L C i_{2\text{св}}(0) + L C u_{C\text{св}}(0)] - (r_1 + r_2) C u_{C\text{св}}(0)}{p^2 r_1 L C + p(r_1 r_2 C + L) + (r_1 + r_2)} =$$

$$= \frac{-4}{p^2 \cdot 0,02 + p \cdot 4,5 + 200} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

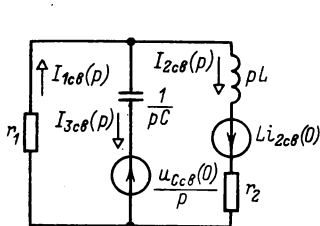


Рис. 8.96Р

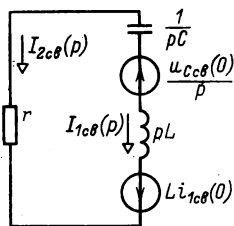


Рис. 8.97Р

Корни характеристического уравнения определим из уравнения  $F_2(p) = 0$ , т. е.

$$p^2 \cdot 0,02 + p \cdot 4,5 + 200 = 0,$$

откуда  $p_1 = -61 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_2 = -164 \text{ с}^{-1}$ .

Оригинал искомого тока найдем по теореме разложения (8.11):

$$i_{3\text{св}} = \frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F'_2(p_2)} e^{p_2 t},$$

где  $F'_2(p) = 0,04p + 4,5$ .

Подставив значения корней, получим:

$$i_{3\text{св}} = -1,942e^{-61t} + 1,942e^{-164t}, \text{ А.}$$

Поскольку при постоянных ЭДС  $E$  и токе  $J$  в установившемся режиме ток в емкости  $i_{3y}$  равен нулю, то ток переходного процесса  $i_3$  равен свободной составляющей тока  $i_{3\text{св}}$ .

**8.97(Р).** Найти ток  $i_2$  задачи 8.64 операторным методом.

Решение. Применим операторный метод к расчету свободных составляющих. Эквивалентная операторная схема представлена на рис. 8.97Р, для которой  $i_{1\text{св}}(0) = 0,366 \text{ А}$ ,  $u_{C\text{св}}(0) = 546 \text{ В}$  (см. решение задачи 8.64). Как следует из операторной схемы,

$$I_{2\text{св}}(p) = \frac{u_{\text{св}}(0)/p - Li_{1\text{св}}(0)}{r + pL + 1/pC} =$$

$$= \frac{-0,0732 \cdot 10^{-6}p + 546 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 10^{-6}p^2 + 10^{-4}p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Из уравнения  $F_2(p) = 0$ , т. е.  $0,2 \cdot 10^{-6}p^2 + 10^{-4}p + 1 = 0$ , вычислим корни характеристического уравнения:  $p_{1,2} = -250 \pm \pm j2220 \text{ с}^{-1}$ .

Оригинал тока  $i_{2\text{св}}$  найдем по теореме разложения в случае двух комплексных сопряженных корней (8.13):

$$i_{2\text{св}} = 2 \operatorname{Re} \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t},$$

где  $F_2'(p) = 0,4 \cdot 10^{-6}p + 10^{-4}$ ; при этом имеем:

$$i_{2\text{св}} = 2 \operatorname{Re} \frac{-0,0732 \cdot 10^{-6}(-250 + j2220) + 546 \cdot 10^{-6}}{0,4 \cdot 10^{-6}(-250 + j2220) + 10^{-4}} e^{-250t} e^{j2220t} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} 0,660 e^{-j106,08^\circ} e^{-250t} e^{j2220t} = 2 \operatorname{Re} 0,660 e^{-250t} e^{j(2220t - 106,08^\circ)} =$$

$$= 1,321 e^{-250t} \cos(2220t - 106,08^\circ) = 1,321 e^{-250t} \sin(2220t - 16,08^\circ) \text{ А.}$$

Ток установившегося режима  $i_{2y} = \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ)$  А был найден в решении задачи 8.64.

Следовательно, ток

$$i_2 = i_{2y} + i_{2\text{св}} =$$

$$= \sqrt{2} \sin(2500t + 75^\circ) + 1,321 e^{-250t} \sin(2220t - 16,08^\circ) \text{ А.}$$

**8.98(Р).** Решить задачу 8.65 операторным методом.

**Решение.** В задаче 8.65 найдены следующие величины:

$$i_{1y} = 0,2 \text{ А}; \quad i_{3\text{св}}(0) = 0; \quad u_{\text{св}}(0) = 40 \text{ В.}$$

Операторная схема для свободных составляющих представлена на рис. 8.98Р, где ток

$$I_{1\text{св}}(p) = \frac{[-u_{\text{св}}(0)/p] [r_2/(r_1 + r_2)]}{r_1 r_2/(r_1 + r_2) + pL + 1/pC} =$$

$$= \frac{-200}{p^2 + 1000p + 250 \cdot 10^3} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Из уравнения  $F_2(p) = 0$  корни характеристического уравнения  $p_1 = p_2 = p = -500 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, изображение тока  $I_{1\text{св}}(p)$  можно записать в виде

$$I_{1\text{св}}(p) = -200/(p + 500)^2.$$

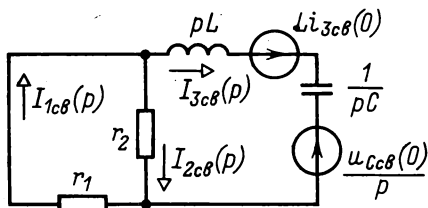


Рис. 8.98P

Обратившись к таблице приложения 2, запишем оригинал:

$$i_{1\text{св}} = -200te^{-500t}, \text{ A.}$$

Искомый ток

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}} = 0,2 - 200te^{-500t}, \text{ A.}$$

**8.99(P).** Для цепи задачи 8.88 найти зависимость  $i_1(t)$  операторным методом.

Решение. Запишем уравнения Кирхгофа для трансформатора

$$r_1 i_1 + L_1 di_1/dt - M di_2/dt = E;$$

$$r_2 i_2 + L_2 di_2/dt - M di_1/dt = 0$$

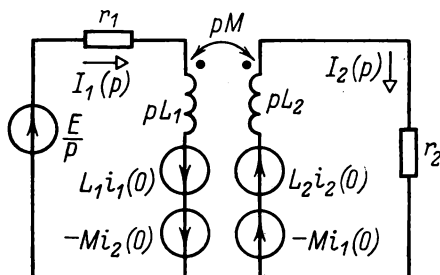


Рис. 8.99P

и перейдем к операторным изображениям:

$$r_1 I_1(p) + pL_1 I_1(p) - pM I_2(p) - L_1 i_1(0) + M i_2(0) = E/p;$$

$$r_2 I_2(p) + pL_2 I_2(p) - pM I_1(p) - L_2 i_2(0) + M i_1(0) = 0.$$

Операторная схема, соответствующая этим уравнениям, приведена на рис. 8.99Р. Для цепи данной задачи  $i_1(0) = 0$ ,  $i_2(0) = 0$ , т.е. начальные условия нулевые, и дополнительных источников в эквивалентной схеме нет.

Из системы уравнений найдем:

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{E(r_2 + pL_2)}{p[p^2(L_1L_2 - M^2) + p(r_1L_2 + r_2L_1) + r_1r_2]} = \\ &= \frac{18p + 3000}{p(6,55 \cdot 10^{-3}p^2 + 4,8p + 300)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \end{aligned}$$

и два корня характеристического уравнения  $F_3(p) = 0$ , которые получатся действительными:  $p_1 = -69,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -672 \text{ с}^{-1}$ .

По теореме разложения (8.12) найдем оригинал:

$$i_1 = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F'_3(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F'_3(p_2)} e^{p_2 t},$$

где  $F'_3(p) = 13,1 \cdot 10^{-3}p + 4,8$ .

После подстановки численных значений получим:

$$i_1 = 10 - 6,17e^{-69,5t} - 3,83e^{-672t}, \text{ А.}$$

- 8.100. Решить задачу 8.3 операторным методом.
- 8.101. Решить задачу 8.6 операторным методом.
- 8.102. Решить задачу 8.9 операторным методом.
- 8.103. Решить задачу 8.10 операторным методом.
- 8.104. Решить задачу 8.11 операторным методом.
- 8.105. Решить задачу 8.12 операторным методом.
- 8.106. Решить задачу 8.15 операторным методом.
- 8.107. Решить задачу 8.16 операторным методом.
- 8.108. Решить задачу 8.17 операторным методом.
- 8.109. Решить задачу 8.19 операторным методом.
- 8.110. Решить задачу 8.22 операторным методом.
- 8.111. Решить задачу 8.25 операторным методом.
- 8.112. Решить задачу 8.26 операторным методом.
- 8.113. Решить задачу 8.27 операторным методом.
- 8.114. Решить задачу 8.28 операторным методом.
- 8.115. Решить задачу 8.31 операторным методом.
- 8.116. Решить задачу 8.37 операторным методом.
- 8.117. Решить задачу 8.38 операторным методом.
- 8.118. Решить задачу 8.41 операторным методом.
- 8.119. Решить задачу 8.42 операторным методом.
- 8.120. Решить задачу 8.43 операторным методом.
- 8.121. Решить задачу 8.44 операторным методом.
- 8.122. Решить задачу 8.46 операторным методом.

8.123.	Решить задачу	8.47	операторным методом.
8.124.	Решить задачу	8.48	операторным методом.
8.125.	Решить задачу	8.49	операторным методом.
8.126.	Решить задачу	8.50	операторным методом.
8.127.	Решить задачу	8.51	операторным методом.
8.128.	Решить задачу	8.53	операторным методом.
8.129.	Решить задачу	8.54	операторным методом.
8.130.	Решить задачу	8.55	операторным методом.
8.131.	Решить задачу	8.56	операторным методом.
8.132.	Решить задачу	8.60	операторным методом.
8.133.	Решить задачу	8.68	операторным методом.
8.134.	Решить задачу	8.69	операторным методом.
8.135.	Решить задачу	8.70	операторным методом.
8.136.	Решить задачу	8.71	операторным методом.
8.137.	Решить задачу	8.72	операторным методом.
8.138.	Решить задачу	8.73	операторным методом.
8.139.	Решить задачу	8.74	операторным методом.
8.140.	Решить задачу	8.75	операторным методом.
8.141.	Решить задачу	8.76	операторным методом.
8.142.	Решить задачу	8.77	операторным методом.
8.143.	Решить задачу	8.78	операторным методом.
8.144.	Решить задачу	8.79	операторным методом.
8.145.	Решить задачу	8.80	операторным методом.
8.146.	Решить задачу	8.81	операторным методом.
8.147.	Решить задачу	8.82	операторным методом.
8.148.	Решить задачу	8.83	операторным методом.
8.149.	Решить задачу	8.84	операторным методом.
8.150.	Решить задачу	8.85	операторным методом.
8.151.	Решить задачу	8.86	операторным методом.
8.152.	Решить задачу	8.87	операторным методом.
8.153.	Решить задачу	8.89	операторным методом.
8.154.	Решить задачу	8.90	операторным методом.
8.155.	Решить задачу	8.91	операторным методом.

### 8.5. Переходные процессы при действии источников напряжения или тока произвольной формы

8.156(P). Для цепи рис. 8.156, а определить  $u_L(t)$  и  $u_2(t)$  в общем виде.

Вычислить значения  $u_L$  и  $u_2$  в моменты времени  $t_1 = T/2$  и  $t_2 = 3T/2$  при действии на входе цепи импульса напряжения  $u_1$  (рис. 8.156, б), у которого  $T = 1$  мс;  $U = 10$  В, и параметрах  $r = 1$  кОм;  $L = 0,1$  Гн. Построить зависимости  $u_L(t)$  и  $u_2(t)$ .

Решение. Как следует из рис. 8.156, б,

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ Ut/T & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Для решения задачи определим сначала передаточные функции напряжения  $y_L(t)$  и  $y_2(t)$ , численно равные напряжениям на индуктивности и на выходных выводах при действии

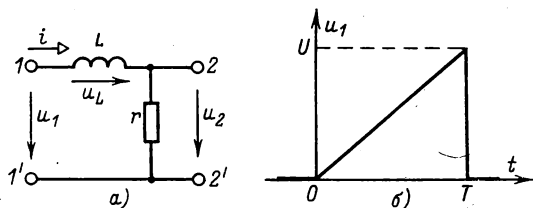


Рис. 8.156

на входе единичного скачка напряжения. Применив классический или операторный метод, получим:

$$y_L(t) = e^{pt}; \quad y_2(t) = 1 - e^{pt},$$

где  $p = -r/L = -10^4 \text{ с}^{-1}$ .

Для интервала времени  $0 \leq t \leq T$ , применив вторую форму интеграла Дюамеля (8.16а), запишем:

$$u_L(t) = u_1(0) y_L(t) + \int_0^t u'_1(t - \tau) y_L(\tau) d\tau;$$

$$u_2(t) = u_1(0) y_2(t) + \int_0^t u'_1(t - \tau) y_2(\tau) d\tau$$

и при  $u_1(0) = 0$ ;  $u'_1(t - \tau) = U/T = 10^4 \text{ В/с}$

$$u_L(t) = \frac{U}{T} \int_0^t e^{p\tau} d\tau = \frac{U}{pT} e^{p\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-10^4 t}, \text{ В};$$

$$u_2(t) = \frac{U}{T} \int_0^t (1 - e^{p\tau}) d\tau = \frac{U}{T} \left( \tau - \frac{1}{p} e^{p\tau} \right) \Big|_0^t =$$

$$= \frac{U}{T} \left[ t + \frac{1}{p} (1 - e^{p\tau}) \right] = 10^4 t - (1 - e^{-10^4 t}), \text{ В}.$$

Для интервала времени  $t > T$  согласно (8.166)

$$\begin{aligned} u_L(t) &= u_1(0) y_L(t) + \int_{t-T}^t u'_1(t-\tau) y_L(\tau) d\tau + \\ &+ [u_1(T+) - u_1(T-)] y_L(t-T) = \\ &= 10^4 \int_{t-T}^t e^{p\tau} d\tau - 10e^{p(t-T)} = -e^{p\tau} \Big|_{t-T}^t - 10e^{p(t-T)} = \\ &= -198\,200e^{-10^4 t}, \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0) y_2(t) + \int_{t-T}^t u'_1(t-\tau) y_2(\tau) d\tau + \\ &+ [u_1(T+) - u_1(T-)] y_2(t-T) = 198\,200e^{-10^4 t}, \text{ В}. \end{aligned}$$

Как и должно быть для  $t > T$ , когда  $u_L + u_2 = 0$ , получили  $u_L(t) = -u_2(t)$ .

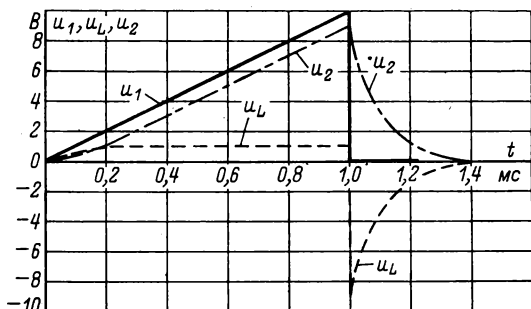


Рис. 8.156Р

Результаты расчета  $u_L(t)$  и  $u_2(t)$  представлены в табл. 8.156а  
8.156б соответственно для интервалов времени  $0 \leq t \leq T$   
и  $t \geq T$ .

Таблица 8.156а

$t, \text{ мс}$	0	0,2	0,4	0,5	0,8	1,0
$u_L, \text{ В}$	0	0,865	0,982	0,993	0,9996	1,0
$u_2, \text{ В}$	0	1,135	3,018	4,007	7,0	9,0

Таблица 8.1566

$t$ , мс	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5
$u_L$ , В	-9,0	-3,311	-1,218	-0,448	-0,006
$u_2$ , В	9,0	3,311	1,218	0,448	0,006

На рис. 8.156Р приведены зависимости  $u_1(t)$ ,  $u_L(t)$  и  $u_2(t)$ .

**8.157(Р).** 1) Выяснить, при каких соотношениях между параметрами цепи  $rL$  (рис. 8.156, а) и длительностью импульса  $T$  (рис. 8.156, б) выходное напряжение  $u_2$  будет пропорционально интегралу от входного напряжения  $u_1$ .

2) Рассчитать значение  $u_2(t = T)$  при  $L = 10$  Гн;  $r = 0,1$  кОм и сравнить с значением интеграла от входного напряжения для этого же момента времени.

Решение. 1) Выходное напряжение при  $t \leq T$  найдено в решении задачи 8.156:

$$u_2 = \frac{U}{T} \left[ t + \frac{1}{p} (1 - e^{pt}) \right]..$$

Представив функцию  $e^{pt}$  в виде ряда, получим:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{U}{T} \left[ t + \frac{1}{p} \left( 1 - 1 - pt - \frac{1}{2} p^2 t^2 - \frac{1}{6} p^3 t^3 - \dots \right) \right] = \\ &= \frac{U}{T} \left( -\frac{1}{2} p t^2 - \frac{1}{6} p^2 t^3 - \dots \right) = \left( \frac{r}{L} \right) \frac{U t^2}{2T} - \left( \frac{r^2}{L^2} \right) \frac{U t^3}{6T} - \dots \end{aligned}$$

Если можно пренебречь слагаемыми ряда, начиная с  $(r^2/L^2) U t^3/6T$ , то выходное напряжение  $u_2$  будет пропорционально интегралу от входного напряжения  $u_1$ , так как

$$\int_0^t u_1(t) dt = \int_0^t \frac{U}{T} t dt = \frac{U t^2}{2T}.$$

Это допустимо для начальной стадии переходного процесса [см. зависимость  $u_2(t)$  на рис. 8.156Р], когда  $t \ll \tau = L/r$ . Следовательно, для того, чтобы на всем промежутке времени действия входного сигнала  $u_1$  выходное напряжение  $u_2$  было пропорционально интегралу от входного, необходимо выполнение неравенства  $T \ll \tau = L/r$ .



2) При  $t = T = 1 \text{ мс} = 10^{-3} \text{ с}$

$$u_2(T) = \frac{10}{10^{-3}} [10^{-3} - 0,1(1 - e^{-10 \cdot 10^{-3}})] = 4,983 \cdot 10^{-2} \text{ В},$$

$$\text{а } \int_0^T u_1(t) dt = 5 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Если  $u_2(t)$  разделить на  $r/L = 10$ , то полученный результат с некоторой погрешностью представляет интеграл от  $u_1$ :

$$\frac{u_2(t=T)}{r/L} = 4,983 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{с},$$

т.е. при  $t = T$  выходное напряжение отличается от точного значения интеграла от  $u_1$  на 0,33%.

**8.158.** Для электрической цепи, представленной на рис. 8.156, а, определить ток  $i$  при  $u_1 = U(1 - e^{-at})$  В.

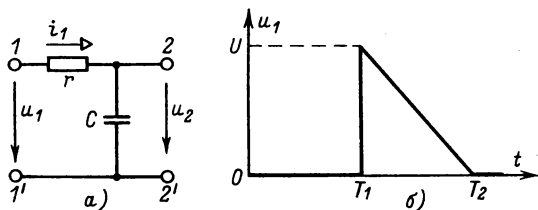


Рис. 8.159

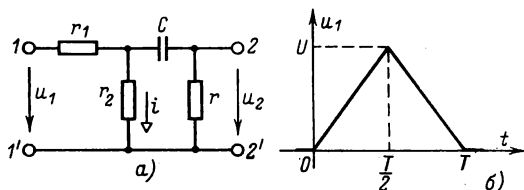


Рис. 8.161

**8.159.** Для четырехполюсника (рис. 8.159, а) с параметрами  $r = 1 \text{ кОм}$ ;  $C = 0,5 \text{ мкФ}$  определить ток  $i_1$  и напряжение  $u_2$  при входном напряжении  $u_1$ , представленном на рис. 8.159, б, где  $T_1 = 1 \text{ мс}$ ;  $T_2 = 2 \text{ мс}$ ;  $U = 10 \text{ В}$ . Построить зависимости  $i_1(t)$  и  $u_2(t)$  на одном графике с зависимостью  $u_1(t)$ .

**8.160.** Для четырехполюсника (рис. 8.159, а) определить  $i_1$  при  $u_1 = Ue^{-at}$  В.

**8.161.** Для четырехполюсника, схема которого представлена на рис. 8.161, а, с параметрами  $r_1 = 2 \text{ кОм}$ ;  $r_2 = 3 \text{ кОм}$ ;  $r = 2 \text{ кОм}$ ;  $C = 0,25 \text{ мкФ}$  определить ток  $i$  и напряжение  $u_2$ .

На входе четырехполюсника задано напряжение  $u_1$  (рис. 8.161, б), где  $T = 1$  мс;  $U = 1$  В.

Найти ток  $i$  и напряжение  $u_2$  при  $t_1 = 0,25T$ ;  $t_2 = 0,75T$  и  $t_3 = 1,25T$ .

**8.162.** Форма импульса напряжения  $u$  на входе цепи (рис. 8.162, а) показана на рис. 8.162, б.

Определить ток  $i_2$  при  $r = r_1 = 2$  кОм;  $r_2 = 3$  кОм;  $L = 0,8$  мГн;  $U_m = 10$  В;  $T = 0,5$  мс. Вычислить значение тока  $i_2$  при  $t_1 = 0,5T$  и  $t = 1,5T$ .

**8.163.** Для электрической схемы рис. 8.162, а определить ток в индуктивности, если напряжение  $u$  на входе соответственно равно: 0 при  $t < 0$ ;  $U(1 - t/T)$  при  $0 \leq t \leq T$ ; 0 при  $t > T$ .

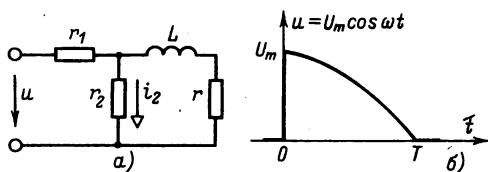


Рис. 8.162

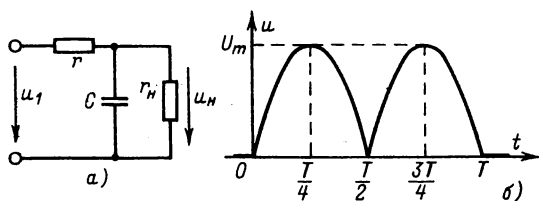


Рис. 8.164

**8.164.** Определить напряжение  $u_n$  на сопротивлении нагрузки  $r_n = 1$  кОм четырехполюсника (рис. 8.164, а) при заданном напряжении на входе  $u_1 = u$  по рис. 8.164, б, где показаны два импульса синусоидального напряжения с  $U_m = 100$  В;  $T = 0,02$  с, действующие с момента  $t = 0$ . Построить зависимость  $u_n(t)$  совместно с заданной зависимостью  $u_1(t)$ .

Параметры четырехполюсника:  $r = 250$  Ом;  $C = 50$  мкФ.

**8.165.** Для четырехполюсника (рис. 8.164, а) определить напряжение  $u_n$  при напряжении  $u_1$ , соответственно равном: 0 при  $t < 0$ ;  $\frac{1}{T}Ut$  при  $0 \leq t \leq T$ ;  $-U$  при  $T \leq t \leq 2T$ ; 0 при  $t > 2T$ .

**8.166.** Определить ток  $i$  и напряжение  $u_L$  в цепи (рис. 8.166), если  $r_1 = r = 2$  кОм;  $L = 1$  мГн и напряжение  $u$  на входе равно: 0 при  $t < 0$ ;  $10e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  В при  $t \geq 0$ .

Построить зависимости  $i(t)$  и  $u_L(t)$  на одном графике с  $u(t)$ .

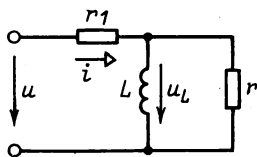


Рис. 8.166

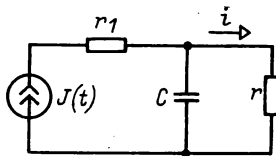


Рис. 8.167

**8.167.** В схеме рис. 8.167 ток  $J(t)$  источника равен: 0 при  $t < 0$ ;  $J_0$  при  $0 \leq t \leq T_0$ ;  $2J_0 - (J_0/T_0)t$  при  $T_0 \leq t \leq 2T_0$ ; 0 при  $t > 2T_0$ , где  $J_0 = 100$  мА;  $T_0 = 0,01$  с.

Определить ток  $i$  при параметрах  $r_1 = 5$  кОм;  $r = 10$  кОм;  $C = 1$  мкФ. Построить на одном графике зависимости  $i(t)$  и  $J(t)$ .

**8.168.** Определить ток  $i_L$  в цепи рис. 8.168 с параметрами  $L = 0,1$  Гн;  $r = 10$  Ом при действии на входе источника тока  $J(t)$ , который равен: 0 мА при  $t < 0$ ;  $-100 + 200t$  мА при  $0 \leq t \leq T$ ; 0 мА при  $t > T$ , где  $T = 100$  мс.

Построить на одном графике зависимости  $i_L(t)$  и  $J(t)$ .

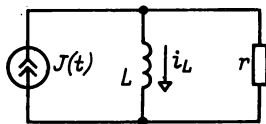


Рис. 8.168

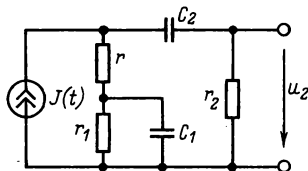


Рис. 8.169

**8.169(Р).** Для схемы рис. 8.169 определить напряжение  $u_2$ .

Дано:  $r = 1$  кОм;  $r_1 = 4$  кОм;  $r_2 = 10$  кОм;  $C_1 = 1$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ. Ток  $J(t)$  источника равен: 0 при  $t < 0$ ;  $Ie^{-\alpha t}$  при  $t \geq 0$ , где  $I = 100$  мА;  $\alpha = 200$  с $^{-1}$ .

Построить на одном графике зависимости  $J(t)$  и  $u_2(t)$ .

**Решение.** Определим, применяя, например, классический метод расчета, переходное сопротивление, которое численно равно искомому напряжению  $u_2$  при действии не заданного источника тока  $J(t)$ , а единичного скачка тока  $J_0 = 1$  А (рис. 8.169, а). Обозначим его  $u_0$ . Записав входное сопротивление

ние, например, относительно точек разрыва ветви с сопротивлением  $r_2$ , т. е.

$$Z(p) = r_2 + \frac{1}{pC_2} + r + \frac{r_1(1/pC_1)}{r_1 + 1/pC_1}$$

и приравняв его нулю, получим по (8.1) характеристическое уравнение, корни которого  $p_1 = -403,7 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -28,15 \text{ с}^{-1}$ . В установившемся режиме после коммутации  $u_{0y} = 0$ ; поэтому по (8.2)  $u_0 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ .

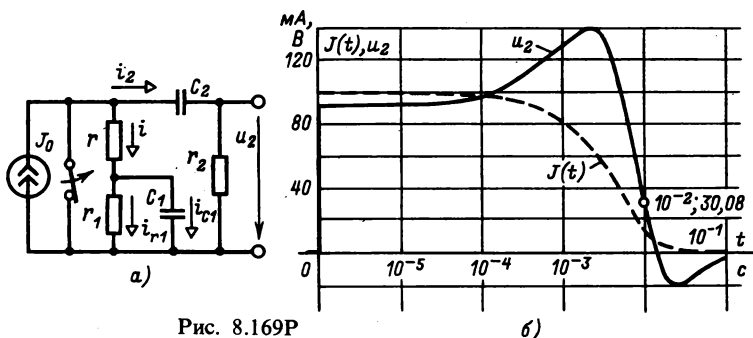


Рис. 8.169Р

Независимые начальные условия для рассматриваемой схемы:

$$u_{C1}(0) = u_{C2}(0) = 0.$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определим из системы уравнений:

$$u_0(0) = A_1 + A_2; \quad (1)$$

$$du_0/dt|_0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (2)$$

Найдем начальные значения  $u_0(0)$  и  $du_0/dt|_0$ .

Запишем систему уравнений Кирхгофа для схемы рис. 8.169Р, а:

$$-J_0 + i + i_2 = 0; \quad (3)$$

$$-i + i_{r1} + i_{C1} = 0; \quad (4)$$

$$u_{C1} - r_1 i_{r1} = 0; \quad (5)$$

$$u_{C2} + u_0 - u_{C1} - r i = 0. \quad (6)$$

Из этой системы уравнений с учетом независимых начальных условий (см. решения задач классическим методом) найдем:

$$u_0(0) = J_0 \frac{r \cdot r_2}{r + r_2}; \quad \left. \frac{du_0}{dt} \right|_0 = J_0 \frac{r_2 (C_2 r_2 - C_1 r)}{C_1 C_2 (r + r_2)^2}.$$

Теперь при заданных параметрах из системы уравнений (1) и (2) определим постоянные интегрирования:  $A_1 = -2049$ ;  $A_2 = 2958$ , т. е. переходное сопротивление

$$r(t) = -2049e^{-403,7t} + 2958e^{-28,15t}, \text{ Ом.}$$

Таблица 8.169

$t, \text{ с}$	0	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0,02	0,1
$u_2(t), \text{ В}$	90,91	91,47	96,31	128,3	30,08	-17,7	-2,902
$J(t), \text{ мА}$	100	99,8	98,02	81,87	13,53	1,832	$2 \cdot 10^{-7}$

Применяя первую форму интеграла Дюамеля (8.15а), записываем искомое напряжение:

$$u_2(t) = J(0)r(t) + \int_0^t J'(t)r(t-\tau)d\tau,$$

где  $J(0) = I = 0,1 \text{ А}$ ;  $J'(t) = -\alpha I e^{-\alpha t} = -20e^{-200t}$ , А/с.

С учетом этих соотношений получим:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= I(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) - \\ &- \alpha I \left[ A_1 e^{p_1 t} \int_0^t e^{-(\alpha+p_1)\tau} d\tau + A_2 e^{p_2 t} \int_0^t e^{-(\alpha+p_2)\tau} d\tau \right] = \\ &= 0,1(5455e^{-200t} - 4061e^{-403,7t} - 484,6e^{-28,15t}), \text{ В.} \end{aligned}$$

Для построения зависимостей составим табл. 8.169. Эти зависимости построены на рис. 8.169Р, б.

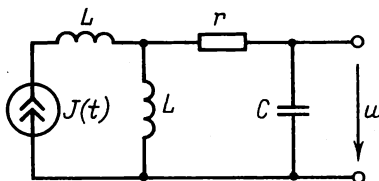


Рис. 8.170

**8.170.** Для схемы рис. 8.170 с параметрами  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 10 \text{ мГн}$ ;  $C = 400 \text{ мкФ}$  определить напряжение  $u$ , если ток  $J(t)$  источника равен: 0 при  $t < 0$ ;  $J_0(1 - e^{-\alpha t})$  при  $t \geq 0$ , где  $J_0 = 0,1 \text{ А}$ ;  $\alpha = 200 \text{ с}^{-1}$ . Построить зависимость  $u(t)$ .

## 8.6. Переходные процессы при скачкообразных изменениях токов в индуктивностях и напряжений на емкостях

8.171(P). Определить напряжения  $u_{C2}$  и  $u_{C1}$  после замыкания ключа в схеме рис. 8.171 при  $u_{C1}(0-) = 100$  В;  $r = 1$  Ом;  $R = 100$  Ом;  $C_1 = 0,5$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ. Найти момент времени  $T$ , в который напряжение  $u_{C2}$  достигает максимального значения. Для этого момента времени определить суммарный заряд на емкостях и сравнить его с зарядом первой емкости до коммутации.

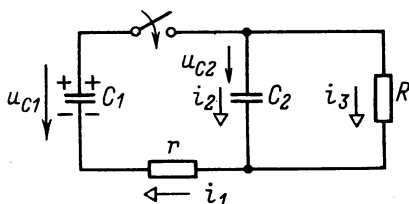


Рис. 8.171

мени  $T$ , в который напряжение  $u_{C2}$  достигает максимального значения. Для этого момента времени определить суммарный заряд на емкостях и сравнить его с зарядом первой емкости до коммутации.

Решение. Приравняв нулю входное сопротивление

$$Z(p) = r + \frac{1}{pC_1} + \frac{R(1/pC_2)}{R + 1/pC_2},$$

получим по (8.1) характеристическое уравнение

$$p^2 + 3 \cdot 10^6 p + 2 \cdot 10^{10} = 0,$$

корни которого  $p_1 = -5 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>;  $p_2 = -2995 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

Искомое напряжение запишем в виде

$$u_{C2} = u_{Cy} + u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

так как  $u_{Cy} = 0$ . Отметим, что вторая составляющая напряжения  $u_{C2}$  затухает существенно быстрее первой.

Для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  запишем напряжение  $u_{C2}$  и его первую производную для момента времени  $t = 0$ :

$$u_{C2}(0) = A_1 + A_2; \quad (1)$$

$$du_{C2}/dt|_0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (2)$$

По закону коммутации  $u_{C1}(0) = u_{C1}(0-) = 100$  В и  $u_{C2}(0) = u_{C2}(0-) = 0$  В. Чтобы найти начальное значение производной, запишем уравнения Кирхгофа для схемы после комму-

тации:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad (3)$$

$$-u_{C1} + u_{C2} + i_1 r = 0; \quad (4)$$

$$i_3 R - u_{C2} = 0, \quad (5)$$

где  $i_1 = -C_1 du_{C1}/dt$  и  $i_2 = C_2 du_{C2}/dt$ , откуда найдем при  $t = 0$

$$\left. \frac{du_{C2}}{dt} \right|_0 = \frac{i_2(0)}{C_2} = \frac{i_1(0) - u_{C2}(0)/R}{C_2} = \frac{u_{C1}(0)}{rC_2} = 10^8 \text{ В/с.}$$

Теперь из (1) и (2) определим  $A_1 = -A_2 = 33,44$  В и напряжение

$$u_{C2} = 33,44(e^{-5 \cdot 10^3 t} - e^{-2995 \cdot 10^3 t}), \text{ В.}$$

Продифференцировав последнее выражение по времени и приравняв производную нулю, получим уравнение для определения момента времени  $T$ , когда напряжение  $u_{C2}$  достигнет максимального значения:

$$du_{C2}/dt = 0 = -5 \cdot 10^3 e^{-5 \cdot 10^3 T} + 2995 \cdot 10^3 e^{-2995 \cdot 10^3 T},$$

откуда  $T = 2,14 \cdot 10^{-6}$  с.

При  $t = T$  получим  $u_{C2}(T) = 33,03$  В и заряд

$$q_{C2}(T) = C_2 u_{C2}(T) = 33,03 \text{ мкКл.}$$

Определим напряжение  $u_{C1}$ . Аналогично предыдущему

$$u_{C1} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}; \quad u_{C1}(0) = 100 = B_1 + B_2; \quad (6)$$

$$\left. du_{C1}/dt \right|_0 = p_1 B_1 + p_2 B_2. \quad (7)$$

Переписав уравнение (3) в виде

$$-C_1 du_{C1}/dt - C_2 du_{C2}/dt - u_{C2}/R = 0,$$

получим из него при  $t = 0$

$$\left. du_{C1}/dt \right|_0 = -(C_2/C_1) \left. du_{C2}/dt \right|_0 = -2 \cdot 10^8 \text{ В/с.}$$

Теперь из (6) и (7) находим:  $B_1 = 33,28$  В;  $B_2 = 66,72$  В и напряжение

$$u_{C1} = 33,28 e^{-5 \cdot 10^3 t} + 66,72 e^{-2995 \cdot 10^3 t}, \text{ В.}$$

Для  $t = T = 2,14 \cdot 10^{-6}$  с получим  $u_{C1}(t = T) = 33,04$  В и заряд  $q_{C1}(t = T) = C_1 u_{C1}(t = T) = 16,52$  мкКл.

При  $t = T$  суммарный заряд на первой и второй емкостях

$$q_{C1}(t = T) + q_{C2}(t = T) = 49,55 \text{ мкКл.}$$

Заряд на первой емкости до коммутации  $q_{C1}(0) = C_1 u_{C1}(0-) = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 50$  мкКл.

Результаты расчета позволяют сделать следующие выводы:

1) к моменту, когда напряжение на второй емкости достигнет максимального значения, напряжения на обеих емкостях становятся почти одинаковыми (при условии, что сопротивление  $r$  мало);

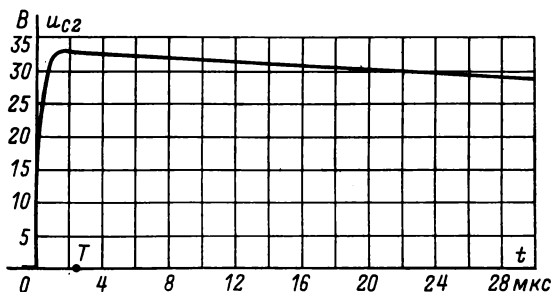


Рис. 8.171Р

2) к этому моменту времени суммарный заряд на первой и второй емкостях почти равен заряду на первой емкости до коммутации;

3) указанные «равенства» выполняются более точно при уменьшении  $r$ , что приводит к формулировке обобщенного закона коммутации в виде (8.19);

4) показанная на рис. 8.171Р зависимость  $u_{C2}(t)$  содержит две фазы переходного процесса: фаза быстрого изменения при  $0 \leq t < T$ , фаза медленного изменения при  $t > T$ ; в тех случаях, когда фаза быстрого изменения интереса не представляет, можно считать  $r = 0$  и пользоваться обобщенным законом коммутации.

**8.172(Р).** Для схемы рис. 8.171 предыдущей задачи определить  $u_{C2}$ , считая  $r = 0$ , а остальные данные прежними.

**Решение.** Для расчетной схемы рис. 8.172Р можно записать обобщенный закон коммутации (8.19) в виде

$$C_1 u_{C1}(0-) = (C_1 + C_2) u_C(0),$$

где  $u_C(0)$  — напряжение на параллельно включенных емкостях  $C_1$  и  $C_2$  после коммутации при  $t = 0$ .

Из этого равенства определим напряжение  $u_C(0) = 33,33$  В.

Находим корень характеристического уравнения для расчетной схемы:  $p = -1/R(C_1 + C_2) = -6,67 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Заметим, что в предыдущей задаче переходный процесс после момента времени  $t = T = 2,14 \cdot 10^{-6}$  с почти целиком определялся первым корнем  $p_1 = -5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ , который при  $r \rightarrow 0$  стремится к значению  $6,67 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .



Искомое напряжение записываем в виде

$$u_{C2} = u_C = u_{Cy} + u_{Ccb} = u_{Ccb} = Ae^{pt}.$$

Постоянную интегрирования определим по начальному значению:  $u_{C2}(0) = u_C(0) = 33,33$  В.

Таким образом,  $u_{C2} = 33,33e^{-6,67 \cdot 10^3 t}$ , В.

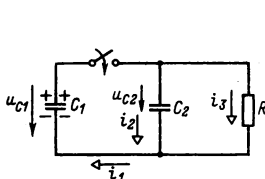


Рис. 8.172P

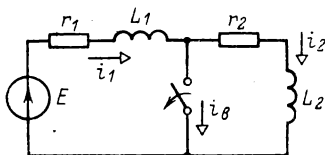


Рис. 8.173

**8.173(Р).** В цепи рис. 8.173 практически мгновенно происходит разрыв быстродействующим выключателем ветви с током  $i_3$ .

Определить ток после коммутации, если  $E = 120$  В;  $r_1 = 10$  Ом;  $r_2 = 30$  Ом;  $L_1 = 0,1$  Гн;  $L_2 = 0,4$  Гн.

Решение. Находим ток и потокосцепление индуктивности  $L_1$  до коммутации:

$$i_1(0-) = E/r_1 = 12 \text{ А}; \quad \Psi_1(0-) = L_1 i_1(0-) = 1,2 \text{ Вб}.$$

По обобщенному закону коммутации (8.20)

$$\Psi_1(0-) = \Psi_1(0) + \Psi_2(0) \quad \text{или} \quad L_1 i_1(0-) = (L_1 + L_2) i(0),$$

где  $i(0) = i_1(0) = i_2(0)$  — общий ток первой и второй индуктивностей.

Следовательно,

$$i(0) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(0-) = 2,4 \text{ А}.$$

Корень характеристического уравнения  $p = -(r_1 + r_2)/(L_1 + L_2) = -80 \text{ с}^{-1}$ .

Решение задачи ищем в виде

$$i = i_y + i_{cb} = \frac{E}{r_1 + r_2} + Ae^{pt}.$$

Постоянную интегрирования находим из уравнения

$$i(0) = 2,4 = E/(r_1 + r_2) + A,$$

откуда  $A = -0,6$ . Следовательно,

$$i = 3 - 0,6e^{-80t}, \text{ А}.$$

**8.174.** Определить ток  $i_2$  второго конденсатора (рис. 8.174) после коммутации.

В цепи действует источник синусоидальной ЭДС  $e = 100 \sin(10^3 t + 30^\circ)$  В. Заданы параметры:  $r = 100$  Ом;  $C_1 = 10$  мкФ;  $C_2 = 30$  мкФ.

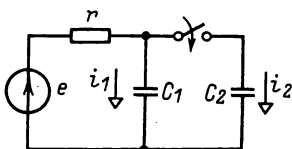


Рис. 8.174

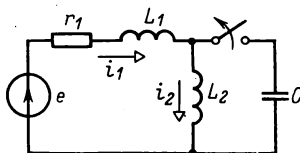


Рис. 8.175

**8.175.** Найти закон изменения тока  $i_1$  после размыкания ключа в схеме рис. 8.175, если  $r_1 = 500$  Ом;  $L_1 = 40$  мГн;  $L_2 = 10$  мГн;  $C = 1$  мкФ;  $e = 200 \sin 10^4 t$ , В.

**8.176(Р).** Для трансформатора (рис. 8.176) с параметрами  $L_1 = 0,1$  Гн;  $L_2 = 0,2$  Гн;  $r_1 = 10$  Ом;  $r_2 = 5$  Ом и коэффициентом связи  $k = 1$  найти токи  $i_1$  и  $i_2$  после коммутации. Источник ЭДС — постоянный с  $E = 50$  В.

Решение. Сначала заметим, что практически коэффициент связи не может быть равен единице из-за потоков рассеяния (т.е. практически всегда  $k < 1$ ).

Чтобы получить характеристическое уравнение, составим главный определитель цепи

$$\begin{vmatrix} r_1 + pL_1 & pM \\ pM & r_2 + pL_2 \end{vmatrix}$$

и приравняем его нулю. Получим характеристическое уравнение

$$p^2 L_1 L_2 (1 - k^2) + p(L_1 r_2 + L_2 r_1) + r_1 r_2 = 0,$$

где учтено, что  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ .

При  $k = 1$  характеристическое уравнение имеет один корень, а не два, как было бы при  $k < 1$ , а именно  $p_1 = -r_1 r_2 / (L_1 r_2 + L_2 r_1) = -20 \text{ с}^{-1}$ .

Искомые токи запишем в виде

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}} = \frac{E}{r_1} + A e^{-20t};$$

$$i_2 = i_{2y} + i_{2\text{св}} = B e^{-20t},$$

где учтено, что  $i_{2y} = 0$ .

Если теперь для определения постоянных интегрирования  $A$  и  $B$  применить закон коммутации в формулировке: потоко-

сцепление в индуктивности не может изменяться скачкообразно, то получится система уравнений:

$$L_1 i_1(0) + M i_2(0) = L_1 i_1(0-) + M i_2(0-) = 0;$$

$$M i_1(0) + L_2 i_2(0) = M i_1(0-) + L_2 i_2(0-) = 0,$$

где учтено, что  $i_1(0-) = i_2(0-) = 0$ .

Главный определитель системы

$$\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} = L_1 L_2 - M^2 = L_1 L_2 (1 - k^2) = 0.$$

Поэтому из этой системы уравнений нельзя определить значения  $i_1(0)$  и  $i_2(0)$ . При решении задач, в которых принято

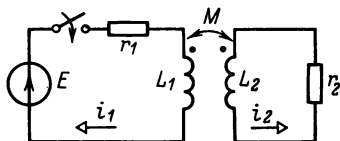


Рис. 8.176

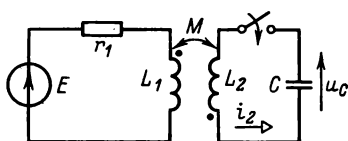


Рис. 8.177

$k = 1$ , нужно сначала определить зависимости  $\Psi_1(t)$  и  $\Psi_2(t)$ , применив тот же закон коммутации для потокосцепления, а затем, подставив эти зависимости в уравнения Кирхгофа, найти токи.

Запишем решение для потокосцепления в индуктивности  $L_1$ :

$$\Psi_1 = \Psi_{1y} + \Psi_{1св} = \Psi_{1y} + D e^{pt},$$

где  $\Psi_{1y} = L_1 i_{1y} + M i_{2y} = L_1 E / r_1 = 0,5$  Вб.

По закону коммутации  $\Psi_1(0) = \Psi_1(0-) = 0$ ; следовательно,  $D = \Psi_1(0) - \Psi_{1y}(0) = -0,5$  Вб и  $\Psi_1 = 0,5(1 - e^{-20t})$ .

Теперь из уравнения Кирхгофа  $i_1 r_1 + d\Psi_1/dt = E$  определим ток

$$i_1 = \frac{E}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{d\Psi_1}{dt} = 5 - e^{-20t}, \text{ А.}$$

Аналогично

$$\Psi_2 = \Psi_{2y} + \Psi_{2св} = \Psi_{2y} + G e^{pt},$$

где  $\Psi_{2y} = L_2 i_{2y} + M i_{1y} = \frac{E}{r_1} \sqrt{L_1 L_2} = 0,5 \sqrt{2}$  Вб.

При  $t = 0$  потокосцепление  $\Psi_2(0) = \Psi_2(0-) = 0 = 0,5 \sqrt{2} + G$ , откуда  $G = -0,5 \sqrt{2}$  Вб и  $\Psi_2 = 0,5 \sqrt{2}(1 - e^{-20t})$  Вб.

Из уравнения Кирхгофа  $i_2 r_2 + d\Psi_2/dt = 0$  получим:

$$i_2 = -\frac{1}{r_2} \frac{d\Psi_2}{dt} = -2\sqrt{2} e^{-20t}, \text{ A.}$$

**8.177.** Определить ток  $i_2$  трансформатора (рис. 8.177) после коммутации при  $E = 1 \text{ В}$ ;  $L_1 = 4 \text{ мГн}$ ;  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 2 \text{ мГн}$ ;  $C = 10^3 \text{ мкФ}$ ; коэффициент связи  $k = 1$  и  $u_C(0-) = 100 \text{ В}$ .

**8.178.** В схеме рис. 8.178 определить ток  $i_1$  после коммутации.

Дано:  $e = 100 \sin(10^4 t + 60^\circ) \text{ В}$ ;  $r = 100 \text{ Ом}$ ;  $C_1 = 4 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 1 \text{ мкФ}$ ;  $L_2 = 10 \text{ мГн}$ .

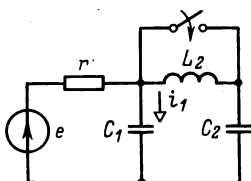


Рис. 8.178

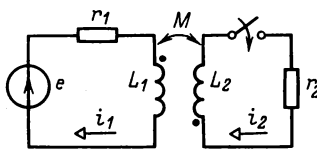


Рис. 8.179

**8.179.** Определить ток  $i_1$  трансформатора (рис. 8.179) после замыкания ключа, если  $e = 50 \sin(10^3 t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $r_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$ ;  $r_2 = 50 \text{ Ом}$ ; коэффициент связи  $k = 1$ .

## 8.7. Расчет переходных процессов методом переменных состояния

**8.180(Р).** Для схемы рис. 8.180 определить напряжение  $u_C$  и токи  $i$ ,  $i_1$  методом переменных состояния.

Решение. Начальное значение напряжения на емкости (рис. 8.180)  $u_C(0) = E/2$ .

Уравнение состояния (8.21) получим из системы уравнений Кирхгофа, составленной для схемы рис. 8.180 после замыкания ключа:

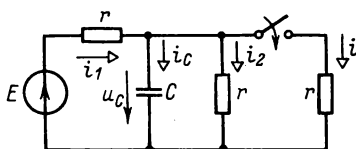


Рис. 8.180

$$-i_1 + i_C + i_2 + i = 0; \quad (1)$$

$$r i_1 + u_C = E; \quad (2)$$

$$u_C - r i_2 = 0; \quad (3)$$

$$u_C - ri = 0, \quad (4)$$

подставив в (1) выражения для  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ , полученные из (2)–(4) соответственно, и  $i_C = C du_C/dt$ . В результате получим:

$$du_C/dt = \dot{u}_C = -(3/rC) u_C + (1/rC) E. \quad (5)$$

Согласно обозначениям (8.21) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = \|\dot{u}_C\|; \mathbf{A}_1 = \left\| -\frac{3}{rC} \right\|; x = \|u_C\|; \\ \mathbf{B}_1 = \left\| \frac{1}{rC} \right\|; v = \|E\|. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Выходные переменные  $i_1$  и  $i$  находим из (2) и (4):

$$i = u_C/r; \quad i_1 = -u_C/r + E/r$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} i \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \|u_C\| + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \|E\|. \quad (7)$$

В соответствии с (8.22) имеем:

$$y = \begin{pmatrix} i \\ i_1 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Поскольку порядок квадратной матрицы  $\mathbf{A}_1$  равен единице, то согласно (8.25)

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \alpha_0 \|1\|. \quad (9)$$

Коэффициент  $\alpha_0$  определим по (8.26) из уравнения

$$\|\alpha_0\| = \|1\|^{-1} \cdot \|e^{\lambda_1 t}\|, \quad (10)$$

где собственное значение  $\lambda_1$  матрицы  $\mathbf{A}_1$  находим из (8.27):

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot \|1\| - \mathbf{A}_1) = 0,$$

или  $\lambda - (-3/rC) = 0$ , откуда  $\lambda_1 = -3/rC$ .

Подставляя  $\lambda_1$  в (10), получаем:

$$\alpha_0 = e^{-\frac{3}{rC} t}.$$

Таким образом, матричная экспоненциальная функция (9)

имеет вид:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{3}{rC}t} \parallel 1 \parallel = \parallel e^{-\frac{3}{rC}t} \parallel. \quad (11)$$

С учетом соотношений (6), (11) и начального условия  $u_C(0) = E/2$  запишем решение (8.24):

$$\begin{aligned} \parallel u_C \parallel &= \parallel e^{\lambda_1 t} \parallel \cdot \parallel \frac{E}{2} \parallel + (\parallel e^{\lambda_1 t} \parallel - 1) \times \\ &\times \parallel -\frac{rC}{3} \parallel \cdot \parallel \frac{1}{rC} \parallel \cdot \parallel E \parallel = \parallel \frac{E}{3} + \frac{E}{6} e^{-\frac{3}{rC}t} \parallel. \end{aligned}$$

Подставив это решение в (7), получим уравнение в матричной форме для выходных переменных  $i$  и  $i_1$ :

$$\begin{aligned} \parallel \begin{matrix} i \\ i_1 \end{matrix} \parallel &= \parallel \begin{matrix} \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} \end{matrix} \parallel \cdot \parallel \frac{E}{3} + \frac{E}{6} e^{-\frac{3}{rC}t} \parallel + \parallel \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{matrix} \parallel \cdot \parallel E \parallel = \\ &= \parallel \begin{matrix} \frac{E}{3r} + \frac{E}{6r} e^{-\frac{3}{rC}t} \\ \frac{2E}{3r} - \frac{E}{6r} e^{-\frac{3}{rC}t} \end{matrix} \parallel, \end{aligned}$$

т. е.

$$i = \frac{E}{3r} + \frac{E}{6r} e^{-\frac{3}{rC}t}, \text{ A}; \quad i_1 = \frac{2E}{3r} - \frac{E}{6r} e^{-\frac{3}{rC}t}, \text{ A}.$$

**8.181(Р).** В схеме рис. 8.181 определить все токи методом переменных состояния при  $E = 30$  В;  $r = 100$  Ом;  $r_1 = r_2 = 200$  Ом;  $C = 100$  мкФ;  $L = 0,1$  Гн.

**Решение.** Начальные значения напряжения на емкости и тока в индивидуальности (рис. 8.181) равны:

$$u_C(0) = Er_2/(r + r_2) = 20 \text{ В}; \quad i_L(0) = E/(r + r_2) = 0,1 \text{ А}. \quad (1)$$

Запишем для схемы рис. 8.181 систему уравнений Кирхгофа:

$$i - i_C - i_L = 0; \quad (2)$$

$$ri + r_1 i_C + u_C = E; \quad (3)$$

$$r_1 i_C + u_C - L di_L/dt = 0, \quad (4)$$

где  $i_C = C du_C/dt$ .

Решив совместно уравнения (2) и (3), найдем:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(r+r_1)C}u_C - \frac{r}{(r+r_1)C}i_L + \frac{1}{(r+r_1)C}E. \quad (5)$$

Подставив в (4) ток  $i_C = C du_C/dt$  и (5), получим:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{r}{(r+r_1)L}u_C - \frac{rr_1}{(r+r_1)L}i_L + \frac{r_1}{(r+r_1)L}E. \quad (6)$$

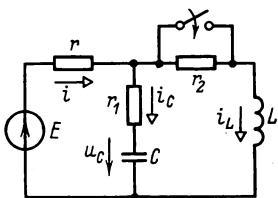


Рис. 8.181

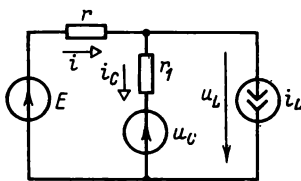


Рис. 8.181P

Система уравнений (5) и (6) в матричной форме записи — это система уравнений переменных состояния (8.21):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{(r+r_1)C} & -\frac{r}{(r+r_1)C} \\ \frac{r}{(r+r_1)L} & -\frac{rr_1}{(r+r_1)L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{Bmatrix} \frac{1}{(r+r_1)C} \\ \frac{r_1}{(r+r_1)L} \end{Bmatrix} \|E\|, \end{aligned} \quad (7)$$

где по (8.21)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} u_C \\ i_L \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \|E\| = \|30\|; \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{(r+r_1)C} & -\frac{r}{(r+r_1)C} \\ \frac{r}{(r+r_1)L} & -\frac{rr_1}{(r+r_1)L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{10^2}{3} & -\frac{10^4}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{2 \cdot 10^3}{3} \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{(r+r_1)C} \\ \frac{r_1}{(r+r_1)L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10^2}{3} \\ \frac{20}{3} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Для составления системы уравнений выходных переменных  $i_C$  и  $i$  решим совместно (2) и (3), в результате получим:

$$i_C = -\frac{1}{r+r_1}u_C - \frac{r}{r+r_1}i_L + \frac{1}{r+r_1}E \quad (8)$$

и, решив совместно (2) и (8), найдем, что

$$i = -\frac{1}{r+r_1}u_C + \frac{r_1}{r+r_1}i_L + \frac{1}{r+r_1}E. \quad (9)$$

Запишем теперь уравнения (8) и (9) в матричной форме, т.е. систему уравнений выходных переменных (8.22):

$$\begin{Bmatrix} i_C \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r+r_1} & -\frac{r}{r+r_1} \\ -\frac{1}{r+r_1} & \frac{r_1}{r+r_1} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r+r_1} \\ \frac{1}{r+r_1} \end{Bmatrix} \cdot \|E\|, \quad (10)$$

где по (8.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r+r_1} & -\frac{r}{r+r_1} \\ -\frac{1}{r+r_1} & \frac{r_1}{r+r_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{300} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{300} & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{r+r_1} \\ \frac{1}{r+r_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{300} \\ \frac{1}{300} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  можно определить и иначе, применяя метод наложения. Сначала находим матрицы уравнений (8.29), которые для схемы рис. 8.181 имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} i_C &= \mathbf{H}_{CC}u_C + \mathbf{H}_{CL}i_L + \mathbf{H}_{Ce}\mathbf{e}; \quad u_L = \mathbf{H}_{LC}u_C + \mathbf{H}_{LL}i_L + \mathbf{H}_{Le}\mathbf{e}; \\ i_C &= \mathbf{H}_{1C}u_C + \mathbf{H}_{1L}i_L + \mathbf{H}_{1e}\mathbf{e}; \quad i = \mathbf{H}_{2C}u_C + \mathbf{H}_{2L}i_L + \mathbf{H}_{2e}\mathbf{e}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $i_C = \|i_C\|$ ;  $u_C = \|u_C\|$ ;  $i_L = \|i_L\|$ ;  $u_L = \|u_L\|$ ;  $i = \|i\|$ ;  $\mathbf{e} = \|E\|$ .

Заменив в схеме рис. 8.181 емкость источником ЭДС и индуктивность источником тока, получим схему рис. 8.181Р, при помощи которой методом наложения определим матрицы  $\mathbf{H}$  с различными индексами.

При  $u_C = 0$ ,  $i_L = 0$  (рис. 8.181Р)

$$i = i_C = E/(r+r_1); \quad u_L = r_1 E/(r+r_1),$$



т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Ce} = \mathbf{H}_{1e} = \mathbf{H}_{2e} &= \left\| \frac{1}{r_1 + r} \right\| = \left\| \frac{1}{300} \right\|; \\ \mathbf{H}_{Le} &= \left\| \frac{r_1}{r + r_1} \right\| = \left\| \frac{2}{3} \right\|. \end{aligned} \quad (12)$$

При  $E = 0$  ток  $i_L$  источника тока равен нулю (рис. 8.181P)  $i = i_C = -u_C/(r + r_1)$ ;  $u_L = -ir = ru_C/(r + r_1)$ , т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{CC} = \mathbf{H}_{1C} = \mathbf{H}_{2C} &= \left\| -\frac{1}{r + r_1} \right\| = \left\| -\frac{1}{300} \right\|; \\ \mathbf{H}_{LC} &= \left\| \frac{r}{r + r_1} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \right\|. \end{aligned} \quad (13)$$

При  $E = 0$ ,  $u_C = 0$  (рис. 8.181P)  $i = r_1 i_L/(r + r_1)$ ;  $i_C = -r i_L/(r + r_1)$ ;  $u_L = r_1 i_C = -rr_1 i_L/(r + r_1)$ , т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2L} &= \left\| \frac{r_1}{r + r_1} \right\| = \left\| \frac{2}{3} \right\|; \mathbf{H}_{CL} = \mathbf{H}_{1L} = \left\| -\frac{r}{r + r_1} \right\| = \left\| -\frac{1}{3} \right\|; \\ \mathbf{H}_{LL} &= \left\| -\frac{rr_1}{r + r_1} \right\| = \left\| -\frac{200}{3} \right\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения состояния (8.21) и уравнения выходных переменных (8.22) для схемы рис. 8.181 с учетом (8.28), (12)–(14) запишем в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{H}_{CL} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{Ce} \\ \mathbf{H}_{Le} \end{bmatrix} \cdot \|e\| = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{(r + r_1)C} & -\frac{r}{(r + r_1)C} \\ \frac{r}{(r + r_1)L} & -\frac{rr_1}{(r + r_1)L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(r + r_1)C} \\ \frac{r_1}{(r + r_1)L} \end{bmatrix} \cdot \|E\|; \\ \begin{bmatrix} \dot{i}_C \\ \dot{i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1C} & \mathbf{H}_{1L} \\ \mathbf{H}_{2C} & \mathbf{H}_{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1e} \\ \mathbf{H}_{2e} \end{bmatrix} \cdot \|e\| = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{r + r_1} & -\frac{r}{r + r_1} \\ -\frac{1}{r + r_1} & \frac{r_1}{r + r_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r + r_1} \\ \frac{1}{r + r_1} \end{bmatrix} \cdot \|E\|, \end{aligned}$$

что, конечно, совпадает с (7) и (10).

Определим собственные значения матрицы  $A_1$  из (8.27)

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A_1) = \\ &= \det \left\{ \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{10^2}{3} & -\frac{10^4}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{2 \cdot 10^3}{3} \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \det \left\{ \begin{vmatrix} \lambda + \frac{10^2}{3} & \frac{10^4}{3} \\ -\frac{10}{3} & \lambda + \frac{2 \cdot 10^3}{3} \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \left( \lambda + \frac{10^2}{3} \right) \left( \lambda + \frac{2 \cdot 10^3}{3} \right) + \frac{10^5}{9} = 0,\end{aligned}$$

откуда  $\lambda_1 = -51,39$  и  $\lambda_2 = -648,6$ .

Для определения матричной экспоненциальной функции  $e^{A_1 t}$  необходимо из (8.26), которое для квадратной матрицы второго порядка  $A_1$  имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{vmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

определить коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Подставив в (15) найденные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,086e^{\lambda_1 t} - 8,605 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_2 t} \\ 1,674 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_1 t} - 1,674 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, матричная экспоненциальная функция (8.25) имеет вид:

$$\begin{aligned}e^{A_1 t} &= \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 A_1 = (1,086e^{\lambda_1 t} - 8,605 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_2 t}) \times \\ &\times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1,674 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_1 t} - 1,674 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_2 t}) \times \\ &\times \begin{vmatrix} -\frac{10^2}{3} & -\frac{10^4}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{2 \cdot 10^3}{3} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1,03e^{\lambda_1 t} - 3,023 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_2 t} & -5,581e^{\lambda_1 t} + 5,581e^{\lambda_2 t} \\ 5,581 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_1 t} - 5,581 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_2 t} & -3,023 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_1 t} + 1,03e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}. \quad (16)\end{aligned}$$

Учитывая, что  $v = \|E\|$  от времени не зависит, решение уравнения состояния (8.21) можно записать в виде (8.24), в котором

$$x(0) = \begin{Bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0,1 \end{Bmatrix}; \quad A_1^{-1} = \begin{Bmatrix} -2 \cdot 10^{-2} & 10^{-1} \\ -10^{-4} & -10^{-3} \end{Bmatrix}; \quad (17)$$

$$A_1^{-1} B_1 v = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,3 \end{Bmatrix}.$$

Подставив (16) и (17) в (8.24), получим:

$$x = \begin{Bmatrix} u_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21,72e^{\lambda_1 t} - 1,721e^{\lambda_2 t} \\ 0,1177e^{\lambda_1 t} - 0,3177e^{\lambda_2 t} + 0,3 \end{Bmatrix},$$

т. е.

$$\begin{aligned} u_C &= 21,72e^{-51,39t} - 1,721e^{-648,6t}, \text{ В;} \\ i_L &= 0,3 + 0,1177e^{-51,39t} - 0,3177e^{-648,6t}, \text{ А.} \end{aligned}$$

Теперь по (10) определим выходные переменные:

$$\begin{aligned} i_C &= -0,1116e^{-51,39t} + 1,116e^{-648,6t}, \text{ А;} \\ i &= 0,3 + 6,047 \cdot 10^{-3}e^{-51,39t} - 0,206e^{-648,6t}, \text{ А.} \end{aligned}$$

**8.182(Р).** Решить задачу 8.63 методом переменных состояния.

**Решение.** Начальные значения напряжения на емкости и тока в индуктивности (рис. 8.63):

$$u_C(0) = E = 200 \text{ В}; \quad i_2(0) = J = 1 \text{ А.} \quad (1)$$

Запишем для схемы рис. 8.63 после коммутации систему уравнений Кирхгофа:

$$-i_1 - J + i_3 + i_2 = 0; \quad (2)$$

$$r_1 i_1 + u_C = E; \quad (3)$$

$$L di_2/dt + r_2 i_2 - u_C = 0, \quad (4)$$

где  $i_3 = C du_C/dt$ .

Решив совместно (2) и (3), найдем, что

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{r_1 C} u_C - \frac{1}{C} i_2 + \frac{1}{r_1 C} E + \frac{1}{C} J. \quad (5)$$

Уравнение (4), разрешенное относительно производной  $di_2/dt$ , и уравнение (5) образуют систему уравнений переменных

состояния, которые запишем в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r_2}{L} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_C \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r_1 C} & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E \\ J \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

т. е. согласно (8.21)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} u_C \\ i_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} E \\ J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r_2}{L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 & -25 \cdot 10^2 \\ 2 & -200 \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{r_1 C} & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 & 25 \cdot 10^2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Выразив из (3) ток

$$i_1 = -u_C/r_1 + E/r_1$$

и подставив его в (2), получим:

$$i_3 = -u_C/r_1 - i_2 + E/r_1 + J.$$

Эти два уравнения, т. е. систему уравнений выходных переменных, запишем в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_C \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ \frac{1}{r_1} & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E \\ J \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

т. е. согласно (8.22)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r_1} & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10^{-2} & 0 \\ -10^{-2} & -1 \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ \frac{1}{r_1} & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 10^{-2} & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Определяем собственные значения матрицы  $A_1$  из (8.27)

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det \{\lambda \cdot I - A_1\} = \\ &= \det \left\{ \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -25 & -25 \cdot 10^2 \\ 2 & -200 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= (\lambda + 25)(\lambda + 200) + 5 \cdot 10^3 = 0,\end{aligned}$$

откуда  $\lambda_1 = -61$ ;  $\lambda_2 = -164$ .

Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  матричной экспоненциальной функции  $e^{A_1 t}$ , у которой  $A_1$  — квадратная матрица второго порядка, находим так же, как и в решении задачи 8.181Р:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,592e^{\lambda_1 t} & -0,5922e^{\lambda_2 t} \\ 9,709 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_1 t} & -9,709 \cdot 10^{-3}e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}.$$

Аналогично вычислим и матричную экспоненциальную функцию (8.25):

$$e^{A_1 t} = \begin{vmatrix} 1,35e^{\lambda_1 t} - 0,3495e^{\lambda_2 t} & -24,27e^{\lambda_1 t} + 24,27e^{\lambda_2 t} \\ 1,942 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_1 t} - 1,942 \cdot 10^{-2}e^{\lambda_2 t} & -0,3495e^{\lambda_1 t} + 1,35e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Решение уравнения состояния запишем по (8.24), в котором

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= \begin{vmatrix} u_C(0) \\ i_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 200 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad A_1^{-1} = \begin{vmatrix} -2 \cdot 10^{-2} & 25 \cdot 10^{-2} \\ -2 \cdot 10^{-4} & -25 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}; \\ A_1^{-1} B_1 v &= \begin{vmatrix} -150 \\ -1,5 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в (8.24), получим:

$$x = \begin{vmatrix} 150 + 79,61e^{\lambda_1 t} - 29,61e^{\lambda_2 t} \\ 1,5 + 1,146e^{\lambda_1 t} - 1,646e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} u_C &= 150 + 79,61e^{-61t} - 29,61e^{-164t}, \text{ В;} \\ i_2 &= 1,5 + 1,146e^{-61t} - 1,646e^{-164t}, \text{ А.} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Теперь, подставив (13) в (9), получим выходные переменные:

$$\begin{aligned} i_1 &= 0,5 - 0,7961e^{-61t} + 0,2961e^{-164t}, \text{ А;} \\ i_3 &= -1,942e^{-61t} + 1,942e^{-164t}, \text{ А.} \end{aligned}$$

- 8.183. Решить задачу 8.10 методом переменных состояния.  
 8.184. Решить задачу 8.15 методом переменных состояния.  
 8.185. Решить задачу 8.18 методом переменных состояния.  
 8.186. Решить задачу 8.37 методом переменных состояния.  
 8.187. Решить задачу 8.41 методом переменных состояния.  
 8.188. Решить задачу 8.42 методом переменных состояния.  
 8.189. Решить задачу 8.65 методом переменных состояния.  
 8.190. Решить задачу 8.68 методом переменных состояния.  
 8.191. Решить задачу 8.71 методом переменных состояния.  
 8.192. Решить задачу 8.72 методом переменных состояния.  
 8.193. Решить задачу 8.78 методом переменных состояния.  
 8.194. Решить задачу 8.81 методом переменных состояния.

## Глава девятая

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### Введение к гл. 9

Ввиду относительно быстрого протекания переходных процессов в реальных цепях с распределенными параметрами ЭДС синусоидальных источников промышленной частоты за рассматриваемые интервалы времени мало изменяются, так что их можно считать постоянными. Поэтому в этой главе надо считать, что заданы источники с постоянными ЭДС, кроме задач, в которых по условию заданы другие источники.

Напряжение и ток переходного процесса можно представить наложением соответственно напряжений и токов прямой и обратной волн, т. е. в виде

$$u = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}; \quad i = i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}}, \quad (9.1)$$

где  $u_{\text{пр}}$ ,  $i_{\text{пр}}$  — напряжение и ток прямой волны, движущейся слева направо;  $u_{\text{обр}}$ ,  $i_{\text{обр}}$  — напряжение и ток обратной волны, движущейся справа налево.

При заданном на левом конце — в начале линии ( $x = 0$ ) — напряжении  $u_1 = u_1(0, t)$  в интервале времени, когда отсутствует обратная волна, напряжение и ток прямой волны

$$u_{\text{пр}} = u_{\text{пр}}(x, t) = u_1(t - x/c); \quad i_{\text{пр}} = u_{\text{пр}}/Z_{\text{в}}, \quad (9.2)$$

где  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$  — скорость движения волны в линии без потерь или без искажений (если нет указаний, то считать в воздушной линии без потерь  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с, в кабеле без потерь

$c = 1,5 \cdot 10^5$  км/с);  $z_b = \sqrt{L_0/C_0}$  — волновое сопротивление линии без потерь или без искажений;  $L_0$  и  $C_0$  — индуктивность и емкость на единицу длины; время  $t$  отсчитывается с момента включения источника с напряжением  $u_1$  в начале линии. В случае источника с постоянным напряжением  $u_1 = U$  по линии распространяется волна с прямоугольным фронтом.

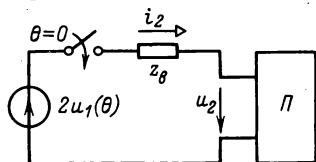


Рис. 9.А

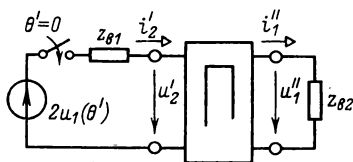


Рис. 9.Б

Распределение напряжения вдоль линии в заданный момент времени  $t = t_1$ :

$$u_{\text{пр}}(x, t_1) = U \cdot 1(x - ct_1). \quad (9.3)$$

Напряжение в заданной точке линии с координатой  $x = x_1$ :

$$u_{\text{пр}}(x_1, t) = U \cdot 1(t - t_1), \quad (9.4)$$

где  $t_1 = x_1/c$  — время распространения волны до заданной точки линии;  $1(x)$  или  $1(t)$  — единичные функции.

Для определения напряжения  $u_2$  и тока  $i_2$  в конце линии длиной  $l$  с сопротивлением нагрузки — пассивным двухполюсником  $\Pi$  можно составить расчетную схему (рис. 9.А), в которой ключ замыкается в момент прихода волны к концу линии, т. е. при  $t = l/c$  и  $\theta = t - l/c = 0$ .

Напряжение обратной волны в конце линии

$$u_{2\text{обр}} = u_2(\theta) - u_{2\text{пр}}(\theta) \quad (9.5)$$

и в любой точке

$$u_{\text{обр}}(x, t) = u_{2\text{обр}}\left(t - \frac{2l - x}{c}\right) = u_{2\text{обр}}\left(\theta - \frac{l - x}{c}\right); \quad (9.6)$$

ток обратной волны

$$i_{\text{обр}} = u_{\text{обр}}/z_b. \quad (9.7)$$

При  $t \geq 2l/c$  для расчета напряжений и токов применяется метод наложения всех последующих прямых и обратных волн.

Если в конце линии с волновым сопротивлением  $z_{b1}$  включен пассивный четырехполюсник  $\Pi$  с сосредоточенными параметрами, к выходу которого присоединена линия с волновым сопротивлением  $z_{b2}$ , то для определения токов и напряжений четырехполюсника до момента времени, когда волна, отра-

завишись от конца второй линии, дойдет до места соединения линий, можно пользоваться расчетной схемой рис. 9.Б. На схеме и в расчетных соотношениях одним штрихом обозначены величины, относящиеся к первой линии, а двумя штрихами — ко второй линии.

Если конец первой линии непосредственно соединен с началом второй линии (четыреполюсник отсутствует), то в месте соединения коэффициент преломления волны равен:

$$n = u''_1/u'_{2np} = 2z_{B2}/(z_{B1} + z_{B2}), \quad (9.8)$$

и для первой линии коэффициент отражения волны

$$\rho = u'_{2обp}/u'_{2np} = (z_{B2} - z_{B1})/(z_{B1} + z_{B2}). \quad (9.9)$$

В этом случае

$$u'_{обp}(x', \theta') = \rho u'_1 \left( \theta' - \frac{l_1 - x'}{c} \right); \quad u''_{np}(x'', t'') = n u'_1 \left( t'' - \frac{x''}{c} \right), \quad (9.10)$$

где расстояние  $x''$  отсчитывается от начала второй линии, а время  $t'' = \theta' -$  от момента прихода волны к месту соединения линий.

Если на выходе четырехполюсника присоединено несколько линий, то в расчетной схеме для определения волн, возникающих в этих линиях, каждая из них заменяется волновым сопротивлением, присоединенным к выходу четырехполюсника.

Режим в линии при включении новой ветви рассчитывается методом наложения. Токи и напряжения в линии равны суммам соответственно токов и напряжений до коммутации и токов и напряжений, возникающих после включения в эту ветвь источника с напряжением, равным напряжению на разомкнутом ключе, при отсутствии других источников питания.

Режим в линии при отключении ветви определяется наложением на токи и напряжения линии до коммутации токов и напряжений, которые возникают при включении в коммутируемую ветвь источника с током, равным по значению, но противоположным по направлению току в ветви до ее отключения, при отсутствии других источников питания.

Формирование импульсов получают подбором линий (волновых сопротивлений и длин), а также параметров присоединенных к ним цепей с сосредоточенными постоянными (в общем случае — многополюсников). При расчете токов и напряжений можно применить наложение последовательно возникающих волн, как прямых, так и обратных.

При расчете операторным методом, кроме теоремы разложения (с решением в виде ряда Фурье), применяют и ре-



шение Даламбера (в виде последовательности единичных функций). В линии без искажений волна распространяется без изменения формы, но с экспоненциально уменьшающимися значениями напряжения и тока.

В операторной форме напряжение и ток в линии длиной  $l$  при сопротивлении нагрузки  $Z_2(p)$  и напряжении в начале  $U_1(p)$ :

$$U(p) = U_1(p) \frac{Z_2(p) \operatorname{ch} \left[ \frac{p + \alpha}{c} (l - x) \right] + z_b \operatorname{sh} \left[ \frac{p + \alpha}{c} (l - x) \right]}{Z_2(p) \operatorname{ch} \left( \frac{p + \alpha}{c} l \right) + z_b \operatorname{sh} \left( \frac{p + \alpha}{c} l \right)}; \quad (9.11)$$

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{z_b} \frac{Z_2(p) \operatorname{sh} \left[ \frac{p + \alpha}{c} (l - x) \right] + z_b \operatorname{ch} \left[ \frac{p + \alpha}{c} (l - x) \right]}{Z_2(p) \operatorname{ch} \left( \frac{p + \alpha}{c} l \right) + z_b \operatorname{sh} \left( \frac{p + \alpha}{c} l \right)},$$

где  $z_b = \sqrt{L_0/C_0}$  — волновое сопротивление;  $\alpha = r_0/g_0$  — коэффициент ослабления;  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$  — скорость волны.

## 9.1. Формирование прямой и обратной волн в линии без потерь

**9.1(P).** Найти распределение напряжения и тока вдоль воздушной линии без потерь длиной 180 км с волновым сопротивлением 400 Ом через интервал времени  $t_1 = 1$  мс после выключения в начале линии источника с напряжением  $u_1 = U_0 e^{-\alpha t} = 100 e^{-2 \cdot 10^3 t}$ , кВ. В конце линии присоединена батарея конденсаторов общей емкостью  $C = 0,5$  мкФ.

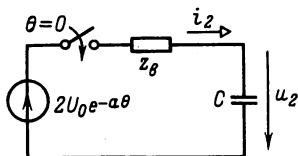


Рис. 9.1P

**Решение.** За время  $t_1 = 1$  мс волна проходит путь, равный 300 км. Следовательно, на участке линии  $x = 0 \div 60$  км наблюдается только прямая волна. Для прямой волны согласно (9.2) напряжение, кВ, и ток, А,

$$u_{\text{пр}} = 100 e^{-2 \cdot 10^3 (t - x/c)};$$

$$i_{\text{пр}} = u_{\text{пр}}/z_b = 250 e^{-2 \cdot 10^3 (t - x/c)}.$$

Напряжение в конце линии найдем по расчетной схеме (рис. 9.1P) классическим методом. Ток  $i_2$  равен сумме установившейся и свободной составляющих.

$$i_2 = i_{2y} + i_{2\text{св}}. \quad (1)$$

Корни характеристического уравнения цепи определим из уравнения

$$Z_{вх}(p) = z_{в} + 1/pC = 0,$$

откуда после подстановки данных находим корень (один)  $p_1 = -1/z_{в}C = -5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ , т. е.  $i_{2св} = Be^{p_1 \theta}$ , где  $B$  — постоянная.

Ток  $i_{2y}$  определим как частное решение дифференциального уравнения схемы рис. 9.1Р:

$$i_{2y} z_{в} + \frac{1}{C} \int i_{2y} d\theta = 2U_0 e^{-a\theta},$$

где  $i_{2y} = Ae^{-a\theta}$

Для определения постоянной  $A$  подставим частное решение в дифференциальное уравнение:

$$Az_{в}e^{-a\theta} + \frac{1}{C} \int Ae^{-a\theta} d\theta = 2U_0 e^{-a\theta},$$

откуда после интегрирования находим:

$$A = -2U_0 aC / (1 - aCz_{в}) = -333,33 \text{ А},$$

т. е.  $i_{2y} = -333,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} \text{ А}$

и решение (1) для тока

$$i_2 = -333,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} + Be^{-5 \cdot 10^3 \theta} \text{ А}.$$

Для определения коэффициента  $B$  учтем начальное условие: конденсаторы не были заряжены, т. е. при  $\theta = 0$  напряжение  $u_2(0) = 0$  и ток

$$i_2(0) = 2U_0/z_{в} = 500 = -333,33 + B,$$

т. е.  $B = 833,33 \text{ А}$  и ток

$$i_2 = -333,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} + 833,33e^{-5 \cdot 10^3 \theta} \text{ А}.$$

Ток обратной волны в конце линии найдем по (9.1):

$$i_{2обр} = i_{2пр} - i_2 = \frac{u_{2пр}}{z_{в}} - i_2 = [583,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} - 833,33e^{-5 \cdot 10^3 \theta}] \text{ А}.$$

Напряжение обратной волны по (9.7)

$$u_{2обр} = i_{2обр} z_{в} = 233,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} - 333,33e^{-5 \cdot 10^3 \theta} \text{ кВ}.$$

При  $x \leq 60 \text{ км}$   $i = i_{пр}$  и  $u = u_{пр}$ , при  $x \geq 60 \text{ км}$

$$i = i_{пр} - i_{2обр} = \left[ 250e^{-2 \cdot 10^3 (t_1 - x/c)} - 583,33e^{-2 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{2l-x}{c}\right)} + \right. \\ \left. + 833,33e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{2l-x}{c}\right)} \right] \text{ А};$$

$$u = u_{\text{пр}} + u_{\text{обп}} = \left[ 100e^{-2 \cdot 10^3 (t_1 - x/c)} + 233,33e^{-2 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{2l-x}{c}\right)} - 333,33e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{2l-x}{c}\right)} \right] \text{ кВ.}$$

Ток  $i_2$  можно определить и операторным методом. По расчетной схеме рис. 9.1Р находим изображение тока

$$I_2(p) = \frac{2U_0/(p+a)}{z_b + 1/pC} = \frac{5 \cdot 10^2 p}{p^2 + 7 \cdot 10^3 p + 10^7} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

По теореме разложения (8.11) находим оригинал

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 \theta} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 \theta} = \\ &= -333,33e^{-2 \cdot 10^3 \theta} + 833,33e^{-5 \cdot 10^3 \theta} \text{ А;} \end{aligned}$$

здесь корни  $p_1$  и  $p_2$  определяются из уравнения  $F_2(p) = 0$ , откуда  $p_1 = -2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_2 = -5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Зная ток  $i_2$ , находим все остальные величины.

**9.2.** В конце воздушной линии (рис. 9.2) длиной  $l = 120 \text{ км}$  с волновым сопротивлением  $z_b = 500 \text{ Ом}$  присоединен приемник с сопротивлением  $r = 100 \text{ Ом}$ . Линия подключается к источнику постоянной ЭДС с параметрами  $E = 100 \text{ кВ}$ ;  $r_{\text{вт}} = 100 \text{ Ом}$ .

Построить зависимость напряжения в конце линии от времени  $u_2(t)$  в интервале  $0 - 1500 \text{ мкс}$  после коммутации.

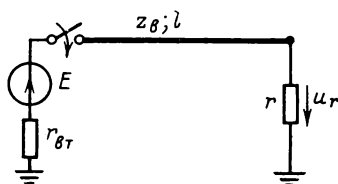


Рис. 9.2

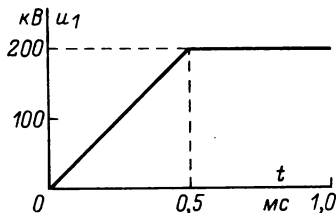


Рис. 9.3

**9.3.** На катушку с индуктивностью  $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$  падает волна, напряжение  $u_1$  которой изменяется в начале линии по закону, изображенному на рис. 9.3. Волновое сопротивление линии  $z_b = 400 \text{ Ом}$ ; длина линии  $l = 300 \text{ км}$ .

Построить распределение тока вдоль линии через время  $t_1 = 1,75 \text{ мс}$  после начала движения волны от начала линии.

**9.4.** В конце воздушной линии ( $l = 150 \text{ км}$ ;  $z_b = 500 \text{ Ом}$ ) включены параллельно соединенные конденсатор емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  и резистор с сопротивлением  $r = 1000 \text{ Ом}$ . Линия

присоединяется к источнику с постоянным напряжением  $U = 300$  кВ.

Построить кривые изменения напряжения и тока в зависимости от времени в интервале  $0-1,4$  мс в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $l_1 = 60$  км от конца линии, считая за начало отсчета времени момент присоединения линии к источнику.

**9.5.** К воздушной линии ( $l = 30$  км;  $z_b = 400$  Ом) в конце присоединен двухполюсник, параметры которого в последовательной схеме замещения заданы:  $r_2 = 100$  Ом;  $L_2 = 100$  мГн. Линия подключается к источнику с постоянным напряжением  $U = 20,2$  кВ.

Записать выражения для построения графиков распределения напряжения и тока вдоль линии для момента времени, когда волна, отразившись от конца, дойдет до середины линии. Найти напряжение на активном сопротивлении двухполюсника в этот момент времени.

**9.6.** У коаксиального кабеля длиной  $l = 10$  м с волновым сопротивлением  $z_b = 50$  Ом сопротивление нагрузки активное и равно  $r_2 = 150$  Ом. Кабель подключается к источнику синусоидального напряжения  $u = 100 \sin(\omega t + \pi/6)$  В с частотой  $f = 10$  МГц. Скорость волны в кабеле  $c = 1,5 \cdot 10^5$  км/с.

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии через интервал времени  $t_1 = 0,1$  мкс после подключения.

## 9.2. Переход волны с одной линии на другую

**9.7(Р).** Между концом первой воздушной линии ( $l_1 = 120$  км;  $z_{b1} = 500$  Ом) и началом второй ( $l_2 = 30$  км;  $z_{b2} = 400$  Ом) включены реактор с индуктивностью  $L = 0,135$  Гн и реостат с сопротивлением  $r = 600$  Ом (рис. 9.7).

В конце второй линии емкость шин приемной подстанции  $C = 0,125$  мкФ. В начале первой линии включается источник с постоянным напряжением  $U = 100$  кВ.

Найти распределение напряжения вдоль линий в момент, когда волна, отразившись от конца второй линии, дойдет до ее начала.

**Решение.** Напряжение и ток прямых волн в первой линии постоянные:  $u'_{пр} = U = 100$  кВ;  $i'_{пр} = u'_{пр}/z_b = 200$  А.

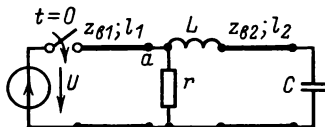


Рис. 9.7

Через время  $t_1 = l_1/c = 0,4$  мс прямая волна достигнет конца первой линии (точка  $a$  на рис. 9.7). Расчетная схема для определения тока и напряжения в месте перехода волны с одной линии в другую дана на рис. 9.7Р,  $a$ , где  $\theta'$  — время,

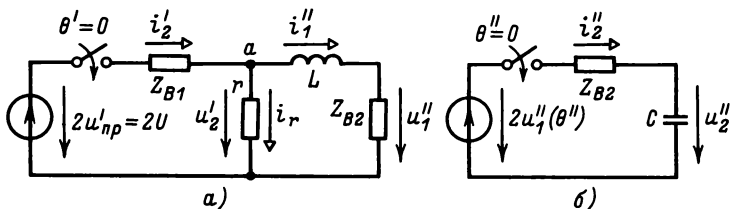


Рис. 9.7Р

отсчитываемое с момента прихода волны к концу первой линии.

Ток  $i'_2$  представим в виде суммы установившейся и свободной составляющих:

$$i'_2 = i'_{2y} + i'_{2св},$$

$$\text{где } i'_{2y} = \frac{2U}{z_{B1} + rz_{B2}/(r + z_{B2})} = 270,27 \text{ А.}$$

Корень характеристического уравнения найдем из уравнения

$$Z_{лвх}(p) = z_{B1} + \frac{r(pL + z_{B2})}{r + z_{B2} + pL} = 0,$$

откуда  $p_1 = -5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  и, следовательно,

$$i'_2 = (270,27 + Ae^{p_1\theta'}) \text{ А.}$$

Начальные условия: при  $\theta' = 0$  ток  $i'_1(0) = 0$ , т.е. по рис. 9.7Р,  $a$

$$i'_2(0) = 2U/(z_{B1} + r) = 181,818 = 270,27 + A,$$

откуда  $A = -88,45 \text{ А}$  и ток

$$i'_2 = (270,27 - 88,45e^{-5 \cdot 10^3\theta'}) \text{ А.}$$

Ток обратной волны в первой линии

$$i'_{обp} = i'_{np} - i'_2 = (-70,27 + 88,45e^{-5 \cdot 10^3\theta'}) \text{ А.}$$

Напряжение обратной волны в первой линии

$$u'_{обp} = z_{B1}i'_{обp} = (-35,135 + 44,225e^{-5 \cdot 10^3\theta'}) \text{ кВ.}$$

Напряжение в конце первой линии (рис. 9.7Р,  $a$ )

$$u'_2 = 2U - z_{B1}i'_2 = (64,86 + 44,22e^{-5 \cdot 10^3\theta'}) \text{ кВ.}$$

Ток в сопротивлении

$$i_r = u_2/r = (108,1 + 73,7e^{-5 \cdot 10^3 \theta}) \text{ А.}$$

Ток прямой волны в начале второй линии

$$i''_{1\text{пр}} = i'_2 - i_r = 162,17(1 - e^{-5 \cdot 10^3 \theta}) \text{ А.}$$

Напряжение прямой волны в начале второй линии

$$u''_{1\text{пр}} = z_{в2} i''_{1\text{пр}} = 64,87(1 - e^{-5 \cdot 10^3 \theta}) \text{ кВ.}$$

За время  $\theta_2 = l_2/c = 0,1 \cdot 10^{-3}$  с прямая волна достигнет конца второй линии. Расчетная схема для определения тока и напряжения в конце второй линии дана на рис. 9.7Р, б, где  $\theta''$  — время, отсчитываемое с момента прихода волны к концу второй линии, и напряжение

$$u''_1(\theta'') = 64,87(1 - e^{-5 \cdot 10^3 \theta''}) \text{ кВ.}$$

Для определения тока  $i''_2$  в схеме рис. 9.7Р, б применим интеграл Дюамеля:

$$i''_2 = 2u''_1(0)g(\theta'') + 2 \int_0^{\theta''} [du''_1(\theta'')/d\theta'']_{\theta''=\tau} g(\theta'' - \tau) d\tau,$$

где  $u''_1(0) = 0$  — напряжение прямой волны в начале второй линии при  $\theta'' = 0$ , и переходная проводимость

$$g(\theta'') = \frac{1}{z_{в2}} e^{-2 \cdot 10^4 \theta''} = \frac{1}{400} e^{-2 \cdot 10^4 \theta''} \text{ См}$$

(у характеристического уравнения схемы рис. 9.7Р, б один корень  $p_2 = -2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ).

После интегрирования находим ток

$$i''_2 = 108(e^{-5 \cdot 10^3 \theta''} - e^{-2 \cdot 10^4 \theta''}) \text{ А.}$$

Ток обратной волны в конце второй линии

$$i''_{2\text{обр}} = i''_{1\text{пр}} - i''_2 = (162,17 - 270,17e^{-5 \cdot 10^3 \theta''} + 108e^{-2 \cdot 10^4 \theta''}) \text{ А.}$$

Напряжение обратной волны в конце второй линии

$$u''_{2\text{обр}} = z_{в2} i''_{2\text{обр}} = (64,87 - 108,06e^{-5 \cdot 10^3 \theta''} + 43,2e^{-2 \cdot 10^4 \theta''}) \text{ кВ.}$$

Для рассматриваемого (по условию задачи) момента времени, когда обратная волна пройдет всю вторую линию, в формулу для  $u''_{2\text{обр}}$  следует вместо  $\theta''$  подставить  $\theta_2 = l_2/c$ , т. е.

$$u''_{2\text{обр}} = \left( 64,87 - 108,06e^{-5 \cdot 10^3 \left( \theta_2 - \frac{l_2 - x''}{c} \right)} + \right. \\ \left. + 43,2e^{-2 \cdot 10^4 \left( \theta_2 - \frac{l_2 - x''}{c} \right)} \right) \text{ кВ.}$$

Искомое напряжение во второй линии  $u'' = u''_{\text{пр}} + u''_{\text{обр}}$ .

В первой линии при  $x' \leq 60$  км  $u' = u'_{\text{пр}} = 100$  кВ, а при  $x' \geq 60$  км

$$u' = u'_{\text{пр}} + u'_{\text{обр}} = \left[ 64,865 + 44,225 e^{-5 \cdot 10^3 \left( 2\theta_2 - \frac{l_1 - x'}{c} \right)} \right] \text{ кВ.}$$

**9.8.** Между двумя кабельными линиями ( $z_{\text{в}1} = 100$  Ом;  $z_{\text{в}2} = 50$  Ом) включена четвертьволновая согласующая линия с волновым сопротивлением  $z_{\text{в}} = \sqrt{z_{\text{в}1} z_{\text{в}2}} = 70,7$  Ом. Длины кабельных линий много больше согласующей.

Найти распределение напряжения и тока вдоль согласующей линии после трех отражений от точки соединения согласующей линии со вторым кабелем при движении вдоль первого кабеля волны прямоугольной формы с напряжением  $U = 100$  кВ.

**9.9.** В месте соединения воздушной ( $l_1 = 90$  км;  $z_{\text{в}1} = 400$  Ом) и кабельной ( $l_2 = 40$  км;  $z_{\text{в}2} = 50$  Ом) линий последовательно включен конденсатор емкостью  $C = 0,1$  мкФ.

Найти напряжения и токи прямых и обратных волн в линиях через интервал времени  $t_1 = 0,5$  мс после подключения воздушной линии к генератору постоянного напряжения  $U = 63,5$  кВ.

**9.10.** Волна в виде прямоугольного импульса длительностью 40 мкс с напряжением  $U = 100$  кВ переходит из воздушной линии ( $l_1 = 120$  км;  $z_{\text{в}1} = 400$  Ом) через катушку с индуктивностью  $L = 90$  мГн (последовательное включение) в кабельную линию ( $l_2 = 30$  км;  $z_{\text{в}2} = 50$  Ом).

Построить график распределения напряжения и тока вдоль линий через интервал времени  $t_1 = 200$  мкс после того, как волна достигла места соединения линий.

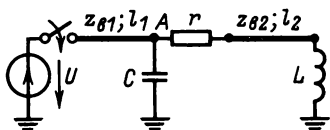


Рис. 9.11

**9.11.** Построить график распределения напряжения и тока вдоль воздушных линий (рис. 9.11) через 400 мкс после подхода прямой волны в первой линии к узлу А.

Дано:  $U = 127$  кВ;  $l_1 = l_2 = 150$  км;  $z_{\text{в}1} = z_{\text{в}2} = 400$  Ом;  $r = 200$  Ом;  $C = 1$  мкФ;  $L = 20$  мГн.

**9.12.** Построить график распределения напряжения и тока вдоль линий (рис. 9.12) для момента времени  $t_2$ , когда прямая волна достигнет конца второй линии.

Напряжение источника питания  $U = 5,8$  кВ. Параметры цепи:  $l_1 = 20$  км;  $z_{в1} = 50$  Ом (кабельная линия);  $l_2 = 9$  км;  $z_{в2} = 400$  Ом (воздушная линия);  $r = 100$  Ом;  $L = 5$  мГн.

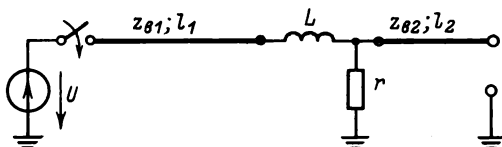


Рис. 9.12

9.13. Волна прямоугольной формы с напряжением  $U = 10$  кВ движется по кабелю длиной  $l_1 = 30$  км с волновым сопротивлением  $z_{в1} = 50$  Ом, который соединен с воздушной линией длиной  $l_2 = 30$  км с волновым сопротивлением  $z_{в2} = 300$  Ом (рис. 9.13). В месте соединения линий включен последовательно резистор с сопротивлением  $r = 50$  Ом и в конце воздушной линии конденсатор емкостью  $C = 0,1$  мкФ.

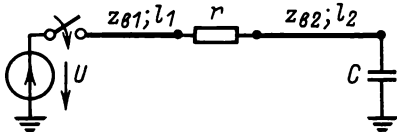


Рис. 9.13

Найти распределения напряжения и тока вдоль линий для момента времени  $t_2 = 50$  мкс после отражения волны от конца воздушной линии.

### 9.3. Волны в линиях при подключении и отключении ветвей

9.14(Р). В начале воздушной линии с волновым сопротивлением  $z_{в} = 500$  Ом длиной  $l = 400$  м присоединен генератор с постоянной ЭДС  $E = 2000$  В и внутренним сопротивлением  $r_{вт} = 100$  Ом, а в конце линии — приемник с сопротивлением  $r = 300$  Ом.

Найти распределение тока и напряжения вдоль линии через время  $t_1 = 1$  мкс после включения в середине линии реактора с индуктивностью  $L = 125$  мкГн (рис. 9.14).

Решение. Ток и напряжение линии до коммутации

$$I_0 = E / (r_{вт} + r) = 5 \text{ А}; \quad U_0 = I_0 r = 1500 \text{ В}.$$

Дополнительные токи и напряжения найдем при помощи расчетной схемы (9.14Р, а), где  $u_{ab} = U_0 = 1500$  В, применяя операторный метод.



Ток в индуктивности

$$I_L(p) = \frac{U_{ab}(p)}{pL + z_n/2} = \frac{12 \cdot 10^6}{p(p + 2 \cdot 10^6)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Из характеристического уравнения цепи  $F_3(p) = 0$  находим корень  $p_1 = -2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Оригинал  $i'_L$  определим по теореме разложения (8.12):

$$i'_L = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F'_3(p_1)} e^{p_1 t} = 6(1 - e^{-2 \cdot 10^6 t}) \text{ А}.$$

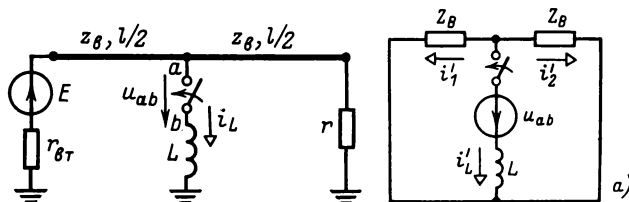


Рис. 9.14

Дополнительные токи в середине линии  $i'_1 = i'_2 = -i'_L/2$ , которым соответствуют токи и напряжения волн

$$i_{1обр} = i_{2пр} = -3(1 - e^{-2 \cdot 10^6(t-x/c)}), \text{ А};$$

$$u_{1обр} = z_в i_{1обр} = -1500[1 - e^{-2 \cdot 10^6(t-x/c)}] \text{ В};$$

$$u_{2пр} = z_в i_{2пр} = -1500[1 - e^{-2 \cdot 10^6(t-x/c)}] \text{ В},$$

движущихся от середины линии к ее началу и концу, причем здесь  $x$  отсчитывается от середины линии вправо для правой половины линии и влево — для левой половины линии.

Коэффициенты отражения от начала и конца линии соответственно равны:

$$\rho_1 = \frac{r_{вТ} - z_в}{r_{вТ} + z_в} = -\frac{2}{3}; \quad \rho_2 = \frac{r - z_в}{r + z_в} = -\frac{1}{4}.$$

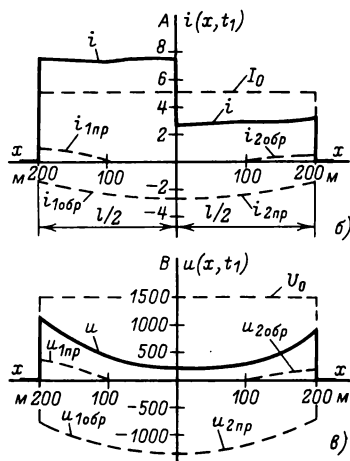


Рис. 9.14Р

Токи и напряжения волн

$$i_{1np} = \rho_1 i_{1обp} = 2 \left[ 1 - e^{-2 \cdot 10^6 \left( t - \frac{l-x}{c} \right)} \right] \text{ А; } u_{1np} = z_B i_{1np};$$

$$i_{2обp} = \rho_2 i_{2np} = 0,75 \left[ 1 - e^{-2 \cdot 10^6 \left( t - \frac{l-x}{c} \right)} \right] \text{ А; } u_{2обp} = z_B i_{2обp}.$$

Дополнительные напряжения и токи в линии после включения индуктивности получаются суммированием прямых и обратных волн:

$$u' = u_{1np} + u_{1обp}; \quad i' = i_{1np} - i_{1обp};$$

$$u'' = u_{2np} + u_{2обp}; \quad i'' = i_{2np} - i_{2обp}.$$

На рис. 9.14P, б и в показано распределение результирующих напряжения и тока вдоль линий в момент времени  $t_1$ :

$$u = U_0 + u'; \quad i = I_0 + i'.$$

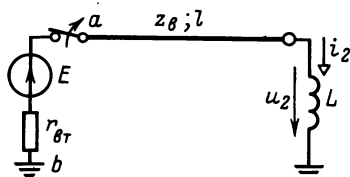


Рис. 9.15

**9.15(P).** У воздушной линии длиной  $l = 400$  м с волновым сопротивлением  $z_B = 400$  Ом в конце присоединен реактор с индуктивностью  $L = 10$  мГн (рис. 9.15). Линия отключается от генератора с постоянной ЭДС  $E = 5$  кВ и внутренним сопротивлением  $r_{вт} = 100$  Ом.

Построить кривые распределения тока и напряжения вдоль линии через время  $t_1 = 1$  мкс после отключения.

**Решение.** До коммутации напряжения и ток в линии  $U_0 = 0$ ;  $I_0 = E/r_{вт} = 50$  А.

В расчетную схему (рис. 9.15P, а) включается источник тока  $J = I_0 = 50$  А. Поэтому в начале линии  $i' = -J = -50$  А,

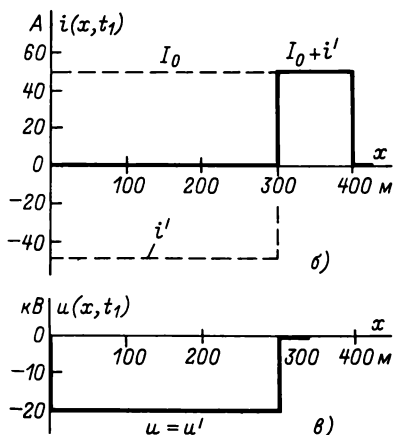
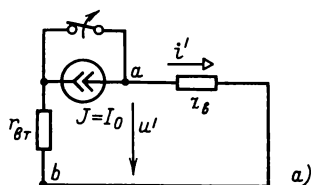


Рис. 9.15P

напряжение  $u' = z_{\text{в}} i' = -20$  кВ. Соответствующая волна за время  $t_1$  пройдет путь  $x_1 = ct_1 = 300$  м. Распределение тока и напряжения показано на рис. 9.15Р, б и в.

**9.16.** Воздушная линия ( $l = 70$  км;  $z_{\text{в}} = 400$  Ом), присоединенная к источнику постоянного напряжения  $U = 63,5$  кВ, длительное время работала с разомкнутым концом.

Построить график распределения напряжения и тока вдоль линии через время  $t_1 = 0,2$  мс после подключения к концу линии двухполюсника, который можно представить в виде последовательного соединения индуктивности  $L = 1$  мГн и сопротивления  $r = 200$  Ом.

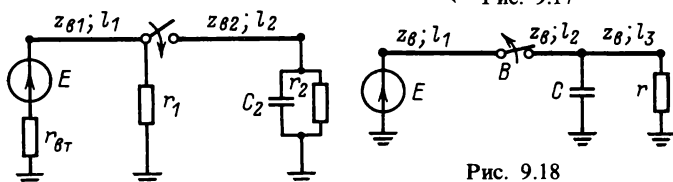


Рис. 9.18

**9.17.** К концу воздушной линии ( $l_1 = 120$  км;  $z_{\text{в}1} = 400$  Ом) с сопротивлением нагрузки  $r_1 = 200$  Ом (рис. 9.17) подключается кабель ( $l_2 = 60$  км;  $z_{\text{в}2} = 50$  Ом), параметры двухполюсника в конце которого  $r_2 = 150$  Ом,  $C_2 = 0,5$  мкФ. Параметры источника питания: ЭДС  $E = 500$  кВ, внутреннее сопротивление  $r_{\text{вт}} = 800$  Ом.

Построить график распределения напряжения и тока вдоль линий для момента времени  $t_1 = 600$  мкс после коммутации.

**9.18.** В воздушных линиях без потерь, длительное время находившихся под напряжением  $U = 100$  кВ, произошел обрыв в точке В (рис. 9.18).

Построить график распределения напряжения и тока вдоль линий для момента времени  $t_1 = 140$  мкс после коммутации. Параметры цепи:  $l_1 = 48$  км;  $l_2 = l_3 = 24$  км;  $z_{\text{в}1} = z_{\text{в}2} = z_{\text{в}3} = z_{\text{в}} = 400$  Ом;  $C = 0,5$  мкФ;  $r = 600$  Ом.

#### 9.4. Формирование импульсов

**9.19(Р).** Определить зависимость тока от времени в середине разомкнутой линии без потерь длиной  $l$ , подключаемой в момент времени  $t = 0$  к источнику постоянной ЭДС  $E$ .

**Решение.** Общее решение Даламбера для напряжения и тока запишем в виде

$$U(p) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad (1)$$

$$I(p) = \frac{1}{z_{\text{в}}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (2)$$

где  $\gamma = \gamma(p) = \sqrt{pL_0 p C_0} = p \sqrt{L_0 C_0} = p/c$ ;  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные, которые можно определить, если, например, известно напряжение в начале линии  $u_1 = E$  и сопротивление в конце линии  $z_2$ .

Как следует из (1) и (2), при  $x = 0$

$$U_1(p) = A_1 + A_2$$

и при  $x = l$

$$U_2(p) = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}; \quad I_2(p) = \frac{1}{z_B} (A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}).$$

Кроме того,  $U_2(p) = Z_2(p) I_2(p)$ .

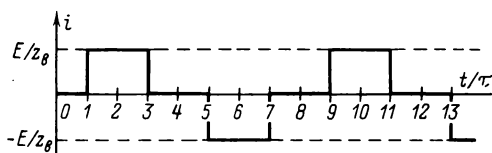


Рис. 9.19P

Исключив из этой системы неизвестные  $U_2(p)$  и  $I_2(p)$ , определим постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . После подстановки постоянных в общее решение (1) и (2) получим:

$$U(p) = U_1(p) \frac{Z_2(p) \operatorname{ch} \gamma(l-x) + z_B \operatorname{sh} \gamma(l-x)}{Z_2(p) \operatorname{ch} \gamma l + z_B \operatorname{sh} \gamma l}; \quad (3)$$

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{z_B} \frac{Z_2(p) \operatorname{sh} \gamma(l-x) + z_B \operatorname{ch} \gamma(l-x)}{Z_2(p) \operatorname{ch} \gamma l + z_B \operatorname{sh} \gamma l}, \quad (4)$$

где для рассматриваемой задачи  $Z_2(p) = \infty$ ;  $U_1(p) = E/p$ .

При  $x = l/2$  по (4) получим:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{E/p}{z_B} \frac{e^{p \frac{l/2}{c}} - e^{-p \frac{l/2}{c}}}{p^{pl/c} + e^{-pl/c}} = \frac{E/p}{z_B} \frac{e^{-p\tau} - e^{-3p\tau}}{1 + e^{-4p\tau}} = \\ &= \frac{E}{pz_B} (e^{-p\tau} - e^{-3p\tau}) (1 - e^{-4p\tau} + e^{-8p\tau} - e^{-12p\tau} + \dots) = \\ &= \frac{E}{pz_B} (e^{-p\tau} - e^{-3p\tau} - e^{-5p\tau} + e^{-7p\tau} + e^{-9p\tau} - e^{-11p\tau} - e^{-13p\tau} + \\ &\quad + \dots), \end{aligned}$$

где  $\tau = (l/2)/c$ ; выражение  $1/(1 + e^{-4p\tau})$  представлено как сумма убывающей геометрической прогрессии.

Искомый ток (рис. 9.19Р) представляет собой оригинал полученного изображения тока:

$$i(t) = \frac{E}{z_b} [1(t - \tau) - 1(t - 3\tau) - 1(t - 5\tau) + 1(t - 7\tau) + \\ + 1(t - 9\tau) - 1(t - 11\tau) - 1(t - 13\tau) + \dots].$$

Здесь учтено, что  $\frac{1}{p} e^{-pT} = 1(t - T)$ .

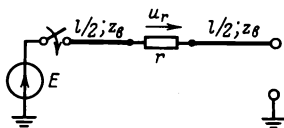


Рис. 9.20

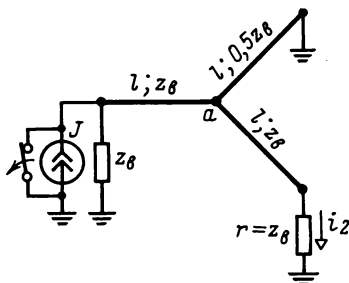


Рис. 9.21 →

**9.20.** Для формирования импульсов напряжения одной полярности применяется линия без потерь длиной  $l$ , в середине которой включен резистор с сопротивлением  $r = 2z_b$ , а конец ее разомкнут (рис. 9.20). В момент времени  $t = 0$  линия подключается к источнику постоянной ЭДС  $E$ .

Определить импульсное напряжение  $u_r$  и построить его зависимость от  $\tau = (l/2)/c$ .

**9.21.** На рис. 9.21 представлена схема для формирования прямоугольных импульсов тока в сопротивлении нагрузки  $r$ . Схема состоит из трех линий без потерь одинаковой длины  $l$  с одинаковой скоростью движения волн.

Определить ток в сопротивлении нагрузки  $r$ .

## 9.5. Волны в линии без искажений

**9.22((Р).** Получить выражение для напряжения и тока линии длиной  $l$  без искажений при включении ее к источнику постоянного напряжения  $U_1 = \text{const}$ . На конце линии сопротивление нагрузки активное и равно  $r_2$ .

**Решение.** Обозначим:  $\tau = l/c$ ;  $\tau_x = x/c$ . При  $U_1 = \text{const}$  вместо (9.11) и (9.12) получим:

$$U(p) = \frac{U_1}{p} \frac{r_2 [e^{(p+\alpha)(\tau-\tau_x)} + e^{-(p+\alpha)(\tau-\tau_x)}] + \\ + z_b [e^{(p+\alpha)(\tau-\tau_x)} - e^{-(p+\alpha)(\tau-\tau_x)}]}{r_2 [e^{(p+\alpha)\tau} + e^{-(p+\alpha)\tau}] + z_b [e^{(p+\alpha)\tau} - e^{-(p+\alpha)\tau}]};$$

$$I(p) = \frac{U_1}{pz_b} \frac{r_2 [e^{(p+\alpha)(\tau-\tau_x)} - e^{-(p+\alpha)(\tau-\tau_x)}] + + z_b [e^{(p+\alpha)(\tau-\tau_x)} + e^{-(p+\alpha)(\tau-\tau_x)}]}{r_2 [e^{(p+\alpha)\tau} + e^{-(p+\alpha)\tau}] + z_b [e^{(p+\alpha)\tau} - e^{-(p+\alpha)\tau}]}$$

или, введя обозначение  $m = (r_2 - z_b)/(r_2 + z_b)$ ,

$$U(p) = \frac{U_1}{p} \frac{e^{-(p+\alpha)\tau_x} + me^{-(p+\alpha)(2\tau-\tau_x)}}{1 + me^{-2(p+\alpha)\tau}}.$$

Представляя выражение  $\frac{1}{1 + me^{-2(p+\alpha)\tau}}$  в виде суммы ряда убывающей геометрической прогрессии, окончательно получаем:

$$U(p) = \frac{U_1}{p} [e^{-(p+\alpha)\tau_x} + me^{-(p+\alpha)(2\tau-\tau_x)} - me^{-(p+\alpha)(2\tau+\tau_x)} - - m^2 e^{-(p+\alpha)(4\tau-\tau_x)} + m^2 e^{-(p+\alpha)(4\tau+\tau_x)} + m^3 e^{-(p+\alpha)(6\tau-\tau_x)} - \dots].$$

Принимая во внимание, что  $\frac{1}{p} e^{-p\tau_x} = 1(t - \tau_x)$ , находим оригинал полученного изображения:

$$u = U_1 [e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x) + me^{-\alpha(2\tau-\tau_x)} \cdot 1(t - 2\tau + \tau_x) - - me^{-\alpha(2\tau+\tau_x)} \cdot 1(t - 2\tau - \tau_x) - m^2 e^{-\alpha(4\tau-\tau_x)} \cdot 1(t - 4\tau + \tau_x) + + m^2 e^{-\alpha(4\tau+\tau_x)} \cdot 1(t - 4\tau - \tau_x) + \dots].$$

Аналогично

$$i = \frac{U_1}{z_b} [e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x) - me^{-\alpha(2\tau-\tau_x)} \cdot 1(t - 2\tau + \tau_x) - - me^{-\alpha(2\tau+\tau_x)} \cdot 1(t - 2\tau - \tau_x) + m^2 e^{-\alpha(4\tau-\tau_x)} \cdot 1(t - 4\tau + \tau_x) + + m^2 e^{-\alpha(4\tau+\tau_x)} \cdot 1(t - 4\tau - \tau_x) - \dots].$$

**9.23.** Получить выражения для установившихся значений напряжения и тока задачи 9.22 в точке  $x$ .

**9.24.** Получить выражения для напряжения и тока в точке с координатой  $x$  при подключении линии без искажений к источнику постоянного напряжения  $U_1 = \text{const}$  и согласованной нагрузке на ее конце.

**9.25.** Для короткозамкнутой линии длиной  $l$  без искажений, подключаемой к источнику постоянного напряжения  $U_1 = \text{const}$ , получить выражения для напряжения и тока в точке с координатой  $x$ .

## Глава десятая

# ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### Введение к гл. 10

*Двухполосники без потерь.* Частотная характеристика любого пассивного двухполосника без потерь (реактивного) — зависимость реактивного сопротивления от частоты  $x(\omega)$  удовлетворяет условию  $dx/d\omega > 0$ , т. е. нули и полюсы характеристики чередуются. В частности, при  $\omega = 0$  и при  $\omega \rightarrow \infty$  получается либо нуль, либо полюс. В операторной форме входное сопротивление  $Z(p)$  и проводимость  $Y(p)$  должны быть реактансными функциями, например

$$Z(p) = W(p)/V(p), \quad (10.1)$$

где  $W(p)$  и  $V(p)$  — полиномы с вещественными положительными коэффициентами, степени которых отличаются на 1, причем один из полиномов содержит только четные степени  $p$ , а другой — нечетные, нули и полюсы попарно сопряженные, простые, расположены на мнимой оси плоскости  $p$  и чередуются.

По заданной частотной характеристике или реактансной функции двухполосник можно реализовать любой из четырех типовых схем с минимально необходимым числом элементов ( $L$  и  $C$ ).

Первая типовая (первая каноническая) схема (Фостера) состоит из параллельных контуров  $LC$ , соединенных последовательно; реализуется разложением реактансной функции  $Z(p)$  на простейшие дроби:

$$Z(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_i \frac{2K_i p}{p^2 + \omega_i^2} + K_\infty p, \quad (10.2)$$

где  $K_0$  — вычет в полюсе  $p = 0$ , соответствующем значению  $x(\omega) = -\infty$  при  $\omega = 0$ ,

$$K_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p) \quad \text{при } p \rightarrow 0; \quad (10.3)$$

$2K_i$  — удвоенный вычет в полюсе  $p = j\omega_i$ , соответствующем полюсу характеристики при резонансе токов в контуре на частоте  $\omega_i$ ,

$$2K_i = \lim_{p \rightarrow j\omega_i} \frac{p^2 + \omega_i^2}{p} Z(p) \quad \text{при } p^2 \rightarrow -\omega_i^2; \quad (10.4)$$

$K_\infty$  — вычет в полюсе  $p = \infty$ , соответствующем значению

$x(\omega) = \infty$  при  $\omega = \infty$ ,

$$K_{\infty} = \lim Z(p)/p \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty. \quad (10.5)$$

Каждая дробь суммы реализуется параллельным контуром с емкостью  $C_i = 1/2K_i$  и индуктивностью  $L_i = 2K_i/\omega_i^2$ , первое слагаемое — емкостью  $C_0 = 1/K_0$  и последнее — индуктивностью  $L_{\infty} = K_{\infty}$  (неполные контуры).

Вторая типовая (вторая каноническая) схема (Фостера) состоит из последовательных контуров  $LC$ , соединенных параллельно; реализуется разложением реактансной функции  $Y(p) = 1/Z(p)$  на простейшие дроби так же, как  $Z(p)$  первой канонической схемы. Но в этом случае каждая дробь суммы реализуется контуром с индуктивностью  $L_i = 1/2K_i$  и емкостью  $C_i = 2K_i/\omega_i^2$ , первое слагаемое — индуктивностью  $L_0 = 1/K_0$  и последнее — емкостью  $C_{\infty} = K_{\infty}$ .

Третья типовая (первая цепная) схема (Кауэра) состоит из продольно включаемых индуктивностей и поперечно включаемых емкостей; реализуется разложением  $Z(p)$  в цепную дробь с последовательным выделением полюсов при  $p = \infty$ :

$$Z(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = pL'_1 + \frac{1}{pC'_2 + \frac{1}{pL'_3 + \dots}} \quad (10.6)$$

где полиномы  $W(p)$  и  $V(p)$  нужно расположить по убывающим степеням  $p$ . Если у  $Z(p)$  нет полюса при  $p = \infty$ , то индуктивность  $L'_1$  отсутствует и разложение нужно начинать с выделения емкости  $C'_2$  у  $Y(p)$  (полюс при  $p = \infty$ ).

Четвертая типовая (вторая) схема (Кауэра) состоит из продольно включаемых емкостей и поперечно включаемых индуктивностей; реализуется разложением  $Z(p)$  в цепную дробь с последовательным выделением полюсов при  $p = 0$ :

$$Z(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = 1/pC'_1 + \frac{1}{1/pL'_2 + \frac{1}{1/pC'_3 + \dots}}, \quad (10.7)$$

где полиномы  $W(p)$  и  $V(p)$  нужно расположить по возрастающим степеням  $p$ . Если у  $Z(p)$  нет полюса при  $p = 0$ , то продольная емкость  $C'_1$  отсутствует и разложение нужно начинать с выделения индуктивности  $L'_2$  у  $Y(p)$  (полюс при  $p = 0$ ).

*Двухполюсники с потерями.* Входные функции пассивного двухполюсника с потерями  $Z(p) = W(p)/V(p)$  и  $Y(p) = 1/Z(p)$  должны быть положительными вещественными функциями (ПВФ).



Если полюсы входной функции расположены только на отрицательной действительной полуоси плоскости  $p$ , то ее можно разложить на простейшие дроби. В частности, для  $rC$ -двухполюсника (содержащего только элементы  $r$  и  $C$ ) сопротивление

$$Z(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_m \frac{K_m}{p + \alpha_m} + K_\infty, \quad (10.8)$$

где

$$K_0 = \lim pZ(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow 0; \quad (10.9)$$

$$K_m = \lim (p + \alpha_m) Z(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow -\alpha_m; \quad (10.10)$$

$$K_\infty = \lim Z(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty. \quad (10.11)$$

Каждая дробь суммы реализуется параллельным  $rC$ -контуром с элементами  $C_m = 1/K_m$ ;  $r_m = K_m/\alpha_m$ , первое слагаемое — емкостью  $C_0 = 1/K_0$ , последнее — активным сопротивлением  $r_\infty = K_\infty$  (неполные контуры). Все контуры соединены последовательно (первая каноническая схема). Проводимость  $rC$ -двухполюсника

$$Y(p) = K_0 + \sum_n \frac{K_n p}{p + \alpha_n} + K_\infty p, \quad (10.12)$$

где

$$K_0 = \lim Y(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow 0; \quad (10.13)$$

$$K_n = \lim \frac{p + \alpha_n}{p} Y(p) \quad \text{при} \quad p \rightarrow -\alpha_n; \quad (10.14)$$

$$K_\infty = \lim Y(p)/p \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty. \quad (10.15)$$

Каждая дробь суммы реализуется последовательным  $rC$ -контуром с элементами  $r_n = 1/K_n$ ;  $C_n = K_n/\alpha_n$ , первое слагаемое — сопротивлением  $r_0 = 1/K_0$ , последнее — емкостью  $C_\infty = K_\infty$  (неполные контуры). Все контуры соединены параллельно (вторая каноническая схема).

Нули входной функции  $rC$ -двухполюсника также лежат на отрицательной действительной полуоси и чередуются с полюсами, причем у  $Z(p)$ , ближайший к началу координат — полюс, а у  $Y(p)$  — нуль.

Разложением входной функции  $Z(p)$  в цепную дробь реализуются цепные схемы, аналогичные схемам двухполюсников без потерь (в которых индуктивности заменяются сопротивлениями).

Для  $rL$ -двухполюсника  $Z(p)$  записывается по (10.12). Каждая дробь реализуется параллельным  $rL$ -контуром с элементами  $r_n = K_n$ ;  $L_n = K_n/\alpha_n$ , первое слагаемое — сопротивлением  $r_0 = K_0$  и последнее — индуктивностью  $L_\infty = K_\infty$  (неполные контуры). Все контуры соединены последовательно.

Проводимость  $rL$ -двухполюсника записывается по (10.8). Каждая дробь реализуется последовательным  $rL$ -контуром с элементами  $L_m = 1/K_m$ ;  $r_m = \alpha_m/K_m$ , первое слагаемое — сопротивлением  $r_\infty = 1/K_\infty$ , последнее — индуктивностью  $L_0 = 1/K_0$  (неполные контуры). Все контуры соединены параллельно.

Если  $Z(p)$  имеет еще простые полюсы на мнимой оси, то сначала можно выделить слагаемые (10.2), т. е. реактансную функцию  $Z_p(p)$ , и реализовать часть двухполюсника из  $LC$ -элементов. Разность  $Z(p) - Z_p(p) = Z_1(p)$  будет ПФФ, и можно приступить к ее реализации. Если  $Y(p)$  имеет простые полюсы на мнимой оси [т. е.  $Z(p)$  — нули], то разложением на простейшие дроби аналогично (10.2) можно выделить реактансную функцию  $Y_p(p)$ . Разность  $Y(p) - Y_p(p) = Y_1(p)$  будет ПФФ.

*Мостовая схема четырехполюсника.* У мостовой ( $X$ -образной) симметричной схемы четырехполюсника (см. табл. 4.2) с согласованной нагрузкой — активным сопротивлением  $r_n$  передаточные функции по напряжению  $H_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$  и току  $H_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$  одинаковы и равны:

$$H_U(p) = H_I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{1 - \sqrt{Z_1(p)/Z_2(p)}}{1 + \sqrt{Z_1(p)/Z_2(p)}}. \quad (10.16)$$

Если четырехполюсник состоит из обратных двухполюсников, т. е.  $Z_1(p) Z_2(p) = k^2 = \text{const}$  и  $r_n = k$ , то

$$H_U(p) = \frac{1 - Z_1(p)/k}{1 + Z_1(p)/k} \quad (10.17)$$

и функция

$$Z_1(p) = k \frac{1 - H_U(p)}{1 + H_U(p)} \quad (10.18)$$

должна быть ПФФ. В частности, у четырехполюсника без потерь  $M(p) = N(-p)$  и  $Z_1(p)$  — реактансная функция.

У мостового симметричного четырехполюсника без потерь с активным сопротивлением нагрузки  $r_n$  (не обязательно согласованной) передаточное сопротивление

$$H_Z(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{Z_{21}(p)}{1 + Z_{11}(p)/r_n}, \quad (10.19)$$

где  $M(p)$  — четный или нечетный полином;  $Z_{21}$  и  $Z_{11}$  — коэффициенты уравнений типа  $Z$ , и для мостовой симметричной схемы (см. табл. 4.2)

$$Z_{11} = \frac{1}{2}(Z_2 + Z_1); \quad Z_{21} = \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1),$$

откуда сопротивления схемы

$$Z_1(p) = Z_{11}(p) - Z_{21}(p); \quad Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{21}(p) \quad (10.20)$$

должны быть реактансными функциями.

Для реализации нужно заданную функцию  $H_Z(p)$  привести к виду (10.19), разделив полином  $N(p)$  на четную и нечетную части и поделив  $M(p)$  и  $N(p)$  на четную часть  $N(p)$ , если  $M(p)$  — нечетный, или на нечетную часть  $N(p)$ , если  $M(p)$  — четный.

В задачах данной главы все сопротивления заданы в омах, а проводимости в сименсах.

## 10.1. Двухполосники без потерь

**10.1(P).** Найти параметры двухполосника (рис. 10.1), резонансные частоты которого  $f_1 = 650$  Гц,  $f_2 = 1130$  Гц и на частоте  $f' = 950$  Гц входное сопротивление индуктивное и равно 2,3 кОм.

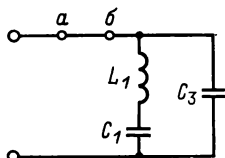


Рис. 10.1

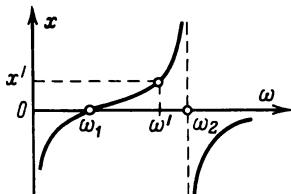


Рис. 10.1P

**Решение.** Двухполосник (рис. 10.1) составлен как вторая каноническая схема. Построим частотную характеристику  $x(\omega)$  этой схемы (рис. 10.1P), которая имеет две заданные точки резонанса, т. е. заданные нуль и полюс. Так как при частоте  $\omega'$  реактивное сопротивление  $x' > 0$  (индуктивное) и характеристика должна удовлетворять условию  $dx/d\omega > 0$ , то при частоте  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 4080$  рад/с у характеристики нуль, а при частоте  $\omega_2 = 2\pi f_2 = 7100$  рад/с — полюс и в начале координат — полюс.

Комплексное сопротивление двухполосника следует записать в виде

$$Z(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

соответствующем характеристике рис. 10.1Р (обеспечивает показанные на рисунке нули при частотах  $\omega_1$ ;  $\omega = \infty$  и полюсы при частотах  $\omega = 0$ ;  $\omega_2$ ).

При частоте  $\omega' = 2\pi f' = 5990$  рад/с задано сопротивление  $Z(j\omega') = jx' = j2300$  Ом и из формулы (1) определяется коэффициент  $K = 10^7$ .

В операторной форме после замены  $j\omega = p$  и  $-\omega^2 = p^2$  сопротивление, Ом, и проводимость, См, равны:

$$Z(p) = \frac{10^7}{p} \frac{p^2 + 4080^2}{p^2 + 7100^2}; \quad Y(p) = \frac{p}{10^7} \frac{p^2 + 7100^2}{p^2 + 4080^2}.$$

Параметры второй канонической схемы определим разложением проводимости на простейшие дроби (10.2):

$$Y(p) = \frac{2K_1 p}{p^2 + 4080^2} + K_\infty p \quad (2)$$

[у проводимости  $Y(p)$  полюсы в бесконечности и при частоте  $\omega_1 = 4080$  рад/с]. Вычеты: при  $p \rightarrow j4080$  и  $p^2 \rightarrow -4080^2$

$$2K_1 = \lim_{p \rightarrow j4080} \frac{p^2 + 4080^2}{p} Y(p) = \lim_{p \rightarrow j4080} \frac{p^2 + 7100^2}{10^7} = 3,4 = \frac{1}{L_1},$$

т. е.  $L_1 = 0,294$  Гн;  $C_1 = 1/\omega_1^2 L_1 = 0,204$  мкФ; при  $p \rightarrow \infty$   $K_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Y(p)/p = 1/10^7 = C_3$  и  $C_3 = 0,1$  мкФ.

**10.2(Р).** По заданной частотной характеристике  $x(\omega)$  реактивного двухполюсника (рис. 10.2) составить четыре типовые схемы. Известны частоты полюсов  $f_1 = 100$  кГц,  $f_3 = 250$  кГц, частоты нулей  $f_0 = 0$ ,  $f_2 = 180$  кГц,  $f_\infty = \infty$  и сопротивление  $x' = 4$  кОм при частоте  $f' = 50$  кГц.

**Решение.** Составим сначала по частотной характеристике входное сопротивление в комплексной форме:

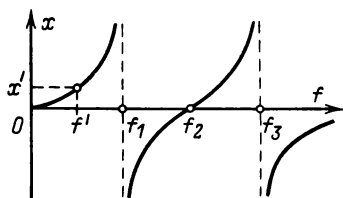


Рис. 10.2

$$Z(j\omega) = j\omega K \frac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}, \quad (1)$$

где  $\omega_1 = 628 \cdot 10^3$  рад/с,  $\omega_2 = 1130 \cdot 10^3$  рад/с,  $\omega_3 = 1570 \cdot 10^3$  рад/с и коэффициент  $K = 7,7 \cdot 10^9$  определяется из (1) при  $\omega = \omega' = 2\pi f'$  и  $Z(j\omega') = jx'$ .

В операторной форме

$$Z(p) = W(p)/V(p), \quad (2)$$

где  $W(p) = 7,7 \cdot 10^9 p(p^2 + \omega_2^2) = 7,7 \cdot 10^9 p(p^2 + 1276 \cdot 10^9) = 7,7 \times 10^9 p^3 + 9,8 \cdot 10^{21} p$ ;  $V(p) = (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) = (p^2 + 395 \times 10^9)(p^2 + 28,6 \cdot 10^9) = p^4 + 28,6 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}$ .

Так как характеристика  $x(\omega)$  и функция  $Z(p)$  не имеют полюсов в начале координат и в бесконечности, то  $Z(p)$  раскладывается на две простейшие дроби вида  $2K_i(p)/(p^2 + \omega_i^2)$  и первая каноническая схема состоит из двух параллельных

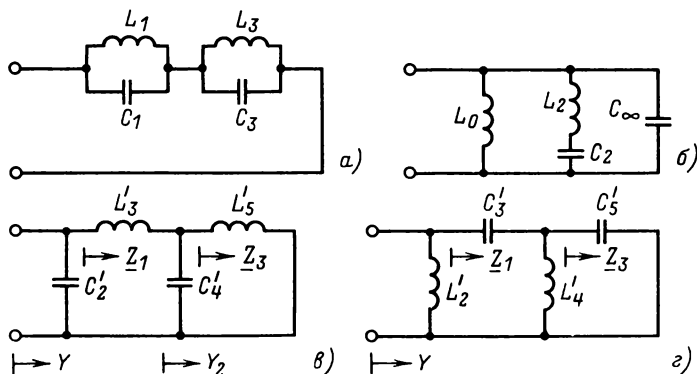


Рис. 10.2P

контуров с резонансными частотами (полосами)  $\omega_1$  и  $\omega_3$  (рис. 10.2P, а). По (10.4) при  $p^2 \rightarrow -\omega_1^2 = -395 \cdot 10^9$

$$2K_1 = \frac{1}{C_1} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_1^2} \frac{p^2 + \omega_1^2}{p} \frac{W(p)}{V(p)} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_1^2} \frac{10^9 (p^2 + 1276 \cdot 10^9)}{0,13 (p^2 + 2462 \cdot 10^9)}$$

и  $C_1 = 0,30$  нФ;  $L_1 = 2K_1/\omega_1^2 = 1/\omega_1^2 C_1 = 8,22$  мГн; аналогично при  $p^2 \rightarrow -\omega_3^2 = -2462 \cdot 10^9$

$$2K_3 = \frac{1}{C_3} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_3^2} \frac{p^2 + \omega_3^2}{p} \frac{W(p)}{V(p)}$$

и  $C_3 = 0,23$  нФ;  $L_3 = 1/\omega_3^2 C_3 = 1,75$  мГн.

Для составления второй канонической схемы нужно разложить на простейшие дроби входную проводимость  $Y(p) = 1/Z(p)$ , полюсы которой совпадают с нулями входного сопротивления, т.е. будут при частотах  $\omega = 0$ ,  $\omega_2$  и  $\omega = \infty$ . Следовательно, по (10.2)

$$Y(p) = \frac{V(p)}{W(p)} = \frac{K_0}{p} + \frac{2K_2 p}{p^2 + \omega_2^2} + K_\infty p,$$

т.е. схема состоит из параллельно соединенных индуктивности  $L_0 = 1/K_0$ , последовательного контура  $L_2 C_2$  и емкости

$C_\infty = K_\infty$  (рис. 10.2Р, б). По (10.3)–(10.5):

$$\text{при } p \rightarrow 0 \quad K_0 = \frac{1}{L_0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V(p)}{W(p)} \quad \text{и } L_0 = 10,0 \text{ мГн};$$

$$\text{при } p^2 \rightarrow -\omega_2^2 \quad 2K_2 = \frac{1}{L_2} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_2^2} \frac{p^2 + \omega_2^2}{p} \frac{V(p)}{W(p)} \quad \text{и}$$

$$L_2 = 9,4 \text{ мГн}, \quad C_2 = 1/\omega_2^2 L_2 = 0,084 \text{ нФ};$$

$$\text{при } p \rightarrow \infty \quad K_\infty = C_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{V(p)}{pW(p)} = 0,13 \text{ нФ}.$$

Первая цепная схема начинается с поперечной емкости  $C'_2$ , так как характеристика  $x(\omega)$  и сопротивление  $Z(p)$  не имеют полюса в бесконечности. Для выделения емкости  $C'_2$  (рис. 10.2Р, в) представим входную проводимость в виде  $Y(p) = V(p)/W(p) = pC'_2 + Y_1(p)$ . Чтобы выделить слагаемое  $pC'_2$  [целая часть  $Y(p)$ ], разделим  $V(p)$  на  $W(p)$ :

$$\frac{p^4 + 28,6 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}}{p^4 + 12,7 \cdot 10^{11} p^2} = \frac{7,7 \cdot 10^9 p^3 + 9,8 \cdot 10^{21} p}{0,13 \cdot 10^{-9} p} = pC'_2.$$

Остаток

$$Y_1(p) = \frac{15,9 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}}{7,7 \cdot 10^9 p^3 + 9,8 \cdot 10^{21} p} = \frac{V_1(p)}{W(p)}.$$

Из обратной величины остатка, т.е.  $Z_1(p)$ , выделим продольную индуктивность  $L'_3$ . Для этого представим сопротивление в виде  $Z_1(p) = W(p)/V_1(p) = pL'_3 + Z_2(p)$ . Чтобы выделить слагаемое  $pL'_3$ , разделим  $W(p)$  на  $V_1(p)$ :

$$\frac{7,7 \cdot 10^9 p^3 + 9,8 \cdot 10^{21} p}{7,7 \cdot 10^9 p^3 + 4,7 \cdot 10^{21} p} = \frac{15,9 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}}{5,1 \cdot 10^{21} p} = 4,85 \cdot 10^{-3} p = pL'_3.$$

Остаток

$$Z_2(p) = \frac{5,1 \cdot 10^{21} p}{15,9 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}} = \frac{W_2(p)}{V_1(p)}.$$

Аналогично из проводимости  $Y_2(p) = 1/Z_2(p) = V_1(p)/W_2(p)$  выделяем слагаемое  $pC'_4$ :

$$\frac{15,9 \cdot 10^{11} p^2 + 9,75 \cdot 10^{23}}{15,9 \cdot 10^{11} p^2} = \frac{5,1 \cdot 10^{21} p}{0,31 \cdot 10^{-9} p} = pC'_4.$$

Остаток

$$Y_3(p) = 9,75 \cdot 10^{23} / 5,1 \cdot 10^{21} p = V_3(p)/W_2(p).$$

Делением  $W_2(p)$  на  $V_3(p)$  находим, что  $L'_5 = 5,25$  мГн. Остатка нет, т.е. реализация цепной схемы закончена.

Вторая цепная схема начинается с поперечной индуктивности  $L'_2$ , так как характеристика  $x(\omega)$  и сопротивление  $Z(p)$  не имеют полюса в начале координат. Для выделения индуктивности  $L'_2$  представим  $Y(p)$  в виде  $Y(p) = V(p)/W(p) = 1/pL'_2 + Y_1(p)$ . Чтобы выделить  $1/pL'_2$ , разделим  $V(p)$  на  $W(p)$ , записав полиномы по возрастающим степеням  $p$ :

$$\frac{9,75 \cdot 10^{23} + 28,6 \cdot 10^{11} p^2 + p^4}{20,9 \cdot 10^{11} p^2 + p^4} \quad \frac{9,8 \cdot 10^{21} p + 7,7 \cdot 10^9 p^3}{99,5/p = 1/pL'_2},$$

т.е.  $L'_2 \approx 10,0$  мГн (рис. 10.2Р, з).

Заменяя остаток  $Y_1(p) = V_1(p)/W(p)$  обратной функцией  $Z_1(p) = 1/Y_1(p) = W(p)/V_1(p) = 1/pC'_3 + Z_2(p)$ , выделяем  $1/pC'_3$ , где  $C'_3 = 0,22$  нФ, делением  $W(p)$  на  $V_1(p)$  и находим остаток  $Z_2(p) = W_2(p)/V_1(p)$ . У обратной функции  $Y_2(p) = 1/Z_2(p) = V_1(p)/W_2(p) = 1/pL'_4 + Y_3(p)$  выделяем  $1/pL'_4$ , где  $L'_4 = 1,4$  мГн, делением  $V_1(p)$  на  $W_2(p)$  и находим остаток  $Y_3(p) = V_3(p)/W_2(p)$ . Обратная функция  $Z_3 = 1/pC'_5$  дает значение емкости  $C'_5 = 0,33$  нФ.

**10.3.** Составить вторую цепную схему для двухполюсника рис. 10.3 при  $L_1 = 8$  мГн,  $C_1 = 0,05$  мкФ,  $L_3 = 15$  мГн,  $C_3 = 0,08$  мкФ.

**10.4.** Составить первую каноническую схему для двухполюсника задачи 10.1.

**10.5.** Задана частотная характеристика реактивного двухполюсника: резонансные частоты  $f_1 = 0,5$  МГц,  $f_2 = 2$  МГц; при частоте  $f' = 1$  МГц сопротивление емкостное и численно равно 20 кОм.

Реализовать двухполюсник первой канонической схемой.

**10.6.** Частотная характеристика двухполюсника рис. 10.1 построена на рис. 10.1Р.

Построить качественно характеристику  $x(\omega)$  этого двухполюсника после включения между точками  $a$  и  $b$ : 1) индуктивности; 2) емкости; 3) последовательного контура  $LC$ ; 4) параллельного контура  $LC$  с резонансной частотой, большей  $\omega_2$ .

**10.7.** Двухполюсник без потерь задан входной реактансной функцией (в омах)

$$Z(p) = \frac{2,0 \cdot 10^{-13} p^3 + 3,5 \cdot 10^{-5} p}{1,6 \cdot 10^{-17} p^4 + 17,7 \cdot 10^{-9} p + 2,0}.$$

Составить две канонические и две цепные схемы, реализующие двухполюсник по заданной входной функции.

**10.8.** По заданной входной проводимости двухполюсника без потерь (в сименсах)

$$Y(p) = 100 \frac{(p^2 + 10^6)(p^2 + 9 \cdot 10^6)}{p(p^2 + 4 \cdot 10^6)(p^2 + 25 \cdot 10^6)}$$

найти элементы первой и второй канонических схем.

**10.9.** Проверить, относится ли к реактансным функция входной проводимости

$$Y(p) = \frac{p^4 + 10^7 p^2 + 9 \cdot 10^{12}}{p^5 + 29 \cdot 10^6 p^3 + 10^{14} p}.$$

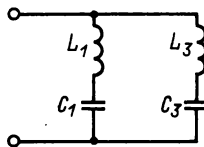


Рис. 10.3

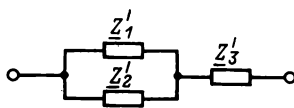


Рис. 10.10P

**10.10(Р).** Для заданного двухполюсника (рис. 10.1) с параметрами  $L_1 = 0,3$  Гн;  $C_1 = 0,2$  мкФ;  $C_3 = 0,1$  мкФ составить схему и найти значения элементов обратного двухполюсника; произведение входных сопротивлений обоих двухполюсников должно равняться  $2 \text{ кОм}^2$  на частоте  $950 \text{ Гц}$ .

**Решение.** При составлении обратного двухполюсника последовательно включенные элементы и участки заменяются параллельно включенными элементами и участками и наоборот. Для цепи рис. 10.1 последовательно соединенные элементы  $L_1$  и  $C_1$  с сопротивлениями  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$  и  $\underline{Z}_2 = -j1/\omega C_1$  заменяются параллельно включенными  $\underline{Z}'_1$  и  $\underline{Z}'_2$  (рис. 10.10P). Элемент  $C_3$  с сопротивлением  $\underline{Z}_3 = -j1/\omega C_3$ , соединенный параллельно с участком  $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ , заменяется сопротивлением  $\underline{Z}'_3$ , включенным последовательно с параллельно соединенными  $\underline{Z}'_1$  и  $\underline{Z}'_2$ . Произведение сопротивлений  $\underline{Z}_1 \underline{Z}'_1$ ;  $\underline{Z}_2 \underline{Z}'_2$ ;  $\underline{Z}_3 \underline{Z}'_3$  должно равняться одному и тому же значению  $k^2 = 2 \text{ кОм}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ Ом}^2$ .

По известному значению  $L_1$  находим  $\underline{Z}'_1 = k^2/\underline{Z}_1 = k^2/j\omega L_1 = 1/j\omega C'_1$ , т.е.  $C'_1 = L_1/k^2 = 0,15 \text{ мкФ}$ . Аналогично  $\underline{Z}'_2 = k^2/\underline{Z}_2 = k^2 j\omega C_1 = j\omega L'_2$ , т.е.  $L'_2 = k^2 C_1 = 0,4 \text{ Гн}$ , и  $\underline{Z}'_3 = k^2/\underline{Z}_3 = k^2 j\omega C_3 = j\omega L'_3$ , т.е.  $L'_3 = k^2 C_3 = 0,2 \text{ Гн}$ .

**10.11.** Для двухполюсника задачи 10.1 составить первую цепную схему.

**10.12.** Для двухполюсника задачи 10.3 составить первую цепную схему.



## 10.2. Двухполосники с потерями. Мостовые четырехполосники

**10.13(Р).** Задана входная функция двухполосника с потерями (ПВФ)

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 1}{p^2 + p}.$$

Составить первую каноническую и первую цепную схемы двухполосника.

**Решение.** Нули входной функции:  $-0,28$ ;  $-3,72$  и полюсы:  $0$ ;  $-1$  лежат на отрицательной действительной полуоси. Ближайший к началу координат — полюс. Следовательно, задана входная функция  $rC$ -двухполосника.

Для составления первой канонической схемы раскладываем  $Z(p)$  на простейшие дроби (10.8), причем сумма состоит из одной дроби с  $\alpha_1 = 1$ :

$$Z(p) = K_0/p + K_1/(p+1) + K_\infty.$$

По (10.9)–(10.11) находим  $K_0 = 1$ ;  $K_1 = 2$ ;  $K_\infty = 1$ , т. е.  $C_0 = 1/K_0 = 1$  Ф;  $C_1 = 1/K_1 = 0,5$  Ф;  $r_1 = K_1/\alpha_1 = 2$  Ом;  $r_\infty = K_\infty = 1$  Ом. Схема дана на рис. 10.13Р, а.

Для составления первой цепной схемы, состоящей из продольно включенных активных сопротивлений и поперечно включенных емкостей, раскладываем входную функцию в цепную дробь. Так как степень полинома числителя не меньше, чем знаменателя, то схема начинается с продольного сопротивления:

$$\begin{aligned} & \frac{p^2 + 4p + 1}{p^2 + p} \Big| \frac{p^2 + p}{1} = r'_1 \\ & \frac{p^2 + p}{p^2 + p/3} \Big| \frac{3p + 1}{p/3} = pC'_2 \\ & \frac{3p + 1}{3p} \Big| \frac{2p/3}{9/2} = r'_3 \\ & \frac{2p/3}{2p/3} \Big| 1 \\ & 2p/3 = pC_4. \end{aligned}$$

Схема приведена на рис. 10.13Р, б, где  $r'_1 = 1$  Ом;  $C'_2 = 1/3$  Ф;  $r'_3 = 4,5$  Ом;  $C_4 = 2/3$  Ф.

**10.14.** Для входной функции задачи 10.13 составить вторую каноническую схему.

**10.15.** По заданной входной функции  $rC$ -двухполосника с потерями (ПВФ)

$$Y(p) = \frac{p(p+1)}{p^2 + 4p + 1}$$

составить вторую цепную схему (с продольными емкостями и поперечными сопротивлениями).

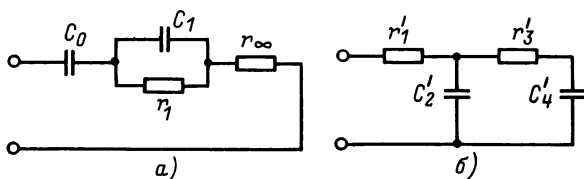


Рис. 10.13Р

**10.16.** Полиномы  $W(p)$  и  $V(p)$  входной функции двухполюсника с потерями

$$Z(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = \frac{4p^2 + 24p + 32}{p^2 + 4p + 3}$$

имеют нули:  $-2$ ;  $-4$ , и  $-1$ ;  $-3$ , т. е. находятся на отрицательной действительной полуоси и чередуются.

Выполнить реализацию четырех типовых схем двухполюсника.

**10.17.** Выяснить, относится ли к ПВФ функция входного сопротивления

$$Z(p) = \frac{p^2 + 1,5p + 5}{2p^2 + 4p + 4}.$$

**10.18.** Определить, относится ли к ПВФ функция входной проводимости

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 2p + 8}{p^2 + p + 1}.$$

**10.19(Р).** По заданной ПВФ

$$Z(p) = \frac{W(p)}{V(p)} = \frac{10^{-16}p^3 + 10^{-10}p^2 + 2 \cdot 10^{-4}p + 100}{10^{-12}p^2 + 1}$$

реализовать двухполюсник разложением входного сопротивления на простейшие дроби.

**Решение.** Полином  $V(p)$  имеет корни  $p_1 = j\omega_1 = j10^6$  и  $p_1^* = -j\omega_1 = -j10^6$  — два сопряженных полюса функции  $Z(p)$ , расположенных на мнимой оси. Степень полинома  $W(p)$  выше, чем полинома  $V(p)$ , т. е. функция  $Z(p)$  имеет полюс в  $\infty$ . Следовательно, можно выделить из функции  $Z(p)$  слагаемые,

соответствующие реактансной функции (10.2)

$$Z_p(p) = \frac{2K_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + K_\infty p.$$

По (10.4) и (10.5) находим  $2K_1 = 10^8$ ;  $K_\infty = 10^{-4}$ , т.е. функцию  $Z_p(p)$  можно реализовать параллельным контуром  $C_1 = 1/2K_1 = 10^{-8}$  Ф;  $L_1 = 2K_1/\omega_1^2 = 10^{-4}$  Гн и последовательно с контуром включенной индуктивностью  $L_\infty = K_\infty = 10^{-4}$  Гн.

Остается реализовать функцию  $Z_1(p) = Z(p) - Z_p(p) = 100$ . Это активное сопротивление  $r = 100$  Ом, которое включается последовательно с контуром и индуктивностью  $L_\infty$ .

**10.20.** По заданной ПВФ

$$Y(p) = \frac{10^{-20}p^3 + 10^{-14}p^2 + 2 \cdot 10^{-8}p + 10^{-2}}{10^{-12}p^2 + 1}$$

реализовать двухполосник разложением входной проводимости на простейшие дроби.

**10.21.** По заданной ПВФ

$$Z(p) = \frac{10^{-4}p^3 + 10^2p^2 + 2 \cdot 10^4p + 10^{10}}{2 \cdot 10^{-2}p^2 + 10^4p}$$

составить цепную схему двухполосника, которая начинается с продольной емкости.

**10.22.** Задана входная функция пассивного двухполосника с потерями

$$Z(p) = \frac{16p^4 + 20p^3 + 24p^2 + 7p + 3}{16p^3 + 4p^2 + 4p + 1}.$$

Реализовать двухполосник при помощи разложения входной функции на простейшие дроби.

**10.23(Р).** По заданной передаточной функции мостового симметричного четырехполосника

$$H_U(p) = \frac{2 \cdot 10^{-3}p + 200}{2 \cdot 10^{-3}p + 600}$$

при сопротивлении согласованной нагрузки  $r_n = 1$  кОм составить схему и определить ее параметры.

**Решение.** По (10.18) при  $k = r_n$  получаем:

$$Z_1(p) = \frac{1}{10^{-8}p + 2 \cdot 10^{-3}},$$

т.е. параллельное соединение емкости  $C_1 = 10^{-8}$  Ф и сопротивления  $r_1 = 0,5$  кОм. По формуле  $Z_2 = k^2/Z_1$  находим

$Z_2(p) = 10^{-2}p + 2 \cdot 10^3$ , т.е. последовательное соединение индуктивности  $L_2 = 0,01$  Гн и сопротивления  $r_2 = 2$  кОм.

**10.24.** Известна передаточная функция мостового симметричного четырехполюсника

$$H_U(p) = \frac{3 \cdot 10^5 - p}{3 \cdot 10^5 + p}$$

при сопротивлении согласованной нагрузки  $r_n = 1$  кОм.

Составить схему четырехполюсника и определить ее параметры.

**10.25.** Для мостового симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой заданы передаточная функция

$$H_U(p) = \frac{10^4}{2p + 10^4}$$

и сопротивление нагрузки  $r_n = 100$  Ом.

Составить схему четырехполюсника и найти значения ее элементов.

**10.26(Р).** Составить мостовую схему четырехполюсника без потерь и найти значения ее элементов, если сопротивление нагрузки  $r_n = 400$  Ом и передаточная функция

$$H_Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{0,8p^2 - 4 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^{-3}p^2 + 400p + 10^9}.$$

**Решение.** Преобразуем передаточную функцию к виду (10.19). Так как  $M(p)$  — четный полином, то делим числитель и знаменатель на нечетную часть  $N(p)$ , т.е.  $400p$ :

$$H_Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-3}p - 10^9/p}{1 + 5 \cdot 10^{-6}p + 2,5 \cdot 10^6/p}.$$

Значит,  $Z_{21}(p) = 2 \cdot 10^{-3}p - 10^9/p$ ;  $Z_{11}(p) = 2 \cdot 10^{-3}p + 10^9/p$ . По (10.20)  $Z_1(p) = 2 \cdot 10^9/p = 1/pC_1$ ;  $Z_2(p) = 4 \cdot 10^{-3}p = pL_1$ , т.е.  $C_1 = 500$  пФ;  $L_2 = 4$  мГн.

**10.27.** Задана передаточная функция

$$H_Z(p) = \frac{10^{12}}{4 \cdot 10^{-3}p^2 + 10^3p + 10^9}$$

мостового симметричного четырехполюсника без потерь при сопротивлении нагрузки  $r_n = 1$  кОм.

Составить схему четырехполюсника и найти значения ее элементов.

# ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Введение к гл. 11

Для расчета нелинейных цепей постоянного тока применяются графические, аналитические, графо-аналитические и численные методы. При расчете целесообразно предварительно провести преобразование схемы таким образом, чтобы упростить уравнения цепи. В частности, для цепи с одним нелинейным элементом можно преобразовать линейную часть схемы, применяя теорему об активном двухполюснике.

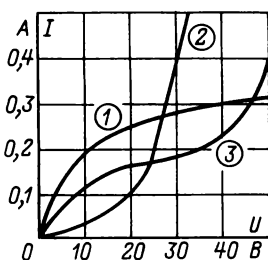


Рис. 11.А

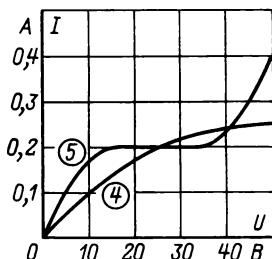


Рис. 11.Б

Для графического расчета цепи нужно характеристики всех ветвей записать в функции одного и того же аргумента. В этом случае система уравнений цепи приводится к одному уравнению с одним неизвестным. Решение часто целесообразно проводить методом пересечений, при котором нелинейное уравнение разбивается на две части

$$f_1(x) = f_2(x),$$

после чего строятся характеристики  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  и решение определяется точкой их пересечения.

При аналитическом методе расчета можно рекомендовать аппроксимацию характеристик нелинейных элементов полиномами второй и третьей степени. В этом случае расчет сводится к решению квадратного или кубического уравнения.

Для численного расчета нелинейных цепей широко применяются итерационные методы: метод простой итерации и метод Ньютона.

При решении задачи методом простой итерации нелинейное уравнение цепи

$$f(x) = 0, \quad (11.1)$$

где  $x$  — искомая величина, частично разрешается относительно

этой величины:

$$x = \varphi(x). \quad (11.2)$$

Расчет проводится по алгоритму

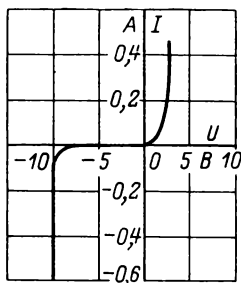
$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad (11.3)$$

где  $k = 0, 1, 2 \dots$  — номер шага итерации.

При  $k = 0$  начальное приближение  $x_0$  обычно находится решением уравнения (11.1), в котором отброшены нелинейные члены. Условие сходимости метода

$$|d\varphi(x)/dx| < 1. \quad (11.4)$$

Метод простой итерации применяется и к расчету систем нелинейных уравнений. В этом случае аналитическая проверка условий сходимости весьма сложна, поэтому чаще всего сходимость проверяется непосредственно в процессе итераций.



← Рис. 11.В

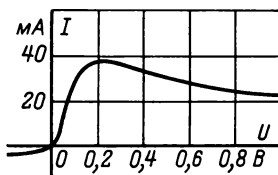


Рис. 11.Г

При решении задачи методом Ньютона нелинейное уравнение (11.1) линеаризуется в окрестности каждого  $k$ -го приближения  $x_k$  и решается линейное уравнение

$$f(x_k) + f'(x_k) \Delta x_k = 0, \quad (11.5)$$

где  $f'(x_k) = df(x)/dx$  при  $x = x_k$ . Из (11.5) поправка  $\Delta x_k = -f(x_k)/f'(x_k)$ . Расчет проводится по алгоритму

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad (11.6)$$

где  $k = 0, 1, 2 \dots$  — номер шага итерации. Начальное приближение  $x_0$  находится так же, как и в методе простой итерации. Условия сходимости метода Ньютона

$$df(x)/dx \neq 0; \quad d^2f(x)/dx^2 \neq 0. \quad (11.7)$$

Метод Ньютона может применяться и к системе нелинейных уравнений. В частности, когда цепь описывается двумя уравнениями с двумя неизвестными

$$f_1(x, y) = 0; \quad f_2(x, y) = 0, \quad (11.8)$$

алгоритм расчета:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_k, y_k) & \partial f_1(x_k, y_k)/\partial y \\ f_2(x_k, y_k) & \partial f_2(x_k, y_k)/\partial y \end{vmatrix}}{J(x_k, y_k)}, \quad (11.9)$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_k, y_k)}{\partial x} & f_1(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2(x_k, y_k)}{\partial x} & f_2(x_k, y_k) \end{vmatrix}}{J(x_k, y_k)}, \quad (11.10)$$

где

$$J(x_k, y_k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_k, y_k)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_k, y_k)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_k, y_k)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_k, y_k)}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (11.11)$$

— якобиан системы уравнений (11.8). Ввиду сложности аналитической проверки условий сходимости в этом случае целесообразно проверять сходимость в процессе итераций. Первое приближение метода Ньютона является графо-аналитическим методом линеаризации нелинейных характеристик.

В задачах данной главы итерационный процесс можно считать законченным в том случае, когда значения искомой величины на двух соседних шагах итерации отличаются не более чем на 3–4 %.

Характеристики нелинейных элементов (резисторов), рассматриваемых в задачах § 11.1, приведены на рис. 11.А – 11.Г, причем характеристики рис. 11.А, 11.Б симметричные.

## 11.1. Графический метод расчета

**11.1(Р).** Нелинейный двухполюсник (рис. 11.1) состоит из последовательно включенных линейного резистора с сопротивлением  $r = 80$  Ом и нелинейного резистора, характеристика которого приведена на рис. 11.А (кривая 1).

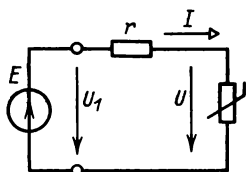


Рис. 11.1

Построить: 1) вольт-амперную характеристику двухполюсника  $I(U_1)$ ; 2) зависимость напряжения  $U$  на нелинейном элементе от входного напряжения  $U_1$ . Определить ток  $I$  при ЭДС  $E = 40$  В.

**Решение.** 1) Цепь описывается уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа,

$$U_1(I) = rI + U(I) = U_r(I) + U(I), \quad (1)$$

т. е. алгебраическим выражением вольт-амперной характеристики пассивного двухполюсника. Построение этой характеристики приведено на рис. 11.1Р,а. Здесь 1 — характеристика  $U_r(I)$  линейного резистора; 2 — характеристика нелинейного резистора  $U(I)$ ; 3 — характеристика, полученная суммированием характеристик согласно уравнению (1), которая является иско-

мой вольт-амперной характеристикой двухполюсника  $I(U_1)$ .

2) Отмечая напряжения на входе цепи  $U_1$  (кривая 3) и на нелинейном элементе  $U$  (кривая 2) при одинаковых значениях тока, строим зависимость  $U(U_1)$ , показанную на рис. 11.1P, б.

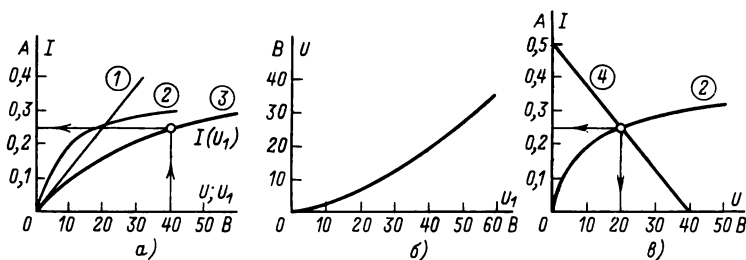


Рис. 11.1P

При  $E = U_1 = 40$  В ток  $I = 0,25$  А определим непосредственно по построенной вольт-амперной характеристике двухполюсника — кривой 3 на рис. 11.1, а.

Если вольт-амперная характеристика двухполюсника не строится, то ток может быть найден методом пересечений. Запишем уравнение цепи в виде

$$U(I) = E - rI$$

и построим (рис. 11.1P, б) характеристики левой (кривая 2) и правой (прямая 4) частей этого уравнения. Равенство левой и правой частей соответствует точке их пересечения. В точке пересечения  $I = 0,25$  А ( $U = 20$  В).

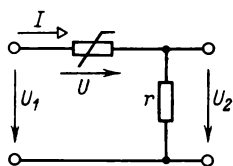


Рис. 11.2

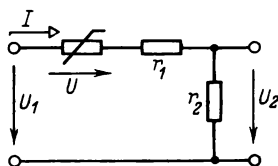


Рис. 11.3

**11.2.** В схеме рис. 11.2  $r = 100$  Ом, характеристика нелинейного элемента (симметричная) дана на рис. 11.Б (кривая 5).

Построить зависимость напряжения на выходе цепи  $U_2$  от входного напряжения  $U_1$ .

**11.3.** В схеме рис. 11.3  $r_1 = 25$  Ом,  $r_2 = 75$  Ом, характеристика нелинейного элемента (симметричная) дана на рис. 11.Б



(кривая 5). Построить зависимость выходного напряжения  $U_2$  от входного  $U_1$ .

Определить, в каких пределах изменяется выходное напряжение при изменении входного от 30 до 60 В.

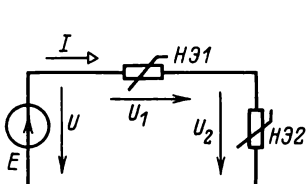


Рис. 11.4

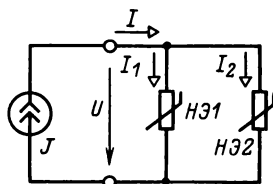


Рис. 11.5

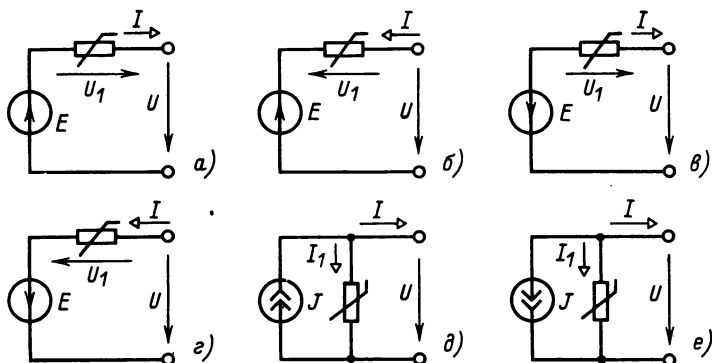


Рис. 11.6

**11.4.** Характеристики нелинейных элементов  $H31$  и  $H32$  (симметричные) схемы рис. 11.4 показаны на рис. 11.А (кривые 1 и 2 соответственно).

Определить при ЭДС  $E = 35$  В ток  $I$ , напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и мощность источника. Построить вольт-амперную характеристику цепи  $I(U)$  и зависимость напряжения  $U_2$  от напряжения источника  $U$ .

**11.5.** В схеме рис. 11.5 ток источника  $J = 0,35$  А, характеристики нелинейных элементов  $H31$  и  $H32$  (симметричные) приведены на рис. 11.А — соответственно кривые 1 и 2.

Определить токи  $I_1$ ,  $I_2$  нелинейных элементов и мощность источника. Построить вольт-амперную характеристику цепи  $I(U)$ .

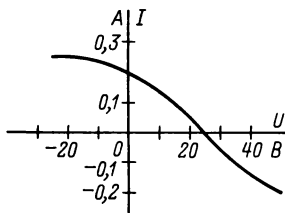
**11.6 (Р).** В схемах двухполюсников рис. 11.6, а —  $E = 25$  В и  $J = 0,2$  А. Характеристика нелинейного элемента (симметричная) изображена на рис. 11.Б (кривая 4).

Построить вольт-амперные характеристики для этих двухполюсников.

Решение. Для двухполюсника рис. 11.6,а по второму закону Кирхгофа

$$U(I) = E - U_1(I),$$

где  $U(I)$  – алгебраическое выражение вольт-амперной характеристики двухполюсника. Характеристика, построенная в соответствии с этим уравнением, показана на рис. 11.6Р.



← Рис. 11.6Р

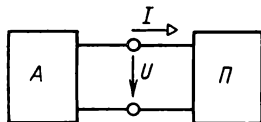


Рис. 11.7

11.7. К активным двухполюсникам задачи 11.6 (рис. 11.6,а и б) подключены пассивные двухполюсники: 1) задачи 11.4; 2) задачи 11.5.

Найти токи  $I$  и напряжения  $U$  двухполюсников (рис. 11.7).

11.8(Р). В схеме рис. 11.8  $r = 200$  Ом,  $E = 20$  В, диод  $D$  идеальный.

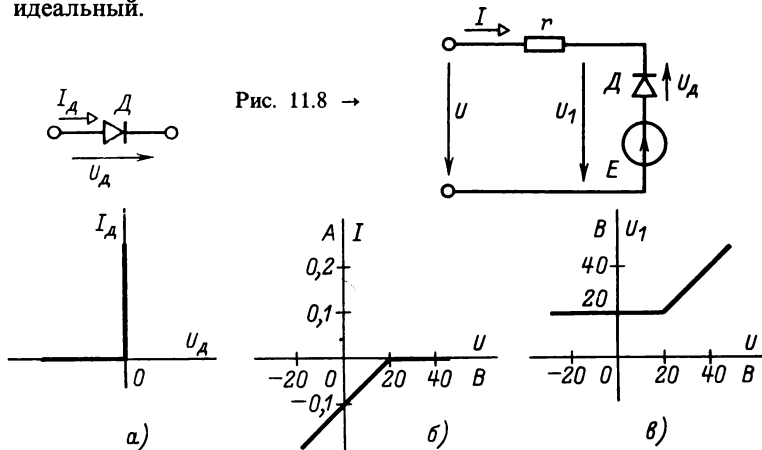


Рис. 11.8 →

Рис. 11.8Р

Построить вольт-амперную характеристику  $I(U)$  и зависимость выходного напряжения  $U_1$  от входного  $U$ .

Решение. Характеристика идеального диода (рис. 11.8Р,а) описывается выражениями: при  $I_d > 0$  напряжение  $U_d = 0$ ; при  $U_d < 0$  ток  $I_d = 0$ .

Запишем уравнение цепи (рис. 11.8) по второму закону Кирхгофа

$$U(I) = rI + U_1(I),$$

где  $U_1(I) = E - U_d(I)$ .

При  $U > E$  тока в цепи нет, поэтому  $U_1 = U$ . При  $U < E$  диод проводит ток, напряжение на диоде  $U_d = 0$  и  $U_1 = E$ ,  $I = (U - E)/r$ .

Вольт-амперная характеристика  $I(U)$  и зависимость  $U_1(U)$  изображены на рис. 11.8Р, б и в.

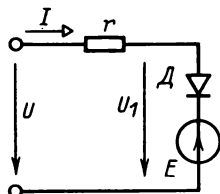


Рис. 11.9

11.9. В схеме (рис. 11.9)  $r = 200 \text{ Ом}$ , диод  $D$  идеальный.

Построить вольт-амперную характеристику двухполюсника  $I(U)$  и зависимость  $U_1(U)$  при: 1)  $E = 0$ ; 2)  $E = 20 \text{ В}$ .

11.10(Р). В схеме рис. 11.10  $r_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $r_2 = 0,4 \text{ кОм}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ , диоды идеальные.

Построить вольт-амперную характеристику двухполюсника  $I(U)$ .

Решение. При  $U < E_2$  диод  $D_1$  открыт, диод  $D_2$  заперт, т. е. ток  $I_2 = 0$ . Поэтому  $I = I_1$ , где  $I_1 = U/r_1$ , так как в проводящем направлении напряжение  $U_1$  на диоде  $D_1$  равно нулю.

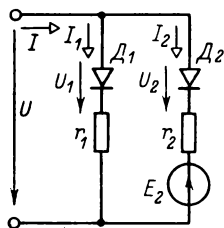


Рис. 11.10

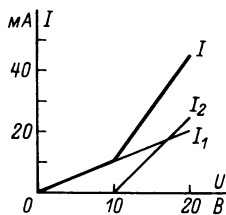


Рис. 11.10Р

При  $U > E_2$  оба диода открыты, напряжения  $U_1 = 0$  и  $U_2 = 0$ , ток  $I = I_1 + I_2$ , где  $I_1 = U/r_1$ ;  $I_2 = (U - E_2)/r_2$ .

Построение вольт-амперной характеристики показано на рис. 11.10Р.

11.11. В схеме рис. 11.11  $r_1 = r_2 = r_3 = 2 \text{ кОм}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  $E_3 = 20 \text{ В}$ ; диоды идеальные.

Построить вольт-амперную характеристику двухполюсника.

11.12(Р). В схеме (рис. 11.12)  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ . Характеристика опорного диода (стабилитрона  $Cm$ ) приведена на рис. 11.В.

Построить зависимость выходного напряжения  $U_2$  от входного  $U_1$ . Найти токи при напряжении на входе: 1)  $U_1 = 18$  В; 2)  $U_1 = 6$  В.

Решение. Уравнение цепи (по второму закону Кирхгофа)

$$U_1 = r_1 I_1 - U = r_1 I_1 + U_2, \quad (1)$$

где  $U = -U_2$ .

Чтобы построить характеристику  $U_2(U_1)$ , нужно получить для уравнения (1) все величины в зависимости от одного

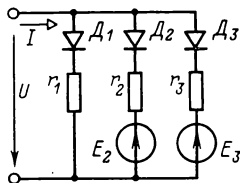


Рис. 11.11

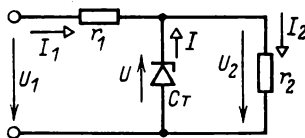


Рис. 11.12

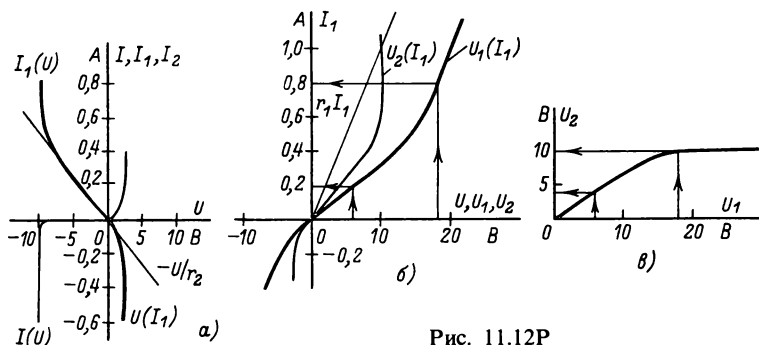


Рис. 11.12Р

параметра, например тока  $I_1$ . Сначала построим характеристику  $I_1(U) = I_1(-U_2)$  по уравнению (первый закон Кирхгофа)

$$I_1(U) = I_2(U) - I(U) = -U/r_2 - I(U), \quad (2)$$

которая показана на рис. 11.12Р, а. На рис. 11.12Р, б та же характеристика построена в координатах  $-U(I_1)$ , т. е.  $U_2(I_1)$ . На том же рисунке выполнено графическое решение уравнения (1), т. е. получена зависимость  $U_1(I_1)$ .

Зависимость  $U_2(U_1)$ , показанная на рис. 11.12Р, в, построена по характеристикам  $U_2(I_1)$  и  $U_1(I_1)$  рис. 11.12Р, б. Из рис. 11.12Р, в следует, что при  $U_1 > 16$  В в цепи наблюдается режим стабилизации напряжения.

При известном напряжении  $U_1$  на входе ток  $I_1$  определим по характеристике  $U_1(I_1)$  на рис. 11.12Р, б; ток  $I_2 = U_2/r_2$ , где

$U_2$  находим при известном напряжении  $U_1$  по зависимости, построенной на рис. 11.12Р,в, и ток  $I$  диода вычислим по первому закону Кирхгофа:  $I = I_2 - I_1$ .

1) При  $U_1 = 18$  В получим:  $I_1 = 0,8$  А;  $U_2 = 10$  В;  $I_2 = 10/20 = 0,5$  А;  $I = 0,5 - 0,8 = -0,3$  А; 2) при  $U_1 = 6$  В находим:  $I_1 = 0,2$  А;  $U_2 = 4$  В;  $I_2 = 0,2$  А;  $I = 0$ .

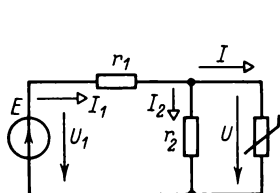


Рис. 11.13

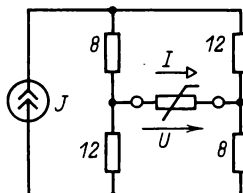


Рис. 11.14

**11.13.** В схеме рис. 11.13  $r_1 = 50$  Ом;  $r_2 = 200$  Ом,  $E = 30$  В; характеристика нелинейного элемента (симметричная) приведена на рис. 11.А (кривая 2).

Определить токи.

Построить вольт-амперную характеристику  $I_1(U_1)$  и зависимость  $U(U_1)$ .

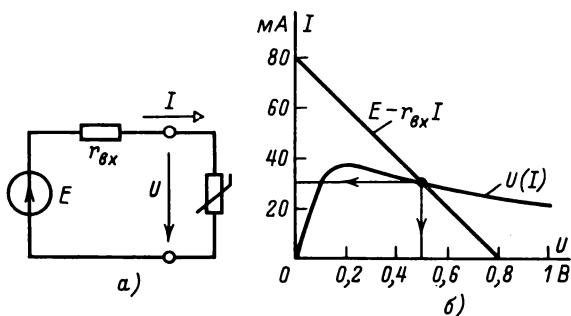


Рис. 11.14Р

**11.14(Р).** На схеме рис. 11.14 сопротивления линейных резисторов указаны в омах; ток  $J = 0,4$  А; характеристика нелинейного элемента дана на рис. 11.Г.

Найти напряжение и ток нелинейного элемента.

**Решение.** Для линейной части цепи составим эквивалентную схему, применяя теорему об активном двухполуснике (рис. 11.14Р,а, где  $E = 0,8$  В;  $r_{вх} = 10$  Ом).

Для эквивалентной схемы запишем уравнение

$$U(I) = E - r_{вх} I,$$

которое решим методом пересечений (рис. 11.14Р, б).

Абсцисса и ордината точки пересечения определяют искомые величины  $U = 0,5$  В;  $I = 0,03$  А.

**11.15.** На схеме рис. 11.15 сопротивления линейных резисторов даны в омах; ЭДС  $E = 100$  В; характеристика нелинейного элемента (симметричная) приведена на рис. 11.А (кривая 2).

Найти токи  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  и напряжение  $U$  на нелинейном элементе.

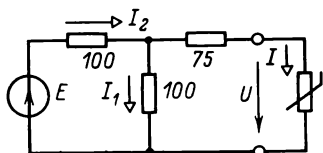


Рис. 11.15

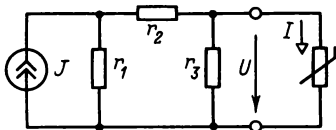


Рис. 11.16.

**11.16.** В схеме рис. 11.16  $r_1 = 25$  Ом;  $r_2 = 25$  Ом;  $r_3 = 50$  Ом; характеристика нелинейного резистора (симметричная) приведена на рис. 11.А (кривая 3).

Определить ток нелинейного резистора и мощность источника тока  $J = 3,2$  А.

**11.17.** В схеме рис. 11.17  $J = 2,5$  А;  $E = 60$  В. Нелинейный резистор имеет характеристику, изображенную на рис. 11.А (кривая 1), сопротивления линейных резисторов даны в омах.

Найти напряжение и ток нелинейного резистора.

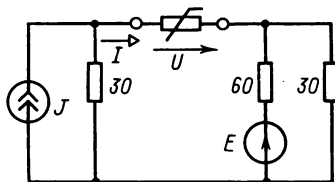


Рис. 11.17

**11.18(Р).** В схеме рис. 11.18  $E_1 = 40$  В;  $E_3 = 20$  В; характеристики нелинейных элементов (симметричные) приведены на рис. 11.А:  $HЭ1$  — кривая 1;  $HЭ2$  — кривая 2;  $HЭ3$  — кривая 3.

Найти токи и напряжения нелинейных элементов.

**Решение.** Решение задачи целесообразно разделить на два этапа. Сначала построим зависимости токов всех ветвей от одного и того же напряжения — в рассматриваемой схеме с двумя узлами от узлового напряжения  $U_{ab}$ . Эти вольт-амперные характеристики

$$U_{ab} = E_1 - U_1(I_1); U_{ab} = U_2(I_2); U_{ab} = U_3(I_3) - E_3$$

изображены на рис. 11.18Р (кривые 1, 2, 3 соответственно).

При построении учтена симметричность характеристик. После этого графически решим уравнение, составленное по

первому закону Кирхгофа,

$$I_1(U_{ab}) = I_2(U_{ab}) + I_3(U_{ab}),$$

где все токи являются функциями одного и того же напряжения  $U_{ab}$ .

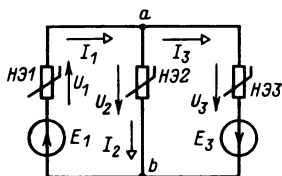


Рис. 11.18

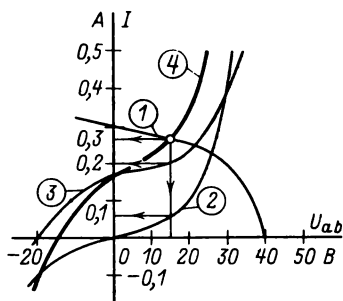


Рис. 11.18P →

Решение определяется точкой, в которой ток  $I_1$  (кривая 1) равен сумме токов  $I_2 + I_3$  (кривая 4 на рис. 11.18P). Для этой точки  $U_{ab} = 15$  В;  $I_1 = 0,26$  А;  $I_2 = 0,06$  А;  $I_3 = 0,2$  А. Напряжения на нелинейных элементах находим по характеристикам рис. 11.А:  $U_1 = 25$  В;  $U_2 = 15$  В;  $U_3 = 35$  В.

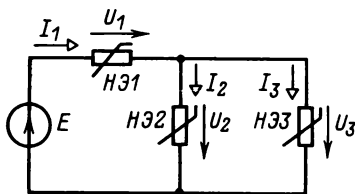


Рис. 11.19

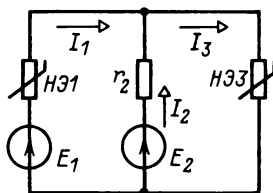


Рис. 11.20

**11.19.** В схеме рис. 11.19 нелинейные элементы имеют характеристики (симметричные), приведенные на рис. 11.А:  $H31$  и  $H33$  — кривая 1;  $H32$  — кривая 2;  $E = 50$  В.

Определить токи и напряжения нелинейных элементов; вычислить мощность источника ЭДС.

**11.20.** В схеме рис. 11.20  $r_2 = 100$  Ом;  $E_1 = 30$  В;  $E_2 = 40$  В; нелинейные резисторы имеют характеристики (симметричные), изображенные на рис. 11.А:  $H31$  — кривая 1;  $H33$  — кривая 2.

Найти токи и напряжения на резисторах.

**11.21.** Характеристики нелинейных элементов (симметричные) в схеме 11.21 приведены на рис. 11.А и 11.Б:  $H31$  —

кривая 1;  $HЭ2$  — кривая 2;  $HЭ3$  — кривая 5; ЭДС источников:  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 10$  В;  $E_3 = 40$  В.

Определить суммарную мощность нелинейных резисторов.

11.22(Р). В схеме рис. 11.22  $E = 40$  В;  $J = 0,2$  А; характеристики нелинейных элементов (симметричные) изображены на рис. 11.А:  $HЭ1$  — кривая 1;  $HЭ2$  — кривая 2.

Определить токи и напряжения нелинейных элементов.

Решение. Характеристики ветвей 1 и 2 запишем в функции общего узлового напряжения  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = E - U_1(I_1); \quad (1)$$

$$U_{ab} = U_2(I_2), \quad (2)$$

после чего графически решим уравнение, составленное по первому закону Кирхгофа,

$$I_1(U_{ab}) = I_2(U_{ab}) - J$$

(рис. 11.22Р). Точка пересечения определяет напряжение  $U_{ab} = U_2 = 30$  В и ток  $I_1 = 0,2$  А.

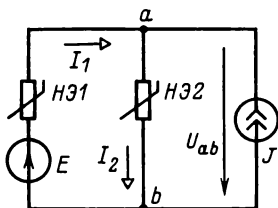
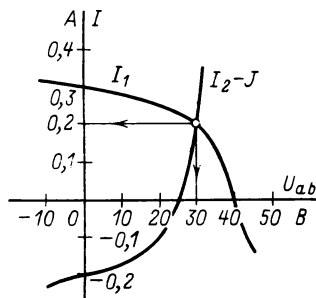


Рис. 11.22

Рис. 11.22Р →



На основании уравнений (1), (2) и характеристик нелинейных элементов находим:  $U_1 = 10$  В;  $I_2 = 0,4$  А.

11.23. В схеме рис. 11.23 характеристики нелинейных элементов  $HЭ1$ ,  $HЭ2$ ,  $HЭ3$  (симметричные) приведены на рис. 11.А (кривая 1, 2, 3 соответственно);  $E_1 = 40$  В;  $E_3 = 30$  В;  $J = 0,2$  А. Найти токи и напряжения нелинейных элементов.

11.24(Р). Характеристики нелинейных элементов (симметричные) схемы рис. 11.24 изображены на рис. 11.А:  $HЭ1$  и  $HЭ3$  — кривая 1;  $HЭ2$  — кривая 3;  $r = 50$  Ом;  $E_1 = 40$  В;  $E_2 = 15$  В;  $J = 0,2$  А.



Определить напряжение  $U$  и ток  $I$  нелинейного элемента  $HЗЗ$ , если: а)  $E = 30$  В; б)  $E = -30$  В; в)  $E = 0$ .

Решение. а). Для решения задачи преобразуем схему в неразветвленную, заменив две параллельные ветви с  $HЗ1$  и  $HЗ2$  эквивалентным нелинейным двухполюсником. Эквива-

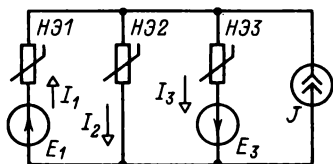


Рис. 11.23

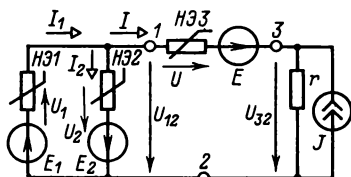


Рис. 11.24.

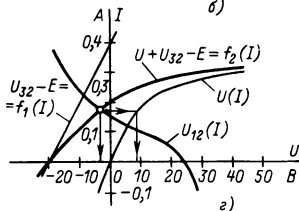
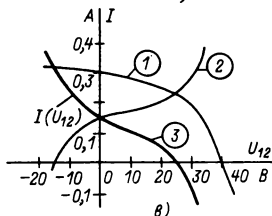
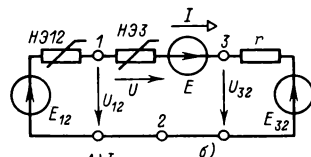
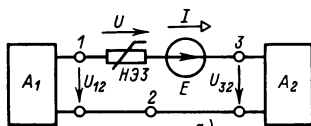


Рис. 11.24Р

лентная схема показана на рис. 11.24Р,а и подробнее на рис. 11.24Р,б, причем источник тока заменен эквивалентным источником ЭДС с  $E_{32} = rJ = 10$  В.

Характеристики нелинейного двухполюсника  $A_1$  определим на основании уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

$$U_{12} = E_1 - U_1(I_1); \quad (1)$$

$$U_{12} = U_2(I_2) - E_2; \quad (2)$$

$$I(U_{12}) = I_1(U_{12}) - I_2(U_{12}). \quad (3)$$

Характеристики (1), (2) и графическое решение уравнения (3) показаны на рис. 11.24Р,в (кривые 1, 2, 3 соответственно). При построении учитывалась симметричность характеристик.

После построения характеристики  $I(U_{12})$ , или, что то же самое,  $U_{12}(I)$ , находим ток в неразветвленной схеме рис. 11.24Р, б, для которой

$$U_{12}(I) = U(I) + U_{32}(I) - E.$$

Это уравнение решим методом пересечений (рис. 11.24Р, з). Точка пересечения определяет напряжение  $U = 8$  В и ток  $I = 0,17$  А.

**11.25.** В схеме рис. 11.25 нелинейные элементы имеют характеристики (симметричные), приведенные на рис. 11.А: НЭ1, НЭ3 — кривая 1; НЭ4, НЭ5 — кривая 2; НЭ2 — кривая 3;  $E_1 = 40$  В;  $E_2 = 15$  В;  $E_3 = 10$  В;  $E_4 = 20$  В.

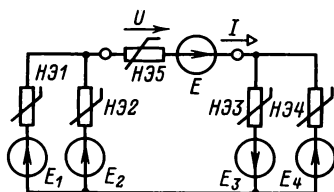


Рис. 11.25

Определить напряжение  $U$  и ток  $I$  нелинейного элемента НЭ5 при: а)  $E = 0$ ; б)  $E = 30$  В.

**11.26 (Р).** Транзистор  $T$  включен по схеме с общим эмиттером (рис. 11.26, а). Дано:  $E_1 = 1$  В;  $E_2 = 20$  В;  $r_1 = 500$  Ом. Входная характеристика  $I_6(U_{63})$  и семейство выходных характеристик  $I_k(U_{к3})$  изображены на рис. 11.26, б и в.

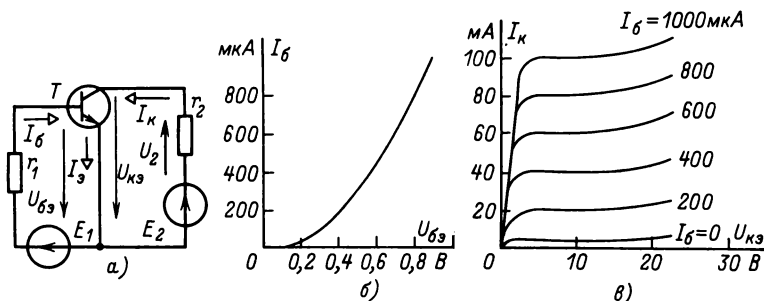


Рис. 11.26

Предполагая, что входная характеристика не зависит от напряжения  $U_{к3}$ , построить зависимости тока  $I_k$  и напряжения  $U_2$  от сопротивления  $r_2$ .

**Решение.** По входной характеристике определим ток базы  $I_6$  из уравнения

$$U_{63}(I_6) = E_1 - r_1 I_6. \quad (1)$$

Графическое решение методом пересечений приведено на рис. 11.26Р, а: ток базы  $I_6 = 600$  мкА.

По выходной характеристике определим ток коллектора  $I_k$  и напряжение  $U_2 = r_2 I_k$ . Для коллекторной цепи транзистора (рис. 11.26, а)

$$U_{кз}(I_k) = E_2 - r_2 I_k, \quad (2)$$

где характеристика  $U_{кз}(I_k)$ , т. е. выходная характеристика  $I_k(U_{кз})$ , должна быть выбрана при найденном токе базы

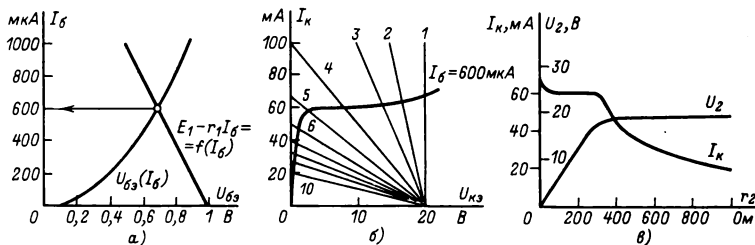


Рис. 11.26Р

$I_{бз} = 600 \mu A$ . Графическое решение последнего уравнения методом пересечений приведено на рис. 11.26Р, б, где цифрами  $n = 1, 2, \dots, 10$  обозначены прямые, удовлетворяющие уравнению (2) при различных значениях  $r_2$  (табл. 11.26). В той же

Т а б л и ц а 11.26

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_2, \text{ Ом}$	0	50	100	200	300	400	500	600	800	1000
$I_k, \text{ мА}$	65	62	60	60	58	47	38	32	24	19
$U_2, \text{ В}$	0	3,1	6	12	17,5	19	19	19	19	19

таблице приведены результаты графического решения, т. е. даны значения тока  $I_k$  и напряжения  $U_2 = r_2 I_k$ .

Зависимости  $I_k(r_2)$  и  $U_2(r_2)$  построены на рис. 11.26Р, в.

11.27. Транзистор включен по схеме с общим эмиттером (рис. 11.27, а). Входная характеристика транзистора  $I_{бз}(U_{бз})$  дана на рис. 11.27, б и семейство выходных характеристик  $I_k(U_{кз})$  — на рис. 11.27, в. ЭДС  $E_1 = 0,3 \text{ В}$ ;  $E_2 = 20 \text{ В}$ ; сопротивление  $r_1 = 10 \text{ кОм}$ .

Считая, что входная характеристика не зависит от напряжения  $U_{зк}$ , определить напряжение  $U_2$  на сопротивлении нагрузки при: а)  $r_2 = 10$  кОм; б)  $r_2 = 20$  кОм.

11.28. Для схемы предыдущей задачи построить зависимость выходного напряжения  $U_2$  от ЭДС  $E_1$ .

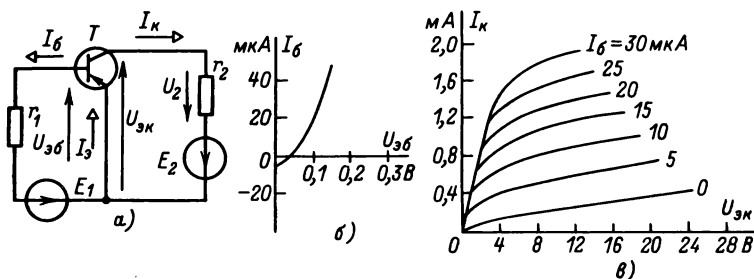


Рис. 11.27

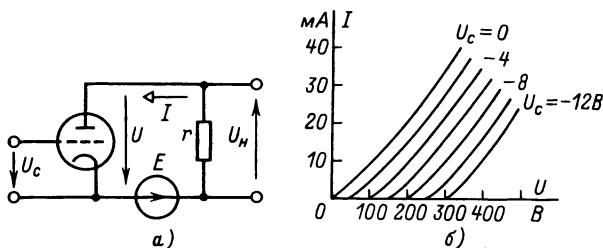


Рис. 11.29

11.29. Усилитель на ламповом триоде собран по схеме рис. 11.29, а. Семейство анодных характеристик триода приведено на рис. 11.29, б; ЭДС  $E = 250$  В; сопротивление нагрузки  $r = 5$  кОм.

Определить анодный ток  $I$  и напряжение на сопротивлении нагрузки  $U_n$  при напряжении на сетке  $U_c = -4$  В. Построить зависимость  $U_n(U_c)$ .

## 11.2. Аналитический метод расчета

11.30 (Р). Цепь состоит из последовательно соединенных линейного резистора с сопротивлением  $r = 10$  Ом и нелинейного резистора, подключенных к источнику ЭДС  $E = 18$  В (см. рис. 11.1). Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора при положительных значениях тока и напряжения  $I \geq 0$ ,

$U \geq 0$  может быть аппроксимирована зависимостью:

а)  $U = aI + bI^2$ , где  $a = 6 \text{ В/А}$ ;  $b = 2 \text{ В/А}^2$ ;

б)  $I = \alpha U + \beta U^2$ , где  $\alpha = 0,05 \text{ А/В}$ ,  $\beta = 0,003 \text{ А/В}^2$ .

Определить ток в цепи.

Решение. а). Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа

$$rI + U(I) = E.$$

После подстановки зависимости  $U(I)$  получим квадратное уравнение

$$bI^2 + (r + a)I - E = 0$$

или при заданных числовых значениях  $2I^2 + 16I - 18 = 0$ , откуда находим  $I = 1 \text{ А}$ .

Решение  $I = -9 \text{ А}$  не удовлетворяет условиям аппроксимации и потому не имеет смысла.

11.31. В схеме рис. 11.13  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 1,33 \text{ Ом}$ ;  $E = 6 \text{ В}$ . Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора может быть при  $U \geq 0$ ,  $I \geq 0$  аппроксимирована зависимостью:

а)  $I = aU^2$ , где  $a = 0,5 \text{ А/В}^2$ ;

б)  $U = bI^2$ , где  $b = 4 \text{ В/А}^2$ .

Определить все токи и напряжение на нелинейном резисторе  $U$ .

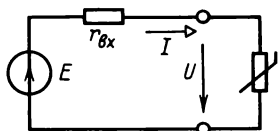


Рис. 11.32Р

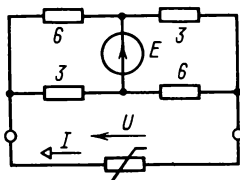


Рис. 11.33

11.32 (Р). На схеме рис. 11.16  $r_1 = r_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 80 \text{ Ом}$ ;  $J = 0,6 \text{ А}$ . Характеристика нелинейного элемента при  $U \geq 0$ ,  $I \geq 0$  аппроксимирована зависимостью:

а)  $U(I) = aI + bI^2$ , где  $a = 30 \text{ В/А}$ ,  $b = 500 \text{ В/А}^2$ ;

б)  $I(U) = \alpha U + \beta U^2$ , где  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А/В}$ ,  $\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ А/В}^2$ .

Определить напряжение  $U$  и ток  $I$  нелинейного резистора.

Решение. а) При решении задачи целесообразно линейную часть цепи представить эквивалентной схемой (рис. 11.32Р). Применяя теорему об активном двухполоснике, получаем  $E = 12 \text{ В}$ ;  $r_{вх} = 40 \text{ Ом}$ . Для схемы рис. 11.32Р по второму

закону Кирхгофа составим уравнение  $U(I) + r_{\text{вх}}I = E$  или после подстановки аппроксимирующей зависимости и числовых данных:  $500I^2 + 70I - 12 = 0$ , откуда ток  $I = 0,1$  А (решение  $I = -0,24$  А отброшено, поскольку аппроксимация справедлива только при положительных значениях тока). По заданной зависимости (а) находим напряжение  $U = 8$  В.

11.33. В диагональ моста (рис. 11.33) включен источник ЭДС  $E = 18$  В; сопротивления линейных резисторов указаны на схеме в омах. Характеристика нелинейного элемента при положительных значениях напряжения и тока задана выражением:

а)  $I = aU^2$ , где  $a = 0,25$  А/В<sup>2</sup>;

б)  $U = bI^2$ , где  $b = 2$  В/А<sup>2</sup>.

Определить мощность нелинейного резистора.

11.34. Определить показание вольтметра в цепи рис. 11.34, где ЭДС источника  $E = 9$  В, сопротивления линейных резисторов указаны на схеме в омах, характеристика нелинейного элемента аппроксимирована выражением: а)  $I = aU^2$ , где  $a = 0,25$  А/В<sup>2</sup>, или б)  $U = bI^2$ , где  $b = 2$  В/А<sup>2</sup>, причем  $I \geq 0$ ,  $U \geq 0$ .

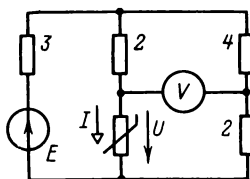


Рис. 11.34

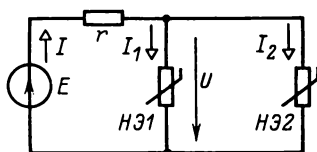


Рис. 11.35

11.35 (Р). В схеме рис. 11.35  $E = 30$  В,  $r = 20$  Ом, характеристики нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2 соответственно заданы зависимостями  $I_1 = a_1U + a_2U^2$ , где  $a_1 = 0,01$  А/В;  $a_2 = 0,003$  А/В<sup>2</sup>, и  $I_2 = b_1U + b_2U^2$ , где  $b_1 = 0,04$  А/В;  $b_2 = 0,002$  А/В<sup>2</sup>, при  $U \geq 0$ .

Определить токи и напряжения нелинейных элементов.

Решение. Для схемы рис. 11.35 по законам Ома и Кирхгофа:

$$I = (E - U)/r; \quad (1)$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (2)$$

После подстановки заданных зависимостей  $I_1(U)$ ,  $I_2(U)$  и совместного решения уравнений (1) и (2) получим квадратное

уравнение

$$(E - U)/r = (a_2 + b_2) U^2 + (a_1 + b_1) U$$

или при заданных числовых значениях

$$0,005 U^2 + 0,1U - 1,5 = 0,$$

откуда  $U = 10$  В. По заданным зависимостям находим токи  $I_1 = 0,4$  А;  $I_2 = 0,6$  А.

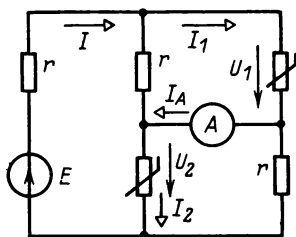


Рис. 11.36

**11.36.** Определить ЭДС источника  $E$  и токи уравновешенного моста (рис. 11.36, где  $I_A = 0$ ), если сопротивление линейных резисторов  $r = 40$  Ом, характеристики нелинейных резисторов одинаковы и представлены уравнением  $U_k = 30I_k + 10I_k^3$ , где  $k = 1; 2$ , напряжение в вольтах, ток в амперах.

**11.37.** Характеристики нелинейных элементов схемы рис. 11.19 аппроксимированы уравнениями (токи в амперах, напряжения в вольтах):

$$I_1 = 0,01U_1 + 0,002U_1^2; I_2 = 0,01U_2 + 0,003U_2^2; I_3 = 0,04U_3 + 0,002U_3^2$$

(аппроксимация справедлива при положительных значениях напряжений).

Определить токи и напряжения нелинейных элементов при ЭДС  $E = 30$  В.

**11.38 (P).** В схеме рис. 11.38  $E_1 = 40$  В;  $E_2 = 10$  В;  $E_3 = 20$  В; характеристики нелинейных элементов аппроксимированы уравнениями (токи в амперах, напряжения в вольтах):

$$I_1 = 0,01U_1 + 0,002U_1^2; \quad (1)$$

$$I_2 = 0,01U_2 + 0,001U_2^2; \quad (2)$$

$$I_3 = 0,01U_3 + 2,5 \cdot 10^{-4}U_3^2, \quad (3)$$

причем аппроксимация имеет смысл только при положительных значениях напряжений и токов.

Определить напряжения и токи нелинейных элементов.

Решение. По первому закону Кирхгофа

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (4)$$

Для решения этого уравнения выразим все токи через общее напряжение  $U$  между узлами. Из рис. 11.38 следует,

что

$$U_1 = E_1 - U = 40 - U; \quad U_2 = U - E_2 = U - 10; \quad U_3 = U + E_3 = U + 20. \quad (5)$$

После подстановки равенств (5) в уравнения (1), (2), (3) и токов  $I_1, I_2, I_3$  в (4) получим уравнение

$$0,01(40 - U) + 0,002(40 - U)^2 = 0,01(U - 10) + 0,001(U - 10)^2 + 0,01(U + 20) + 2,5 \cdot 10^{-4}(U + 20)^2$$

и (после алгебраических преобразований) квадратное уравнение

$$U^2 - 240U + 4400 = 0,$$

откуда  $U = 20$  В. Второе решение  $U = 220$  В не удовлетворяет условиям аппроксимации, так как получается  $I_1 < 0$ .

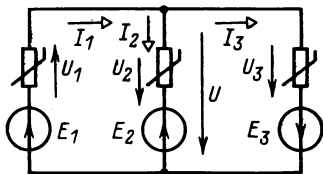


Рис. 11.38

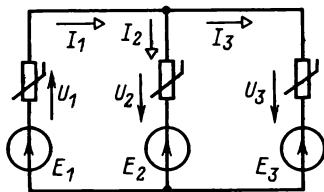


Рис. 11.39

Подставив найденное значение  $U = 20$  В в равенства (5), определим напряжения:  $U_1 = 20$  В;  $U_2 = 10$  В;  $U_3 = 40$  В. По уравнениям (1), (2), (3) находим токи:  $I_1 = 1$  А;  $I_2 = 0,2$  А;  $I_3 = 0,8$  А.

11.39. В схеме рис. 11.39 нелинейные элементы имеют следующие характеристики (токи в амперах, напряжения в вольтах):

$$I_1 = 0,01U_1 + 0,002U_1^2;$$

$$I_2 = 0,01U_2 + 0,003U_2^2; \quad I_3 = 0,04U_3 + 0,002U_3^2$$

(аналитическая аппроксимация справедлива только при положительных значениях напряжений и токов). ЭДС источников:  $E_1 = 40$  В;  $E_2 = 10$  В;  $E_3 = 10$  В.

Определить суммарную мощность источников.

### 11.3. Численные методы расчета

11.40(Р). В схеме рис. 11.4 характеристики нелинейных элементов заданы уравнениями (токи в амперах, напряжения в вольтах):  $U_1 = 1000I + 10\sqrt[3]{I}$ ;  $U_2 = 500I + 20\sqrt[3]{I}$ ; ЭДС источника  $E = 18$  В.



Определить ток и напряжения на нелинейных элементах методом простой итерации.

Решение. По второму закону Кирхгофа

$$U_1 + U_2 = E.$$

После подстановки заданных зависимостей напряжений  $U_1$  и  $U_2$  от тока получим уравнение (11.1):

$$1500I + 30\sqrt[3]{I} - 18 = 0.$$

Разрешим уравнение частично относительно тока (11.2):

$$I = 0,012 - 0,02\sqrt[3]{I} \equiv \varphi(I). \quad (1)$$

Проверим сходимость по условию (11.4), для чего вычислим производную

$$|d\varphi/dI| = 0,02/3\sqrt[3]{I^2} < 1.$$

Условие (11.4) выполняется, если ток  $I > 5,45 \cdot 10^{-4}$  А.

Выберем начальное приближение  $I_0 = 0,012$  А. Применяя алгоритм (11.3), находим по (1) значения тока:

$$1) I = 0,012 - 0,02\sqrt[3]{0,012} = 0,0074 \text{ А};$$

$$2) I = 0,012 - 0,02\sqrt[3]{0,0074} = 0,0081 \text{ А};$$

$$3) I = 0,012 - 0,02\sqrt[3]{0,0081} = 0,0080 \text{ А}.$$

Последние два значения отличаются друг от друга менее чем на 2 %, поэтому итерационный процесс можно закончить.

Подставив полученное значение тока  $I$  в уравнения характеристик нелинейных элементов, определим напряжения  $U_1 = 10$  В;  $U_2 = 8$  В.

11.41. В схеме рис. 11.4 характеристики нелинейных элементов аппроксимированы уравнениями (ток в амперах, напряжения в вольтах):

$$I = 1,5 \cdot 10^{-3} U_1 + 2 \cdot 10^{-3} U_1^2;$$

$$I = 2,5 \cdot 10^{-3} U_2 + 1 \cdot 10^{-3} U_2^2;$$

ЭДС источника  $E = 3$  В.

Определить ток и напряжения на нелинейных элементах методом простой итерации.

11.42. В схеме рис. 11.13  $r_1 = r_2 = 8$  Ом; ЭДС источника  $E = 16$  В, характеристика нелинейного элемента задана уравнением (ток в амперах, напряжение в вольтах):  $U(I) = 2 \ln(I + 1)$ .

Определить ток нелинейного элемента методом простой итерации.

11.43. Методом простой итерации определить напряжение  $U$  и ток  $I$  нелинейного элемента, а также мощность источника

ЭДС  $E = 36$  В в схеме рис. 11.43. Задана характеристика нелинейного резистора:  $I = aU^2$ , где  $a = 2,5 \cdot 10^{-4}$  А/В<sup>2</sup>; сопротивления линейных резисторов указаны на схеме в омах.

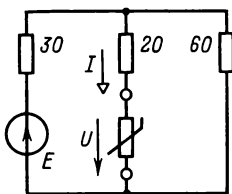


Рис. 11.43

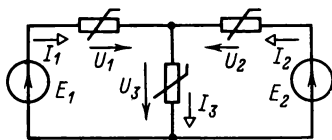


Рис. 11.44

**11.44 (Р).** На рис. 11.44 представлена схема нелинейной цепи, для которой заданы характеристики нелинейных элементов (токи в амперах, напряжения в вольтах):

$$I_1 = \sqrt[3]{0,01U_1}; \quad (1)$$

$$I_2 = \sqrt[3]{0,005U_2}; \quad (2)$$

$$I_3 = 0,01U_3^3; \quad (3)$$

ЭДС источников  $E_1 = 8$  В;  $E_2 = 7$  В.

Определить напряжения и токи нелинейных элементов методом простой итерации.

**Решение.** Запишем уравнения цепи по законам Кирхгофа:

$$U_1(I_1) = E_1 - U_3(I_3) = 8 - U_3(I_3); \quad (4)$$

$$U_2(I_2) = E_2 - U_3(I_3) = 7 - U_3(I_3); \quad (5)$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (6)$$

и выберем начальные значения напряжений:  $U_1 = 8$  В,  $U_2 = 7$  В.

1) На первом шаге вычислений, подставив начальные значения  $U_1$  и  $U_2$  в (1) и (2), определим токи  $I_1 = 0,431$  А;  $I_2 = 0,327$  А и по (6)  $I_3 = 0,758$  А. В соответствии с (3) напряжение  $U_3 = \sqrt[3]{100I_3} = 4,23$  В.

2) На втором шаге процесс вычислений повторяется. По (4) и (5) находим напряжения  $U_1 = 3,77$  В;  $U_2 = 2,77$  В. Затем по (1) и (2) определим токи  $I_1 = 0,335$  А;  $I_2 = 0,240$  А и по (6) и (3) ток и напряжение  $I_3 = 0,575$  А и  $U_3 = 3,86$  В.

Аналогично вычислим значения токов и напряжений на следующих шагах итерации: 3)  $U_1 = 4,14$  В;  $U_2 = 3,14$  В;  $I_1 = 0,346$  А;  $I_2 = 0,250$  А;  $I_3 = 0,596$  А;  $U_3 = 3,90$  В; 4)  $U_1 = 4,10$  В;  $U_2 = 3,10$  В;  $I_1 = 0,345$  А;  $I_2 = 0,250$  А;  $I_3 = 0,595$  А;  $U_3 = 3,90$  В.

Значения, полученные на третьем и четвертом шагах итерации, отличаются друг от друга менее чем на 2%; поэтому можно закончить вычислительный процесс и считать значения напряжений и токов, полученные на четвертом шаге итерации, ответом задачи.

**11.45.** Методом простой итерации определить в цепи рис. 11.45 токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и напряжения  $U_1$ ,  $U_2$ . Характеристики нелинейных резисторов заданы (токи в амперах, напряжения в вольтах):  $I_1 = \sqrt[3]{0,01U_1}$ ;  $I_2 = \sqrt[3]{0,005U_2}$ ; сопротивление линейного резистора  $r = 10$  Ом; ЭДС источников:  $E_1 = 11$  В;  $E_2 = 12$  В.

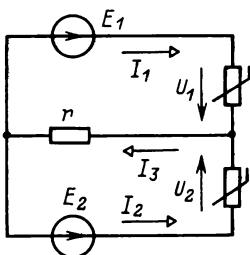


Рис. 11.45

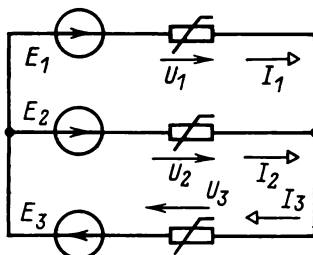


Рис. 11.46

**11.46.** Схема нелинейной цепи изображена на рис. 11.46. Методом простой итерации определить напряжения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  и токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , считая, что характеристики нелинейных элементов аппроксимированы зависимостями (токи в амперах, напряжения в вольтах)  $I_1 = \sqrt[3]{0,01U_1}$ ,  $I_2 = \sqrt[3]{0,005U_2}$ ,  $I_3 = 0,01U_3^3$  и известны ЭДС источников: а)  $E_1 = 6$  В;  $E_2 = 5$  В;  $E_3 = 2$  В или б)  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 9$  В;  $E_3 = -2$  В.

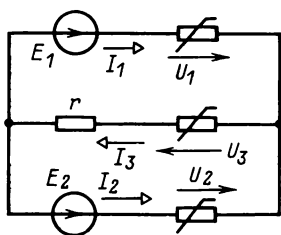


Рис. 11.47

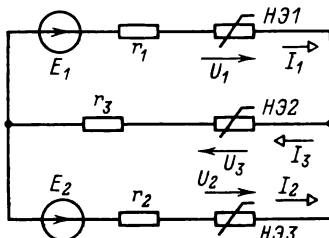


Рис. 11.48

**11.47.** В схеме рис. 11.47  $E_1 = 9$  В;  $E_2 = 14$  В,  $r = 3$  Ом; характеристики нелинейных элементов приведены в задаче 11.46.

Определить токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и напряжения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  методом простой итерации.

**11.48.** В схеме рис. 11.48  $E_1 = 8$  В;  $E_2 = 7$  В;  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 3,5$  Ом;  $r_3 = 2$  Ом; характеристики нелинейных элементов приведены в задаче 11.46.

Определить напряжения и токи нелинейных элементов методом простой итерации.

**11.49(Р).** Последовательно соединенные линейный резистор, сопротивление которого  $r = 10$  Ом, и нелинейный резистор с характеристикой  $U = aI^3$ , где  $a = 1000$  В/А<sup>3</sup>, присоединены к источнику ЭДС  $E = 10$  В (рис. 11.1).

Определить ток  $I$  и напряжение  $U$  на нелинейном элементе методом Ньютона, найти мощность  $P$  источника.

**Решение.** Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа

$$rI + U = E$$

или после подстановки численных значений

$$10 - 10I - 1000I^3 \equiv f(I) = 0.$$

Первая и вторая производные функции  $f(I)$ :

$$f'(I) = -10 - 3000I^2; f''(I) = -6000I.$$

Проверим условия сходимости по формулам (11.7). Подстановка значений производных в (11.7) дает всегда выполняемое неравенство  $I^2 \neq -1/3000$  и условие  $I \neq 0$ .

Начальное значение тока  $I_0$  определим из приближенного уравнения:  $10 - 10I_0 = 0$ , откуда  $I_0 = 1$  А.

Итерационный процесс проведем по формуле (11.6):

$$I_{k+1} = I_k - f(I_k)/f'(I_k).$$

Итерации:

$$1) I = 1 - \frac{10 - 10 - 1000}{-10 - 3000} = 0,67 \text{ А};$$

$$2) I = 0,67 - \frac{10 - 10 \cdot 0,67 - 1000 \cdot 0,67^3}{-10 - 3000 \cdot 0,67^2} = 0,45 \text{ А}.$$

Следующие шаги итерации выполняются аналогично.

Ответ:  $I = 0,2$  А;  $U = 8$  В;  $P = rI^2 + UI = 2$  Вт.

**11.50.** Параллельно соединенные линейный резистор, сопротивление которого  $r = 10$  Ом, и нелинейный резистор с характеристикой  $U = aI^3$ , где  $a = 1000$  В/А<sup>3</sup>, присоединены к источнику тока  $J = 1$  А (рис. 11.50).

Определить напряжение и ток нелинейного элемента методом Ньютона; вычислить мощность источника.

**11.51.** В схеме рис. 11.13  $E = 25$  В;  $r_1 = 50$  Ом;  $r_2 = 100$  Ом; характеристика нелинейного резистора аппроксимирована полиномом  $I = aU + bU^3$ , где  $a = 0,01$  А/В;  $b = 10^{-4}$  А/В<sup>3</sup>.

Определить методом Ньютона напряжение и ток нелинейного резистора, а также токи в линейных резисторах.

11.52. В схеме рис. 11.52 ток  $J = 0,7$  А;  $r_1 = 100$  Ом;  $r_2 = 20$  Ом; характеристика нелинейного резистора  $U = aI + bI^3$ , где  $a = 30$  В/А;  $b = 5000$  В/А<sup>3</sup>.

Определить напряжение на нелинейном элементе и токи  $I$ ,  $I_1$  методом Ньютона.

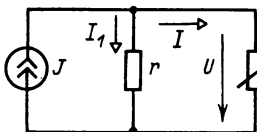


Рис. 11.50

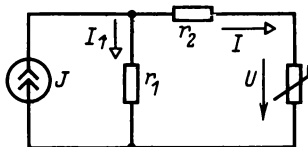


Рис. 11.52

11.53. В схеме рис. 11.53  $E = 15$  В;  $J = 0,5$  А;  $r_1 = 30$  Ом;  $r_2 = 15$  Ом; характеристика нелинейного элемента  $U = aI^3$ , где  $a = 1000$  В/А<sup>3</sup>.

Определить методом Ньютона напряжение и ток нелинейного элемента.

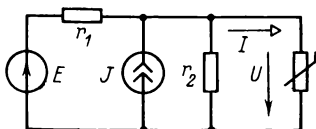


Рис. 11.53

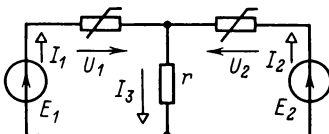


Рис. 11.54

11.54 (P). В схеме рис. 11.54  $r = 10$  Ом;  $E_1 = 15$  В;  $E_2 = 8$  В; характеристики нелинейных элементов аппроксимированы зависимостями (токи в амперах, напряжения в вольтах):  $U_1 = 20I_1 + 1000I_1^3$ ;  $U_2 = 30I_2 + 2000I_2^3$ .

Определить все токи и напряжения на нелинейных элементах методом Ньютона.

Решение. Запишем уравнения цепи по первому закону Кирхгофа

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (1)$$

и с учетом (1) по второму закону Кирхгофа

$$E_1 - U_1(I_1) - r(I_1 + I_2) \equiv f_1(I_1, I_2) = 0;$$

$$E_2 - U_2(I_2) - r(I_1 + I_2) \equiv f_2(I_1, I_2) = 0$$

или после подстановки числовых значений

$$15 - 30I_1 - 1000I_1^3 - 10I_2 \equiv f_1(I_1, I_2) = 0; \quad (2)$$

$$8 - 40I_2 - 2000I_2^3 - 10I_1 \equiv f_2(I_1, I_2) = 0. \quad (3)$$

Вычислим производные  $\partial f_1(I_1, I_2)/\partial I_1 = -30 - 3000I_1^2$ ;  $\partial f_1(I_1, I_2)/\partial I_2 = -10$ ;  $\partial f_2(I_1, I_2)/\partial I_1 = -10$ ;  $\partial f_2(I_1, I_2)/\partial I_2 = -40 - 6000I_2^2$ .

Решение задачи выполним по алгоритму (11.9), (11.10), где  $x = I_1$ ;  $y = I_2$ . Сходимость проверяем в процессе итераций.

Выберем начальные приближения по уравнениям (2) и (3), отбросив третий и четвертый члены:  $I_{10} = 0,5$  А;  $I_{20} = 0,2$  А.

Итерации: 1) вычислим по (2) и (3) функции  $f_1(I_{10}, I_{20}) = -127$ ;  $f_2(I_{10}, I_{20}) = -21$  и производные  $\partial f_1(I_{10}, I_{20})/\partial I_1 = -780$ ;  $\partial f_1(I_{10}, I_{20})/\partial I_2 = -10$ ;  $\partial f_2(I_{10}, I_{20})/\partial I_1 = -10$ ;  $\partial f_2(I_{10}, I_{20})/\partial I_2 = -280$ .

Якобиан (11.11) системы уравнений (2) и (3):

$$J(I_{10}, I_{20}) = \begin{vmatrix} -780 & -10 \\ -10 & -280 \end{vmatrix} = 2,18 \cdot 10^5.$$

Токи первого приближения по (11.9), (11.10):

$$I_{11} = 0,5 - \frac{\begin{vmatrix} -127 & -10 \\ -21 & -280 \end{vmatrix}}{2,18 \cdot 10^5} = 0,336 \text{ А};$$

$$I_{21} = 0,2 - \frac{\begin{vmatrix} -780 & -127 \\ -10 & -21 \end{vmatrix}}{2,18 \cdot 10^5} = 0,130 \text{ А}.$$

Далее процесс вычислений повторяется: 2)  $f_1(I_{11}, I_{21}) = -34,3$ ;  $f_2(I_{11}, I_{21}) = -5$ ;  $\partial f_1(I_{11}, I_{21})/\partial I_1 = -370$ ;  $\partial f_1(I_{11}, I_{21})/\partial I_2 = -10$ ;  $\partial f_2(I_{11}, I_{21})/\partial I_1 = -10$ ;  $\partial f_2(I_{11}, I_{21})/\partial I_2 = -142$ ;  $J(I_{11}, I_{21}) = 5,25 \cdot 10^4$ . Токи второго приближения  $I_{12} = 0,244$  А;  $I_{22} = 0,101$  А.

Следующие шаги итерации выполняются аналогично. В результате получим:  $I_1 = 0,2$  А;  $I_2 = 0,1$  А. По формуле (1) и характеристикам элементов находим:  $I_3 = 0,3$  А;  $U_1 = 12$  В;  $U_2 = 5$  В.

**11.55.** Методом Ньютона определить токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  на нелинейных элементах в цепи по рис. 11.55. ЭДС

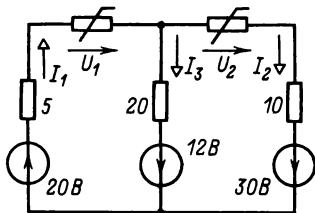


Рис. 11.55

источников и сопротивления линейных резисторов (в омах) указаны на схеме; заданы характеристики нелинейных элементов (токи в амперах, напряжения в вольтах):  $U_1 = 5I_1 + 1000I_1^3$ ;  $U_2 = 10I_2 + 2000I_2^3$ .

## Глава двенадцатая

### МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПОТОКАХ

#### Введение к гл. 12

Для участка магнитной цепи магнитная индукция

$$B = \Phi/S, \quad (12.1)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток;  $S$  — поперечное сечение участка; магнитное напряжение

$$U_m = Hl = \Phi R_m, \quad (12.2)$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля;  $l$  — средняя длина участка; магнитное сопротивление участка

$$R_m = l/\mu_r\mu_0 S, \quad (12.3)$$

где  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость материала участка;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  — магнитная постоянная, Гн/м.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля участка связаны соотношением

$$B = \mu_r\mu_0 H. \quad (12.4)$$

При расчете магнитных цепей при постоянных потоках зависимость между  $B$  и  $H$  для ферромагнитных участков задается кривой намагничивания (приложение 3). Для воздуха и для воздушных зазоров  $\mu_r = 1$ , следовательно,

$$H = B/\mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 B, \quad (12.5)$$

где  $H$  в амперах на метр, а  $B$  в теслах.

Если  $H$  измеряется в кратных единицах, А/см, то

$$H = 8 \cdot 10^3 B. \quad (12.6)$$

Магнитодвижущая сила (МДС)

$$F = Iw, \quad (12.7)$$

где  $I$  — ток в обмотке;  $w$  — число витков обмотки.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия:

#### Электрические цепи

Ток  $I$ , А  
ЭДС  $E$ , В  
Сопротивление  $r$ , Ом  
Проводимость  $g$ , См  
Напряжение  $U$ , В

#### Магнитные цепи

Поток  $\Phi$ , Вб  
МДС  $F$ , А  
Магнитное сопротивление  $R_m$ , 1/Гн  
Магнитная проводимость  $g_m$ , Гн  
Магнитное напряжение  $U_m$ , А

Эта формальная аналогия распространяется и на методы расчета магнитных цепей.

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи

$$\sum \Phi = 0 \quad (12.8)$$

и второй закон

$$\sum F = \sum U_m = \sum Hl = \sum \Phi R_m. \quad (12.9)$$

В большинстве случаев магнитные цепи — нелинейные, и их расчет аналогичен расчету нелинейных электрических цепей.

Аналогом вольт-амперной характеристики  $U(I)$  является вебер-амперная характеристика  $\Phi(U_m)$ , которая рассчитывается по заданным кривым намагничивания  $B(H)$  и геометрическим размерам участков магнитной цепи.

Вебер-амперная характеристика (часто называют магнитной характеристикой) рассчитывается в следующем порядке: задают индукцию  $B$ , вычисляют поток  $\Phi = BS$ , по кривой  $B(H)$  определяют  $H$  и находят  $U_m = Hl$ .

В слабых полях  $\mu_r \approx \text{const}$ , следовательно, и  $R_m = \text{const}$ , поэтому магнитная цепь рассчитывается как линейная.

Для наглядности можно составить эквивалентную электрическую схему (см. рис. 12.15Р), при помощи которой выполняется расчет.

## 12.1. Линейная магнитная цепь

**12.1(Р).** П-образный магнитопровод прямоугольного поперечного сечения замкнут ярком, имеющим такое же сечение  $S = 0,25 \text{ см}^2$ , но вдвое меньшую проницаемость (рис. 12.1). Средняя длина магнитных линий в магнитопроводе  $l_1 = 4 \text{ см}$ , в ярке  $l_2 = 0,9 \text{ см}$ , в каждом разделяющем их воздушном зазоре  $l_b = 0,02 \text{ мм}$ . Относительная магнитная проницаемость материала магнитопровода  $\mu_{1r} = 500$ .

Определить МДС обмотки, при которой индукция в магнитной цепи  $B = 0,02 \text{ Тл}$ . Вычислить магнитное сопротивление цепи.

**Решение.** Так как задано  $\mu_r = \text{const}$ , то цепь считаем линейной. Магнитное сопротивление цепи равно сумме магнитных сопротивлений участков (12.3):

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{l_1}{\mu_{1r}\mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_{2r}\mu_0 S} + \frac{2l_b}{\mu_0 S} = \frac{1}{\mu_0 S} \left( \frac{l_1}{\mu_{1r}} + \frac{l_2}{\mu_{2r}} + 2l_b \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 0,25} \left( \frac{4}{500} + \frac{0,9}{250} + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \right) = 4,95 \cdot 10^6 \text{ 1/Гн}. \end{aligned}$$



По закону Ома для магнитной цепи

$$F = Iw = \Phi R_m = BSR_m = 2,48 \text{ A.}$$

**12.2.** Магнитопровод состоит из двух П-образных частей (рис. 12.2), разделенных двумя зазорами длиной  $l_b = 0,4 \text{ мм}$  каждый. Средняя длина магнитных линий в ферромагнетике 8 см, сечение магнитопровода  $0,25 \text{ см}^2$ . Относительная магнитная проницаемость материала  $\mu_r = 200$ .

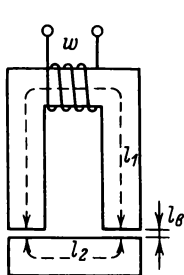


Рис. 12.1

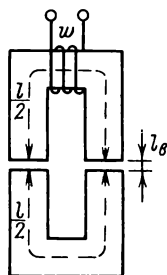


Рис. 12.2

Рассчитать магнитное сопротивление магнитной цепи и его изменение при увеличении и уменьшении длины воздушного зазора на 50 %.

Выразить магнитный поток, который сцеплен с обмоткой, охватывающей магнитопровод, через число ее витков и ток, пользуясь понятием магнитного сопротивления.

**12.3.** Дужка из пермаллоя (рис. 12.3), выполненная в виде полуокружности радиуса  $R = 1,25 \text{ см}$ , имеет равномерно распределенную обмотку с числом витков  $w = 250$  и расположена над плоской поверхностью продольно намагниченного тела. Каждый воздушный зазор между поверхностями тела и краями дужки равен  $0,1 \text{ мм}$ .

Напряженность поля  $H$  намагниченного тела параллельна его поверхности и равна  $4 \text{ А/см}$ .

Определить, при каком токе в обмотке дужки магнитный поток внутри нее равен нулю.

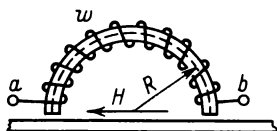


Рис. 12.3

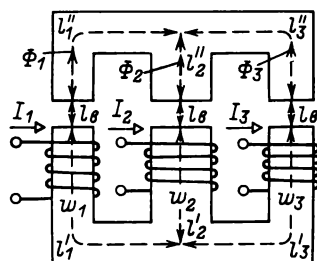


Рис. 12.4

**12.4.** Магнитопровод собран из двух Ш-образных частей, разделенных воздушными зазорами. Обмотки с токами, направления которых показаны на рис. 12.4, расположены на всех трех стержнях.

Расчетные длины участков магнитной цепи  $l_1 = l'_1 + l''_1 = l_3 = l'_3 + l''_3 = 9,0$  см;  $l_2 = l'_2 + l''_2 = 4,4$  см;  $l_b = 0,01$  см (каждый); расчетные сечения участков:  $S_1 = S_3 = S_2/2 = 1,6$  см<sup>2</sup>.

Относительная магнитная проницаемость ферромагнетика в области слабых полей, на которые и рассчитана система, постоянна и равна 1000.

Найти потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , если МДС и токи в обмотках равны:

- а)  $I_2 w_2 = 1$  А;  $I_1 = I_3 = 0$ .
- б)  $I_1 w_1 = 1$  А;  $I_2 = I_3 = 0$ .
- в)  $I_1 w_1 = 1$  А;  $I_2 = 0$ ;  $I_3 w_3 = +0,5$  А.
- г)  $I_1 w_1 = -0,5$  А;  $I_2 w_2 = 1$  А;  $I_3 = 0$ .

12.5. Определить изменение потока  $\Phi_2$  в магнитопроводе предыдущей задачи при увеличении в 2 раза каждого воздушного зазора при следующих значениях проницаемости: а)  $\mu_r = 1000$ ; б)  $\mu_r = 50$ ; в)  $\mu_r = 10\,000$ .

## 12.2. Нелинейная магнитная цепь без гистерезиса

12.6. На рис. 12.6, а изображена симметричная магнитная система, выполненная из электротехнической стали 1211. Внешняя часть магнитной цепи (включая крайние стержни) имеет по всей длине постоянное поперечное сечение. Сечение среднего стержня в 2 раза больше сечения крайних стержней и равно 8 см<sup>2</sup>. В среднем участке магнитной цепи индукция равна 1,2 Тл, если в каждой из катушек, содержащих по 100 витков, проходит ток 2,5 А.

Определить магнитный поток в среднем стержне, если при том же токе обе катушки расположить на среднем стержне (рис. 12.6, б).

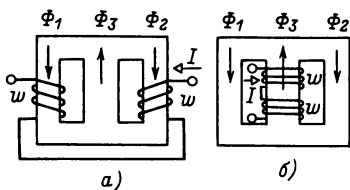


Рис. 12.6

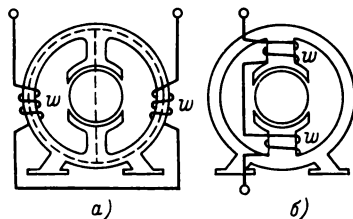


Рис. 12.7

12.7. На рис. 12.7 схематически изображены две магнитные системы машин постоянного тока. Соответствующие участки этих систем выполнены из одного и того же ферромагнитного материала и имеют одинаковые геометрические размеры.

Определить, при каком расположении катушек требуется для создания одинаковых магнитных потоков в воздушных зазорах меньше витков при равных токах.

12.8. Для ферромагнитного тороида с воздушным зазором длиной  $l_{\text{в}} = 0,2$  мм и средней длиной ферромагнитного материала  $l_{\text{ф}} = 30$  см на баллистической установке снята зависимость  $B = f(Iw/l)$ , представленная в табл. 12.8, где  $l = l_{\text{ф}} + l_{\text{в}}$ .

Таблица 12.8

$Iw/l$ , А/см	5	10	13	17	20	24	30	40	50	60
$B$ , Тл	0,4	0,8	1	1,2	1,29	1,4	1,48	1,56	1,59	1,6

Рассчитать зависимость  $B(H)$  для ферромагнитного материала.

12.9. Два магнитопровода из стали 1512 (рис. 12.9) имеют общую обмотку. Магнитный поток в воздушном зазоре второго магнитопровода равен  $6,36 \cdot 10^{-4}$  Вб. Поперечное сечение каждого магнитопровода постоянно по всей длине и равно  $6 \text{ см}^2$ . Средние длины участков  $l_1 = l_2 + l_{2\text{в}} = 60$  см и  $l_{2\text{в}} = 0,11$  см.

Определить поток в первом магнитопроводе.

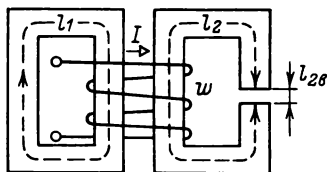
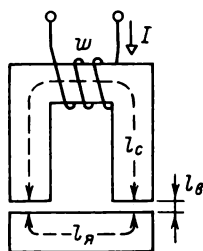


Рис. 12.9

Рис. 12.10 →



12.10. В воздушном зазоре электромагнита, выполненного из стали 1411 (рис. 12.10), необходимо создать индукцию  $B = 1,05$  Тл.

Определить МДС, необходимую для создания магнитного потока с заданной индукцией, если  $l_{\text{с}} + l_{\text{н}} = 100$  см, суммарный воздушный зазор  $2l_{\text{в}} = 1$  мм, сечение магнитопровода одинаково по всей длине электромагнита и равно  $16 \text{ см}^2$ .

12.11. У электромагнита предыдущей задачи МДС равна 3000 А.

Найти магнитный поток в магнитопроводе.

**12.12(Р).** Магнитная цепь, изображенная на рис. 12.12, выполнена из электротехнической стали 1211 и имеет следующие размеры:  $l_1 = 60$  см;  $l_2 = 20$  см;  $l_b = 0,1$  см;  $l_3 = 80$  см;  $S_1 = S_2 = S_3 = 10$  см<sup>2</sup>. Магнитные потоки в крайних стержнях  $\Phi_1 = 0,25 \cdot 10^{-3}$  Вб и  $\Phi_3 = 1,31 \cdot 10^{-3}$  Вб.

Найти МДС  $F_1 = I_1 w_1$  и  $F_3 = I_3 w_3$ ; указать направления токов в обмотках.

**Решение.** По первому закону Кирхгофа для магнитной цепи

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Индукция в стержнях

$$B_1 = \Phi_1 / S_1 = 0,25 \text{ Тл; } B_2 = \Phi_2 / S_2 = 1,56 \text{ Тл;}$$

$$B_3 = \Phi_3 / S_3 = 1,31 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания для стали 1211 (см. приложение 3) находим:  $H_1 = 0,6$  А/см;  $H_2 = 20$  А/см;  $H_3 = 6$  А/см. По второму закону Кирхгофа определяем МДС:

$$F_1 = I_1 w_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_b l_b \approx 1680 \text{ А;}$$

$$F_3 = I_3 w_3 = H_3 l_3 + H_2 l_2 + H_b l_b \approx 2130 \text{ А,}$$

где напряженность поля в воздухе вычислена по (12.6).

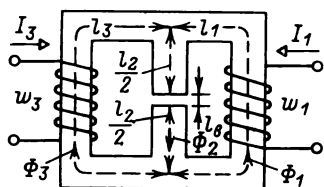


Рис. 12.12

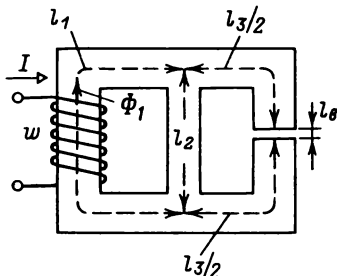


Рис. 12.14 →

**12.13.** Для магнитной цепи задачи 12.12 определить МДС  $F_1$  и  $F_3$  при обратном направлении потока  $\Phi_3$ .

**12.14.** Магнитная цепь (рис. 12.14) выполнена из электротехнической стали 1561 и имеет следующие размеры:  $l_1 = 40$  см;  $l_2 = 12$  см;  $l_3 = 30$  см;  $S_1 = S_3 = 4$  см<sup>2</sup>;  $S_2 = 2$  см<sup>2</sup>. Магнитодвижущая сила  $F = 1800$  А, поток в первом стержне  $\Phi_1 = 5,94 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Определить длину воздушного зазора  $l_b$ .

**12.15(Р).** Магнитопровод (рис. 12.15) выполнен из электротехнической стали 1512 и имеет следующие размеры:  $l_1 =$

$= 30 \text{ см}; l_2 = 12 \text{ см}; l_3 = 30 \text{ см}; S_1 = S_2 = S_3 = 15 \text{ см}^2; F_1 = I_1 w_1 = 100 \text{ А}; F_2 = I_2 w_2 = 470 \text{ А}.$

Определить магнитную индукцию в каждом стержне.

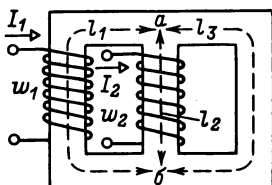


Рис. 12.15

Решение. Выберем положительные направления потоков: в левом и среднем стержнях — вверх, в правом — вниз — и составим эквивалентную схему (рис. 12.15Р, а).

Магнитные напряжения на участках запишем на основании второго закона Кирхгофа для магнитной цепи:

$$U_{\text{маб}} = F_1 - U_{\text{м1}}; \quad (1)$$

$$U_{\text{маб}} = F_2 - U_{\text{м2}}; \quad (2)$$

$$U_{\text{маб}} = U_{\text{м3}}, \quad (3)$$

где  $F_1 = I_1 w_1; F_2 = I_2 w_2; U_{\text{м1}} = H_1 l_1; U_{\text{м2}} = H_2 l_2; U_{\text{м3}} = H_3 l_3.$

По первому закону Кирхгофа

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3. \quad (4)$$

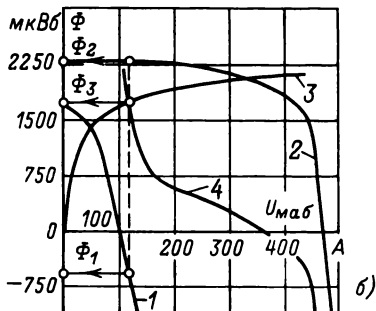
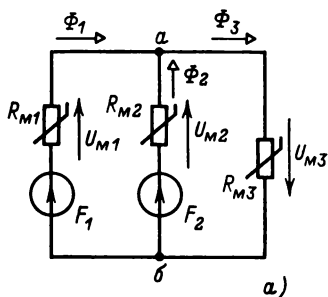


Рис. 12.15Р

### Аналитическое решение

Аналитически задача может быть решена, например, итерационным методом. Для схемы (рис. 12.15Р, а) с двумя узлами запишем расчетную формулу

$$U_{\text{маб}}(s+1) = \frac{F_1 g_{\text{м1}}(s) + F_2 g_{\text{м2}}(s)}{g_{\text{м1}}(s) + g_{\text{м2}}(s) + g_{\text{м3}}(s)} = U_{\text{м3}}(s+1), \quad (5)$$

где магнитные проводимости соответствующих участков маг-

Таблица 12.15а

$s$	$U_{м,аб}, A$	$H_3, A/см$	$B_3, Тл$	$\Phi_3 \cdot 10^{-4}, Вб$	$g_{м3} \cdot 10^{-4}, Гн$	$U_{м1}, A$
0	150	5	1,2	18	0,12	-50
1	130,36	4,35	1,175	17,625	0,135	-30,36
2	120	4,0	1,16	17,4	0,145	-20
3	115,9	3,86	1,15	17,25	0,149	-15,9
4	114,7	3,83	1,15	17,25	0,150	-14,7
5	114,1	3,8	1,15	17,25	0,151	-14,1
6	114,1	Итерация закончена				

$s$	$H_1, A/см$	$B_1, Тл$	$\Phi_1 \cdot 10^{-4}, Вб$	$g_{м1} \cdot 10^{-4}, Гн$	$U_{м2}, A$
0	-1,66	-0,93	-13,95	0,279	320
1	-1,01	-0,725	-10,875	0,358	339,6
2	-0,67	-0,55	-8,25	0,412	350
3	-0,53	-0,43	-6,45	0,406	354,1
4	-0,49	-0,42	-6,3	0,429	355,3
5	-0,47	-0,38	-5,7	0,404	355,9
6	Итерация закончена				

$s$	$H_2, A/см$	$B_2, Тл$	$\Phi_2 \cdot 10^{-4}, Вб$	$g_{м2} \cdot 10^{-4}, Гн$	$U_{м,аб(s+1)}, A$
0	26,66	1,52	22,8	0,071	130,36
1	28,3	1,525	22,875	0,067	120
2	29,16	1,53	22,95	0,066	115,9
3	29,5	1,53	22,95	0,065	114,7
4	29,6	1,53	22,95	0,065	114,1
5	29,65	1,53	22,95	0,0645	114,1
6	Итерация закончена				

нитной цепи определяются по формулам  $g_{м1(s)} = \Phi_1(s)/U_{м1(s)}$ ;  $g_{м2(s)} = \Phi_2(s)/U_{м2(s)}$ ;  $g_{м3(s)} = \Phi_3(s)/U_{м3(s)}$ , а индекс  $s$  соответствует номеру приближения.

Расчет ведем в следующей последовательности. Задаемся (нулевое приближение)  $U_{м,аб(0)}$ , вычисляем  $H_{3(0)} = U_{м,аб(0)}/l_3$ , по кривой  $B(H)$  находим  $B_{3(0)}$ , подсчитываем  $\Phi_{3(0)} = B_{3(0)}S_3$  и определяем  $g_{м3(0)} = \Phi_{3(0)}/U_{м3(0)}$ . Из (1) и (2) находим  $U_{м1(0)}$  и  $U_{м2(0)}$  и подобно предыдущему определяем  $g_{м1(0)}$  и  $g_{м2(0)}$ , по (5) подсчитываем значение  $U_{м,аб(1)}$  для следующего приближения и т. д.

Результаты расчета сведены в табл. 12.15а.

Т а б л и ц а 12.156

$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$ , мВб	0	1,095	1,50	1,875
$B_1 = B_2 = B_3$ , Тл	0	0,73	1,0	1,25
$H_1 = H_2 = H_3$ , А/см	0	1,0	2,0	6,0
$U_{M1} = U_{M3}$ , А	0	30	60	180
$U_{M2}$ , А	0	12	24	72

$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$ , мВб	1,98	2,06	2,10	2,16	2,25
$B_1 = B_2 = B_3$ , Тл	1,32	1,36	1,4	1,44	1,5
$H_1 = H_2 = H_3$ , А/см	8,0	10	12	14	20
$U_{M1} = U_{M3}$ , А	240	300	360	420	600
$U_{M2}$ , А	96	120	144	168	240

### Графическое решение

Для графического решения задачи рассчитаем магнитные (вебер-амперные) характеристики участков  $\Phi_m (U_m)$ . Задав поток  $\Phi$ , определим индукцию  $B = \Phi/S$  по кривой намагничивания (приложение 3) найдем  $H$  и вычислим  $U_m = Hl$  (табл. 12.156).

По уравнениям (1)–(3) строим зависимости  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  от  $U_{m\text{ об}}$  (кривые 1, 2, 3 рис. 12.15Р, б). Согласно уравнению (4) складываем ординаты кривых 1 и 2, получаем суммарную кривую 4. Точка пересечения кривых 3 и 4 дает решение системы уравнений (1)–(4):  $\Phi_1 = -0,57$  мВб;  $\Phi_2 = 2,3$  мВб;  $\Phi_3 = 1,73$  мВб. Соответственно индукции  $B_1 = -0,38$  Тл;  $B_2 = 1,53$  Тл;  $B_3 = 1,15$  Тл. Отрицательные знаки у  $\Phi_1$  и  $B_1$  показывают, что действительное направление потока  $\Phi_1$  обратно выбранному.

**12.16.** На рис. 12.16 изображен магнитопровод толщиной 100 мм, выполненный из стали 1411. Остальные размеры

указаны в миллиметрах на рисунке. Число витков каждой обмотки  $w = 500$ , токи в обмотках  $I_1 = 10$  А;  $I_2 = 1,6$  А.

Определить магнитную индукцию в тех стержнях, на которых находятся обмотки.

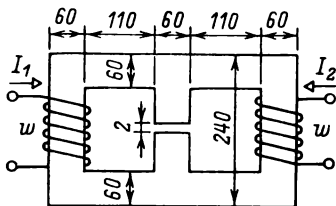


Рис. 12.16

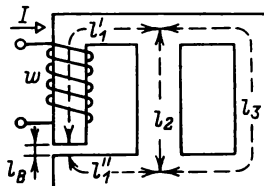


Рис. 12.17

**12.17.** Во втором стержне магнитной системы (рис. 12.17), выполненной из электротехнической стали 1211, индукция равна 0,8 Тл. Магнитопровод имеет следующие размеры:  $l'_1 = 20$  см;  $l''_1 = 10$  см;  $l_B = 0,1$  см;  $l_2 = 15$  см;  $l_3 = 30$  см;  $S_1 = S_3 = 4$  см<sup>2</sup>;  $S_2 = 6$  см<sup>2</sup>.

Определить ток в обмотке с числом витков  $w = 200$ .

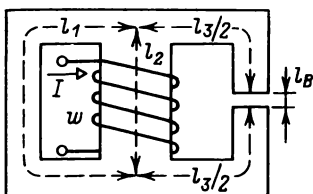


Рис. 12.18

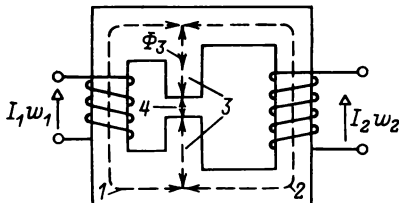




Таблица 12.19

№ участка	Материал	$S$ , см <sup>2</sup>	$l$ , см	№ участка	Материал	$S$ , см <sup>2</sup>	$l$ , см
1	Сталь 1512	20	26,0	3	Сталь 1211	10	8,5
2	Сталь 1411	8	50,0	4	Воздух	10	0,135

**12.20.** Для магнитной цепи (рис. 12.19) известны:  $I_1 w_1 = 1580$  А и  $\Phi_2 = 1,1$  мВб (направлен вниз), материалы участков и размеры указаны в табл. 12.19.

Определить  $F_2 = I_2 w_2$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_3$ .

### 12.3. Расчет магнитной цепи с учетом гистерезиса. Постоянные магниты

**12.21.** Тороид с круглым сечением изготовлен из магнитотвердой стали, магнитная характеристика которой, имеющая форму петли, задана (табл. 12.21).

Построить петлю гистерезиса, выражающую зависимость индукции от тока в обмотке для тороида, в котором сделан воздушный зазор 0,5 мм. Средняя длина тороида 25 см, число витков равно 100. При расчете считать, что средняя длина тороида значительно превышает диаметр его сечения.

Таблица 12.21

$B$ , Тл	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
$H$ , А/см	77	78	84,5	92,5	115	175

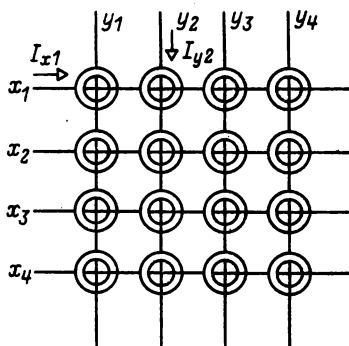
  

$B$ , Тл	1,50	1,25	1,00	0,75	0,50	0,25	0
$H$ , А/см	369	92,5	0,0	-54	-61,5	-70	-77

**12.22.** Ячейка (матрица) магнитного запоминающего устройства (рис. 12.22) состоит из 16 кольцевых ферритовых тороидов размерами  $D \times d \times h = 3,1 \times 2,0 \times 1,3$  мм (наружный и внутренний диаметры, высота). Характеристика феррита прямоугольная с индукцией насыщения  $B_s = 0,3$  Тл и коэрцитивной силой  $H_c = 1,6$  А/см.

Через каждый тороид проходит два провода, один из которых принадлежит ряду  $x$  ( $I_{x1}, I_{x2} \dots$ ), другой — ряду  $y$  ( $I_{y1}, I_{y2} \dots$ ). В исходном положении все тороиды имели отрицательную остаточную индукцию  $-B_r$ .

Определить: а) как изменится магнитное состояние тороидов (и каких именно) после включения токов  $I_{y1} = I_{y3} = I_{x2} = I_{x3} = 0,85$  А;  $I_{y2} = I_{y4} = I_{x1} = I_{x4} = 0$ ; б) как изменятся магнитные состояния тороидов, если при новом состоянии включить токи  $I_{y1} = I_{y4} = I_{x1} = I_{x3} = -0,85$  А;  $I_{y2} = I_{y3} = I_{x2} = I_{x4} = 0$ .



← Рис. 12.22

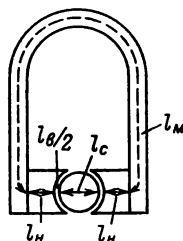


Рис. 12.23

**12.23.** Определить магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной системы гальванометра (рис. 12.23) в случае, когда эта система была намагничена до насыщения в собранном виде. Магнитным рассеянием, а также магнитным сопротивлением сердечника  $C$  и наконечников  $H$  пренебречь. Расчетная длина и сечение магнита и воздушных зазоров:  $l_m = 24$  см,  $S_m = 3$  см<sup>2</sup>;  $l_b = 2 \cdot 0,6 = 1,2$  см;  $S_b = 7,5$  см<sup>2</sup>. Кривая размагничивания кобальтовой стали (из которой изготовлен магнит) задана (табл. 12.23).

Таблица 12.23

$B$ , Тл	0	0,28	0,54	0,70	0,90
$H$ , А/см	−190	−160	−120	−80	0

**12.24.** Для магнитной цепи предыдущей задачи определить магнитную индукцию в воздушном зазоре, если намагничивание до насыщения производилось при вынутом цилиндрическом

сердечнике, после чего сердечник был вновь помещен между полюсами. Расчетную длину воздушного промежутка при вынутом сердечнике принять равной 3,25 см, кривую возврата считать прямой с наклоном  $12,5 \cdot 10^{-4}$  Тл/(А/см).

## Глава тринадцатая

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### Введение к гл. 13

Установившиеся процессы в нелинейных цепях переменного тока рассчитываются графическими, аналитическими и графо-аналитическими методами. Численные методы, применяемые при расчете установившихся процессов в цепях переменного тока и при расчете переходных процессов в нелинейных цепях (гл. 14), по существу одни и те же.

Графические и графо-аналитические методы целесообразно применять для решения задач, в которых характеристики нелинейных элементов могут быть приближенно представлены в виде кусочно-линейных функций. При этом на каждом из линейных участков характеристики задача решается как линейная, и определяются координаты точек перехода с одного линейного участка на другой (углы отсечки).

Применение аналитических методов расчета требует аппроксимации характеристики нелинейного элемента какой-либо достаточно простой функцией — чаще всего полиномом. Простейший аналитический метод состоит в непосредственном решении уравнения цепи (когда это возможно). Широко применяются метод гармонического баланса, метод гармонической линеаризации, а также итерационный метод.

При решении задачи *методом гармонического баланса* искомая величина представляется в виде периодической функции с неизвестными коэффициентами и подставляется в уравнение цепи. Неизвестные определяются приравнованием коэффициентов при одинаковых гармонических составляющих в левой и правой частях уравнения.

Сущность *метода гармонической линеаризации* заключается в том, что при воздействии на нелинейный элемент гармонического сигнала в отклике учитывается только основная гармоника, а высшие гармоники отбрасываются, и для расчета можно применять комплексный метод. Нелинейный элемент характеризуется нелинейным комплексным сопротивлением —

отношением комплексов первых гармоник напряжения и тока нелинейного элемента, причем в общем случае нелинейное комплексное сопротивление зависит от амплитуды и частоты тока. Например, при вольт-амперной характеристике нелинейного резистора

$$u(i) = ai + bi^3 \quad (13.1)$$

нелинейное комплексное сопротивление (активное)

$$\underline{Z}_n = R_n = a + \frac{3}{4} b I_m^2 \quad (13.2)$$

где  $I_m$  — амплитуда синусоидального тока. После определения сопротивления нелинейного элемента уравнения цепи решаются алгебраическими методами.

*Итерационный метод* применяется для решения задачи, если уравнения цепи имеют достаточно малые члены, которыми в первом приближении можно пренебречь. Уравнение цепи относительно неизвестного  $x(t)$

$$f(x, dx/dt, d^2x/dt^2, \dots) = 0 \quad (13.3)$$

предварительно разделяется на две части, причем в правую часть выносятся достаточно малые члены:

$$f_1(x, dx/dt, \dots) = \varepsilon f_2(x, dx/dt, \dots), \quad (13.4)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Нулевое приближение  $x_0(t)$  находится решением уравнения, в котором отброшены малые члены (параметр  $\varepsilon$  принят равным нулю):

$$f_1(x, dx/dt, \dots) = 0. \quad (13.5)$$

Полученное решение  $x_0(t)$  подставляется в правую часть уравнения (13.4), отбрасываются члены второго порядка малости (если они есть), и находится решение  $x(t)$  уравнения

$$f_1(x, dx/dt, \dots) = \varepsilon f_2(x_0, dx_0/dt, \dots), \quad (13.6)$$

которое является уточненным решением — первым приближением. Для получения дальнейших, более точных приближений процедуру следует повторить. В задачах данной главы достаточно ограничиться получением первого приближения.

*Расчет нелинейных цепей переменного тока по действующим значениям токов и напряжений* дает возможность приближенно учесть гистерезис и вихревые токи в магнитопроводах. Несинусоидальные токи и напряжения заменяются эквивалентными синусоидами. Потери на гистерезис и вихревые токи определяются по экспериментальным данным — либо непосредственно по показаниям ваттметра, либо по экспериментально полученным кривым удельных потерь в стали (кривые приве-

дены в задаче 13.40). Для эквивалентных синусоид тока и напряжения уравнения цепи можно записать и решать в комплексной форме и пользоваться векторными диаграммами.

При известном амплитудном значении потока в магнитопроводе  $\Phi_m$  действующее значение соответствующего напряжения рассчитывается по формуле

$$\dot{U}_\Phi = j4,44fw\Phi_m \quad (13.7)$$

где  $f$  — частота;  $w$  — число витков.

В ряде задач настоящей главы для определения искомых величин нужно решить кубическое уравнение. Уравнение

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \quad (13.8)$$

имеет один действительный корень

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}. \quad (13.9)$$

Уравнение

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad (13.10)$$

введением новой переменной

$$x = y + a/3 \quad (13.11)$$

приводится к виду (13.8), где

$$2q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c; \quad 3p = b - \frac{1}{3}a^2. \quad (13.12)$$

**Примечание.** При решении задач § 13.1 и 13.2 потерями в реактивных элементах следует пренебречь.

### 13.1. Графические и графо-аналитические методы расчета

**13.1(Р).** Резистор с сопротивлением  $r = 1$  кОм подключен к источнику синусоидальной ЭДС  $e = 150 \sin \omega t$ , В (рис. 13.1, а) через диод  $D$ , вольт-амперная характеристика которого дана на рис. 13.1, б.

Построить график тока  $i(t)$ , определить среднее  $I_0$  и действующее  $I$  значения тока в цепи; найти мощность  $P$  источника и мощность  $P_r$  потерь в резисторе.

**Решение.** При расчете диод может быть представлен резистором, эквивалентное сопротивление  $r_{эк}$  которого различно при прямом и обратном направлении тока. Эквивалентная схема цепи приведена на рис. 13.1Р, а.

Эквивалентное сопротивление диода определяется по характеристике рис. 13.1, б и равно в прямом направлении

$100/0,2 = 500$  Ом и в обратном направлении  $200/0,05 = 4000$  Ом. Ток в цепи в прямом  $i_1$  и обратном  $i_2$  направлениях представляет собой отрезки синусоид, амплитуды которых  $I_m = E_m/(r + r_{эк})$  и равны соответственно 0,1 А в прямом и 0,03 А в обратном направлении. Зависимость  $i(t)$  показана на рис. 13.1Р, б.

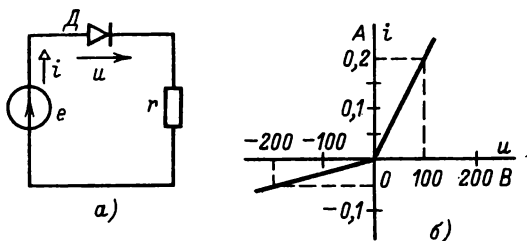


Рис. 13.1

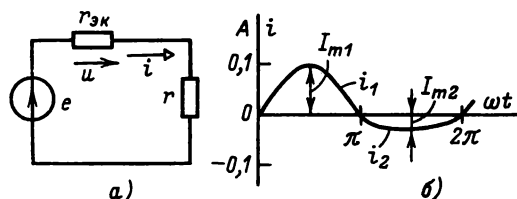


Рис. 13.1Р

Среднее значение тока  $I_0 = I_{01} - I_{02}$ , где  $I_{01} = I_{m1}/\pi$ :  $I_{02} = I_{m2}/\pi$ . Таким образом,  $I_0 = (0,1 - 0,03)/\pi = 0,0222$  А.

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi I_{m1}^2 \sin^2 \omega t d\omega t + \int_\pi^{2\pi} I_{m2}^2 \sin^2 \omega t d\omega t \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0,1^2 + 0,03^2} = 0,052 \text{ А.}$$

Мощность источника

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ei d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi ei_1 d\omega t + \int_\pi^{2\pi} ei_2 d\omega t \right) =$$

$$= \frac{E_m}{4} (I_{m1} + I_{m2}) = \frac{150}{4} (0,1 + 0,03) = 4,9 \text{ Вт.}$$

Мощность потерь в резисторе

$$P_r = rI^2 = 1000 \cdot 0,052^2 = 2,7 \text{ Вт.}$$

**Примечание.** Мощность источника нельзя определить как произведение действующих значений напряжения и тока, поскольку ток несинусоидален.

**13.2.** На входе цепи, состоящей из резистора с сопротивлением  $r = 1 \text{ кОм}$  и идеального диода (рис. 13.2), напряжение  $u = 200 \sin \omega t, \text{ В}$ .

Определить среднее и действующее значения тока и мощность потерь в резисторе.

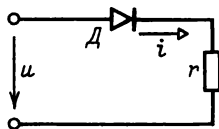


Рис. 13.2

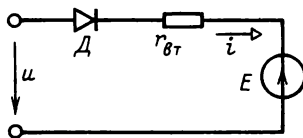


Рис. 13.3

**13.3.** Аккумуляторная батарея, ЭДС которой  $E = 12 \text{ В}$  и внутреннее сопротивление  $r_{вт} = 6 \text{ Ом}$ , подключена через идеальный диод к источнику синусоидального напряжения с амплитудой  $24 \text{ В}$  (рис. 13.3).

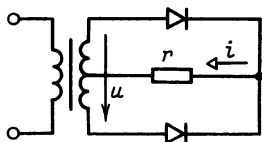


Рис. 13.4

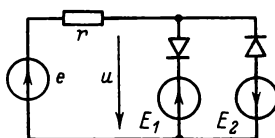


Рис. 13.6

Определить максимальное и среднее значения тока и максимальное обратное напряжение на диоде.

**13.4.** У выпрямителя, собранного по схеме со средней точкой (рис. 13.4), сопротивление нагрузки  $r = 1 \text{ кОм}$ . Диоды можно считать идеальными. Напряжение  $u$  на вторичной обмотке трансформатора синусоидальное с амплитудой  $400 \text{ В}$ .

Определить постоянную составляющую тока в резисторе  $r$ , мощность потерь в резисторе и максимальное обратное напряжение на диоде.

**13.5.** У выпрямителя, собранного по мостовой схеме с диодами, которые можно считать идеальными, сопротивление нагрузки – резистор с  $r = 180 \text{ Ом}$ .

Определить действующее и среднее значения тока в сопротивлении нагрузки, мощность потерь в резисторе, максималь-

ное обратное напряжение и среднее значение тока диода. Цепь питается от источника синусоидального напряжения, действующее значение которого 380 В.

13.6. Для цепи, схема которой приведена на рис. 13.6, заданы сопротивление  $r = 100$  Ом и ЭДС  $e = 20 \sin 1000t$ , В;  $E_1 = 5$  В;  $E_2 = 10$  В. Диоды идеальные.

Определить длительность фронтов положительного и отрицательного импульсов напряжения  $u$ .

13.7. В цепи по рис. 13.7 известны сопротивления резисторов:  $r_1 = 100$  Ом;  $r_2 = 400$  Ом и ЭДС источников  $e = 100 \sin 1000t$ , В;  $E = 20$  В. Диоды идеальные.

Определить длительность фронтов импульсов напряжения  $u$ .

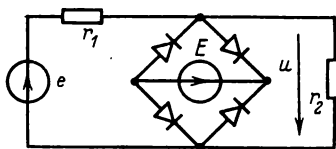


Рис. 13.7

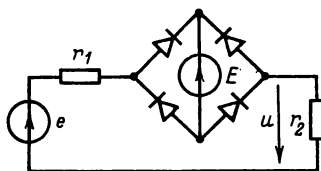


Рис. 13.8

13.8. Параметры элементов цепи по рис. 13.8 указаны в задаче 13.7.

Построить график напряжения  $u(t)$  на резисторе  $r_2$ .

13.9(Р). Выпрямитель, собранный по трехфазной мостовой схеме (рис. 13.9) с сопротивлением нагрузки  $r = 20$  Ом — резистором, получает питание от источника трехфазного напряжения. Диоды можно считать идеальными. Действующее значение линейного напряжения  $U_{\text{л}} = 380$  В.

Определить среднее и действующее значения тока резистора, мощность потерь в резисторе, а также средний ток и максимальное обратное напряжение диода.

Решение. На рис. 13.9Р, а и б показаны линейные и фазные напряжения цепи.

Ток резистора идет через те фазы, напряжение между которыми в данный момент наибольшее. График тока представлен на рис. 13.9Р, в. Максимальное значение тока

$$I_m = U_{\text{л}m}/r = 380\sqrt{2}/20 = 27 \text{ А.}$$

Среднее значение тока резистора определяется из рис. 13.9Р, в:

$$I_0 = \frac{1}{\pi/3} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} I_m \sin \omega t d\omega t = 3I_m/\pi = 25,8 \text{ А.}$$



Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{\pi/3} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} I_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = 0,958 I_m = 25,9 \text{ А.}$$

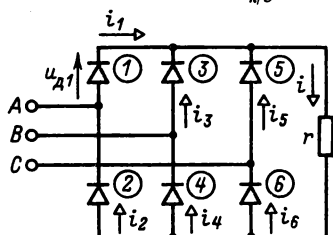


Рис. 13.9

Мощность потерь в резисторе  $P = rI^2 = 13,4 \text{ кВт}$ .

Для определения среднего тока диода  $I_{до}$  рассмотрим графики токов диодов (рис. 13.9Р, з-и). Ток через каждый диод протекает в течение  $1/3$  периода, поэтому  $I_{до} = I_o/3 = 8,6 \text{ А}$ .

Для определения напряжения на диоде рассмотрим, например, диод 1 (рис. 13.9). При открытом диоде 1 напряжение  $u_{д1} = 0$ . Чтобы определить напряжение на закрытом диоде, запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для любого из контуров, включающих диод 1, например:

$$u_{AB} + u_{д3} - u_{д1} = 0.$$

Если диод 3 открыт, то  $u_{д3} = 0$  и  $u_{д1} = u_{AB} = u_n$ . Т.е. максимальное обратное напряжение на диоде равно  $U_{нм} = 380/\sqrt{2} = 540 \text{ В}$ .

13.10. Выпрямитель собран по трехфазной схеме со средней точкой (рис. 13.10). Сопротивление нагрузки  $r = 20 \text{ Ом}$ ; вторичное фазное напряжение 220 В. Диоды считать идеальными.

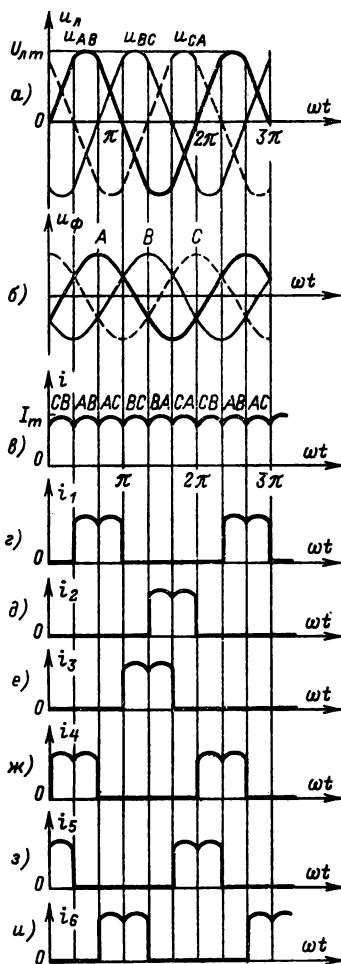


Рис. 13.9Р

Определить среднее и действующее значения тока и мощность потерь в резисторе, а также средний ток и максимальное обратное напряжение диода.

13.11. В цепи по рис. 13.11, а два опорных диода (стабилитрона) включены навстречу друг другу. Идеализированная характеристика диода изображена на рис. 13.11, б; сопротивление резистора  $r = 500 \text{ Ом}$ ; ЭДС источника  $e = 20 \sin 314t$ , В.

Определить длительность фронта импульсов напряжения  $u$ .

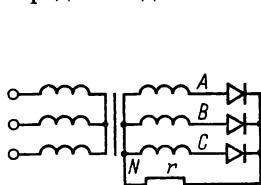


Рис. 13.10

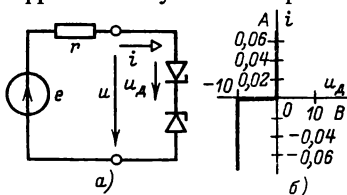


Рис. 13.11

13.12. В цепи предыдущей задачи определить амплитудные значения ЭДС источника, необходимые для получения фронтов импульсов длительностью: а)  $T/12$ ; б)  $T/16$ ; в)  $T/24$ , где  $T$  — период ЭДС.

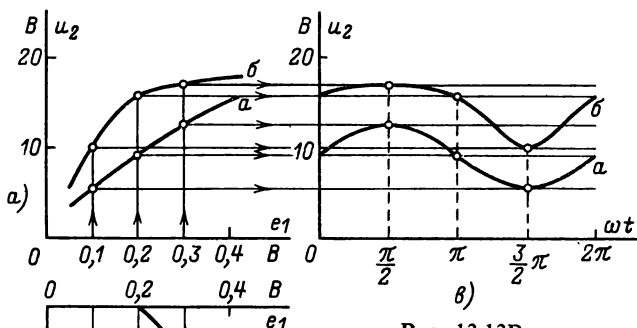
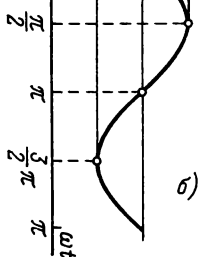


Рис. 13.13Р

13.13(Р). На входе усилителя, схема и характеристики которого приведены на рис. 11.27, а–в, действует сигнал  $e_1 = 0,2 + 0,1 \sin 314t$ , В.

Построить зависимость выходного напряжения  $u_2$  от времени при сопротивлениях нагрузки: а)  $r_2 = 10 \text{ кОм}$ ; б)  $r_2 = 20 \text{ кОм}$ .

Указание. Рекомендуется воспользоваться результатами решения задачи 11.28.



Решение. По результатам решения задачи 11.28 на рис. 13.13Р, а построены зависимости  $u_2(e_1)$  при  $r_2 = 10$  кОм (кривая а) и  $r_2 = 20$  кОм (кривая б). Зависимость ЭДС  $e_1(\omega t)$  дана на рис. 13.13Р, б. Графическое решение задачи представлено на рис. 13.13Р, в.

13.14. На выходе усилителя, схема и характеристики которого приведены на рис. 11.26, а–в, включен резистор, сопротивление которого зависит от времени: а)  $r_2 = 200 + 100 \sin 10^4 t$ , Ом; б)  $r_2 = 300 + 150 \sin 10^4 t$ , Ом.

Построить зависимость выходного напряжения  $u_2$  от времени.

У к а з а н и е. Рекомендуется воспользоваться результатами решения задачи 11.26.

13.15. На сетку лампового усилителя, схема и характеристики которого приведены на рис. 11.29, а и б, подведено напряжение: а)  $u_c = -4 + 2 \sin \omega t$ , В; б)  $u_c = -8 + 4 \sin \omega t$ , В.

Построить зависимость выходного напряжения  $u_n$  от времени.

У к а з а н и е. Рекомендуется воспользоваться результатами решения задачи 11.29.

13.16(Р). Две катушки с числами витков  $w_1 = 2000$  и  $w_2 = 400$  намотаны на магнитопровод, сечение которого  $S = 0,2$  см<sup>2</sup> и средняя длина магнитной линии  $l = 10$  см (рис. 13.16, а). Кривая намагничивания материала дана на рис. 13.16, б.

Построить зависимости потока  $\Phi$  в магнитопроводе и напряжения  $u$  на вторичной обмотке от времени при питании цепи от источника синусоидального тока  $i = 0,6 \sin 1000t$ , А.

Решение. Построим кривую намагничивания в координатах  $\Phi$  и  $i$  (рис. 13.16Р, а), учитывая, что поток (в веберах)  $\Phi = BS = B \cdot 0,2 \cdot 10^{-4}$  и ток (в амперах)  $i = Hl/w_1 = H \cdot 5 \cdot 10^{-5}$  (закон полного тока).

Построение зависимости потока от времени (от  $\omega t$ ) приведено на рис. 13.16Р, а–в.

Напряжение на вторичной обмотке

$$u = w_2 d\Phi/dt = w_2 (\partial\Phi/\partial i) di/dt. \quad (1)$$

Зависимость магнитного потока от тока получена в виде кусочно-линейной функции (рис. 13.16Р, а), поэтому можно рассчитать напряжения на отдельных участках. На первом участке ( $0 \leq \Phi \leq 0,03$  мВб), как следует из рис. 13.16Р, а, производная  $\partial\Phi/\partial i = 3 \cdot 10^{-4}$  Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 1000 \cos 1000t = 72 \cos 1000t, \text{ В}. \quad (2)$$

Угол отсечки  $\theta$ , соответствующий точке перелома кривой намагничивания при токе  $i = 0,1$  А, определяется из соотношения  $0,1 = 0,6 \sin \theta$ , откуда  $\theta = 0,17$  и  $t = \theta/\omega = 0,17 \cdot 10^{-3}$  с. В момент  $t = 0$  по (2) напряжение  $u = 72$  В и в момент  $t = 0,17 \cdot 10^{-3}$  с напряжение  $u = 72 \cos 0,17 = 71$  В.

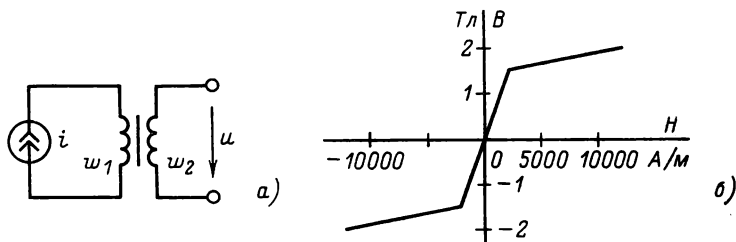


Рис. 13.16

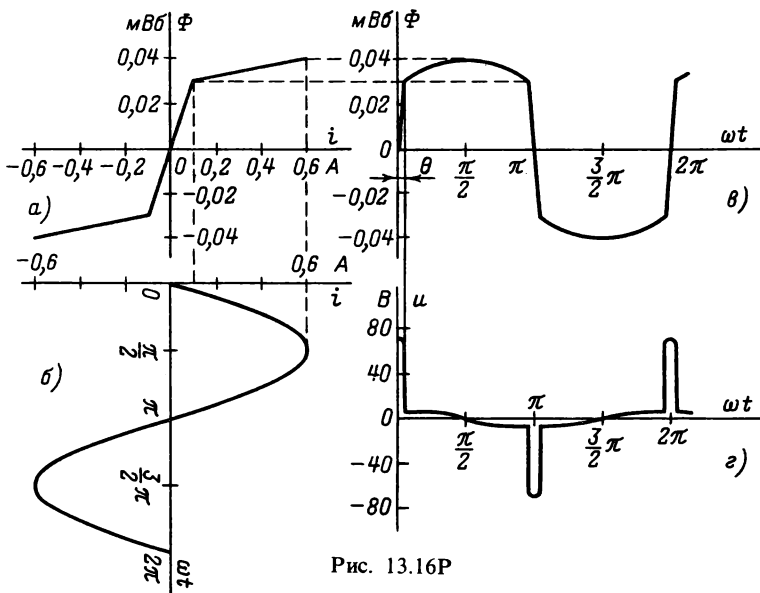


Рис. 13.16Р

На втором участке ( $0,03 < \Phi \leq 0,04$  мВб) производная  $\partial\Phi/\partial i = 0,2 \cdot 10^{-4}$  Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6 \cdot 1000 \cos 1000t = 4,8 \cos 1000t \text{ В.} \quad (3)$$

В момент  $t = 0,17 \cdot 10^{-3}$  с по (3) напряжение  $u = 4,8 \cos 0,17 = 4,7$  В и в момент  $t = (\pi/2) \cdot 10^{-3}$  с напряжение  $u = 0$ . Зависимость  $u(\omega t)$  показана на рис. 13.16Р, з.

**13.17.** На магнитопроводе, кривая намагничивания и геометрические размеры которого приведены в задаче 13.16, намотана катушка, имеющая 2000 витков. Катушка подключена к источнику синусоидальной ЭДС  $e = 80 \cos 1000t$ , В.

Построить график тока в катушке.

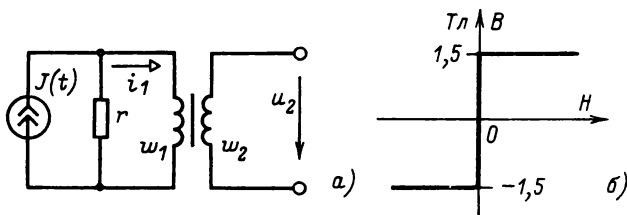


Рис. 13.18

**13.18.** Для материала магнитопровода трансформатора (рис. 13.18, а) задана кривая намагничивания (рис. 13.18, б). Размеры магнитопровода: сечение  $S = 0,2 \text{ см}^2$ ; средняя длина магнитной линии  $l = 10 \text{ см}$ ; числа витков обмоток:  $w_1 = 2000$ ,  $w_2 = 500$ ; сопротивление резистора  $r = 1 \text{ кОм}$ . Цепь получает питание от источника тока  $J(t) = 0,08 \sin 1000t$ , А.

Построить зависимости от времени тока  $i_1$  в первичной обмотке и напряжения  $u_2$  на вторичной обмотке, полагая, что при  $t = 0$  индукция магнитопровода  $B = -1,5 \text{ Тл}$ .

## 13.2. Аналитические методы расчета

**13.19.** Катушка, имеющая 500 витков, намотана на стальной магнитопровод, кривая намагничивания которого может быть аппроксимирована полиномом  $H = 100B + 200B^3$ , где напряженность магнитного поля в амперах на метр, магнитная индукция в теслах. Сечение магнитопровода  $S = 10^{-3} \text{ м}^2$ , средняя длина магнитной линии  $l = 0,5 \text{ м}$ . Катушка подключена к источнику гармонического напряжения  $u = 110\sqrt{2} \cos \omega t$ , В.

Определить мгновенное и действующее значения тока в катушке при частотах напряжения: а) 50 Гц; б) 100 Гц.

**13.20(Р).** В цепи по рис. 13.20 катушка, параметры которой приведены в задаче 13.19, соединена параллельно с конденсатором емкостью 4 мкФ и подключена к источнику синусоидального напряжения  $u$  с частотой 50 Гц.

Определить, при каком действующем значении напряжения в цепи возможен резонанс токов на частоте первой гармоники; найти действующие значения всех токов в этом режиме.

**Решение.** Составляем по заданной кривой  $H(B)$  зависимость  $i_L(\Psi)$ , где  $\Psi$  — потокосцепление, учитывая, что

$$B = \frac{\Psi}{wS} = \frac{\Psi}{500 \cdot 10^{-3}} = 2\Psi; \quad H = \frac{wi_L}{l} = \frac{500}{0,5} i_L = 1000 i_L$$

(закон полного тока).

Подставив эти зависимости в заданное в задаче 13.19 выражение кривой намагничивания, получим:

$$i_L = 0,2\Psi + 1,6\Psi^3, \quad (1)$$

где ток в амперах, потокосцепление в веберах.

При резонансе токов в контуре 1-я гармоника  $i_1$  общего тока  $i$  должна равняться нулю:

$$i_1 = i_{L1} + i_{C1} = 0. \quad (2)$$

При синусоидальном напряжении  $u$  потокосцепление катушки также синусоидальное, так как  $u = d\Psi/dt$ , и может быть выбрано с нулевой начальной фазой

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t. \quad (3)$$

Ток катушки найдем по (1):

$$\begin{aligned} i_L &= \left( 0,2\Psi_m + \frac{3}{4} 1,6\Psi_m^3 \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} 1,6\Psi_m^3 \sin 3\omega t = \\ &= (0,2\Psi_m + 1,2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0,4\Psi_m^3 \sin 3\omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Ток конденсатора

$$i_C = C du/dt = Cd^2\Psi/dt^2 = -\omega^2 C\Psi_m \sin \omega t = -0,394\Psi_m \sin \omega t. \quad (5)$$

Из условия резонанса (2) получим:

$$(0,2\Psi_m + 1,2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0,394\Psi_m \sin \omega t = 0,$$

откуда: а)  $\Psi_m = 0$  — тривиальное решение или б)  $1,2\Psi_m^2 + + 0,2 - 0,394 = 0$  и  $\Psi_m = 0,402$  Вб.

Напряжение  $u = d\Psi/dt = \omega\Psi_m \cos \omega t$ . Поэтому в режиме резонанса токов действующее значение напряжения

$$U = \omega\Psi_m/\sqrt{2} = 314 \cdot 0,402/\sqrt{2} = 89 \text{ В.}$$

Мгновенное значение тока в катушке по (4)

$$i_L = 0,1584 \sin \omega t - 0,026 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

Действующее значение тока в катушке

$$I_L = \sqrt{0,1584^2/2 + 0,026^2/2} = 0,114 \text{ А.}$$

Действующее значение тока в конденсаторе по (5)

$$I_C = 0,394\Psi_m/\sqrt{2} = 0,394 \cdot 0,402/\sqrt{2} = 0,112 \text{ А.}$$

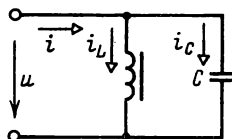


Рис. 13.20

Мгновенное значение тока источника

$$i = i_L + i_C = -0,4\Psi_m^3 \sin 3\omega t = -0,026 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

Действующее значение тока источника

$$I = 0,026/\sqrt{2} = 0,0184 \text{ А.}$$

**13.21.** Цепь состоит из катушки со стальным магнитопроводом, имеющей 100 витков, соединенной последовательно с конденсатором емкостью 8 мкФ и подключенной к источнику синусоидального тока  $i = I_m \sin 1000t$  А. Зависимость магнитного потока от тока катушки аппроксимирована полиномом  $\Phi = 2 \cdot 10^{-3}i - 10^{-3}i^3$ , где поток в веберах, ток в амперах.

Цепь настроена в резонанс на частоте первой гармоники изменением амплитуды тока.

Определить, при какой амплитуде тока наблюдается резонанс, найти действующие значения напряжений на входе цепи, на катушке и на конденсаторе в режиме резонанса.

**13.22(Р).** Катушка со стальным магнитопроводом имеет постоянное подмагничивание и подключена к источнику ЭДС  $e = E_m \cos \omega t$ , где  $E_m = 40$  В,  $\omega = 2 \cdot 10^4$  рад/с. Вебер-амперная характеристика катушки с учетом подмагничивания задана зависимостью  $i_L = 30\Psi + 10^4\Psi^2 + 4 \cdot 10^6\Psi^3$ , где ток в амперах, потокосцепление в веберах.

Определить ток в катушке.

Решение. Для определения тока в катушке предварительно вычислим потокосцепление

$$\Psi = \int e dt = \int E_m \cos \omega t dt = \Psi_0 + \frac{E_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $\Psi_m = E_m/\omega = 2 \cdot 10^{-3}$  Вб.

Постоянная интегрирования  $\Psi_0$  определяется из условия отсутствия постоянной составляющей у тока катушки. Подставив  $\Psi$  по (1) в заданную зависимость тока, получим:

$$\begin{aligned} i_L = & (4 \cdot 10^6 \Psi_0^3 + 10^4 \Psi_0^2 + 54 \Psi_0 + 2 \cdot 10^{-2}) + \\ & + (2,4 \cdot 10^4 \Psi_0^2 + 40 \Psi_0 + 8,4 \cdot 10^{-2}) \sin \omega t - \\ & - (24 \Psi_0 + 2 \cdot 10^{-2}) \cos 2\omega t - 8 \cdot 10^{-3} \sin 3\omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда из условия отсутствия постоянной составляющей тока следует, что

$$4 \cdot 10^6 \Psi_0^3 + 10^4 \Psi_0^2 + 54 \Psi_0 + 2 \cdot 10^{-2} = 0,$$

или

$$\Psi_0^3 + 2,5 \cdot 10^{-3} \Psi_0^2 + 13,5 \cdot 10^{-6} \Psi_0 + 5 \cdot 10^{-9} = 0 \quad (3)$$

— кубическое уравнение вида (13.10).

Подстановкой (13.11)

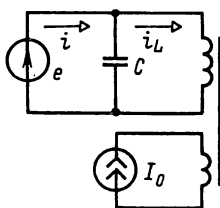
$$x = \Psi_0 + 2,5 \cdot 10^{-3}/3 = \Psi_0 + 0,833 \cdot 10^{-3} \quad (4)$$

приводим уравнение (3) к виду (13.8), где в соответствии с (13.12)  $p = 3,81 \cdot 10^{-6}$ ;  $q = -2,55 \cdot 10^{-9}$ . Таким образом, получили уравнение

$$x^3 + 11,42 \cdot 10^{-6}x - 5,1 \cdot 10^{-9} = 0$$

и по (13.9) находим  $x = 0,44 \cdot 10^{-3}$ .

По (4) искомое значение постоянной интегрирования  $\Psi_0 = x - 0,833 \cdot 10^{-3} = -0,393 \cdot 10^{-3}$  Вб. Подставив  $\Psi_0$  в выражение (2), найдем ток  $i_L = 72 \cdot 10^{-3} \sin \omega t - 10,6 \cdot 10^{-3} \cos 2\omega t - 8 \cdot 10^{-3} \sin 3\omega t$ , А.



← Рис. 13.23

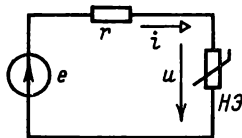


Рис. 13.24

**13.23.** Параллельно катушке, параметры которой приведены в задаче 13.22, включен конденсатор емкостью  $0,09 \text{ мкФ}$  (рис. 13.23), ЭДС источника  $e = 40 \cos 2 \cdot 10^4 t$ , В.

Определить ток источника  $i(t)$ .

**13.24(Р).** Цепь состоит из последовательно соединенных линейного и нелинейного  $HZ$  резисторов и источника ЭДС  $e = E_m \sin \omega t$ , где  $E_m = 120 \text{ В}$ ;  $\omega = 314 \text{ рад/с}$  (рис. 13.24). Сопротивление линейного резистора  $r = 40 \text{ Ом}$ , вольт-амперная характеристика нелинейного резистора аппроксимирована зависимостью

$$u(i) = ai + bi^3, \quad (1)$$

где  $a = 50 \text{ Ом}$ ;  $b = 40 \text{ В/А}^3$ .

Определить первую гармонику тока в цепи методами:

1) гармонического баланса; 2) гармонической линеаризации.

**Решение.** 1) *Метод гармонического баланса.* Уравнение цепи по второму закону Кирхгофа:

$$(r + a)i + bi^3 = e. \quad (2)$$

Представим ток гармонической функцией  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ . Требуется определить амплитуду тока  $I_m$  и сдвиг по фазе  $\varphi$  относительно ЭДС.

Для удобства последующих преобразований обозначим  $\omega t - \varphi = \theta$ ; тогда заданная ЭДС  $e = E_m \sin(\theta + \varphi)$ .



Подставим искомое решение для тока в уравнение цепи (2) и выделим синусную и косинусную составляющие в выражении ЭДС:

$$(r + a) I_m \sin \theta + \frac{1}{4} b I_m^3 (3 \sin \theta - \sin 3\theta) = \\ = E_m \cos \varphi \cdot \sin \theta + E_m \sin \varphi \cdot \cos \theta.$$

Приравняв коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях в левой и правой частях равенства, получим:

$$0 = E_m \sin \varphi; \quad (3)$$

$$(r + a) I_m + \frac{3}{4} b I_m^3 = E_m \cos \varphi. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что  $\sin \varphi = 0$ ;  $\varphi = 0$ ;  $\cos \varphi = 1$ .

Уравнение (4) при заданных численных значениях величин

$$(40 + 50) I_m + \frac{3}{4} \cdot 40 I_m^3 = 120$$

приведем к виду

$$I_m^3 + 3 I_m - 4 = 0$$

и решим по формуле (13.9), где  $p = 1$ ;  $q = -2$ ;

$$I_m = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + 1}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + 1}} = 1,62 - 0,62 = 1 \text{ А},$$

т. е.

$$i = 1 \sin \omega t, \text{ А}.$$

2) Метод гармонической линеаризации. При  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi) = I_m \sin \theta$  нужно определить  $I_m$  и  $\varphi$ .

Определим сопротивление нелинейного резистора по 1-й гармонике  $R_n(I_m) = U_{1m}(I_m)/I_m$ , где в соответствии с (1)  $U_{1m} = (50 I_m + 30 I_m^3)$  — амплитуда 1-й гармоники напряжения на нелинейном элементе. Сопротивление в комплексной форме

$$\underline{Z}_n(I_m) = R_n(I_m) = 50 + 30 I_m^2,$$

так как у резистора первые гармоники напряжения и тока совпадают по фазе.

Составим уравнение цепи по второму закону Кирхгофа в комплексной форме

$$[r + \underline{Z}_n(I_m)] \dot{I}_m = \dot{E}_m,$$

где комплексные величины  $\dot{E}_m = E_m$ ;  $\dot{I}_m = I_m \angle -\varphi$ .

После подстановки численных значений получим:

$$(40 + 50 + 30 I_m^2) I_m e^{-j\varphi} = 120.$$

Поскольку правая часть уравнения действительная, то  $\varphi = 0$  и уравнение приводится к виду  $I_m^3 + 3I_m - 4 = 0$ , откуда  $I_m = 1$  А.

13.25. Для цепи рис. 13.24 заданы сопротивление резистора  $r = 40$  Ом и ЭДС  $e = 300 \sin \omega t$ , В; вольт-амперная характеристика нелинейного элемента НЭ аппроксимирована полиномом  $i(u) = 0,02u + 4 \cdot 10^{-6}u^3$ , где ток в амперах, напряжение в вольтах.

Определить первую гармонику напряжения на нелинейном элементе методами гармонического баланса и гармонической линеаризации.

13.26. Для цепи рис. 13.26 дано:  $r_1 = 600$  Ом;  $r_2 = 300$  Ом;  $r_3 = 300$  Ом; ЭДС источников  $e_1 = e_2 = 240 \sin 314t$ , В; вольт-амперная характеристика нелинейного резистора  $u(i) = 400i + 8000i^3$ , где напряжение в вольтах, ток в амперах.

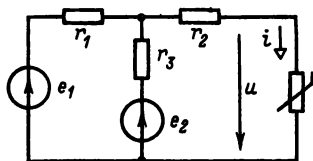


Рис. 13.26

Определить первую гармонику тока  $i$  методами гармонического баланса и гармонической линеаризации.

13.27. Цепь состоит из последовательно соединенных линейного резистора с сопротивлением  $r = 200$  Ом, катушки, характеристика которой аппроксимирована полиномом  $i = a\Psi + b\Psi^3$ , где  $a = 50$  А/Вб,  $b = 4 \cdot 10^7$  А/Вб<sup>3</sup>, и источника ЭДС  $e = 19 \sin \omega t$ , В, где  $\omega = 10^4$  рад/с.

Полагая потокосцепление в катушке синусоидальным  $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t - \eta)$ , определить амплитуду потокосцепления  $\Psi_m$ , начальную фазу  $\eta$  и найти ток  $i(t)$  методами гармонического баланса и гармонической линеаризации.

13.28. Последовательно соединены: нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой, которая аппроксимирована зависимостью  $u(i) = ai + bi^3$ , где  $a = 40$  Ом,  $b = 1400$  В/А<sup>3</sup>, катушка без потерь с индуктивностью  $L = 23$  мГн и источник ЭДС  $e = 17 \sin 1000t$ , В.

Полагая ток в цепи синусоидальным  $i = I_m \sin(1000t - \varphi)$ , методами гармонического баланса и гармонической линеаризации определить амплитуду тока  $I_m$  и сдвиг фаз  $\varphi$ .

13.29. Последовательно соединены катушка, характеристика которой аппроксимирована полиномом  $i(\Psi) = 30\Psi + 4 \cdot 10^6\Psi^3$ , где ток в амперах, потокосцепление в веберах, и конденсатор емкостью  $0,1$  мкФ подключены к источнику ЭДС  $e = E_m \sin \omega t$ .

Полагая потокоцепление  $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t - \eta)$ , методами гармонического баланса и гармонической линеаризации рассчитать и построить амплитудную характеристику – зависимость амплитуды  $U_m$  1-й гармоники напряжения на катушке от амплитуды  $E_m$  ЭДС источника при частоте  $\omega = 2 \cdot 10^4$  рад/с, а также амплитудно-частотную характеристику  $U_m(\omega)$  при амплитуде ЭДС  $E_m = 5$  В.

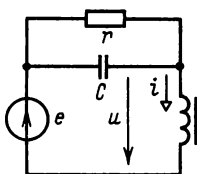


Рис. 13.30

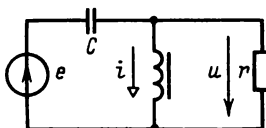


Рис. 13.31

**13.30.** Характеристика катушки без потерь в схеме рис. 13.30 аппроксимирована выражением  $i(\Psi) = 30\Psi + 4 \cdot 10^6 \Psi^3$ , где ток в амперах, потокоцепление в веберах; емкость конденсатора 0,1 мкФ, сопротивление резистора 5 кОм, ЭДС источника  $e = E_m \sin \omega t$ , где  $\omega = 2 \cdot 10^4$  рад/с.

Полагая потокоцепление синусоидальным  $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t - \eta)$ , методами гармонического баланса и гармонической линеаризации рассчитать и построить амплитудную характеристику – зависимость амплитуды первой гармоники напряжения на катушке  $U_m$  от амплитуды ЭДС  $E_m$ .

**13.31.** В схеме рис. 13.31 емкость конденсатора 0,1 мкФ, сопротивление резистора 5 кОм, характеристика катушки аппроксимирована полиномом  $i(\Psi) = 30\Psi + 4 \cdot 10^6 \Psi^3$ , где ток в амперах, потокоцепление в веберах, ЭДС  $e = E_m \sin \omega t$  с частотой  $\omega = 2 \cdot 10^4$  рад/с.

Методами гармонического баланса и гармонической линеаризации рассчитать и построить зависимость амплитуды первой гармоники напряжения на резисторе  $U_m$  от амплитуды ЭДС  $E_m$  (амплитудную характеристику), полагая  $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t - \eta)$ .

**13.32(Р).** Последовательно соединенные катушка, характеристика которой аппроксимирована зависимостью  $i(\Psi) = a\Psi + b\Psi^3$ , где  $a = 50$  А/Вб,  $b = 10^7$  А/Вб<sup>3</sup>, и резистор с сопротивлением  $r = 200$  Ом подключены к источнику ЭДС  $e = E_m \sin \omega t = 10\sqrt{2} \sin 10^4 t$ , В.

Полагая  $b\Psi^3 \ll a\Psi$ , итерационным методом определить мгновенные значения потокоцепления, напряжения на катушке и тока в цепи.

Решение. Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа:

$$d\Psi/dt + ri(\Psi) = e. \quad (1)$$

Подставим в (1) заданную зависимость  $i(\Psi)$  и в правую часть уравнения вынесем малый член:

$$e - d\Psi/dt - ar\Psi = br\Psi^3. \quad (2)$$

Определим нулевое (линейное) приближение. Отбросив малый член  $br\Psi^3$ , решим полученное линейное дифференциальное уравнение комплексным методом. Запишем уравнение (2) в комплексной форме:

$$(ar + j\omega)\dot{\Psi}_m = \dot{E}_m,$$

откуда

$$\dot{\Psi}_m = \dot{E}_m/(ar + j\omega) = \frac{10\sqrt{2}}{(50 \cdot 200 + j10^4)} = 10^{-3} \angle -45^\circ \text{ Вб},$$

и мгновенное значение потокосцепления в нулевом приближении

$$\Psi_0 = \Psi_{0m} \sin(\omega t - \alpha) = 10^{-3} \sin(10^4 t - 45^\circ) \text{ Вб}.$$

Чтобы получить первое приближение, подставим нулевое приближение в правую часть уравнения (2). После перегруппировки членов получим:

$$d\Psi/dt + ar\Psi = E_m \sin \omega t - \frac{3}{4} br\Psi_{0m}^3 \sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{4} br\Psi_{0m}^3 \sin 3(\omega t - \alpha). \quad (3)$$

Уравнение (3) можно считать уравнением линейной цепи при несинусоидальном внешнем воздействии (правая часть). Каждую гармонику потокосцепления рассчитаем комплексным методом.

Запишем уравнение (3) в комплексной форме для 1-й гармоники:

$$(ar + j\omega)\dot{\Psi}_{1m} = \dot{E}_m - \frac{3}{4} br\Psi_{0m}^3 \angle -\alpha,$$

откуда после подстановки численных значений находим потокосцепление  $\dot{\Psi}_{1m} = 0,925 \cdot 10^{-3} \angle -40^\circ 20' \text{ Вб}$  и напряжение  $\dot{U}_{1m} = j\omega\dot{\Psi}_{1m} = 9,25 \angle 49^\circ 40' \text{ В}$ .

Уравнение (3) в комплексной форме для 3-й гармоники

$$(ar + j3\omega)\dot{\Psi}_{3m} = \frac{1}{4} br\Psi_{0m}^3 \angle -3\alpha$$

имеет решение:  $\dot{\Psi}_{3m} = 0,0162 \cdot 10^{-3} \angle +153^\circ 30' \text{ Вб}$  и напряжение  $\dot{U}_{3m} = j3\omega\dot{\Psi}_{3m} = 0,486 \angle -116^\circ 30' \text{ В}$ .

### Мгновенные значения потокосцепления

$$\Psi(t) = 0,925 \cdot 10^{-3} \sin(10^4 t - 40^\circ 20') + \\ + 0,0162 \cdot 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^4 t + 153^\circ 30') \text{ Вб};$$

напряжения на катушке

$$u = 9,25 \sin(10^4 t + 49^\circ 40') + 0,486 \sin(3 \cdot 10^4 t - 116^\circ 30') \text{ В}.$$

По закону Ома ток в цепи

$$i(t) = (e - u)/r.$$

Каждую из гармонических составляющих тока определим комплексным методом. Для 1-й гармоники  $\dot{I}_{1m} = (\dot{E}_m - \dot{U}_{1m})/r = 0,054 \angle -40^\circ 50' \text{ А}$ ; для 3-й гармоники  $\dot{I}_{3m} = -\dot{U}_{3m}/r = -0,0024 \angle -116^\circ 30' \text{ А}$ .

Мгновенное значение тока

$$i(t) = 0,054 \sin(10^4 t - 40^\circ 50') - 0,0024 \sin(3 \cdot 10^4 t - 116^\circ 30') \text{ А}.$$

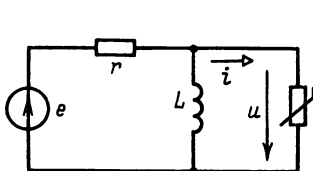


Рис. 13.35

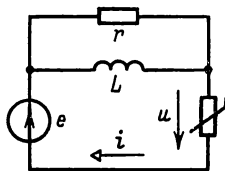


Рис. 13.36

**13.33.** Цепь состоит из последовательно соединенных источника ЭДС  $e = 100 \sin 10^4 t$ , В, катушки без потерь с индуктивностью 40 мГн и нелинейного резистора, вольт-амперная характеристика которого аппроксимирована выражением  $u(i) = ri + bi^3$ , где  $r = 300 \text{ Ом}$ ,  $b = 2500 \text{ В/А}^3$ .

Полагая  $bi^3 \ll ri$ , определить мгновенное значение тока в цепи итерационным методом.

**13.34.** Последовательно соединенные резистор с сопротивлением 7,5 кОм и конденсатор с сегнетоэлектриком, вольт-кулоновая характеристика которого аппроксимирована зависимостью  $u(q) = aq + bq^3$ , где  $a = 10^9 \text{ В/Кл}$ ,  $b = 5 \cdot 10^{21} \text{ В/Кл}^3$ , получают питание от источника ЭДС  $e = 250 \sin 10^5 t$ , В.

Полагая  $bq^3 \ll aq$ , определить мгновенные значения тока и напряжения на конденсаторе итерационным методом.

**13.35.** Для схемы рис. 13.35 заданы параметры:  $r = 400 \text{ Ом}$ ;  $L = 40 \text{ мГн}$  и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора  $i(u) = au + bu^3 = 0,002u + 2 \cdot 10^{-7}u^3$ , где ток в амперах, напряжение в вольтах; ЭДС источника  $e = 100 \sin 10^4 t$ , В.

Полагая  $bu^3 \ll au$ , определить итерационным методом мгновенные значения тока и напряжения нелинейного резистора, а также тока источника.

13.36. Параметры элементов схемы рис. 13.36 указаны в задаче 13.35.

Итерационным методом определить ток и напряжение нелинейного резистора.

### 13.3. Расчет по действующим значениям токов и напряжений

13.37(Р). Катушка с числом витков  $w = 500$  и магнитопроводом из трансформаторной стали включена в сеть с напряжением  $U = 220$  В (частота 50 Гц). Ток катушки  $I = 10$  А, активная мощность  $P = 1500$  Вт. Сопротивление обмотки из медного провода постоянному току  $r_m = 10$  Ом. Амплитуда потока в магнитопроводе  $\Phi_m = 10^{-3}$  Вб.

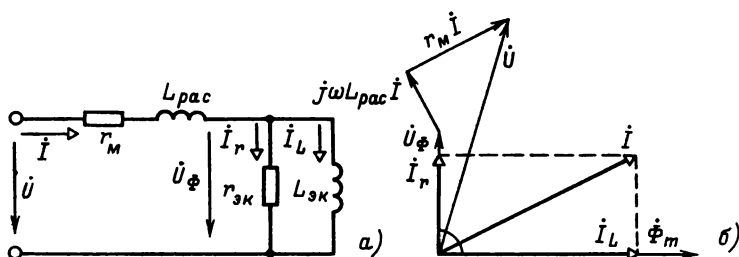


Рис. 13.37Р

Составить схему замещения катушки и построить векторную диаграмму.

Решение. Схема замещения катушки представлена на рис. 13.37Р, а, где  $L_{эк}$  — эквивалентная индуктивность катушки, обусловленная потоком в магнитопроводе;  $L_{pac}$  — индуктивность рассеяния;  $r_{эк}$  — эквивалентное активное сопротивление, учитывающее потери в магнитопроводе;  $r_m$  — сопротивление обмотки.

Для определения параметров схемы замещения предварительно вычислим по (13.7), приняв  $\dot{\Phi}_m = \Phi_m$ , составляющую напряжения, связанную с потоком в магнитопроводе  $\dot{U}_\phi = j4,44fw\Phi_m = j111$  В.

Определим эквивалентное сопротивление потерь в магнитопроводе  $r_{эк}$ , записав по закону Джоуля—Ленца активную мощность (потерь)  $P = r_m I^2 + U_\phi^2 / r_{эк}$ , откуда  $r_{эк} = 24,5$  Ом.

Составляющая тока, обусловленная потерями в магнитопроводе,  $\dot{I}_r = \dot{U}_\Phi / r_{\text{эк}} = j4,53 \text{ А}$ .

Для определения эквивалентного индуктивного сопротивления  $x_{\text{эк}} = \omega L_{\text{эк}}$  находим ток  $I_L = \sqrt{I^2 - I_r^2} = 8,9 \text{ А}$ , и  $x_{\text{эк}} = U_\Phi / I_L = 12,5 \text{ Ом}$ .

Индуктивное сопротивление рассеяния  $x_{\text{рас}} = \omega L_{\text{рас}}$  определим, вычислив комплексное сопротивление катушки по схеме замещения (рис. 13.37Р, а):

$$\underline{Z} = r_m + jx_{\text{рас}} + jx_{\text{эк}}r_{\text{эк}}/(r_{\text{эк}} + jx_{\text{эк}}) = 15,05 + j(x_{\text{рас}} + 9,9)$$

и полное сопротивление по закону Ома  $z = U/I = 22 \text{ Ом}$ . Таким образом,  $22^2 = 15,05^2 + (x_{\text{рас}} + 9,9)^2$ , откуда  $x_{\text{рас}} = 6,2 \text{ Ом}$ .

Векторная диаграмма для схемы замещения построена на рис. 13.37Р, б.

**13.38.** У катушки со стальным магнитопроводом при напряжении питания  $U = 220 \text{ В}$  ток  $I = 10 \text{ А}$ , активная мощность  $P = 1500 \text{ Вт}$ . Сопротивление обмотки постоянному току  $r_m = 10 \text{ Ом}$ .

Пренебрегая потоком рассеяния, составить параллельную схему замещения катушки и построить для нее векторную диаграмму, приняв  $\dot{I} = I$ .

**13.39.** Дроссель, включенный в сеть с напряжением  $380 \text{ В}$ , частотой  $50 \text{ Гц}$ , имеет стальной магнитопровод сечением  $6 \text{ см}^2$ , массой  $2 \text{ кг}$ .

Определить необходимое число витков и действующее значение тока обмотки для получения амплитуды индукции в магнитопроводе  $B_m = 1,5 \text{ Тл}$ , при которой удельные потери в стали  $P_0 = 4 \text{ Вт/кг}$ , удельная реактивная мощность намагничивания  $Q_0 = 32 \text{ вар/кг}$ .

Активным сопротивлением обмотки и потоком рассеяния можно пренебречь.

Вт/кг; вар/кг

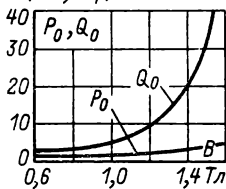


Рис. 13.40

**13.40.** Трансформатор, работающий в режиме холостого хода, имеет стальной магнитопровод сечением  $20 \text{ см}^2$ , массой  $20 \text{ кг}$ ; числа витков обмоток  $w_1 = 600$ ;  $w_2 = 360$ ; активное сопротивление первичной обмотки  $r_m = 10 \text{ Ом}$ ; сопротивление рассеяния  $x_{\text{рас}} = 12 \text{ Ом}$ . Напряжение питания первичной обмотки  $380 \text{ В}$ , частота  $50 \text{ Гц}$ .

Пользуясь графиком удельных потерь в стали  $P_0$  и удельной реактивной мощности намагничивания  $Q_0$  (рис. 13.40),

определить ток первичной и напряжение вторичной обмоток трансформатора.

13.41. Характеристика катушки со стальным магнитопроводом для действующих значений токов и напряжений может быть аппроксимирована выражением  $U = 200I - 10I^3$ , где напряжение в вольтах, ток в амперах. Катушка соединена последовательно с конденсатором емкостью 29 мкФ и получает питание от источника синусоидального тока частотой 50 Гц.

Определить действующее значение тока, при котором в цепи будет резонанс напряжений.

## Глава четырнадцатая

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ. АВТОКОЛЕБАНИЯ

#### Введение к гл. 14

Для расчета переходных процессов в нелинейных цепях в общем случае нельзя применять метод наложения и определять переходный процесс, как это делается в линейных цепях, в виде суммы установившейся и свободной составляющих. Но, как и в линейных цепях, дифференциальные уравнения цепи составляются на основе законов Кирхгофа и постоянные интегрирования определяются с применением законов коммутации.

Применение при расчете только рабочего участка — участка нелинейной характеристики элемента, представляющего интерес с точки зрения поставленной задачи, увеличивает точность решения.

Для расчета переходных процессов в простейших нелинейных цепях применяют метод интегрируемой аппроксимации, метод условной линеаризации, метод кусочно-линейной аппроксимации, метод последовательных интервалов.

#### *Устойчивость состояния равновесия*

Состояние равновесия в электрической цепи постоянного тока определяется отсутствием изменений во времени токов и напряжений. Для нелинейной цепи переменного тока в состоянии равновесия не должны изменяться амплитуды и фазы гармонических составляющих.



Математически состояния равновесия  $x_0$  либо могут быть определены из дифференциальных уравнений приравниванием нулю первой и высших производных, либо найдены в результате расчета установившегося режима. В линейной цепи с независимыми источниками может быть только одно состояние равновесия, и оно всегда устойчиво. Исследования устойчивости необходимы в нелинейных цепях и цепях с обратной связью (с зависимыми источниками), где устойчивых состояний равновесия может быть несколько.

При исследовании устойчивых состояний в цепях с источниками постоянных ЭДС и токов предварительно рассчитывается установившийся режим и определяется положение рабочих точек на характеристиках нелинейных элементов. Далее с учетом характеристик нелинейных элементов рассматривается изменение переменных составляющих. В условиях многих задач этой главы приводятся уже найденные параметры нелинейных элементов относительно рабочих точек и рассматриваются сразу переменные составляющие.

Для определения устойчивости состояния равновесия, заданного некоторым значением переменной  $x = x_0$ , следует величине  $x$  дать малое приращение  $\Delta x$ . Из-за малости приращения нелинейность характеристики проявляется слабо, и цепь можно считать линейной. Поэтому при аналитическом исследовании функциональную зависимость  $y = f(x)$ , определяющую характеристику нелинейного элемента относительно состояния равновесия  $y_0 = f(x_0)$ , можно представить рядом Тейлора, полагая  $y = y_0 + \Delta y$  и  $x = x_0 + \Delta x$ , т. е. в виде

$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \Delta x^2 + \dots \quad (14.1a)$$

Учитывая, что  $y_0 = f(x_0)$ , и опуская величины второго порядка малости, можно (14.1a) упростить и записать для приращений соотношение

$$\Delta y = \left. df/dx \right|_{x=x_0} \Delta x. \quad (14.1b)$$

Таким образом, для приращений нелинейный элемент может быть заменен линейным с постоянным параметром, равным дифференциальному в точке равновесия  $x_0$ , т. е.

$$\left. df/dx \right|_{x=x_0} = \Delta y / \Delta x. \quad (14.2)$$

Поскольку при анализе устойчивости «в малом» нелинейная цепь сводится к линейной, то изменение приращений во времени определяется изменением свободных составляю-

щих процесса, т. е. слагаемыми вида  $Ae^{pt}$ . Поэтому состояние равновесия устойчиво «в малом» в том случае, если все действительные корни и действительные части комплексно-сопряженных корней отрицательны, т. е. все свободные составляющие с течением времени затухают. В частности, в цепях первого и второго порядков состояния равновесия устойчивы, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны (одного знака).

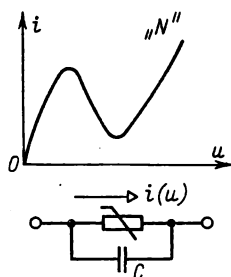


Рис. 14.А

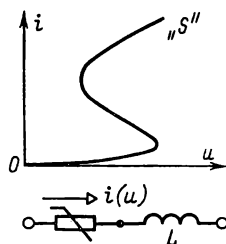


Рис. 14.Б

Для цепи третьего порядка с характеристическим уравнением

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

состояние равновесия устойчиво, если все коэффициенты положительны и дополнительно выполняется условие  $a_1 a_2 > a_3 a_0$ .

Для сравнительно простых цепей характеристические уравнения проще составлять по методу входного сопротивления  $[Z_{\text{вх}}(p) = 0]$ . В частности, для цепей с обратной связью или зависимыми источниками входное сопротивление можно найти, включив в одну из ветвей цепи независимый источник ЭДС  $E(p)$  и вычислив входное сопротивление по формуле

$$Z_{\text{вх}}(p) = E(p)/I(p), \quad (14.3)$$

где  $I(p)$  — ток этого источника.

Для упрощения вычислений источник  $E(p)$  рекомендуется включать последовательно с зависимым источником.

Если цепь содержит только резистивные элементы, среди которых есть элементы с N- (рис. 14.А) или S-образной (рис. 14.Б) вольт-амперной характеристикой, то при анализе устойчивости необходимо учесть емкость  $C$ , включенную параллельно элементу с N-образной характеристикой (рис. 14.А), и индуктивность  $L$ , включенную последовательно с элементом, имеющим S-образную характеристику (рис. 14.Б). Спадающий

участок характеристик, соответствующий отрицательному дифференциальному сопротивлению, приводит к неоднозначности по напряжению (рис. 14.Б) и току (рис. 14.А).

### *Изображение переходных процессов на фазовой плоскости*

На фазовой плоскости, координатами которой являются некоторая переменная  $x$  и ее производная  $dx/dt = y$  (рис. 14.В), состояние цепи определяется изображающей точкой и линиями, вдоль которых движутся изображающие точки, — фазовыми траекториями и их совокупностями — фазовыми портретами.

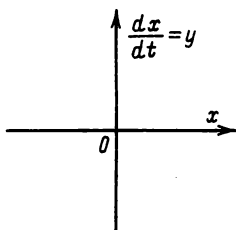


Рис. 14.В

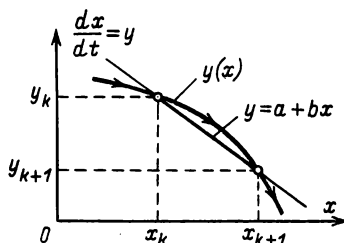


Рис. 14.Г

Через каждую регулярную точку плоскости может проходить только одна траектория, пересекаться фазовые траектории могут только в особых точках, которым соответствуют устойчивые и неустойчивые состояния равновесия. Периодическим процессам в электрических цепях на плоскости соответствуют замкнутые фазовые траектории — предельные циклы.

Основные свойства фазовой плоскости: 1) Движение изображающей точки в верхней полуплоскости, где  $dx/dt > 0$ , может происходить только в направлении увеличения переменной  $x$ , а в нижней полуплоскости, где  $dx/dt < 0$ , только в направлении уменьшения  $x$ . По замкнутой траектории — предельному циклу — движение возможно только в направлении движения часовой стрелки.

2) Изображающая точка может пересекать ось абсцисс  $x$  только под углом  $\pi/2$ .

3) Особые точки могут находиться только на оси абсцисс как точки состояния равновесия, определяемые из условия  $dx/dt = 0$ .

Для построения фазовых портретов часто сначала определяют положения особых точек и находят фазовые траектории в окрестности этих точек. При этом фазовые траектории нелинейных цепей рассматривают по малым отклонениям от

состояний равновесия, полагая, что цепь линейна. Вид фазовой траектории в окрестности состояния равновесия определяется типом особых точек, т.е. корнями характеристического уравнения.

Для цепи с одним независимым накопителем (характеристическое уравнение первой степени) возможна особая точка типа узел. Узел может быть устойчивым, когда корень  $p < 0$ , и неустойчивым, когда  $p > 0$ .

Для цепи с характеристическим уравнением второй степени возможны особые точки: 1) Узел при действительных корнях  $p_1, p_2$  одного знака; если  $p_1 < 0$  и  $p_2 < 0$  — устойчивый узел, а если  $p_1 > 0$  и  $p_2 > 0$  — неустойчивый. 2) Фокус при комплексно-сопряженных корнях  $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_0$ ; если  $\alpha < 0$  — устойчивый фокус (колебания затухают), а если  $\alpha > 0$  — неустойчивый фокус (колебания нарастают). 3) Седло при действительных корнях  $p_1$  и  $p_2$  разного знака (неустойчивая особая точка). 4) Центр при мнимых корнях  $p_{1,2} = \pm j\omega_0$  (незатухающие колебания).

Переход от полученного решения на фазовой плоскости  $y(x)$  к зависимости  $x(t)$  с учетом зависимости  $y = dx/dt$  выполняется при помощи соотношения

$$t = \int_{x(0)}^x dx/y(x).$$

Существует взаимное соответствие между прямыми линиями на фазовой плоскости и экспоненциальными временными зависимостями. Изменению переменной во времени по гармоническому закону соответствует движение изображающей точки по эллипсу или окружности на фазовой плоскости.

Зависимость искомой переменной от времени может быть получена с применением приближенных вычислений по интервалам. При этом фазовую траекторию  $y(x)$  на  $k$ -м интервале между точками  $x_k$  и  $x_{k+1}$  заменяют отрезком прямой  $y = a + bx$  (рис. 14.Г) и находят интервал времени, необходимый для движения изображающей точки на  $k$ -м интервале,

$$\Delta t_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

или, учитывая значения ординат на границах  $k$ -го интервала  $y_k$  и  $y_{k+1}$  (рис. 14.Г) и значения  $b = (y_{k+1} - y_k)/(x_{k+1} - x_k)$ ,

$$\Delta t_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} \ln \frac{y_{k+1}}{y_k} \quad (14.4)$$

и  $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$ .

Выражение (14.4) целесообразно применять, когда движение изображающей точки определяется отрезками прямых, например, в случае релаксационных колебаний. Временная зависимость при этом определяется отрезками экспонент.

### Метод усреднения

Метод усреднения при решении многих задач по существу совпадает с методом медленно меняющихся амплитуд. Он применяется при расчете переходных и установившихся процессов в электрических цепях, обладающих фильтрующими и резонансными свойствами для основной гармоники, причем часто достаточно рассмотреть только основную гармонику, а высшими гармониками пренебречь.

Дифференциальное уравнение неавтономной цепи с источниками ЭДС или токов и двумя реактивными элементами можно свести относительно некоторой переменной  $x$  к виду

$$d^2x/dt^2 + \omega^2x = \varepsilon f(x, dx/dt, t),$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, определяющий близость закона изменения переменной  $x$  к гармоническому;  $f$  — функция, определяемая нелинейными характеристиками элементов цепи. Точность метода тем выше, чем меньше параметр  $\varepsilon$ , т.е. чем ближе колебания к гармоническим.

При решении конкретных задач часто параметр  $\varepsilon$  не выносится, а близость к гармоническому закону определяется малостью значений коэффициентов правой части или другими соображениями, например данными эксперимента.

Решение дифференциального уравнения ищется в виде

$$x = a(t) \cos \psi; \quad dx/dt = -a(t) \omega \sin \psi, \quad (14.5)$$

где  $\psi = \omega t - \varphi(t)$  — полная фаза. При этом уравнения установления амплитуды  $a = a(t)$  и фазы  $\varphi = \varphi(t)$  переменной  $x$ , или укороченные уравнения, имеют вид:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, t) \sin \psi d\psi; \quad (14.6a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, t) \cos \psi d\psi. \quad (14.6b)$$

Малый параметр  $\varepsilon$  в правой части указывает на медленные изменения амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$ . Поэтому при интегри-

ровании в течение периода (усреднении) амплитуда и фаза в подынтегральных выражениях принимаются постоянными.

При решении задач можно вместо времени  $t$  ввести безразмерное время  $\tau = \omega t$ .

### *Автоколебания*

Релаксационные или почти гармонические автоколебания могут возникнуть в нелинейной цепи с элементами, имеющими спадающий участок вольт-амперной характеристики, или в цепях с обратной связью.

Расчет генераторов релаксационных колебаний часто выполняется методом кусочно-линейной аппроксимации.

При расчете генераторов почти гармонических колебаний достаточно учесть основную гармонику. На первом этапе исследования таких генераторов полагают, что амплитуды (относительно состояния равновесия) малы и цепь можно считать линейной. В линейном приближении находится условие возбуждения колебаний из условий устойчивости и определяется частота по мнимым составляющим корней характеристического уравнения.

При линейном приближении нельзя определить амплитуду колебаний. Для определения амплитуды в установившемся режиме необходимо учесть нелинейности характеристик элементов, у которых нелинейность проявляется наиболее сильно.

Расчет амплитуды и частоты автоколебаний может быть выполнен методом усреднения или методом гармонической линеаризации. При расчете методом гармонической линеаризации учитывается только основная гармоника и возможно применение комплексного метода. При этом принимается во внимание зависимость эквивалентных параметров нелинейных элементов от амплитуд переменных величин, определяющих нелинейность характеристики.

Составив характеристическое уравнение  $[Z_{\text{вх}}(p) = 0]$  для цепи с эквивалентными параметрами, можно определить частоту и амплитуду установившихся колебаний, решив совместно два уравнения:

$$\operatorname{Re} [Z_{\text{вх}}(j\omega)] = 0; \quad \operatorname{Im} [Z_{\text{вх}}(j\omega)] = 0. \quad (14.7)$$

### *Численные методы интегрирования*

При расчете нелинейной цепи с применением метода переменных состояния составляется система, например,  $n$  дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет вид:

$$dx_j/dt = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (14.8)$$

где  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — переменные состояния, в качестве которых часто выбирают токи в индуктивностях или потокоцепления, напряжения на емкостях или заряды.

При численном интегрировании уравнений состояния (14.8) все переменные, включая и время  $t$ , рассматриваются как дискретные величины и выбирается шаг интегрирования  $h = \Delta t$ . На каждом шаге по известному состоянию в момент времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), т. е.  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ , находится состояние при  $t_{k+1} = t_k + h$ .

Наиболее простым методом численного интегрирования является метод Эйлера. Так, для цепи первого порядка с одним реактивным элементом в соответствии с уравнением состояния

$$dx/dt = f(x, t) \quad (14.9)$$

значение переменной при  $t = t_{k+1}$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k + \int_{t_k}^{t_k+h} f(x, t) dt, \quad (14.10)$$

где  $x_k$  — известное значение переменной при  $t = t_k$ ;  $\Delta x_k$  — приращение переменной на  $k$ -м шаге.

Предполагается, что известно начальное условие при  $t = t_0$ , т. е.  $x(t_0) = x_0$ .

При численном интегрировании значение интеграла (14.10) находится приближенно. В соответствии с явной (прямой) формулой Эйлера подынтегральная функция на интервале полагается постоянной и равной производной в начале интервала, т. е.

$$f(x_k, t_k) = dx/dt|_{t=t_k}.$$

При этом по (14.10)

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k). \quad (14.11)$$

Если выбирается значение производной в конце интервала

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}) = dx/dt|_{t=t_{k+1}},$$

то получается неявная (обратная) формула Эйлера:

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}, t_{k+1}). \quad (14.12)$$

Искомое значение  $x_{k+1}$  входит в (14.12) неявно и может быть найдено как решение этого нелинейного алгебраического уравнения. Неявный метод применяется с целью получения устойчивого процесса.

Для цепи второго порядка уравнения состояния имеют вид:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2, t); \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2, t). \quad (14.13)$$

Предполагается, что известны начальные условия при  $t = t_0$ , т.е.  $x_1(t_0) = x_{10}$  и  $x_2(t_0) = x_{20}$ . В этом случае явные формулы Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= x_{1k} + hf_1[x_{1k}, x_{2k}, t_k]; \\ x_2(k+1) &= x_{2k} + hf_2[x_{1k}, x_{2k}, t_k]. \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

Если характеристики нелинейных элементов задаются в виде таблицы, то при вычислениях выполняют интерполяцию. При линейной интерполяции зависимости  $y(x)$  между двумя точками  $i$  и  $j$  применяется формула

$$y = y_i(x - x_j)/(x_i - x_j) + y_j(x - x_i)/(x_j - x_i), \quad (14.15)$$

где  $j = i + 1$ ;  $i$  — порядковый номер точки в таблице.

### 14.1. Аналитические и графические методы расчета

**14.1(Р).** Ключ в цепи по рис. 14.1, а размыкается. Заданы ЭДС  $E = 250$  В, сопротивления резисторов:  $r_1 = 120$  Ом;  $r_2 = 5$  Ом;  $r_3 = 0,2$  Ом; характеристика  $\Psi(i)$  катушки (рис. 14.1, б).

Определить ток катушки во время переходного процесса методами: 1) аналитической аппроксимации вида  $i = k\Psi^2$ ; 2) условной линеаризации; 3) кусочно-линейной аппрок-

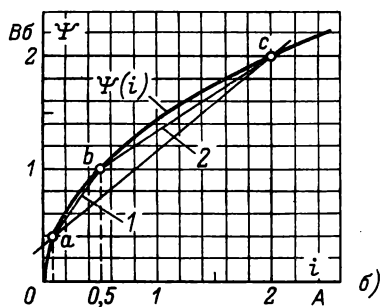
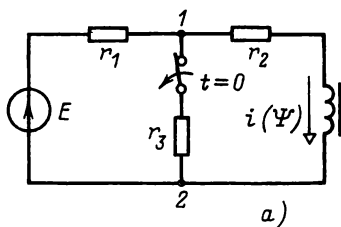


Рис. 14.1

симации с двумя отрезками прямых, проходящих через точку  $b$  с координатами  $0,5$  А;  $1$  Вб (рис. 14.1, б); 4) последовательных интервалов при аппроксимации вида  $i = k\Psi^2$ , где  $k = 0,5$  А/Вб<sup>2</sup>.

**Решение.** Составим дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$d\Psi/dt + ri(\Psi) = E, \quad (1)$$

где  $r = r_1 + r_2$ .

Определим рабочий участок характеристики  $\Psi(i)$ . В момент коммутации ( $t = 0$ ) ток в катушке не изменяется скачком,



т. е.  $i(0) = Er_3/\rho = 0,08$  А, где  $\rho = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$ , в установившемся режиме  $i(\infty) = E/(r_1 + r_2) = 2$  А.

Таким образом, начальная точка  $a$  на рабочем участке (рис. 14.1, б) имеет координаты:  $i(0) = 0,08$  А;  $\Psi(0) = 0,4$  Вб; конечная точка  $c$  — координаты  $i(\infty) = 2$  А;  $\Psi(\infty) = 2$  Вб. Во время переходного процесса  $0,08 \text{ А} \leq i(t) \leq 2 \text{ А}$  и  $0,4 \text{ Вб} \leq \Psi(t) \leq 2 \text{ Вб}$ .

1) *Метод аналитической аппроксимации.* Предварительно для принятой аппроксимации  $i(\Psi) = k\Psi^2$  определим, рассматривая начальную точку  $a$ , коэффициент аппроксимации  $k = i(0)/\Psi^2(0) = 0,08/0,4^2 = 0,5 \text{ А/Вб}^2$ .

Метод аналитической аппроксимации предполагает возможность интегрирования нелинейного дифференциального уравнения цепи (1) с учетом выбранной аппроксимации:

$$d\Psi/dt + rk\Psi^2 = E. \quad (2)$$

Разделяя переменные в (2)

$$dt = d\Psi/(E - rk\Psi^2),$$

вычислим

$$t = \frac{1}{rk} \int_{\Psi(0)}^{\Psi} \frac{d\Psi}{(E/rk - \Psi^2)} = \frac{1}{2\sqrt{rkE}} \left( \ln \frac{\sqrt{E/rk} + \Psi}{\sqrt{E/rk} - \Psi} \right) \Big|_{\Psi(0)}^{\Psi},$$

откуда

$$e^{-2\sqrt{rkE}t} = \frac{\sqrt{E/rk} - \Psi}{\sqrt{E/rk} + \Psi} \frac{\sqrt{E/rk} + \Psi(0)}{\sqrt{E/rk} - \Psi(0)} \quad (3)$$

или после подстановки значений параметров

$$e^{-250t} = \frac{2 - \Psi}{2 + \Psi} 1,5. \quad (4)$$

Из (4) находим потокосцепление

$$\Psi = \frac{3 - 2e^{-250t}}{1,5 + e^{-250t}}, \text{ Вб,}$$

и ток

$$i = k\Psi^2 = 0,5 \left( \frac{3 - 2e^{-250t}}{1,5 + e^{-250t}} \right)^2, \text{ А.}$$

Полученное аналитическое решение позволяет анализировать в общем виде влияние отдельных параметров цепи на зависимости тока и потокосцепления от времени.

2) *Метод условной линеаризации.* В методе условной линеаризации нелинейная характеристика заменяется на рабо-

чем участке прямой, т. е. рассчитывается переходный процесс в линейной цепи.

Заменим характеристику  $\Psi(i)$  на рабочем участке (рис. 14.1, б) отрезком  $ac$  прямой (не проходящей через начало координат), уравнение которой

$$i(\Psi) = (\Psi - \Psi_0)/L_0, \quad (5)$$

где  $L_0$  — индуктивность. Эту индуктивность определим по приращениям:

$$L_0 = \frac{\Psi(\infty) - \Psi(0)}{i(\infty) - i(0)} = \frac{2 - 0,4}{2 - 0,08} = 0,833 \text{ Гн},$$

и из (5) при  $i(\infty) = 2 \text{ А}$  и  $\Psi(\infty) = 2 \text{ Вб}$  вычислим  $\Psi_0 = 0,33 \text{ Вб}$ .

Подставив (5) в дифференциальное уравнение цепи (1), получим:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L_0} \Psi = E + \frac{r\Psi_0}{L_0}. \quad (6)$$

Найдем его решение в виде

$$\Psi = \Psi_y + Ae^{pt},$$

где, как следует из (6) при  $d\Psi/dt = 0$ , т. е. для установившегося режима,

$$\Psi_y = \frac{L_0}{r} E + \Psi_0 = 1,98 \text{ Вб}.$$

Корень характеристического уравнения  $p = -r/L_0 = -150 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом,  $\Psi = 1,98 + Ae^{-150t}$ .

Из условия  $\Psi(0_+) = \Psi(0_-) = 0,4$  находим  $A = 0,4 - 1,98 = -1,58$  и  $\Psi = 1,98 - 1,58e^{-150t}$ , Вб.

По кривой  $i(\Psi)$  ток  $i(t)$  может быть найден графически. При заданной зависимости  $i = k\Psi^2$ , где  $k = 0,5$ , получим аналитическое решение

$$i = 0,5(1,98 - 1,58e^{-150t})^2, \text{ А}.$$

3) *Метод кусочно-линейной аппроксимации.* Для повышения точности расчета рабочий участок характеристики заменим отрезками нескольких прямых, в рассматриваемой задаче по условию отрезками  $ab$  и  $bc$  (рис. 14.1, б). Расчет для каждого участка выполним так же, как для линейной цепи. Постоянные интегрирования найдем из условия непрерывности изменения рассматриваемой величины при переходе с одного участка на другой. Для каждого участка определим момент времени, соответствующий переходу на следующий участок.

Для расчета тока  $i(t)$  исходное дифференциальное уравнение (1) представим в виде

$$\frac{d\Psi}{dt} \frac{di}{dt} + ri = E, \quad (7)$$

где на каждом участке

$$\Psi = L_k i + \Psi_k \quad (k = 1, 2), \quad (8)$$

т. е. вместо (7) получим:

$$L_k \frac{di}{dt} + ri = E. \quad (9)$$

Рассмотрим решение на каждом участке.

а) Первый участок  $ab$  ( $k = 1$ ). На этом участке в интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$  ток и потокосцепление изменяются в пределах  $0,08 \text{ А} \leq i \leq 0,5 \text{ А}$ ;  $0,4 \text{ Вб} \leq \Psi \leq 1 \text{ Вб}$ , т. е. индуктивность

$$L_1 = \Delta\Psi_1/\Delta i_1 = (1 - 0,4)/(0,5 - 0,08) = 1,43 \text{ Гн.}$$

Ток

$$i = i_y + i_{\text{св}} = \frac{E}{r_1 + r_2} + A_1 e^{p_1 t},$$

где  $i_y = 2 \text{ А}$ ;  $p_1 = -(r_1 + r_2)/L_1 = -87,4 \text{ с}^{-1}$ .

Из условия  $i(0_+) = i(0_-) = 0,08 \text{ А}$  находим постоянную  $A_1 = -1,92$ . Следовательно, ток на первом участке

$$i = 2 - 1,92e^{-87,4t}, \text{ А.}$$

Время  $t_1$ , соответствующее моменту перехода на второй участок, определим из условия  $i(t_1) = 0,5 \text{ А}$ , т. е.

$$0,5 = 2 - 1,92e^{-87,4t_1},$$

откуда

$$t_1 = \frac{1}{87,4} \ln \frac{1,92}{1,5} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

б) Второй участок  $bc$  ( $k = 2$ ). На этом участке в интервале времени  $t_1 \leq t \leq \infty$  ток и потокосцепление изменяются в пределах  $0,5 \text{ А} \leq i \leq 2 \text{ А}$ ;  $1 \text{ Вб} \leq \Psi \leq 2 \text{ Вб}$ , т. е. индуктивность  $L_2 = \Delta\Psi_2/\Delta i_2 = 0,67 \text{ Гн.}$

Ток

$$i = i_y + i_{\text{св}} = \frac{E}{r_1 + r_2} + A_2 e^{p_2(t-t_1)},$$

где  $i_y = 2 \text{ А}$ ;  $p_2 = -(r_1 + r_2)/L_2 = -186,6 \text{ с}^{-1}$ . Учитывая, что  $i(t_1) = 0,5 \text{ А}$ , находим постоянную  $A_2 = -1,5$ .

Таким образом, на втором участке ток

$$i = 2 - 1,5e^{-186,6(t-t_1)}, \text{ A.}$$

На втором участке вследствие насыщения ( $L_2 < L_1$ ) постоянная времени меньше, чем на первом.

Таблица 14.1

$t \cdot 10^{-3}, \text{ c}$	$\Psi, \text{ Вб}$	$i, \text{ A}$	$t \cdot 10^{-3}, \text{ c}$	$\Psi, \text{ Вб}$	$i, \text{ A}$
0,0	0,40000	0,08000	10,0	1,87635	1,76035
2,0	0,88000	0,38720	12,0	1,93626	1,87456
4,0	1,28320	0,82330	14,0	1,96762	1,93577
6,0	1,57737	1,24405	16,0	1,98368	1,96749
8,0	1,76636	1,56001	18,0	1,99180	1,98364

4) *Метод последовательных интервалов.* При решении задачи этим методом интервал времени, в течение которого рассчитывается переходный процесс, делим на  $n$  интервалов — шагов  $\Delta t = h$ .

В фиксированный момент времени  $t_k = kh$  на  $k$ -м интервале потокосцепление равно  $\Psi_k$ . Через интервал времени  $\Delta t$ , т. е. момент  $t_{k+1} = (k+1)h$ , потокосцепление изменится на  $\Delta\Psi_k$ , т. е.

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \Delta\Psi = \Psi_k + \int_{\Psi_k}^{\Psi_{k+1}} d\Psi.$$

Представив уравнение цепи (1) в виде

$$d\Psi/dt = E - ri(\Psi), \quad (10)$$

получим:

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [E - ri(\Psi)] dt. \quad (11)$$

Интеграл вычислим приближенно, полагая подынтегральную функцию на малом интервале времени постоянной при токе  $i(\Psi) = i(\Psi_k)$  в начале интервала. В результате получим явную формулу Эйлера:

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + [E - ri(\Psi_k)] h. \quad (12)$$

Выбрав шаг  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  с при заданной аппроксимации  $i = k\Psi^2$ , где  $k = 0,5 \text{ A/Вб}^2$ , запишем расчетную формулу (12)

в виде

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + 0,5 - 0,125\Psi_k^2, \text{ Вб.}$$

Результаты расчета сводим в табл. 14.1.

14.2(Р). Для схемы рис. 14.2 методом условной линеаризации найти наибольшее возможное отношение максимального тока переходного процесса к амплитуде тока в установившемся режиме.

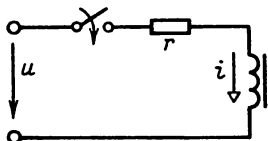


Рис. 14.2

Дано:  $U = 1200 \text{ В}$ ;  $f = 400 \text{ Гц}$ ;  $r = 500 \text{ Ом}$ ; вебер-амперная характеристика катушки аппроксимирована зависимостью  $i = k\Psi^5$ , где  $k = 1,5 \text{ А/Вб}^5$ .

Решение. При мгновенном значении напряжения питания  $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$  запишем дифференциальное уравнение цепи для потоко-сцепления

$$d\Psi/dt + rk\Psi^5 = U_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (1)$$

Вычислим эквивалентную индуктивность катушки  $L_{\text{эк}}$ , заменяя заданную вебер-амперную характеристику линейной зависимостью  $i = \Psi/L_{\text{эк}}$ . При определении рабочего участка характеристики будем считать, что  $r = 0$ , т.е.  $u_L = u$ . Тогда рабочий участок задается пределами изменения потоко-сцепления и тока  $-\Psi_m \leq \Psi \leq \Psi_m$ ;  $-i_{\text{max}} \leq i \leq i_{\text{max}}$ , причем по (13.7)  $\Psi_m = U/4,44f = 0,676 \text{ Вб}$  и по характеристике катушки  $i_{\text{max}} = k\Psi_m^5 = 0,21 \text{ А}$ .

Эквивалентная индуктивность  $L_{\text{эк}} = \Psi_m/i_{\text{max}} = 3,19 \text{ Гн}$ .

Принятое допущение ( $r = 0$ ) при определении  $L_{\text{эк}}$  и  $i_{\text{max}}$  допустимо, так как  $\omega L_{\text{эк}} = 8000 \text{ Ом} \gg r = 500 \text{ Ом}$ .

Применяя метод условной линеаризации, решаем вместо уравнения цепи первого порядка (1) линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L_{\text{эк}}} \Psi = U_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (2)$$

Запишем решение в виде

$$\Psi = \Psi_y + \Psi_{\text{св}} = \Psi_y + Ae^{pt},$$

где  $\Psi_y = \Psi_{ym} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$ ;  $\Psi_{ym} = L_{\text{эк}} I_m = L_{\text{эк}} U_m / \sqrt{(\omega L_{\text{эк}})^2 + r^2} = 0,675 \text{ Вб}$ ;  $\varphi = \arctg(\omega L_{\text{эк}}/r) = 86^\circ 25'$ ;  $p = -r/L_{\text{эк}} = -157 \text{ с}^{-1}$ .

Учитывая, что  $\Psi(0) = \Psi_{ym} \sin(\alpha - \varphi) + A = 0$ , находим:  $A = -\Psi_{ym} \sin(\alpha - \varphi)$ ; следовательно,

$$\Psi = 0,675 \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - 0,675 \sin(\alpha - \varphi) e^{-157t} \text{ Вб.}$$

Значение угла  $\alpha$ , определяющего начальную фазу напряжения, т. е. момент замыкания ключа, найдем из условия получения наибольших значений потокосцепления  $\Psi$  и тока  $i$  во время переходного процесса в линеаризованной цепи  $r, L_{\text{эк}}$ . Очевидно, этому будет соответствовать условие  $\alpha - \varphi = \pi/2$ , при выполнении которого свободная составляющая наибольшая, т. е.  $\alpha = \pi/2 + \varphi = 176^\circ 25'$ .

Таким образом, потокосцепление

$$\Psi = 0,675 \cos \omega t - 0,675e^{-157t}, \text{ Вб.}$$

Определим возможное наибольшее значение потокосцепления во время переходного процесса  $\Psi_{\text{max}}$ , которое получится в некоторый момент времени  $t'$ . Сопоставляя постоянную времени линеаризованной цепи  $\tau = -1/p = 6,38 \cdot 10^{-3}$  с и период  $T = 1/f = 2,5 \cdot 10^{-3}$  с, замечаем, что  $\tau > T$ . Поэтому, не анализируя трансцендентное уравнение, считаем  $t' = T/2 = 1,25 \cdot 10^{-3}$  с. В этот момент

$$|\Psi| = \Psi_{\text{max}} = |-0,675 - 0,675e^{-157 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}}| = 1,23 \text{ Вб}$$

и соответствующий ток  $i'_{\text{max}} = 1,5\Psi_{\text{max}}^5 = 4,34 \text{ А.}$

Искомое отношение  $i'_{\text{max}}/i_{\text{max}} = 4,34/0,21 = 20,6$ .

**14.3.** В цепи рис. 14.1, а после размыкания ключа наступил практически установившийся режим. В момент времени, который принят за  $t = 0$ , произошло короткое замыкание между точками 1 и 2. Параметры цепи и кривая намагничивания  $\Psi(i)$  приведены в условии задачи 14.1.

Применяя методы: 1) аналитической аппроксимации; 2) кусочно-линейной аппроксимации, определить ток катушки  $i(t)$  во время переходного процесса и найти зависимость дифференциальной индуктивности катушки  $L_d$  от времени, учитывая связь  $L_d(\Psi)$ .

**У к а з а н и е.** При расчете методом кусочно-линейной аппроксимации принять, что характеристика катушки  $\Psi(i)$  задается двумя отрезками прямых  $cb$  и  $bo$  с координатами точки  $c$ : 2 А, 2 Вб; точки  $b$ : 0,5 А, 1 Вб (рис. 14.1, б).

**14.4.** Пренебрегая потерями в магнитопроводе и потоком рассеяния, определить во время переходного процесса напряжение  $u_2$  на выходе трансформатора (рис. 14.4).

Дано:  $E_1 = 6 \text{ В}$ ;  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $w_2 = 2w_1$ . Зависимость  $\Psi(i)$  для первичной обмотки трансформатора аппроксимирована отрезками двух прямых  $\Psi = 0,8i$  при  $0 \leq i \leq 0,5$  и  $\Psi = 0,35 + 0,1i$  при  $0,5 \leq i \leq 1,5$ , где  $\Psi$  — в веберах,  $i$  — в амперах.

Сопоставить полученный результат с зависимостью  $u_2(t)$  в случае, если магнитопровод не будет насыщаться.

**14.5.** Конденсатор емкостью  $C = 12$  мкФ заряжен до напряжения  $U_0 = 1$  В. С момента  $t = 0$  конденсатор разряжается через диод, вольт-амперная характеристика которого аппроксимирована зависимостью  $i = ku^2$ , где  $k = 10$  мА/В<sup>2</sup>.

Определить методом аналитической аппроксимации время разрядки конденсатора до напряжения, равного 0,5 В. Найти это же время методом условной линеаризации.

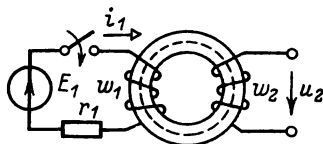
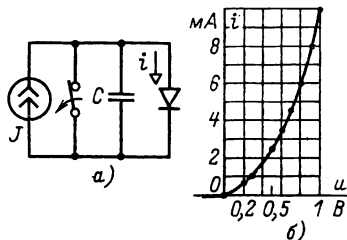


Рис. 14.4

Рис. 14.6 →



**14.6.** Определить ток  $i$  во время переходного процесса в цепи рис. 14.6, а.

Дано: ток источника  $J = 10$  мА, емкость конденсатора  $C = 5$  мкФ и вольт-амперная характеристика диода (рис. 14.6, б). Задачу решить методами: а) аналитической аппроксимации вольт-амперной характеристики диода параболой  $i = ku^2$ ; б) условной линеаризации. Методом последовательных интервалов найти время, в течение которого напряжение на конденсаторе достигнет значения 0,8 В.

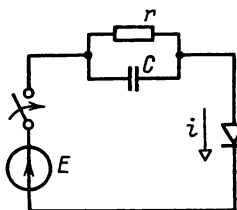


Рис. 14.7

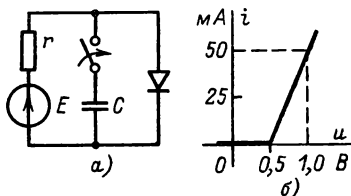


Рис. 14.8

**14.7.** Определить время переходного процесса в цепи рис. 14.7, считая, что переходный процесс заканчивается, когда ток диода составит  $0,1i(0_+)$ , где  $i(0_+)$  — ток в момент коммутации.

Характеристика диода приведена на рис. 14.6, б;  $E = 1$  В;  $r = 2$  кОм;  $C = 4$  мкФ.

Задачу решить методами: а) аналитической аппроксимации характеристики диода зависимостью  $i(u) = k_1 u + k_2 u^2$ , коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  выбрать, считая, что значения тока и напряжения диода, найденные по его характеристике, совпадают со значениями, определяемыми зависимостью  $i = k_1 u + k_2 u^2$  в крайних точках рабочего участка; б) условной линеаризации; в) последовательных интервалов при шаге  $\Delta t = \tau/4$ , где  $\tau$  — постоянная времени цепи при линеаризации.

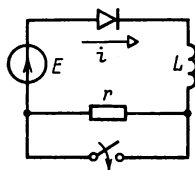


Рис. 14.9

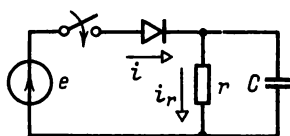


Рис. 14.10

**14.8.** Заданы ЭДС  $E = 1,5$  В и параметры схемы рис. 14.8, а:  $r = 10$  Ом;  $C = 20$  мкФ; вольт-амперная характеристика диода приведена на рис. 14.8, б.

Определить напряжение на диоде во время переходного процесса (после замыкания ключа) методом кусочно-линейной аппроксимации.

**14.9.** Методом условной линеаризации определить время, за которое напряжение на индуктивной катушке (рис. 14.9) после коммутации уменьшится на 80 %.

Дано:  $E = 1$  В;  $L = 0,5$  Гн;  $r = 0,7$  кОм; характеристика диода приведена на рис. 14.6, б.

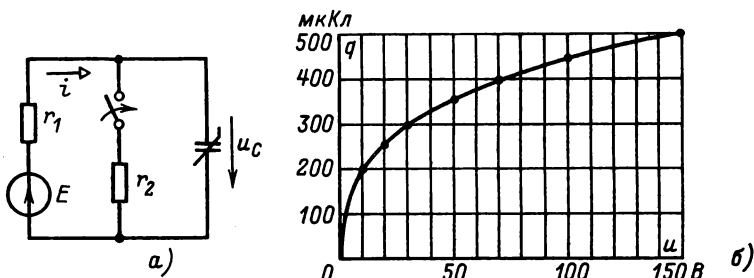


Рис. 14.11

**14.10.** Найти время, в течение которого ток  $i$ , в цепи рис. 14.10 достигнет значения  $0,9 I_r$ , где  $I_r$  — ток установившегося режима после коммутации. Задачу решить методами



аналитической аппроксимации характеристики диода, полагая  $i(u) = au^2$ , где  $a = 100 \text{ мА/В}^2$ , и условной линеаризации.

Дано:  $C = 50 \text{ мкФ}$ ;  $r = 40 \text{ Ом}$ ; ЭДС  $e = E = 1 \text{ В}$ .

**14.11.** Определить в схеме рис. 14.11, а напряжение  $u_C$  на емкости после коммутации при  $E = 150 \text{ В}$ ;  $r_1 = 56 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 4 \text{ Ом}$ ; вольт-кулоная характеристика конденсатора приведена на рис. 14.11, б.

Задачу решить методами: а) кусочно-линейной аппроксимации двумя отрезками прямых, пересекающимися при  $u = 50 \text{ В}$ ; б) условной линеаризации.

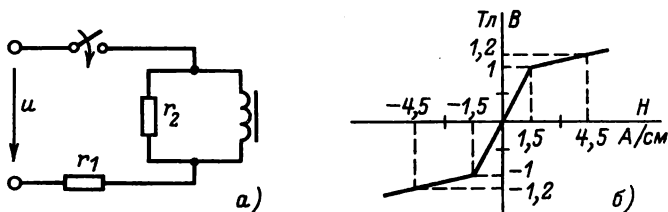


Рис. 14.12

**14.12.** Определить методом условной линеаризации наибольшее возможное значение тока в индуктивной катушке (рис. 14.12, а) во время переходного процесса.

Напряжение питания  $U = 220 \text{ В}$ ;  $f = 50 \text{ Гц}$ ; параметры схемы  $r_1 = 50 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 800 \text{ Ом}$ ; у катушки сечение стали магнитопровода  $S = 16,5 \text{ см}^2$ ; средняя длина магнитопровода  $l = 390 \text{ см}$ ; число витков  $w = 600$ ; кривая намагничивания задана отрезками трех прямых (рис. 14.12, б).

Указание. См. решение задачи 14.2.

## 14.2. Устойчивость состояния равновесия

**14.13(Р).** Вольт-амперная характеристика газоразрядного нелинейного элемента имеет S-образную форму (см. рис. 14.Б). Рабочий участок на спадающей части этой характеристики, соответствующей разряду, аппроксимирован зависимостью  $u = k_1 + k_2/i$ , где  $k_1 = 20 \text{ В}$ ;  $k_2 = 25 \text{ В} \cdot \text{А}$ .

Нелинейный элемент включен в цепь по рис. 14.13, где сопротивление резистора  $r = 8 \text{ Ом}$ , постоянная ЭДС источника  $E = 50 \text{ В}$ .

Найти состояния равновесия и определить условия их устойчивости. На плоскости параметров  $E, r$  построить область устойчивого разряда.

**Решение.** Найдем ток, определяющий состояния равновесия, аналитически. Запишем уравнение цепи (рис. 14.13)

$$ri + u = ri + k_1 + k_2/i = E \quad (1a)$$

или

$$i^2 - \frac{k_1 - E}{r} i + \frac{k_2}{r} = 0, \quad (16)$$

откуда

$$i_{01, 02} = (E - k_1)/2r \pm \sqrt{[(E - k_1)/2r]^2 - k_2/r},$$

т.е. на рассматриваемом рабочем участке возможны два состояния равновесия:  $i_{01} = 2,5$  А и  $i_{02} = 1,25$  А.

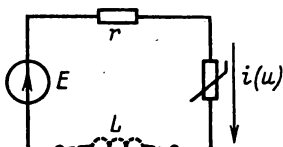
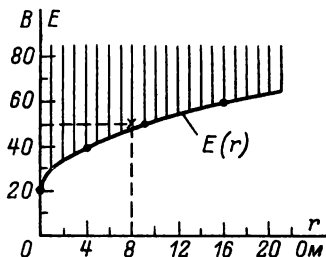


Рис. 14.13

Рис. 14.13Р →



Для исследования их устойчивости в резистивную цепь (рис. 14.13) последовательно с нелинейным элементом, имеющим S-образную характеристику, необходимо включить индуктивность  $L$  (значение ее может быть очень малым). При этом процессы в цепи будут описываться дифференциальным уравнением

$$L di/dt + ri + k_1 + k_2/i = E. \quad (2)$$

Рассмотрим малые отклонения  $\xi$  относительно равновесий  $i_{0n}$  ( $n = 1, 2$ ). Записав ток в виде  $i = i_{0n} + \xi$ , подставим его в дифференциальное уравнение (2) и получим:

$$L d\xi/dt + r(i_{0n} + \xi) + k_1 + k_2/(i_{0n} + \xi) = E.$$

Последнее слагаемое в левой части равенства представим в виде ряда Тейлора, ограничиваясь слагаемым с линейной зависимостью, т.е.

$$\frac{k_2}{i_{0n} + \xi} \approx \frac{k_2}{i_{0n}} - \frac{k_2}{i_{0n}^2} \xi.$$

При этом, учитывая, что в соответствии с (1a)

$$ri_{0n} + k_1 + k_2/i_{0n} = E, \quad (3)$$

получаем линейное дифференциальное уравнение для отклонений

$$L \frac{d\xi}{dt} + (r - k_2/i_{0n}^2) \xi = 0.$$

Состояния равновесия будут устойчивыми, если коэффициенты этого уравнения будут положительными (корень характеристического уравнения — отрицательным), т. е. если  $(r - k_2/i_{0n}^2) > 0$ .

Для состояния равновесия  $i_{01} = 2,5$  А находим  $(8 - 25/2,5^2) = 4 > 0$ , т. е. оно устойчиво, а при  $i_{02} = 1,25$  А получим  $(8 - 25/1,25^2) < 0$ , т. е. это состояние равновесия неустойчиво.

Для определения области устойчивого разряда на плоскости параметров  $E, r$  запишем условие границы устойчивости

$$(r - k_2/i_{0n}^2) = 0,$$

откуда, определив  $i_{0n} = \sqrt{k_2/r}$  и подставив это значение в (3), получим уравнение для построения границы рассматриваемой области

$$E = k_1 + 2\sqrt{k_2 r} = 20 + 10\sqrt{r}.$$

На рис. 14.13Р построена кривая  $E(r)$ , разделяющая первый квадрант на две области: верхнюю (заштрихованную) и нижнюю. Точка  $E = 50$  В и  $r = 8$  Ом (заданные значения) находится в верхней области. Поэтому приходим к выводу, что эта область соответствует устойчивому разряду при токе  $i_{01}$ . Эта же область параметров соответствует возможному появлению и неустойчивых состояний, так как при токе  $i_{02}$  состояние равновесия неустойчивое.

В нижней области при заданной аппроксимации вольт-амперной характеристики состояния равновесия существовать не могут. В действительности, если учесть нарастающий участок вольт-амперной характеристики нелинейного элемента, эта область будет соответствовать устойчивым режимам в отсутствие разряда.

**14.14(Р).** Коэффициент усиления  $k = u_2/u_1$  усилителя с обратной связью (рис. 14.14) не зависит от амплитуды и частоты напряжения  $u_1$  на входе. Усилитель имеет бесконечно большое входное сопротивление и равное  $r$  выходное.

Определить условие устойчивости состояния равновесия. На плоскости параметров  $kM$  и  $r_1$  построить область возбуждения колебаний.

**Решение.** Представим схему с обратной связью (рис. 14.14) эквивалентной схемой (рис. 14.14Р, а) с зависимым

источником, ЭДС которого равна  $ku_1$  и внутреннее сопротивление  $r$  равно выходному сопротивлению усилителя.

Так как независимых источников в линейной схеме рис. 14.14Р, а нет, то должно быть нулевое состояние равновесия. Для исследования его устойчивости составим характеристическое уравнение методом входного сопротивления (14.3), для чего последовательно с зависимым источником ЭДС включим источник ЭДС  $E(p)$  и найдем ток  $I(p)$  (рис. 14.14Р, а). Обозначим сопротивление параллельного соединения элементов  $r_1$  и  $C$

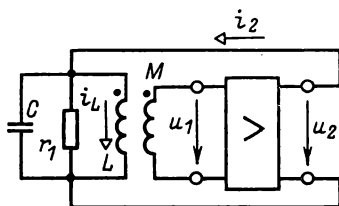


Рис. 14.14

$$Z = (r_1/pC)/(r_1 + 1/pC)$$

и запишем ток

$$I(p) = \frac{E(p) + kU_1(p)}{r + ZpL/(Z + pL)} = \frac{E(p)(Z + pL)}{r(Z + pL) + pZ(L - kM)},$$

так как

$$U_1(p) = pMI_L(p) = pMI(p)Z/(Z + pL).$$

Входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{E(p)}{I(p)} = \frac{r(Z + pL) + pZ(L - kM)}{Z + pL},$$

т. е. характеристическое уравнение

$$r(Z + pL) + pZ(L - kM) = 0$$

или (если подставить  $Z$ )

$$p^2 + \frac{L(r + r_1) - r_1kM}{rr_1LC}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Для устойчивости состояния равновесия необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения второго порядка были положительными, т. е. должно быть  $[L(r + r_1) - r_1kM] > 0$ . Граничное значение этого условия определяет границу области возбуждения

$$kM = L + rL/r_1.$$

Зависимость  $kM(r_1)$  приведена на рис. 14.14Р, б. При значениях  $kM$  и  $r_1$ , соответствующих верхней (заштрихованной) области, когда коэффициент при  $p$  характеристического урав-

нения отрицателен, так как  $kM > L(1 + r/r_1)$ , и корни характеристического уравнения положительны, условие устойчивости не выполняется, т. е. происходит возбуждение колебаний. Колебания возбуждаются только при положительных значениях  $kM$

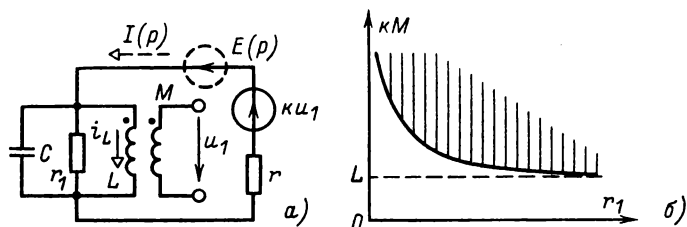


Рис. 14.14Р

(рис. 14.14Р, б), т. е.  $k$  и  $M$  должны быть одного знака. При инвертирующем усилителе, у которого коэффициент усиления  $k < 0$ , необходимо  $M < 0$ , т. е. при тех же уравнениях цепи нужно поменять местами выводы одной из катушек трансформатора.

С уменьшением сопротивления  $r_1$  добротность резонансного контура уменьшается и для возбуждения колебаний нужно выбрать большее значение  $k$ , чтобы компенсировать потери.

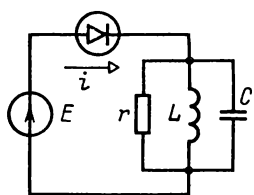


Рис. 14.16

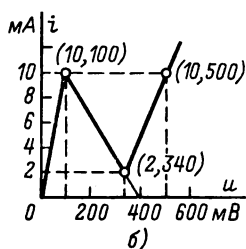
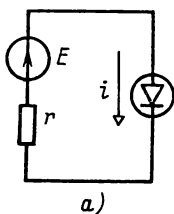


Рис. 14.17

**14.15.** Для амплитуды колебаний  $a(\tau)$  в автогенераторе известно дифференциальное уравнение  $da/d\tau = \varepsilon a(1 - a^2/4)$ , где  $\varepsilon$  — обобщенный параметр цепи;  $\tau$  — безразмерное время.

Определить состояния равновесия  $a_{0n}$  и условия их устойчивости.

**14.16.** Вольт-амперная характеристика туннельного диода в схеме рис. 14.16 аппроксимирована для переменных составляющих тока и напряжения относительно рабочей точки зависимостью  $i = -k_1 u + k_2 u^3$ .

Составить для напряжения на диоде дифференциальное уравнение и привести его к виду

$$d^2x/d\tau^2 + \varepsilon(1 - x^2)dx/d\tau + x = 0.$$

Определить состояние равновесия  $x_0$  и получить условие его устойчивости.

У к а з а н и е. Учесть обозначение и нормировки:

$$u = x / \sqrt{\frac{3k_2}{k_1 - 1/r}}; \quad t = \tau \sqrt{LC}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}}(k_1 - 1/r).$$

14.17. Для схемы рис. 14.17, а при аппроксимации вольт-амперной характеристики туннельного диода отрезками прямых, как показано на рис. 14.17, б, определить условие устойчивости состояния равновесия. В плоскости параметров  $E, r$  построить область, для которой возможны неустойчивые состояния равновесия.

14.18. Определить емкость конденсатора из условия возбуждения колебаний в схеме рис. 14.18, если в рабочей точке характеристики нелинейного элемента его дифференциальное сопротивление равно  $r_d$  и отрицательно.

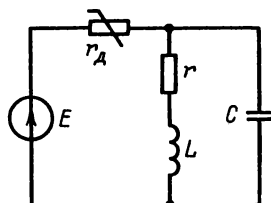


Рис. 14.18

14.19. Схема автогенератора с индуктивной обратной связью и полевым транзистором представлена на рис. 14.19, а. На рис. 14.19, б приведена схема замещения транзистора в линейном режиме при тех же обозначениях выводов транзистора:  $c$  – сток,  $u$  – исток,  $z$  – затвор.

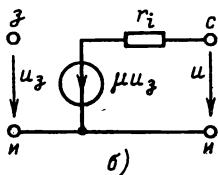
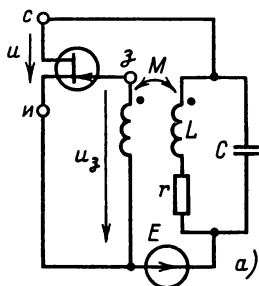


Рис. 14.19

Определить в общем виде условие возбуждения колебаний. Построить на плоскости параметров  $\mu M$  и  $r$  область возбуждения.

**14.20.** В схеме с обратной связью (рис. 14.20) усилитель имеет коэффициент усиления  $k = u_2/u_1$ , не зависящий от частоты и значения напряжения на входе, входное сопротивление  $r_{вх} = \infty$ , выходное сопротивление  $r_{вых} = 0$ .

Определить в общем виде условие устойчивости и построить область возбуждения на плоскости параметров: а)  $k, r$ ; б)  $k, C$ .

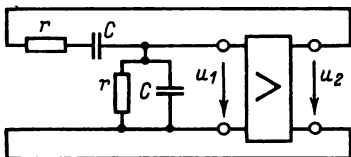


Рис. 14.20

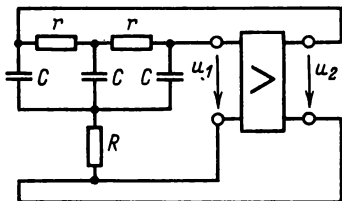


Рис. 14.21

**14.21.** В схеме рис. 14.21 усилитель идеальный (с постоянным коэффициентом усиления  $k = u_2/u_1$ , бесконечно большим входным сопротивлением и равным нулю выходным).

Определить условия устойчивости.

### 14.3. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости

**14.22(Р).** Для схемы рис. 14.22, а заданы: ЭДС  $E = 9$  В и параметры  $r = 9$  кОм;  $C = 0,1$  мкФ; вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $i(u)$  аппроксимирована тремя отрезками прямых (рис. 14.22, б):  $fb$ ;  $bd$ ;  $dc$ .

а) Построить фазовые траектории для напряжения на конденсаторе; б) установить устойчивость состояния равновесия; в) найти период колебаний; г) по фазовой траектории определить зависимость  $u_C(t)$ .

**Решение.** Ответы на поставленные вопросы найдем, применяя метод фазовой плоскости и учитывая особенности фазовых траекторий, определяемых отрезками прямых.

а) Для построения фазовых траекторий  $y(x)$ , где  $x = u_C$ ;  $y = du_C/dt$ , составим дифференциальные уравнения схемы по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_C + i(u) = C du_C/dt + i;$$

$$ri_1 + u = E; \quad u - u_C = 0.$$

Исключив ток  $i_1$  и напряжение  $u$ , получим для напряжения на емкости зависимость — прямую  $(E - u_C)/r = f(u_C)$ . Чтобы

получить траектории  $u(x)$ , вычтем из ординат этой зависимости ординаты характеристики  $i(u_c) = i(u)$  при одних и тех же значениях  $u = u_c$ . Получим отрезки  $fab$ ,  $bd$  и  $dc$  на рис. 14.22Р, а.

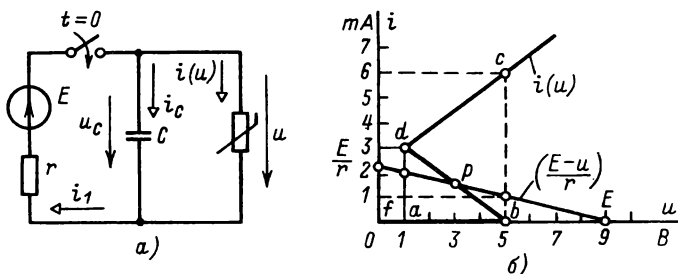


Рис. 14.22

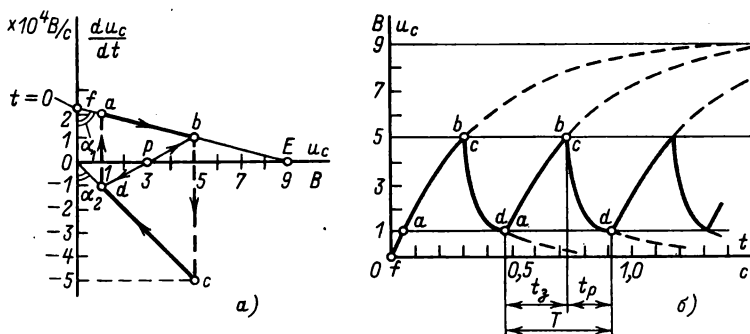


Рис. 14.22Р

Дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе

$$du_c/dt = \frac{1}{C} [(E - u_c)/r - i(u_c)] = 10^4 [(E - u_c)/r - i(u)], \text{ В/с,}$$

где учтено, что на рис. 14.22, б ток задан в миллиамперах.

Свойства фазовой плоскости позволяют указать стрелками на рис. 14.22Р, а возможные направления движения изображающей точки. Моменту времени  $t = 0$  соответствует точка  $f$ , так как  $i(0) = 0$ . Состояние равновесия ( $du_c/dt = 0$ ) определяется точкой  $p$ . Первоначально с увеличением напряжения  $u_c$  изображающая точка перемещается от точки  $f$  к точке  $b$ . Из точки  $b$  движение изображающей точки к точке  $p$  невозможно (в соответствии с указанным направлением движения). Но изображающая точка не может остаться и в точке  $b$ , поскольку точка  $b$



не определяет состояния равновесия. Поэтому изображающая точка из точки  $b$  скачкообразно (при неизменном напряжении  $u_C$ ) переходит в точку  $c$  (показано пунктиром). Далее аналогично из точки  $d$  происходит скачок в точку  $a$ , откуда изображающая точка снова движется к точке  $b$ , и т. д., получается непрерывное движение по замкнутой фазовой траектории  $abcd$  — предельному циклу, т. е. происходят периодические незатухающие колебания. На рис. 14.22Р,  $b$  сплошными линиями показана зависимость  $u_C(t)$ . Наклонные участки фазовой траектории  $ab$  и  $cd$  соответствуют отрезкам экспонент на рис. 14.22Р,  $b$ .

б) Устойчивость равновесия, определяемого точкой  $p$ , можно установить, рассматривая малые отклонения относительно этой точки. Как следует из указанных на рис. 14.22Р,  $a$  возможных направлений движения изображающей точки, равновесие в точке  $p$  неустойчивое.

в) Период колебаний  $T = t_3 + t_p$ , где  $t_3$  — время зарядки,  $t_p$  — разрядки конденсатора (рис. 14.22Р,  $b$ ). Зарядке соответствует участок фазовой траектории  $ab$ , разрядке —  $cd$ . Интервалы времени, необходимые для движения изображающей точки на этих участках, найдем по (14.4):

$$t_3 = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} \ln \frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{5 - 1}{(1 - 2) \cdot 10^4} \ln \frac{1 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4} = 2,775 \cdot 10^{-4} \text{ с};$$

$$t_p = \frac{1 - 5}{(-1 + 5) \cdot 10^4} \ln \frac{1 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^4} = 1,609 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Период  $T = t_3 + t_p = 4,384 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

г) Для определения периодически изменяющегося напряжения  $u_C(t)$  учтем соответствие прямолинейного участка фазовой траектории и экспоненциальной зависимости. Так, для участка  $ab$   $u_{Cab} = u_y + A_1 e^{-t/\tau_1} = E + A_1 e^{-t/\tau_1} = 9 - 8e^{-t/\tau_1}$ , так как в точке  $a$  (рис. 14.22Р,  $a$ ) при  $t = 0$  напряжение  $u_{Cab}(0) = 1$  и  $A_1 = 1 - 9 = -8$ . Аналогично для участка  $cd$   $u_{Ccd} = u_y + A_2 e^{-t/\tau_2} = -5e^{-t/\tau_2}$ , так как здесь  $u_y = 0$ .

Постоянная времени  $\tau$  экспоненциальной зависимости равна тангенсу угла наклона прямой на фазовой плоскости к оси ординат, т. е. (рис. 14.22Р,  $a$ )

$$\tau_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta u_C}{\Delta (du_C/dt)} = \frac{5 - 1}{(2 - 1) \cdot 10^4} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с};$$

$$\tau_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{5 - 1}{(5 - 1) \cdot 10^4} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Получилось  $\tau_1 > \tau_2$ , т.е. процесс зарядки происходит медленнее, чем процесс разрядки (см. кривые на рис. 14.22Р, б).

**14.23.** По кривым мгновенных значений напряжения, приведенным на рис. 14.23, а–г, построить качественно фазовые траектории на плоскости  $du/dt, u$ . Указать стрелками направления движения изображающей точки.

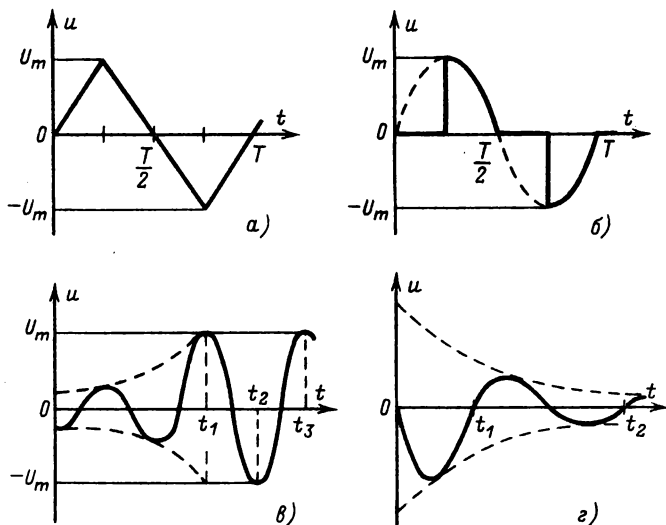


Рис. 14.23

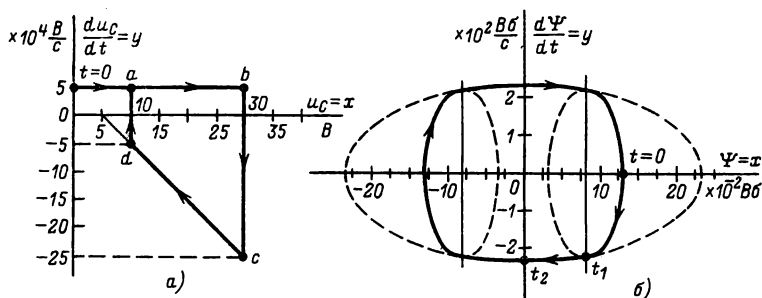


Рис. 14.24

**14.24.** По фазовым траекториям, приведенным на рис. 14.24, а, б, построить качественно кривые мгновенных значений  $u(t)$ ,  $\Psi(t)$ .

**14.25.** Характеристика диода при прямом включении (рис. 14.25) аппроксимирована зависимостью  $i = au^2$ .

Полагая, что параметры элементов схемы  $E = \text{const}$ ,  $r$  и  $C$  известны, получить уравнение фазовой траектории тока  $[di/dt = f(i)]$ .

14.26. Для потокосцепления катушки в задаче 14.1 при аналитической аппроксимации найти уравнение фазовой траектории  $d\Psi/dt = f(\Psi)$ .

14.27. Вольт-амперная характеристика газоразрядного элемента, включенного в цепь по рис. 14.27, а, где  $J = 5 \text{ мА}$ ,  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ , приведена на рис. 14.27, б.

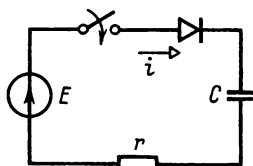
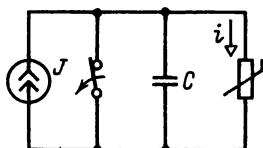


Рис. 14.25



а)

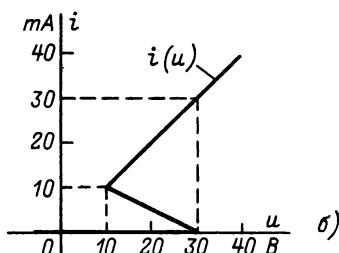
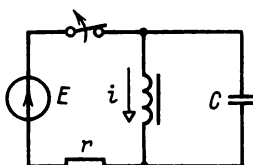


Рис. 14.27



а)

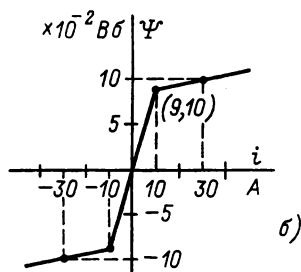


Рис. 14.28

14.28. Заданы параметры элементов в схеме рис. 14.28, а:  $E = 200 \text{ В}$ ;  $r = 2 \text{ Ом}$ ;  $C = 100 \text{ мкФ}$ ; характеристика индуктивной катушки  $\Psi(i)$  приведена на рис. 14.28, б.

а) Найти уравнения фазовой траектории и построить фазовый портрет на плоскости  $x = \Psi$ ,  $y = d\Psi/dt$ ; б) определить

период колебаний  $T$ ; в) найти период при уменьшении ЭДС  $E$  до 20 В.

**14.29.** Полагая в схеме рис. 14.29 начальные условия нулевыми,  $J = \text{const}$  и диод идеальным, составить уравнение фазовой траектории тока  $i_L [y = f(x)]$ , где  $x = i_L$ ;  $y = di_L/dt$ .

**14.30.** Для схемы задачи 14.20 установить типы особых точек при изменении коэффициента усиления  $k$  от 0 до  $\infty$ : а) в случае неинвертирующего усилителя ( $k > 0$ , положительная обратная связь); б) в случае инвертирующего усилителя ( $k < 0$ , отрицательная обратная связь).

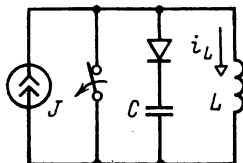


Рис. 14.29

**14.31.** Для автогенератора задачи 14.19 определить возможные типы особых точек и соответствующие соотношения параметров элементов.

## 14.4. Метод усреднения

**14.32(Р).** В схеме рис. 14.32 получен колебательный характер переходного процесса. Начальное напряжение на конденсаторе  $u_C(0) = U_0$ . При известных значениях  $r$ ,  $C$  и заданной вебер-амперной характеристике в виде  $i(\Psi) = (1/L_0)(\Psi + k\Psi^3)$  методом усреднения определить зависимости амплитуды потокосцепления, фазы и частоты собственных колебаний от времени.

**Решение.** Запишем уравнения по законам Кирхгофа для схемы рис. 14.32:

$$i_C = i_r + i(\Psi); \quad u_L - u_C = 0; \quad u_L - u_r = 0.$$

Учитывая, что  $i_C = -C du_C/dt = -C du_L/dt = -C d^2\Psi/dt^2$ , так как  $u_L = d\Psi/dt$  и  $i_r = u_r/r = u_L/r = d\Psi/r dt$ , уравнения сведем к однородному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка для потокосцепления

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{1}{rC} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{L_0 C} \Psi + \frac{k}{L_0 C} \Psi^3 = 0.$$

Введя обозначения  $2\delta = 1/rC$ ,  $\omega_0^2 = 1/L_0 C$ ,  $K = k/L_0 C$ , получим:

$$d^2\Psi/dt^2 + \omega_0^2 \Psi = -2\delta d\Psi/dt - K\Psi^3.$$

Предположим, что затухание  $2\delta$  и коэффициент аппрокси-

мации  $k$  малы; решение будем искать в виде (14.5):

$$\Psi = a \cos \theta; \quad d\Psi/dt = -a\omega_0 \sin \theta,$$

где  $\theta = \omega_0 t - \varphi$ .

Уравнения установления амплитуды  $a = a(t)$  и фазы  $\varphi = \varphi(t)$  найдем по (14.6):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} (2\delta a\omega_0 \sin \theta - Ka^3 \cos^3 \theta) \sin \theta d\theta;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} (2\delta a\omega_0 \sin \theta - Ka^3 \cos^3 \theta) \cos \theta d\theta.$$

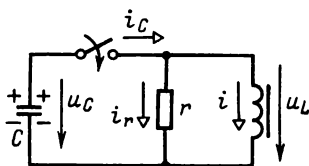


Рис. 14.32

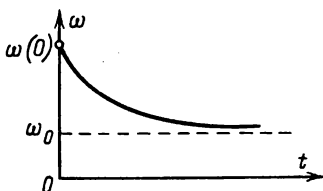


Рис. 14.32Р

Операция усреднения определяется интегрированием за период, например,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

Приведенное усреднение условно обозначим чертой сверху  $\overline{\sin^2 \theta} = 1/2$ .

Так как  $\overline{\cos^3 \theta \cdot \sin \theta} = 0$ ;  $\overline{\sin \theta \cdot \cos \theta} = 0$ ;  $\overline{\cos^4 \theta} = 3/8$ , то получим уравнения в виде

$$da/dt = -\delta a; \quad d\varphi/dt = -\frac{3}{8} Ka^2. \quad (1)$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим предварительно значения  $a(0)$  и  $\varphi(0)$ . Учитывая начальные условия для схемы рис. 14.32 и принимаемый вид решения, найдем, что

$$\Psi(0) = 0 = a(0) \cdot \cos [\omega_0 \cdot 0 - \varphi(0)];$$

$$\left. \frac{d\Psi}{dt} \right|_0 = u_L(0) = u_C(0) = U_0 = -a(0) \cdot \omega_0 \sin [\omega_0 \cdot 0 - \varphi(0)],$$

т. е.

$$a(0) \cdot \cos \varphi(0) = 0; \quad (2)$$

$$a(0) \cdot \sin \varphi(0) = U_0/\omega_0. \quad (3)$$

Так как  $a(0) \neq 0$ , то из (2)  $\varphi(0) = \pm \pi/2$ . Поскольку  $a(0) > 0$ , то из (3) имеем  $\varphi(0) = \pi/2$  и  $a(0) = U_0/\omega_0$ . Интегрируем уравнение установления амплитуды (1)  $da/a = -\delta dt$  и получаем:

$$-\delta t = \ln a + \ln \frac{1}{C_1} = \ln \frac{a}{C_1},$$

т. е.

$$a(t) = C_1 e^{-\delta t},$$

откуда, учитывая начальное значение  $a(0)$ , определим постоянную  $C_1 = U_0/\omega_0$ . Следовательно, искомое решение

$$a(t) = \frac{U_0}{\omega_0} e^{-\delta t}.$$

Подставив его в уравнение установления фазы, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3KU_0^2}{8\omega_0^2} e^{-2\delta t}$$

и после интегрирования находим:

$$\varphi(t) = \frac{3KU_0^2}{16\omega_0^2\delta} e^{-2\delta t} + C_2.$$

Так как  $\varphi(0) = \pi/2$ , то  $C_2 = \pi/2 - 3KU_0^2/16\omega_0^2\delta$  и, следовательно,

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{3KU_0^2}{16\omega_0^2\delta} (1 - e^{-2\delta t}).$$

Полная фаза колебаний

$$\theta(t) = \omega_0 t - \varphi(t) = \omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \frac{3KU_0^2}{16\omega_0^2\delta} (1 - e^{-2\delta t}).$$

Частота свободных колебаний во время переходного процесса

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{KU_0^2}{\omega_0^2} e^{-2\delta t}.$$

Зависимость  $\omega(t)$  приведена на рис. 14.32Р, где  $\omega(0) = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{KU_0^2}{\omega_0^2}$ . С течением времени при уменьшении амплитуды колебаний  $a(t)$  насыщение магнитопровода катушки ска-

зывается все меньше и меньше, индуктивность увеличивается и, как видно из графика, частота уменьшается, асимптотически приближаясь к значению  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C}$ . При  $\omega \approx \omega_0$  амплитуда колебаний мала и катушку можно считать линейной с наибольшей индуктивностью  $L \approx L_0$ .

**14.33.** В схеме рис. 14.28, а известны значения  $\Psi(0) = \Psi_0$ ,  $r$ ,  $C$  и задана характеристика  $i(\Psi) = k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$ . При размыкании ключа возникают затухающие колебания.

Найти зависимость  $\Psi(t)$  методом усреднения. Потери в контуре учесть включением параллельно индуктивности сопротивления  $r_L$ .

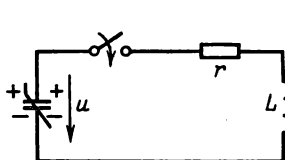


Рис. 14.34

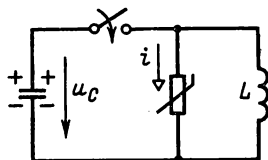


Рис. 14.35

**14.34.** Начальный заряд на конденсаторе (рис. 14.34)  $q(0) = Q_0$ . Кулон-вольтная характеристика аппроксимирована полиномом  $u(q) = k_1 q + k_3 q^3$ .

При известных параметрах  $r$  и  $L$  рассчитать зависимость  $q(t)$  во время переходного процесса методом усреднения.

**14.35.** Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора (рис. 14.35) аппроксимирована зависимостью  $i = k u^3$ , где  $k = 10^{-10}$  А/В<sup>3</sup>. Полагая, что после коммутации в цепи возникают затухающие колебания, найти время, за которое амплитуда колебаний напряжения  $u_c$  уменьшится в 2 раза.

Дано:  $L = 0,01$  Гн;  $C = 20$  пФ;  $u_c(0) = 100$  В.

**14.36.** Методом усреднения определить период свободных колебаний в схеме задачи 14.28.

**14.37.** Дифференциальные уравнения цепи по рис. 14.37, подключенной к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin \omega t$ , преобразованы относительно потокоцепления к уравнению Дуффинга:

$$d^2 x / d\tau^2 + x = \xi x - \delta dx / d\tau - \kappa x^3 + P \cos \tau.$$

Вебер-амперная характеристика индуктивной катушки аппроксимирована полиномом  $i(\Psi) = k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$ ; здесь приняты обозначения:  $x = \Psi / \Psi_6$ , где  $\Psi_6$  — заданное базисное значение потокоцепления;  $\tau = \omega t$ ;  $\delta = 1 / \omega r C$ ;  $\xi = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$ ;  $\omega_0^2 = k_1 / C$ ;  $\kappa = k_3 \Psi_6^2 / C$ ;  $P = U_m / \Psi_6 \omega$ .

а) Методом усреднения составить уравнения установления амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$ ; б) получить выражение амплитудной характеристики  $P(a)$ ; в) получить выражение амплитудно-частотной характеристики  $\xi(a)$ .

**14.38.** В последовательном контуре (рис. 14.38) частота напряжения питания  $u = U_m \sin \omega t$  равна собственной частоте контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  при малых амплитудах колебания потоко-сцепления катушки.

Считая, что потери в контуре отсутствуют ( $r = 0$ ), найти при известной емкости  $C$  и заданной характеристике катушки

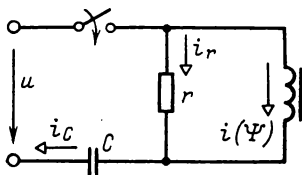


Рис. 14.37

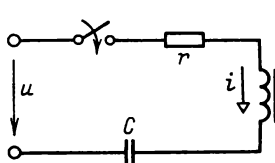


Рис. 14.38

$i(\Psi) = (1/L)(1 + k\Psi^2)\Psi$  амплитуду установившихся колебаний  $a$  методом усреднения.

**14.39.** Нелинейная характеристика катушки последовательного контура (рис. 14.38) аппроксимирована зависимостью  $\Psi = L_0 I_0 \arctg(i/I_0)$ , где  $L_0$  и  $I_0$  — коэффициенты аппроксимации; известны параметры  $r$ ,  $C$  и напряжение питания  $u = U_m \sin \omega t$ .

Методом усреднения составить уравнения установления амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$  напряжения на конденсаторе.

## 14.5. Автоколебания

**14.40(Р).** Для генератора почти гармонических колебаний (рис. 14.14) при заданной характеристике усилителя  $i_2 = k_1 u_1 - k_3 u_1^3$  составить дифференциальное уравнение цепи и определить амплитуду и частоту автоколебаний во время переходного процесса и в установившемся режиме методом усреднения. Входное и выходное сопротивления усилителя считать бесконечно большими.

**Решение.** При заданной характеристике  $i_2(u_1)$  заменим усилитель зависимым источником тока. Дифференциальное уравнение цепи составим относительно напряжения  $u_1$ , пропорционального напряжению на резонансном контуре, которое наиболее близко к синусоидальному по сравнению с другими



переменными цепи. Дифференциальное уравнение составим по предварительно записанным уравнениям в операторной форме.

Обозначив

$$Z(p) = \frac{r_1/pC}{r_1 + 1/pC},$$

получим:

$$U_1(p) = pMI_L(p) = pMI_2(p) \frac{Z(p)}{pL + Z(p)},$$

откуда

$$I_2(p) = \frac{pL + Z(p)}{pMZ(p)} U_1(p) = \frac{p^2 r_1 LC + pL + r_1}{pMr_1} U_1(p)$$

или

$$p^2 U_1(p) + \frac{1}{r_1 C} p U_1(p) + \frac{1}{LC} U_1(p) = \frac{M}{LC} p I_2(p).$$

Учитывая, что  $p$  и  $p^2$  — операторы дифференцирования и что

$$\frac{di_2(u_1)}{dt} = \frac{di_2}{du_1} \frac{du_1}{dt} = (k_1 - 3k_3 u_1^2) \frac{du_1}{dt},$$

записываем дифференциальное уравнение цепи в виде

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_1 = \frac{1}{LC} \left( k_1 M - \frac{1}{r} \right) \frac{du_1}{dt} - \frac{3k_3 M}{LC} u_1^2 \frac{du_1}{dt}. \quad (1)$$

Введем обозначения и нормировки

$$\omega_0^2 = 1/LC; \quad \tau = \omega_0 t; \quad x = u_1 \sqrt{\frac{3k_3 M}{\sqrt{LC}}}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}} \left( k_1 \frac{M}{L} - \frac{1}{r_1} \right).$$

После их подстановки в (1) получим приведенное дифференциальное уравнение цепи (уравнение Ван дер Поля):

$$d^2 x / d\tau^2 + x = \varepsilon (1 - x^2) dx / d\tau. \quad (2)$$

Полагая, что параметр  $\varepsilon$  мал, т. е. колебания почти гармонические, решение записываем в виде

$$x = a \cos \psi; \quad dx/d\tau = -a \sin \psi,$$

где  $\psi = \tau - \varphi$ .

Применив метод усреднения (14.6), находим уравнения установления амплитуды  $a(\tau)$  и фазы  $\varphi(\tau)$ :

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \psi) (-a \sin \psi) \sin \psi d\psi;$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \psi) (-a \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Учитывая, что  $\overline{\sin^2 \psi} = 1/2$ ;  $\overline{\sin^2 \psi \cdot \cos^2 \psi} = 1/8$ ;  $\overline{\sin \psi \cdot \cos \psi} = 0$ ;  $\overline{\cos^3 \psi \cdot \sin \psi} = 0$ , получаем:

$$da/d\tau = (\varepsilon a/2)(1 - a^2/4); \quad d\varphi/d\tau = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) установления фазы следует, что частота автоколебаний

$$\omega = d\psi/dt = d(\omega_0 t - \varphi)/dt = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (4)$$

т. е. равна резонансной частоте контура и остается постоянной (во время переходного процесса и в установившемся режиме).

Уравнение (3) установления амплитуды после разделения переменных можно интегрировать, предполагая, что начальное значение амплитуды  $a(0) = a_0$ :

$$d\tau = \frac{da}{\varepsilon a (4 - a^2)/8}; \quad \tau = \frac{8}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{a(4 - a^2)} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{a^2}{4 - a^2} \frac{4 - a_0^2}{a_0^2} \right)$$

или

$$\frac{a^2}{4 - a^2} \frac{4 - a_0^2}{a_0^2} = e^{\varepsilon \tau},$$

откуда амплитуда

$$a(\tau) = \frac{2a_0}{\sqrt{(4 - a_0^2) e^{-\varepsilon \tau} + a_0^2}}. \quad (5)$$

Из решения (5) видно, что для возникновения автоколебаний необходима некоторая (сколько угодно малая) начальная амплитуда  $a(0) = a_0 \neq 0$ . Практически всегда существуют случайные малые отклонения — флуктуации, которые приводят к возбуждению автоколебаний.

При  $\tau \rightarrow \infty$  независимо от начальных условий в генераторе устанавливаются колебания с амплитудой  $a_\infty = 2$ , т. е. с учетом принятых ранее обозначений для искомого напряжения  $u_1$  амплитуда

$$U_{1m} = 2\sqrt{\sqrt{LC}/3k_3M}.$$

**14.41(P).** Для генератора задачи 14.14 при характеристике усилителя  $u_2 = k_1 u_1 - k_3 u_1^3$  методом гармонической линеариза-

ции найти общие выражения для частоты и амплитуды установившихся колебаний.

**Решение.** При решении задачи методом гармонической линеаризации учитывается только основная гармоника. Поэтому предварительно определим эквивалентный коэффициент усиления  $K$  по первой гармонике.

Пусть напряжение на входе усилителя синусоидальное:  $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ . Тогда при заданной характеристике  $u_2(u_1)$  имеем:

$$u_2 = k_1 U_{1m} \sin \omega t - k_3 U_{1m}^3 \left( \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right)$$

или, отпуская третью гармонику,

$$u_2 = \left( k_1 U_{1m} - \frac{3}{4} k_3 U_{1m}^3 \right) \sin \omega t = U_{2m} \sin \omega t.$$

Эквивалентный коэффициент усиления

$$K = \frac{\dot{U}_{2m}}{\dot{U}_{1m}} = \frac{k_1 U_{1m} - \frac{3}{4} k_3 U_{1m}^3}{U_{1m}} = k_1 - \frac{3}{4} k_3 U_{1m}^2,$$

т.е. с ростом амплитуды  $U_{1m}$  напряжения на входе коэффициент усиления уменьшается (вследствие насыщения усилителя).

Далее применим условие баланса фаз и баланса амплитуд для определения амплитуды и частоты автоколебаний. Рассмотрим характеристическое уравнение генератора, полученное в решении задачи 14.14:

$$p^2 + \frac{L(r + r_1) - r_1 k M}{r r_1 L C} p + \frac{1}{L C} = 0.$$

Учитывая нелинейность характеристики усилителя, полагаем  $k = K$  и при  $p = j\omega$  получим уравнение

$$-\omega^2 + j\omega \frac{L(r + r_1) - r_1 M \left( k_1 - \frac{3}{4} k_3 U_{1m}^2 \right)}{r r_1 L C} + \frac{1}{L C} = 0.$$

Применим условия (14.7):

$$\operatorname{Re} \{Z_{\text{вх}}(j\omega)\} = -\omega^2 + 1/LC = 0;$$

$$\operatorname{Im} \{Z_{\text{вх}}(j\omega)\} = \omega \frac{L(r + r_1) - r_1 M \left( k_1 - \frac{3}{4} k_3 U_{1m}^2 \right)}{r r_1 L C} = 0.$$

Из первого условия находим частоту автоколебаний  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , а из второго – амплитуду:

$$U_{1m} = \sqrt{(4/3k_3) [k_1 - L(r + r_1)/Mr_1]}.$$

**14.42.** Для автогенератора задачи 14.19 из линейного приближения определить условие возбуждения и частоту автоколебаний.

**14.43.** Для схемы задачи 14.16 методом усреднения: а) определить амплитуду  $U_m(t)$  автоколебаний напряжения на диоде во время переходного процесса, полагая, что  $U_m(0) = U_0$ ; б) найти частоту и амплитуду колебаний в установившемся режиме.

**14.44.** Зависимость напряжения на выходе усилителя от напряжения на входе (рис. 14.20) аппроксимирована уравнением  $u_2 = k_1 u_1 - k_3 u_1^3$ , входное сопротивление усилителя равно бесконечности, выходное – нулю.

Преобразовать дифференциальное уравнение схемы рис. 14.20 относительно напряжения  $u_1$  к уравнению Ван дер Поля:

$$d^2x/d\tau^2 - \varepsilon(1 - x^2)dx/d\tau + x = 0,$$

где обозначено:

$$x = u_1 \sqrt{3k_3/(k_1 - 3)}; \tau = \omega_0 t; \omega_0 = 1/rC; \varepsilon = k_1 - 3.$$

**14.45.** Методом гармонической линеаризации определить амплитуду напряжения на входе усилителя и частоту автоколебаний в цепи генератора по рис. 14.20.

Учесть, что входное сопротивление усилителя бесконечно большое, а выходное равно нулю. Характеристика усилителя аппроксимирована зависимостью  $u_2 = k_1 u_1 - k_3 u_1^3$ .

**14.46.** Определить в цепи

рис. 14.46 частоту  $\omega$  и амплитуду

$I_m$  установившихся колебаний тока

$i$  методом гармонической линеаризации. Значение тока  $J$  источ-

ника выбрано таким, что характе-

ристика нелинейного элемента от-

носительно рабочей точки для пе-

ременных составляющих может

быть аппроксимирована полиномом  $i = -a_1 u + a_3 u^3$ . Найти

условие существования колебаний.

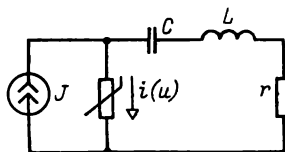


Рис. 14.46

условие существования колебаний.

**14.47.** Считая параметры элементов  $r$ ,  $R$  и  $C$  на схеме

рис. 14.21 известными, определить в линейном приближении

частоту колебаний  $\omega$ . Усилитель идеальный.

## 14.6. Численные методы интегрирования

**14.48(P).** В цепи задачи 14.1 принята аппроксимация характеристики катушки  $i(\Psi) = 0,5\Psi^2$ .

На основе явной формулы Эйлера при шаге  $h = 10^{-3}$  с вычислить длительность переходного процесса  $t_n$ , приняв, что переходный процесс заканчивается, когда приращение потоко-сцепления на шаге получается менее 0,01 %.

**Решение.** В соответствии с явной формулой (12) решения задачи 14.1 получим расчетную формулу при  $h = 10^{-3}$  с

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + 0,25 - 0,0625\Psi_k^2.$$

Время установления  $t_n$  находим из выражения  $t_n = t_{k+1} = t_k + h$ , когда

$$\Delta = \frac{\Psi_c - \Psi_k}{\Psi_k} \cdot 100 < 0,01,$$

где  $\Psi_c = \Psi_{k+1}$ .

Алгоритм вычислений можно представить в следующем виде: 1) вводим значения (см. табл. 14.1)  $t_0 = 0$ ;  $\Psi(0) = 0,4$ ;  $\Psi_c(0) = 0,4$ ;  $h$ ; 2) вычисляем  $\Psi_{k+1}$ ,  $t_{k+1}$ ,  $\Delta$ ; 3) полагаем  $\Psi_c = \Psi_{k+1}$ ; 4) если  $\Delta \geq 0,01$ , идти на 2; 5) выводим значения  $t_n$ ,  $\Psi_{k+1}$ .

Результаты вычислений на ЭВМ:  $t_n = 27$  мс;  $\Psi = 1,9998$  Вб.

**14.49(P).** Для схемы рис. 14.37 заданы напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , где  $U_m = 100$  В;  $f = 50$  Гц, и параметры  $C = 7$  мкФ;  $r = 2$  кОм;  $i(\Psi) = k\Psi^5$ , где  $k = 1,5$  А/Вб<sup>5</sup>.

а) Составить уравнения состояния для  $\Psi$  и  $u_C$ .

б) Получить явные расчетные формулы Эйлера.

в) Принимая шаг  $h = T/50$ , по формулам п. «б» вычислить  $u_C(t)$  и  $i(t)$  в установившемся режиме при  $t > 10T$  в течение периода для двух случаев: 1)  $\Psi(0) = 0$ ;  $u_C(0) = 0$ ; 2)  $\Psi(0) = 0$ ;  $u_C(0) = 250$  В.

Найти максимальные значения  $u_{C\max}$  и  $i_{\max}$ . Пояснить полученные результаты.

**Решение.** а) Запишем в общем виде уравнения состояния

$$d\Psi/dt = f_1[i(\Psi), u_C, t]; \quad du_C/dt = f_2[i(\Psi), u_C, t].$$

Из схемы рис. 14.37 найдем значения производных для переменных  $\Psi$  и  $u_C$ :

$$d\Psi/dt = u - u_C; \quad du_C/dt = i_C/C = [i(\Psi) + i_r]/C.$$

По второму закону Кирхгофа  $ri_r + u_C = u$ , откуда

$$i_r = \frac{U_m}{r} \sin \omega t - \frac{u_C}{r}.$$

С учетом характеристики  $i(\Psi)$  получим уравнения состояния:

$$\begin{aligned} d\Psi/dt &= U_m \sin \omega t - u_C; \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{k}{C} \Psi^5 + \frac{U_m}{rC} \sin \omega t - \frac{u_C}{rC}. \end{aligned}$$

б) Перейдя к конечным приращениям, получим явные расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1} &= \Psi_k + h(U_m \sin 2\pi f t_k - u_{Ck}); \\ u_{C(k+1)} &= u_{Ck} + h\left(\frac{k}{C} \Psi_k^5 + \frac{U_m}{rC} \sin 2\pi f t_k - \frac{u_{Ck}}{rC}\right). \end{aligned}$$

в) Вычисления можно выполнить согласно следующему алгоритму:

- 1) вводим значения  $t_0 = 0$ ;  $\Psi(0)$ ;  $u_C(0)$ ;  $U_m$ ;  $f$ ;  $C$ ;  $r$ ;  $k$ ;  $h$ ;
- 2) вычисляем  $\Psi_{k+1}$ ,  $u_{C(k+1)}$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $i_{k+1} = k\Psi_{k+1}^5$ ;
- 3) если  $t \leq 10T = 10/f = 0,2$ , идти на 2;
- 4) выводим значения  $t$ ,  $u_C$ ,  $i$ ;
- 5) если  $t \leq 0,22$ , идти на 2.

Результаты вычислений на ЭВМ: а)  $u_{C\max} = 23,042$  В;  $i_{\max} = 7,251$  мА; б)  $u_{C\max} = 330,897$  В;  $i_{\max} = 1,636$  А.

Для указанных параметров феррорезонансной цепи при нулевых начальных условиях а) устанавливаются нерезонансные колебания. При заданных начальных условиях в случае б) устанавливаются резонансные колебания с большими максимальными значениями. Феррорезонансная цепь в зависимости от начальных условий имеет одно из двух возможных устойчивых состояний равновесия; ее можно применить в устройствах, обеспечивающих функции памяти.

**14.50(Р).** Для цепи задачи 14.1 на основе неявной формулы Эйлера для потокоцепления катушки  $\Psi$  рассчитать во время переходного процесса  $\Psi(t)$  и  $i(t)$  в интервале времени от  $t_0 = 0$  до  $t_n = 18 \cdot 10^{-3}$  с. Характеристика катушки аппроксимирована зависимостью  $i(\Psi) = 0,5\Psi^2$ ; шаг  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  с.

**Решение.** В соответствии с уравнением (12) решения задачи 14.1 запишем неявную формулу (14.12)

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + h[E - ri(\Psi_{k+1})]$$

или, подставляя численные значения,

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + 2 \cdot 10^{-3} [250 - 125 \cdot 0,5\Psi_{k+1}^2],$$

т. е.

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + 0,5 - 0,125\Psi_{k+1}^2.$$

Из этого квадратного уравнения находим расчетную формулу

$$\Psi_{k+1} = \frac{1 + 2\Psi_k}{1 + \sqrt{1,25 + 0,5\Psi_k^2}}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 14.50.

Таблица 14.50

$t \cdot 10^{-3}, \text{ с}$	$\Psi, \text{ Вб}$	$i, \text{ А}$	$t \cdot 10^{-3}, \text{ с}$	$\Psi, \text{ Вб}$	$i, \text{ А}$
0,0	0,4000	0,0800	10,0	1,7194	1,4781
2,0	0,8166	0,3334	12,0	1,8099	1,6379
4,0	1,1510	0,6624	14,0	1,8719	1,7520
6,0	1,4045	0,9863	16,0	1,9140	1,8317
8,0	1,5889	1,2623	18,0	1,9424	1,8864

**14.51.** Для задачи 14.2, принимая шаг  $h = T/50$ , составить расчетные формулы для потокосцепления и тока на основе явной формулы Эйлера.

По расчетным формулам вычислить наибольшие возможные значения потокосцепления и тока после коммутации в зависимости от начальной фазы приложенного напряжения  $\alpha$ .

**У к а з а н и е.** Значение начальной фазы  $\alpha$  выбрать по результатам решения задачи 14.2.

**14.52.** В схеме рис. 14.10 ЭДС источника  $e = 12 \sin \omega t$ , В, при  $f = 50$  Гц. Параметры:  $C = 1$  мкФ,  $r = 120$  кОм; вольт-амперная характеристика диода  $i(u)$  задана:  $i(u) = 3,5 \times 10^{-5} [\exp(41,8u) - 1]$ .

По явной формуле Эйлера с шагом  $h = T/100$  вычислить постоянную составляющую напряжения на конденсаторе в установившемся режиме. Считать, что режим устанавливается в течение времени, после которого среднее значение напряжения за период изменяется менее чем на 2%.

**14.53.** Решить задачу 14.49, считая, что характеристика катушки  $i(\Psi)$  симметрична и определяется данными табл. 14.53.

Применить формулу линейной интерполяции.

**14.54.** Для цепи задачи 14.5 вычислить по неявной формуле Эйлера время разрядки конденсатора до напряжения, равного 0,2 В. Принять шаг  $h = 0,1$  мс.

Таблица 14.53

$i$ , А	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\Psi$ , Вб	0	0,58	0,66	0,769	0,83	0,88	0,92
$i$ , А	1,2	1,4		1,6	1,8	2,0	2,2
$\Psi$ , Вб	0,956	0,985	1,00	1,04	1,06	1,08	

**14.55.** Вычислить амплитуду напряжения  $U_{cm}$  установившихся автоколебаний в схеме рис. 14.16.

Дано:  $E = 120$  мВ;  $r = 10$  Ом;  $L = 0,2$  мГн;  $C = 1$  мкФ. Вольт-амперная характеристика туннельного диода задана табл. 14.55.

Таблица 14.55

$u$ , мВ	40	60	80	100	140	160	180	200	220	240	260	300	320	340	360	380
$i$ , мА	6	9,5	10	9,5	4,5	3,5	2,5	2,3	2	1,9	1,8	1,85	2,0	2,3	3	4

Расчет выполнить на основе явных формул Эйлера с шагом  $h = T/24$  для  $i_L$  и  $u_C$ . Применяя формулу линейной интерполяции, считать, что при нулевых начальных условиях режим устанавливается, когда приращение амплитуды за период меньше 10 %.

## Глава пятнадцатая

### ВВОДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

#### Введение к гл. 15

Электромагнитное поле характеризуется двумя основными векторами: напряженностью электрического поля  $E$  и индукцией магнитного поля  $B$ .

Напряженность электрического поля определяется по силе  $F$ , действующей на неподвижный точечный заряд  $q$ :

$$F = qE. \quad (15.1)$$



Индукцию магнитного поля можно определить по силе, действующей на заряд  $q$ , движущийся с постоянной скоростью  $v$ :

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (15.2)$$

или по силе, действующей на линейный элемент длиной  $l$  с током  $i$ :

$$\mathbf{F} = [(i\mathbf{l}^0)\mathbf{B}]l, \quad (15.3)$$

где  $\mathbf{l}^0$  — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением тока.

Для диэлектрика

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (15.4)$$

где  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$  — векторы электрического смещения и поляризации;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Для линейного диэлектрика

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_r \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}; \quad (15.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (15.6)$$

где  $\chi_r$  — относительная диэлектрическая восприимчивость;  $\epsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость.

Для магнитной среды

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (15.7)$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  — векторы напряженности магнитного поля и намагниченности;  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

В случае линейной магнитной среды

$$\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}, \quad (15.8)$$

где  $\kappa$  — магнитная восприимчивость, и

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (15.9)$$

где  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость среды.

Сила взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в электростатическом поле определяется по закону Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 R^2}, \quad (15.10)$$

где  $R$  — расстояние между зарядами.

Напряженность поля точечного заряда  $q$

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{R}^0}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 R^2}, \quad (15.11)$$

где  $\mathbf{R}^0$  — единичный вектор, направленный от заряда  $q$  в точку наблюдения;  $R$  — расстояние от заряда  $q$  до точки наблюдения.

Для потенциального электрического поля разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$

$$\Phi_A - \Phi_B = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (15.12a)$$

потенциал

$$\Phi = - \int \mathbf{E} d\mathbf{l} + C, \quad (15.126)$$

где  $d\mathbf{l}$  — элемент пути интегрирования;  $C$  — постоянная.

Сила, действующая на отрезок длиной  $l$  любого из двух бесконечно длинных параллельных тонких проводов с токами  $i_1$  и  $i_2$ :

$$F = \mu_r \mu_0 \frac{i_1 i_2 l}{2\pi r}, \quad (15.13)$$

где  $r$  — расстояние между проводами.

Индукция магнитного поля, бесконечно длинного тонкого провода с током  $i$ :

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \frac{i}{2\pi r} [\mathbf{l}^0 \mathbf{r}^0], \quad (15.14)$$

где  $r$  — расстояние от оси провода с током до точки наблюдения  $M$  (рис. 15.A);  $\mathbf{l}^0$  — единичный вектор, совпадающий по направлению с током;  $\mathbf{r}^0$  — единичный вектор, направленный от оси провода с током в точку наблюдения по кратчайшему расстоянию.

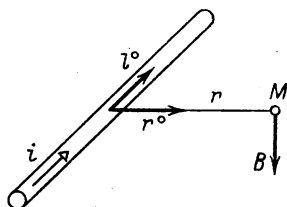


Рис. 15.A

*Уравнения электромагнитного поля в интегральной форме*

Теорема Гаусса

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum q \quad (15.15)$$

или

$$\oint \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sum (q + q_{\text{связ}}). \quad (15.16)$$

Для однородной среды ( $\epsilon_r = \text{const}$ )

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (15.17)$$

Связь между вектором поляризации  $\mathbf{P}$  и связанным зарядом  $q_{\text{связ}}$ :

$$\oint \mathbf{P} d\mathbf{S} = - \sum q_{\text{связ}}. \quad (15.18)$$

В формулах (15.15)–(15.18)  $\sum q$  и  $\sum q_{\text{связ}}$  – алгебраические суммы свободных и связанных зарядов, находящихся внутри поверхности  $S$ .

Закон полного тока

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i = \int \mathbf{J}_{\text{полн}} d\mathbf{S}, \quad (15.19)$$

где  $i$  – полный ток, охваченный контуром интегрирования;

$$\mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (15.20)$$

– плотность полного тока;  $\mathbf{J}$  – плотность тока проводимости.

Закон электромагнитной индукции (Фарадея)

$$e = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\partial \Phi / \partial t = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S}; \quad (15.21)$$

в комплексной форме

$$\mathcal{E} = \oint \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{l} = -j\omega \Phi, \quad (15.22)$$

где  $e$  и  $\mathcal{E}$  – ЭДС;  $\Phi$  – магнитный поток.

Уравнение непрерывности магнитного потока

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (15.23)$$

Уравнение непрерывности полного тока

$$\oint \mathbf{J}_{\text{полн}} d\mathbf{S} = 0 \quad (15.24)$$

или

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\partial (\Sigma q) / \partial t. \quad (15.25)$$

Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме

Теорема Гаусса

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad (15.26)$$

$$\text{div } \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho + \rho_{\text{связ}}, \quad (15.27)$$

для однородной среды

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_r \epsilon_0. \quad (15.28)$$

Связь между вектором поляризации  $\mathbf{P}$  и объемной плотностью связанного заряда  $\rho_{\text{связ}}$ :

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{связ}}, \quad (15.29)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Закон полного тока

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (15.30)$$

Закон электромагнитной индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (15.31)$$

Уравнение непрерывности магнитного потока

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (15.32)$$

и для однородной среды

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (15.33)$$

Уравнение непрерывности полного тока

$$\operatorname{div} (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0. \quad (15.34)$$

Энергия электрического поля

$$W_3 = \int \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV. \quad (15.35)$$

Энергия магнитного поля

$$W_m = \int \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2} dV. \quad (15.36)$$

Для потенциального электрического поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (15.37)$$

### 15.1. Симметричные поля

При расчете симметричных полей можно и рационально пользоваться уравнениями электромагнитного поля в интегральной форме.

**15.1(Р).** Определить силу, которая действует в вакууме на каждый из точечных зарядов системы, изображенной на рис. 15.1, где  $q_a = 4 \cdot 10^{-12}$  Кл,  $q_b = 15 \cdot 10^{-12}$  Кл,  $q_c = 15 \cdot 10^{-12}$  Кл.

**Решение.** Действующая на заряд  $q_a$  сила по (15.1)  $\mathbf{F}_a = q_a \mathbf{E}_a$ , где  $\mathbf{E}_a$  — напряженность электрического поля в точке расположения заряда  $q_a$  (рис. 15.1Р), создаваемая всеми зарядами, кроме  $q_a$ , т. е.

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_{ca} + \mathbf{E}_{ba} = \frac{q_c \mathbf{r}_{ca}^0}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} + \frac{q_b \mathbf{r}_{ba}^0}{4\pi\epsilon_0 r_{ba}^2},$$

где  $\mathbf{r}_{ca}^0$  — единичный радиус-вектор, направленный из точки  $c$  в точку  $a$ ;  $\mathbf{r}_{ba}^0$  — единичный радиус-вектор, направленный из точки  $b$  в точку  $a$ .

В декартовой системе координат

$$\mathbf{E}_a = -\left( \frac{q_c \cos \alpha_1}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} + \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_{ba}^2} \right) \mathbf{i} + \frac{q_c \sin \alpha_1}{4\pi\epsilon_0 r_{ca}^2} \mathbf{j},$$

где  $\cos \alpha_1 = r_{ba}/r_{ca} = 0,3/0,5 = 0,6$ ;  $\sin \alpha_1 = r_{cb}/r_{ca} = 0,4/0,5 = 0,8$ .  
 При этом  $F_a = (-7,25i + 1,72j)$ , мкН. Аналогично  $F_b = (6,0i + 14,3j)$ , мкН;  $F_c = (1,2i - 14,52j)$ , мкН.

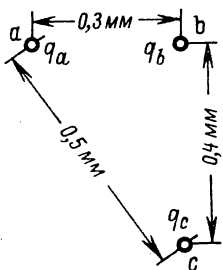


Рис. 15.1

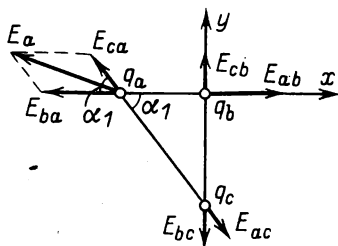


Рис. 15.1Р

**15.2.** Три точечных заряда расположены вдоль прямой линии на равных расстояниях друг от друга, причем крайние заряды одинаковые.

Определить соотношение между значениями среднего и крайнего зарядов, если вся система находится в состоянии равновесия.

**15.3.** Две одинаковые заряженные частицы находятся в вакууме на расстоянии 5 см друг от друга. Заряд каждой частицы равен  $2 \cdot 10^{-10}$  Кл, масса — 1 мг.

Найти конечную скорость, которую приобретут частицы, разлетаясь под влиянием сил отталкивания.

**15.4.** Два одинаково заряженных бузиновых шарика подвешены в воздухе на нитях, закрепленных в общей точке.

Определить угол между нитями, если заряд каждого шарика равен  $5 \cdot 10^{-8}$  Кл, масса — 16 мг, длина каждой нити равна 50 см.

**15.5(P).** Определить напряженность поля  $E$  и потенциал  $\phi$  в вакууме над плоской металлической пластиной вдали от ее краев, на одной стороне которой равномерно распределен поверхностный заряд  $q_s = 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup>. Рассчитать силу, действующую на положительный пробный заряд  $q = 10^{-12}$  Кл, находящийся на расстоянии  $a$  от пластины.

**Решение.** В полупространстве, ограниченном заряженной стороной бесконечной металлической пластины, существует однородное электрическое поле, напряженность которого перпендикулярна ее плоскости. По другую сторону пластины поля нет.

Выбрав в качестве гауссовой поверхности прямоугольный параллелепипед, который пересекает пластину и боковые грани

которого перпендикулярны плоскости пластины, по теореме Гаусса (15.16) получим:

$$\varepsilon_0 E \Delta S = q_S \Delta S,$$

где  $\Delta S$  — торцевая поверхность параллелепипеда.

Поток через все остальные грани параллелепипеда равен нулю.

Выбрав начало координат на поверхности, где распределен заряд  $q_S$ , и ось  $y$ , перпендикулярную этой поверхности, получим  $E = E_y = q_S/\varepsilon_0 = 11,3$  В/м.

Сила, действующая на пробный заряд, по (15.1)  $F = qE = 11,3 \cdot 10^{-12}$  Н, и по (15.12) потенциал  $\varphi = -\int E_y dy + \text{const} = -11,3y$ , В, если выбрать на пластине ( $y = 0$ ) потенциал  $\varphi = 0$ .

**15.6(Р).** Определить распределения потенциала и напряженности поля в пространстве около тонкого плоского слоя зарядов (простой слой), плотность  $q_S$  которых постоянна.

Построить зависимости потенциала  $\varphi(z)$  и напряженности поля  $E(z)$ , где  $z$  — координата, перпендикулярная плоскости расположения зарядов.

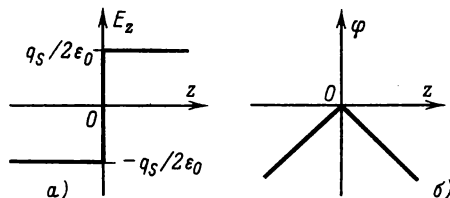


Рис. 15.6Р

**Решение.** Будем считать слой зарядов бесконечно тонким и бесконечно протяженным. Тогда вследствие симметрии:

- 1) вектор напряженности поля по обе стороны слоя будет численно одинаковым, но противоположным по направлению;
- 2) поле будет иметь только нормальную составляющую;
- 3) поле не будет зависеть от координат.

Выделив прямоугольный параллелепипед, включающий часть слоя, и применив теорему Гаусса (15.16), получим:

$$\varepsilon_0 E_n \Delta S + \varepsilon_0 E_n \Delta S = q_S \Delta S,$$

откуда

$$E_n = |E_z| = q_S / 2\varepsilon_0.$$

Напряженность  $E_z$  (рис. 15.6Р, а) в каждом полупространстве постоянна, а при переходе через слой изменяется скачком на  $q_S/\varepsilon_0$ .

Потенциал (по 15.126)

$$\varphi = - \int E_z dz + C = \frac{-q_s}{2\epsilon_0} z + C_1 \text{ при } z > 0;$$

$$\varphi = - \int E_z dz + C = \frac{q_s}{2\epsilon_0} z + C_2 \text{ при } z < 0.$$

Выбрав  $\varphi = 0$ , при  $z = 0$  получим  $C_1 = C_2 = 0$ ;  $\varphi = -q_s z / 2\epsilon_0$  при  $z > 0$ ;  $\varphi = q_s z / 2\epsilon_0$  при  $z < 0$  (рис. 15.6Р, б).

**15.7(Р).** Найти напряженность поля, электрическое смещение, поляризацию, свободный и связанный заряды и емкость для плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 25 \text{ см}^2$  и расстоянием между обкладками-пластинами  $d = 2 \text{ мм}$  в двух случаях: а) диэлектрик — воздух; б) диэлектрик — текстолит с  $\epsilon_r = 4$ . Постоянное напряжение  $U$  на конденсаторе равно  $1 \text{ кВ}$ .

**Решение.** а) В плоском конденсаторе, заполненном однородной средой, напряженность поля всюду одинакова (краевой эффект не учитываем), направлена перпендикулярно плоскости пластины и при заданном напряжении

$$E = U/d = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

При заполнении воздухом ( $\epsilon_r = 1$ ) по (15.6) и (15.5) электрическое смещение  $D = \epsilon_0 E = 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$ , а поляризация  $P = 0$ . Поверхностный свободный заряд по (15.15) равномерно распределен по металлической пластине с плотностью  $q_s = D = 4,43 \text{ мКл/м}^2$ . Весь свободный заряд пластины  $q = q_s S = 11,1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ . Связанный заряд равен нулю. Емкость

$$C = q/U = q_s S/U = DS/U = \epsilon_0 \epsilon_r S/d = 11,1 \text{ пФ.}$$

б) При заданном напряжении напряженность поля остается прежней при любом однородном диэлектрике, поэтому

$$E = U/d = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м; } D = \epsilon_0 \epsilon_r E = 17,7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2;$$

$$P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = 13,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2;$$

$$q = q_s S = DS = 44,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Связанный заряд и его плотность найдем по (15.18). В диэлектрике у положительно заряженной пластины конденсатора

$$q_{\text{связ}} = -PS = -35 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

$$\text{Емкость } C = q/U = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = 44,4 \cdot 10^{-12} = 44,4 \text{ пФ.}$$

Отметим, что при внесении диэлектрика емкость увеличилась в  $\epsilon_r$  раз и при заданном напряжении на пластинах накопился в  $\epsilon_r$  раз больший заряд.

**15.8(P).** Воздушный конденсатор задачи 15.7 отключен от источника, а затем в него вставлена текстолитовая пластина.

Определить свободный заряд, электрическое смещение, напряженность поля, поляризацию и связанный заряд: а) до внесения пластины; б) после внесения пластины.

**Решение.** После отключения источника в конденсаторе остаются неизменными заряды на пластинах.

а) После отключения источника напряженность поля, а значит, и все другие величины остаются теми же, что и в варианте «а» задачи 15.7.

б) После внесения текстолитовой пластины при том же заряде  $q = 11,1 \cdot 10^{-9}$  Кл получим:  $D = q/S = 4,43$  мкКл/м<sup>2</sup>;  $E = D/\epsilon_r \epsilon_0 = 125$  кВ/м, т. е. в  $\epsilon_r$  раз меньше, чем до внесения текстолитовой пластины:  $P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = 3,32$  мкКл/м<sup>2</sup>;  $q_S \text{ связ} = PS = 8,3$  нКл.

**15.9.** Определить зависимость емкости конденсатора (рис. 15.9) от угла поворота  $\alpha$  подвижных пластин относительно неподвижных. На рис. 15.9 размеры даны в миллиметрах. Краевым эффектом пренебречь.

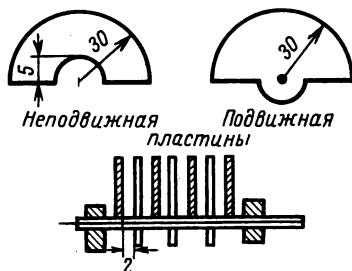


Рис. 15.9

**15.10(P).** Рассчитать напряженность поля  $E$  и потенциал  $\phi$ : внутри (1) и вне (2) шарообразного электронного облачка радиусом  $R_0 = 0,5$  см. Построить зависимости  $E$  и  $\phi$  от координат в двух случаях: а) объемная плотность заряда  $\rho$  постоянна и равна  $-2,5 \cdot 10^{-9}$  Кл/см<sup>3</sup>; б) объемная плотность заряда изменяется по закону  $-2,5 \cdot 10^{-9} a/(a + R)$ , Кл/см<sup>3</sup>, где  $R$  — расстояние от центра облачка, коэффициент  $a = 0,2$  см.

**Решение.** Из шаровой симметрии поля следует, что напряженность поля имеет радиальную составляющую ( $E = E_R$ ), зависящую только от радиуса  $R$ , и, следовательно, ее значение постоянно на сфере данного радиуса и вектор напряженности нормален к поверхности сферы. Поэтому задачу можно решить, применив теорему Гаусса (15.16) и выбрав в качестве поверхности интегрирования сферу.

При  $R < R_0$  в сферической системе координат

$$\epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

откуда  $E = \rho R / 3\epsilon_0 = -9,4 \cdot 10^3 R$ , В/см.



Потенциал по (15.126)

$$\varphi = -\int E dR + C_1 = -\rho R^2/6\epsilon_0 + C_1 = (4,7 \cdot 10^3 R^2 + C_1), \text{ В.}$$

Выбрав  $\varphi = 0$  при  $R = 0$ , получим:  $C_1 = 0$ .

При  $R > R_0$  имеем:

$$\epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho,$$

откуда  $E = \rho R_0^3/3\epsilon_0 R^2 = -11,8 \cdot 10^{-2}/R^2$ , В/см, потенциал

$$\varphi = -\int E dR + C_2 = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R} + C_2 = \left( -\frac{11,8 \cdot 10^2}{R} + C_2 \right), \text{ В.}$$

При  $R = R_0$  должно быть равенство потенциалов, откуда постоянная  $C_2 = -\rho R_0^2/2\epsilon_0 = 3,52 \cdot 10^3$  В.

**15.11(Р).** Рассчитать напряженность поля и потенциал: 1) внутри металлического шара; 2) вне (в воздухе). На поверхности шара равномерно распределен заряд  $q = 20$  мкКл; радиус шара  $R_0 = 25$  см. Построить зависимости  $E$  и  $\varphi$  от координат, считая потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке.

**Решение.** Как и в предыдущей задаче, применим теорему Гаусса.

При  $R < R_0$  (внутри шара), где  $R$  — расстояние от центра шара, по (15.15)  $D \cdot 4\pi R^2 = 0$ , т. е.  $D = 0$  и  $E = 0$ .

При  $R > R_0$  (вне шара)  $\epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 = q$  и  $E = E_R = q/4\pi\epsilon_0 R^2 = 18 \cdot 10^6/R^2$ , В/см.

Потенциал

$$\varphi = -\int E dR + C = \frac{18 \cdot 10^6}{R} + C.$$

Так как принято  $\varphi = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , то  $C = 0$ , и при  $R = R_0$  потенциал  $\varphi_0 = 720$  кВ.

**15.12(Р).** Определить, какой радиус  $R_0$  должен иметь уединенный металлический шар, находящийся в воздухе, чтобы на нем можно было разместить заряд  $q = 1$  Кл, если пробивная напряженность воздуха  $E_{\text{пр}} = 30$  кВ/см.

**Решение.** Приравняв  $E_{\text{пр}}$  наибольшей напряженности поля (на поверхности шара), получим:  $E_{\text{пр}} = q/4\pi\epsilon_0 R_0^2$ , откуда  $R_0 = 54,7$  м.

**15.13(Р).** Рассчитать напряженность поля  $E$  и потенциал  $\varphi$  и построить зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ : 1) внутри; 2) вне электронного луча цилиндрической формы с объемной плотностью заряда  $-2 \cdot 10^{-15}$  Кл/см<sup>3</sup>.

Радиус луча  $r_0 = 1$  мм. Длина луча много больше его

радиуса. Расчет провести для области, удаленной от концов луча. Принять потенциал равным нулю на оси.

**Решение.** Из цилиндрической симметрии поля следует, что напряженность поля имеет только радиальную составляющую ( $E = E_r$ ), зависящую только от радиуса  $r$ . Следовательно, ее значение постоянно на цилиндре данного радиуса и вектор напряженности нормален к поверхности цилиндра. Задачу можно решить, применив теорему Гаусса (15.16) и выбрав в качестве поверхности интегрирования цилиндр, соосный лучу, и единичной длины.

При  $r < r_0$  в цилиндрической системе координат  $\epsilon_0 E_1 \cdot 2\pi r = \pi r^2 \rho$ , откуда  $E_1 = \rho r / 2\epsilon_0$ ; потенциал

$$\varphi_1 = -\int E_1 dr + C_1 = -\rho r^2 / 4\epsilon_0 + C_1.$$

Выбрав  $\varphi = 0$  при  $r = 0$ , получим  $C_1 = 0$ .

При  $r > r_0$  имеем  $\epsilon_0 E_2 \cdot 2\pi r = \pi r_0^2 \rho$ , откуда  $E_2 = \rho r_0^2 / 2\epsilon_0 r$ ; потенциал

$$\varphi_2 = -\int E_2 dr + C_2 = -\frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_2.$$

При  $r = r_0$  должно быть равенство потенциалов, откуда постоянная

$$C_2 = \frac{\rho r_0^2}{4\epsilon_0} (2 \ln r_0 - 1).$$

Численные результаты даны в ответах.

**15.14.** Рассчитать напряженность поля и потенциал: 1) внутри; 2) вне бесконечного цилиндрического проводника с коаксиальным отверстием, находящегося в воздухе, если линейный заряд проводника  $2 \cdot 10^{-10}$  Кл/м, радиус проводника  $r_0 = 3$  мм. Выяснить, изменится ли распределение потенциала, если отверстие некоаксиально. Принять  $\varphi = 0$  при  $r = r_0$ .

**15.15.** На бесконечно длинную проволоку с радиусом  $r_1$  и зарядом  $+\tau$  на единицу длины коаксиально надета металлическая труба (рис. 15.15).

Определить электрическое смещение  $D_1$  в воздухе внутри и  $D_2$  вне трубы, а также поверхностный заряд на проволоке, на внутренней и наружной поверхностях трубы в случаях: а) труба изолирована; б) труба заземлена; в) проволоку соединили с изолированной трубой.

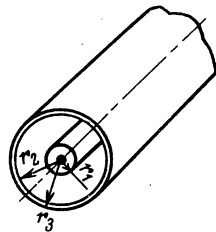


Рис. 15.15

**15.16.** Рассчитать напряженность поля  $E$ , распределение потенциала  $\varphi$  (приняв  $\varphi = 0$  на оболочке) и емкость на единицу длины для воздушного цилиндрического конденсатора

(рис. 15.15), находящегося под напряжением  $U = 1$  кВ, если  $r_1 = 2$  мм;  $r_2 = 6$  мм;  $r_3 = 7$  мм.

**15.17.** Определить, при каком отношении радиусов  $r_2$  и  $r_1$  наибольшая напряженность поля в цилиндрическом конденсаторе (рис. 15.15) минимальна. Заданы радиус  $r_2$  и напряжение на конденсаторе.

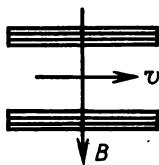


Рис. 15.18

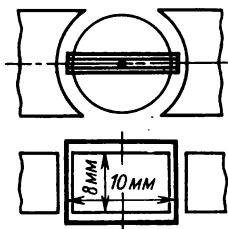


Рис. 15.19

**15.18(Р).** Рассчитать силу, действующую на каждый из электронов луча, при их движении со скоростью  $v = 3 \cdot 10^9$  см/с через магнитную отклоняющую систему осциллографа, которая состоит из двух катушек (рис. 15.18), в области, где индукция равна  $10^{-3}$  Тл. Заряд электронов равен  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Определить, как изменится сила, если электронный луч проходит под углом  $45^\circ$  к оси катушек.

Решение. По формуле Лоренца (15.2) при  $v \perp B$  получим:  $F = qvB = 4,8 \cdot 10^{-15}$  Н.

Если луч проходит под углом  $45^\circ$  к оси катушек, то  $F = qvB \sin 45^\circ = 4,8 \cdot 10^{-15} / \sqrt{2}$  Н.

**15.19.** Рамка магнитоэлектрического прибора находится в воздушном зазоре постоянного магнита. Поле в зазоре однородное с индукцией 0,8 Тл. Размеры рамки, имеющей 100 витков, даны на рис. 15.19 (толщиной катушки пренебречь). Ток в рамке равен 10 мА.

Определить вращающий момент, действующий на рамку, и объяснить, чем определяется равномерность шкалы этого прибора.

**15.20.** Отклоняющая система электродинамического прибора состоит из подвижной и неподвижной катушек (рис. 15.20).

Каков характер шкал амперметра, вольтметра и ваттметра?

**15.21.** Определить магнитную индукцию в точках  $M_1$  (8; 12; 0 см) и  $M_2$  (8; 12; 10 см) поля тока  $I = 100$  А в бесконечном проводе, который изогнут под прямым углом (рис. 15.21). Выяснить, целесообразно ли для решения этой задачи применить закон полного тока.

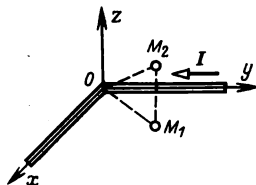
**15.22(P).** Рассчитать магнитное поле в медных жиле, оболочке коаксиального кабеля и между ними (см. рис. 15.15), если в жиле и оболочке кабеля ток постоянный и равен 10 А; радиусы:  $r_1 = 3$  мм;  $r_2 = 9$  мм;  $r_3 = 10$  мм.

Вычислить внешнюю и внутреннюю индуктивности кабеля на единицу длины. Получить формулу для внутренней индуктивности для случая  $r_2 \rightarrow r_3$ .



Рис. 15.20

Рис. 15.21 →



**Решение.** Поле обладает цилиндрической симметрией, так что в цилиндрической системе координат  $B = B_\alpha$ ,  $H = H_\alpha$  и зависят только от радиуса  $r$ .

Применив закон полного тока (15.19), при  $r < r_1$  получим:  $H'_i \cdot 2\pi r = (I/\pi r_1^2) \pi r^2$ , откуда  $H'_i = Ir/2\pi r_1^2 = 17,7r$ , А/см; при  $r_1 < r < r_2$  напряженность  $H_e = I/2\pi r = 1,59/r$ , А/см; при  $r_2 < r < r_3$  получим:  $H''_i \cdot 2\pi r = I - I\pi(r^2 - r_2^2)/\pi(r_3^2 - r_2^2)$ , откуда

$$H''_i = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} = 8,4 \frac{1 - r^2}{r}, \text{ А/см;}$$

при  $r > r_3$  (вне кабеля)  $H''_e \cdot 2\pi r = 0$  и  $H''_e = 0$ .

Внешняя индуктивность

$$L_e = \frac{\Phi_e}{I} = \frac{\int \mu_0 H'_e dS}{I} = \mu_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $l$  — длина кабеля.

Внутренняя индуктивность  $L_i$  наиболее просто вычисляется

из соотношения (15.36)  $W_m = L_i I^2/2$ , где  $W_m = \frac{1}{2} \int B_i H_i dV$  —

энергия магнитного поля в жиле и оболочке кабеля.

Следовательно,  $L_i = \int B_i H_i dV / I^2$ , где  $B_i$  и  $H_i$  — индукция и напряженность поля внутри жилы и оболочки коаксиального кабеля.

Вычислим:

$$\int_V B_i H_i dV = \int_{V_1} B'_i H'_i dV + \int_{V_2} B''_i H''_i dV,$$

где  $V_1$  — объем жилы;  $V_2$  — объем оболочки на единицу длины. Получим:

$$\int_0^{r_1} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{(2\pi r_1^2)^2} 2\pi r l dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi r)^2} \left[ \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \right] 2\pi r l dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \left[ r_3^4 \ln \frac{r_3}{r_2} - 2r_3^2 \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} + \frac{r_3^4 - r_2^4}{4} \right] \right\}.$$

Внутренняя индуктивность

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right\}.$$

На единицу длины после подстановки числовых значений получим:

$$L_{e0} = 0,22 \text{ мкГн/м}; \quad L_{i0} = 0,052 \text{ мкГн/м}.$$

При  $r_3 \rightarrow r_2$  раскрытие неопределенности дает:  $L_i = \mu_0 l / 8\pi$ .

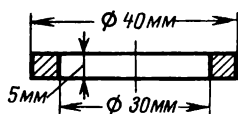


Рис. 15.23

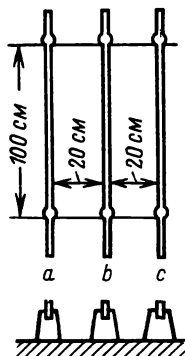


Рис. 15.24 →

**15.23.** На тороид заданных размеров (рис. 15.23) из ферромагнитного материала с  $\mu_r = 1000$  нанесены равномерно однослойные обмотки с числами витков  $w_1 = 20$  и  $w_2 = 200$ .

Определить собственную индуктивность каждой обмотки, взаимную индуктивность между обмотками и коэффициент связи (для однослойных обмоток тороида при большой относительной магнитной проницаемости потоком рассеяния можно пренебречь).

**15.24.** Трехфазный ток трехпроводной системы шин (рис. 15.24) имеет амплитуду 20 000 А.

Определить средние значения сил, действующих на изоляторы; найти законы изменения этих сил во времени.

**15.25(P).** Между проводами двухпроводной линии симметрично и в одной плоскости с ними расположена рамка с током  $i_p = 10 \sin 500t$ , А, имеющая  $w = 100$  витков (рис. 15.25).

Получить формулу для взаимной индуктивности. Определить ЭДС, наводимую в линии, при размерах:  $a = 40$  мм,  $b = 25$  мм,  $l = 50$  мм.

**Решение.** Взаимная индуктивность между рамкой и линией равна взаимной индуктивности между линией и рамкой:

$$M = w\Phi/i,$$

где  $\Phi$  — магнитный поток поля тока в линии, пронизывающий рамку;  $i$  — ток в проводах линии.

Индукцию  $B$  поля тока в линии в любой точке внутри рамки вычислим по закону полного тока (15.19):

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \left[ \frac{i}{2\pi x} + \frac{i}{2\pi(a-x)} \right],$$

где  $x$  — расстояние от оси одного из проводов до рассматриваемой точки.

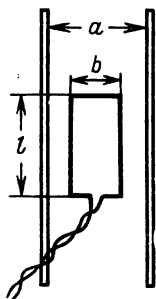


Рис. 15.25

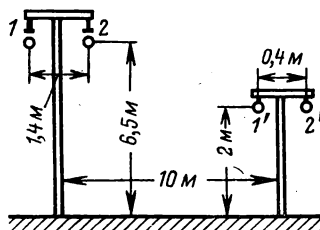


Рис. 15.26

Поток

$$\Phi = l \int_{(a-b)/2}^{(a+b)/2} \mu_0 \left[ \frac{i}{2\pi x} + \frac{i}{2\pi(a-x)} \right] dx = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}.$$

Взаимная индуктивность

$$M = \frac{w\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} = 2,93 \text{ мкГн.}$$

Амплитуда ЭДС в линии при заданном токе в рамке

$$\mathcal{E}_m = -j\omega M \dot{I}_{pm} = -j0,0147 \text{ В, т. е. } e = -0,0147 \cos 500t, \text{ В.}$$

**15.26.** Определить взаимную индуктивность между двух-проводной линией передачи энергии и линией связи (рис. 15.26). Провода линии проходят параллельно; длина линии  $l = 7$  км.

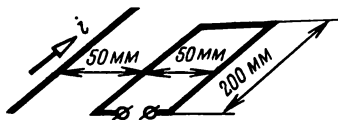


Рис. 15.27

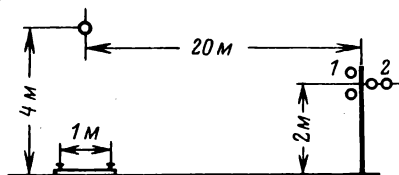


Рис. 15.28

**15.27.** Плоская проволочная петля расположена вблизи провода с током  $i = 100 \sin 314t$ , А (рис. 15.27). Ось провода находится в той же плоскости, что и петля.

Вычислить ЭДС, наводимую в петле.

**15.28.** Переменный ток в контактном проводе электрифицированной железной дороги равен 100 А, частота 50 Гц.

Определить ЭДС, наводимые (на единицу длины) в проводах двух линий связи 1 и 2, проходящих параллельно полотну железной дороги (рис. 15.28). Расстояние между проводами каждой линии связи 50 см. Влиянием земли на распределение поля пренебречь.

Решить задачу: а) считая, что ток в рельсах распределен поровну; б) заменяя рельсы одним эквивалентным проводником, расположенным посередине между рельсами. Сопоставить решения.

**15.29.** Для измерения магнитного поля применили плоскую катушку (все витки расположены в одной плоскости), содержащую  $w$  витков; площадь, ограничиваемая витками (в плоскости витков), равна  $S$ . Провода катушки образуют контур, замкнутый на прибор, измеряющий протекающий заряд (кулонметр). Катушку поместили в область поля, подлежащего измерению (например, у полюсных наконечников электрической машины), быстро повернули на  $180^\circ$  и отсчитали показание кулонметра.

Дано:  $w = 100$ ,  $S = 0,2$  см<sup>2</sup>, сопротивление всей измерительной цепи (включая катушку)  $R = 250$  Ом, отсчет по кулонметру  $q = 8,8 \cdot 10^{-7}$  Кл.

Что можно определить при таком измерении? Каких данных недостает и какие еще измерения нужно произвести для определения вектора магнитной индукции в заданной точке (полагая, что в плоскости катушки поле изменяется мало).

**15.30.** При измерении остаточной магнитной индукции постоянных магнитов (рис. 15.30) применяют следующий ме-

тод: на среднюю часть магнита надевают плотно прилегающую однослойную катушку, цепь которой замкнута на прибор для измерения заряда (таким кулонметром обычно служит баллистический гальванометр БГ); магнит выдергивают или сбрасывают катушку и фиксируют показание прибора.

Определить остаточную индукцию магнита сечением  $2 \text{ см}^2$ , если измеренный заряд равен  $6 \text{ мкКл}$ ; число витков катушки 20; сопротивление цепи (катушки, соединительных проводов и кулонметра)  $400 \text{ Ом}$ .

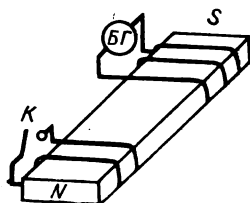


Рис. 15.30

**15.31.** Изменится ли значение измеренного заряда в задаче 15.30, если в результате повреждения изоляции между двумя соседними витками один из витков измерительной катушки окажется замкнутым накоротко?

**15.32.** Изменится ли значение измеренного заряда в задаче 15.30 при наличии дополнительной короткозамкнутой обмотки (ключ  $K$  на рис. 15.30 замкнут).

**15.33(Р).** Плоский конденсатор с круглыми электродами диаметром  $500 \text{ мм}$  и расстоянием между электродами  $2 \text{ мм}$  (рис. 15.33), у диэлектрика которого  $\epsilon_r = 5,5$ , подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 1000 \text{ В}$  через резистор с сопротивлением  $R = 100 \text{ кОм}$ .

Определить закон изменения напряженности магнитного поля от координат и времени.

Решение. По закону полного тока (15.19) для любого контура  $l$  в диэлектрике

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \mathbf{J}_{\text{см}} d\mathbf{S},$$

где  $\mathbf{J}_{\text{см}}$  — плотность тока смещения в диэлектрике.

Вследствие симметрии в цилиндрической системе координат  $H = H_\alpha = f(r)$ , а  $\mathbf{J}_{\text{см}} = J_{\text{см}z}$  и от координат не зависит.

Поэтому, выбрав контур  $l$  в виде окружности с центром в начале координат, получим:

$$H \cdot 2\pi r = J_{\text{см}} \pi r^2,$$

откуда  $H = J_{\text{см}} r / 2$ . По определению плотность тока смещения  $\mathbf{J}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ , где  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_z = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 u_C / d$ , а напряжение на конденсаторе  $u_C = U (1 - e^{-t/\tau})$ , где  $\tau = RC = R \epsilon_r \epsilon_0 S / d$ .

Следовательно,

$$J_{\text{см}} = (\epsilon_r \epsilon_0 / d) \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{RS} e^{-t/\tau}$$



и напряженность поля

$$H = \frac{Ur}{2RS} e^{-t/\tau} = 6,36 \cdot 10^{-3} r e^{-522t}, \text{ А/м.}$$

**15.34.** Проволочное кольцо (короткозамкнутый виток) захватывает длинную катушку (соленоид) с переменным током, намотанную на фарфоровый цилиндр ( $\mu_r = 1$ ). К диаметрально противоположным точкам кольца  $n$  и  $k$  присоединены три прибора для измерения напряжения – вольтметры  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  (рис. 15.34).

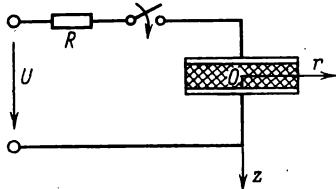


Рис. 15.33

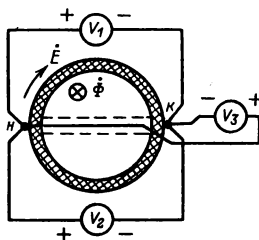


Рис. 15.34

Провода, присоединяющие вольтметр  $V_1$ , проходят с одной стороны соленоиды, а провода, присоединяющие вольтметр  $V_2$ , проходят с другой стороны соленоиды, причем ни один из этих проводов внутрь соленоиды не заходит. Один из проводов, присоединенных к вольтметру  $V_3$ , проходит по диаметальному каналу внутри соленоиды. Сопротивление всех вольтметров бесконечно велико. Кольцо выполнено из однородной марганцевой проволоки с удельной проводимостью  $\sigma = 2 \cdot 10^4$  См/см. Показание первого вольтметра 0,01 В.

Определить показания второго и третьего вольтметров.

**15.35(Р).** Измерительные устройства – «вольтметры» – предыдущей задачи позволяют определять как модуль, так и фазу напряжения (в качестве таких «вольтметров» могут служить вектормерные схемы, компенсаторы переменного тока, осциллографы). Показания приборов зависят от порядка присоединения выводов (фаза изменяется на  $180^\circ$ ). Один из выводов каждого вольтметра (рис. 15.34) считаем началом (+), а другой – концом (–). Вольтметр  $V_1$  показывает 0,01 В. Радиус кольца  $a = 2$  см, частота тока  $f = 50$  Гц, удельная проводимость марганца, из которого выполнено кольцо,  $\sigma = 2 \cdot 10^4$  См/см.

Определить показания вольтметров  $V_2$  и  $V_3$ , полагая, что все начала обмоток вольтметров присоединены к точке  $n$  проволочного кольца, а все концы – к точке  $k$ .

Вычислить магнитный поток в соленоиде, напряженность электрического поля и плотность тока в манганиновом кольце.

**Решение.** По закону электромагнитной индукции (15.22) в кольце возникает напряженность поля  $\vec{E}$  и течет ток плотностью  $\vec{J}$  (при указанном на рис. 15.34 положительном направлении магнитного потока положительные направления напряженности поля и плотности тока следует выбрать по направлению движения часовой стрелки).

Из уравнения закона электромагнитной индукции для гармонического процесса (15.22)

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -j\omega\Phi$$

найдем напряженность электрического поля и плотность тока в кольце:

$$\vec{E} = -j\omega\Phi/2\pi a; \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = -j\omega\Phi\sigma/2\pi a.$$

Для определения показаний вольтметра обходим любой контур, содержащий этот вольтметр. Направление обхода должно быть согласовано с направлением магнитного потока, который пронизывает площадь, ограниченную контуром, по правилу правоходового винта. Так, для контура, который обходим через вольтметр  $V_1$  от вывода «+» к выводу «-» и верхнее полукольцо от точки  $k$  к точке  $n$ , получим:  $\vec{U}_1 - \vec{E}\pi a = 0$  (контур не охватывает потока), т.е.  $\vec{U}_1 = \vec{E}\pi a = -j\omega\Phi/2$ , откуда  $\Phi = -2\vec{U}_1/j\omega = 0,0636j$ , мВб;  $\vec{E} = \vec{U}_1/\pi a = 1,59$  мВ/см;  $\vec{J} = \sigma\vec{E} = 31,8$  А/см<sup>2</sup>. Здесь принято  $\vec{U}_1 = U_1$ .

Аналогично  $\vec{U}_2 + \vec{E}\pi a = 0$  или  $\vec{U}_2 - \vec{E}\pi a = j\omega\Phi/2$ , т.е.  $\vec{U}_2 = -\vec{U}_1 = -0,01$  В;  $\vec{U}_3 + \vec{E}\pi a = -j\omega\Phi/2$  или  $\vec{U}_3 = -\vec{E}\pi a - j\omega\Phi/2 = 0$ .

**15.36.** Определить показания вольтметров задачи 15.35 при условии, что точка  $k$ , к которой присоединены концы всех вольтметров, передвинута на  $1/4$  окружности по направлению движения часовой стрелки. Соединительный провод вольтметра  $V_3$  остается внутри диаметрального канала. Магнитный поток  $\Phi = j0,0636$  мВб тот же, что и в задаче 15.35.

**15.37.** То же, что в задаче 15.36, но после перемещения точки  $k$  вдоль кольца еще на  $1/4$  окружности (т.е. до совмещения с точкой  $n$ ).

**15.38(Р).** Определить показания вольтметров  $V_2$  и  $V_3$  (рис. 15.34) задачи 15.35 при неоднородном кольце: верхняя половина кольца выполнена из манганиновой ( $\sigma_1 = 2 \cdot 10^4$  См/см), а нижняя из нихромовой ( $\sigma_2 = 10^4$  См/см) проволоки. Сечения обеих проволок одинаковые. Показание первого вольтметра  $\vec{U}_1 = 0,01$  В.

Вычислить магнитный поток, напряженность поля и плотность тока в кольце.

**Решение.** Ток и плотность тока в обеих половинах кольца одинаковы, а напряженности поля  $\vec{E}_{1,2} = \vec{J}/\sigma_{1,2}$  — различны.

Обходя кольцо по направлению движения часовой стрелки, на основании закона электромагнитной индукции (15.22) получаем  $\vec{E}_1 \pi a + \vec{E}_2 \pi a = -j\omega\Phi$ . Так как плотность тока вдоль кольца не изменяется, т. е.  $\sigma_1 \vec{E}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2$ , то  $\vec{E}_2 = 2\vec{E}_1$ .

Из двух уравнений находим:  $\vec{E}_1 = -j\omega\Phi/3\pi a$ ;  $\vec{E}_2 = -2j\omega\Phi/3\pi a$ .

Для определения показаний вольтметра обходим любой контур, содержащий этот вольтметр, согласуя направление обхода с направлением потока по правилу правоугового винта. Выбирая те же контуры, что и в решении задачи 15.35, получаем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 - \vec{E}_1 \pi a &= 0, \text{ т. е. } \vec{E}_1 = \dot{U}_1/\pi a = 1,59 \text{ мВ/см}; \vec{E}_2 = 3,18 \text{ мВ/см}; \\ \dot{U}_2 + \vec{E}_2 \pi a &= 0, \text{ т. е. } \dot{U}_2 = -\vec{E}_2 \pi a = -2\vec{E}_1 \pi a = -2\dot{U}_1 = -0,02 \text{ В}; \\ \dot{U}_3 + \vec{E}_2 \pi a &= -j\omega\Phi/2, \text{ т. е. } \dot{U}_3 = -0,25\pi a \vec{E}_2 \text{ или } \dot{U}_3 = -0,5\dot{U}_1 = \\ &= -0,005 \text{ В.}\end{aligned}$$

Поток  $\Phi = -\vec{E}_2 \cdot 1,5\pi a/j\omega = -\vec{E}_1 \cdot 3\pi a/j\omega = 0,0955j$ , мВб.

Плотность тока  $\vec{J} = \sigma_1 \vec{E}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2 = 31,8 \text{ А/см}^2$ .

**15.39.** Определить показания вольтметров задачи 15.38 (рис. 15.34) после перемещения точки  $k$  по направлению движения часовой стрелки на  $1/4$  окружности. Магнитный поток  $\Phi = j0,0955 \text{ мВб}$  тот же, что и в задаче 15.38.

**15.40.** То же, что в задаче 15.39, но после смещения точки  $k$  на  $1/2$  окружности (точки присоединения концов и начал вольтметров совпали).

**15.41.** Определить, как нужно расположить точку присоединения конца вольтметра  $V_2$  задачи 15.38, чтобы он показывал нуль.

**15.42(Р).** По бесконечно длинному ферритовому стержню радиусом  $a$  проходит магнитный поток, равномерно распределенный по сечению и изменяющийся во времени по закону

$$\Phi = \Phi_0 (1 - e^{-\alpha t}).$$

Определить напряженность электрического поля внутри и вне стержня. При решении пренебречь процессом распространения волн и токами смещения.

**Решение.** Для решения применим закон электромагнитной индукции (15.21). Направим ось  $z$  вдоль оси цилиндра

и выберем положительное направление индукции по оси  $z$ . Вследствие симметрии поля  $E = E_z$ .

При  $r < a$  получим:

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{r^2}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{r^2}{a^2} \Phi_0 \alpha e^{-\alpha t},$$

откуда  $E = -\frac{r}{2\pi a^2} \Phi_0 \alpha e^{-\alpha t}$ .

При  $r > a$  получим:

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\Phi_0 \alpha e^{-\alpha t},$$

откуда  $E = -\Phi_0 \alpha e^{-\alpha t} / 2\pi r$ .

## 15.2. Анализ полей

В этом параграфе собраны задачи, в которых требуется проанализировать решение для заданного поля, т. е. определить характер поля, его вихри и истоки и сделать предположения о возможном способе его возбуждения. Для анализа рационально пользоваться уравнениями поля в дифференциальной форме.

**15.43(P).** Определить характер поля, его вихри и истоки и сделать предположения о способе его возбуждения при заданной зависимости вектора поля  $\mathbf{N}$  от координат в цилиндрической системе:

- а)  $\mathbf{N} = e_z N_z$ ;  $N_z = cr$ ,  $0 < r < a$ ;
- б)  $\mathbf{N} = e_r N_r$ ;  $N_r = cr$ ,  $0 < r < a$ ;
- в)  $\mathbf{N} = e_z N_z$ ;  $N_z = c/r$ ,  $a < r < \infty$ ;
- г)  $\mathbf{N} = e_r N_r$ ;  $N_r = c/r$ ,  $a < r < \infty$ .

Решение. а) Вычислим  $\text{rot}$  и  $\text{div}$  заданного вектора в цилиндрической системе координат:  $\text{rot } \mathbf{N} = e_z \cdot 2c$ ;  $\text{div } \mathbf{N} = 0$ , т. е. задано вихревое поле без истоков.

1. Таким вектором может характеризоваться, например, магнитное поле внутри провода с постоянным током. Действительно, по уравнениям (15.30) и (15.32) для постоянного магнитного поля в области, где протекают токи,  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  и  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , откуда при  $\mu_r = \text{const}$  по (15.33) получим  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Например, в решении задачи 15.22 было найдено, что внутри бесконечно длинного проводника радиуса  $r_1$  с током  $I$  напряженность  $H = H_z = Ir/2\pi r_1^2 = Jr/2$ , т. е.  $c = J/2$  и  $\text{rot } \mathbf{N} = e_z J$ .

2. Рассматриваемым вектором может характеризоваться также переменное электрическое поле в однородной среде при отсутствии объемного заряда. Для такого поля по уравнениям (15.31) и (15.28)  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  и  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ; такое поле

существует, например, в бесконечно длинном соленоиде, по виткам которого протекает переменный ток.

3. Рассматриваемым вектором не может характеризоваться постоянное электрическое поле, поскольку для него  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ .

б) В этом случае  $\text{rot } \mathbf{N} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{N} = 2c$ , т.е. это безвихревое поле с истоками.

1. Поскольку  $\text{div } \mathbf{N} \neq 0$ , то вектор  $\mathbf{N}$  не может описывать магнитное поле в однородной среде, для которого справедливы уравнения (15.30) и (15.33).

2. Таким вектором может характеризоваться, например, постоянное электрическое поле в вакууме при наличии объемного заряда. Действительно, для постоянного электрического поля в вакууме по уравнениям (15.31) и (15.28) имеем  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ .

Из решения задачи 15.13 следует, что внутри электронного луча цилиндрической формы с объемной плотностью заряда  $\rho$  электрическое поле  $E_1 = E_r = \rho r/2\epsilon_0$ , т.е.  $c = \rho/2\epsilon_0$ .

**15.44.** Определить характер поля, его вихри и истоки и сделать предположения о способе его возбуждения для заданных выражений вектора поля в декартовой системе координат:

а)  $\mathbf{N} = i \ c/x, \ a < x < b$ ;

б)  $\mathbf{N} = j \ cy, \ 0 < y < b$ ;

в)  $\mathbf{N} = i \ \frac{ax}{x^2 + y^2} + j \ \frac{ay}{x^2 + y^2}, \ a^2 \leq x^2 + y^2$ .

**15.45.** Определить истоки поля (заряды) в следующих случаях:

1) в области  $a < x < b$  напряженность электрического поля изменяется по закону:  $E_x = E_0 a/x$ ;  $E_y = E_z = 0$ ;

2) в области  $a^2 \leq x^2 + y^2$  напряженность электрического поля изменяется по закону:

$$E_x = E_0 \frac{ax}{x^2 + y^2}; \quad E_y = E_0 \frac{ay}{x^2 + y^2}; \quad E_z = 0.$$

**15.46.** Определить характер поля (вихри и истоки), если:

1)  $E_x = -cy$ ;  $E_y = cx$ ;  $E_z = 0$ ;

2)  $E_x = cy$ ;  $E_y = cx$ ;  $E_z = 0$ .

Для потенциального поля написать уравнения линий поля и эквипотенциалей.

**15.47(Р).** Определить способ возбуждения поля, если известно, что  $\varphi = k \ln \left| \sqrt{\cos^2 \frac{\pi x}{a} + \text{sh}^2 \frac{\pi y}{a}} \right|$ .

Построить картину поля (линии поля и эквипотенциали).

Решение. Определим напряженность поля по (15.37) в декартовой системе координат:

$$E_x = \frac{k\pi}{a} \frac{\sin(2\pi x/a)}{\cos(2\pi x/a) + \operatorname{ch}(2\pi y/a)};$$

$$E_y = -\frac{k\pi}{a} \frac{\operatorname{sh}(2\pi y/a)}{\cos(2\pi x/a) + \operatorname{ch}(2\pi y/a)}.$$

Вычислив  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{div}$  в декартовой системе координат (см. приложение 4), получим:  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , т. е. потенциальное поле без объемного заряда.

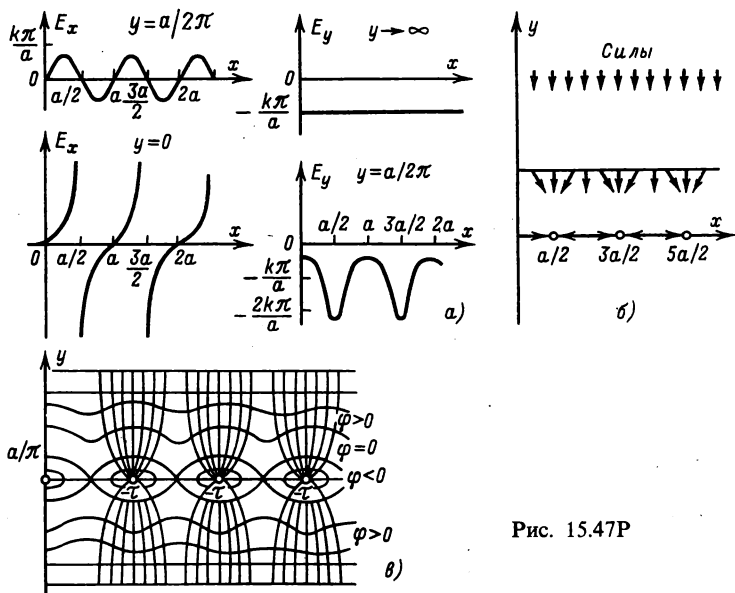


Рис. 15.47Р

При  $y = 0$  имеем  $E_x = (k\pi/a) \operatorname{tg}(\pi x/a)$ ;  $E_y = 0$ ; при  $y = a/2\pi$  получим:

$$E_x = \frac{k\pi}{a} \frac{\sin(2\pi x/a)}{\cos(2\pi x/a) + 1,54}; \quad E_y = -\frac{k\pi}{a} \frac{1,18}{\cos(2\pi x/a) + 1,54};$$

при  $y \rightarrow \infty$  соответственно  $E_x \rightarrow 0$ ;  $E_y \rightarrow -k\pi/a$ .

На рис. 15.47Р, а представлены зависимости напряженности поля от координат. На рис. 15.47Р, б дана качественная картина распределения сил, действующих на положительный пробный заряд, на основании которой можно утверждать, что такое поле создается системой одноименно заряженных осей,

расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга; линейный заряд осей  $\tau = k\pi\epsilon_0$ . По уравнению линий поля  $[E dl] = 0$  получим:  $\operatorname{tg}(\pi x/a) = c \operatorname{th}(\pi y/a)$ .

Уравнение эквипотенциалей  $\varphi = \operatorname{const}$ , т. е.  $e^{\varphi/K} = \cos^2(\pi x/a) + \operatorname{sh}^2(\pi y/a)$ , причем  $\varphi = 0$  при  $\operatorname{sh}(\pi y/a) = \pm \sin(\pi x/a)$ .

На рис. 15.47Р, в представлена качественная картина эквипотенциалей и линий поля.

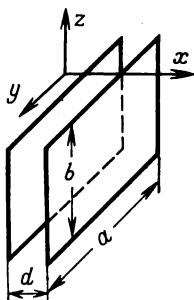


Рис. 15.48

**15.48.** Между двумя плоскими электродами (рис. 15.48) напряженность электрического поля изменяется по закону  $E_x = E_0(1 - x^2/2d^2)$ ;  $E_y = E_z = 0$ . Расстояние между электродами  $d$  много меньше размеров электродов  $a$  и  $b$ .

Определить объемный заряд и разность потенциалов  $\bar{U}$  между электродами. Выяснить, как изменится напряженность поля, если электроды подключены к источнику постоянного напряжения  $U_0$ , которое отличается от найденной разности потенциалов.

**15.49.** Определить закон распределения плотности свободных зарядов, который обеспечил бы постоянство модуля напряженности электрического поля  $E = E_r = 100$  В/см во всех точках между обкладками цилиндрического конденсатора с параметрами  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 3$  мм,  $\epsilon_r = 1$ .

**15.50.** Определить характер поля, его вихри и истоки, сделать предположения о способе его возбуждения, если в декартовой системе координат внутри прямоугольника  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  задано поле:

$$E_x = E_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \sin(\omega t - kz); \quad E_y = E_z = 0;$$

во всем остальном пространстве поле равно нулю.

**15.51.** Найти  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  внутри (1) и вне (2) шарообразного электронного облачка, поле которого рассчитано в задаче 15.10.

**15.52.** Найти  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  внутри и вне электронного луча цилиндрической формы, поле которого рассчитано в задаче 15.13.

## Глава шестнадцатая ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### Введение к гл. 16

Для статических, стационарных и квазистатических электрических полей справедливы уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (16.1a)$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \quad (16.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (16.2a)$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum q, \quad (16.2b)$$

где  $l$  — контур интегрирования;  $S$  — поверхность интегрирования;  $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов;  $\sum q$  — сумма свободных зарядов.

Скалярный потенциал  $\varphi$  определяется

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (16.3)$$

В однородной среде (с постоянной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = \text{const}$ ) для потенциала справедливо уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_r \epsilon_0 \quad (16.4)$$

и, в частности, уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (16.5)$$

### Граничные условия

Для всех электрических полей

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \varphi_2; \quad (16.6)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = q_S. \quad (16.7)$$

Для статических полей на границе раздела двух диэлектриков

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{или} \quad \epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n}; \quad (16.8a)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -q_{S \text{ связ}}, \quad (16.8b)$$

при этом

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (16.9)$$

Для стационарных полей на границе раздела двух проводников

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \text{или} \quad \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}. \quad (16.10)$$



Для квазистатических полей на границе раздела двух диэлектриков с проводимостью

$$J_{1n} + \partial D_{1n}/\partial t = J_{2n} + \partial D_{2n}/\partial t, \quad (16.11)$$

на границе раздела двух диэлектриков с вязкостью

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (16.12)$$

причем  $E$ ,  $D$  и  $P$  связаны соотношением (16.9).

В приведенных выше формулах  $E_t$  — составляющая вектора напряженности поля, касательная к границе раздела сред;  $D_n$ ,  $P_n$  и  $J_n$  — составляющие векторов смещения, поляризации и плотности тока проводимости, нормальные к границе раздела, при условии, что нормаль направлена из первой среды во вторую;  $q_s$  и  $q_{s\text{связ}}$  — поверхностные плотности свободных и связанных зарядов;  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$  — относительные диэлектрические проницаемости;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — удельные проводимости.

#### Электростатическое поле

Для линейной среды по методу наложения

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum_n \mathbf{E}_n; \quad (16.13a)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = \sum_n \varphi_n \quad (16.13b)$$

Для системы заряженных проводов формулы Максвелла с потенциальными коэффициентами имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 + \dots; \\ \varphi_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 + \dots; \\ \varphi_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 + \dots; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

где  $\varphi_k$  и  $q_k$  — потенциалы и заряды проводов, причем собственный потенциальный коэффициент  $\alpha_{nn} = \varphi_n/q_n$  при всех остальных  $q_k$  (кроме  $q_n$ ), равных нулю, взаимный потенциальный коэффициент  $\alpha_{nm} = \varphi_n/q_m$  при всех остальных  $q_k$  (кроме  $q_m$ ), равных нулю.

Формулы Максвелла с емкостными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots; \\ q_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots; \\ q_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

где собственный емкостный коэффициент  $\beta_{nn} = q_n/\varphi_n$  при всех остальных  $\varphi_k$  (кроме  $\varphi_n$ ), равных нулю, взаимный емкостный коэффициент  $\beta_{nm} = q_n/\varphi_m$  при всех остальных  $\varphi_k$  (кроме  $\varphi_m$ ), равных нулю.

Формулы с частичными емкостями:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots; \\ q_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots; \\ q_3 &= C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{33}(\varphi_3 - \varphi_0) + \dots; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

где собственная частичная емкость  $C_{nn} = q_n/(\varphi_n - \varphi_0)$  при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots \neq \varphi_0$ , взаимная частичная емкость  $C_{nm} = q_n/(\varphi_n - \varphi_m)$  при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_0 = 0$  (кроме  $\varphi_n \neq \varphi_m$ ).

Потенциал поля диполя

$$\varphi = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R^2, \quad (16.17)$$

где  $p$  — дипольный момент;  $R$  и  $\theta$  — сферические координаты.

Потенциал поля двухпроводной линии в вакууме

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+}, \quad (16.18)$$

где  $\tau$  — заряд на единицу длины линии;  $r_-$  и  $r_+$  — расстояния от точки наблюдения до отрицательно и положительно заряженных проводов соответственно.

Для расчета электростатического поля заряда вблизи плоской границы раздела диэлектрика и проводника или двух диэлектриков можно применить метод отражений. При отражении точечного заряда  $q$  у плоской границы проводника отраженный заряд  $q_1 = -q$ . При отражении у границы двух диэлектриков (рис. 16.А, а) поле в той среде, где задан точечный заряд  $q$  (рис. 16.А, б), определяется зарядом  $q$  и зарядом

$$q_1 = q(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})/(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) = k_1 q; \quad (16.19a)$$

поле по другую сторону границы (рис. 16.А, в) определяется зарядом

$$q_2 = q \cdot 2\epsilon_{r2}/(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) = k_2 q, \quad (16.19б)$$

где  $\epsilon_{r1}$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд  $q$ ;  $\epsilon_{r2}$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды по другую сторону границы.

Дополнительные заряды должны находиться на том же расстоянии от границы, что и заданный.

Для неоднородного диэлектрика ( $\epsilon_r \neq \text{const}$ )

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} - \mathbf{E} \frac{\text{grad } \epsilon_r}{\epsilon_r} = \frac{\rho + \rho_{\text{связ}}}{\epsilon_0}, \quad (16.20a)$$

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{связ}}, \quad (16.20б)$$

где  $\rho_{\text{связ}}$  — объемная плотность связанных зарядов.

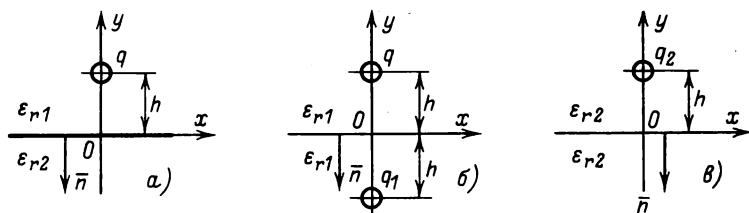


Рис. 16.A

### Стационарное поле

В стационарном поле основные уравнения и соотношения (16.1)–(16.7) дополняются следующими:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0; \quad (16.21a)$$

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{S} = 0; \quad (16.21б)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (16.22)$$

где  $\mathbf{J}$  — плотность тока проводимости;  $\sigma$  — удельная проводимость среды.

Мощность потерь в единице объема

$$p = \mathbf{J} \mathbf{E} = \sigma E^2 = J^2 / \sigma. \quad (16.23)$$

Для расчета поля провода с током  $I$  вблизи плоской границы двух проводящих сред можно применить метод отражений (см. расчет поля точечного заряда у границы раздела диэлектриков и рис. 16.A). Дополнительные токи

$$I_1 = I (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2) = n_1 I; \quad I_2 = I \cdot 2\sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2) = n_2 I. \quad (16.24)$$

Для неоднородной ( $\sigma \neq \text{const}$ ) проводящей среды

$$\text{div } \mathbf{E} = -\mathbf{E} \frac{\text{grad } \sigma}{\sigma}. \quad (16.25)$$

Существует аналогия между электростатическим полем без объемного заряда и стационарным полем в области, где нет сторонних сил, при этом аналогичны параметры:

Электростатическое поле	. . . . .	$E$	$\phi$	$\mathbf{D}$	$q$	$\epsilon_r \epsilon_0$	$C$
Стационарное поле	. . . . .	$E$	$\phi$	$\mathbf{J}$	$I$	$\sigma$	$G$

Проводимость  $G$  между двумя электродами в проводящей среде определяется через емкость  $C$  между теми же электродами в диэлектрике (или наоборот):

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} C. \quad (16.26)$$

### Квазистатическое поле

Основные уравнения и соотношения (16.1)–(16.7) дополняются следующими:

$$\operatorname{div} (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) = 0; \quad (16.27a)$$

$$\oint (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) d\mathbf{S} = \oint \mathbf{J}_{\text{полн}} d\mathbf{S} = 0, \quad (16.27b)$$

где плотность полного тока

$$\mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_r \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t. \quad (16.28)$$

Для вязкого диэлектрика справедливо уравнение вязкости

$$\tau d\mathbf{P} / dt = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} - \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_r \mathbf{E} - \mathbf{P}, \quad (16.29)$$

где  $\tau$  – постоянная времени вязкости и векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{D}$  связаны соотношением (16.9).

Для гармонического поля с напряженностью

$$\mathbf{E} = iE_{xm} \sin(\omega t + \psi_x) + jE_{ym} \sin(\omega t + \psi_y) + kE_{zm} \sin(\omega t + \psi_z); \quad (16.30a)$$

комплексный вектор

$$\dot{\mathbf{E}}_m = i\dot{E}_{xm} + j\dot{E}_{ym} + k\dot{E}_{zm}, \quad (16.30b)$$

где  $\dot{E}_{km} = E_{km} e^{j\psi_k}$ ;  $k = x, y, z$ .

Уравнения поля в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = 0; \quad (16.31)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}; \quad (16.32)$$

$$\operatorname{div} (\dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}}) = \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_{\text{полн}} = 0, \quad (16.33)$$

$$\text{где} \quad \dot{\mathbf{J}}_{\text{полн}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon_r \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}; \quad (16.34)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \phi, \quad (16.35)$$

причем

$$\nabla^2 \phi = -\dot{\rho} / \epsilon_r \epsilon_0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 \phi = 0. \quad (16.36)$$

Для вязкого диэлектрика в гармоническом поле уравнение вязкости следующее:

$$j\omega \tau \dot{\mathbf{P}} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{P}}. \quad (16.37)$$

Комплексная относительная электрическая восприимчивость

$$\underline{\chi}_r = \underline{\epsilon}_r - 1 = (\epsilon_r - 1)/(1 + j\omega\tau). \quad (16.38)$$

Комплексная относительная диэлектрическая проницаемость

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r = \frac{\epsilon_r + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = 1 + \frac{\underline{\chi}_r}{1 + j\omega\tau}. \quad (16.39)$$

На границе раздела двух диэлектриков с проводимостями  $\sigma_1 \neq 0$  и  $\sigma_2 \neq 0$

$$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t} \text{ или } \phi_1 = \phi_2; \quad (16.40)$$

$$\underline{\sigma}_1 \dot{E}_{1n} = \underline{\sigma}_2 \dot{E}_{2n}, \quad (16.41)$$

где  $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0$ .

На границе раздела двух вязких диэлектриков

$$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t} \text{ или } \phi_1 = \phi_2; \quad (16.42)$$

$$\dot{D}_{1n} = \dot{D}_{2n} \text{ или } \epsilon_{r1} \dot{E}_{1n} = \epsilon_{r2} \dot{E}_{2n}. \quad (16.43)$$

Удельная комплексная мощность в диэлектрике с проводимостью

$$\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0 = \sigma E^2 - j\omega\epsilon_r\epsilon_0 E^2, \quad (16.44)$$

в вязком диэлектрике

$$\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0 = \omega\epsilon''_r\epsilon_0 E^2 - j\omega\epsilon'_r\epsilon_0 E^2. \quad (16.45)$$

Комплексная мощность

$$\underline{S} = \int \underline{S}_0 dV. \quad (16.46)$$

*Энергия и силы*

Силы поля можно определить на основе закона сохранения энергии: энергия, отданная источником  $\Delta W_n$ , равна сумме приращения энергии поля  $\Delta W$  и произведенной работы  $\Delta A$ , т. е.

$$\Delta W_n = \Delta W + \Delta A. \quad (16.47)$$

Если работа происходит за счет энергии, отдаваемой источником при заданном напряжении, то приращение энергии поля и произведенная работа равны:  $\Delta W = \Delta A = \Delta W_n/2$ . Если источники отсутствуют, то работа происходит при постоянстве суммы зарядов за счет убыли энергии поля  $\Delta A = -\Delta W$ .

Энергию электрического поля можно определить:

1) через объемный интеграл от скалярного произведения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  по всему объему  $V$  поля:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \mathbf{D} dV; \quad (16.48)$$

2) через потенциалы проводников и заряды на них:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i. \quad (16.49)$$

## 16.1. Электростатическое поле в вакууме

**16.1(P).** Точечные заряды  $+2q$  и  $-q$  находятся на расстоянии  $l = 10$  см (рис. 16.1) в вакууме.

1) Считая потенциал бесконечно удаленной точки равным нулю, найти положение, размеры и потенциал эквипотенциальной поверхности, имеющей сферическую форму.

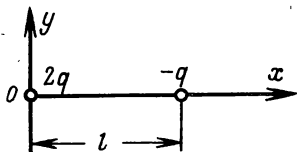


Рис. 16.1

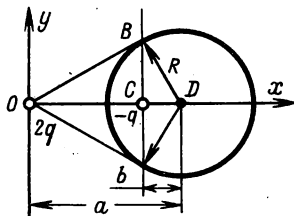


Рис. 16.1P

2) Доказать, что заряд  $-q$  лежит в плоскости, которая проходит через точки касания лучей, проведенных к сфере из точки расположения заряда  $2q$ .

**Решение.** 1) При выбранных осях координат (рис. 16.1) для любой точки, находящейся в плоскости, где находятся заряды, потенциал

$$\varphi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}.$$

Уравнение окружности  $\left(x - \frac{4}{3}l\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}l^2$ , т. е. экви-

потенциаль в плоскости  $xu$ , получится, если положить потенциал  $\varphi = 0$ . Следовательно, форму окружности (рис. 16.1P) имеет эквипотенциаль, потенциал которой равен потенциалу

бесконечно удаленной точки. Радиус окружности  $R = 2l/3 = 6,7$  см, центр ее лежит на оси  $x$  на расстоянии  $a = 4l/3 = 13,3$  см от начала координат. Отметим, что остальные эквипотенциали имеют более сложную форму.

2) Проведем касательные из точки расположения заряда  $2q$  (начала координат) к сфере и плоскость через точки касания (рис. 16.1Р). Так как треугольник  $OBD$  подобен треугольнику  $BCD$ , то  $b/R = R/a$  или  $b = R^2/a$ ; кроме того,  $b = a - OC$ , откуда  $OC = a - R^2/a = 4l/3 - l/3 = l$ ; таким образом, заряд  $-q$  находится в точке  $C$  и действительно лежит в плоскости, проходящей через точки касания.

**16.2(Р).** Точечный заряд  $Q = 10^{-7}$  Кл находится в воздухе на расстоянии  $a = 1$  м от центра проводящего заземленного шара, радиус которого  $R = 0,2$  м (рис. 16.2).

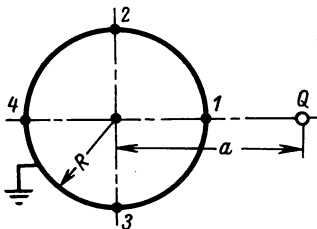


Рис. 16.2

Определить плотность заряда, индуцированного на поверхности шара, в точках 1, 2, 3 и 4.

**Решение.** Поверхность шара — эквипотенциаль  $\varphi = 0$ . Поэтому для расчета проводящий заземленный шар и точечный заряд  $Q$  можно заменить двумя точечными зарядами с разными знаками (см. решение задачи 16.1). Один из зарядов  $Q$  задан, значение  $Q_1$  и расположение второго можно

найти, приравняв потенциал заземленного шара нулю. Из двух уравнений для двух любых точек на поверхности шара получим:

$$Q_1 = -QR/a = -0,2Q; \quad (l - a) = b = R^2/a = 0,04 \text{ м},$$

где  $l$  — расстояние между зарядами  $Q$  и  $Q_1$  (рис. 16.2Р). Далее решаем задачу при уже известных значениях и расположении двух точечных зарядов.

Плотность поверхностного заряда на шаре по (16.7)

$$q_s = \varepsilon_0 E_n = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \cos \alpha_1 + \frac{Q_1}{4\pi r_2^2} \cos \alpha_2.$$

Выразив  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\cos \alpha_1$  и  $\cos \alpha_2$  через переменные  $R$  и  $\theta$  сферической системы координат, получим:

$$q_s = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{R - a \cos \theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} - 0,2 \frac{R - b \cos \theta}{(R^2 + b^2 - 2bR \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

и при заданных числовых значениях

$$q_s = 8 \cdot 10^{-9} \left\{ \frac{0,2 - \cos \theta}{[1,04 - 0,4 \cos \theta]^{3/2}} - \frac{0,04 - 0,008 \cos \theta}{[0,0416 - 0,016 \cos \theta]^{3/2}} \right\} \text{ Кл/м}^2.$$

Для точки 1 ( $\cos \theta = 1$ )  $q_s = -74,6$  нКл/м<sup>2</sup>; для точек 2 и 3 ( $\cos \theta = 0$ )  $q_s = -36,1$  нКл/м<sup>2</sup>; для точки 4 ( $\cos \theta = -1$ )  $q_s = -22,2$  нКл/м<sup>2</sup>.

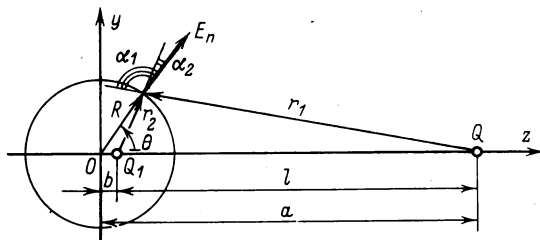


Рис. 16.2Р

**16.3.** Решить предыдущую задачу в предположении, что шар не заземлен. Определить потенциал шара, считая равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки.

**16.4.** Определить силу, с которой точечный заряд задачи 16.2 притягивается к шару в случае а) заземленного и б) незаземленного шара.

**16.5(Р).** Проводящая сфера радиусом  $R$  находится в поле точечного заряда  $Q$ , расположенного на расстоянии  $a$  от ее центра (см. рис. 16.2).

Показать, что для заземленной сферы отношение заряда  $q_b$  на части поверхности сферы, видимой из точки расположения заряда  $Q$ , к остальному заряду  $q_n$  сферы равно  $\sqrt{(a + R)/(a - R)}$ .

**Решение.** Из решений задач 16.1 и 16.2 следует, что при расчетах проводящую сферу можно заменить точечным зарядом  $Q_1 = -QR/a$ , лежащим внутри сферы в плоскости, которая проходит через точки касания сферы лучами, проведенными к сфере из точки расположения заряда  $Q$ . Отсюда по теореме Гаусса (16.26) поток  $\Psi$  вектора  $\mathbf{D}$  через видимую часть сферы, равный заряду на ней  $q_b$ , и поток через невидимую часть сферы, равный заряду на ней  $q_n$ , соответственно равны:

$$q_b = \Psi_b = Q_1/2 - Q\omega/4\pi; \quad q_n = \Psi_n = Q_1/2 + Q\omega/4\pi,$$



где  $\omega = 2\pi \left\{ 1 - \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{a} \right\}$ .

Отношение  $q_b/q_n = \sqrt{a+R}/\sqrt{a-R}$ .

**16.6.** Определить потенциал и напряженность электрического поля диполя  $p = ql = 12 \cdot 10^{-9}$  Кл·см (рис. 16.6) в точках, достаточно удаленных от него, т. е. при  $R \gg l$ , где  $R$  — расстояние от центра диполя до точки наблюдения  $M$ .

Рассчитать зависимости составляющих напряженности поля от  $R$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ ; сравнить их с соответствующими зависимостями для поля точечного заряда.

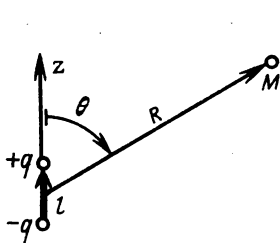


Рис. 16.6

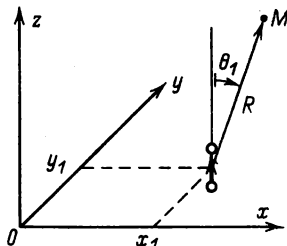


Рис. 16.7P

**16.7(P).** Определить потенциал и напряженность поля двойного слоя зарядов, равномерно распределенных на плоскости  $xy$  (двойным слоем называют распределенные по поверхности диполи). Слой характеризуется плотностью дипольных моментов  $p_s$ .

**Решение.** Запишем потенциал поля элементарного дипольного момента  $p_s dx_1 dy_1$  (рис. 16.7P) для произвольной точки  $M$ :  $d\varphi = p_s dx_1 dy_1 \cos \theta_1 / 4\pi\epsilon_0 R^2$ . Учитывая, что  $\cos \theta_1 = z/R$ , получаем  $d\varphi = p_s z dx_1 dy_1 / 4\pi\epsilon_0 R^3$  и

$$\varphi = \frac{z}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{p_s dx_1 dy_1}{R^3},$$

где  $R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2$ .

Если  $p_s = \text{const}$ , то

$$\varphi = \frac{zp_s}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dx_1 dy_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

При бесконечно протяженном слое

$$\varphi = \frac{p_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Обозначим  $(x - x_1)^2 + z^2 = a$ ;  $y - y_1 = t$ ;  $dy_1 = -dt$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}} = - \int_{y+\infty}^{y-\infty} \frac{dt}{(a + t^2)^{3/2}} = 2/a$$

и

$$\varphi = \frac{p_S z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 dx_1}{a} = \frac{p_S z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 dx_1}{z^2 + (x - x_1)^2} = \pm p_S / 2\epsilon_0.$$

Полученное решение показывает, что потенциал двойного слоя в каждом из полупространств остается постоянным и изменяется скачком на  $\Delta\varphi = p_S/\epsilon_0$  при переходе через двойной слой. Напряженность поля всюду равна нулю. Последний результат можно получить, суммируя поля от двух простых заряженных слоев с зарядами разного знака.

**16.8(Р).** Предположив, что отрезок нити длиной  $l$  равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau$ , найти составляющие вектора напряженности электрического поля и написать уравнение эквипотенциалей.

**Решение.** Выберем начало декартовой системы координат в середине заданного отрезка (рис. 16.8Р). Введем, кроме того, переменную  $x_1$  — координату элементарного заряда  $dq = \tau dx_1$ , при этом

$$d\varphi = \frac{\tau dx_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}}$$

и

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{l/2-x}^{l/2+x} \frac{dx_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}}.$$

После интегрирования находим, что

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(l/2 - x) + \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2 + z^2}}{(-l/2 - x) + \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln K.$$

Далее, положив  $K = e^{4\pi\epsilon_0\varphi/\tau} = \text{const}$ , получим уравнение эквипотенциалей в виде

$$\frac{x^2}{[l(1+K)/2(1-K)]^2} + \frac{y^2}{[l\sqrt{K/(1-K)}]^2} + \frac{z^2}{[l\sqrt{K/(1-K)}]^2} = 1,$$

из которого видно, что эквипотенциальные поверхности имеют форму эллипсоидов вращения.

Составляющие вектора напряженности поля по (16.3)

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + (x-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right\};$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} \left\{ \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{y^2 + (x-l)^2}} \right\}.$$

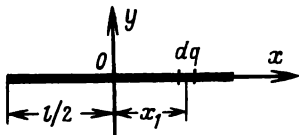


Рис. 16.8Р

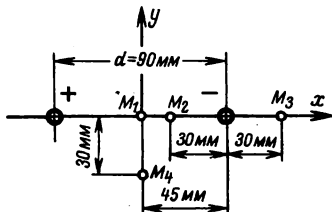


Рис. 16.9

**16.9.** Рассчитать напряженность поля и потенциал в точках  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  (рис. 16.9) вблизи двухпроводной линии с радиусом проводов  $r_0 = 2,5$  мм, находящейся под постоянным напряжением  $U = 10$  кВ. Определить емкость линии. Найти зависимости  $E(x, 0)/E(0, 0)$  и  $\varphi(x, 0)/(U/2)$ .

**16.10.** Для двухпроводной линии, изображенной на рис. 16.9, построить (определить положение центра и радиус) эквипотенциаль  $\varphi = 0,4U/2$  и силовую линию, так чтобы между этой линией и линией, соединяющей оси проводов, проходила  $1/5$  часть всего электрического потока.

**16.11(Р).** Двухпроводная линия (рис. 16.11, где  $2s = 25$  мм;  $r_0 = 10$  мм) находится под постоянным напряжением 1 кВ.

Найти распределение заряда по поверхности провода и определить емкость системы на единицу длины. Получить зависимости напряженности поля от координаты  $x$  в плоскости, проходящей через оси проводов.

**Решение.** Два металлических провода заменим двумя заряженными осями (рис. 16.11Р), положение которых определим по выражению  $a = \sqrt{s^2 - r_0^2} = 7,5$  мм. Здесь  $2a$  — расстояние между электрическими осями проводов.

Емкость между проводами на единицу длины  $C_0 = \tau/(\varphi_1 - \varphi_2)$ , где  $\tau$  — заряд на единицу длины провода;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы левого и правого проводов соответственно.

Как видно из рис. 16.11Р, для точек 1 и 2 по (16.18)

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+s-r_0}{a-s+r_0}; \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-s+r_0}{a+s-r_0}.$$

Емкость и заряд

$$C_0 = \pi\epsilon_0 / \ln \frac{a+s-r_0}{a-s+r_0} = 0,4 \text{ пФ/см}; \quad \tau = C_0 U = 0,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/см.}$$

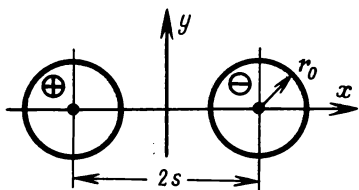


Рис. 16.11

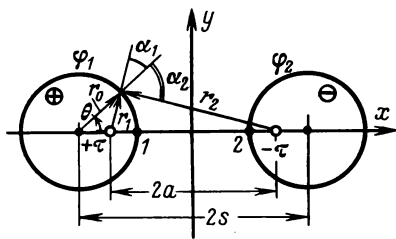


Рис. 16.11Р

Поверхностный заряд на проводе (рис. 16.11Р) по (16.7)

$$q_s = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 \left\{ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_1} \cos \alpha_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_2} \cos \alpha_2 \right\},$$

где  $r_1^2 = r_0^2 + (s-a)^2 - 2r_0(s-a)\cos\theta$ ;  $r_2^2 = r_0^2 + (s+a)^2 - 2r_0(s+a)\cos\theta$ ;

$$\cos \alpha_1 = \frac{r_0 - (s-a)\cos\theta}{r_1}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{(s+a)\cos\theta - r_0}{r_2},$$

или

$$q_s = \frac{\tau}{2\pi} \left\{ \frac{r_0 - (s-a)\cos\theta}{r_0^2 + (s-a)^2 - 2r_0(s-a)\cos\theta} - \frac{r_0 - (s+a)\cos\theta}{r_0^2 + (s+a)^2 - 2r_0(s+a)\cos\theta} \right\}.$$

Напряженность поля в плоскости, проходящей через оси проводов, имеет одну составляющую:

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{0,75+x} + \frac{1}{0,75-x} \right\} \text{ В/см,}$$

где  $x$  — в сантиметрах.

**16.12.** Двухпроводная линия состоит из двух медных цилиндров с радиусами 6 и 10 мм, находящихся на расстоянии 25 мм друг от друга.

Определить емкость системы.

**16.13.** Определить емкость и пробивное напряжение в системе двух некоаксиальных цилиндров (рис. 16.13), между которыми находится воздух. Пробивная прочность воздуха  $E_{\text{проб}} = 30$  кВ/см.

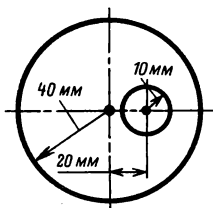


Рис. 16.13

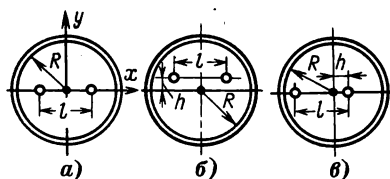


Рис. 16.14

**16.14(Р).** Для каждого из двухпроводных экранированных кабелей (рис. 16.14, а–в) определить емкость, рассчитать поле и найти распределение плотности заряда на внутренней поверхности оболочки.

Дано:  $R = 10$  мм;  $l = 10$  мм;  $h = 3$  мм; диаметр жилы  $d = 0,5$  мм;  $\epsilon_r = 1$ . Между жилами кабеля приложено напряжение  $U = 100$  В.

Решение. а) Заменим кабель (рис. 16.14, а) системой четырех заряженных осей так, чтобы оболочка кабеля осталась эквипотенциальной поверхностью (рис. 16.14Р, а). Для этого должны быть  $s - a = l/2$  и  $s^2 = a^2 + R^2$ , откуда  $a = R^2/l - l/4 = 7,5$  мм;  $s = R^2/l + l/4 = 12,5$  мм;  $s + a = 2R^2/l = 20$  мм.

Запишем потенциал любой точки поля двух двухпроводных линий (1-2 и 1'-2') по (16.18), принимая  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ :

$$\varphi = 7,9 \left[ \ln \frac{(x - 0,5)^2 + y^2}{(x + 0,5)^2 + y^2} + \ln \frac{(x + 2)^2 + y^2}{(x - 2)^2 + y^2} \right] \text{ В.}$$

По (16.3)

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 15,8 \left[ \frac{x + 0,5}{(x + 0,5)^2 + y^2} - \frac{x - 0,5}{(x - 0,5)^2 + y^2} + \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + y^2} - \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + y^2} \right] \text{ В/см;}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 15,8y \left[ \frac{1}{(x+0,5)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-0,5)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+2)^2 + y^2} \right] \text{ В/см,}$$

где  $x$  и  $y$  даны в сантиметрах.

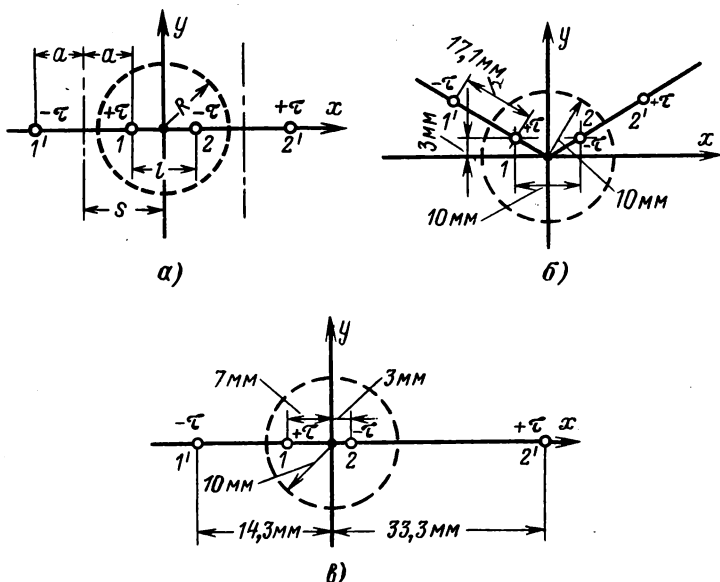


Рис. 16.14Р

Как следует из граничного условия (16.7), плотность заряда на оболочке кабеля

$$q_s = -\epsilon_0 E_r = \epsilon_0 \partial \varphi / \partial r |_{r=R},$$

где

$$E_r = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha;$$

$$q_s = 1,4 \left[ \frac{1 - 0,5 \cos \alpha}{1,25 - \cos \alpha} - \frac{1 + 0,5 \cos \alpha}{1,25 + \cos \alpha} + \frac{1 + 2 \cos \alpha}{5 + 4 \cos \alpha} - \frac{1 - 2 \cos \alpha}{5 - 4 \cos \alpha} \right] = \frac{2,1 \cos \alpha}{1,56 - \cos^2 \alpha} \text{ пКл/см}^2.$$

б) Для кабеля (рис. 16.14, б), для которого схема замещения показана на рис. 16.14Р, б, потенциал

$$\varphi = 8,05 \left[ \ln \frac{(x - 0,5)^2 + (y - 0,3)^2}{(x + 0,5)^2 + (y - 0,3)^2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{(x + 1,47)^2 + (y - 0,884)^2}{(x - 1,47)^2 + (y - 0,884)^2} \right] \text{ В};$$

$$E_x = 16,1 \left[ \frac{x + 0,5}{(x + 0,5)^2 + (y - 0,3)^2} - \frac{x - 0,5}{(x - 0,5)^2 + (y - 0,3)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x - 1,47}{(x - 1,47)^2 + (y - 0,884)^2} - \frac{x + 1,47}{(x + 1,47)^2 + (y - 0,884)^2} \right] \text{ В/см};$$

$$E_y = 16,1 \left[ \frac{y - 0,3}{(x + 0,5)^2 + (y - 0,3)^2} - \frac{y - 0,3}{(x - 0,5)^2 + (y - 0,3)^2} + \right. \\ \left. + \frac{y - 0,884}{(x - 1,47)^2 + (y - 0,884)^2} - \frac{y - 0,884}{(x + 1,47)^2 + (y - 0,884)^2} \right] \text{ В/см};$$

$$q_s = 1,43 \left[ \frac{0,3 \sin \alpha - 0,5 \cos \alpha - 1}{1,34 + \cos \alpha + 0,6 \sin \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{0,3 \sin \alpha + 0,5 \cos \alpha - 1}{1,34 - \cos \alpha + 0,6 \sin \alpha} + \frac{0,884 \sin \alpha + 1,47 \cos \alpha - 1}{3,93 + 2,94 \cos \alpha - 1,76 \sin \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{0,884 \sin \alpha - 1,47 \cos \alpha - 1}{3,93 - 2,94 \cos \alpha - 1,76 \sin \alpha} \right] \text{ пКл/см}^2.$$

в) Для кабеля (рис. 16.14, в), для которого схема замещения показана на рис. 16.14Р, в

$$\varphi = 8,05 \left[ \ln \frac{(x - 0,3)^2 + y^2}{(x + 0,7)^2 + y^2} + \ln \frac{(x + 1,43)^2 + y^2}{(x - 3,33)^2 + y^2} + 1,69 \right] \text{ В};$$

$$E_x = 16,1 \left[ \frac{x + 0,7}{(x + 0,7)^2 + y^2} - \frac{x - 0,3}{(x - 0,3)^2 + y^2} + \right. \\ \left. + \frac{x - 3,33}{(x - 3,33)^2 + y^2} - \frac{x + 1,43}{(x + 1,43)^2 + y^2} \right] \text{ В/см.}$$

$$E_y = 16,1y \left[ \frac{1}{(x + 0,7)^2 + y^2} - \frac{1}{(x - 0,3)^2 + y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(x - 3,33)^2 + y^2} - \frac{1}{(x + 1,43)^2 + y^2} \right] \text{ В/см};$$

$$q_s = 1,43 \left[ \frac{1 - 0,3 \cos \alpha}{1,09 - 0,6 \cos \alpha} - \frac{1 + 0,7 \cos \alpha}{1,49 + 1,4 \cos \alpha} + \right.$$

$$+ \frac{1 + 1,43 \cos \alpha}{3,05 + 2,86 \cos \alpha} - \frac{1 - 3,33 \cos \alpha}{12 - 6,66 \cos \alpha} \Big] \text{ пКл/см}^2.$$

**16.15(Р).** Определить потенциалы и заряды системы проводов, изображенной на рис. 16.15, если рубильники проводов 1 и 2 замкнуть, а рубильник провода 3 оставить разомкнутым. Выяснить, как изменится решение, если сначала провод 2 отключить от земли, затем провод 1 отключить от источника и, наконец, провод 3 соединить с землей.

Дано:  $U = 10 \text{ кВ}$ ; радиус проводов  $r_0 = 10 \text{ мм}$ ;  $h_1 = h_3 = 3 \text{ м}$ ;  $h_2 = 4,5 \text{ м}$ ;  $d = 2 \text{ м}$ .

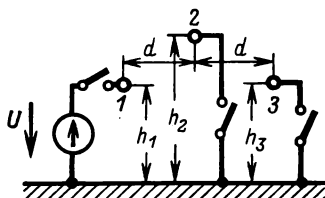
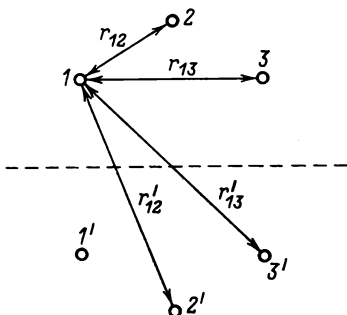


Рис. 16.15

Рис. 16.15Р →



**Решение.** Заданную систему проводов по методу зеркальных изображений заменим системой шести проводов (рис. 16.15Р).

Потенциалы проводов 1 и 2 заданы условиями задачи:  $\varphi_1 = 10 \text{ кВ}$ ;  $\varphi_2 = 0$ ; заряд  $\tau_3 = 0$ .

Остальные потенциалы и заряды определим из системы трех уравнений с потенциальными коэффициентами (16.14) после замены  $q$  на  $\tau$ , причем при заданных условиях

$$10^4 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2; \quad (1)$$

$$0 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2; \quad (2)$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2, \quad (3)$$

где  $\alpha_{11} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1}{r_0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 600 = 115 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ ;  $\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_2}{r_0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 900 = 123 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ ;  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'_{12}}{r_{12}} = 20 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ ;  $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'_{13}}{r_{13}} = 10,6 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$  записаны в соответствии с (16.14) с учетом (16.18).



Решив совместно (1) и (2), получим:  $\tau_1 = 80,0$  мкКл/км;  $\tau_2 = -12,0$  мкКл/км. Из (3) находим  $\varphi_3 = 605$  В.

После переключений  $\tau'_1 = \tau_1$ ,  $\tau'_2 = \tau_2$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Далее из системы уравнений с потенциальными коэффициентами определим:  $\varphi'_1 = 9950$  В;  $\varphi'_2 = -88,0$  В;  $\tau'_3 = -4,76$  мкКл/км.

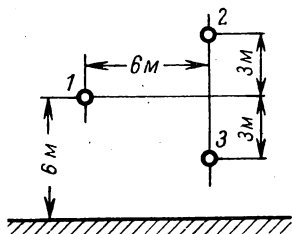


Рис.16.16

**16.16.** Определить заряды проводов 1, 2, 3 радиусом  $r_0 = 5$  мм системы, изображенной на рис. 16.16, при заданных потенциалах проводов относительно земли  $\varphi_1 = 10$  кВ,  $\varphi_2 = -20$  кВ,  $\varphi_3 = 10$  кВ.

**16.17(Р).** Двухпроводная линия 1-2 (рис. 16.17) находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью  $E_0$ , направленной вертикально.

Рассчитать и построить распределение потенциала вдоль оси  $y$  и распределение плотности заряда на поверхности земли для случаев рис. 16.17, а и б, если  $U = 100$  кВ;  $E_0 = 2$  кВ/м;  $h = 5$  м;  $d = 3$  м; радиус проводов  $r_0 = 2,5$  мм.

**Решение.** Применив метод зеркальных изображений, заменим заданную систему проводов четырьмя осями.

Запишем формулы Максвелла с потенциальными коэффициентами (16.14) с учетом поля тучи:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 \pm E_0(h+d); \\ \varphi_2 &= \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 \pm E_0h, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2(h+d)}{r_0} = 15,8 \cdot 10^{10}$  м/Ф;  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h+d}{d} = 2,65 \cdot 10^{10}$  м/Ф;  $\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_0} = 14,9 \times 10^{10}$  м/Ф записаны по формулам (16.14) с учетом (16.18).

Для случая рис. 16.17, а. Из решения системы (1) при  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = -100$  кВ и  $E_0 = 2$  кВ/м найдем  $\tau_1 = 22,1 \cdot 10^{-9}$  Кл/м и  $\tau_2 = -736 \cdot 10^{-9}$  Кл/м. По формуле (16.18) получим:

$$\varphi = 198 \ln \frac{(y+8)^2 + x^2}{(y-8)^2 + x^2} - 6610 \ln \frac{(y+5)^2 + x^2}{(y-5)^2 + x^2} + 2 \cdot 10^3 y$$

и, в частности, при  $x = 0$

$$\varphi(0, y) = 396 \ln \left| \frac{y+8}{y-8} \right| - 13220 \ln \left| \frac{y+5}{y-5} \right| + 2 \cdot 10^3 y,$$

где  $\varphi$  — в вольтах,  $x$  и  $y$  — в метрах.

Плотность заряда

$$q_s = \varepsilon_0 E_y(0, x) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, x) = \\ = \varepsilon_0 \left[ \frac{13\,220}{25 + x^2} - \frac{6336}{64 + x^2} - 2000 \right] \text{ Кл/м}^2,$$

где  $x$  — в метрах;  $\varepsilon_0$  — в фарадах на метр.

Зависимости  $\varphi(y)$  (сплошная линия) и  $q_s(x)$  (пунктир) построены на рис. 16.17Р.

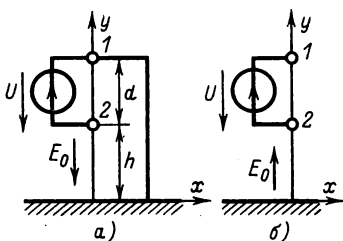


Рис. 16.17

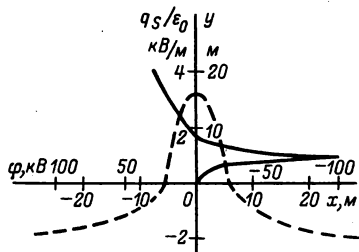


Рис. 16.17Р

**16.18(Р).** Рассчитать поле и построить эквипотенциали и линии поля (последние — качественно) для бесконечного заряженного провода диаметром  $d$ , проходящего в воздухе между заземленными ( $\varphi = 0$ ) бесконечными металлическими пластинами (рис. 16.18), при  $l/2 = 50$  мм,  $d = 4$  мм. Потенциал провода  $\varphi_0 = U = 100$  В.

Определить емкость на единицу длины системы.

**Решение.** Заменяем провод между двумя проводящими заземленными пластинами (по методу зеркальных изображений) бесконечной решеткой знакопеременных осей, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга.

Потенциал поля осей по (16.18)

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln z,$$

где

$$z = \frac{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}}{\sqrt{(2l-x)^2 + y^2}} \frac{\sqrt{(3l-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(2l+x)^2 + y^2}} \times \\ \times \frac{\sqrt{(3l+x)^2 + y^2}}{\sqrt{(4l-x)^2 + y^2}} \frac{\sqrt{(5l-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(4l+x)^2 + y^2}} \dots = \frac{\cos^2(\pi x/2l) + \text{sh}^2(\pi y/2l)}{\sin^2(\pi x/2l) + \text{sh}^2(\pi y/2l)}.$$

Приравняв потенциал точки  $x = d/2$ ,  $y = 0$  на поверхности провода к  $\varphi_0$ , получим:

$$\tau = \pi \epsilon_0 \varphi_0 / \ln \frac{4l}{\pi d}, \text{ т. е. } C_0 = \pi \epsilon_0 / \ln \frac{4l}{\pi d} = 8 \text{ пФ/м},$$

и

$$\varphi = 29 \ln \left[ \frac{\cos^2(\pi x/2l) + \operatorname{sh}^2(\pi y/2l)}{\sin^2(\pi x/2l) + \operatorname{sh}^2(\pi y/2l)} \right] \text{ В.}$$

Уравнение эквипотенциалей  $\varphi = \varphi_k$

$$(e^{A\alpha} + 1) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (e^{A\alpha} - 1) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{2l} = 1,$$

где  $A = 2 \ln(4l/\pi d)$ ,  $\alpha = \varphi_k/\varphi_0$ , получим, приравняв выражение потенциала к  $\alpha\varphi_0$ . На рис. 16.18Р построены эквипотенциали и качественно изображены (пунктиром) линии поля.

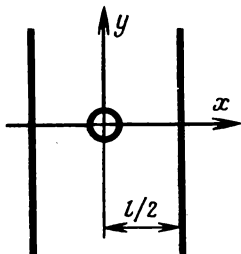


Рис. 16.18

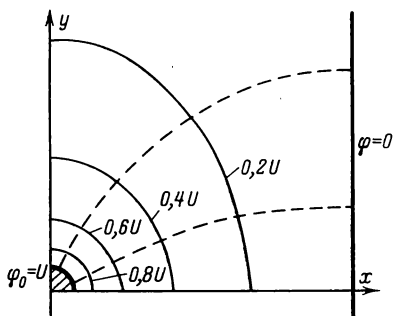


Рис. 16.18Р

**16.19.** Рассчитать и построить эквипотенциаль  $\varphi = 0,1U$  для бесконечного заряженного провода диаметром  $d$ , проходящего в воздухе параллельно ребру угла, который образован проводящими пластинами (рис. 16.19), при  $l_1 = 10$  мм,  $l_2 = 20$  мм,  $d = 5$  мм,  $\tau = 2 \cdot 10^{-10}$  Кл/м.

Определить емкость системы на единицу длины и распределение заряда по поверхности проводящих пластин.

**У к а з а н и е.** Провод, проходящий параллельно ребру угла, по методу зеркальных изображений следует заменить четырьмя проводами, образующими две двухпроводные линии с равными и противоположными зарядами. Необходимость четырех проводов определяется граничными условиями (16.6) и (16.7) на проводящих пластинах, образующих прямой угол.

**16.20(Р).** Определить частичные емкости системы проводов задачи 16.15 (рис. 16.15).

Решение. По определению (16.15) и (16.16)  $C_{11} = (\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13})$ ;  $C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = -\beta_{21}$ ;  $C_{22} = (\beta_{22} + \beta_{21} + \beta_{23})$ ;  $C_{13} = C_{31} = -\beta_{13} = -\beta_{31}$ ;  $C_{33} = (\beta_{33} + \beta_{31} + \beta_{32})$ ;  $C_{23} = C_{32} = -\beta_{23} = -\beta_{32}$ .

Емкостные коэффициенты  $\beta$  можно выразить через потенциальные коэффициенты  $\alpha$ , как следует из (16.14) и (16.15):

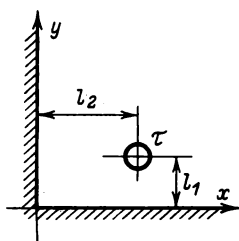
$$\beta_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \beta_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}}{\Delta};$$

$$\beta_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \beta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \beta_{33} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$

Вычисление потенциальных коэффициентов дано в решении задачи 16.15.

При заданных размерах системы  $C_{11} = 7,05$  пФ/м;  $C_{22} = 5,8$  пФ/м;  $C_{33} = 7,05$  пФ/м;  $C_{12} = 1,38$  пФ/м;  $C_{13} = 0,59$  пФ/м;  $C_{23} = 1,38$  пФ/м.



← Рис. 16.19

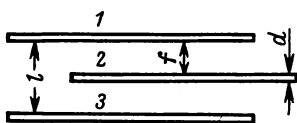


Рис. 16.23

**16.21.** Определить частичные емкости экранированных кабелей задачи 16.14.

**16.22.** Известны частичные емкости трехжильного кабеля  $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0,064$  мкФ/км;  $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0,076$  мкФ/км.

При испытании кабеля в лаборатории одна из жил была заземлена, другая имела потенциал  $\varphi_2 = 2$  кВ, третья  $\varphi_3 = -3$  кВ. Оболочка кабеля не заземлена.

Найти потенциал оболочки и заряды жил.

**16.23.** Между металлическими пластинами 1 и 3 (рис. 16.23) площадью  $S = 10hb$ , находящимися в воздухе, параллельно им вставлена металлическая пластина 2; ее толщина  $d = 0,5$  мм,

высота  $h = 40$  мм и ширина  $b = 50$  мм. Расстояние  $l$  между пластинами 1 и 3 равно 4,5 мм. Расстояние  $f$  между пластинами 1 и 2 равно 3,0 мм.

Найти частичные емкости системы, пренебрегая краевыми эффектами.

**16.24.** Потенциалы наружных пластин 1 и 3 в задаче 16.23 (рис. 16.23) соответственно  $\varphi_1 = +50$  В и  $\varphi_3 = -100$  В.

Найти потенциал внутренней пластины.

**16.25.** Найти заряд внутренней пластины в задаче 16.23 (рис. 16.23), если ее потенциал  $\varphi_2 = 0$ , а потенциалы наружных пластин 1 и 3 равны:  $\varphi_1 = 100$  В и  $\varphi_3 = -50$  В.

**16.26.** Найти максимально допустимое значение точечного (пробного) заряда, при котором погрешность в определении напряженности поля по силе, действующей на пробный заряд, не будет превосходить 1%. Истинная напряженность поля (т. е. напряженность поля в рассматриваемой точке при отсутствии пробного заряда) равна 5 кВ/см.

Определить силу, испытываемую пробным зарядом, в случае определения поля протяженной плоской пластины на расстоянии 5 мм от ее поверхности.

**Примечание.** Напряженность электрического поля определяют как отношение силы, действующей на пробный заряд, к численному значению этого заряда. При таком определении дополнительно требуется: 1) чтобы в пределах области, в которой распределен пробный заряд, изменение напряженности поля было ничтожно малым («точечный заряд») и 2) чтобы не происходило перераспределение зарядов, создающих поле, из-за внесения пробного заряда. Последнее требование всегда выполняется, если значение пробного заряда достаточно мало.

**16.27.** То же, что и в задаче 16.26, но для поля, определяемого в центре плоского конденсатора.

Расстояние до каждой пластины 5 мм, истинная напряженность поля  $E = 5$  кВ/см.

## 16.2. Электростатическое поле в диэлектрике

**16.28(Р).** Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика (рис. 16.28) зарядили до напряжения  $U$  и отключили от источника.

Дано:  $U = 100$  В;  $d_1 = d_2 = 1$  см;  $\varepsilon_{r1} = 3$ ;  $\varepsilon_{r2} = 6$ .

Найти электрическое смещение, напряженность поля и распределение потенциала в обоих диэлектриках.

Определить: 1) как изменятся эти величины и емкость конденсатора, если из конденсатора вынуть пластину второго диэлектрика; 2) каковы будут эти величины, если конденсатор останется подключенным к источнику.

**Решение.** По определению напряжение между пластинами конденсатора (разность потенциалов)

$$U = \int_0^{(d_1+d_2)} E dx.$$

В пределах каждого диэлектрика напряженность поля постоянна, поэтому

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2. \quad (1)$$

На границе двух диэлектриков свободный заряд отсутствует и, следовательно, по (16.8а)

$$\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$E_1 = \frac{U \epsilon_{r2}}{d_1 \epsilon_{r2} + d_2 \epsilon_{r1}} = 66,7 \text{ В/см}; \quad E_2 = \frac{U \epsilon_{r1}}{d_1 \epsilon_{r2} + d_2 \epsilon_{r1}} = 33,3 \text{ В/см}.$$

Электрическое смещение

$$D_1 = D_2 = D = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E = 200 \epsilon_0 = 17,72 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/см}^2.$$

Потенциал по (16.3)  $\varphi = -\int E dx + C$ , и, следовательно,  $\varphi_1 = (100 - 66,7x)$  В и  $\varphi_2 = (66,7 - 33,3x)$  В, где  $x$  — в сантиметрах.

1) Если вынуть вторую пластину при отключенном источнике, то останется неизменным заряд на пластинах, поверхностная плотность которого по (16.7) равна смещению  $D$ , т.е. останется прежним:  $D = 17,72 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/см}^2$ .

Напряженность поля по (15.6)

$$E_1 = D/\epsilon_{r1} \epsilon_0 = 66,7 \text{ В/см}; \quad E_2 = D/\epsilon_0 = 200 \text{ В/см}.$$

Напряжение на конденсаторе увеличится:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 266,6 \text{ В}.$$

Распределение потенциала:  $\varphi_1 = (266,6 - 66,7x)$ ;  $\varphi_2 = (400 - 200x)$  В.

2) Если вынуть пластину второго диэлектрика при включенном источнике, то напряжение останется прежним, и при

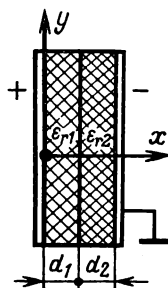


Рис. 16.28

$\epsilon_{r2} = 1$  получим:

$$E_1 = \frac{U\epsilon_{r2}}{d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1}} = 25 \text{ В/см}; E_2 = \frac{U\epsilon_{r1}}{d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1}} = 75 \text{ В/см}.$$

Электрическое смещение  $D = \epsilon_{r1}\epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_2 = 6,65 \times 10^{-12} \text{ Кл/см}^2$ , т.е. плотность заряда на пластинах уменьшится.

Распределение потенциала:  $\phi_1 = (100 - 25x) \text{ В}$ ;  $\phi_2 = (150 - 75x) \text{ В}$ .

В обоих случаях емкость конденсатора на единицу поверхности электродов  $C_0 = q_S/U = D/U = \epsilon_{r1}\epsilon_{r2}\epsilon_0/(d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1})$  уменьшится.

**16.29.** При сборке плоского конденсатора между электродами и диэлектриком ( $\epsilon_r = 4$ ) образовался воздушный зазор. Расстояние между электродами 0,5 см. Толщина воздушного зазора 0,01 см.

Определить, как изменится его пробивное напряжение, если пробивная прочность воздуха 30 кВ/см, диэлектрика 200 кВ/см.

**16.30.** Между пластинами плоского конденсатора симметрично расположен диэлектрический слой ( $\epsilon_r = 7$ ), занимающий по толщине половину межэлектродного пространства. Расстояние между пластинами 2 см.

Определить электрическое смещение, напряженность поля, поляризацию и распределение потенциала в воздухе и диэлектрике, если: 1) к пластинам присоединен источник с постоянным напряжением 10 кВ; 2) пластины замкнуты накоротко, но поляризация в диэлектрике осталась прежней.

**16.31.** В поле плоского конденсатора потенциал изменяется, как показано на рис. 16.31 (ломаная линия  $a$ ), где  $x$  — координата, перпендикулярная плоскости пластин конденсатора.

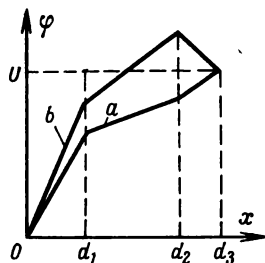


Рис. 16.31

1) Что можно сказать о диэлектрических свойствах изоляции конденсатора?

2) Как изменится график, если диэлектрик однородный при том же приложенном напряжении?

3) При каких условиях график потенциала в плоском конденсаторе имеет вид ломаной  $b$  на рис. 16.31? Чему соответствует угол наклона отрезка ломаной?

**16.32(Р).** К цилиндрическому конденсатору дважды подводится напряжение, доводящее конденсатор до пробоя: первый

раз, когда диэлектриком был воздух, пробивная напряженность которого  $E_{\text{пр}} = E_1 = 30$  кВ/см, и второй раз, когда диэлектриком было масло ( $\epsilon_r = 2,4$ ) с  $E_{\text{пр}} = E_2 = 54$  кВ/см.

Определить соотношение между напряжениями, прикладываемыми к конденсатору в первом и во втором случаях, и между зарядами конденсаторов в тех же случаях.

**Решение.** По теореме Гаусса (16.26) напряженность поля в цилиндрическом конденсаторе  $E = \tau / 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r$ . Учитывая, что

по (16.3) разность потенциалов или напряжение  $U = \int_{r_1}^{r_2} E dr$ ,

получим  $E = U / \left( r \ln \frac{r_2}{r_1} \right)$ , где  $r_1$  — радиус внутреннего проводника (жилы) и  $r_2$  — внутренний радиус внешнего проводника (оболочки).

Максимальная напряженность поля

$$E_{\text{max}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_1} = \frac{U}{r_1 \ln(r_2/r_1)},$$

откуда допустимое напряжение

$$U = \left( r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) E_{\text{пр}}$$

и заряд на единицу длины

$$\tau = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_1 E_{\text{пр}}.$$

Следовательно, отношение допустимых напряжений равно отношению пробивных напряженностей:  $U_1/U_2 = E_1/E_2 = 0,556$ , а отношение зарядов

$$\tau_1/\tau_2 = E_1/\epsilon_{r2}E_2 = 0,232.$$

**16.33(P).** Цилиндрический конденсатор (рис. 16.33, где  $r_1 = 1$  мм,  $r_2 = 2$  мм,  $r_3 = 4$  мм) заполнен двухслойным диэлектриком: 1)  $\epsilon_{ra} = 1$ ;  $\epsilon_{rb} = 3$  или 2)  $\epsilon_{ra} = 3$ ;  $\epsilon_{rb} = 1$ .

Определить в обоих случаях пробивное напряжение и построить зависимости напряженности поля от радиуса. Сравнить со случаем однородного диэлектрика, имеющего свойства слоя  $a$  или  $b$ .

Пробивная напряженность воздуха 30 кВ/см, пробивная напряженность диэлектрика 60 кВ/см.

**Решение.** Из теоремы Гаусса (16.26) следует, что

$$E_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_{ra}\epsilon_0 r}; \quad E_b = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_{rb}\epsilon_0 r}.$$



### Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{r_1}^{r_3} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_{ra}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{rb}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right).$$

В случае 1, если допустить  $E_{max} = E_{a max}$  при  $r = r_1$ , т. е.  $30 = \tau/2\pi\epsilon_0 \cdot 0,1$ , то  $\tau = 6\pi\epsilon_0$ , если  $E_{max} = E_{b max}$  при  $r = r_2$ , т. е.  $60 = \tau/2\pi\epsilon_0 \cdot 3 \cdot 0,2$ , то  $\tau = 72\pi\epsilon_0$ .

Во избежание пробоя надо взять меньшее значение заряда, т. е.  $\tau = 6\pi\epsilon_0$ , при этом пробивное напряжение

$$U_{проб} = \frac{6\pi\epsilon_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 \right) = 2,76 \text{ кВ.}$$

В случае 2 меньшее значение  $\tau = 12\pi\epsilon_0$  и пробивное напряжение

$$U_{проб} = \frac{12\pi\epsilon_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} \ln 2 + \ln 2 \right) = 5,52 \text{ кВ.}$$

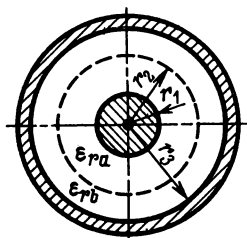


Рис. 16.33

Из зависимостей  $E(r)$ , приведенных на рис. 16.33Р, а и б, видно, что в случае 2 поле в конденсаторе меньше изменяется, что приводит к повышению пробивного напряжения.

Если имеется только диэлектрик а, то  $E_{a max} = 30 \text{ кВ/см} = \tau/2\pi\epsilon_0 r_1$  и  $\tau = 6\pi\epsilon_0$ , при этом  $U_{проб} = (\tau/2\pi\epsilon_{ra}\epsilon_0) \times \ln(r_3/r_1) = 4,14 \text{ кВ}$ . Если имеется только диэлектрик б, то  $E_{b max} =$

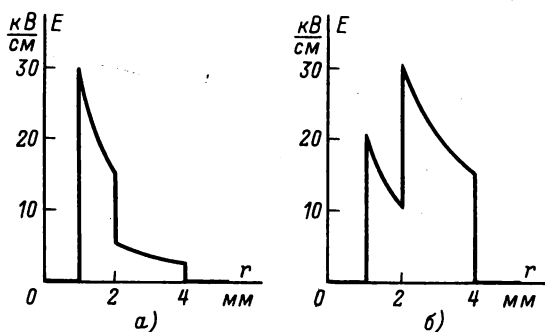


Рис. 16.33Р

$= 60 \text{ кВ/см} = \tau/2\pi\epsilon_{rb}\epsilon_0 r_1$  и  $\tau = 36\pi\epsilon_0$ , при этом  $U_{проб} = (\tau/2\pi\epsilon_{rb}\epsilon_0) \ln(r_3/r_1) = 8,28 \text{ кВ}$ .

**16.34.** На плоской границе раздела двух диэлектриков ( $\epsilon_{r1} = 6$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ ) отсутствует свободный заряд. В первом диэлектрике в некоторой точке на границе раздела составляющие напряженности поля:  $E_{1x} = 100$  В/см,  $E_{1y} = 50$  В/см (ось  $x$  лежит в плоскости раздела, ось  $y$  ей перпендикулярна).

Найти составляющие векторов  $E_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , а также  $q_{S\text{связ}}$  на границе в той же точке.

**16.35(Р).** На высоте  $h = 1$  см над плоской границей раздела двух диэлектриков (рис. 16.А, а) расположен точечный заряд  $q = 50$  пКл.

Определить значение и направление силы, действующей на заряд, и распределение поверхностного заряда вдоль границы раздела в двух случаях: 1)  $\epsilon_{r1} = 1$ ;  $\epsilon_{r2} = 4$ ; 2)  $\epsilon_{r1} = 4$ ;  $\epsilon_{r2} = 1$ . Нарисовать качественную картину линий поля в обоих случаях.

**Решение.** По методу зеркальных отражений (16.19) для расчета поля в диэлектрике с  $\epsilon_r = \epsilon_{r1}$  введем кроме заданного заряда  $q$  еще и фиктивный заряд  $q_1 = k_1 q$  (рис. 16.А, б); для расчета поля в диэлектрике с  $\epsilon_r = \epsilon_{r2}$  введем фиктивный заряд  $q_2 = k_2 q$  (рис. 16.А, в).

Сила взаимодействия заряда  $q$  с нижним диэлектриком  $F = Eq_1$ , причем  $E = q/4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0(2h)^2$  — напряженность поля заряда  $q$  в однородной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{r1}$  в точке, где находится заряд  $q_1$ . Следовательно, сила зависит от  $k_1$ , т.е. от соотношения  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$ ; при  $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$  заряды  $q_1$  и  $q$  одинакового знака ( $k_1 > 0$ ), т.е. заряд  $q$  отталкивается от диэлектрика.

Распределение потенциала в первой и второй средах запишем соответственно от двух и одного точечного заряда:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(y-h)^2 + x^2}} + \frac{k_1}{\sqrt{(y+h)^2 + x^2}} \right] \text{ при } y \geq 0;$$

$$\varphi_2 = k_2 q / 4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0 \sqrt{(y-h)^2 + x^2} \text{ при } y \leq 0.$$

Связанный заряд на границе диэлектриков найдем по (16.86) как разность нормальных составляющих поляризации или с учетом (16.9) и (16.8а) по формуле  $-q_{S\text{связ}} = \epsilon_0 [E_{1n} - E_{2n}]$ , где  $E_{1n} = -E_{1y} = \partial\varphi_1/\partial y$ ;  $E_{2n} = -E_{2y} = \partial\varphi_2/\partial y$  при  $y = 0$ .

Окончательно

$$q_{S\text{связ}} = \frac{qh}{2\pi} \frac{1 - \epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r1}} \frac{1}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Знак связанного заряда на границе, конечно, зависит от соотношения  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$  и совпадает со знаком фиктивного заряда  $q_1$ .

1) При  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 4$  заряд  $q$  притягивается ко второму диэлектрику с силой  $3,37 \cdot 10^{-8}$  Н и  $q_{S \text{ связ}} = -4,78/(1+x)^{3/2}$  пКл/см<sup>2</sup>.

2) При  $\epsilon_{r1} = 4$  и  $\epsilon_{r2} = 1$  заряд  $q$  отталкивается от диэлектрика с силой  $0,842 \cdot 10^{-8}$  Н и  $q_{S \text{ связ}} = 1,2/(1+x^2)^{3/2}$  пКл/см<sup>2</sup>.

Качественная картина линий поля для случаев 1 и 2 показана на рис. 16.35Р, а и б соответственно.

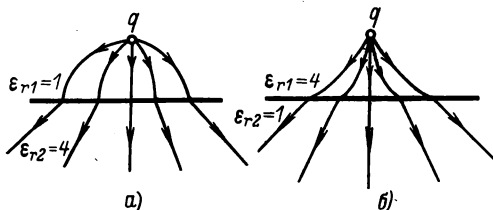


Рис. 16.35Р

**16.36(Р).** Рассчитать поле и построить эквипотенциали и линии поля (последние — качественно) внутри диэлектрического уголка (рис. 16.36) с  $\epsilon_{r1} = 20 \gg 1$ , если в нем параллельно его ребру проходит бесконечно длинный заряженный провод диаметром  $d$ .

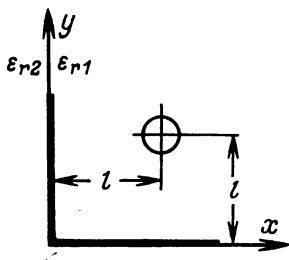


Рис. 16.36

Дано:  $h = l = 20$  мм;  $d = 5$  мм;  $\tau = 0,2$  мКл/км. Внешняя среда — вакуум ( $\epsilon_{r2} = 1$ ).

Решение. По методу зеркальных отражений (см. решение задачи 16.35) при  $\epsilon_{r1} \gg \epsilon_{r2}$  имеем  $k_1 \approx 1$ ,  $k_2 \approx 0$ . В этом случае поле внутри уголка рассчитывается от четырех одинаково заряженных осей с линейным зарядом  $\tau =$

$= 0,2$  мКл/км (рис. 16.36Р, а).

По (16.18)

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \ln \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{4h^4} = -0,18 \ln \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{4h^4} \text{ В,}$$

где  $r_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$ ;  $r_2 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$ ;  $r_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$ ;  $r_4 = \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$ ; напряженность поля

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,18 \left\{ \frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-2)^2} + \frac{x+2}{(x+2)^2 + (y-2)^2} + \right.$$

$$+ \frac{x-2}{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \frac{x+2}{(x+2)^2 + (y+2)^2} \} \text{ В/см;}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,18 \left\{ \frac{y-2}{(y-2)^2 + (x-2)^2} + \frac{y+2}{(y+2)^2 + (x-2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{y-2}{(y-2)^2 + (x+2)^2} + \frac{y+2}{(y+2)^2 + (x+2)^2} \right\} \text{ В/см.}$$

Потенциал  $\varphi = 0$  при  $x = y = 0$ . Поле вне уголка практически отсутствует. Картина поля изображена на рис. 16.36Р, б.

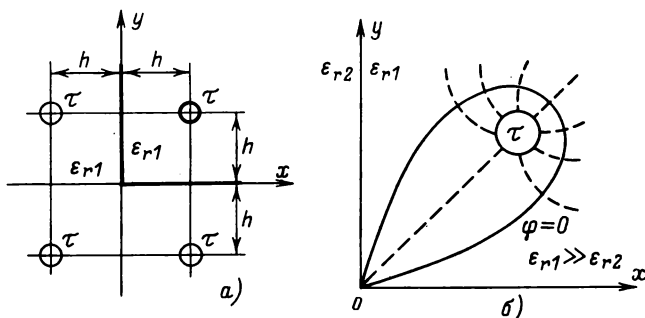


Рис. 16.36Р

**16.37(Р).** В центре сферы из диэлектрика ( $\epsilon_{r1} = 4$ ) расположен точечный заряд  $q = 1,2 \cdot 10^{-8}$  Кл (рис. 16.37). Окружающая среда имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{r2} = 1$ .

Найти поток вектора напряженности поля через поверхность симметрично расположенного эллипсоида вращения, вырезающего на сфере два участка поверхности, каждый из них видим из центра сферы под телесным углом  $\omega = \pi/2$ .

**Решение.** Электрический поток, пронизывающий поверхность эллипсоида, частично проходит по первому диэлектрику, частично — по второму, поэтому по теореме Гаусса (16.26)

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} (4\pi - 2\omega) + \frac{q}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0} 2\omega = 59 \text{ кВ} \cdot \text{см.}$$

**16.38.** То же, что и в задаче 16.37, но при  $\epsilon_{r1} = 4,5$  и  $\epsilon_{r2} = 1,5$ .

**16.39(Р).** То же, что и в задаче 16.37, но эллипсоид пересекает сферу так, что заряд  $q$  лежит вне эллипсоида (рис. 16.39). Эллипсоид вырезает на сфере два участка поверхности, каждый из них видим из центра сферы под углом  $\omega = \pi/4$ .

Решение. По теореме Гаусса (16.26)

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0} 2\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} 2\omega = 12,7 \text{ кВ} \cdot \text{см}$$

(см. также решение задачи 16.37).

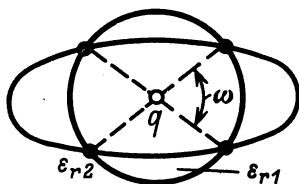


Рис. 16.37

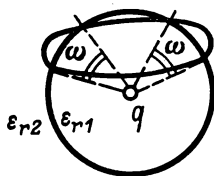


Рис. 16.39

**16.40.** То же, что и в задаче 16.39, но при  $\epsilon_{r1} = 1$  и  $\epsilon_{r2} = 4$ .

**16.41.** Найти поток вектора смещения через поверхность эллипсоида задачи 16.37.

**16.42.** Найти поток вектора смещения через поверхность эллипсоида задачи 16.38.

**16.43.** Найти поток вектора смещения через поверхность эллипсоида задачи 16.39.

**16.44.** Два точечных заряда  $q_1 = -q_2 = 1,2 \cdot 10^{-8}$  Кл расположены симметрично по обе стороны плоскости раздела двух сред с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{r1} = 2$ ,  $\epsilon_{r2} = 5$  (рис. 16.44).

Найти поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность, охватывающую оба заряда и вырезающую на пограничной плоскости площадку  $S$ , видимую из точек расположения зарядов под углами  $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ .

**16.45.** То же, что и в задаче 16.44, но углы  $\omega_1 = \omega_2 = 1,5\pi$ .

**16.46(P).** Найти поток вектора напряженности поля зарядов задачи 16.44, если заряды  $q_1$  и  $q_2$  расположены несимметрично, причем телесные углы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , под которыми площадка  $S$  видна из точек расположения зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно равны:  $\omega_1 = \pi$  и  $\omega_2 = 1,5\pi$ .

Дано:  $q_1 = 1,2 \cdot 10^{-8}$  Кл;  $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$  Кл;  $\epsilon_{r1} = 2$ ;  $\epsilon_{r2} = 5$ .

Решение. По методу зеркальных отражений (16.19) поле в диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon_{r1}$  можно рассчитать как поле трех точечных зарядов в первой среде (рис. 16.46P, a):

$q_1$ ;  $q'_1 = (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}) q_1 / (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) = -\frac{3}{7} q_1$ , который расположен зеркально относительно заряда  $q_1$ , и  $q'_2 = 2\epsilon_{r1} q_2 / (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) =$

$= \frac{4}{7} q_2$ , который находится там, где в действительности расположен заряд  $q_2$ .

Поле в диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon_{r2}$  можно рассчитать как поле трех точечных зарядов во второй среде

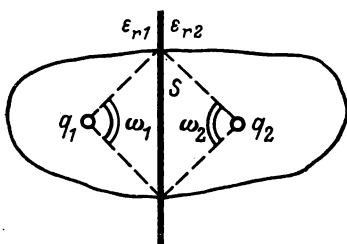
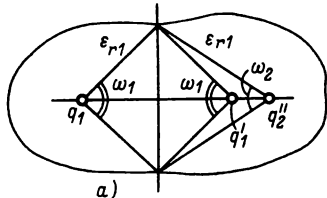
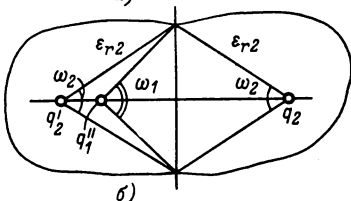


Рис. 16.44



а)



б)

Рис. 16.46Р →

(рис. 16.46Р, б):  $q_2'$ ;  $q_2' = -k_1 q_2 = \frac{3}{7} q_2$ , который расположен зеркально относительно заряда  $q_2$ , и  $q_1'' = k_2 q_1 = \frac{10}{7} q_1$ , который находится там, где в действительности расположен заряд  $q_1$ .

Поток от трех зарядов через левую поверхность (рис. 16.46Р, а)

$$\int E dS = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} (4\pi - \omega_1) + \frac{q_1'\omega_1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} + \frac{q_2'\omega_2}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0}.$$

Поток через правую поверхность (рис. 16.46Р, б)

$$\int E dS = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0} (4\pi - \omega_2) + \frac{q_2'\omega_2}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0} + \frac{q_1''\omega_1}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0}.$$

Поток через замкнутую поверхность

$$\oint E dS = \frac{q_1}{\epsilon_0} \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{56} + \frac{1}{14} \right) + \frac{q_2}{\epsilon_0} \left( \frac{1,5}{14} + \frac{2,5}{20} + \frac{4,5}{140} \right) = -6450 \text{ В} \cdot \text{см}.$$

**16.47.** В рассматриваемой области цилиндрического конденсатора  $1 \text{ см} < r < 2 \text{ см}$  с неоднородным диэлектриком  $\epsilon_r = f(r)$  поляризация  $P = P_r = (a + br^2) P_0$ , где  $a = 1$ ,  $b = 0,05 \text{ см}^{-2}$ ,  $P_0 = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^2$ .

Найти плотность связанного заряда.

**16.48.** В рассматриваемой области плоского конденсатора с неоднородным диэлектриком  $\epsilon_r = f(x)$  поляризация  $P = P_x = (a + bx^2) P_0$ , где  $a = 1$ ,  $b = 0,05 \text{ см}^{-2}$ ,  $P_0 = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^2$ .

Найти плотность связанного заряда.

**16.49.** Плоский конденсатор заполнен неоднородным диэлектриком с  $\epsilon_r = 4d/(d + x)$  (рис. 16.49). Пластины конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$ .

Определить зависимость от координаты  $x$  напряженности поля, поляризации, связанного объемного заряда. Рассчитать емкость системы. Расстояние между пластинами  $d = 2 \text{ мм}$ , площадь  $S = 4 \text{ см}^2$ .

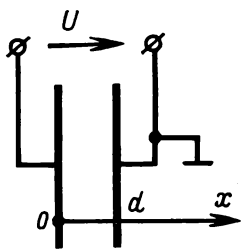


Рис. 16.49

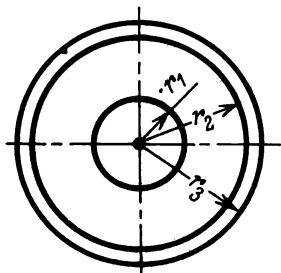


Рис. 16.50

**16.50(P).** Между жилой и оболочкой цилиндрического конденсатора заданных размеров  $r_1 = 1 \text{ см}$ ,  $r_2 = 4 \text{ см}$ ,  $r_3 = 4,5 \text{ см}$  (рис. 16.50) относительная диэлектрическая проницаемость изменяется по закону  $\epsilon_r = Ar$ , где  $A = 1 \text{ см}^{-1}$ .

При постоянном напряжении  $1 \text{ кВ}$  определить напряженность поля, смещение, поляризацию и связанный объемный заряд.

**Решение.** По теореме Гаусса (16.26) напряженность поля в диэлектрике

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 A r^2}.$$

Напряжение или разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 A} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

откуда при заданном напряжении  $U$  находим заряд  $\tau = 740 \text{ мКл/см}$ .

Следовательно,  $E = 133/r^2$  В/см;  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 118/r$  пКл/см<sup>2</sup>; по (15.5)  $P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = 118 (1/r - 1/r^2)$  пКл/см<sup>2</sup> и по (16.206)

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rP_r) = -\frac{118}{r^3} \text{ пКл/см}^3,$$

где  $r$  — в сантиметрах.

**16.51.** То же, что и в задаче 16.50, но при  $\epsilon_r = A/r^2$ , где  $A = 16$  см<sup>2</sup>.

**16.52.** Определить, при каком законе изменений  $\epsilon_r$  в цилиндрическом конденсаторе задачи 16.50 получится  $E = E_r = \text{const}$ .

### 16.3. Стационарное электрическое поле в проводящей среде

**16.53(Р).** Плоский конденсатор с двухслойным диэлектриком ( $d_1 = d_2 = 1$  см;  $\epsilon_{r1} = 2$ ;  $\epsilon_{r2} = 4$ ;  $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-10}$  См/см;  $\sigma_2 = 10^{-10}$  См/см) подключен к источнику постоянного напряжения 3 кВ.

Определить: 1) напряженность поля, сопротивление конденсатора и мощность, выделяющуюся в единице объема диэлектрика, а также свободный и связанный поверхностные заряды на границе слоев; 2) как изменится решение задачи, если диэлектрики будут идеальными ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ).

**Решение.** 1) По определению напряжение  $U = \int_0^d E dx = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$ , граничное условие (16.10)  $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ . Из двух уравнений находим  $E_1 = 1$  кВ/см;  $E_2 = 2$  кВ/см;  $J_1 = J_2 = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 = 0,2$  мкА/см<sup>2</sup>;  $D_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 = 2000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $D_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_2 = 8000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>; по (15.5)  $P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) E_1 = 1000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E_2 = 6000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>; по (16.7)  $q_S = D_2 - D_1 = 6000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>; по (16.86)  $q_{S \text{ связ}} = P_1 - P_2 = -5000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>, где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Активная мощность в единице объема по (16.23)

$$p_1 = \sigma_1 E_1^2 = 0,2 \text{ мВт/см}^3 \text{ и } p_2 = \sigma_2 E_2^2 = 0,4 \text{ мВт/см}^3.$$

Сопротивление конденсатора на единицу площади пластин  $R_0 = U/J = 1,5 \cdot 10^{10}$  Ом/см<sup>2</sup>.

2) При  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  по-прежнему  $U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$ ; (по 16.8а)  $\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2$ . Из двух уравнений получим  $E_1 = 2$  кВ/см;  $E_2 = 1$  кВ/см;  $D_1 = D_2 = 4000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $P_1 = 2000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $P_2 = 3000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $q_S = 0$ ;  $q_{S \text{ связ}} = -1000 \epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>, где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.



**16.54.** Изоляция коаксиального кабеля имеет удельную проводимость  $\sigma = 10^{-9}$  См/м. Радиус жилы 4 мм, внутренний радиус оболочки 8 мм. Напряжение между жилой и оболочкой 600 В.

Определить проводимость и ток утечки на единицу длины кабеля, плотность тока утечки у поверхностей жилы и оболочки, удельную мощность, выделяющуюся в тех же точках, и мощность потерь в изоляции кабеля на единицу длины.

**16.55.** Определить ток утечки на единицу длины коаксиального кабеля с двухслойной изоляцией (задача 16.33), если  $\epsilon_{ra} = 1$ ;  $\sigma_a = 2 \cdot 10^{-10}$  См/см;  $\epsilon_{rb} = 3$ ;  $\sigma_b = 10^{-10}$  См/см.

Кабель подключен к источнику постоянного напряжения 10 кВ.

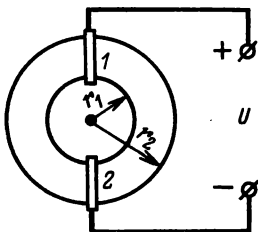


Рис. 16.56

**16.56(P).** К плоской проводящей шайбе (рис. 16.56) подводится постоянное напряжение  $U = 1,57$  В при помощи двух медных радиально расположенных пластин, врезанных в шайбу. Проводимость материала шайбы  $\sigma = 2 \cdot 10^6$  См/м. Размеры шайбы:  $r_1 = 50$  мм;  $r_2 = 80$  мм; толщина  $a = 1$  мм.

Определить наибольшее и наименьшее значения плотности тока в шайбе и ток источника питания. Потенциал каждой медной пластины считать во всех ее точках постоянным.

**Решение.** Считая, что линии плотности тока и напряженности поля совпадают с полуокружностями и напряженность поля зависит только от радиуса, из уравнения  $U = \int_1^2 E dl$  получим:  $E = U/\pi r$  и по (16.22)  $J = \sigma U/\pi r$ , следовательно,  $J_{max} = \sigma U/\pi r_1 = 2 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>;  $J_{min} = \sigma U/\pi r_2 = 1,25 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>;

$$\text{ток } I = 2 \int J dS = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sigma E a dr = \frac{2Ua\sigma}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 940 \text{ А.}$$

**16.57.** Два параллельных цилиндрических провода проходят через мраморный щит, толщина которого  $a = 3$  см. Расстояние между осями отверстий для проводов 20 см. Диаметр проводов 0,4 см.

Считая плоскость щита неограниченно большой, найти ток утечки через мрамор между проводами при напряжении между ними 240 В. Удельная проводимость мрамора  $10^{-10}$  См/м.

**16.58(P).** Сферический заземлитель радиусом  $R_0 = 2$  м находится в земле ( $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  См/см) на расстоянии  $h = 10$  м от ее поверхности (рис. 16.58). Ток заземлителя  $I = 1000$  А.

Определить распределение шагового напряжения и поверхностного заряда на границе.

**Решение.** Для расчета поля в земле (первая среда) введем по (16.24) фиктивный ток (рис. 16.58P, а)  $I_1 = n_1 I = I = 1000$  А (считая удельную проводимость воздуха  $\sigma_2 = 0$ ); для расчета поля в воздухе (вторая среда) введем фиктивный заряд (рис. 16.58P, б)  $q_2 = 2I\epsilon_0/\sigma_1 = 0,886 \times 10^{-6}$  Кл [выражение заряда  $q_2$  через ток  $I$  получается из граничных условий (16.6) и (16.10)].

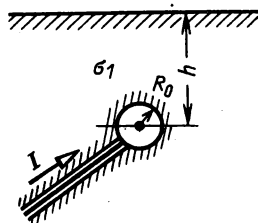


Рис. 16.58

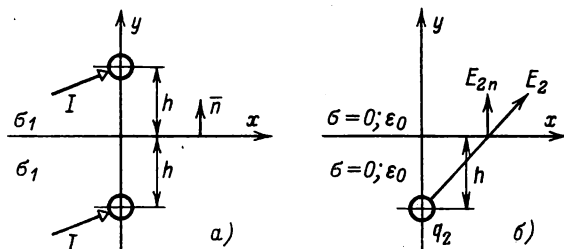


Рис. 16.58P

В однородной проводящей среде при растекании тока  $I$  напряженность поля  $E = J/\sigma = I/4\pi\sigma R^2$  и  $\varphi = \int E dR + C = \frac{I}{4\pi\sigma R}$ ,

если принять  $\varphi = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Шаговое напряжение (разность потенциалов на поверхности земли между точками, находящимися на расстоянии 0,8 м) с учетом токов  $I$  и  $I_1$

$$U_{\text{ш}} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 0,8)^2 + h^2}} \right\} =$$

$$= 8 \cdot 10^3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 0,8)^2 + 100}} \right\} \text{ В,}$$

где  $x$  — в метрах.

По (16.7) поверхностный заряд  $q_s = \epsilon_0 E_{2n}$ , так как по (16.10)  $J_{1n} = J_{2n} = 0$  (тока во 2-й среде нет) и в первой среде (земле)  $E_{1n} = J_{1n}/\sigma_1 = 0$ .

Выразив во второй среде  $E_{2n}$  через  $q_2$ , получим:

$$q_s = \frac{q_2 h}{4\pi (h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2I\epsilon_0 h}{4\pi\sigma_1 (h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{0,7}{(x^2 + 100)^{3/2}} \text{ мкКл/м}^2,$$

где  $x$  — в метрах.

**16.59.** Ток короткого замыкания 1000 А проходит в землю через фундамент опоры, который можно рассматривать как полусферический заземлитель. Удельная проводимость земли  $2 \cdot 10^{-4}$  См/см.

Найти шаговое напряжение на расстоянии 5 м от центра опоры (длина шага 0,8 м).

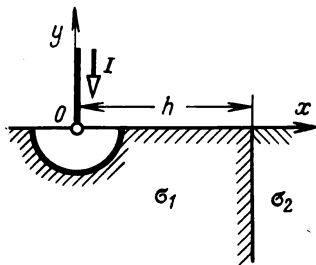


Рис. 16.60

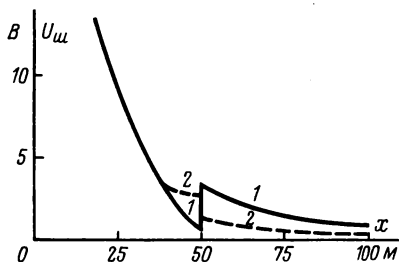


Рис. 16.60Р

**16.60(Р).** Полусферический заземлитель диаметром 4 м находится в земле с удельной проводимостью  $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  См/см (рис. 16.60). На расстоянии  $h = 50$  м от заземлителя проходит плоская граница раздела, за которой земля имеет удельную проводимость  $\sigma_2 = 10^{-4}$  См/см. С заземлителя растекается ток  $I = 2000$  А.

1) Построить зависимость шагового напряжения (длина шага 0,8 м) от координаты  $x$ .

2) Построить ту же зависимость при  $\sigma_2 = 10^{-3}$  См/см.

**Решение.** 1) По методу зеркальных изображений ток от полусферического заземлителя, расположенного в земле на границе с воздухом, растекается так же, как и двойной ток в однородной среде с параметрами земли.

Для учета границы, разделяющей земли с разными проводимостями, по формулам (16.24) введем фиктивные токи: для расчета поля в первой среде ток  $I$  и фиктивный ток  $I_1 = n_1 I$ , для расчета поля во второй среде — фиктивный ток  $I_2 = n_2 I$ .

В первой среде шагвое напряжение (см. решение задачи 16.58)

$$U_{ш1} = \frac{0,8I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{1}{x(x+0,8)} - \frac{n_1}{(2h-x-0,8)(2h-x)} \right\} =$$

$$= 0,51 \cdot 10^4 \left[ \frac{1}{x(x+0,8)} - \frac{0,66}{(100-x-0,8)(100-x)} \right] \text{ В,}$$

во второй среде

$$U_{ш2} = \frac{n_2 I}{2\pi\sigma_2} \frac{0,8}{x(x+0,8)} = 0,85 \cdot 10^4 \frac{1}{x(x+0,8)} \text{ В}$$

(кривая 1 на рис. 16.60Р). При  $x = h$  получим  $U_{ш1} = 0,67 \text{ В}$  и  $U_{ш2} = 3,35 \text{ В}$ .

2) На рис. 16.60Р построена пунктиром та же зависимость (кривая 2) для случая  $\sigma_2 = 10^{-3} \text{ См/см}$ .

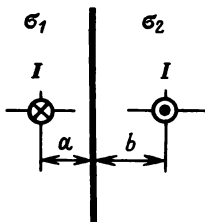


Рис. 16.61

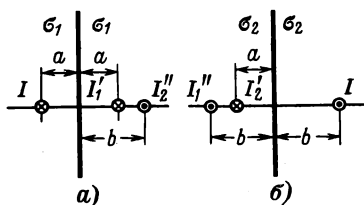


Рис. 16.61Р

**16.61.** Определить проводимость утечки на единицу длины двухпроводной линии, провода которой расположены в средах с различной удельной проводимостью (рис. 16.61).

Дано:  $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ См/см}$ ;  $\sigma_2 = 10^{-10} \text{ См/см}$ ;  $a = 40 \text{ м}$ ;  $b = 60 \text{ м}$ ; радиус проводов  $r_0 = 10 \text{ см}$ .

У к а з а н и е. По методу зеркальных отражений (16.24) поле в первой среде (рис. 16.61Р, а) определяется токами  $I$ ;  $I'_1 = n_1 I$  и  $I''_2 = I \cdot 2\sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2)$ ; поле во второй среде (рис. 16.61Р, б) определяется токами  $I$ ;  $I''_1 = -n_1 I$  и  $I'_2 = n_2 I$ .

**16.62(Р).** 1) Составить схемы для определения частичных емкостей трехфазной линии над землей (рис. 16.15) при помощи электролитической ванны.

2) Подобрать приборы с необходимыми пределами измерений, если удельная проводимость электролита  $\sigma = 2 \cdot 10^{-2} \text{ См/см}$  и при моделировании размеры линии уменьшены в 10 раз. В распоряжении экспериментатора имеется источник постоянного напряжения 50 В, глубина ванны  $h = 20 \text{ мм}$ .

3) Определить необходимую удельную проводимость электролита, если в распоряжении экспериментатора имеются приборы: вольтметр на 50 В и миллиамперметр на 300 мА.

Решение. По определению (16.16) частичные емкости  $C_{11} = \tau_1/(\varphi_1 - \varphi_0)$ ;  $C_{22} = \tau_2/(\varphi_2 - \varphi_0)$ ;  $C_{33} = \tau_3/(\varphi_3 - \varphi_0)$  при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ ;  $C_{12} = C_{21} = \tau_2/(\varphi_1 - \varphi_2)$  при  $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_0$ ;  $C_{13} = C_{31} = \tau_1/(\varphi_1 - \varphi_3)$  при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ ;  $C_{23} = C_{32} = \tau_2/(\varphi_2 - \varphi_3)$  при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — потенциал земли.

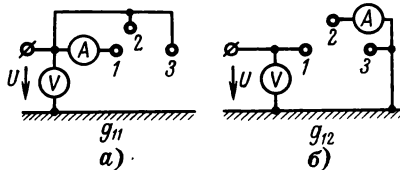


Рис. 16.62Р

1) Вместо частичных емкостей измеряются частичные проводимости  $g$ ; емкости рассчитываются по формуле (16.26).

Схемы для измерения проводимостей  $g_{11}$  и  $g_{12}$  приведены на рис. 16.62Р, а и б.

2) Наибольшие из частичных емкостей данной схемы  $C_{11} = C_{33} = 7,05$  пФ/м (см. задачу 16.20). Следовательно, наибольшая проводимость  $G_{11} = C_{11}\sigma/\varepsilon_0 = I_1/hU$ . Отсюда наибольший ток (рис. 16.62Р, а) при заданном напряжении источника  $I_{\max} = UhC_{11}\sigma/\varepsilon_0 = 1,59$  А.

3) При заданном максимальном токе  $I_{\max} = 300$  мА проводимость электролита находится из того же соотношения  $\sigma = 3,77 \cdot 10^{-3}$  См/см.

**16.63(Р).** Рассчитать поле (найти напряженность и потенциал) двухпроводного экранированного кабеля (рис. 16.14), изоляция которого имеет удельную проводимость  $\sigma$ . Найти сопротивление утечки  $r$  между жилами. Определить, какая часть тока утечки протекает по изоляции кабеля, минуя оболочку.

Задачу решить для конструкций кабеля, изображенных на рис. 16.14, а–в. Дано:  $R = 10$  мм; диаметр жилы  $d = 0,5$  мм;  $l = 10$  мм;  $h = 3$  мм;  $\sigma = 10^{-12}$  См/см.

Решение. а) Заменим кабель системой четырех линейных токов (рис. 16.14Р), где заряды  $\tau$  надо заменить токами утечки между жилами на единицу длины  $I_0$  так, чтобы оболочка кабеля была эквипотенциальной поверхностью. Для этого должно быть:  $s - a = l/2$  и  $s^2 = a^2 + R^2$ , откуда  $a = R^2/l - l/4 = 7,5$  мм;  $s = R^2/l + l/4 = 12,5$  мм;  $s + a = 2R^2/l = 20$  мм (см. решение задачи 16.14).

Учитывая аналогию электростатических и стационарных полей и принимая во внимание формулу (16.18), рассчитываем потенциал любой точки от двух линий (1 и 2), выбрав  $\varphi = 0$  при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{I_0}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(x+2R^2/l)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2R^2/l)^2 + y^2}} + \frac{I_0}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(x-l/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+l/2)^2 + y^2}} = \\ &= 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \ln \frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} + \ln \frac{\sqrt{(x-0,5)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+0,5)^2 + y^2}} \right\} \text{ В,}\end{aligned}$$

при этом получается  $\varphi = 0$  также и на оболочке кабеля.

По (16.3)

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,159 \cdot 10^{12} I_0 \left\{ -\frac{x-0,5}{(x-0,5)^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x+0,5}{(x+0,5)^2 + y^2} - \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} + \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right\} \text{ В/см;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,159 \cdot 10^{12} I_0 y \left\{ \frac{1}{(x+0,5)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-0,5)^2 + y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(x+2)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} \right\} \text{ В/см,}\end{aligned}$$

где  $x$  и  $y$  — в сантиметрах.

Сопротивление утечки на единицу длины  $r = U/I_0 = 10^{12} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ , где  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — напряжение между жилами.

Ток, протекающий по изоляции кабеля, минуя оболочку,

$$I'_0 = \int_{-R}^{+R} \sigma E_x(0, y) dy = 0,637I_0 (\arctg 2 - \arctg 0,5) = 0,413I_0.$$

$$\begin{aligned}\text{б) } \varphi &= 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \ln \frac{\sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,3)^2}}{\sqrt{(x+0,5)^2 + (y-0,3)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{\sqrt{(x+1,47)^2 + (y-0,884)^2}}{\sqrt{(x-1,47)^2 + (y-0,884)^2}} \right\} \text{ В;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_x &= 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \frac{x+0,5}{(x+0,5)^2 + (y-0,3)^2} - \right. \\ &\quad - \frac{x-0,5}{(x-0,5)^2 + (y-0,3)^2} - \frac{x+1,47}{(x+1,47)^2 + (y-0,884)^2} + \\ &\quad \left. + \frac{x-1,47}{(x-1,47)^2 + (y-0,884)^2} \right\} \text{ В/см;}\end{aligned}$$

$$E_y = 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \frac{y-0,3}{(x+0,5)^2 + (y-0,3)^2} - \frac{y-0,3}{(x-0,5)^2 + (y-0,3)^2} + \frac{y-0,884}{(x-1,47)^2 + (y-0,884)^2} - \frac{y-0,884}{(x+1,47)^2 + (y-0,884)^2} \right\} \text{ В/см};$$

$$r = 0,98 \cdot 10^{12} \text{ Ом} \cdot \text{см}; \quad I'_0 = 0,363I_0.$$

$$\text{в) } \varphi = 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \ln \frac{\sqrt{(x-0,3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+0,7)^2 + y^2}} + \ln \frac{\sqrt{(x+1,43)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-3,33)^2 + y^2}} + 1,69 \right\} \text{ В};$$

$$E_x = 0,159I_0 \cdot 10^{12} \left\{ \frac{x+0,7}{(x+0,7)^2 + y^2} - \frac{x-0,3}{(x-0,3)^2 + y^2} + \frac{x-3,33}{(x-3,33)^2 + y^2} - \frac{x+1,43}{(x+1,43)^2 + y^2} \right\} \text{ В/см};$$

$$E_y = 0,159I_0 \cdot 10^{12} y \left\{ \frac{1}{(x+0,7)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-0,3)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-3,33)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+1,43)^2 + y^2} \right\} \text{ В/см};$$

$$r = 0,995 \cdot 10^{12} \text{ Ом} \cdot \text{см}; \quad I'_0 = 0,42I_0.$$

**16.64(Р).** Плоский конденсатор (рис. 16.49) заполнен неидеальным диэлектриком с  $\epsilon_r = 5$  и  $\sigma = \sigma_0 - kx$ , где  $\sigma_0 = 10^{-10} \text{ См/см}$ ,  $k = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ См/см}^2$ ,  $x$  — в сантиметрах. Расстояние между пластинами  $d = 1 \text{ см}$ , конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$ .

Определить распределение свободных и связанных объемных зарядов.

**Решение.** В постоянном поле по (16.21а) в декартовой системе координат (при  $J = J_x$ )  $\partial J / \partial x = 0$  и, следовательно,  $J = \text{const}$ . Выразим напряжение на конденсаторе через напряженность поля:  $U = \int_0^d E dx$ , или, так как  $E = J/\sigma$ , то

$$U = \int_0^d \frac{J dx}{\sigma_0 - kx} = \frac{J}{k} \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - kd} = J/G_0,$$

где проводимость конденсатора на единицу площади пластин  $G_0 = k/\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - kd} = 0,5 \cdot 10^{-10}/\ln 2$  и, следовательно,  $J = 0,722 \times 10^{-7}$  А/см<sup>2</sup>, при этом  $E = J/\sigma = \frac{722}{1 - 0,5x}$  В/см;  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E = \frac{3610\epsilon_0}{1 - 0,5x}$  Кл/см<sup>2</sup>;  $P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \frac{2900\epsilon_0}{1 - 0,5x}$  Кл/см<sup>2</sup>; по (16.2а)  $\rho = dD/dx = 1805\epsilon_0/(1 - 0,5x)^2$  Кл/см<sup>3</sup>; по (16.206)  $\rho_{связ} = -dP/dx = -1450\epsilon_0/(1 - 0,5x)^2$  Кл/см<sup>3</sup>, где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр,  $x$  — в сантиметрах.

**16.65.** Решить предыдущую задачу при условии  $\epsilon_r = 5 - 3x$  и  $\sigma = 10^{-10}$  См/см.

**16.66.** У конденсатора задачи 16.49 диэлектрик обладает постоянной проводимостью  $\sigma = 10^{-10}$  См/см.

Определить объемную плотность свободного заряда и мощность потерь в диэлектрике.

**16.67.** В цилиндрическом конденсаторе задачи 16.50 (рис. 16.50) диэлектрик с  $\epsilon_r = 4$  имеет удельную проводимость: 1)  $\sigma = 10^{-10}$  См/см; 2)  $\sigma = B/r$ , где  $B = 10^{-10}$  См; 3)  $\sigma = C/r^2$ , где  $C = 10^{-10}$  См · см; 4)  $\sigma = Kr$ , где  $K = 10^{-10}$  См/см<sup>2</sup>. Здесь  $r$  — в сантиметрах.

При постоянном напряжении 1 кВ определить напряженность поля, смещение, связанный и свободный заряды, проводимость конденсатора и ток утечки на единицу длины.

#### 16.4. Квазистатическое электрическое поле в реальной среде

**16.68(Р).** Плоский конденсатор заполнен вязким диэлектриком, у которого электрическая восприимчивость  $\chi_r = 6$ , постоянная времени вязкости  $\tau = 5$  мс, расстояние между пластинами  $d = 0,5$  см. Конденсатор подключен к источнику синусоидального напряжения с  $U = 1$  кВ.

Построить зависимости от частоты действительной ( $\epsilon'_r$ ) и мнимой ( $\epsilon''_r$ ) частей относительной комплексной проницаемости. Найти напряженность поля, смещение, поляризацию, плотности тока и поверхностных свободных и связанных зарядов у пластин при частотах: 1)  $\omega = 0$ ; 2)  $\omega \rightarrow \infty$  и 3) частоте, при которой  $\epsilon'_r = \epsilon''_r$ . Для последнего случая построить векторную диаграмму и определить активную мощность конденсатора. При расчете пренебречь излучением и неоднородностью поля в диэлектрике.





$$E = \frac{1}{\epsilon_0 \chi_r} \left\{ \tau \frac{dP}{dt} + P \right\} = E_y (1 - e^{-t/\tau_0}).$$

**16.70(Р).** Плоский конденсатор ( $S = 4 \text{ см}^2$ ) с двухслойным диэлектриком подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$ . Слой  $a$  — диэлектрик ( $\epsilon_{ra} = 2$ ), толщина  $a = 1 \text{ см}$ ; слой  $b$  — вязкий диэлектрик:  $\chi_r = 4$ ,  $\tau = 5 \text{ мс}$ , толщина  $b = 1 \text{ см}$ .

Рассчитать зависимости от времени плотности свободных и плотности связанных зарядов на границе диэлектриков, напряженности поля, смещения, поляризации и плотности тока смещения. Определить потери энергии на вязкость.

**Решение.** Напряжение  $U = U_a + U_b = E_a a + E_b b$ . Из граничных условий (16.8а)  $D_a = \epsilon_{ra} \epsilon_0 E_a = D_b = \epsilon_0 E_b + P_b$ .

Дополнив эти соотношения уравнением вязкости (16.29)  $\tau dP_b/dt = \epsilon_0 \chi_r E_b - P_b$ , получим систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными.

Любую из искоемых величин представим как сумму установившейся и свободной составляющей, например  $P_b = P_{by} + P_{b\text{св}}$ .

В установившемся режиме  $P_{by} = \epsilon_0 \chi_r E_{by}$  и  $D_{by} = \epsilon_0 (\chi_r + 1) E_{by} = D_{ay} = \epsilon_{ra} \epsilon_0 E_{ay}$ , т. е.  $5E_{by} = 2E_{ay}$ , откуда  $E_{ay} = 712 \text{ В/см}$ ;  $E_{by} = 285 \text{ В/см}$ ;  $P_{by} = 1140\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$  и т. д.

Корень характеристического уравнения получим, приравняв нулю определитель системы уравнений

$$p = -[a(\chi_r + 1) + b\epsilon_{ra}]/(a + b\epsilon_{ra})\tau = -466 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,  $P_b = 1140\epsilon_0 + Ae^{pt}$ , и так как при  $t = 0$  должно быть  $P_b = 0$ , то  $A = -P_{by}$  и  $P_b = 1140\epsilon_0 (1 - e^{pt}) \text{ Кл/см}^2$ .

Из уравнения вязкости получим:  $E_b = 285(1 + 1,3e^{pt}) \text{ В/см}$ . По (16.9) и (16.8а)  $D_b = \epsilon_0 E_b + P_b = D_a = \epsilon_{ra} \epsilon_0 E_a = 1425\epsilon_0 - 770\epsilon_0 e^{pt} \text{ Кл/см}^2$ , т. е.  $E_a = D_a/\epsilon_{ra}\epsilon_0 = 712 - 385e^{pt} \text{ В/см}$ ;  $P_a = D_a - \epsilon_0 E_a = (712 - 385e^{pt})\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ ;  $J_{a\text{см}} = dD_a/dt = J_{b\text{см}} = dD_b/dt = J_{\text{см}} = 317 \cdot 10^{-10} e^{pt} \text{ А/см}^2$ ;  $i = J_{\text{см}} S = 0,127 e^{pt} \text{ мкА}$ .

Плотности зарядов по (16.7) и (16.8б)  $q_S = D_b - D_a = 0$ ;  $q_{S\text{связ}} = P_a - P_b = -427\epsilon_0 - 755\epsilon_0 e^{pt} \text{ Кл/см}^2$ . Здесь  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Энергия источника, отданная за время переходного процесса,  $W_n = \int_0^\infty U i dt = 2,72 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ . Энергия, запасенная в электрическом поле, в установившемся режиме по (16.48)

$$W_y = W_{ay} + W_{by} = Sd \left[ \frac{E_{ay} D_{ay}}{2} + \frac{E_{by} D_{by}}{2} \right] = 2,52 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Энергия электрического поля в начале процесса

$$W(0) = Sd [E_a(0) D_a(0)/2 + E_b(0) D_b(0)/2] = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

За время переходного процесса энергия электрического поля увеличилась на  $\Delta W = W_y - W(0) = 1,36 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ . Энергия потерь в вязком диэлектрике

$$W_r = W_n - \Delta W = 1,36 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} = W_n/2.$$

**16.71.** Удельная проводимость реального диэлектрика равна 1 См/см; относительная диэлектрическая проницаемость 80.

Определить, при какой частоте амплитуда тока смещения равна амплитуде тока проводимости.

**16.72.** Плоский конденсатор заполнен реальным диэлектриком ( $\epsilon_r = 5,5$ ;  $\sigma = 10^{-9} \text{ См/см}$ ). Толщина диэлектрика  $d = 1 \text{ см}$ . Конденсатор подключен к источнику синусоидального напряжения с действующим значением  $U = 100 \text{ В}$ .

а) Получить зависимости от частоты действительной  $\sigma'$  и мнимой  $\sigma''$  частей комплексной удельной проводимости и действительной  $\epsilon'_r$  и мнимой  $\epsilon''_r$  частей эквивалентной комплексной диэлектрической проницаемости.

Найти напряженность поля, смещение, поляризацию, плотности тока проводимости и смещения для трех частот: 1)  $f_1$ , при которой  $\sigma' = \sigma''$ ; 2)  $f_2 = 0$ ; 3)  $f_3 \rightarrow \infty$ , не учитывая излучения и неоднородности поля внутри диэлектрика.

**16.73(Р).** Плоский конденсатор заполнен реальным диэлектриком ( $\epsilon_r = 3$ ,  $\sigma = 10^{-10} \text{ См/см}$ ). Толщина диэлектрика  $d = 1 \text{ см}$ , площадь пластины  $S = 10 \text{ см}^2$ . Конденсатор подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$  через резистор с сопротивлением 1 МОм (рис. 16.73).

Рассчитать зависимости от времени напряженности электрического поля, зарядного тока, свободного заряда на пластинах и связанного заряда у пластин в диэлектрике.

Решение. По второму закону Кирхгофа

$$ir + u_C = U. \quad (1)$$

Полный ток по (16.28)

$$i = J_{\text{полн}} S = \sigma ES + \epsilon_r \epsilon_0 S dE/dt. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим уравнение

$$S \epsilon_r \epsilon_0 r dE/dt + (d + S \sigma r) E = U,$$

где напряженность поля  $E = E_y + E_{\text{св}}$ .

В установившемся режиме  $dE/dt = 0$  и, следовательно,  $E_y = U/(d + S \sigma r) = 500 \text{ В/см}$ .

Из характеристического уравнения  $Se_r\epsilon_0rp + S\sigma r + d = 0$  найдем один корень  $p = -7,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ , т. е.  $E = 500 + Ae^{pt}$ . Так как  $u_C(0) = 0$ , то и  $E(0) = 0$ ; следовательно,

$$E = 500(1 - 1e^{pt}) \text{ В/см.}$$

Из (2) получим  $i = 0,5(1 + 1e^{pt}) \text{ мА}$  и по формулам (16.7) и (16.8б)

$$q_S = D = \epsilon_r\epsilon_0 E = 133 \cdot 10^{-12}(1 - 1e^{pt}) \text{ Кл/см}^2$$

и

$$-q_{S \text{ связ}} = P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = 88,6 \cdot 10^{-12}(1 - 1e^{pt}) \text{ Кл/см}^2.$$

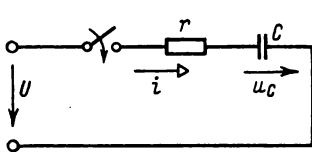


Рис. 16.73

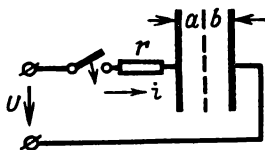


Рис. 16.74

**16.74(Р).** Плоский конденсатор заполнен двухслойным диэлектриком (рис. 16.74). Слой  $a$  — идеальный диэлектрик ( $\epsilon_{ra} = 7$ ;  $\sigma_a = 0$ ;  $a = 1 \text{ мм}$ ). Слой  $b$  — реальный диэлектрик ( $\epsilon_{rb} = 3$ ;  $\sigma_b = 10^{-10} \text{ См/см}$ ;  $b = 1 \text{ мм}$ ). Площадь пластины  $S = 100 \text{ см}^2$ . Конденсатор подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$  через резистор с сопротивлением  $r = 1 \text{ МОм}$ .

Рассчитать зависимости от времени напряженности электрического поля в слоях, связанного и свободного зарядов на границе слоев и тока  $i$  в зарядной цепи. Вычислить энергию, выделяющуюся в реальном диэлектрике, энергию, запасенную в электрическом поле конденсатора, и энергию, отданную источником. Составить баланс энергий.

**Решение.** По второму закону Кирхгофа

$$ir + u_a + u_b = ir + E_a a + E_b b = U, \quad (1)$$

причем полный ток равен току в зарядной цепи:  $J_{\text{полн}} S = i$ . По граничному условию (16.11)

$$J_{a \text{ полн}} = \epsilon_{ra}\epsilon_0 dE_a/dt = J_{b \text{ полн}} = \sigma_b E_b + \epsilon_{rb}\epsilon_0 dE_b/dt. \quad (2)$$

Получены два дифференциальных уравнения с двумя неизвестными:  $E_a$  и  $E_b$ . Определив обычным путем корни характеристического уравнения  $p_1 = -110 \text{ с}^{-1}$  и  $p_2 = -5650 \text{ с}^{-1}$ , запишем напряженности поля:

$$E_a = E_{ay} + A_1 e^{-110t} + A_2 e^{-5650t}; E_b = E_{by} + B_1 e^{-110t} + B_2 e^{-5650t}.$$

В установившемся режиме тока нет, так как  $\sigma_a = 0$ , и по (1)  $E_{ay}a + E_{by}b = U$ , где  $E_{by} = 0$ , так как  $\sigma_b \neq 0$ , т. е.  $E_{ay} = U/a = 10$  кВ/см.

Начальные условия:  $u_a(0) = u_b(0) = 0$ ;  $i(0) = U/r = 1$  мА;  $J_a(0) = J_b(0) = i(0)/S = 0,01$  мА/см<sup>2</sup>;  $dE_a/dt|_{t=0} = J_a(0)/\epsilon_{ra}\epsilon_0 = 1615 \cdot 10^4$  В/(с·см);  $dE_b/dt|_{t=0} = J_b(0)/\epsilon_{rb}\epsilon_0 = 3760 \cdot 10^4$  В/(с·см).

Определив постоянные, получим:  $E_a = 10^4 - 7280e^{-110t} - 2720e^{-5650t}$  В/см;  $E_b = 6790e^{-110t} - 6790e^{-5650t}$  В/см;  $i = \sigma SE_b + S\epsilon_{rb}\epsilon_0 \frac{dE_b}{dt} = S\epsilon_{ra}\epsilon_0 \frac{dE_a}{dt} = 0,0496e^{-110t} + 0,951e^{-5650t}$  мА;  $q_s = D_b - D_a = \epsilon_0(71,4 \cdot 10^3 e^{-110t} - 1,4 \cdot 10^3 e^{-5650t} - 7 \cdot 10^4)$  Кл/см<sup>2</sup>;  $q_{s\text{внз}} = P_a - P_b = \epsilon_0(60 \cdot 10^3 - 57,2 \cdot 10^3 e^{-110t} - 2,8 \cdot 10^3 e^{-5650t})$  Кл/см<sup>2</sup>. Здесь  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Энергия:  $W_r = \int_0^\infty ri^2 dt = 108$  мкДж;  $W = E_{ay}D_{ay}Sa/2 = \epsilon_{ra}\epsilon_0 E_{ay}^2 Sa/2 = 310$  мкДж;  $W_n = \int_0^\infty Ui dt = 620$  мкДж. Энергия потерь в реальном диэлектрике  $W_\sigma = \int_0^\infty \sigma E_b^2 Sb dt = 202$  мкДж;

энергия суммарных потерь  $W_r + W_\sigma = 310$  мкДж  $= W_n/2 = W$ .

**16.75.** Плоский конденсатор с двумя слоями  $a$  и  $b$  реального диэлектрика подключается к источнику постоянного напряжения 100 В. Даны: параметры  $\epsilon_{ra} = 5,5$ ;  $\epsilon_{rb} = 3,5$ ;  $\sigma_a = 10^{-14}$  См/см;  $\sigma_b = 10^{-16}$  См/см и размеры  $S = 400$  см<sup>2</sup>;  $a = 0,5$  см;  $b = 0,5$  см.

Определить зависимости от времени плотностей свободного и связанного зарядов на границе диэлектриков, плотностей токов проводимости и смещения, энергию, выделяющуюся в каждом диэлектрике за время переходного процесса, и мощность потерь в установившемся режиме.

**16.76.** Для высокочастотного нагрева в плоский конденсатор помещены два слоя полупроводящего материала. Толщина слоев  $d_a = d_b = 1$  см, параметры  $\epsilon_{ra} = 2$ ;  $\epsilon_{rb} = 4$ ;  $\sigma_a = 2 \times 10^{-6}$  См/см;  $\sigma_b = 10^{-6}$  См/см. Напряжение на конденсаторе 10 кВ, частота тока 1 МГц.

Определить зависимости от времени свободного и связанного зарядов на границе раздела диэлектриков. Сопоставить временные зависимости зарядов с временной зависимостью приложенного напряжения. Найти мощности потерь в полупроводящих слоях.

**16.77.** Слой  $a$  плоского конденсатора — реальный диэлектрик ( $d_a = 1$  см;  $\epsilon_{ra} = 2$ ;  $\sigma_a = 1,3 \cdot 10^{-10}$  См/см), слой  $b$  —

вязкий диэлектрик ( $d_b = 1$  см;  $\chi_r = 5$ ;  $\tau = 5$  мс). Конденсатор подключен к источнику синусоидального напряжения с амплитудой 1 кВ. Площадь пластины конденсатора  $S = 12,5$  см<sup>2</sup>.

Определить частоты, при которых в слое  $b$  тангенс угла потерь равен единице. Для меньшей частоты найти комплексные амплитуды напряженности поля, смещения и поляризации в обоих слоях, комплексную проводимость конденсатора и мощность потерь в диэлектрике конденсатора. Определить, в какие моменты времени обращаются в нуль свободный и связанный заряды на поверхности раздела диэлектриков.

**16.78.** Между жилой радиусом  $r_1 = 3$  мм и оболочкой коаксиального кабеля (рис. 16.78) для крепления жилы вставлены изоляционные кольца ( $\epsilon_r = 2,2$ ;  $\sigma = 10^{-14}$  См/см). Толщина колец  $d = 5$  мм. Расстояние между шайбами  $D = 50$  мм, внутренний радиус оболочки  $r_2 = 11$  мм.

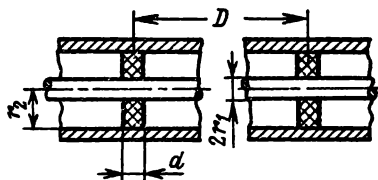


Рис. 16.78

Определить усредненные емкость и проводимость кабеля на единицу длины. Найти зависимость усредненного по длине тангенса угла потерь от частоты. Рассчитать распределение заряда вдоль поверхности жилы при заданном напряжении  $U$ . Потерями в проводах пренебречь.

**16.79(Р).** В неограниченном реальном диэлектрике ( $\epsilon_r = 2$ ;  $\sigma = 10^{-6}$  См/см) находится сферический электрод радиусом  $a = 1$  см, из которого растекается синусоидальный ток  $i = 10\sqrt{2} \sin \omega t$  мА с частотой  $f = 1$  МГц. Проводимость электрода много больше проводимости диэлектрика.

Определить потенциал электрода  $\phi$ , (приняв  $\phi = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ ), сопротивление растекания, мощность потерь в диэлектрике, плотность свободного заряда на поверхности электрода и плотности тока проводимости и смещения в диэлектрике.

**Решение.** Вследствие сферической симметрии плотность тока имеет только радиальную составляющую. Полная плотность тока состоит из плотности тока проводимости и плотности тока смещения (16.34):

$$\underline{j}_{\text{полн}} = \sigma \underline{\dot{E}} + j\omega \epsilon_r \epsilon_0 \underline{\dot{E}} = \underline{\sigma} \underline{\dot{E}} = \underline{i} / 4\pi R^2,$$

следовательно,

$$\underline{\dot{E}} = \underline{\dot{E}}_R = \frac{\underline{i}}{4\pi R^2 \underline{\sigma}} = \frac{6,7 \cdot 10^3}{4\pi R^2} \angle -48^\circ \text{ В/см},$$

где  $\underline{\sigma} = 1,49 \cdot 10^{-6} \angle 48^\circ$  См/см.

$$\text{По (16.35)} \quad \dot{\phi}_3 = \int_a^\infty \dot{E} dR = 6,7 \cdot 10^3 \angle -48^\circ / 4\pi a = 53,5 \angle -48^\circ \text{ В.}$$

Сопротивление растекания  $\underline{Z} = \dot{\phi}_3 / \dot{I} = 53 \, 500 \angle -48^\circ$  Ом.  
 Мощность потерь  $P = \text{Re}(\dot{\phi}_3 \dot{I}^*) = \text{Re}(535 \angle -48^\circ \cdot 0,01) = 3,58$  Вт.  
 Поверхностный заряд на сфере по (16.7)

$$\dot{q}_s = \epsilon_r \epsilon_0 \dot{E}(a) = \epsilon_r \epsilon_0 \dot{I} / 4\pi \underline{\sigma} a^2 = 0,095 \cdot 10^{-3} \angle -48^\circ \text{ мкКл/см}^2.$$

Плотности тока проводимости и смещения на расстоянии  $R$  от центра электрода соответственно равны:

$$\underline{J} = \underline{\sigma} \dot{E} = 6,7 \angle -48^\circ / 4\pi R^2 \text{ МА/см}^2;$$

$$\underline{J}_{\text{см}} = j\omega \epsilon_r \epsilon_0 \dot{E} = 7,44 \angle 42^\circ / 4\pi R^2 \text{ МА/см}^2,$$

где  $R$  — в сантиметрах.

Из решения видно, что синфазно изменяющиеся напряженность поля и заряд отстают по фазе от тока.

**16.80(Р).** Определить свободный заряд на поверхности сферы и напряженность поля в диэлектрике для электрода предыдущей задачи, если ток, растекающийся с электрода, изменится скачком от нуля до постоянного значения  $I$ .

**Решение.** Плотность тока и напряженность поля имеют только радиальные составляющие (сферическая симметрия). Плотность полного тока состоит из плотности тока смещения и плотности тока проводимости (16.28):

$$\sigma E + \epsilon_r \epsilon_0 dE/dt = J_{\text{полн}} = I / 4\pi R^2.$$

Решение дифференциального уравнения представим в виде установившейся и свободной составляющих:

$$E = E_y + E_{\text{св}} = E_y + A e^{pt},$$

где  $p = -\sigma / \epsilon_r \epsilon_0$  — корень характеристического уравнения, а  $E_y = I / 4\pi R^2 \sigma$ .

Постоянную  $A$  определим из начальных условий. При  $t = 0$  напряженность  $E = 0$ , так как в первый момент заряд на электроде равен нулю (для его накопления нужно время), следовательно,

$$E = \frac{I}{4\pi R^2 \sigma} (1 - e^{pt}).$$

Поверхностный заряд на электроде

$$q_s = \epsilon_r \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 I}{4\pi a^2 \sigma} (1 - e^{pt}).$$

**16.81(P).** Для прогрева земли в парниках применяют двухпроводную линию из неизолированного провода радиусом  $r_0$ , проложенную в земле (рис. 16.81).

Определить емкость, проводимость и мощность потерь на единицу длины линии, если  $d = 60$  мм;  $h = 20$  мм;  $r_0 = 2$  мм;  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$ ;  $\sigma_1 = 10^{-3}$  См/см;  $\sigma_2 = 0$ , напряжение питания  $u = 100 \sin \omega t$  В, где  $\omega = 2,26 \cdot 10^9$  рад/с.

Решение. По методу зеркальных отражений для расчета поля в земле кроме растекающегося тока  $\dot{I}$  вводим по (16.24) фиктивный ток  $\dot{I}_1 = n_1 \dot{I}$  (рис. 16.81P, а), для расчета поля

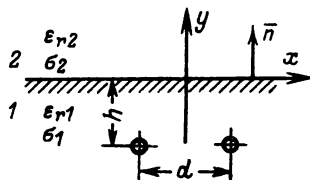


Рис. 16.81

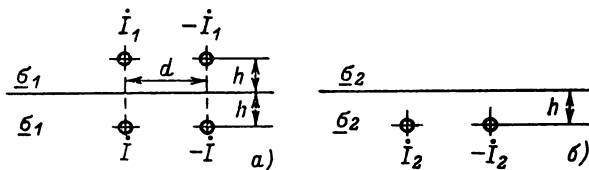


Рис. 16.81P

в воздухе вводим фиктивный ток  $\dot{I}_2 = n_2 \dot{I}$  (рис. 16.81P, б), но с комплексными коэффициентами

$$n_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2); \quad n_2 = 2\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2),$$

и при  $\sigma_1 = \sigma_1 + j\omega\epsilon_{r1}\epsilon_0 = (10 + 2j) \cdot 10^{-4} = 10,2 \cdot 10^{-4} \angle -11^\circ 20'$  См/см и  $\sigma_2 = \sigma_2 + j\omega\epsilon_{r2}\epsilon_0 = j2 \cdot 10^{-4}$  См/см получим  $n_1 = 0,935 \angle -21^\circ 50'$ ;  $n_2 = 0,375 \angle 68^\circ 10'$ .

Для вычисления комплексной проводимости линии на единицу длины  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = \dot{I}/\dot{U}$ , приняв во внимание выражение (16.18) и заменив  $\tau$  на  $\dot{I}$  и  $\epsilon_0$  на  $\sigma_1$ , запишем связь между напряжением и током растекания на единицу длины линии (рис. 16.81P, а):

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{\pi\sigma_1} \ln \frac{d}{r_0} + \frac{\dot{I}_1}{\pi\sigma_1} \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2h} = \dot{I} \cdot 1,34 \cdot 10^3 \angle -39^\circ 20',$$

при этом  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = (0,576 + j0,473) \cdot 10^{-3}$  См/см, т. е.  $G_0 = 0,576 \cdot 10^{-3}$  См/см и  $C_0 = 0,209 \cdot 10^{-12}$  Ф/см.

Мощность потерь  $P_0 = G_0 U^2 = 2,88$  Вт/см.

Для расчета поля определим ток  $\dot{I} = \underline{Y}_0 \dot{U} = 7,45 \times 10^{-4} \angle 39^\circ 20'$  А/см.



Распределение потенциала в земле (рис. 16.81Р, а)

$$\phi_1 = \frac{i}{2\pi\sigma_1} \left[ \ln \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + (y+h)^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + (y+h)^2}} + \right. \\ \left. + n_1 \ln \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + (y-h)^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + (y-h)^2}} \right] =$$

$$= [0,116 \angle 28^\circ \cdot M(x, y) + 0,1085 \angle 6^\circ 10' \cdot N(x, y)] \text{ В,}$$

в воздухе (рис. 16.81Р, б)

$$\phi_2 = \frac{i n_2}{2\pi\sigma_2} M(x, y) = 0,223 \angle 17^\circ 20' \cdot M(x, y) \text{ В.}$$

При  $t = T/4$ , т. е.  $\omega t = 90^\circ$ , получим:

$$\phi_1 = [0,116 \sin(118^\circ) \cdot M(x, y) + 0,1085 \sin(96^\circ 10') \cdot N(x, y)] \text{ В;}$$

$$\phi_2 = 0,223 \sin(107^\circ 20') \cdot M(x, y) \text{ В.}$$

**16.82.** Однопроводная линия подвешена над землей на высоте 4 м, диаметр провода 2 см. Задано напряжение между проводом и землей  $u = 6000 \sin 314t$  В.

Определить плотность тока смещения в точке у нижней поверхности провода и у поверхности земли в точке под проводом. Землю считать идеальным проводником.

**16.83(Р).** Двухпроводная линия (рис. 16.83), протянутая в воздухе над реальным диэлектриком ( $\epsilon_{r2} = 10$ ;  $\sigma_2 = 10^{-8}$  См/см), находится под синусоидальным напряжением с  $U_m = 500$  В. Дано: радиус проводов  $r_0 = 0,5$  мм;  $d = 20$  мм;  $h = 10$  мм.

Определить емкость, проводимость и мощность потерь на единицу длины линии. Задачу решить для следующих частот: а) 50 Гц; б) 5 кГц; в) 50 кГц; г) 50 МГц. Потерями в проводах пренебречь.

Решение. Применяя метод зеркальных отображений (см. решение задачи 16.81), получаем:

$$\underline{Y}_0 = \frac{i_0}{U} = \frac{\pi \sigma_1}{\ln(d/r_0) + n_1 \ln(\sqrt{d^2 + 4h^2}/2h)} = G_0 + j\omega C_0,$$

$$\text{где } \sigma_1 = j\omega\epsilon_{r1}\epsilon_0 = j10^{-11} f/18 \text{ См/см; } \sigma_2 = \sigma_2 + j\omega\epsilon_{r2}\epsilon_0 = \\ = 10^{-8} \left( 1 + j \frac{f}{18} 10^{-2} \right) \text{ См/см.}$$

Значения  $G_0$  (См/см) и  $C_0$  (пФ/см) при заданных частотах соответственно равны: а)  $1,5 \cdot 10^{-12}$ ; 0,835; б)  $150 \cdot 10^{-12}$ ; 0,085;

в)  $15 \cdot 10^{-12}$ ; 0,085; г)  $\approx 0$ ; 0,085. Мощность потерь на единицу длины вычислим по известной проводимости  $P = G_0 U^2$ : а)  $0,188 \cdot 10^{-6}$  Вт/см; б)  $18,8 \cdot 10^{-6}$  Вт/см; в)  $1,88 \cdot 10^{-6}$  Вт/см; г)  $\approx 0$ .

**16.84.** Линия задачи 16.83 подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 50$  В. Определить заряд на положительно заряженном проводе и поверхностные свободный и связанный заряды на границе раздела сред.

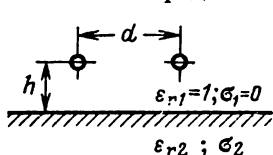


Рис. 16.83

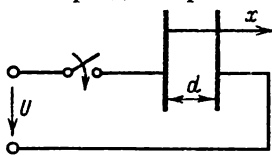


Рис. 16.85

**16.85(Р).** Плоский конденсатор, заполненный реальным неоднородным диэлектриком, подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 1$  кВ (рис. 16.85).

Определить напряженность поля, а также свободный и связанный заряды в диэлектрике: а) в начале процесса и б) в установившемся режиме. Задачу решить при параметрах: 1)  $\epsilon_r = 2d/(d+x)$ ;  $\sigma = 10^{-10}$  См/см; 2)  $\epsilon_r = 2,2$ ;  $\sigma = \sigma_0/(1+kx)$ ;  $\sigma_0 = 10^{-14}$  См/см;  $k = 0,5$  см $^{-1}$ ; 3)  $\sigma = ae^{ax}$ ;  $\epsilon_r = be^{ax}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  — постоянные; 4)  $\sigma = a + bx$ ;  $\epsilon_r = a + bx$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные. Расстояние между пластинами конденсатора  $d = 1$  см.

Решение. 1а) При  $t = 0$  свободный заряд в диэлектрике отсутствует, так как для его накопления необходимо время:  $\rho = \text{div } \mathbf{D} = 0$ , т. е.  $D = D_x = \text{const}$ ;  $E = E_x = D/\epsilon_r \epsilon_0$ . Напряжение на конденсаторе

$$U = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{D(d+x)}{2\epsilon_0 d} dx = \frac{3Dd}{4\epsilon_0},$$

$$\text{откуда } D = \frac{4}{3} \frac{\epsilon_0 U}{d}; E = \frac{2}{3} \frac{U}{d^2} (d+x)$$

и

$$\rho_{\text{связ}} = -\text{div } \mathbf{P} = -\text{div } \mathbf{D} + \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = \epsilon_0 dE/dx = 2\epsilon_0 U/3d^2.$$

1б) При  $t \rightarrow \infty$  (в установившемся режиме) ток смещения отсутствует, т. е.  $J = \sigma E = \text{const}$ ;  $E = U/d = \text{const}$ ;  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 2\epsilon_0 U/(d+x)$  и  $P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = (\epsilon_0 U/d) [2d/(d+x) - 1]$ . По (16.2а) и (16.20б)  $\rho = \text{div } \mathbf{D} = -2\epsilon_0 U/(d+x)^2$ ;  $\rho_{\text{связ}} = -\text{div } \mathbf{P} = -dP/dx = 2\epsilon_0 U/(d+x)^2 = -\rho$ .

**16.86.** Плоский конденсатор, заполненный неоднородным реальным диэлектриком, подключается к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 16.85).

Указать, какое соотношение должно быть между зависимостями  $\epsilon_r(x)$  и  $\sigma(x)$ , чтобы внутри реального диэлектрика: 1) образовался только свободный объемный заряд; 2) образовался только связанный объемный заряд; 3) образовались оба заряда одновременно; 4) не образовалось ни свободного, ни связанного заряда; 5) общий объемный заряд был бы равен нулю при неравенствах нулю свободного и связанного зарядов.

Задачу решить для: начала процесса (А) и установившегося режима (Б).

**16.87.** Конденсатор задачи 16.67 подключается к источнику постоянного напряжения  $U$ .

Определить напряженность поля, а также свободный и связанный заряды в диэлектрике: а) в начале процесса и б) в установившемся режиме.

## 16.5. Уравнения Лапласа и Пуассона

**16.88.** Незаряженная проводящая сфера радиусом  $a$  внесена в однородное поле  $E_0$ , направленное по оси  $z$ . Для такой сферы известно, что в сферической системе координат с началом в центре сферы  $\varphi = -E_0(R - a^3/R^2) \cos \theta$ .

1) Проверить, удовлетворяет ли это решение уравнению Лапласа и граничным условиям.

2) Определить поверхностный заряд на сфере.

3) Составить решение для потенциала в случае заряженной сферы (заряд  $q$ ).

**16.89.** Незаряженный проводящий цилиндр радиусом  $a$  внесен в однородное поле  $E_0$ , перпендикулярное его оси (рис. 16.89). Для такого цилиндра известно, что  $\varphi = -E_0(r - a^2/r) \cos \alpha$ .

1) Проверить, удовлетворяет ли это решение уравнению Лапласа и граничным условиям. 2) Определить поверхностный заряд на цилиндре. 3) Составить решение для потенциала в случае заряженного цилиндра (линейный заряд  $\tau$ ).

**16.90(Р).** Шар радиусом  $a$  из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_i$  находится во внешнем поле (рис. 16.90) в среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{re}$ .

Найти распределение потенциала, напряженности поля внутри и вне шара и поверхностный связанный заряд на шаре. При решении пользоваться известным решением уравнения Лапласа в сферической системе координат:  $\varphi = C_1 R \cos \theta + (C_2/R^2) \cos \theta + K$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $K$  — постоянные.

**Решение.** Запишем выражение потенциала для внутренней  $\varphi_i$  и внешней  $\varphi_e$  областей:

$$\varphi_i = C_1 R \cos \theta + \frac{C_2}{R^2} \cos \theta + K_1;$$

$$\varphi_e = C_3 R \cos \theta + \frac{C_4}{R^2} \cos \theta + K_2.$$

При  $R \rightarrow 0$  должно быть  $E_i = |-\text{grad } \varphi_i| \neq \infty$ , следовательно,  $C_2 = 0$ . Положим  $\varphi_i = 0$  при  $R = 0$ , тогда  $K_1 = 0$ . При  $R \rightarrow \infty$  поле становится однородным и  $\varphi_e = -E_0 z = -E_0 R \cos \theta$ . Сле-

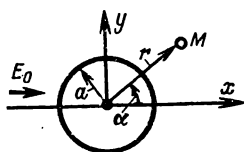


Рис. 16.89

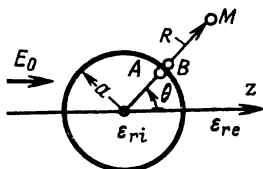


Рис. 16.90

довательно,  $-E_0 R \cos \theta = C_3 R \cos \theta + K_2$  при любом  $\theta$ , т. е.  $C_3 = -E_0$ ;  $K_2 = 0$ . Итак,  $\varphi_i = C_1 R \cos \theta$ ;  $\varphi_e = -E_0 R \cos \theta + \frac{C_4}{R^2} \cos \theta$ .

При  $R = a$  и любом  $\theta$  должно быть (16.6)  $\varphi_i = \varphi_e$ , т. е.  $C_1 a = -E_0 a + C_4/a^2$ , и по (16.8a)  $D_{in} = D_{en}$  или  $\epsilon_{ri} \partial \varphi_i / \partial R = \epsilon_{re} \partial \varphi_e / \partial R$ , т. е.  $\epsilon_{ri} C_1 = -\epsilon_{re} (E_0 + 2C_4/a^3)$ , откуда  $C_1 = -E_0 3\epsilon_{re}/(\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re})$ ;  $C_4 = E_0 a^3 (\epsilon_{ri} - \epsilon_{re})/(\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re})$ .

Окончательно

$$\varphi_i = -E_0 \frac{3\epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}} R \cos \theta = -E_0 \frac{3\epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}} z;$$

$$\varphi_e = -E_0 R \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{R^2} \frac{\epsilon_{ri} - \epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}} \cos \theta.$$

Так как  $\varphi_i = \varphi_i(z)$ , то внутри шара по (16.3)

$$E_i = E_{iz} = -\partial \varphi_i / \partial z = E_0 3\epsilon_{re}/(\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}),$$

вне шара

$$E_{eR} = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} = E_0 \cos \theta + 2E_0 \frac{a^3}{R^3} \frac{\epsilon_{ri} - \epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}} \cos \theta;$$

$$E_{e\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + E_0 \frac{a^3}{R^3} \frac{\epsilon_{ri} - \epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re}} \sin \theta.$$

По определению (16.8б)  $q_{S \text{ связ}} = P_{in} - P_{en} = \epsilon_0 (E_{eR} - E_{iR})$  при  $R = a$ , т. е.  $q_{S \text{ связ}} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta (\epsilon_{ir} - \epsilon_{er})/(\epsilon_{ri} + 2\epsilon_{re})$ .

**16.91.** Цилиндр радиусом  $a$  из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ri}$  находится в однородном поле  $E_0$ , перпендикулярном его оси (см. рис. 16.89) в среде с проницаемостью  $\epsilon_{re}$ .

Найти распределение потенциала внутри и вне цилиндра, напряженность поля внутри и поверхностный связанный заряд на цилиндре.

При решении пользоваться известным решением уравнения Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\varphi = C_1 r \cos \alpha + (C_2/r) \cos \alpha + K,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $K$  — постоянные.

**16.92.** Построить качественно линии векторов напряженности поля, смещения и поляризации для цилиндра предыдущей задачи при  $E_0 = 1$  кВ/см, если: 1)  $\epsilon_{ri} = 5$ ;  $\epsilon_{re} = 1$ ; 2)  $\epsilon_{ri} = 1$ ;  $\epsilon_{re} = 5$ .

Определить в обоих случаях плотность связанного поверхностного заряда в точке на поверхности цилиндра при  $\alpha = 60^\circ$  (см. рис. 16.89).

**16.93.** В диэлектрике плоского конденсатора ( $\epsilon_r = 7$ ) имеется нитевидное воздушное включение диаметром 0,02 мм, параллельное пластинам.

Найти пробивное напряжение конденсатора, если толщина диэлектрика 2 мм, пробивная напряженность воздуха 30 кВ/см.

**16.94.** Для увеличения пробивной прочности масляных конденсаторов масло перед заливкой подвергается сушке, очистке и обезгаживанию (наличие примесей ухудшает изоляционные свойства масла).

В плоский конденсатор, заполненный маслом ( $\epsilon_r = 2,2$ ), с расстоянием между пластинами 10 мм попала капля воды диаметром 0,2 мм.

1) Определить, при каком напряжении произойдет пробой масла у поверхности воды. Пробивная прочность масла 60 кВ/см. Воду считать проводником.

2) Как изменится ответ, если вместо капли воды в масле образовался пузырек воздуха тех же размеров. Пробивная прочность воздуха 30 кВ/см.

3) При каком напряжении произойдет пробой масла, если нет включений.

**16.95(Р).** В электростатической машине для усиления поля в области 2 (рис. 16.95, а) в воздушное пространство внесен диэлектрик в форме шара с большим  $\epsilon_{r1}$ . Через достаточно длительное время картина поля изменилась (рис. 16.95, б). Удельная проводимость воздуха  $\sigma_2$  больше, чем диэлектрика

$\sigma_1$ , вследствие ионизации воздуха. Дать объяснение изменению картины поля.

**Решение.** В первый момент после включения электрического поля свободный заряд на поверхности шара отсутствует и на его границе справедливы условия  $\varphi_1 = \varphi_2$  и  $D_{1n} = D_{2n}$ , совпадающие с граничными условиями для идеального диэлектрика (16.6) и (16.8а). Соответственно картина поля получается такой, как для шара из диэлектрика с  $\epsilon_{r1} > 1$ , находящегося в воздухе, т.е. линии поля втягиваются в диэлектрик у его полюсов (см. решение задачи 16.90).

Со временем изменения поля прекращаются, ток смещения становится равным нулю и остается только ток проводимости, линии поля совпадают с линиями плотности тока, соответственно они в основном огибают сферу, проводимость которой меньше проводимости окружающего пространства.

**16.96.** Шар с параметрами материала  $\epsilon_{r1} = 10$ ,  $\sigma_1 = 10^{-16}$  См/см, радиусом  $a = 1$  мм (рис. 16.90) находится в вакууме в однородном внешнем электрическом поле, напряженность которого в момент  $t = 0$  скачком изменяется от нуля до значения  $E_0 = 1000$  В/см.

Найти зависимости от времени составляющих напряженности поля в соседних точках  $A$  и  $B$ , лежащих по обе стороны поверхности шара при угле  $\theta = 45^\circ$ . Рассчитать закон изменения поляризации шара во времени и удельную энергию, которая выделилась в шаре в виде тепла за время переходного процесса. Определить геометрические места вектора напряженности поля в тех же точках  $A$  и  $B$ .

**16.97.** В кварцевой сфере радиусом  $a = 1$  мм, находящейся в реальном диэлектрике ( $\epsilon_r = 2$ ;  $\sigma = 10^{-14}$  См/см), скачком возникла поляризация  $P_0 = 5$  мкКл/см<sup>2</sup>, которая в дальнейшем остается постоянной.

Определить свободный и связанный поверхностные заряды на сфере: 1) в начале процесса ( $t = 0$ ) и 2) в установившемся режиме.

**16.98(Р).** Цилиндр радиусом  $a = 1$  см из вязкого диэлектрика ( $\epsilon_{r1} = 10$ ;  $\tau = 1$  мкс) находится во внешнем однородном поле (рис. 16.89), напряженность которого в момент  $t = 0$

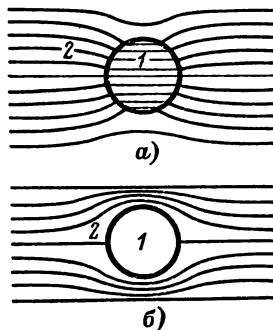


Рис. 16.95

скачком изменяется от нуля до значения  $E_0 = 1000$  В/см. Внешняя среда — воздух.

Определить поверхностный заряд цилиндра при  $\alpha = 45^\circ$  в начальный момент ( $t = 0$ ) и в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ).

**Решение.** Свободный заряд образоваться не может, так как обе среды не обладают проводимостью. Связанный заряд в начальный момент также не образуется, так как внешняя среда не поляризуется ( $\epsilon_{re} = 1$ ), а поляризация сферы из вязкого диэлектрика в течение переходного процесса нарастает с нуля.

В установившемся режиме  $q_{S \text{ связ}}(\infty) = P_{in}$ , где  $P_{in} = P_{ir} = \epsilon_0 (\epsilon_{ri} - 1) E_{ir} = \epsilon_0 E_0 \frac{2(\epsilon_{ri} - 1)}{\epsilon_{ri} + 1} \cos \alpha$ , так как  $E_{ir} = E_{ix} \cos \alpha$  и  $E_{ix} = E_i = E_0 \frac{2\epsilon_{re}}{\epsilon_{ri} + \epsilon_{re}}$ .

При  $\alpha = 45^\circ$  имеем  $q_{S \text{ связ}} = 1,12$  мкКл/см<sup>2</sup>.

**16.99(Р).** Диэлектрический цилиндр ( $\epsilon_{ri} = 3$ ;  $\sigma_i = 10^{-9}$  См/см) радиусом  $a = 1$  см находится в однородном синусоидально изменяющемся поле ( $E_0 = 2$  кВ/см,  $f = 1$  кГц, рис. 16.89). Внешняя среда — воздух.

Определить поляризацию цилиндра и мощность потерь на единицу его длины.

**Решение.** Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах приведено в задаче 16.91. Приняв  $\phi_i = 0$  на оси цилиндра и учтя, что  $\phi_e = -\dot{E}_0 x$  при  $x \rightarrow \infty$ , напишем выражения для потенциала во внутренней  $\phi_i$  и внешней  $\phi_e$  областях в комплексной форме:

$$\phi_i = \dot{A} r \cos \alpha = \dot{A} x; \quad \phi_e = -\dot{E}_0 r \cos \alpha + \frac{\dot{B}}{r} \cos \alpha,$$

где  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$  — постоянные.

Напряженность поля по (16.3)

$$\dot{E}_i = \dot{E}_{ix} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = -\dot{A};$$

$$\dot{E}_{er} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial r} = \dot{E}_0 \cos \alpha + \frac{\dot{B}}{r^2} \cos \alpha;$$

$$\dot{E}_{e\alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_e}{\partial \alpha} = -\dot{E}_0 \sin \alpha + \frac{\dot{B}}{r^2} \sin \alpha.$$

При  $r = a$  должны выполняться граничные условия (16.40) и (16.41):  $\phi_i = \phi_e$ , т. е.  $\dot{A}a = -\dot{E}_0 a + \dot{B}/a$ , и  $\underline{\sigma}_i E_{in} = \underline{\sigma}_e E_{en}$ , т. е.  $-\dot{A}\underline{\sigma}_i = (\dot{E}_0 + \dot{B}/a^2) \underline{\sigma}_e$ , где  $\underline{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega\epsilon_0\epsilon_{ri}$ ,  $\underline{\sigma}_e = j\omega\epsilon_0\epsilon_{re}$ , отсюда  $E_{ix} = -\dot{A} = \dot{E}_0 2\underline{\sigma}_e / (\underline{\sigma}_e + \underline{\sigma}_i)$ .

Подставив числовые значения, получим:  $\dot{A} = -0,91 \angle 24^\circ 10' \text{ кВ/см} = -\dot{E}_i$ ;  $\dot{P}_i = \epsilon_0 (\epsilon_{ri} - 1) \dot{E}_i = 2\epsilon_0 \cdot 0,91 \times 10^3 \angle 24^\circ 10' = 1,82 \cdot 10^3 \epsilon_0 \angle 24^\circ 10' \text{ Кл/см}^2$ , т. е.  $P_i = 1,82 \times 10^3 \epsilon_0 \sqrt{2} \sin(\omega t + 24^\circ 10') \text{ Кл/см}^2$ , где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Мощность потерь на единицу длины цилиндра  $P_0 = \sigma_i E_i^2 \pi a^2 = 2,6 \text{ мВт/см}$ .

**16.100(P).** Диэлектрический цилиндр предыдущей задачи находится во вращающемся поле ( $E_0 = 2\sqrt{2} \text{ кВ/см}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ ), которое можно разложить на два синусоидально изменяющихся взаимно перпендикулярных в пространстве поля, сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ .

Пользуясь решением предыдущей задачи, определить поляризацию цилиндра и действующий на него вращающий момент.

**Решение.** Разложим вращающееся поле на два взаимно перпендикулярных в пространстве синусоидальных поля, сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ :

$$\dot{E} = i\dot{E}_0 + j\dot{E}_0 e^{-j90^\circ},$$

т. е.

$$E = i2\sqrt{2} \sin \omega t + j2\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Поляризация цилиндра в синусоидальном поле найдена в задаче 16.99. Пользуясь методом наложения, запишем поляризацию во вращающемся поле:

$$P = i1,82\sqrt{2} \cdot 10^3 \epsilon_0 \sin(\omega t + 24^\circ 10') +$$

$$+ j1,82\sqrt{2} \cdot 10^3 \epsilon_0 \sin(\omega t + 24^\circ 10' - 90^\circ) \text{ Кл/см}^2,$$

где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Вектор поляризации цилиндра вращается в пространстве со скоростью  $\omega$ , опережая внешнее вращающееся поле на угол  $24^\circ 10'$ . На единицу длины цилиндра мощность потерь  $p_0 = \sigma E^2 \pi a^2 = 5,2 \text{ мВт/см}$ , т. е. вдвое больше, чем в синусоидальном поле задачи 16.99. Вращающий момент

$$L_0 = p_0/\omega = 0,83 \text{ мкДж/см}.$$

**16.101(P).** Во вращающемся поле ( $\dot{E}_0 = 2 \text{ кВ/см}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ ) находится цилиндр радиусом  $a = 1 \text{ см}$  (рис. 16.89) из вязкого диэлектрика ( $\epsilon_{ri} = 10$ ,  $\tau = 1 \text{ мкс}$ ).

Определить поляризацию цилиндра, действующий на него вращающий момент и мощность потерь в цилиндре.

**Решение.** Разложим вращающееся поле на два взаимно перпендикулярных в пространстве синусоидальных поля, сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ :



нутых по фазе на  $90^\circ$ :

$$\dot{E} = i\dot{E}_0 + j\dot{E}_0 e^{-j90^\circ}.$$

Решим сначала задачу для цилиндра, находящегося в поле  $\dot{E}_x = \dot{E}_0$ . Для диэлектрического цилиндра, находящегося в однородном гармоническом поле, приняв во внимание приведенное в задаче (16.91) решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат, граничные условия (16.42) и (16.43), а также связь между потенциалом и напряженностью поля, получим аналогично решению задачи (16.99):

$$\dot{E}_{ix} = \dot{E}_0 \frac{2}{\epsilon_{ri} + 1}; \quad \dot{P}_{ix} = \epsilon_0 (\epsilon_{ri} - 1) \dot{E}_{ix} = \epsilon_0 \dot{E}_0 \frac{2(\epsilon_{ri} - 1)}{\epsilon_{ri} + 1},$$

где по (16.39)  $\epsilon_{ri} = 1,85 \angle -48^\circ 50' = 1,22 - j1,4$  и

$$E_{ix} = 1,525 \angle 32^\circ 20' \text{ кВ/см}; \quad P_{ix} = \epsilon_0 \cdot 2,16 \cdot 10^3 \angle -49^\circ 35' \text{ Кл/см}^2,$$

где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр.

Для цилиндра, находящегося в поле,  $\dot{E}_y = \dot{E}_0 \angle -90^\circ$ , комплексы напряженности поля и поляризации будут сдвинуты на  $-90^\circ$ .

Для цилиндра, помещенного во вращающееся поле, получим:

$$\dot{E}_i = [1,525 \angle 32^\circ 20' + j1,525 \angle (32^\circ 20' - 90^\circ)] \text{ кВ/см};$$

$$P_i = [i\epsilon_0 \cdot 2,16 \cdot 10^3 \angle -49^\circ 35' + \\ + j\epsilon_0 \cdot 2,16 \cdot 10^3 \angle (-49^\circ 35' - 90^\circ)] \text{ Кл/см}^2.$$

Вектор поляризации цилиндра вращается со скоростью  $\omega$ , отставая по фазе от внутреннего поля на угол  $81^\circ 55'$ , а от внешнего однородного поля — на угол  $49^\circ 35'$ .

Цилиндр испытывает вращающий момент на единицу длины

$$L_0 = \pi a^2 P_i E_0 \sin(49^\circ 35') = 9,1 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/см.}$$

Мощность потерь на единицу длины по (16.45)

$$P_0 = L_0 \omega = \epsilon_0 \epsilon''_i \omega E_{ix}^2 \pi a^2 = 5,72 \text{ Вт/см.}$$

**16.102(Р).** Между двумя плоскими электродами, подсоединенными к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 16.49), распределен объемный заряд  $\rho = \rho_0 (a^2 - x^2)/a^2$ .

Определить закон изменения напряженности электрического поля и потенциала.

**Решение.** Уравнение Пуассона (16.4) в декартовой системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho_0 x}{\epsilon_0} + \frac{\rho_0 x^3}{3a^2 \epsilon_0} + C_1$$

и

$$\varphi = -\frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_0 x^4}{12a^2 \epsilon_0} + C_1 x + C_2.$$

При  $x = 0$  (рис. 16.49)  $\varphi = U$ , т. е.  $C_2 = U$ ; при  $x = d$  задано  $\varphi = 0$ , т. е.  $0 = -\rho_0 d^2/2\epsilon_0 + \rho_0 d^4/12a^2 \epsilon_0 + C_1 d + U$ , откуда  $C_1 = -\rho_0 d/2\epsilon_0 - \rho_0 d^3/12a^2 \epsilon_0 - U/d$ .

Окончательно

$$\varphi = -\frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_0 x^4}{12a^2 \epsilon_0} - \frac{\rho_0 d^3 x}{12a^2 \epsilon_0} + \frac{\rho_0 dx}{2\epsilon_0} - \frac{Ux}{d} + U;$$

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0 x}{\epsilon_0} - \frac{\rho_0 x^3}{3a^2 \epsilon_0} + \frac{\rho_0 d^3}{12a^2 \epsilon_0} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} + \frac{U}{d}.$$

**16.103.** Два плоских электрода расположены на расстоянии  $d$  друг от друга и присоединены к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 16.49). Между электродами распределен объемный заряд плотностью  $\rho = \rho_0 e^{\alpha x}$ .

Найти распределение потенциала и напряженности поля между электродами.

**16.104. А.** В условиях предыдущей задачи, но при  $\rho = 300\epsilon_0 x$  Кл/см<sup>3</sup>,  $d = 40$  мм,  $U = 500$  В найти распределение потенциала и напряженности поля и их значения при  $x = 20$  мм.

**Б.** Определить, как изменится распределение потенциала, если при  $x = 20$  мм параллельно пластинам расположена металлическая сетка: 1) не соединенная с электродами, 2) имеющая потенциал  $-100$  В.

**16.105.** Определить, может ли потенциал в области поля, где  $\rho = 0$ , выражаться функциями:

1)  $\varphi = 3x^2 y - y^3 + 5x$  в декартовой системе координат;

2)  $\varphi = 3r^2 \cos \alpha - \cos^3 \alpha + 5r$  в цилиндрической системе координат.

**16.106.** Найти закон распределения объемного заряда, если в сферической системе координат потенциал  $\varphi = K \cos \alpha/R$ .

**16.107(Р).** Среда с  $\epsilon_r = 1$ , ограниченная двумя цилиндрическими поверхностями, заполнена зарядом с объемной плотностью  $\rho$  (рис. 16.107). Радиус внешнего цилиндра  $a_1$ , радиус внутреннего  $a_2$ . Расстояние между осями цилиндров  $h$ . Длина цилиндрических поверхностей весьма велика по сравнению с их радиусами.

Найти напряженность поля внутри малого цилиндра.

**Решение.** Будем искать поле в любой точке  $M$  отверстия, не заполненного объемным зарядом, как результат наложения поля  $E_1$  в большом цилиндре, равномерно заряженном по

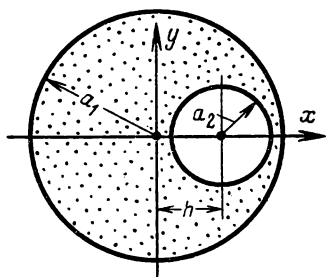


Рис. 16.107

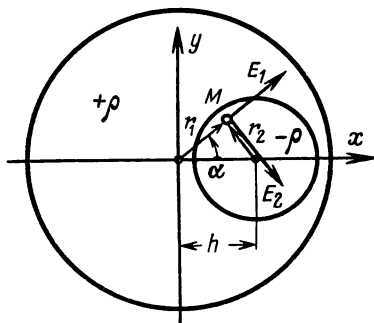


Рис. 16.107Р

объему зарядом  $+\rho$ , и поля  $E_2$  в малом цилиндре, равномерно заряженном по объему зарядом  $-\rho$  (рис. 16.107Р):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = i \frac{\rho h}{2\epsilon_0}$$

(см. задачу 15.13).

Иначе:  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(-r_1^2 + r_2^2)$ , где  $r_2^2 = r_1^2 + h^2 - 2hr_1 \cos \alpha$ , т. е.  $\varphi = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(h^2 - 2hx)$  и  $E = E_x = -\partial\varphi/\partial x = \rho h/2\epsilon_0$ .

## 16.6. Энергия и силы в электрическом поле

**16.108(Р).** Во сколько раз изменится энергия электрического поля уединенного металлического шара радиусом  $a = 2$  мм, который находится в воздухе и потенциал которого  $\varphi_{\text{ш}} = 500$  В (полагая  $\varphi = 0$  на бесконечно большом расстоянии  $R$ ), если шар покрылся слоем воды ( $\epsilon_r = 80$ ) толщиной  $\Delta = 0,2$  мм. Определить, как изменится решение задачи, если учесть проводимость росы. Выяснить, куда делась энергия и с какой силой (на единицу поверхности) электрическое поле стремится растянуть шар до его покрытия росой.

**Решение.** Шар не присоединен к источнику. Поэтому его заряд  $q = \text{const}$ , потенциал  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 R$ . Следовательно, заряд шара  $q = 4\pi\epsilon_0 \varphi_{\text{ш}} a$ . Напряженность поля  $E = E_R = q/4\pi\epsilon_0 R^2$ , смещение  $D = D_R = q/4\pi R^2$ .

Энергию электрического поля заряженного шара определим по (16.48). Для шара в воздухе энергия

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \int_a^\infty \frac{4\pi R^2 dR}{R^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Для шара, покрытого росой, энергия

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r} \int_a^{a+\Delta} \frac{4\pi R^2 dR}{R^4} + \int_{a+\Delta}^\infty \frac{4\pi R^2 dR}{R^4} \right] = \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (a + \Delta)} \left( 1 + \frac{\Delta}{\epsilon_r a} \right). \end{aligned}$$

При учете проводимости воды поле в ней отсутствует и энергия

$$W_3 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \int_{a+\Delta}^\infty \frac{4\pi R^2 dR}{R^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (a + \Delta)};$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{a}{a + \Delta} \left( 1 + \frac{\Delta}{\epsilon_r a} \right) = 0,9102 \text{ и } \frac{W_3}{W_1} = \frac{a}{a + \Delta} = 0,9091.$$

Отношение показывает, что после появления слоя росы энергия поля вокруг шара уменьшилась на величину, которая израсходована на нагрев этого слоя.

Сила, растягивающая шар,  $F_R = -\partial W_1 / \partial a = q^2 / 8\pi\epsilon_0 a^2 = 2\pi\epsilon_0 \varphi_{\text{ш}}^2$ . Сила, действующая на единицу поверхности шара,  $f_R = F_R / 4\pi a^2 = 0,276 \text{ Н/м}^2$ .

**16.109(Р).** Определить энергию электрического поля заряженного шара радиусом  $a = 0,1 \text{ м}$  при объемной плотности заряда  $\rho = 10^{-6} \text{ Кл/м}^3$ . Относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды и материала шара  $\epsilon_r = 1$ .

**Решение.** Напряженность поля внутри шара  $E_i = \rho R / 3\epsilon_0$ ; смещение  $D_i = \rho R / 3$ ; напряженность поля вне шара  $E_e = \rho a^3 / 3\epsilon_0 R^2$ ; смещение  $D_e = \rho a^3 / 3R^2$ .

Энергия шара по (16.48)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left( \int_0^a \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \frac{\rho R}{3} 4\pi R^2 dR + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 R^2} \frac{\rho a^3}{3R^2} 4\pi R^2 dR \right) = \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \left( \frac{a^5}{5} + a^5 \right) = 94,8 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

**16.110(P).** Определить работу, которую нужно произвести против сил поля, чтобы расстояние между пластинами плоского конденсатора: А) увеличить или Б) уменьшить вдвое. Работу подсчитать в двух случаях: а) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения  $U = 10$  кВ; б) конденсатор заряжен и отключен от источника постоянного напряжения.

Первоначальная емкость конденсатора  $C = 10^{-9}$  Ф.

**Решение.** Работа в электростатическом поле равна разности энергий начального (1) и конечного (2) состояний. Если конденсатор подключен к источнику, то  $U = \text{const}$  и энергия  $W = CU^2/2 = \epsilon_r \epsilon_0 S U^2 / 2x$ , где  $x$  — расстояние между пластинами.

Работа против сил поля

$$A = W_1 - W_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = \frac{CU^2}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{x_2} \right).$$

Если конденсатор заряжен и отключен от источника, то заряд  $Q = \text{const}$  и энергия  $W = Q^2 / 2C = Q^2 x / 2\epsilon_r \epsilon_0 S$ . Работа

$$A = W_1 - W_2 = \frac{Q^2}{2C} \left( 1 - \frac{x_2}{x_1} \right).$$

А)  $U = \text{const}$ : а)  $x_1/x_2 = 1/2$ ;  $A = 2,5 \cdot 10^{-2}$  Дж; б)  $x_1/x_2 = 2$ ;  $A = -5 \cdot 10^{-2}$  Дж.

Б)  $Q = \text{const}$ : а)  $x_1/x_2 = 1/2$ ;  $A = -5 \cdot 10^{-2}$  Дж; б)  $x_1/x_2 = 2$ ;  $A = 2,5 \cdot 10^{-2}$  Дж.

**16.111.** Найти зависимость силы взаимодействия двух пластин воздушного плоского конденсатора от расстояния  $x$  между ними.

Дано: площадь пластины  $S = 20$  см<sup>2</sup>, напряжение  $U = 5000$  В = const.

**16.112.** Найти зависимость силы взаимодействия двух пластин плоского конденсатора площадью  $S = 20$  см<sup>2</sup> от расстояния  $x$  между пластинами при условии, что пластины были подсоединены к источнику постоянного напряжения  $U = 5$  кВ при расстоянии между пластинами  $d = 3$  мм, а затем источник был отключен. Диэлектрик — масло с  $\epsilon_r = 2,2$ .

**16.113.** Конденсатор переменной емкости состоит из семи подвижных полудисков и восьми неподвижных. Радиус каждого полудиска 10 см. Расстояние между соседними подвижным и неподвижным полудисками 1 мм. Диэлектрик — воздух.

Найти зависимость момента, действующего на подвижные диски, от угла  $\alpha$  перекрытия пластин, если постоянное напряжение между дисками  $U = 10$  В при  $\alpha = 30^\circ$ . При этом угле поворота подвижные диски отсоединили от источника.

Предполагается, что угол перекрытия остается в таких пределах, при которых можно полагать емкость прямо пропорциональной углу.

**16.114.** Решить задачу 16.113 при условии, что конденсатор не отсоединяется от источника постоянного напряжения  $U = 10$  В.

**16.115.** У конденсатора задачи 16.113 емкость  $C = 40 + 100\alpha$  пФ, где  $\alpha$  — угол перекрытия в радианах.

Определить вращающий момент, действующий на подвижные пластины, если к конденсатору приложено постоянное напряжение  $U = 1$  кВ.

**16.116.** У конденсатора задачи 16.113 емкость  $C = 20 + 50\alpha^2$  пФ, где  $\alpha$  — угол перекрытия в радианах.

Определить вращающий момент, действующий на подвижные пластины, при  $\alpha = \pi/6$ , если постоянное напряжение на конденсаторе  $U = 1$  кВ.

**16.117.** Найти значение и направление силы, испытываемой средней пластиной конденсатора задачи 16.23, если задано  $\varphi_1 = 50$  В;  $\varphi_2 = -10$  В;  $\varphi_3 = -100$  В.

**16.118.** Найти потенциал средней пластины задачи 16.23, при котором действующая на нее сила равна нулю, если дано  $\varphi_1 = 100$  В;  $\varphi_3 = -50$  В.

**16.119.** Определить, изменится ли сила, действующая на среднюю пластину конденсатора задачи 16.23, при изменении знака потенциала пластины 3, если потенциалы: а)  $\varphi_1 = 50$  В;  $\varphi_2 = -62,5$  В;  $\varphi_3 = -100$  В; б)  $\varphi_1 = 100$  В;  $\varphi_2 = 0$ ;  $\varphi_3 = -50$  В.

**16.120(Р).** Вертикально расположенные пластины плоского конденсатора (рис. 16.120) погружаются в жидкий диэлектрик ( $\epsilon_{r2} = 4$ ). Ширина пластин  $b = 30$  см, высота  $h = 20$  см, расстояние между пластинами  $d = 5$  мм. Напряжение на конденсаторе постоянно:  $U = 10$  кВ.

Найти зависимости силы  $f$  притяжения между пластинами и вертикальной силы  $F$  от глубины погружения  $x$ .

**Решение.** Энергия конденсатора  $W = CU^2/2$ , где  $C = \epsilon_0 b [\epsilon_{r2}x + \epsilon_{r1}(h - x)]/y$  и  $y = d$ .

Если конденсатор подключен к источнику напряжения, то работа по перемещению диэлектрика на расстояние  $\delta x$  равна увеличению энергии поля:

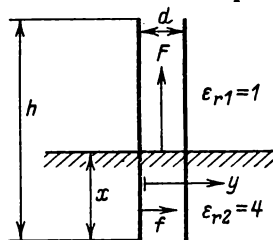


Рис. 16.120

$$F_x \delta x = \delta W_x = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \delta x = \frac{\epsilon_0 b (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) \delta x}{2d} U^2$$

$$\text{и } F_x = 79,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Аналогично

$$f_y \delta y = \delta W_y = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=d} \delta y \text{ и}$$

$$f_y = - \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} b h U^2}{2d^2} \left( 1 + \frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1}} \frac{x}{h} \right) = -1,06 (1 + 15x) \text{ Н.}$$

**16.121.** Решить задачу (16.120) при условии, что конденсатор был заряжен до напряжения  $U = 10$  кВ при  $x = h/2$ , после чего конденсатор был отключен от источника.

## Глава семнадцатая

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### Введение к гл. 17

##### Основные уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad (17.1a)$$

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} d\mathbf{S} = I; \quad (17.16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (17.2a)$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (17.26)$$

где  $l$  — контур интегрирования;  $S$  — поверхность интегрирования;  $J$  — плотность тока проводимости.

Векторный потенциал  $A$  вводится соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (17.3)$$

##### Магнитный поток

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (17.4)$$

В плоскопараллельном поле магнитный поток между точками 1 и 2 на единицу длины системы

$$\Phi_0 = A_1 - A_2, \quad (17.5)$$

уравнение семейства линий магнитной индукции

$$A = \text{const.} \quad (17.6)$$

В плоскомеридианном поле уравнение семейства линий магнитной индукции

$$rA = \text{const.} \quad (17.7)$$

В однородной среде уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\nabla^2 A = -\mu_r \mu_0 J. \quad (17.8)$$

Граничные условия:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_S, \quad (17.9)$$

где  $H_t$  — составляющая вектора напряженности поля, касательная к границе раздела сред;  $J_S$  — поверхностная плотность тока;

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (17.10)$$

где  $B_n$  — составляющая вектора индукции, нормальная к границе раздела.

Вместо (17.10) можно пользоваться граничным условием для векторного потенциала

$$A_{1t} = A_{2t}. \quad (17.11)$$

Для линейной среды по методу наложения

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots = \sum_k \mathbf{B}_k; \quad (17.12)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots = \sum_k \mathbf{A}_k, \quad (17.13)$$

где  $B_k$  и  $A_k$  — слагаемые, соответствующие возбуждающим их токам.

Связь между магнитными потоками и возбуждающими их токами

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= m_{11}I_1 + m_{12}I_2 + m_{13}I_3 + \dots; \\ \Phi_2 &= m_{21}I_1 + m_{22}I_2 + m_{23}I_3 + \dots; \\ \Phi_3 &= m_{31}I_1 + m_{32}I_2 + m_{33}I_3 + \dots; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

где  $m_{kk}$  — собственные индуктивности контуров;  $m_{ik}$  — взаимные индуктивности контуров.

При расчетах магнитного поля в линейных средах часто применяется метод изображений. Особенно эффективно применение этого метода при плоской или цилиндрической поверхности раздела между двумя средами с различными магнитными проницаемостями.

Если граница плоская, то магнитное поле каждого проводника с током  $I$  в той среде, в которой он расположен,



определяется током  $I$  и фиктивным током  $I_1$ , расположенным по другую сторону границы на таком же расстоянии от нее, как и ток  $I$ , при этом магнитная проницаемость всего пространства должна быть принята равной магнитной проницаемости  $\mu_1$  той области, в которой расположен проводник с током  $I$  и в которой по этой расчетной схеме определяется поле. Ток

$$I_1 = I(\mu_{2r} - \mu_{1r})/(\mu_{2r} + \mu_{1r}) = m_1 I, \quad (17.15)$$

где  $\mu_{2r}$  — магнитная проницаемость другой среды.

Во второй среде поле определяется фиктивным током  $I_2$ , расположенным там же, где и ток  $I$ , магнитная проницаемость всего пространства равна  $\mu_{2r}$ . Ток

$$I_2 = I \cdot 2\mu_{1r}/(\mu_{1r} + \mu_{2r}) = m_2 I. \quad (17.16)$$

В области, где отсутствуют токи, для описания магнитного поля может быть введен скалярный потенциал  $\varphi_m$ , определяемый соотношением

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (17.17)$$

В неоднородной среде скалярный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi_m = \text{div } \mathbf{M}, \quad (17.18)$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности.

В однородной среде скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (17.19)$$

Существует формальная аналогия между постоянным магнитным полем и электростатическим, в котором отсутствуют заряды. Аналогичными параметрами являются:

Магнитное поле	$\mathbf{H}$	$\varphi_m$	$\mathbf{B}$	$\mu_r \mu_0$	$\Phi$
Электростатическое поле	$\mathbf{E}$	$\varphi$	$\mathbf{D}$	$\epsilon_r \epsilon_0$	$\Phi_D$
Здесь $\Phi_D$ — поток вектора электрического смещения.					

В непроводящей магнитной среде при отсутствии магнитной вязкости можно применять при переменном поле те же решения, что и для постоянного поля.

Магнитная вязкость в первом приближении учитывается по уравнению

$$\tau d\mathbf{M}/dt = (\mu_r - 1) \mathbf{H} - \mathbf{M}, \quad (17.20)$$

где  $\tau$  — постоянная времени магнитной вязкости.

В синусоидальном поле уравнение вязкости

$$j\omega\tau\dot{\mathbf{M}} = (\mu_r - 1)\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{M}}. \quad (17.21)$$

Комплексная магнитная проницаемость, учитывающая вязкость,

$$\mu_r = \mu'_r - j\mu''_r = (\mu_r + j\omega\tau)/(1 + j\omega\tau). \quad (17.22)$$

Энергию магнитного поля можно определить:

1) через векторы поля при помощи интеграла по всему объему  $V$  поля:

$$W = \int \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} dV; \quad (17.23)$$

2) через токи и магнитные потоки контуров с токами:

$$W = \sum_k \frac{1}{2} I_k \Phi_k; \quad (17.24)$$

3) через векторы плотности тока и протенциала по объему  $V$ , в котором протекают токи:

$$W = \int \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{J} dV. \quad (17.25)$$

Потокосцепление катушки, обусловленное намагниченным телом (теорема о потокосцеплении),

$$\Psi = \frac{\mu_0}{I} \int \mathbf{H}_l \mathbf{M} dV, \quad (17.26)$$

где интегрирование проводится по объему намагниченного тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$ ;  $\mathbf{H}_l$  — напряженность поля в случае, когда намагниченное тело удалено, а по катушке протекает ток  $I$ .

## 17.1. Постоянное магнитное поле в однородной неограниченной среде

17.1. Определить закон изменения магнитной индукции вдоль оси витка радиусом  $a$  с током  $I$  (рис. 17.1).

17.2. Пользуясь решением предыдущей задачи, определить закон изменения индукции вдоль оси соленоида радиусом  $a$  и длиной  $l$  (рис. 17.2) с числом витков на единицу длины  $w_0$ .

Каково должно быть отношение диаметра соленоида к его длине, чтобы индукция в центре соленоида отличалась от

индукции в бесконечно длинном соленоиде не более чем на:  
а) 10 %; б) 5 %; в) 2 %?

**17.3(Р).** Тонкое диэлектрическое немагнитное кольцо, заряженное с объемной плотностью заряда  $\rho$ , вращается вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его

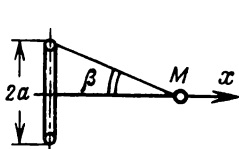


Рис. 17.1

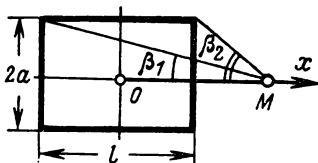


Рис. 17.2

плоскости (рис. 17.3). Частота вращения кольца в секунду равна  $n$ . Радиусы кольца равны  $r_1$  и  $r_2$ , толщина его  $\Delta y$ . Относительная магнитная проницаемость окружающей кольцо среды равна единице.

Определить магнитную индукцию в точке  $M$ , лежащей на оси вращения на расстоянии  $y$  от плоскости кольца.

**Решение.** Плотность тока движущихся зарядов

$$J = \rho v = \rho \omega r = \rho 2\pi n r,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Ток, приходящийся на элемент длины радиуса  $dr$ ,

$$dI = J dr (\Delta y) = (\Delta y) \rho 2\pi n r dr.$$

По закону Био — Савара напряженность поля на оси, обусловленная элементарным кольцевым током  $dI$ ,

$$dH = dH_y = dI \frac{2\pi r}{4\pi R^2} \sin \beta = dI \frac{\sin^3 \beta}{2r} = (\Delta y) \rho \pi n \sin^3 \beta dr.$$

Искомая напряженность поля кольца на его оси

$$H = H_y = \int (\Delta y) \rho \pi n \sin^3 \beta dr.$$

Так как  $r = y \operatorname{tg} \beta$  (рис. 17.3) и  $dr = y d\beta / \cos^2 \beta$ , то

$$\begin{aligned} H &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\Delta y) \rho \pi n y \frac{\sin^3 \beta}{\cos^2 \beta} d\beta = \\ &= 2\pi (\Delta y) \rho n \left( r_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} - r_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \right); \end{aligned}$$

$$B = \mu_0 H.$$

Если  $r_1 = 0$ , т. е. кольцо превращается в диск радиусом  $r_2$ , то

$$H = 2\pi (\Delta\gamma) \rho n r_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2}.$$

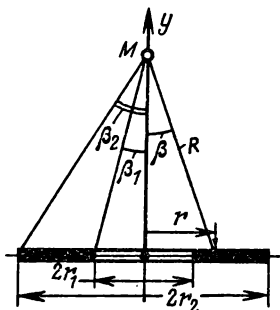


Рис. 17.3

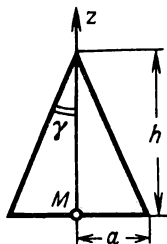


Рис. 17.5

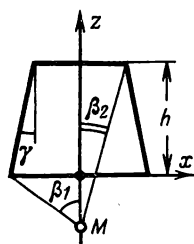


Рис. 17.6

**17.4.** Длинный диэлектрический цилиндр, заряженный с объемной плотностью  $\rho = 4 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>3</sup>, вращается вокруг оси  $z$ , совпадающей с осью цилиндра, с частотой  $n = 100$  об/с. Радиус цилиндра  $r_0 = 0,05$  м. Относительные магнитные проницаемости материала цилиндра и окружающей среды равны 1.

Определить магнитную индукцию внутри цилиндра в средней его части в зависимости от расстояния  $r$  от оси.

**17.5.** На коническую поверхность по окружности плотно намотана изолированная проволока (рис. 17.5). Число витков, приходящихся на единицу длины образующей конуса, равно  $w_0$ . Высота конуса  $h$ . Радиус окружности основания конуса  $a$ . Относительные магнитные проницаемости материала конуса и окружающей среды одинаковы и равны 1.

Определить магнитную индукцию в центре окружности основания (точка  $M$ ) при токе в обмотке, равном  $I$ .

**17.6.** Обмотка катушки расположена на боковой поверхности усеченного конуса (рис. 17.6). Высота конуса  $h$ . Радиусы оснований  $r_2$  и  $r_1$ . Число витков на единицу длины образующей конуса  $w_0$ . Ток в обмотке  $I$ . Относительные магнитные проницаемости материала конуса и окружающей среды одинаковы и равны 1.

1) Определить магнитную индукцию на оси конуса.

2) На основании полученного решения определить магнитную индукцию на оси цилиндрической катушки длиной  $h$  и радиусом  $r_0$ .

17.7. В плоской однослойной катушке (рис. 17.7) протекает постоянный ток  $I$ . Число витков на единицу радиуса катушки  $w_0$ . Относительные магнитные проницаемости провода и окружающей среды равны 1.

Определить магнитную индукцию на оси кольца: а) непосредственно; б) считая известным решение задачи 17.6.

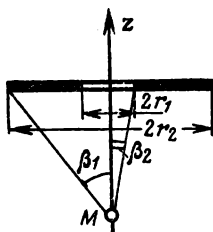


Рис. 17.7

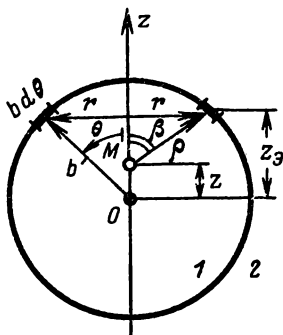


Рис. 17.9 →

17.8. На сферический каркас радиусом  $a = 0,1$  м виток к витку намотана изолированная проволока (плоскости витков параллельны друг другу). Число витков на всей поверхности сферы  $w = 200$ . Относительные магнитные проницаемости каркаса и окружающей среды равны 1.

Определить магнитную индукцию в центре сферы при постоянном токе в обмотке  $I = 5$  А.

17.9(Р). Проводящая сферическая оболочка радиусом  $b = 10$  см вращается вокруг оси  $z$ , проходящей через ее центр, с частотой  $n = 100$  об/с (рис. 17.9). Заряд оболочки  $q = 10^{-8}$  Кл. Относительная магнитная проницаемость оболочки равна 1.

Найти непосредственным интегрированием напряженность магнитного поля на оси вращения  $z$  внутри (1) и вне (2) сферы, считая известной напряженность поля на оси кругового витка (задача 17.1).

Решение. Поверхностная плотность заряда на оболочке  $q_s = q/4\pi b^2$ . Элементарный поверхностный заряд элемента  $b d\theta$  сферы  $dq = q_s 2\pi r b d\theta$ . Элементарный ток движущегося заряда  $dq$

$$dI = n dq = \frac{nqr}{2b} d\theta.$$

Напряженность магнитного поля на оси вращения в точке  $M$ , обусловленная током  $dI$  (см. ответ к задаче 17.1),

$$dH = dH_z = dI \frac{\sin^3 \beta}{2r}.$$

Из рис. 17.9 следуют соотношения  $z_3 = b \cos \theta$ ;  $\sin \beta = r/\rho$ ;  $r^2 = b^2 - z_3^2$ ;  $\rho^2 = z^2 + b^2 - 2z_3z$ , откуда  $d\theta = -dz_3/r$  и  $z dz_3 = -\rho d\rho$ , поэтому

$$d\theta = \rho d\rho/zr \text{ и } r^2 = \frac{-\rho^4 + 2\rho^2(z^2 + b^2) - (b^2 - z^2)^2}{4z^2}$$

Подставив эти значения в выражение для  $dH$ , получим:

$$dH = \frac{-nq}{16bz^3} \frac{\rho^4 - 2\rho^2(z^2 + b^2) + (b^2 - z^2)^2}{\rho^2} d\rho$$

и после интегрирования по  $\rho$

$$H = \frac{-nq}{16bz^3} \left[ \frac{\rho^3}{3} - 2(z^2 + b^2)\rho - (b^2 - z^2)^2 \frac{1}{\rho} \right].$$

Напряженность поля внутри оболочки ( $-b \leq z \leq b$ ) найдем, выбрав пределы интегрирования от  $\rho_1 = b - z$  до  $\rho_2 = b + z$ :

$$H_1 = nq/3b,$$

т.е. напряженность поля внутри оболочки на оси не зависит от координаты  $z$  точки наблюдения.

Напряженность поля вне оболочки (координата  $z$  изменяется от  $-\infty$  до  $-b$  и от  $+b$  до  $+\infty$ ) найдем, подставив пределы интегрирования от  $\rho_3 = (|z| + b)$  до  $\rho_4 = (|z| - b)$  при отрицательных  $z$  и от  $\rho_4$  до  $\rho_3$  при положительных  $z$ :

$$H_2 = nqb^2/3|z|^3,$$

т.е. напряженность поля вне оболочки на оси убывает обратно пропорционально кубу расстояния от центра оболочки.

**17.10.** Вдоль длинной тонкой ленты, ширина которой  $a = 0,2$  м, протекает постоянный ток  $I = 40$  А (рис. 17.10).

Определить магнитную индукцию в воздухе в точке  $M$ , отстоящей от средней линии ленты на расстояние  $h = 0,05$  м.

**17.11(Р).** Найти напряженность магнитного поля в точке  $M$ , создаваемого током длинной тонкой ленты (рис. 17.11).

Определить, на каком расстоянии от оси ленты поле можно считать практически таким же, как и поле тока  $I$ , сосредоточенного на оси ленты.

**Решение.** Ток, протекающий в элементе ленты  $dy_1$  (параллельно оси  $z$ ),

$$dI = \frac{I}{a} dy_1.$$

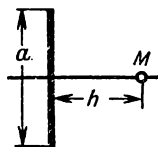


Рис. 17.10

Напряженность поля, создаваемая этим током,

$$dH = \frac{dI}{2\pi r} = \frac{I}{a} \frac{dy_1}{2\pi r},$$

а составляющая напряженности в направлении оси  $y$

$$dH_y = dH \cos \beta = \frac{I}{a} \frac{dy_1}{2\pi r} \cos \beta.$$

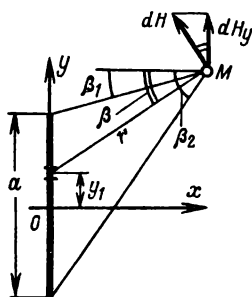


Рис. 17.11

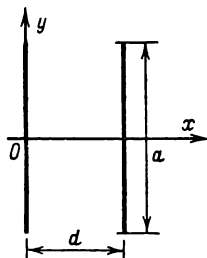


Рис. 17.12

Из рис. 17.11 следует, что

$$r = x/\cos \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = (y - y_1)/x \quad \text{и} \quad dy_1 = -x d\beta/\cos^2 \beta,$$

при этом

$$dH_y = -\frac{I}{2\pi a} d\beta$$

и

$$H_y = \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{I}{2\pi a} d\beta = \frac{I}{2\pi a} (\beta_2 - \beta_1).$$

Составляющая напряженности в направлении оси  $x$

$$dH_x = \frac{I}{2\pi a} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} d\beta$$

и

$$H_x = \frac{I}{2\pi a} \ln \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} = \frac{I}{4\pi a} \ln \frac{x^2 + (y - a/2)^2}{x^2 + (y + a/2)^2}.$$

На оси  $y$  при  $a/2y \ll 1$

$$H_x = -\frac{I}{2\pi y} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{a^2}{y^2} + \dots \right).$$

Если  $y \geq 2a$ , то с погрешностью не более 2% напряженность  $H_x = -I/2\pi y$ , т.е. поле тока ленты на оси  $y$  такое же, как и поле тока, сосредоточенного на оси ленты.

На оси  $x$  при  $x \gg a/2$

$$H_y = \frac{I}{2\pi x} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{a^2}{x^2} - \dots \right),$$

т.е. практически на таком же расстоянии, как и по оси  $y$ , поле тока ленты можно считать как поле тока, сосредоточенного на оси ленты.

**17.12.** Найти напряженность магнитного поля двухпроводной линии с постоянным током  $I$ , если проводниками линии являются длинные тонкие немагнитные ленты шириной  $a$ . Расстояние между лентами равно  $d$  (рис. 17.12).

**17.13.** Провод с постоянным током  $I = 360$  А находится на оси стальной трубы. Радиус провода  $r_0 = 0,4$  см. Внутренний радиус трубы  $r_1 = 4$  см, внешний радиус  $r_2 = 5$  см. Относительная магнитная проницаемость стали трубы при заданном токе  $\mu_r = 200$ .

Определить напряженность магнитного поля в точках  $r = 2$  см; 4,5 см и 6 см. Изменятся ли найденные значения напряженности поля, если убрать стальную трубу?

**17.14.** Для системы задачи 17.13 определить значения магнитной индукции  $B$  и намагниченности  $M$  в тех же точках: а) при наличии и б) при отсутствии стальной трубы.

**17.15(Р).** Определить индуктивность коаксиального медного кабеля с радиусом жилы  $r_1$  и радиусами оболочки  $r_2$  и  $r_3$ , считая, что плотность тока постоянна как в жиле, так и в оболочке.

**Решение.** Индуктивность  $L$  кабеля можно и целесообразно определить из выражения  $W = LI^2/2$ , вычислив предварительно энергию магнитного поля на единицу длины кабеля:

$$W_0 = \int \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{r=0}^{r_3} H^2 2\pi r dr,$$

где  $V$  — объем на единицу длины.

Определим напряженность поля  $H$ , применив закон полного тока. При  $0 < r < r_1$  получим  $H_1 = Ir/2\pi r_1^2$ ; при  $r_1 < r < r_2$  находим  $H_2 = I/2\pi r$ ; при  $r_2 < r < r_3$  напряженность  $H_3 = I(r_3^2 - r^2)/2\pi r(r_3^2 - r_2^2)$ , поэтому

$$W_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{r_1} \frac{I^2 r^3}{r_1^4} dr + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{I^2}{r} dr + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_2}^{r_3} \frac{I^2 (r_3^2 - r^2)^2}{(r_3^2 - r_2^2)^2 r} dr.$$



Индуктивность кабеля на единицу длины

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

Первое слагаемое обусловлено магнитным полем внутри жилы, второе — полем между жилой и оболочкой, два последних — полем внутри оболочки. Обратим внимание на то, что индуктивность определяется отношениями радиусов, а не их абсолютными значениями.

В случае, когда оболочка достаточно тонкая, т. е.  $(r_3 - r_2) \ll r_2$ ,

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right).$$

**17.16.** Определить длину соленоида радиусом  $a = 2$  см с МДС, равной 10 А/см, если в точке, расположенной на оси внутри соленоида и отстоящей на 10 см от одного из его концов, напряженность поля равна 8 А/см.

Чему равна напряженность поля внутри такого же бесконечно длинного соленоида?

**17.17(Р).** Определить напряженность магнитного поля постоянного тока  $I$  в плоском кольце шириной  $r_2 - r_1 = a$  и малой толщины  $\delta$  (рис. 17.3) в произвольной точке  $M$  оси у кольца. Плотность тока: а) обратно пропорциональна радиусу  $J = K/r$ ; б) во всех точках кольца одинакова.

Решение. а) Ток в элементе  $\delta dr$  кольца  $dI = J(\delta dr) = \delta(K/r) dr$ . Ток в кольце

$$I = K\delta \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = K\delta \ln(r_2/r_1),$$

т. е.

$$dI = \frac{I}{\ln(r_2/r_1)} \frac{dr}{r}.$$

Напряженность поля тока  $dI$  на оси в точке  $M$  (поле витка с током  $dI$ )

$$dH = dH_y = \frac{\sin^3 \beta}{2r} dI = \frac{I}{2 \ln(r_2/r_1)} \frac{r dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Напряженность поля на оси

$$H = \frac{I}{2 \ln(r_2/r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{I}{2 \ln(r_2/r_1)} \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + r_1^2}} - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{y^2 + r_2^2}}) = \frac{I}{2 \ln(r_2/r_1)} \frac{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}{y},$$

в плоскости кольца ( $y = 0$ )

$$H = \frac{I}{2 \ln(r_2/r_1)} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

б) В этом случае  $dI = (I/a) dr$  и

$$dH = \frac{I}{a} dr \frac{\sin^3 \beta}{2r} = \frac{I}{2a} \frac{r^2 dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Напряженность поля на оси

$$H = \frac{I}{2a} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2 dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{I}{2a} \left( \ln \frac{r_2 + \sqrt{y^2 + r_2^2}}{r_1 + \sqrt{y^2 + r_1^2}} - \right. \\ \left. - \frac{r_2}{\sqrt{y^2 + r_2^2}} + \frac{r_1}{\sqrt{y^2 + r_1^2}} \right),$$

в плоскости кольца

$$H = \frac{I}{2a} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

**17.18.** Два круговых контура, оси которых совпадают, отстоят один от другого на расстоянии  $2h = 1$  м. Радиусы контуров  $a = 50$  см. Постоянный ток в каждом контуре  $I = 200$  А. Направления токов одинаковы.

Найти зависимость магнитной индукции на оси контуров от расстояния  $x$  до середины между ними.

**17.19.** Круговые контуры задачи 17.18 расположены под углом друг к другу так, что их оси пересекаются в точке  $M$ , образуя угол в  $60^\circ$ . Расстояние от точки  $M$  до центра первого контура  $0,25$  м, до центра второго контура  $0,75$  м. Для наблюдателя в точке  $M$  ток первого контура направлен по направлению движения часовой стрелки, ток второго контура — против направления движения часовой стрелки.

Определить значение и направление вектора индукции в точке  $M$ .

**17.20.** Два тонких круговых контура лежат в параллельных плоскостях и имеют общую ось.

Найти взаимную индуктивность между контурами, если расстояние между их плоскостями  $h = 0,25$  м, радиус первого контура  $r_1 = 0,4$  м, радиус второго контура  $r_2 = 0,3$  м.

**17.21.** Двухпроводная линия длиной  $l \gg d$  (рис. 17.21) замкнута тонким проводником. По линии и проводнику протекает постоянный ток  $I$ .

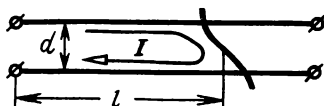


Рис. 17.21

Показать, что при указанных условиях продольная составляющая силы (направленная вдоль линии), действующей на проводник, не зависит от его формы.

## 17.2. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Векторный и скалярный потенциалы

**17.22(Р).** Провод с постоянным током  $I$  спускается вертикально вниз и оканчивается в земле полусферическим заземлителем (удельная проводимость  $\sigma_3$ ), радиус которого равен  $a$  (рис. 17.22).

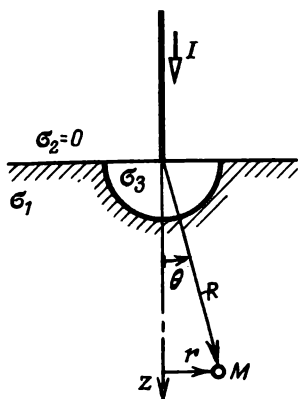


Рис. 17.22

Считая удельную проводимость земли  $\sigma_1 \ll \sigma_3$  постоянной и второй электрод находящимся на расстоянии, много большем  $a$ , определить напряженность магнитного поля в земле и в воздухе.

**Решение.** Магнитное поле в земле удовлетворяет уравнению (17.1а). В силу симметрии плотность тока в земле имеет только радиальную составляющую (в сферической системе координат)  $J = J_R = I/2\pi R^2$ , а магнитное поле не зависит от координаты  $\alpha$  и  $H = H_\theta$ , при этом для радиальной составляющей уравнение (17.1а) будет иметь вид (см. приложение 4):

$$\operatorname{rot}_R H = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta H) \right] = \frac{I}{2\pi R^2}.$$

После интегрирования получим:

$$R \sin \theta H = -\frac{I \cos \theta}{2\pi} + f(R) + C. \quad (a)$$

На оси симметрии  $z$ , т.е. при  $\theta = 0$ ,

$$R \sin \theta H = 0 = -I/2\pi + f(R) + C.$$

Следовательно,  $f(R)$  не зависит от  $R$ , т.е. эта функция отсутствует, и постоянная  $C = I/2\pi$ . Подставив постоянную в (а), получим:

$$H = \frac{I}{2\pi R \sin \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{I}{2\pi r} (1 - \cos \theta),$$

так как  $R \sin \theta = r$ .

В воздухе напряженность магнитного поля находим по закону полного тока:  $H' = I/2\pi r$ . Нетрудно видеть, что на границе (при  $\theta = \pi/2$ ) получим  $H = I/2\pi r = H'$ , т.е., как и должно быть, удовлетворяются граничные условия (17.9) и (17.10).

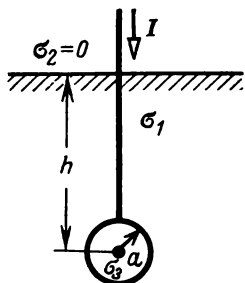


Рис. 17.23

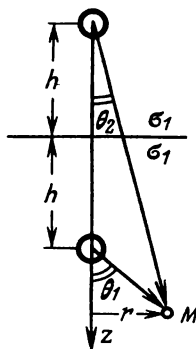


Рис. 17.23Р

**17.23(Р).** На глубине  $h$  под поверхностью земли (рис. 17.23) находится сферический электрод (удельная проводимость  $\sigma_3$ ) радиусом  $a \ll h$ , к которому подводится постоянный ток  $I$  по изолированному вертикальному кабелю. Второй электрод расположен далеко от первого — на расстоянии, намного большем  $h$ .

Найти напряженность магнитного поля в земле и воздухе, считая удельную проводимость земли  $\sigma_1 \ll \sigma_3$  и постоянной.

**Решение.** Для определения плотности тока в земле можно пользоваться методом зеркальных изображений: влияние границы раздела сред (поверхности земли) заменим током  $I' = I$  фиктивного электрода (рис. 17.23Р). Применив принцип наложения, определим напряженность магнитного поля в земле. Напряженность поля истинного тока, как найдено в задаче 17.22,

с заменой  $2\pi$  на  $4\pi$  (так как теперь заземлитель сферический)

$$H_1 = H_{1\alpha} = \frac{I}{4\pi r} (1 - \cos \theta_1),$$

для изображения тока

$$H_2 = H_{2\alpha} = \frac{I}{4\pi r} (1 - \cos \theta_2)$$

и напряженность поля в земле

$$H = H_\alpha = H_1 + H_2 = \frac{I}{4\pi r} (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

В воздухе, как и в задаче 17.22,

$$H' = H'_\alpha = I/2\pi r.$$

На границе, т. е. при  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ , получим, как и должно быть,  $H = I/2\pi r = H'$ .

**17.24.** По проводнику, выполненному в виде трубы с радиусом  $r_2 = 3r_1 = 1,5$  см, протекает постоянный ток  $I$ . Для охлаждения проводник помещен в жидкость, при этом температура различных точек сечения проводника различна и вследствие этого не одинакова плотность тока  $J = J_z$ . Известна напряженность магнитного поля внутри проводника:  $H = H_\alpha = = 25(4r^2 + 9 - 5/r)$  А/см, где  $r$  — в сантиметрах.

Найти распределение плотности тока по сечению проводника и зависимость удельной проводимости от радиуса, если напряженность электрического поля в проводнике  $E = E_z = = 1,2 \cdot 10^{-3}$  В/см.

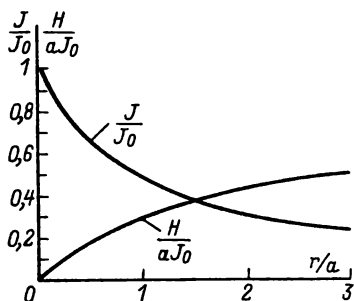


Рис. 17.25Р

**17.25(Р).** Плотность тока в плазме газового разряда  $J = J_z = J_0/(r/a + 1)$  в цилиндрической системе координат (см. приложение 4). Здесь  $r$  — текущий радиус,  $J_0$  и  $a$  — постоянные.

Определить напряженность магнитного поля. Построить на одном графике зависимости  $J(r)$  и  $H(r)$ .

**Решение.** Напряженность поля найдем из уравнения закона полного тока в дифференциальной форме (17.1а), которое в условиях задачи перепишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = \frac{J_0}{r/a + 1},$$

где  $H_z = H$ .

После интегрирования получим:

$$rH = aJ_0 [r - a \ln(r + a)C].$$

Постоянную  $C$  определим из условия  $H = 0$  при  $r = 0$ , т. е.  $0 = -\ln aC = \ln(1/aC)$ , следовательно,

$$H = aJ_0 \left[ 1 - \frac{a}{r} \ln \left( \frac{r}{a} + 1 \right) \right].$$

Зависимости  $J/J_0 = f_1(r/a)$  и  $H/aJ_0 = f_2(r/a)$  построены на рис. 17.25Р.

**17.26(Р).** Решить задачу 17.4, интегрируя дифференциальное уравнение магнитного поля.

Решение. Плотность тока

$$J = J_z = \rho v = \rho 2\pi r n.$$

Напряженность магнитного поля внутри цилиндра найдем из закона полного тока в дифференциальной форме (17.1а). Так как поле не зависит от координаты  $z$  (цилиндр длинный), то в цилиндрической системе координат (см. приложение 4)  $\text{rot}_z \mathbf{H} = -\partial H_z / \partial r$  и  $-\partial H_z / \partial r = 2\pi n r$ , откуда после интегрирования получим:

$$H_z = -\pi n r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования легко определить из условия, что при  $r = r_0$  должно быть  $H_z = 0$ , т. е.  $C = \pi n r_0^2$ .

Магнитная индукция внутри цилиндра

$$B = \mu_0 H_z = \mu_0 \pi n (r_0^2 - r^2).$$

**17.27(Р).** Считая известным, что магнитный потенциал  $\varphi_m = \varphi = (C_1 R + C_2/R^2) \cos \theta$  удовлетворяет уравнению Лапласа ( $R$  и  $\theta$  — сферические координаты), найти магнитную индукцию в любой точке внутри и вне сферической оболочки задачи 17.9.

Решение. Внутри оболочки, т. е. при  $R < b$  (рис. 17.9), токи отсутствуют и, следовательно,  $\text{rot} \mathbf{H}_1 = 0$ , т. е. магнитное поле потенциальное и напряженность поля можно представить в виде  $\mathbf{H}_1 = -\text{grad} \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  — скалярный потенциал магнитного поля внутри оболочки. Аналогично при  $R > b$ , т. е. вне оболочки,  $\mathbf{H}_2 = -\text{grad} \varphi_2$ .

Решение задачи ищем в виде

$$\varphi_1 = (C_1 R + C_2/R^2) \cos \theta; \quad \varphi_2 = (C_3 R + C_4/R^2) \cos \theta.$$

Постоянные найдем из условий: 1) в центре оболочки ( $R = 0$ ), 2) в бесконечности ( $R = \infty$ ) и 3) на поверхности ( $R = b$ ).

1) Так как напряженность поля не может быть бесконечно большой, то  $C_2 = 0$ .

2) Так как в бесконечности поле отсутствует, то  $C_3 = 0$ .

3) Из граничного условия (17.10), т. е.  $H_{1R} = H_{2R}$  (так как  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ ), или  $\partial\varphi_1/\partial R = \partial\varphi_2/\partial R$  при  $R = b$  получим  $C_1 = -2C_4/b^3$ . Из граничного условия (17.9) или  $-\partial\varphi_2/R\partial\theta + \partial\varphi_1/R\partial\theta = J_S$  при  $R = b$ , где  $J_S = \partial I/b\partial\theta = nqr/2b^2 = nq \sin\theta/2b$ , получим  $C_4/b^3 - C_1 = nq/2b$ . Из двух уравнений для  $C_1$  и  $C_4$  находим:  $C_1 = -nq/3b$ ;  $C_4 = nqb^2/6$ .

Потенциалы:

$$\varphi_1 = -\frac{nq}{3b} R \cos\theta = -\frac{nq}{3b} z; \quad \varphi_2 = \frac{nq}{6} \frac{b^2}{R^2} \cos\theta.$$

По известным потенциалам сразу находим напряженность поля:

$$H_1 = H_{1z} = -\partial\varphi_1/\partial z = nq/3b;$$

$$H_{2R} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial R} = \frac{nq}{3} \frac{b^2}{R^3} \cos\theta;$$

$$H_{2\theta} = -\frac{\partial\varphi_2}{R\partial\theta} = \frac{nq}{6} \frac{b^2}{R^3} \sin\theta.$$

Это решение определяет напряженность поля внутри и вне оболочки в любой точке, а не только на оси. Нетрудно видеть, что для напряженности поля на оси решения задач 17.9 и 17.27 совпадают.

**17.28(Р).** В цилиндрическом медном проводе радиусом  $a$  есть цилиндрическое отверстие радиусом  $r_0$ , расположенное на расстоянии  $d$  от оси провода (рис. 17.28). По проводу течет ток постоянной плотности  $J$ .

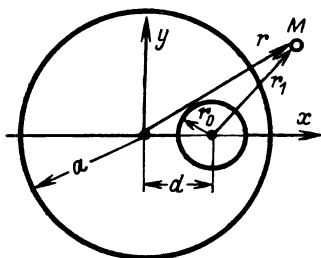


Рис. 17.28

Определить векторный потенциал и магнитную индукцию, составить уравнения линий магнитной индукции: 1) внутри отверстия, 2) в проводе и 3) вне провода. Построить линии, проходящие через точки: а)  $x = 0$ ;  $y = 0$ ; б)  $x = d - r_0$ ;  $y = 0$ ;

в)  $x = d$ ;  $y = 0$ ; г)  $x = d + r_0$ ;  $y = 0$ ; д)  $x = a$ ;  $y = 0$  при  $a = 2d = 4r_0$  и график зависимости  $B_y(x)$  при  $y = 0$ .

**Решение.** Применим принцип наложения следующим образом. Будем считать, что поле создано двумя токами —

током плотностью  $J$ , протекающим по сплошному цилиндру радиусом  $a$ , и встречным током той же плотности, протекающим по цилиндру радиусом  $r_0$  (по отверстию). Поле двух токов равно сумме полей, созданных каждым из этих токов. Кроме того, каждое из рассматриваемых полей симметрично относительно своей оси.

Сначала определим поле первого тока. Для этого решим уравнение Пуассона для векторного потенциала (17.8).

Так как плотность тока имеет только  $z$ -ю составляющую, т. е.  $J = J_z$ , то и  $A = A_z$ . В силу симметрии поле не зависит от координат  $\alpha$  и  $z$  (краевой эффект не учитывается). Поэтому уравнение Пуассона в цилиндрической системе коор-

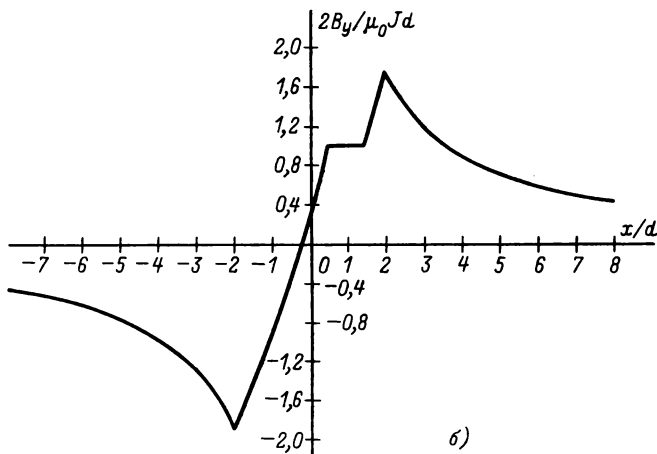
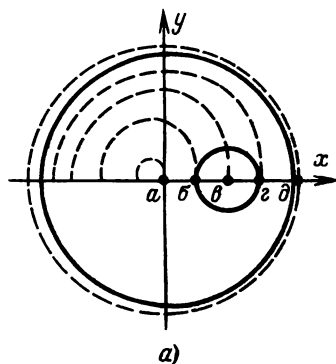


Рис. 17.28Р

динат принимает вид (см. приложение 4):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = -\mu_0 J.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим выражение для векторного потенциала внутри цилиндра



$$A_i = -\frac{1}{4} \mu_0 J r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Вне цилиндра  $J = 0$  и

$$A_e = C_3 \ln(r/C_4).$$

Постоянные определим из условий на оси и на поверхности цилиндра. Так как напряженность поля на оси цилиндра конечна, то  $C_1 = 0$ .

При  $r = a$   $A_i = A_e$  (17.11) и  $(1/\mu_0 \mu_{ir}) dA_i/dr = (1/\mu_0 \mu_{er}) dA_e/dr$  ( $H_{1r} = H_{2r}$ ) или  $-\mu_0 J a^2/4 + C_2 = C_3 \ln(a/C_4)$  и  $-\mu_0 J a/2 = C_3/a$ , откуда

$$C_3 = -\frac{1}{2} \mu_0 J a^2; \quad C_2 = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left(1 - \ln \frac{a^2}{C_4^2}\right).$$

Таким образом, векторный потенциал внутри и вне цилиндра определим по выражениям

$$A_i = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left(1 - \ln \frac{a^2}{C_4^2} - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad \text{при } r \leq a;$$

$$A_e = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \ln \frac{C_4^2}{r^2} \quad \text{при } r \geq a.$$

Постоянную  $C_4$  оставим неопределенной. Ее можно легко определить после выбора точки, где векторный потенциал равен нулю.

Поле второго тока определим по аналогичным выражениям. Их легко получить из предыдущих, заменив  $a$  на  $r_0$ ,  $r$  на  $r_1$ ,  $C_4$  на  $C_5$  и  $J$  на  $-J$ :

$$a_i = -\frac{1}{4} \mu_0 J r_0^2 \left(1 - \ln \frac{r_0^2}{C_5^2} - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) \quad \text{при } r_1 \leq r_0;$$

$$a_e = -\frac{1}{4} \mu_0 J r_0^2 \ln \frac{C_5^2}{r_1^2} \quad \text{при } r_1 \geq r_0.$$

Поле двух токов определим наложением полей первого и второго токов.

1) Точки внутри отверстия ( $r_1 \leq r_0$ ) являются внутренними для обоих цилиндров, поэтому

$$A_1 = A_i + a_i = \frac{1}{4} \mu_0 J \left(a^2 - r^2 - r_0^2 + r_1^2 - a^2 \ln \frac{a^2}{C_4^2} + r_0^2 \ln \frac{r_0^2}{C_5^2}\right).$$

Выберем точку, где  $A_1 = 0$  — центр отверстия ( $r_1 = 0$  и  $r = a$ ), при этом

$$0 = a^2 - a^2 - r_0^2 - a^2 \ln \frac{a^2}{C_4^2} + r_0^2 \ln \frac{r_0^2}{C_5^2}$$

и

$$A_1 = \frac{1}{4} \mu_0 J (d^2 + r_1^2 - r^2).$$

2) Точки в проводе ( $r_1 \geq r_0$ ;  $r \leq a$ ) являются внутренними для первого цилиндра и внешними для второго, поэтому

$$A_2 = A_i + a_e = \frac{1}{4} \mu_0 J \left[ r_0^2 \left( \ln \frac{r_1^2}{r_0^2} + 1 \right) + d^2 - r^2 \right].$$

3) Точки вне провода ( $r \geq a$ ) являются внешними и для большого цилиндра, и для малого, поэтому

$$A_3 = A_e + a_e = \frac{1}{4} \mu_0 J \left( a^2 \ln \frac{a^2}{r^2} - r_0^2 \ln \frac{r_0^2}{r_1^2} + r_0^2 + d^2 - a^2 \right).$$

Уравнения линий магнитной индукции плоскопараллельного поля (17.6) легко определяются при известной функции векторного потенциала.

а) Внутри отверстия это уравнение приводит к выражению  $d^2 + r_1^2 - r^2 = C$ . Имея в виду, что  $r^2 - r_1^2 = (x^2 + y^2) - [(x - d)^2 + y^2] = 2dx - d^2$ , получим:

$$2d^2 - 2dx = C \quad \text{или} \quad x = d - C/2d.$$

Таким образом, линии магнитной индукции в отверстии — прямые, параллельные оси  $y$ .

б) В проводе

$$r_0^2 \left( \ln \frac{r_1^2}{r_0^2} + 1 \right) + d^2 - r^2 = C.$$

в) Вне провода

$$a^2 \ln \frac{a^2}{r^2} - r_0^2 \ln \frac{r_0^2}{r_1^2} + r_0^2 + d^2 - a^2 = C.$$

В обоих выражениях  $r^2 = x^2 + y^2$  и  $r_1^2 = (x - d)^2 + y^2$ .

Если требуется определить уравнение линии магнитной индукции, проходящей через заданную точку  $M$  с координатами  $r = r'$  и  $r_1 = r'_1$ , то следует найти значение постоянной  $C$ , соответствующей этой точке, и подставить его в уравнение линии, при этом уравнения линий индукции примут следующий вид: 1)  $x = x_0$  при  $r_1 \leq r_0$ ; 2)  $[r^2 - (r')^2]/r_0^2 = \ln [r_1^2/(r'_1)^2]$  при  $r_1 \geq r_0 \leq r'_1$ ,  $r \leq a \geq r'$ ; 3)  $(a^2/r_0^2) \ln [r^2/(r')^2] = \ln [r_1^2/(r'_1)^2]$  при  $r \geq a \leq r'$ .

Все линии индукции, проходящие внутри отверстия, входят в провод. Уравнение линии в проводе, проходящей через точку  $x_0$  (в отверстии),

$$\ln (r_1^2/r_0^2) = (r^2 - r_0^2 + d^2 - 2dx_0)/r_0^2.$$

Часть линий из провода выходит в окружающее пространство.

Точка  $a$  расположена в проводе ( $r' = 0$ ;  $r'_1 = d$ ). Уравнение линии индукции, проходящей через эту точку,  $r^2/r_0^2 = \ln(r_1^2/d^2)$ . Для точки  $b$  ( $r' = d - r_0$ ;  $r'_1 = r_0$ ) уравнение линии индукции  $[r^2 - (d - r_0)^2]/r_0^2 = \ln(r_1^2/r_0^2)$  или  $r^2/r_0^2 = 1 + \ln(r_1^2/r_0^2)$ . Точка  $b$  находится в отверстии ( $x = a$ ); соответствующая линия индукции пересекается с поверхностью отверстия в точке  $r'_1 = r_0$  и  $(r')^2 = d^2 + r_0^2$ . Уравнение этой линии в проводе  $(r^2 - d^2 - r_0^2)/r_0^2 = \ln(r_1^2/r_0^2)$  или  $r^2/r_0^2 = 5 + \ln(r_1^2/r_0^2)$ . Для точки  $z$  ( $r' = d + r_0$ ;  $r'_1 = r_0$ ) уравнение линии индукции  $[r^2 - (d + r_0)^2]/r_0^2 = \ln(r_1^2/r_0^2)$  или  $r^2/r_0^2 = 9 + \ln(r_1^2/r_0^2)$ . Для точки  $d$  ( $r' = a$ ;  $r'_1 = a - d$ ) уравнение линии индукции (она проходит вне провода)  $(a^2/r_0^2) \ln(r^2/a^2) = \ln[r_1^2/(a - d)^2]$  или  $16 \ln(r^2/a^2) = \ln(4r_1^2/a^2)$ .

По этим уравнениям линии индукции построены на рис. 17.28Р, а.

Вектор магнитной индукции определим при известной функции векторного потенциала по (17.3). Так как векторный потенциал имеет только одну составляющую  $A = A_z$ , то  $B_x = -\partial A/\partial y$  и  $B_y = -\partial A/\partial x$ . Внутри отверстия

$$A_1 = \frac{1}{4} \mu_0 J (d^2 + d^2 - 2dx),$$

так как  $r^2 - r_1^2 = 2dx - d^2$  и  $B_{1x} = 0$ ;  $B_{1y} = \mu_0 J d/2$ .

В проводе

$$A_2 = \frac{1}{4} \mu_0 J \left[ r_0^2 \ln \frac{(x - d)^2 + y^2}{r_0^2} + r_0^2 + d^2 - x^2 - y^2 \right]$$

и

$$B_{2x} = \frac{1}{2} \mu_0 J \left[ r_0^2 \frac{y}{(x - d)^2 + y^2} - y \right];$$

$$B_{2y} = -\frac{1}{2} \mu_0 J \left[ r_0^2 \frac{x - d}{(x - d)^2 + y^2} - x \right].$$

Вне провода

$$A_3 = \frac{1}{4} \mu_0 J \left[ -a^2 \ln \frac{x^2 + y^2}{a^2} + r_0^2 \ln \frac{(x - d)^2 + y^2}{r_0^2} + r_0^2 + d^2 - a^2 \right]$$

и

$$B_{3x} = \frac{1}{2} \mu_0 J y \left[ r_0^2 \frac{1}{(x - d)^2 + y^2} - a^2 \frac{1}{x^2 + y^2} \right];$$

$$B_{3y} = \frac{1}{2} \mu_0 J \left[ a^2 \frac{x}{x^2 + y^2} - r_0^2 \frac{x - d}{(x - d)^2 + y^2} \right].$$

Зависимость  $B_y(x)$  при  $y = 0$  показана на рис. 17.28Р, б.

**17.29.** Определить векторный потенциал коаксиальной линии, по которой протекает постоянный ток  $I = 1000$  А. Внутренний проводник диаметром  $2r_1 = 2$  см выполнен из ферромагнитного материала ( $\mu_{r1} = 100$ ), а оболочка с внутренним радиусом  $r_2 = 2$  см и внешним радиусом  $r_3 = 2,24$  см — из неферромагнитного материала.

**17.30(Р).** Определить векторный потенциал двухпроводной линии (рис. 17.30) с током  $I$ , провода которой сделаны из неферромагнитного материала. Найти максимальный магнит-

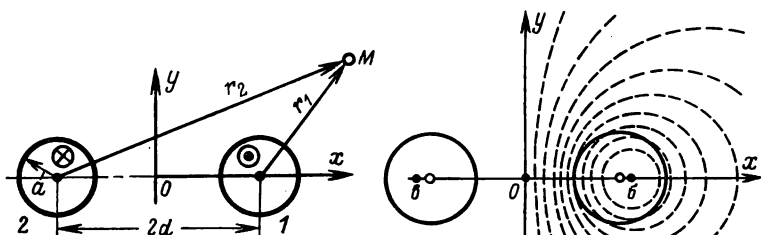


Рис. 17.30

Рис. 17.30Р →

ный поток на единицу длины линии, у которой отношение расстояния между осями проводов  $2d$  к их радиусу  $a$  равно 4.

Выяснить, как надо расположить контур, чтобы он охватывал максимальный поток.

Построить несколько линий поля, которые проходят: а) только вне проводов, б) только внутри провода, в) частично внутри, частично вне провода.

**Решение.** Выражение векторного потенциала для цилиндрического провода с током плотностью  $J = J_z$  было получено в задаче 17.28:

$$A'_i = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left[ 1 - \ln \frac{a^2}{C_4^2} - \frac{r_1^2}{a^2} \right] \quad \text{при } r_1 \leq a;$$

$$A'_e = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \ln \frac{C_4^2}{r_1^2} \quad \text{при } r_1 \geq a,$$

где  $r_1$  — расстояние от оси этого провода до точки наблюдения  $M$ .

Для второго провода с таким же током обратного направления

$$A_i'' = -\frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left( 1 - \ln \frac{a^2}{C_6^2} - \frac{r_2^2}{a^2} \right) \text{ при } r_2 \leq a;$$

$$A_e'' = -\frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \ln \frac{C_6^2}{r_2^2} \text{ при } r_2 \geq a,$$

где  $r_2$  — расстояние от оси второго провода до той же точки наблюдения.

Вне проводов

$$A_e = A_e' + A_e'' = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \ln \frac{r_2^2 C_4^2}{r_1^2 C_6^2}.$$

За точку нулевого векторного потенциала примем начало координат ( $r_1 = r_2$ ), тогда  $C_4^2/C_6^2 = 1$  и

$$A_e = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ при } r_1 \geq a \text{ и } r_2 \geq a.$$

Внутри первого провода

$$A_1 = A_i' + A_e'' = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left( 1 - \frac{r_1^2}{a^2} - \ln \frac{a^2}{r_2^2} \right)$$

при  $r_1 \leq a$  и  $2d - a \leq r_2 \leq 2d + a$ .

Внутри второго провода

$$A_2 = A_e' + A_i'' = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left( -1 + \frac{r_2^2}{a^2} + \ln \frac{a^2}{r_1^2} \right)$$

при  $r_2 \leq a$  и  $2d - a \leq r_1 \leq 2d + a$ .

Уравнения линий магнитной индукции вне проводов определяются из уравнения (17.6):  $A_e = \text{const}$ , т. е.  $r_2/r_1 = K$ . Это уравнение такое же, как и уравнение для семейства эквипотенциалов электрического поля двух заряженных осей, совпадающих с осями рассматриваемых проводов. Таким образом, линии магнитного поля вне проводов двухпроводной линии совпадают с эквипотенциалами электрического поля той же линии, если можно считать, что эквивалентные электрические оси совпадают с осями проводов.

Уравнение линий магнитной индукции внутри первого провода определяется из уравнения  $A_1 = \text{const}$ , т. е.  $1 - (r_1^2/a^2) + \ln (r_2^2/a^2) = C$ . Если задана точка координатами  $r_1 = r_1'$  и  $r_2 = r_2'$ , через которую должна пройти искомая линия, то это уравнение примет вид:  $[r_1^2 - (r_1')^2]/a^2 = \ln [r_2^2/(r_2')^2]$ .

Некоторые линии магнитной индукции построены на рис. 17.30Р.

Магнитный поток на единицу длины линии, пронизывающий контур, продольные стороны которого проходят через точки  $b$  и  $e$ ,  $\Phi_{be} = A_b - A_e$ , что следует из соотношения (17.4).

Максимальный поток будет в том случае, когда точки  $b$  и  $e$  лежат на оси  $x$  симметрично относительно начала координат внутри проводов (рис. 17.30*P*), при этом

$$\Phi_{\phi\phi} = 2A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ 1 - \frac{(r_2 - 2d)^2}{a^2} - \ln \frac{a^2}{r_2^2} \right],$$

где учтено, что на оси  $x$  имеем  $r_1^2 = (r_2 - 2d)^2$ .

Максимальное значение потока определяется из условия  $d\Phi_{\phi\phi}/dr_2 = 0$  или  $r_2^2 - 2dr_2 - a^2 = 0$ , откуда  $r_2 = d + \sqrt{d^2 + a^2}$ . В точке  $b$  максимальное значение имеет векторный потенциал, а магнитная индукция равна нулю. Таким образом, максимальный магнитный поток

$$\Phi_{\max} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( d \frac{\sqrt{d^2 + a^2} - d}{a} + \ln \frac{\sqrt{d^2 + a^2} + d}{a} \right).$$

При указанном в условии задачи соотношении  $2d/a = 4$  получим:  $\Phi_{\max} = 1,9\mu_0 I/\pi$ .

**17.31(P).** Определить магнитную индукцию вне проводов двухпроводной линии задачи 17.30 и внутри первого провода. Построить зависимость  $B_y(x)$  при  $y = 0$ .

**Решение.** В решении задачи 17.30 получено для магнитного поля вне проводов

$$A_e = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2},$$

где учтено, что  $r_2^2 = (x+d)^2 + y^2$  и  $r_1^2 = (x-d)^2 + y^2$ , следовательно,

$$B_{ex} = \frac{\partial A_e}{\partial y} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left[ \frac{y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \right];$$

$$B_{ey} = -\frac{\partial A_e}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left[ \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2} \right].$$

Внутри первого провода

$$A_1 = \frac{1}{4} \mu_0 J a^2 \left[ 1 - \frac{(x-d)^2 + y^2}{a^2} + \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{a^2} \right]$$

и

$$B_{1x} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left[ \frac{y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{y}{a^2} \right];$$

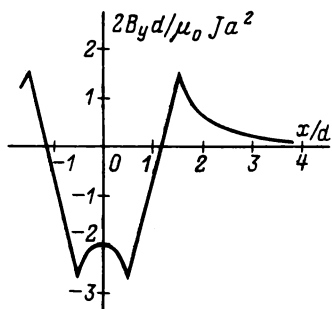
$$B_{1y} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left[ \frac{x-d}{a^2} - \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2} \right].$$

В частности, при  $y = 0$

$$B_e = B_{ey} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left( \frac{1}{x-d} - \frac{1}{x+d} \right);$$

$$B_1 = B_{1y} = \frac{1}{2} \mu_0 J a^2 \left( \frac{x-d}{a^2} - \frac{1}{x+d} \right).$$

Зависимость  $B_y(x)$  при  $y = 0$  показана на рис. 17.31Р.



← Рис. 17.31Р

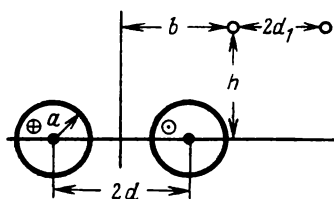


Рис. 17.32

**17.32.** Пользуясь выражениями для векторного потенциала, найденными в задаче 17.30 (см. решение), определить магнитный поток на единицу длины, который пронизывает соседнюю двухпроводную линию, расположенную параллельно рассматриваемой (рис. 17.32). Соотношение размеров:  $4a = 2d = b = 4d_1 = 2h$ . Провода второй линии тонкие — их радиус намного меньше расстояния  $d_1$ .

**17.33.** Рассчитать индуктивности эквивалентной схемы (рис. 17.33) трехпроводной трехфазной линии на единицу ее длины без учета влияния земли. Расстояния между проводами равны соответственно  $d_{AB}$ ,  $d_{BC}$  и  $d_{CA}$ . Радиусы тонких проводов одинаковы и равны  $r_0$ .

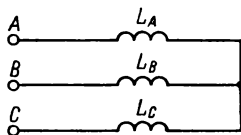


Рис. 17.33

У к а з а н и е. Магнитные потоки определяются после записи выражений для векторного потенциала, которые получаются аналогично тому, как это сделано в решении задачи 17.28 (для поля вне проводов).

**17.34. а)** По тонкой немагнитной цилиндрической оболочке радиусом  $a$  вдоль ее оси протекает постоянный ток  $I$ .

Определить векторный потенциал внутри  $A_i$  и вне  $A_e$  оболочки.

б) Некоаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего медного провода радиусом  $r_0$  и тонкой цилиндрической медной оболочки радиусом  $a$ . Оси внутреннего провода и оболочки находятся на расстоянии  $b$  друг от друга (рис. 17.34). По кабелю протекает постоянный ток  $I$ .

Определить векторный потенциал в проводе  $A_1$ , между проводом и оболочкой  $A_2$  и вне оболочки  $A_3$ , приняв векторный потенциал в бесконечности равным нулю. Найти уравнения линий магнитной индукции в каждой области.

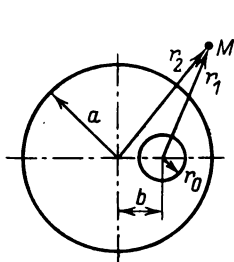


Рис. 17.34

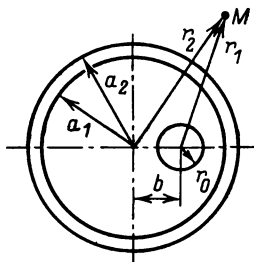


Рис. 17.35

**17.35. а)** По немагнитной трубе (радиусы  $a_1$  и  $a_2$ ) вдоль ее оси протекает постоянный ток  $I$ .

Определить векторный потенциал внутри трубы  $A_0$ , в теле трубы  $A_i$  и вне трубы  $A_e$ .

**б)** По некоаксиальному кабелю (рис. 17.35) протекает постоянный ток  $I$ .

Определить векторный потенциал во внутреннем медном проводе  $A_1$ , между проводом и медной оболочкой  $A_2$ , вне оболочки  $A_3$  и в оболочке  $A_4$ , считая векторный потенциал в бесконечности равным нулю. Показать, что из решения этой задачи предельным переходом при толщине стенки оболочки, стремящейся к нулю, т. е. при  $a_2 \rightarrow a_1$ , получается решение задачи 17.34, б.

**17.36(Р).** Многослойная обмотка бесконечно длинной катушки с током плотностью  $J = \text{const}$  имеет внутренний радиус  $r_1$ , внешний —  $r_2$ .

Считая обмотку равномерной и пренебрегая толщиной изоляции между витками, определить векторный потенциал  $A$  и магнитную индукцию  $B$ : 1) внутри катушки; 2) в обмотке и 3) вне катушки.

Показать, как изменится решение задачи, если плотность тока  $J = K/r^2$ .



**Решение.** В цилиндрической системе координат с осью  $z$ , совпадающей с осью катушки, отсутствует зависимость поля от координаты  $z$ , так как катушка бесконечно длинная. Кроме того, поле симметрично относительно оси катушки, т.е. не зависит от координаты  $\alpha$ . При этих условиях векторный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (17.8):

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA) \right] = -\mu_0 J,$$

где  $J = J_\alpha$  и  $A = A_\alpha$ .

Решение этого уравнения запишем отдельно для каждой из областей:

1) при  $r \leq r_1$  задано  $J_1 = 0$  и  $A_1 = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_5}{r}$ ;

2) при  $r_1 \leq r \leq r_2$  задано  $J_2 = J = \text{const}$  и  $A_2 = -\mu_0 J \frac{r^2}{3} + C_2 \frac{r}{2} + C_3/r$ ;

3) при  $r_2 \leq r$  задано  $J_3 = 0$  и  $A_3 = C_4 \frac{r}{2} + \frac{C_6}{r}$ .

Вектор магнитной индукции найдем по (17.3). Он имеет только одну составляющую  $B_z = B = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA)$ , т.е. 1)  $B_1 = C_1$ ; 2)  $B_2 = -\mu_0 J r + C_2$ ; 3)  $B_3 = C_4$ .

Постоянные находятся из условий (17.11) и (17.9), т.е. равенства векторных потенциалов и напряженностей магнитного поля при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , а также из условий, что вне катушки поле отсутствует, а на оси оно конечно

$$C_1 = \mu_0 J (r_2 - r_1); \quad C_2 = \mu_0 J r_2; \quad C_3 = -\frac{\mu_0 J}{6} r_1^3;$$

$$C_4 = C_5 = 0; \quad C_6 = \frac{\mu_0 J}{6} (r_2^3 - r_1^3),$$

при этом

$$A_1 = \frac{\mu_0 J}{2} (r_2 - r_1) r; \quad B_1 = \mu_0 J (r_2 - r_1);$$

$$A_2 = \mu_0 J \left( -\frac{r^2}{3} + \frac{1}{2} r_2 r - \frac{r_1^3}{6r} \right); \quad B_2 = \mu_0 J (r_2 - r);$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 J}{6} (r_2^3 - r_1^3) \frac{1}{r}; \quad B_3 = 0.$$

Если плотность тока  $J = K/r^2$ , то изменится решение в области  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$A_2 = \mu_0 K + C_2 \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}.$$

Вид решения внутри и вне катушки останется прежний. Постоянные определяются из тех же условий, что и выше. В этом случае

$$\begin{aligned} A_1 &= \mu_0 K \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{r}{2}; & B_1 &= \mu_0 K \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \\ A_2 &= \mu_0 K \left( 1 - \frac{r}{2r_2} - \frac{r_1}{2r} \right); & B_2 &= \mu_0 K \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right); \\ A_3 &= \frac{\mu_0 K}{2} (r_2 - r_1) \frac{1}{r}; & B_3 &= 0. \end{aligned}$$

### 17.3. Магнитное поле в присутствии магнитных тел

В этом параграфе помещены задачи, в которых имеются границы раздела между магнитными средами с различными значениями магнитной проницаемости. Такие задачи рекомендуется решать либо интегрированием уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала  $\Phi_m$ , связанного с напряженностью магнитного поля выражением (17.16), либо методом отображений от плоских и цилиндрических поверхностей. В этом же параграфе есть задачи по определению медленно изменяющегося магнитного поля в средах с магнитными потерями.

**17.37.** Пользуясь известными выражениями для поля диэлектрических цилиндра и шара, помещенных в однородное электрическое поле, вычислить размагничивающий фактор  $N$  и магнитную проницаемость тела для шара и цилиндра.

Составить зависимости проницаемости тела  $\mu_r$  от  $\mu_r$ , где  $B$  — индукция внутри тела,  $B_0$  — индукция внешнего однородного поля до внесения в него тела,  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость материала тела.

**17.38(Р).** На оси  $x$  длинной катушки находится образец, однородно намагниченный параллельно оси с  $M = M_x = 8000$  А/см.

Определить потокоцепление магнитного потока, обусловленного образцом, с витками катушки. Известно, что в отсутствие образца напряженность поля, создаваемого током, который проходит по обмотке катушки,  $H = H_x = kw_0 I$  во всех

точках области, занятой образцом ( $kw_0 = 100 \text{ см}^{-1}$ , если ток  $I$  – в амперах и напряженность поля – в амперах на сантиметр).

Образец: А) цилиндр с сечением  $S = 1 \text{ мм}^2$  и длиной  $l = 2 \text{ см}$ ; Б) тонкостенная трубка, толщина стенок  $100 \text{ нм}$ , диаметр трубки  $d = 2 \text{ мм}$ , длина  $l = 2 \text{ см}$ ; В) вытянутый эллипсоид с полуосями  $a = 1 \text{ см}$  (ось вращения, параллельная оси катушки) и  $b = 1 \text{ мм}$ ; Г) диск толщиной  $\delta = 200 \text{ нм}$ , диаметром  $d = 2 \text{ см}$  (диаметр диска совпадает с осью катушки); Д) сплюснутый эллипсоид вращения с полуосями:  $a = 200 \text{ нм}$  (ось вращения перпендикулярна оси катушки),  $b = 1 \text{ см}$ .

Решение. В интеграле (17.26) по условию  $H_1 M = H_1 M = \text{const}$ , при этом

$$\Psi = \frac{\mu_0}{I} H_1 M V = \mu_0 (kw_0) M V.$$

Численные значения даны в ответах.

17.39(Р). Рассчитать магнитное поле внутри, вне и в стенке ферромагнитной трубы, находящейся во внешнем однородном

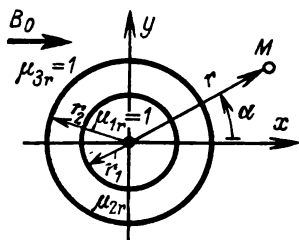


Рис. 17.39

поле с индукцией  $B_0$  (рис. 17.39). Относительная магнитная проницаемость материала трубы  $\mu_r = \mu_r$ . Определить коэффициент экранирования  $K = B_1/B_0$ , где  $B_1$  – индукция внутри трубы.

Решение. Так как в рассматриваемой области поля отсутствуют токи, то  $\text{rot } H = 0$  и магнитное поле потенциально.

Введя функцию скалярного магнитного потенциала (17.16), применив цилиндрические координаты (см. приложение 4) и выбрав  $\phi_M = \phi = 0$  при  $r = 0$ , решение уравнения Лапласа (17.19) можно представить в виде

- 1)  $\phi_1 = (C_1 r + C_2/r) \cos \alpha$  при  $r \leq r_1$ ;
- 2)  $\phi_2 = (C_3 r + C_4/r) \cos \alpha$  при  $r_1 \leq r \leq r_2$ ;
- 3)  $\phi_3 = (C_5 r + C_6/r) \cos \alpha$  при  $r \geq r_2$ .

При  $r = 0$  поле должно оставаться конечным, поэтому  $C_2 = 0$ . Труба заметно искажает внешнее однородное поле в точках, находящихся вблизи трубы. Вдали от трубы ( $r \rightarrow \infty$ ) ее искажающее действие мало и поле остается однородным, т.е.  $H = H_x = H_0$  и  $\phi_3 = -H_0 x = -H_0 r \cos \alpha$ , откуда следует, что  $C_5 = -H_0$ .

Остальные четыре постоянные определим из граничных условий при а)  $r = r_1$  и б)  $r = r_2$ :

- а)  $\phi_1 = \phi_2$  и по (17.10)  $\mu_1 \partial \phi_1 / \partial r = \mu_2 \partial \phi_2 / \partial r$ , т.е.

$$C_1 r_1 = C_3 r_1 + C_4 / r_1 \text{ и } C_1 = \mu_r (C_3 - C_4 / r_1^2); \quad (1)$$

б) аналогично

$$\begin{aligned} C_3 r_2 + C_4 / r_2 &= -H_0 r_2 + C_6 / r_2 \text{ и} \\ \mu_r (C_3 - C_4 / r_2^2) &= (-H_0 - C_6 / r_2^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Совместное решение четырех уравнений (1) и (2) дает:  $C_1 = 4\mu_r \rho$ ;  $C_4 = 2(\mu_r - 1)r_1^2 \rho$ ;  $C_3 = 2(\mu_r + 1)\rho$ ;  $C_6 = (\mu_r^2 - 1)(r_1^2 - r_2^2)\rho$ , где  $\rho = H_0 r_2^2 / [r_1^2(\mu_r - 1)^2 - r_2^2(\mu_r + 1)^2]$ .

Таким образом, скалярные магнитные потенциалы найдены:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 4\mu_r \rho r \cos \alpha = 4\mu_r \rho x; \\ \varphi_2 &= 2\rho [(\mu_r + 1)r + (\mu_r - 1)r_1^2 / r] \cos \alpha; \\ \varphi_3 &= [-H_0 r + (\mu_r^2 - 1)\rho(r_1^2 - r_2^2) / r] \cos \alpha. \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля в каждой области определим по (17.16):

1) внутри трубы

$$H_1 = H_{1x} = -\partial \varphi_1 / \partial x = -4\mu_r \rho,$$

т.е. внутри трубы поле однородно (при однородном внешнем поле  $H_0$ );

2) в стенке трубы

$$\begin{aligned} H_{2r} &= -\partial \varphi_2 / \partial r = -2\rho [(\mu_r + 1) - (\mu_r - 1)r_1^2 / r^2] \cos \alpha; \\ H_{2\alpha} &= -\partial \varphi_2 / r \partial \alpha = 2\rho [(\mu_r + 1) + (\mu_r - 1)r_1^2 / r^2] \sin \alpha; \end{aligned}$$

3) вне трубы

$$\begin{aligned} H_{3r} &= -\partial \varphi_3 / \partial r = [H_0 + (\mu_r^2 - 1)\rho(r_1^2 - r_2^2) / r^2] \cos \alpha; \\ H_{3\alpha} &= -\partial \varphi_3 / r \partial \alpha = [-H_0 + (\mu_r^2 - 1)\rho(r_1^2 - r_2^2) / r^2] \sin \alpha. \end{aligned}$$

Коэффициент экранирования

$$K = \frac{B_1}{B_0} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{-4\mu_r \rho}{H_0} = \frac{4\mu_r r_2^2}{r_2^2(\mu_r + 1)^2 - r_1^2(\mu_r - 1)^2}.$$

Если  $\mu_r \gg 1$ , то  $K = 4r_2^2 / \mu_r (r_2^2 - r_1^2)$ .

**17.40.** Параллельно поверхности толстого листа с относительной магнитной проницаемостью, намного большей единицы, на расстоянии  $h = 10$  см протянут провод с постоянным током  $I = 100$  А (рис. 17.40).

Определить зависимости индукции от координаты  $x$  при  $y = 0$  и от координаты  $y$  при  $x = 0$ . Вычислить силу притяжения провода к листу на единицу его длины.

**17.41(P).** Параллельно оси бесконечно длинного цилиндра радиусом  $r_0$  на расстоянии  $b$  от оси расположен провод с постоянным током  $I$  (рис. 17.41). Относительная магнитная проницаемость цилиндра  $\mu_{1r}$ , окружающей среды —  $\mu_{2r}$ .

Определить векторный потенциал магнитного поля внутри и вне цилиндра.

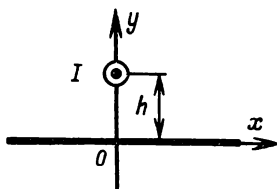


Рис. 17.40

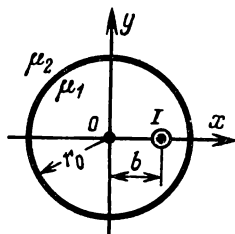


Рис. 17.41

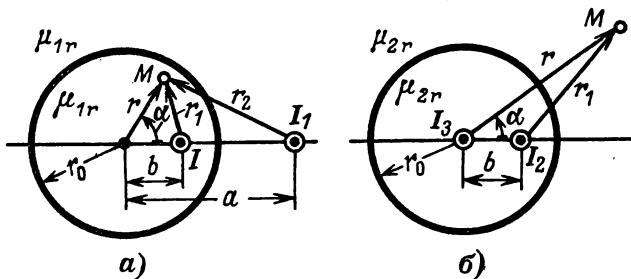


Рис. 17.41P

**Решение.** Задачу решим методом изображений. Магнитное поле внутри цилиндра представим как поле истинного тока  $I$  и фиктивного тока  $I_1$ , расположенного на расстоянии  $a$  от оси цилиндра (рис. 17.41P, *a*) в среде с такой же магнитной проницаемостью, как и у цилиндра. Фиктивный ток  $I_1$  должен создать внутри цилиндра такое же магнитное поле, как и связанные поверхностные токи на границе раздела обеих сред.

Поле вне цилиндра представим как поле двух фиктивных токов: тока  $I_2$ , расположенного там же, где и истинный ток  $I$  (рис. 17.41P, *б*), и тока  $I_3$ , расположенного на оси цилиндра. При этом магнитная проницаемость во всем пространстве такая же, как и вне цилиндра, суммарное действие токов  $I_2$  и  $I_3$  вне цилиндра должно быть таким же, как и суммарное

действие истинного тока  $I$  и связанных поверхностных токов на границе раздела. Токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  и расстояние  $a$  нужно выбрать такими, чтобы были удовлетворены граничные условия.

Векторный потенциал магнитного поля в точке  $M$  внутри цилиндра (см. решение задачи 17.28)

$$A_1 = - \frac{\mu_1 r \mu_0}{2\pi} (I \ln r_1 + I_1 \ln r_2) + C_1 \quad (1)$$

и вне цилиндра

$$A_2 = - \frac{\mu_2 r \mu_0}{2\pi} (I_3 \ln r + I_2 \ln r_1) + C_2. \quad (2)$$

Естественно, что векторный потенциал имеет только осевую составляющую ( $A = A_z$ ), так как поле плоскопараллельное.

На границе при  $r = r_0$  по (17.11) и (17.9)

$$A_1 = A_2 \text{ и } (1/\mu_0 \mu_{1r}) \partial A_1 / \partial r = (1/\mu_0 \mu_{2r}) \partial A_2 / \partial r$$

или, как следует из второго условия,

$$I \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dr} + I_1 \frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{dr} = I_3 \frac{1}{r} + I_2 \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dr}. \quad (3)$$

Из рис. (17.41P, a) следует, что  $r_1^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \alpha$ ;  $r_2^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha$ , следовательно,  $dr_1/dr = (r - b \cos \alpha)/r_1$ ;  $dr_2/dr = (r - a \cos \alpha)/r_2$ , при этом уравнение (3) при  $r = r_0$  приводится к виду

$$(I - I_2) \frac{r_0 - b \cos \alpha}{r_1^2} + I_1 \frac{r_0 - a \cos \alpha}{r_2^2} - I_3 \frac{1}{r_0} = 0. \quad (4)$$

Кроме того,

$$I_2 + I_3 = I, \quad (5)$$

что следует непосредственно из закона полного тока для контура, охватывающего цилиндр на рис. 17.41 и соответственно на рис. 17.41P, б.

Подставив (5) в (4), получим:

$$I_3 \left( \frac{r_0 - b \cos \alpha}{r_1^2} - \frac{1}{r_0} \right) + I_1 \frac{r_0 - a \cos \alpha}{r_2^2} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение после замены  $r_1$  и  $r_2$  приводится к виду

$$\begin{aligned} 2r_0 ab (I_3 - I_1) \cos^2 \alpha + [I_1 (2r_0^2 b + r_0^2 a + ab^2) - \\ - I_3 (2ab^2 + br_0^2 - a^2 b)] \cos \alpha + \\ + I_3 \frac{b^2}{r_0} (r_0^2 + a^2) - I_1 r_0 (r_0^2 + b^2) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как уравнение (7) должно удовлетворяться при любых  $\alpha$ , то должны быть равны коэффициенты при каждой степени  $\cos \alpha$ , следовательно,

$$I_3 = I_1; \quad (8)$$

$$I_1 (2r_0^2 b + r_0^2 a + ab^2) - I_3 (2ab^2 + br_0^2 + a^2 b) = 0; \quad (9)$$

$$I_3 \frac{b^2}{r_0} (r_0^2 + a^2) - I_1 r_0 (r_0^2 + b^2) = 0. \quad (10)$$

Из (10) и (8) получим:

$$a = r_0^2/b. \quad (11)$$

Уравнение (9) удовлетворяется при (8) и (11) и дает тот же результат, что и в (5).

Первое условие теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -\mu_{1r} I \ln r_1 - \mu_{1r} I_1 \ln r_2 + 2\pi C_1/\mu_0 = \\ & = -\mu_{2r} I_3 \ln r_0 - \mu_{2r} I_2 \ln r_1 + 2\pi C_2/\mu_0 \end{aligned}$$

или при  $r = r_0$  с учетом (5), (8), (11) и равенства  $r_1^2/r_2^2 = b^2/r_0^2$  получим:

$$\begin{aligned} & [(\mu_{2r} - \mu_{1r}) I - (\mu_{2r} + \mu_{1r}) I_3] \ln r_1 + \\ & + (\mu_{2r} - \mu_{1r}) I_3 \ln r_0 + \mu_{1r} I_3 \ln b = \frac{C_2 - C_1}{\mu_0} 2\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как это соотношение не должно зависеть от  $r_1$ , то

$$I_3 = I (\mu_{2r} - \mu_{1r})/(\mu_{2r} + \mu_{1r}). \quad (13)$$

Приняв на оси цилиндра ( $r_1 = b$ ,  $r_2 = a$ ) векторный потенциал равным нулю, найдем из (1) постоянную

$$C_1 = \frac{\mu_{1r}\mu_0}{2\pi} I \left( \ln b + \frac{\mu_{2r} - \mu_{1r}}{\mu_{2r} + \mu_{1r}} \ln a \right)$$

и из (12) постоянную

$$C_2 = \frac{\mu_0\mu_{1r}\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{b}{r_0} + \left( \frac{\mu_{2r}}{\mu_{1r}} + 1 \right) \ln r_0 \right].$$

По (1) и (2) векторный потенциал

$$A_1 = \frac{\mu_0\mu_{1r}\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{b}{r_1} + \left( 1 - \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{a}{r_2} \right]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{\mu_0\mu_{1r}\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \left[ \left( \frac{\mu_{2r}}{\mu_{1r}} - 1 \right) \ln \frac{r_0}{r} + \right. \\ & \left. + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} + \left( \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} + 1 \right) \ln \frac{b}{r_0} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

**17.42.** Определить вектор магнитной индукции (в цилиндрических координатах) внутри и вне цилиндра предыдущей задачи.

**17.43(Р).** Считая известным решение задачи 17.41, получить уравнения линий вектора магнитной индукции внутри и вне цилиндра. При  $\mu_{1r}/\mu_{2r} = 1/2$  и  $b/r_0 = 1/2$  построить линии, проходящие через точки: 1)  $r/r_0 = 5/4$ ;  $r_1/r_0 = 7/4$ ; 2)  $r/r_0 = 1$ ;  $r_1/r_0 = 1/2$ ; 3)  $r/r_0 = 0$ ;  $r_1/r_0 = 1/2$ ; 4)  $r/r_0 = 1/4$ ;  $r_1/r_0 = 1/4$ .

**Решение.** Уравнения линий вектора магнитной индукции внутри цилиндра определяются уравнением  $A_1 = \text{const}$  или в соответствии с выражением (14) из решения задачи (17.41):

$$(\mu_{2r} + \mu_{1r}) \ln \frac{b}{r_1} + (\mu_{2r} - \mu_{1r}) \ln \frac{a}{r_2} = K_1. \quad (1)$$

Для линии, которая должна проходить через точку  $r_1 = r'_1$ ;  $r_2 = r'_2$ , постоянная  $K_1$  определяется по выражению

$$(\mu_{2r} + \mu_{1r}) \ln \frac{b}{r'_1} + (\mu_{2r} - \mu_{1r}) \ln \frac{a}{r'_2} = K_1.$$

После подстановки значения  $K_1$  в уравнение (1) получим уравнение линий магнитной индукции внутри цилиндра

$$\ln \frac{r'_2}{r_2} = \frac{\mu_{2r} + \mu_{1r}}{\mu_{2r} - \mu_{1r}} \ln \frac{r_1}{r'_1}. \quad (2)$$

Уравнение линий вектора магнитной индукции вне цилиндра определяется уравнением  $A_2 = \text{const}$  или с учетом выражения (15) из решения задачи (17.41):

$$\left( \frac{\mu_{2r}}{\mu_{1r}} - 1 \right) \ln \frac{r_0}{r} + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} = K_2.$$

Уравнение линии вектора магнитной индукции вне цилиндра, проходящей через точку  $r = r'$ ;  $r_1 = r'_1$ ,

$$\ln \frac{r_1}{r'_1} = \frac{\mu_{2r} - \mu_{1r}}{2\mu_{1r}} \ln \frac{r'}{r}. \quad (3)$$

Для заданного отношения  $\mu_{1r}/\mu_{2r} = 1/2$  уравнения (2) и (3) упрощаются:

$$r_2 = r'_2 r_1^3 / r_1^3 \quad \text{и} \quad r = r' r_1^2 / r_1^2.$$

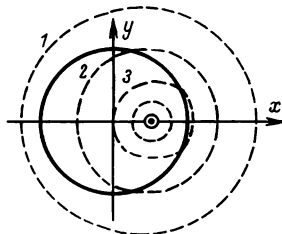


Рис. 17.43Р



Линии вектора магнитной индукции, проходящие через заданные точки, показаны на рис. 17.43Р.

**17.44.** В ферромагнетике ( $\mu_{2r} \gg 1$ ) просверлено цилиндрическое отверстие радиусом  $r_0$  (рис. 17.41). Параллельно оси отверстия на расстоянии  $b$  от нее проходит провод с постоянным током  $I$ .

Введя фиктивные токи  $I_1, I_2, I_3$  (см. решение задачи 17.41), определить векторный потенциал магнитного поля внутри отверстия и найти уравнение линий магнитной индукции. При  $b/r_0 = 1/2$  построить линии, проходящие через точки: 1)  $r_1/r_0 = 5/4$ ;  $r_2/r_0 = 11/4$ ; 2)  $r_1/r_0 = 1$ ;  $r_2/r_0 = 10/4$ ; 3)  $r_1/r_0 = 3/4$ ;  $r_2/r_0 = 9/4$ ; 4)  $r_1/r_0 = 2/4$ ;  $r_2/r_0 = 8/4$ ; 5)  $r_1/r_0 = 1/4$ ;  $r_2/r_0 = 7/4$ .

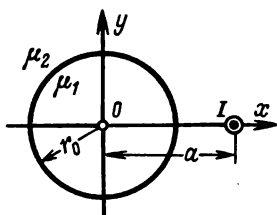


Рис. 17.45

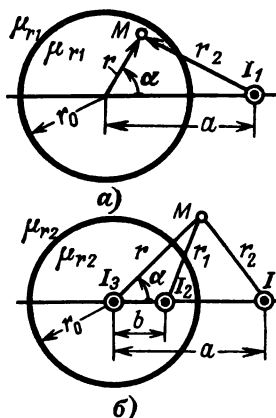


Рис. 17.45Р →

**17.45.** Проводник с постоянным током  $I$  проходит параллельно оси бесконечно длинного цилиндра (рис. 17.45) на расстоянии  $a$  от нее. Относительная магнитная проницаемость цилиндра  $\mu_{1r}$ , окружающей среды  $\mu_{2r}$ .

Определить векторный потенциал магнитного поля внутри  $A_1$  и вне  $A_2$  цилиндра, принимая  $A_1 = 0$  на оси цилиндра.

**У к а з а н и е.** Задачу можно решить аналогично тому, как была решена задача 17.41, вводя фиктивные токи  $I_1, I_2$  и  $I_3$  (рис. 17.45Р, а, б). Токи  $I_1, I_2, I_3$  и расстояние  $b$  определяются из граничных условий.

**17.46.** Определить вектор магнитной индукции внутри и вне цилиндра задачи 17.45.

**17.47.** Считая известным решение задачи 17.45, определить уравнения линий магнитной индукции: 1) внутри и 2) вне цилиндра. При  $\mu_{1r}/\mu_{2r} = 5$  и  $a/r_0 = 2$  построить несколько линий.

**17.48(P).** Между проводами двухпроводной линии, находящимися в среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{2r}$ , симметрично расположен ферритовый цилиндр радиусом  $r_0$  с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$  (рис. 17.48). Расстояние между проводами  $2a$ , радиус проводов  $\rho_0 \ll r_0$ .

1) Пренебрегая магнитным потоком внутри проводов, определить: а) индуктивность линии  $L_0$  на единицу ее длины; б) насколько индуктивность этой линии больше индуктивности такой же линии без ферритового цилиндра.

2) Повторить расчет при условии, что  $\mu_{1r} \gg \mu_{2r}$ .

**Решение.** 1а) Для решения этой задачи можно воспользоваться результатами решения задачи 17.45.

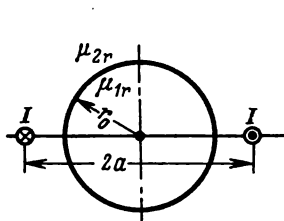


Рис. 17.48

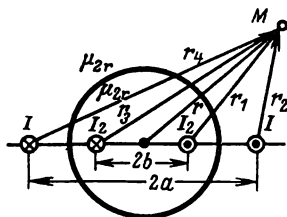


Рис. 17.48Р

Векторный потенциал магнитного поля вне цилиндра обусловлен действием истинных токов  $I$  и фиктивных токов  $I_2$  (рис. 17.48Р). Фиктивные токи  $I_3$  (рис. 17.45Р, б) в рассматриваемой задаче компенсируют друг друга, поэтому (см. ответ к задаче 17.45 и рис. 17.48Р и 17.45Р, б)

$$A_2 = \mu_0 \mu_{2r} \frac{I}{2\pi} \left( \ln \frac{r_4}{r_2} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_1} \right).$$

На поверхности правого провода  $r_4 \approx 2a$ ;  $r_2 = \rho_0$ ;  $r_3 = a + b = a + r_0^2/a$ ;  $r_1 = a - b = a - r_0^2/a$ , так как  $b = r_0^2/a$  (см. решение задачи 17.41), и векторный потенциал

$$A_{2+} = \mu_0 \mu_{2r} \frac{I}{2\pi} \left( \ln \frac{2a}{\rho_0} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \ln \frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - r_0^2} \right).$$

На поверхности левого провода  $A_{2-} = -A_{2+}$ . Поток на единицу длины линии по (17.5)  $\Phi_0 = A_{2+} - A_{2-} = 2A_{2+}$ . Индуктивность на единицу длины линии

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I} = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{\pi} \left( \ln \frac{2a}{\rho_0} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \ln \frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - r_0^2} \right).$$

16) При отсутствии цилиндра ( $\mu_{1r} = \mu_{2r}$ )

$$L'_0 = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{\pi} \ln \frac{2a}{\rho_0};$$

$$\Delta L_0 = L_0 - L'_0 = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{\pi} \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \ln \frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - r_0^2}.$$

2) Если  $\mu_{1r} \gg \mu_{2r}$ , то

$$L_0 = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{\pi} \left( \ln \frac{2a}{\rho_0} + \ln \frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - r_0^2} \right); \quad \Delta L_0 = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{\pi} \ln \frac{a^2 + r_0^2}{a^2 - r_0^2}.$$

**17.49(P).** Провода линии расположены параллельно оси цилиндра (рис. 17.49). Относительная магнитная проницаемость цилиндра  $\mu_{1r}$ , окружающей среды  $\mu_{2r}$ . Радиус провода  $\rho_0$  намного меньше радиуса цилиндра  $r_0$  и расстояния между проводами  $2b$ .

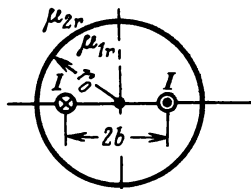


Рис. 17.49

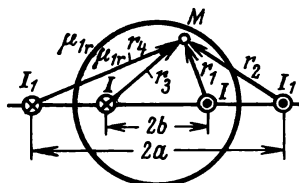


Рис. 17.49P

Пренебрегая магнитным потоком внутри проводов, определить: а) индуктивность линии  $L_0$  на единицу ее длины; б) индуктивность  $L_0$  при  $\mu_{2r} = \mu_{1r}$ .

**Решение.** а) Расчет векторного потенциала выполним аналогично расчету в задаче 17.41. Векторный потенциал магнитного поля внутри цилиндра обусловлен действием истинных токов  $I$  и фиктивных  $I_1$  (рис. 17.49P). Поэтому аналогично выражению (14) в решении задачи 17.41

$$A_1 = \frac{\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \left( \ln \frac{b}{r_1} - \ln \frac{b}{r_3} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \left( \ln \frac{a}{r_2} - \ln \frac{a}{r_4} \right) \right].$$

На поверхности правого провода  $r_1 = \rho_0$ ;  $r_2 = a - b = r_0^2/b - b$ , так как  $a = r_0^2/b$  (см. решение задачи 17.41);  $r_3 = 2b$ ;  $r_4 = a + b = r_0^2/b + b$  и

$$A_{1+} = \frac{\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{2b}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{r_0^2 + b^2}{r_0^2 - b^2} \right].$$

На поверхности левого провода  $A_{1-} = -A_{1+}$ . Поток на единицу длины линии по (17.5)  $\Phi_0 = A_{1+} - A_{1-} = 2A_{1+}$ . Индуктивность на единицу длины линии

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I} = \frac{\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{1}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{2b}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} \right) \ln \frac{r_0^2 + b^2}{r_0^2 - b^2} \right].$$

б) При  $\mu_{2r} = \mu_{1r}$  получим:  $L_0 = \frac{\mu_{1r} \mu_0}{\pi} \ln \frac{2b}{\rho_0}$ .

**17.50(P).** На ферритовое кольцо (рис. 17.50) с относительной комплексной магнитной проницаемостью  $\underline{\mu}_r = 400 - j20$  нанесена обмотка с числом витков  $w = 100$ . Размеры кольца:  $r_1 = 15$  мм;  $r_2 = 20$  мм;  $h = 5$  мм. Обмотка подключена к источнику синусоидального напряжения с  $U_m = 10$  В;  $f = 1000$  Гц.

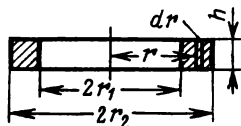


Рис. 17.50

Определить активную мощность, выделяемую в единице объема кольца, в зависимости от расстояния  $r$  (от оси).

Сопротивлением обмотки и рассеянием пренебречь.

**Решение.** Определим вначале мощность, выделяющуюся в цилиндрическом слое высотой  $h$ , радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ .

Магнитный поток в слое

$$d\Phi = h\vec{B} dr = h\mu_0 \underline{\mu}_r \dot{H} dr,$$

где  $\dot{H} = Iw/2\pi r$ ;  $\underline{\mu}_r = \mu'_r - j\mu''_r$ .

Напряжение на зажимах обмотки, соответствующее этому потоку,

$$d\dot{U} = j\omega w d\Phi = j\omega w \mu_0 \underline{\mu}_r \frac{Iw}{2\pi r} h dr.$$

Комплексная мощность

$$d\underline{S} = I^* d\dot{U} = \omega \mu_0 H^2 (\mu''_r + j\mu'_r) dV = \underline{S}_0 dV,$$

где  $\underline{S}_0 = P_0 + jQ_0$  — мощность, приходящаяся на единицу объема;  $dV$  — объем слоя.

Удельная активная и реактивная мощности:  $P_0 = \omega \mu_0 \mu_r'' H^2$ ;  $Q_0 = \omega \mu_0 \mu_r' H^2$ . Эти выражения для удельных мощностей не зависят от формы магнитопровода.

Для рассматриваемого кольца

$$\dot{U} = \int d\dot{U} = j\omega w^2 \mu_0 \mu_r \frac{i}{2\pi} h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

откуда

$$i = 2\pi \dot{U} / j\omega w^2 \mu_0 \mu_r h \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ и } H = |\dot{H}| = \frac{U}{\omega \mu_0 w \mu_r h \ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r},$$

где  $\mu_r = |\mu_r|$ .

Удельная активная мощность

$$P_0 = \frac{\mu_r'' U^2}{\omega w^2 \mu_0 \mu_r^2 h^2 \ln^2(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2} = \frac{0,38}{r^2} \text{ Вт/см}^3,$$

где  $r$  — в сантиметрах.

**17.51(P).** Определить мгновенное значение силы, действующей на 1 м провода с током  $i = 20 \cdot 10^4 \sin 1000t$  А, который находится на высоте  $h = 20$  см над непроводящим магнетиком (ферритом) с относительной комплексной проницаемостью  $\mu_r = 100 - j10$ .

**Решение.** Применив метод изображений для определения поля в среде, где расположен провод с током, найдем фиктивный ток:  $\dot{I}_{1m} = \dot{I}_m (\mu_r - 1) / (\mu_r + 1) = \dot{I}_m \cdot 0,98 \angle -0^\circ 6,8'$ . Индукция магнитного поля на оси провода, обусловленная фиктивным током  $\dot{I}_{1m}$ ,

$$\dot{B}_{1m} = \mu_0 \dot{H}_{1m} = \mu_0 \dot{I}_{1m} / 4\pi h$$

и ее мгновенное значение

$$B_1 = I_m \cdot 0,98 \mu_0 \frac{1}{4\pi h} \sin(1000t - 0^\circ 6,8').$$

Мгновенное значение силы, действующей на провод,

$$f = B_1 i l = 0,98 \cdot 10^4 (1 - \cos 2000t) \text{ Н}.$$

**17.52.** Определить, в какой момент времени  $t_1$  магнитная индукция поля, создаваемого синусоидальным током  $i_1 = 100 \sin(10^4 t + 30^\circ)$  А двухпроводной воздушной линии, которая проходит параллельно плоской поверхности магнетика с относительной комплексной магнитной проницаемостью  $\mu_r = 10 - j4$ , совпадает с полем другого тока  $i_2$  в той же линии при отсутствии магнетика. Найти значения тока  $i_2$  и намагниченности магнетика  $M$  в этот момент времени.

**17.53.** Определить потери на 1 м в непроводящем магнетике с относительной комплексной магнитной проницаемостью

$\mu_r = 4 - j5$ , если над его плоской поверхностью на расстоянии  $h = 0,5$  см находится двухпроводная воздушная линия. Ток в линии  $i = 2\sqrt{2} \sin 10^6 t$  А. Расстояние между проводами линии  $d = 10$  см. Потерями в проводах линии пренебречь.

Определить, насколько комплексное сопротивление этой линии больше комплексного сопротивления такой же линии при отсутствии магнетика.

**17.54.** Длинный ферритовый цилиндр радиусом  $r_0 = 0,25$  мм с относительной комплексной магнитной проницаемостью  $\mu_{1r} = 400 - j4$  помещен в однородное магнитное поле  $H_0 = 0,1 \sin 2\pi \times 10^6 t$  А/см, перпендикулярное оси цилиндра (рис. 17.54).

Определить индукцию  $B_1$  внутри цилиндра и мощность, поглощаемую в цилиндре на единицу его длины. Найти мгновенное значение вектора  $\mathbf{B}$  в точке  $A$ , лежащей у поверхности цилиндра в окружающей среде.

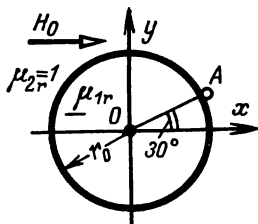


Рис. 17.54

**17.55(P).** Внутри ферритового магнитопровода с относительной комплексной магнитной проницаемостью  $\mu_{2r} = 3,5 - j3$  находится сферическое включение из диэлектрика ( $\mu_{1r} = 1$ ). Диаметр включения  $2R_0$  намного меньше размеров магнитопровода. Вдали от включения поле однородное:  $H_0 = 1 \sin 2\pi \cdot 10^6 t$  А/см.

Построить геометрические места концов векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  за период в точке  $A$ , находящейся в феррите у поверхности сферы (рис. 17.55). На построенных кривых обозначить точки, соответствующие одним и тем же моментам времени.

**Решение.** Применяя известное решение для шара в однородном поле к скалярному магнитному потенциалу в комплексной форме, получим для поля вне шара

$$\phi_{2M} = -\dot{H}_0 \left( R - \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + 2\mu_{2r}} \frac{R_0^3}{R^2} \right) \cos \theta,$$

откуда по (17.16) в сферической системе координат (см. приложение 4)

$$\dot{H}_{2R} = \dot{H}_0 \left( 1 + 2 \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + 2\mu_{2r}} \frac{R_0^3}{R^3} \right) \cos \theta;$$

$$\dot{H}_{2\theta} = -\dot{H}_0 \left( 1 - \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + 2\mu_{2r}} \frac{R_0^3}{R^3} \right) \sin \theta$$

и

$$\dot{B}_{2R} = \mu_{2r}\mu_0\dot{H}_{2R}; \quad \dot{B}_{2\theta} = \mu_{2r}\mu_0\dot{H}_{2\theta}.$$

Для рассматриваемой точки ( $R = R_0$ ;  $\theta = 45^\circ$ )

$$\dot{H}_{2R} = \dot{H}_0 \frac{3\mu_{1r}}{\mu_{1r} + 2\mu_{2r}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,15 \angle 36^\circ 50' \text{ A/см};$$

$$\dot{H}_{2\theta} = -\dot{H}_0 \frac{3\mu_{2r}}{\mu_{1r} + 2\mu_{2r}} \frac{1}{\sqrt{2}} = -0,69 \angle -3^\circ 46' \text{ A/см}.$$

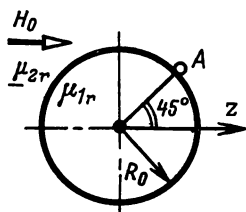


Рис. 17.55

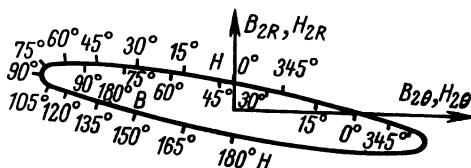


Рис. 17.55P

Мгновенные значения

$$H_{2R} = 0,212 \sin(\omega t + 36^\circ 50') \text{ A/см};$$

$$H_{2\theta} = -0,975 \sin(\omega t - 3^\circ 46') \text{ A/см};$$

$$B_{2R} = \mu_0 \cdot 0,975 \sin(\omega t - 3^\circ 46') \text{ Вб/см}^2;$$

$$B_{2\theta} = -\mu_0 \cdot 4,5 \sin(\omega t - 44^\circ 22') \text{ Вб/см}^2,$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ Гн/см}$ .

При соответствующем выборе масштабов геометрическое место для обоих векторов одно и то же (рис. 17.55P, где указаны в градусах значения  $\omega t$ ).

## 17.4. Энергия и силы в магнитном поле

**17.56.** Индуктивность однослойной короткой катушки на низкой частоте приближенно определяется выражением  $L = 0,04r^2w^2/(9r + 10l) \text{ мГн}$ , где  $r$  — радиус витков, м;  $l$  — длина катушки, м;  $w$  — число витков катушки.

Определить силу, стремящуюся растянуть катушку, и силу, стремящуюся разорвать витки катушки, при токе  $I = 2,45 \text{ А}$ , если  $r = 0,05 \text{ м}$ ;  $l = 0,2 \text{ м}$ ;  $w = 100$  витков.

**17.57.** Две катушки вариометра соединены последовательно. Индуктивности катушек  $L_1 = 90 \text{ мкГн}$  и  $L_2 = 160 \text{ мкГн}$ .

Коэффициент связи между катушками  $k = 0,4 \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осями катушек.

Определить вращающий момент, действующий на каждую из катушек, при  $k = 0,24$  и токе в катушках  $I = 10$  А.

**17.58.** На стальное кольцо нанесена обмотка, содержащая  $w = 600$  витков. В кольце сделан поперечный зазор длиной  $l_1 = 0,4$  мм. Средняя длина магнитной линии в кольце  $l_2 = 0,4$  м. Поперечное сечение кольца  $S = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>. Относительная магнитная проницаемость стали  $\mu_r = 800$ .

Определить энергию магнитного поля в стали  $W_c$  и в воздушном зазоре  $W_v$  при токе в обмотке  $I = 1$  А. Вычислив полную энергию магнитного поля, определить индуктивность катушки и силу, стремящуюся уменьшить зазор.

**17.59(Р).** При поражении молнией трубчатого молниеотвода труба оказалась сплюсненной.

Определить давление, действовавшее на трубу при токе молнии  $I = 200$  кА в предположении, что ток протекал лишь в тонком поверхностном слое трубы (поверхностный эффект). Наружный радиус трубы  $r_0 = 1,25$  см.

Решение. Силу, с которой магнитное поле действует на поверхность трубы, определим из выражения  $F_\eta = \partial W / \partial \eta$ , где  $W$  — энергия магнитного поля,  $\eta$  — обобщенная координата,  $F_\eta$  — составляющая силы по этой координате.

Применим это выражение к силе, действующей на элемент поверхности  $dS = l r_0 d\alpha$ .

Так как ток сосредоточен на поверхности трубы, то магнитное поле отлично от нуля лишь вне трубы. Если элемент поверхности под воздействием силы переместится на  $dr$ , то приращение энергии магнитного поля по (17.23)

$$dW = -W_0 dV = -\frac{1}{2} BH dS dr$$

и сила, действующая на элемент поверхности  $dS$ ,

$$dF_r = \partial W / \partial r = -\frac{1}{2} BH dS.$$

Давление

$$\begin{aligned} p = dF_r / dS &= -\frac{1}{2} BH = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 (I / 2\pi r_0)^2 = \\ &= -407 \text{ Н/см}^2. \end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что сила стремится уменьшить радиус, т. е. сжимает трубу.

**17.60(Р).** Выяснить, можно ли силу в предыдущей задаче вычислить так: индукция  $B = \mu_0 I / 2\pi r_0$ , на единицу периметра приходится ток  $I_0 = I / 2\pi r_0$  и сила  $F = BI_0$ .



**Решение.** Таким путем силу определить нельзя. Это можно объяснить следующим образом. Хотя практически ток протекает по поверхности трубы, толщина слоя тока не равна нулю. Если на внешней поверхности токового слоя индукция равна указанному в условии значению  $B = \mu_0 I / 2\pi r_0$ , то на внутренней поверхности токового слоя она равна нулю. Следовательно, не все элементы тока находятся в одном и том же магнитном поле. Указанное значение индукции является максимальным. Можно взять среднее значение индукции — максимальной и минимальной (равной нулю), при этом получаются правильные значения силы и давления, найденные в предыдущей задаче. Интересно обратить внимание на то, что решение не зависит от распределения плотности тока по толщине  $\Delta$  тока слоя, если она достаточно мала.

Действительно, сила, действующая на элемент тока,  $d^2F_r = -BJ dV = -BJ dS dr$ , где  $J = J_z$  — плотность тока. В качестве  $dS$  выберем элемент цилиндрической поверхности  $dS = lr d\alpha$ . По (17.1a) при  $H = H_z$

$$J_z = \text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = \frac{H}{r} + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Сила, действующая на элемент  $dS$ ,

$$dF_r = -\mu_0 l d\alpha \int_{r_0-\Delta}^{r_0} \frac{1}{r} (rH) d(rH) = \frac{-\mu_0 l d\alpha}{2} [r_0 H_0^2 + (H^2)_{cp} \Delta].$$

Здесь применена теорема о среднем и учтено, что на глубине, большей  $\Delta$ , вектор  $\mathbf{H} = 0$ .

Если толщина  $\Delta \rightarrow 0$ , то

$$dF_r = \frac{-\mu_0 l d\alpha}{2} r_0 H_0^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 dS$$

и давление

$$p = \frac{dF_r}{dS} = -\frac{\mu_0}{2} H_0^2 = -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{I}{2\pi r_0} \right)^2.$$

**17.61.** Электромагнит (рис. 17.61, а) имеет обмотку, содержащую 1000 витков, по которой проходит ток 10 А. Зависимость между магнитным потоком и МДС, приходящейся на сталь, т. е.  $\Phi = f(\sum H_c l_c)$ , представлена на рис. 17.61, б. Сечение воздушного зазора и стали  $S = 16 \text{ см}^2$ . Якорь, притягиваясь к сердечнику, совершает механическую работу против внешних сил.

Перемещение якоря из начального положения (зазор  $l_в$  равен 2 мм) в конечное (зазор равен нулю) происходит настолько быстро, что магнитный поток в течение всего перемещения остается неизменным, при этом происходит уменьшение тока (вследствие наведения ЭДС). После прекращения движения ток возрастает до прежнего значения.

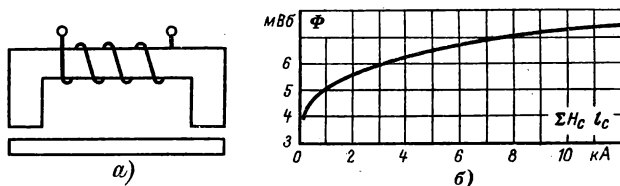


Рис. 17.61

Определить: а) совершенную механическую работу; б) силу притяжения якоря в начальном  $F_1$  и конечном  $F_2$  положениях; в) количество энергии, поступившей от источника,  $W_{и}$ ; г) изменение энергии магнитного поля в стали  $\Delta W_c$  и в воздушном зазоре  $\Delta W_в$ .

17.62. Решить задачу 17.61 в предположении настолько медленного перемещения якоря (при тех же начальном и конечном положениях), что можно полагать неизменным ток в обмотке в течение всего процесса перемещения.

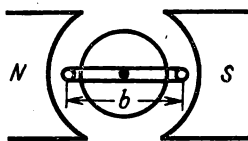
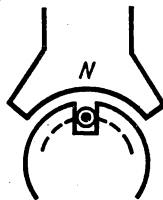


Рис. 17.63

Рис. 17.64 →



17.63. Равномерное магнитное поле в воздушном зазоре магнитоэлектрического гальванометра (рис. 17.63) направлено радиально. Индукция поля  $B = 0,15$  Тл. Рамка гальванометра состоит из  $w = 200$  витков, длина активной стороны рамки  $l = 2,5$  см, ширина рамки  $b = 2$  см. Момент сопротивления, развиваемый нитью подвеса при повороте подвижной системы на 1 деление шкалы, равен  $61,2 \cdot 10^{-6}$  г·см/деление.

Определить постоянную гальванометра по току, т.е. ток, вызывающий отклонение системы на одно деление шкалы.

17.64(Р). На рис. 17.64 схематически показан якорь электрической машины, имеющий всего один виток. Продольная

длина якоря  $l = 50$  см, наружный диаметр якоря  $D = 20$  см, диаметр окружности, на которой расположены провода,  $d = 16$  см. Относительная магнитная проницаемость стали  $\mu_r = 500$ . Ток в витке  $I = 50$  А.

Считая поле под полюсами однородным с индукцией  $B = 1$  Тл (при токе в витке, равном нулю), определить значение вращающего момента  $M$ , действующего на якорь; оценить силу  $F$ , действующую на провода, и момент  $M_0$ , обусловленный давлением проводов.

**Решение.** Обозначим индукцию в зазоре слева от проводника  $B_{\text{л}}$ , а справа  $B_{\text{п}}$ . Так как магнитная проницаемость стали намного больше проницаемости воздуха, то в соответствии с законом полного тока (17.16) можно считать, что  $(B_{\text{л}} - B_{\text{п}})\delta = \mu_0 I$ , где  $\delta$  — зазор между статором и якорем.

Пусть при отсутствии тока в якоря индукция в зазоре  $B_0$ , тогда  $B_{\text{л}} + B_{\text{п}} = 2B_0$ . Энергия магнитного поля в зазоре (в единице объема) слева от проводника  $W_{\text{ол}} = B_{\text{л}}^2/2\mu_0$ , справа  $W_{\text{оп}} = B_{\text{п}}^2/2\mu_0$ . Приращение энергии при повороте якоря по направлению движения часовой стрелки на угол  $\Delta\alpha$

$$\Delta W = \left( \frac{B_{\text{л}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{\text{п}}^2}{2\mu_0} \right) 2l\delta \frac{D}{2} \Delta\alpha = \left( \frac{I}{\delta} B_0 \right) l\delta D \Delta\alpha = IB_0 l D \Delta\alpha.$$

Изменением энергии в стали при повороте якоря на угол  $\Delta\alpha$  можно пренебречь, так как  $\mu_r \gg 1$ .

Вращающий момент, действующий на якорь,  $M = \Delta W/\Delta\alpha = IB_0 l D = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Силу, действующую на провод в пазу, можно оценить, исходя из следующих соображений. Если паз глубокий, то можно считать, что напряженность магнитного поля в нем приблизительно равна напряженности поля в стали, а индукция в  $\mu_r$  раз меньше, чем в стали. Следовательно, сила, действующая на провод в пазу,

$$F = \frac{B_0}{\mu_r} l I = 0,05 \text{ Н},$$

а момент этой силы

$$M_0 = Fd = \frac{B_0 l I}{\mu_r} d = M \frac{d}{D\mu_r} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, момент, действующий на провода в пазу, примерно в  $\mu_r$  раз меньше момента, действующего на якорь.

# Глава восемнадцатая

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

### Введение к гл. 18

#### Метод функций комплексного переменного

Действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного  $w(z) = \varphi(x, y) + j\psi(x, y)$ , где  $z = x + jy$ , удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Естественно, что при этом и функция  $w$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому каждая из функций  $\varphi$  и  $\psi$  может представлять потенциал плоскопараллельного поля, тогда другая представляет функцию потока, при этом  $w$  — функция комплексного потенциала.

Уравнение семейства эквипотенциальных линий в плоскости  $x, y$

$$\varphi = \text{const} \quad (\text{или} \quad \psi = \text{const}).$$

Уравнение семейства линий поля (силовых) в плоскости  $x, y$

$$\psi = \text{const} \quad (\text{или} \quad \varphi = \text{const}).$$

Составляющие напряженности поля

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (18.1)$$

Комплексная напряженность поля  $\underline{E} = E_x + jE_y$  может быть определена и непосредственно по функции комплексного потенциала  $w$ :

$$\underline{E} = -d^*w/dz. \quad (18.2)$$

Поток вектора  $\underline{E}$  между линиями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на единицу длины системы (в направлении, перпендикулярном плоскости  $x, y$ ) определяется как разность функций потока:

$$\Phi = \psi_1 - \psi_2.$$

Например, поле заряженной с линейной плотностью  $\tau$  оси в вакууме, проходящей через начало координат, описывается функцией комплексного потенциала

$$\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln z + C, \quad (18.3)$$

где  $\underline{C} = C_1 + jC_2$  — комплексная постоянная;  $\underline{z} = x + jy = re^{j\alpha}$ , при этом

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_1}{r}; \quad \psi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \alpha + C_2.$$

### Метод интегральных уравнений

Пусть на некоторой поверхности  $S$  распределен заряд с плотностью  $q_s$ . Потенциал электрического поля элементарного заряда  $q_s dS$ , рассматриваемого как точечный,

$$d\varphi = q_s dS / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R. \quad (18.4)$$

Потенциал поля заряженной поверхности

$$\varphi = \int \frac{q_s dS}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}; \quad (18.5)$$

здесь  $R$  — расстояние между точечным зарядом или элементом  $dS$  и точкой наблюдения, в которой определяется потенциал.

Если разность потенциалов каких-либо точек известна и равна  $U$ , то, совмещая точки наблюдения с этими точками, получим уравнение

$$4\pi\epsilon_r\epsilon_0 U = \int \frac{q_s dS}{R}, \quad (18.6)$$

в котором неизвестная функция  $q_s$  стоит под знаком интеграла — интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Аналитические методы решения таких уравнений неизвестны. Для их решения применяются приближенные методы. Один из них — метод алгебраизации.

## 18.1. Применение функций комплексного переменного

Этот параграф содержит задачи на расчет плоскопараллельных электрических полей, для решения которых целесообразно применение понятия комплексного потенциала, при этом рекомендуется решать более сложные задачи, применяя полученные ранее решения для более простых задач. Построение картин поля помогает лучше понять суть метода и анализировать структуру полей при заданном расположении электродов.

**18.1.** Определить, поля каких электродов описываются комплексными потенциалами вида: а)  $w = jA \ln \underline{z} + \underline{C}$ ; б)  $w = A \ln \underline{z} + \underline{C}$ , где  $\underline{C}$  — комплексная постоянная.

Получить выражения для функций потенциала  $\varphi$  и потока  $\psi$ . Найти постоянные  $A$ .

**18.2(P).** Считая известным выражение для комплексного потенциала заряженной с линейной плотностью  $\tau$  оси, расположенной в начале координат,  $\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln z + C$ , найти:

1) комплексный потенциал, описывающий поле двухпроводной линии (рис. 18.2); 2) функцию потенциала и функцию потока; 3) уравнения эквипотенциалей и линий поля; 4) часть полного потока вектора напряженности, проходящую через отрезок оси  $y$  (на единицу длины двухпроводной линии) от  $y = 0$  до  $y = a$ .

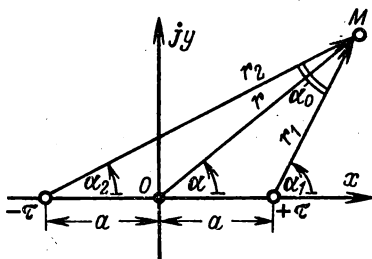


Рис. 18.2

**Решение.** 1) Комплексный потенциал положительно заряженной оси, проходящей через точку  $\underline{z} = x + jy = a$ , равен  $\underline{w}_+ = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(z - a) + C_1$ , а отрицательно заряженной оси, проходящей через точку  $\underline{z} = -a$ , соответственно  $\underline{w}_- = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(z + a) + C_2$ . Комплексный потенциал поля двух осей

$$\underline{w} = \underline{w}_+ + \underline{w}_- = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + a}{z - a} + C_3.$$

2) Положив при  $|\underline{z}| = r \rightarrow \infty$  комплексный потенциал равным нулю, получим  $C_3 = 0$  и

$$\underline{w} = \varphi + j\psi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + a}{z - a} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_2 = r_2 e^{j\alpha_2}$  и  $z_1 = r_1 e^{j\alpha_1}$  (рис. 18.2).

Следовательно, функция потенциала  $\varphi = \operatorname{Re} \underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

и функция потока  $\psi = \operatorname{Im} \underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \alpha_0$ .

3) Уравнение семейства эквипотенциалей

$$r_2/r_1 = \text{const} = K.$$

Это семейство окружностей с центрами на оси  $x$ .

Уравнение семейства линий поля

$$\psi = \text{const} \text{ или } \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0 = \text{const}.$$

Это семейство окружностей, проходящих через точки  $\underline{z} = a$  и  $\underline{z} = -a$ , с центрами на оси  $jy$ .

4) Значение функции потока для линии поля, проходящей через точку  $M$  (рис. 18.2),

$$\psi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Поток вектора напряженности через отрезок оси  $y$  (на единицу длины двухпроводной линии) от  $y = 0$  до  $y = a$

$$\psi(y=a) - \psi(y=0) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \operatorname{arctg} \frac{2a^2}{a^2 - a^2} - \operatorname{arctg} \frac{0}{a^2} \right) = \frac{\tau}{4\epsilon_0}.$$

Это составляет  $1/4$  часть полного потока.

**18.3(P).** Найти выражение для комплексного потенциала поля, создаваемого  $n$  параллельными заряженными осями (нити сетки электронной лампы) с зарядами  $\tau$  на единицу длины (рис. 18.3). Оси проходят через точки окружности радиусом  $a$ ,

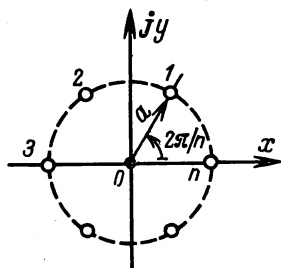


Рис. 18.3

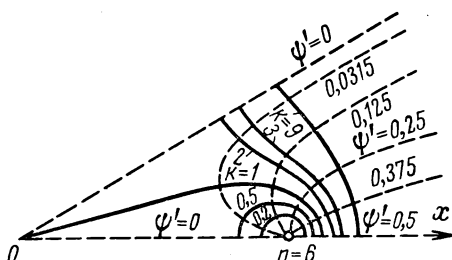


Рис. 18.3P

лежащей в нормальной к ним плоскости, и расположены на равных расстояниях одна от другой и центра окружности. Подобрать постоянную так, чтобы потенциал в центре окружности равнялся нулю. Получить уравнения эквипотенциалей и линий напряженности поля. Построить несколько эквипотенциалей и линий поля при  $n = 6$ .

**Решение.** Комплексный потенциал оси, расположенной в начале координат (см. задачу 18.1),

$$\underline{w}_1 = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \underline{z} + \underline{C}_1.$$

Комплексный потенциал оси, расположенной в точке  $\underline{z}_1 = a \angle 2\pi m/n$ ,

$$\underline{w}_2 = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( z - ae^{j \frac{2\pi}{n} m} \right) + \underline{C}_2,$$

где  $n$  — общее число осей;  $m$  — порядковый номер оси.

Комплексный потенциал всех осей

$$\underline{w} = - \sum_{m=1}^n \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \underline{z} - a e^{j \frac{2\pi}{n} m} \right) + \underline{C} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln (\underline{z}^n - a^n) + \underline{C}.$$

Так как при  $\underline{z} = 0$  должно быть  $\underline{w} = 0$ , то

$$\underline{C} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln (-a^n),$$

при этом

$$\underline{w} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\underline{z}^n - a^n}{-a^n} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( 1 - \frac{\underline{z}^n}{a^n} \right).$$

Записав  $\underline{z}$  для произвольной точки поля в виде  $\underline{z} = r \angle \alpha$ , получим:

$$\underline{w} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln [1 - (r/a)^n \cdot e^{jn\alpha}].$$

Функция потенциала

$$\varphi = \operatorname{Re} \underline{w} = - \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ 1 + \left( \frac{r}{a} \right)^{2n} - 2 (r/a)^n \cos n\alpha \right].$$

Функция потока

$$\psi = \operatorname{Im} \underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\sin n\alpha}{(a/r)^n - \cos n\alpha}.$$

Уравнение семейства эквипотенциалей ( $\varphi = \text{const}$ )

$$\cos n\alpha = \frac{1 - K + (r/a)^{2n}}{2 (r/a)^n} \quad \text{при} \quad K = e^{-\frac{4\pi\epsilon_0}{\tau} \varphi} = \text{const.}$$

Уравнение семейства силовых линий ( $\psi = \text{const}$ )

$$\left( \frac{r}{a} \right)^n = \frac{1}{(\sin n\alpha)/C + \cos n\alpha} \quad \text{при} \quad C = \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi\epsilon_0}{\tau} \psi \right).$$

На рис. 18.3Р, где  $\psi' = \epsilon_0 \psi / \tau$ , показаны некоторые эквипотенциалы и линии поля (пунктир) при  $n = 6$ .

**18.4.** На цилиндрической поверхности радиусом  $a$  на равных расстояниях друг от друга расположены  $n$  положительно и  $n$  отрицательно заряженных проводов (рис. 18.4). Радиус провода  $r_0$  намного меньше расстояния между проводами.

Найти: 1) комплексный потенциал электрического поля, функцию потока и функцию потенциала; 2) емкость системы на единицу длины; 3) уравнения семейства эквипотенциалей и семейства линий поля.



**18.5.** На цилиндрической поверхности радиусом  $a$  на равных расстояниях друг от друга расположено  $n$  положительно заряженных проводов (рис. 18.5). Отрицательно заряженные провода (их тоже  $n$ ) расположены на цилиндрической поверхности радиусом  $b$  и смещены относительно положительных на угол  $\beta$ . Радиус провода  $r_0$  намного меньше расстояния между проводами.

Найти: 1) комплексный потенциал электрического поля, функцию потенциала и функцию потока; 2) емкость системы на единицу длины.

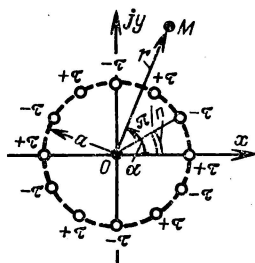


Рис. 18.4

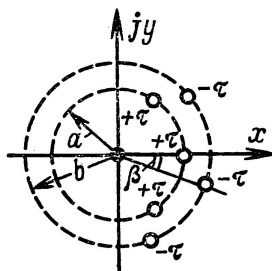


Рис. 18.5

**18.6(P).** 1) Найти комплексный потенциал электрического поля, создаваемого центральным положительно заряженным  $+n\tau$  проводом и параллельными отрицательно заряженными  $-\tau$  проводами, которые расположены на равных расстояниях

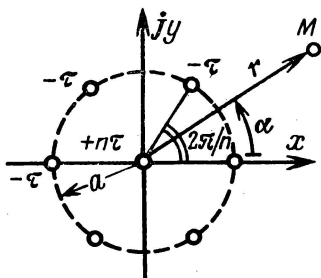


Рис. 18.6

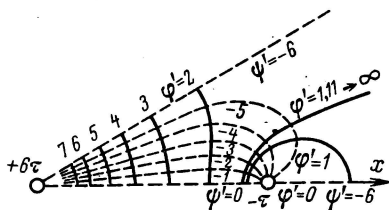


Рис. 18.6P

друг от друга и симметрично относительно центрального провода (рис. 18.6). Напряжение между центральным проводом и остальными (имеющими одинаковые потенциалы) равно  $U$ . Радиус каждого провода  $r_0$  намного меньше расстояния между проводами.

2) Определить емкость системы на единицу длины и сравнить ее с емкостью цилиндрического конденсатора, образованного тем же центральным проводом и оболочкой радиусом  $a$  при  $r_0/a = 1/40$  и  $n = 6$ .

3) Найти уравнения эквипотенциалей и линий поля; построить их при  $r_0/a = 1/40$  и  $n = 6$ .

**Решение.** 1) Комплексный потенциал можно представить как сумму потенциала  $\underline{w}_1$ , обусловленного зарядом  $+n\tau$  на центральном проводе, и потенциала  $\underline{w}_2$ , обусловленного зарядами  $-\tau$  на остальных проводах (см. решение задачи 18.3):

$$\begin{aligned}\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 &= -\frac{n\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \underline{z} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln (\underline{z}^n - a^n) + \underline{C}_1 = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\underline{z}^n - a^n}{\underline{z}^n} \underline{C}.\end{aligned}$$

Постоянную  $\underline{C}$  легко определить, если задаться потенциалом, например, периферийных проводов, равным нулю. Тогда на поверхности этих проводов, т.е. при  $\underline{z} = ae^{j\frac{2\pi}{n}m} + r_0e^{j\beta}$  и  $r_0 \ll a$ , можно считать:

$$\underline{z}^n = a^n \left[ 1 + n \frac{r_0}{a} e^{j\left(\beta - \frac{2\pi}{n}m\right)} \right]$$

и

$$\begin{aligned}\varphi = \operatorname{Re} \underline{w} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Re} \ln \left[ n\underline{C} \frac{r_0}{a} e^{j\left(\beta - \frac{2\pi}{n}m\right)} \right] = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( n\underline{C} \frac{r_0}{a} \right) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\underline{C} = a/nr_0$  и

$$\underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\underline{z}^n - a^n}{\underline{z}^n} \frac{a}{nr_0} \right).$$

Комплексную переменную  $\underline{z}$  для точки  $M$  поля (рис. 18.6) представим в виде  $\underline{z} = re^{j\alpha}$ , тогда

$$\underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{a}{nr_0} \left( 1 - \frac{a^n}{r^n} e^{-jn\alpha} \right) \right],$$

откуда определим функцию потенциала:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{a^2}{n^2 r_0^2} \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} + 1 - 2 \left( \frac{a}{r} \right)^n \cos n\alpha \right] \right\}$$

и функцию потока:

$$\psi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\sin n\alpha}{(r/a)^n - \cos n\alpha}.$$

2) Потенциал центрального проводника ( $r = r_0$ ) при  $r_0 \ll a$

$$\varphi_+ = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{a^2}{n^2 r_0^2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{2n} \right] = \frac{\tau n}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{a}{r_0} + \frac{1}{n} \ln \frac{a}{nr_0} \right].$$

Емкость системы на единицу длины при  $r_0/a = 1/40$  и  $n = 6$

$$C_0 = \frac{n\tau}{U} = \frac{n\tau}{\varphi_+} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a}{r_0} + \frac{1}{n} \ln \frac{a}{nr_0}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{3,37}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(a/r_0)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{3,69}$$

и

$$\frac{C}{C_0} = 1 + \frac{1}{n} \frac{\ln(a/nr_0)}{\ln(a/r_0)} = 1 + \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{\ln n}{\ln(a/r_0)} \right] = 1,086.$$

Отметим, что при  $n = a/r_0$  емкость рассматриваемой системы равна емкости цилиндрического конденсатора с радиусами  $r_0$  и  $a$ .

3) Уравнение семейства эквипотенциалей ( $\varphi = \text{const}$ )

$$\cos n\alpha = \frac{1 + (1 - K^2)(r/a)^{2n}}{2(r/a)^n} \text{ при } K = (a/r_0) \left[ \left( n+1 \right)^{\frac{\varphi}{U}} - 1 \right] n^{\left( 1 - \frac{\varphi}{U} \right)}.$$

Уравнения семейства линий поля ( $\psi = \text{const}$ )

$$(r/a)^n = \cos n\alpha + (\sin n\alpha)/N \text{ при } N = \operatorname{tg} \frac{2\pi\epsilon_0}{\tau} \psi.$$

На рис. 18.6Р, где  $\varphi' = 14\varphi/U$  и  $\psi' = 12\epsilon_0\psi/\tau$ , представлено семейство эквипотенциалей и линий поля (пунктир).

**18.7(Р).** На оси проводящей трубки радиусом  $b$  расположен провод радиусом  $r_1$  (рис. 18.7). Симметрично на расстоянии  $a$  от оси расположены  $n$  проводов радиусом  $r_0$ . Радиусы проводов намного меньше расстояний между проводами. Линейная плотность заряда центрального провода  $\tau_1$ , каждого из периферийных проводов  $\tau$ .

Определить: 1) комплексный потенциал электрического поля внутри трубки, считая потенциал трубки равным нулю; 2) потенциал центрального провода и потенциалы периферий-

ных проводов; 3) потенциальные коэффициенты и частичные емкости системы при  $n = 6$ ;  $b/a = e$ ;  $a/r_1 = 20$ ;  $r_0 = r_1$ ; 4) как изменится решение задачи, если центральный провод с зарядом  $\tau_1$  отсутствует.

Решение е. 1) Для решения задачи можно применить метод зеркальных изображений, тогда поле внутри трубки будет определяться всеми реальными проводами, расположенными внутри нее, и фиктивными проводами (изображениями проводов), расположенными вне трубки на расстоянии  $b^2/a$  от оси на продолжении радиусов, проведенных из начала координат через эти провода. Суммарный комплексный потенциал (см. решение задачи 18.3)

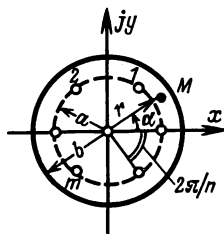


Рис. 18.7

$$\begin{aligned} \underline{w} &= -\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \underline{z} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln (\underline{z}^n - a^n) + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \underline{z}^n - \frac{b^{2n}}{a^n} \right) + \underline{C}_1 = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{(z/a)^n - (b/a)^{2n}}{\underline{z}^{\tau_1/\tau} [(z/a)^n - 1]} \underline{C} \right\}. \end{aligned}$$

Постоянную  $\underline{C}$  определим из условия, что при  $\underline{z} = be^{j\alpha}$  потенциал равен нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Re} \ln \left\{ \frac{-(b/a)^n e^{jn\alpha} [(b/a)^n e^{-jn\alpha} - 1] \underline{C}}{b^{\tau_1/\tau} e^{j\alpha\tau_1/\tau} [(b/a)^n e^{jn\alpha} - 1]} \right\} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^n \frac{|\underline{C}|}{b^{\tau_1/\tau}} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$|\underline{C}| = a^n b^{(\tau_1/\tau - n)}.$$

Аргумент постоянной  $\underline{C}$  определяет только начало отсчета функции потока и не имеет значения в рассматриваемой задаче, при этом

$$\underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(z/b)^n - (b/a)^n}{[(z/a)^n - 1] (z/b)^{\tau_1/\tau}}.$$

2) На поверхности центрального провода, т. е. при  $\underline{z} = r_1 e^{j\alpha}$  ( $r_1 \ll a$  и  $r_1 \ll b$ ),

$$w_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^n \left( \frac{r_1}{b} e^{j\alpha} \right)^{-\tau_1/\tau} \right],$$

откуда потенциал центрального провода

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^n \left( \frac{b}{r_1} \right)^{\tau_1/\tau} \right].$$

На поверхности периферийного провода  $\underline{z} = ae^{j2\pi m/n} + r_0 e^{j\beta}$ , где  $m$  — порядковый номер провода.

Так как  $r_0 \ll a$ , то

$$\underline{z}^n = a^n \left[ 1 + n \frac{r_0}{a} e^{j(\beta - 2\pi m/n)} \right]$$

и

$$\underline{w}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(a/b)^n - (b/a)^n}{(a/b)^{\tau_1/\tau} n^{r_0/a}} e^{j \left( \frac{2\pi}{n} m - \beta - \frac{2\pi}{n} m \frac{\tau_1}{\tau} \right)} \right].$$

Потенциал периферийного провода

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(b/a)^n - (a/b)^n}{n \frac{r_0}{a}} \left( \frac{b}{a} \right)^{\tau_1/\tau} \right].$$

3) Представив выражение для  $\varphi_1$  в виде

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{b}{r_1} \right) + \frac{\tau r}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{b}{a} \right),$$

найдем потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/r_1) \text{ и } \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a).$$

Аналогично из выражения для  $\varphi_2$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a) = \alpha_{12};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 n} \ln \left[ \frac{(b/a)^n - (a/b)^n}{nr_0/a} \right].$$

По известным потенциальным коэффициентам легко определяются частичные емкости:

$$C_{11} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta}; \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad C_{22} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta},$$

где  $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$ .

При указанных в условии параметрах

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} 4; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} 1,2; \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} 1;$$

$$C_{11} = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{19}; \quad C_{22} = 2\pi\epsilon_0 \frac{15}{19}; \quad C_{12} = 2\pi\epsilon_0 \frac{5}{19}.$$

4) При отсутствии центрального провода во всех формулах следует положить  $r_1 = 0$  и  $\tau_1 = 0$ , при этом емкость между остальными проводами и трубой  $C = C_{22} = 1/\alpha_{22}$ .

**18.8(P).** Найти напряженность электрического поля задачи 18.7. Построить зависимости напряженности электрического поля: 1) от радиуса  $r$  при  $\alpha = 2\pi m/n$  (рис. 18.7, в плоскости, проходящей через оси центрального и периферийного проводов);

2) от радиуса при  $\alpha = \frac{2\pi}{n} \left( m + \frac{1}{2} \right)$

(рис. 18.7, в меридианной плоскости, делящей пополам угол между соседними периферийными проводами); 3) от угла  $\alpha$  при  $r = b$  (на поверхности проводящей трубы).

Расчет выполнить для двух случаев: А)  $n\tau = 2\tau_1$  и Б)  $n\tau = -2\tau_1$ .

**Решение.** Комплексное выражение напряженности поля по (18.2)

$$\underline{E} = - \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{\tau n}{2\pi\epsilon_0 \bar{z}} \left\{ \frac{\tau_1}{\tau n} - \frac{\bar{z}^n (b^{2n} - a^{2n})}{(\bar{z}^n - a^n) [(a\bar{z})^n - b^{2n}]} \right\}.$$

1) При  $\bar{z} = r \angle 2\pi m/n$

$$\underline{E} = \frac{\tau n}{2\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\tau_1}{\tau n} + \frac{(b^{2n} - a^{2n}) r^n}{[b^{2n} - (ar)^n] (r^n - a^n)} \right\} e^{j2\pi m/n} = E_r e^{j2\pi m/n},$$

т. е. вектор напряженности электрического поля направлен по радиусу. Для данных задачи

$$E_r = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 \pm \frac{2}{1 - (a/r)^n} \right],$$

где знак «+» соответствует случаю А, а знак «-» — случаю Б. Эти зависимости представлены на рис. 18.8Р, а, где  $N = 2\pi\epsilon_0/\tau n$ .

2) При  $\bar{z} = r e^{j \frac{2\pi}{n} (m + 1/2)}$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{\tau n}{2\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\tau_1}{\tau n} + \frac{(b^{2n} - a^{2n}) r^n}{[b^{2n} + (ar)^n] (r^n + a^n)} \right\} e^{j \frac{2\pi}{n} (m + 1/2)} = \\ &= E_r e^{j \frac{2\pi}{n} (m + 1/2)} \end{aligned}$$

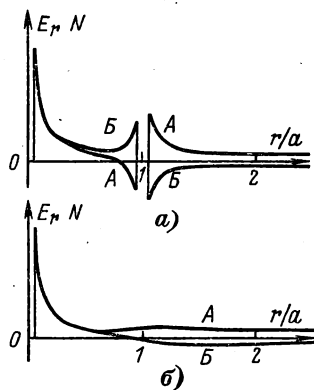


Рис. 18.8Р

Вектор напряженности направлен по радиусу. Для данных задачи

$$\underline{E} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 \pm \frac{2}{1 + (a/r)^6} \right].$$

Смысл знаков такой же, как и в первом случае. Эти зависимости представлены на рис. 18.8Р, б, где  $N = 2\pi\epsilon_0/\tau_1$ .

3) При  $z = be^{j\alpha}$

$$\underline{E} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 b} \left[ \frac{\tau_1}{\tau_1} + \frac{b^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} + a^{2n} - 2b^n a^n \cos n\alpha} \right] e^{j\alpha} = E e^{j\alpha}.$$

Для данных задачи

$$E_r \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0 b} (\tau_1 + \tau_1) = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 b} (1 \pm 2),$$

т.е. напряженность поля практически не зависит от угла  $\alpha$ .

**18.9.** Комплексный потенциал электрического поля  $w = jA \arccos(z/a) + C$ , где  $z = x + jy$ ;  $C = C_1 + jC_2$  — комплексная постоянная;  $A$  и  $a$  — вещественные постоянные.

Найти уравнения линий поля и эквипотенциалей. Принять потенциал точки  $x = 5a$ ,  $y = 0$  равным нулю и нулевой линией поля — линию, проходящую через точку  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Определить постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

**18.10.** Внутри проводящей трубки диаметром  $2R$  симметрично расположена лента шириной  $2a$  и малой толщины. Ширина ленты намного меньше диаметра трубки.

Пользуясь ответом к задаче 18.9, определить постоянную  $A$  и емкость системы на единицу длины. Найти распределение поверхностной плотности заряда на ленте. Определить, цилиндром какого радиуса следует заменить ленту, чтобы емкость осталась такой же.

**18.11.** Пользуясь ответом к задаче 18.9, определить емкость конденсатора на единицу длины, образованного двумя конфокальными эллиптическими цилиндрами при фокусном расстоянии  $2a$ , большем диаметре внутреннего цилиндра  $2a_1$  и большем диаметре внешнего цилиндра  $2a_2$ .

**18.12(Р).** Считая известным выражение для комплексного потенциала заряженной оси [см. задачу 18.2(Р)], найти комплексный потенциал, описывающий электрическое поле бесконечного ряда одноименно заряженных осей, которые расположены на оси  $x$  на равных расстояниях  $b$  друг от друга (рис. 18.12). Определить функцию потенциала и функцию потока. Найти уравнения семейств эквипотенциалей и линий поля. Построить несколько эквипотенциалей и линий поля.

Решение. Комплексный потенциал заряженной оси, проходящей через точку  $\underline{z} = \pm mb$ ,

$$\underline{w}_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(\underline{z} \mp mb) + \underline{C}.$$

Комплексная напряженность поля оси по (18.2)

$$\underline{E}_1 = \tau/2\pi\epsilon_0 (\underline{z}^* \mp mb).$$

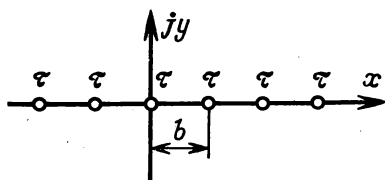


Рис. 18.12

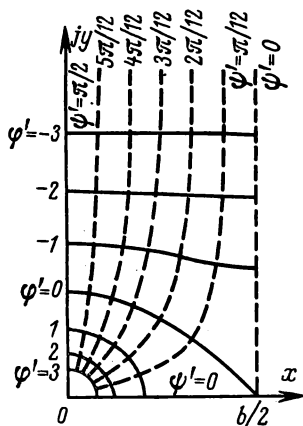


Рис. 18.12P →

Комплексная напряженность поля бесконечного ряда осей

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \underline{E}_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\underline{z}^*} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\underline{z}^* - mb} + \frac{1}{\underline{z}^* + mb} \right) \right] = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\underline{z}^*} + 2\underline{z}^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{z}^{*2} - m^2 b^2} \right]. \end{aligned}$$

Обозначив  $\underline{z}_1 = \pi \underline{z}/b$ , получим:

$$\underline{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{b} \left[ \frac{1}{\underline{z}_1^*} - 2\underline{z}_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \pi^2 - \underline{z}_1^{*2}} \right].$$

Выражение в скобках есть разложенный в ряд  $\text{ctg}^* \underline{z}_1$ . Таким образом,

$$\underline{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{b} \text{ctg}^* \underline{z}_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{b} \text{ctg} \frac{\pi}{b} \underline{z}^*.$$



Комплексный потенциал бесконечного ряда осей по (18.2)

$$\begin{aligned} w &= - \int \underline{E}^* d\underline{z} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{b} \underline{z} \right) d \left( \frac{\pi}{b} \underline{z} \right) = \\ &= - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \sin \frac{\pi}{b} \underline{z} \right). \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования здесь отброшена, что соответствует выбору точек нулевого потенциала:  $\underline{z} = b/2 + mb$ .

Представим  $\sin^2 \left( \frac{\pi}{b} \underline{z} \right)$  в виде

$$\begin{aligned} \sin^2 \left( \frac{\pi}{b} \underline{z} \right) &= \sin^2 \left( \frac{\pi}{b} x + j \frac{\pi}{b} y \right) = \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} 2 \frac{\pi y}{b} - \cos 2 \frac{\pi x}{b} \right) \right] e^{j2\gamma}, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{th} \frac{\pi y}{b} / \operatorname{tg} \frac{\pi x}{b}$ , при этом функции потенциала и потока

$$\begin{aligned} \varphi &= - \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} 2 \frac{\pi y}{b} - \cos 2 \frac{\pi x}{b} \right) \right]; \\ \psi &= - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} (\pi y/b)}{\operatorname{tg} (\pi x/b)}. \end{aligned}$$

Уравнение семейства эквипотенциалей ( $\varphi = \operatorname{const}$ )

$$\operatorname{ch} \frac{2\pi y}{b} = \cos \frac{2\pi x}{b} + 2K \quad \text{при} \quad K = e^{-4\pi\epsilon_0\varphi/\tau} = e^{-\varphi'}.$$

Уравнение семейства линий поля ( $\psi = \operatorname{const}$ )

$$\operatorname{th} \frac{\pi y}{b} = C \operatorname{tg} \frac{\pi x}{b} \quad \text{при} \quad C = -\operatorname{tg} \frac{2\pi\epsilon_0\psi}{\tau} = -\operatorname{tg} \psi'.$$

На рис. 18.12Р построены линии поля (пунктир) и эквипотенциали. Отметим, что вдоль оси  $y'$  уже на расстоянии, меньшем, чем шаг ряда  $b$ , поле практически однородно.

**18.13(Р).** Поле бесконечного ряда одноименно заряженных осей, лежащих в одной плоскости (см. задачу 18.12), можно рассматривать как предельный случай поля осей, расположенных на поверхности цилиндра (см. задачу 18.3), если радиус цилиндра  $r$  стремится к бесконечности.

1) Что нужно изменить в задаче 18.3, чтобы предельным переходом  $r \rightarrow \infty$  непосредственно получить решение задачи 18.12? Осуществить предельный переход.

2) Решение какой задачи получится, если предельный переход применить к задаче 18.3? Осуществить предельный переход.

Решение. 1) Поле задачи 18.12 симметрично относительно оси  $x$ : одна половина всего потока идет в сторону положительной полуоси  $y$ , другая половина — в сторону отрицательной полуоси  $y$ . В задаче 18.3 аналогичной симметрии относительно окружности радиусом  $a$  нет: через окружность радиусом, большим  $a$ , проходит весь поток, а через окружность радиусом, меньшим  $a$ , общий поток равен нулю. Эта асимметрия, естественно, останется и при предельном переходе. Чтобы после предельного перехода получилось решение задачи 18.12, в задаче 18.3 следует половину общего потока направить внутрь окружности радиусом  $a$ , т. е. в центре окружности поместить ось, несущую заряд противоположного знака, численно равный половине общего заряда всех остальных осей, при этом комплексный потенциал, обусловленный всеми зарядами ( $n$  — число осей,  $m$  — номер оси),

$$\begin{aligned} \underline{w} &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(\underline{z}^n - a^n) + \frac{n\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \underline{z} + \underline{C}_1 = \\ &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\underline{z}^n - a^n}{\underline{z}^{n/2}} \underline{C}. \end{aligned}$$

Пусть потенциал равен нулю в точках  $\underline{z} = ae^{j\frac{2\pi}{n}(m+1/2)}$ , т. е. на окружности радиусом  $a$  посередине между осями. В этих точках  $\underline{z}^n = -a^n$  и получается  $\underline{C} = (-a^n)^{1/2}/(-2a^n)$ .

Комплексный потенциал

$$\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(z/a)^n - 1}{-2j(z/a)^{n/2}} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(z/a)^{n/2} - (z/a)^{-n/2}}{-2j}.$$

Введем новые переменные  $\underline{z}_1 = \underline{z} - a$  и  $\underline{z}_2 = j\underline{z}_1$ , при этом

$$(z/a)^{n/2} = [(\underline{z}_1 + a)/a]^{n/2} = (1 - j\underline{z}_2/a)^{n/2}.$$

Если расстояния по окружности радиусом  $a$  между соседними зарядами одинаковы и равны  $b$ , то  $2\pi a = nb$  и  $(z/a)^{n/2} = (1 - j2\pi\underline{z}_2/nb)^{n/2} = (1 + 2\underline{z}_3/n)^{n/2}$ , где  $\underline{z}_3 = -j\underline{z}_2\pi/b$ .

При неограниченном возрастании  $n$  выражение  $\left(1 + \frac{\underline{z}_3}{n/2}\right)^{n/2} \rightarrow e^{\underline{z}_3}$ .

Окончательное выражение для комплексного потенциала

$$\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \sin \frac{\pi}{b} \underline{z}_2 \right)$$

не отличается от полученного другим путем в задаче 18.12.

2) В задаче 18.3 было получено выражение для комплексного потенциала  $n$  заряженных осей, расположенных на окружности радиусом  $a$ :

$$\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^n \right].$$

Аналогично тому, как было получено выше,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{a} \right)^n \rightarrow e^{-j2\pi z_2/b} \text{ при } z_2 = x_2 + jy_2$$

и

$$\begin{aligned} \underline{w} &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 - e^{-j2\pi z_2/b}) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ e^{-j\pi z_2/b} 2j \sin \frac{\pi}{b} z_2 \right] = \\ &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \left( \sin \frac{\pi}{b} z_2 \right) + \left[ \ln 2 - j \left( \frac{\pi}{b} z_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2. \end{aligned}$$

Первое слагаемое соответствует полю, рассмотренному выше. Второе слагаемое — это однородное поле, комплексная напряженность которого по (18.2)

$$\underline{E}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} j \frac{\pi}{b} = j \frac{\tau}{2\epsilon_0 b} = jE_y,$$

т.е. поле направлено вдоль оси  $y_2$  (рис. 18.13Р). Таким образом, общее поле создается заряженными осями  $+\tau$ , расположенными на оси  $x_2$  на расстоянии  $b$  друг от друга, и заряженной плоскостью, параллельной оси  $x_2$  и несущей заряд  $-\tau/b$  на единицу длины вдоль оси  $x_2$ . Плоскость находится на некотором расстоянии  $h$  от оси  $x_2$ , большем, чем  $b$ , на котором поле осей практически однородно (см. решение задачи 18.12).

Если  $y_2 < -b$ , то  $|e^{-j2\pi z_2/b}| = e^{2\pi y_2/b} < e^{-2\pi} \ll 1$  и можно считать  $\underline{w} = 0$ , т.е. потенциал всех точек этого пространства ( $y_2 < -b$ ) равен нулю — поле отсутствует.

Если  $y_2 = h > b$ , то  $|e^{-j2\pi z_2/b}| = e^{2\pi y_2/b} > e^{2\pi} \gg 1$ , при этом

$$\underline{w} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(-e^{-j2\pi z_2/b}) = \frac{\tau}{b\epsilon_0} [-h + j(x_2 + b/2)]$$

и потенциал заряженной плоскости

$$\varphi_- = -\tau h / b\epsilon_0.$$

Если оси заменить тонкими проводниками радиусом  $r_0$  ( $r_0 \ll b$ ), то при  $z_2 = mb + r_0 e^{j\beta}$  потенциал

$$\varphi_+ = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Re} \ln(1 - e^{-j2\pi z_2/b}) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{2\pi r_0}.$$

Напряжение между проводами и плоскостью

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\tau}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{2\pi r_0} + \frac{h}{b} \right).$$

Емкость системы, приходящаяся на единицу длины вдоль проводов и на ширину  $b$  вдоль оси  $x_2$ ,

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\epsilon_0}{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{2\pi r_0} + \frac{h}{b}}.$$

Это выражение для емкости можно получить и предельным переходом из формулы (п. 4) решения задачи 18.7.

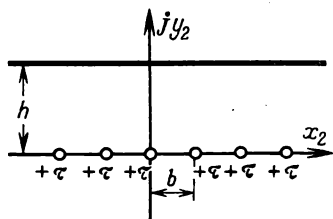


Рис. 18.13Р

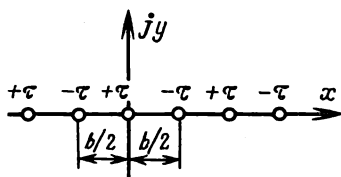


Рис. 18.14

**18.14(Р).** Считая известным выражение для комплексного потенциала бесконечного ряда одноименно заряженных осей, расположенных на оси  $x$  на равных расстояниях  $b$  друг от друга (см. задачу 18.12), найти комплексный потенциал знакопеременного ряда заряженных тонких проводов радиусом  $r_0$  ( $r_0 \ll b$ ), расположенных на оси  $x$  на равных расстояниях  $b/2$  друг от друга (рис. 18.14).

Определить: 1) функцию потенциала и функцию потока; 2) емкость, приходящуюся на шаг  $b$  системы; 3) составить уравнения эквипотенциалей и линий поля.

Рекомендуется дополнительно получить комплексный потенциал рассматриваемой задачи предельным переходом в задаче 18.4.

**Решение.** Комплексный потенциал ряда положительно заряженных осей

$$w_+ = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \sin \frac{\pi}{b} z \right).$$

Ряд отрицательно заряженных осей сдвинут относительно ряда положительно заряженных осей на  $b/2$ , поэтому комплексный потенциал этого ряда

$$\underline{w}_- = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \sin \frac{\pi}{b} \left( \underline{z} + \frac{b}{2} \right) \right] = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \cos \frac{\pi}{b} \underline{z} \right).$$

Комплексный потенциал всех осей

$$\underline{w} = \underline{w}_+ + \underline{w}_- = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} \underline{z} \right).$$

1) Отделив действительную часть  $\underline{w}$  от мнимой, получим функции потенциала и потока:

$$\varphi = - \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\operatorname{ch} 2 \frac{\pi}{b} y - \cos 2 \frac{\pi}{b} x}{\operatorname{ch} 2 \frac{\pi}{b} y + \cos 2 \frac{\pi}{b} x};$$

$$\psi = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} 2\pi \frac{y}{b}}{\sin 2\pi \frac{x}{b}}.$$

2) Потенциал положительно заряженных проводов получим, поместив точку наблюдения на поверхности тонких положительно заряженных проводов, т. е. положив  $\underline{z} = mb + r_0 e^{j\beta}$  ( $r_0 \ll b$ ), при этом

$$\varphi_+ = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{\pi r_0}.$$

Аналогично получим для отрицательно заряженных проводов при  $\underline{z} = mb + \frac{b}{2} + r_0 e^{j\beta}$  потенциал  $\varphi_- = -\varphi_+$ .

Напряжение между противоположно заряженными проводами

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = 2\varphi_+ = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{\pi r_0}.$$

Емкость, приходящаяся на шаг системы,

$$C_0 = \tau/U = \pi\epsilon_0 / \ln \frac{b}{\pi r_0}.$$

3) Уравнение эквипотенциалей ( $\varphi = \text{const}$ )

$$\operatorname{ch} 2\pi \frac{y}{b} = K \cos 2\pi \frac{x}{b} \quad \text{при} \quad K = \operatorname{cth} \frac{2\pi\epsilon_0 \varphi}{\tau}.$$

Уравнение линий поля ( $\psi = \text{const}$ )

$$\text{sh } 2\pi \frac{y}{b} = C \sin 2\pi \frac{x}{b} \text{ при } C = -\text{tg } \frac{2\pi \epsilon_0 \psi}{\tau}.$$

**18.15(Р).** Для прогрева плохо проводящего материала ( $\epsilon_{2r}$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ ) в нем уложены две системы проводов (+ и -), изображенных на рис. 18.15.

1) Определить комплексный потенциал и напряженность электрического поля в проводящем материале.

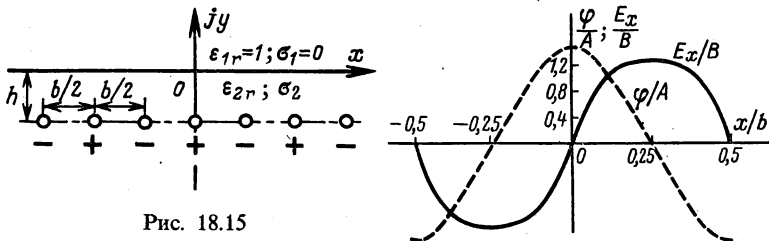


Рис. 18.15

2) Определить проводимость системы на единицу длины вдоль осей проводов и на расстояние  $b$  вдоль оси  $x$ .

3) Найти среднюю активную мощность, приходящуюся на квадратный метр граничной поверхности.

4) Построить зависимости потенциала и напряженности поля: а) от  $x$  при  $y = 0$ ; б) от  $y$  при  $x = 0$  и в) от  $y$  при  $x = \pm b/4$ .

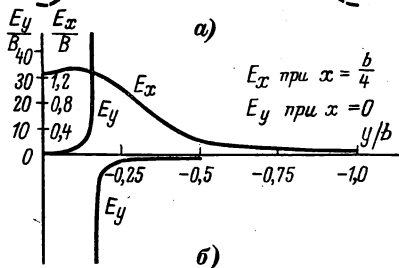


Рис. 18.15Р

Напряжение между положительными и отрицательными проводами  $u = 100 \sin 314t$  В. Радиус проводов  $r_0 = 4$  мм;  $b/2 = 60$  см;  $h = 20$  см;  $\epsilon_{2r} = 10$ ;  $\sigma_2 = 10^{-3}$  См/см.

**Решение.** Для решения задачи можно применить метод зеркальных изображений. Поле в проводящем материале ( $\epsilon_{2r}$ ,  $\sigma_2$ ) определяется при этом истинными токами  $\pm \vec{I}$  (на единицу длины вдоль осей проводов) и их изображениями  $\pm \vec{I}_1$ , причем

$$\pm \vec{I}_1 = \pm \vec{I} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} = \pm \vec{I} \frac{\sigma_2 + j\omega\epsilon_0\epsilon_{2r} - j\omega\epsilon_0}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_0\epsilon_{2r} + j\omega\epsilon_0}.$$

При указанных в условии параметрах практически  $\pm \vec{I}_1 = \pm \vec{I}$ .

1) Комплексный потенциал ряда истинных токов определяется так же, как и потенциал зарядов  $\pm \tau$  в задаче 18.14. Учитывая, что проводники расположены не на оси  $x$ , а сдвинуты на расстояние  $-h$  вдоль оси  $y$ , и применяя аналогию расчета полей токов и электростатических полей, запишем комплексный потенциал в виде

$$\underline{w}_1 = -\frac{i}{2\pi\sigma_2} \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} (\underline{z} + jh) \right].$$

Аналогично для изображений

$$\underline{w}_2 = -\frac{i}{2\pi\sigma_2} \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} (\underline{z} - jh) \right].$$

Комплексный потенциал во второй среде

$$\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = -\frac{i}{2\pi\sigma_2} \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} (\underline{z} + jh) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} (\underline{z} - jh) \right].$$

Напряженность электрического поля по (18.2)

$$\begin{aligned} \underline{\dot{E}} &= -\frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} = \frac{i}{\sigma_2 b} \left[ \frac{1}{\sin 2\pi (\underline{z} + jh)/b} + \frac{1}{\sin 2\pi (\underline{z} - jh)/b} \right] = \\ &= \frac{4i}{\sigma_2 b} \frac{\operatorname{ch} (2\pi h/b) \sin (2\pi \underline{z}/b)}{\operatorname{ch} (4\pi h/b) - \cos 4\pi (\underline{z}/b)}. \end{aligned}$$

2) Потенциал положительно заряженных проводов ( $\underline{z} = mb - jh + r_0 e^{j\beta}$ ) при  $r_0 \ll h$  и  $r_0 \ll b$

$$\begin{aligned} \phi_+ = \operatorname{Re} \underline{w} &= -\frac{i}{2\pi\sigma_2} \operatorname{Re} \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{b} r_0 e^{j\beta} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} (-2jh + r_0 e^{j\beta}) \right] = \\ &= \frac{i}{2\pi\sigma_2} \ln \left( \frac{b}{\pi r_0} \operatorname{cth} \frac{2\pi h}{b} \right). \end{aligned}$$

Для отрицательно заряженных проводов  $\left( \underline{z} = mb + \frac{b}{2} - jh + r_0 e^{j\beta} \right)$  потенциал  $\phi_- = -\phi_+$ . Напряжение между положительно и отрицательно заряженными проводами

$$\dot{U} = \phi_+ - \phi_- = 2\phi_+ = \frac{i}{\pi\sigma_2} \ln \left( \frac{b}{\pi r_0} \operatorname{cth} \frac{2\pi h}{b} \right).$$

Проводимость системы на единицу длины вдоль осей проводов и на ширину  $b$  вдоль оси  $x$

$$\underline{Y}_0 = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\pi \sigma_2}{\ln \left( \frac{b}{\pi r_0} \operatorname{cth} \frac{2\pi h}{b} \right)} \approx 0,0654 \text{ СМ/СМ} = G_0.$$

3) Ток, стекающий с 1 м провода,

$$I = \underline{U} \underline{Y}_0 \approx \underline{U} G_0 = \frac{100}{\sqrt{2}} 0,0654 = 4,61 \text{ А/м.}$$

Средняя активная мощность, приходящаяся на 1 м<sup>2</sup> поверхности,  $P_0 = UI/b = 271 \text{ Вт/м}^2$ .

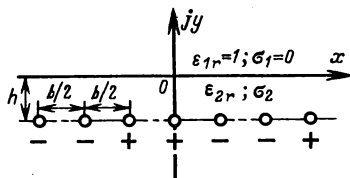


Рис. 18.16

4а) При  $y = 0$  (рис. 18.15Р, а)

$$\underline{\dot{E}} = \frac{4I}{\sigma_2 b} \frac{\operatorname{ch}(2\pi h/b) \cdot \sin(2\pi x/b)}{\operatorname{ch}(4\pi h/b) - \cos 4\pi(x/b)} = \dot{E}_x;$$

$$\varphi = \frac{I}{2\pi \sigma_2} \ln \frac{\operatorname{ch}(2\pi h/b) + \cos(2\pi x/b)}{\operatorname{ch}(2\pi h/b) - \cos(2\pi x/b)}.$$

4б) При  $x = 0$  (рис. 18.15Р, б)

$$\underline{\dot{E}} = j \frac{I}{\sigma_2 b} \left[ \frac{1}{\operatorname{sh} \left( 2\pi \frac{y+h}{b} \right)} + \frac{1}{\operatorname{sh} \left( 2\pi \frac{y-h}{b} \right)} \right] = j\dot{E}_y;$$

$$\dot{\varphi} = \frac{I}{2\pi \sigma_2} \ln \left[ \operatorname{cth} \left( \pi \frac{y+h}{b} \right) \operatorname{cth} \left( \pi \frac{y-h}{b} \right) \right].$$

4в) При  $x = \pm b/4$  (рис. 18.15Р, в)

$$\underline{\dot{E}} = \frac{I}{\sigma_2 b} \left[ \frac{1}{\pm \operatorname{ch} \left( 2\pi \frac{y+h}{b} \right)} + \frac{1}{\pm \operatorname{ch} \left( 2\pi \frac{y-h}{b} \right)} \right] = \dot{E}_x; \quad \dot{\varphi} = 0.$$

На рис. 18.15Р обозначено:  $A = I/2\pi \sigma_2$ ;  $B = I/\sigma_2 b$ .

**18.16.** Решить задачу 18.15 для системы проводов, изображенных на рис. 18.16.



## 18.2. Метод интегральных уравнений

**18.17(P).** Определить линейную плотность заряда  $\tau$  вдоль уединенного провода длиной  $l = 50$  мм и диаметром  $2a = 1$  мм. Потенциал провода относительно бесконечно удаленной точки равен  $U$ . Рассчитать емкость провода.

**Решение.** Поле вокруг проводника аксиально-симметричное и зависит от координат  $r$  и  $z$ , поэтому можно считать, что весь заряд находится на оси провода с линейной плотностью  $\tau(z)$ .

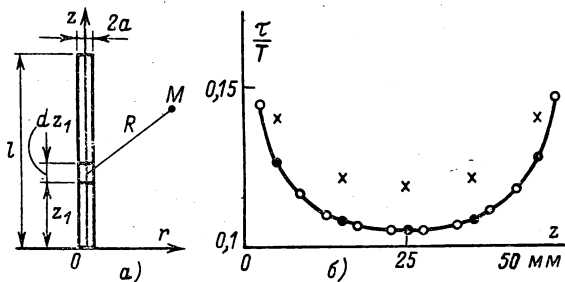


Рис. 18.17P

Выделим на оси провода — на расстоянии  $z_1$  от начала координат элемент  $dz_1$  (рис. 18.17P, а). Элементарный заряд этого элемента  $\tau(z_1) dz_1$ . По (18.4) потенциал элементарного заряда в произвольной точке  $M$

$$d\varphi = \tau(z_1) dz_1 / 4\pi\epsilon_0 R, \quad (1)$$

где  $R = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}$ .

Потенциал поля заряженного провода по (18.5)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\tau(z_1) dz_1}{R}. \quad (2)$$

Для точки  $M$  на поверхности провода ( $r = a$ ) потенциал  $\varphi = U$  и

$$\int_0^l \frac{\tau(z_1) dz_1}{\sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} = T, \quad (3)$$

где  $T = 4\pi\epsilon_0 U$ .

Это интегральное неоднородное уравнение Фредгольма первого рода относительно неизвестной плотности  $\tau(z)$ , аналогичное (18.6).

Решим это уравнение методом приведения к системе линейных алгебраических уравнений (методом алгебраизации). Разобьем провод на  $n$  одинаковых участков с зарядами  $\tau_i$  и будем считать, что внутри каждого участка  $\tau_i$  постоянно. Точку наблюдения  $j$ , потенциал которой  $U$ , возьмем посередине участка провода. В этом случае интеграл (3) заменится суммой

$$\sum_{i=1}^n \tau_i \int_{l(i-1)/n}^{l_i/n} \frac{dz_1}{\sqrt{a^2 + \left[ \frac{l}{2n} (2j-1) - z_1 \right]^2}} = T. \quad (4)$$

Таких уравнений можно написать  $n$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

Таким образом, получается система уравнений вида

$$\|\alpha\| \cdot \|\tau\| = \|1\| \cdot T, \quad (5)$$

где  $\|\alpha\|$  — квадратная матрица коэффициентов;  $\|\tau\|$  — матрица-столбец искомых линейных плотностей зарядов на участках;  $\|1\|$  — единичная матрица-столбец.

Если  $i \neq j$ , то

$$\alpha_{ij} = \ln \frac{|2j - 2i| + 1}{|2j - 2i| - 1}; \quad (6)$$

если  $i = j$ , то

$$\alpha_{ii} = \ln [1 + (l/na)^2] \approx 2 \ln (l/na). \quad (7)$$

В (6) и (7) учтено, что  $a \ll l$ . Вычисления по (6) и (7) дают при  $n = 5$  следующую матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 5,994 & 1,099 & 0,511 & 0,336 & 0,251 \\ 1,099 & 5,994 & 1,099 & 0,511 & 0,336 \\ 0,511 & 1,099 & 5,994 & 1,099 & 0,511 \\ 0,336 & 0,511 & 1,099 & 5,994 & 1,099 \\ 0,251 & 0,336 & 0,511 & 1,099 & 5,994 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Вследствие симметрии расположения зарядов  $\tau_1 = \tau_5$  и  $\tau_2 = \tau_4$ , поэтому вместо (8) можно записать матрицу

$$\begin{pmatrix} 6,245 & 1,435 & 0,511 \\ 1,435 & 6,505 & 1,099 \\ 1,022 & 2,198 & 5,994 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Решив систему уравнений (5) с матрицей коэффициентов (9), найдем заряды  $\tau_1 = 0,126T$ ;  $\tau_2 = 0,108T$ ;  $\tau_3 = 0,105T$ .

Заряд провода

$$q = 2\tau_1 l/n + 2\tau_2 l/n + \tau_3 l/n = 0,559T = 0,64 \cdot 10^{-12} U \text{ Кл},$$

т. е. емкость провода 0,64 пФ.

Для проверки точности решения повторим его, разбив провод на  $n = 10$  частей. Вследствие симметрии расположения зарядов  $\tau_1 = \tau_{10}$ ;  $\tau_2 = \tau_9$ ;  $\tau_3 = \tau_8$ ;  $\tau_4 = \tau_7$ ;  $\tau_5 = \tau_6$ .

Матрица коэффициентов системы (5)

$$\begin{vmatrix} 4,726 & 1,224 & 0,654 & 0,503 & 0,452 \\ 1,224 & 4,758 & 1,266 & 0,712 & 0,587 \\ 0,654 & 1,266 & 4,816 & 1,350 & 0,847 \\ 0,503 & 0,712 & 1,350 & 4,951 & 1,610 \\ 0,452 & 0,587 & 0,847 & 1,610 & 5,714 \end{vmatrix}.$$

Решение уравнений (5):  $\tau_1 = 0,146T$ ;  $\tau_2 = 0,115T$ ;  $\tau_3 = 0,109T$ ;  $\tau_4 = 0,106T$ ;  $\tau_5 = 0,105T$ .

На рис. 18.17Р, б приведены результаты расчета при  $n = 5$  (залитые точки) и  $n = 10$  (незалитые точки).

**18.18(Р).** Определить распределение заряда вдоль провода задачи 18.17, который находится на расстоянии  $h = 25$  мм над бесконечной проводящей плоскостью (рис. 18.18). Потенциал провода относительно проводящей плоскости равен  $U$ .

Рассчитать емкость между проводом и плоскостью.

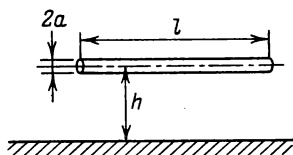


Рис. 18.18

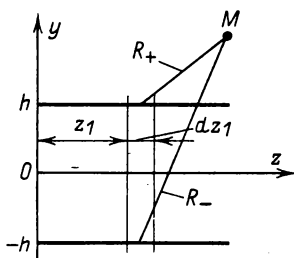


Рис. 18.18Р →

**Решение.** По методу зеркальных изображений потенциал поля в верхней полуплоскости определяется зарядами на проводе и их зеркальными изображениями (рис. 18.18Р).

Потенциал поля элементарного заряда  $\tau(z_1)dz_1$  и его зеркального изображения в произвольной точке  $M$  (см. решение задачи 18.17)

$$d\varphi = \frac{\tau(z_1) dz_1}{4\pi\epsilon_0 R_+} - \frac{\tau(z_1) dz_1}{4\pi\epsilon_0 R_-},$$

где  $R_{\pm} = \sqrt{(y \mp h)^2 + (z - z_1)^2}$ .

Потенциал точки  $M$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \tau(z_1) dz_1.$$

Поместив точку наблюдения на поверхность провода, получим:

$$\int_0^l \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4h^2 + (z - z_1)^2}} \right) \tau(z_1) dz_1 = T, \quad (10)$$

где  $T = 4\pi\epsilon_0 U$ .

Перейдем, как и при решении задачи 18.17, к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \tau_i \left[ \int_{l_{(i-1)/n}}^{l_{i/n}} \frac{dz_1}{\sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} - \int_{l_{(i-1)/n}}^{l_{i/n}} \frac{dz_1}{\sqrt{4h^2 + (z - z_1)^2}} \right] = T;$$

здесь первый интеграл аналогичен интегралу (4) задачи 18.17.

Матрица коэффициентов  $\|\alpha\|$  полученной системы уравнений состоит из двух подматриц:

$$\|\alpha\| = \|\alpha'\| - \|\alpha''\|, \quad (11)$$

причем подматрица  $\|\alpha'\|$  такая же, как и в задаче 18.17. Коэффициенты подматрицы  $\|\alpha''\|$  вычисляются по формуле

$$\alpha''_{ij} = \ln \frac{|2j - 2i| + 3 + \sqrt{(|2j - 2i| + 3)^2 + L^2}}{|2j - 2i| + 1 + \sqrt{(|2j - 2i| + 1)^2 + L^2}},$$

где  $L = 4\pi h/l$ .

При  $n = 5$

$$\|\alpha''\| = \begin{vmatrix} 0,196 & 0,186 & 0,171 & 0,156 & 0,090 \\ 0,186 & 0,196 & 0,186 & 0,171 & 0,156 \\ 0,171 & 0,186 & 0,196 & 0,186 & 0,171 \\ 0,156 & 0,171 & 0,186 & 0,196 & 0,186 \\ 0,090 & 0,156 & 0,171 & 0,186 & 0,196 \end{vmatrix};$$

$$\|\alpha\| = \begin{vmatrix} 5,798 & 0,913 & 0,340 & 0,180 & 0,161 \\ 0,913 & 5,798 & 0,913 & 0,340 & 0,180 \\ 0,340 & 0,913 & 5,798 & 0,913 & 0,340 \\ 0,180 & 0,340 & 0,913 & 5,798 & 0,913 \\ 0,161 & 0,180 & 0,340 & 0,913 & 5,798 \end{vmatrix}.$$

Вследствие симметрии расположения зарядов  $\tau_1 = \tau_5$  и  $\tau_2 = \tau_4$ , поэтому матрица коэффициентов

$$\begin{vmatrix} 5,959 & 1,093 & 0,340 \\ 1,093 & 6,138 & 0,913 \\ 0,680 & 1,825 & 5,798 \end{vmatrix}.$$

Решение системы алгебраических уравнений:  $\tau_1 = 0,138T$ ;  $\tau_2 = 0,121T$ ;  $\tau_3 = 0,118T$ . Заряд провода  $q = (2\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3) l/n = 0,636T = 0,707 \cdot 10^{-12} U$ , Кл; емкость  $C = 0,707$  пФ.

Результаты расчета представлены на рис. 18.17Р,б (крестики).

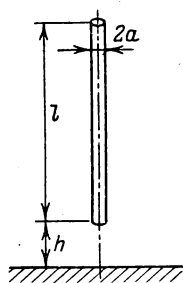


Рис. 18.19

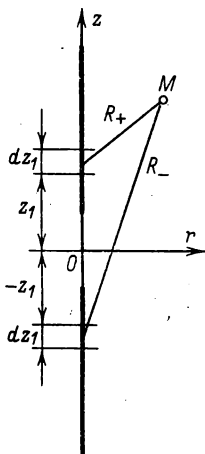


Рис. 18.19Р →

**18.19(Р).** Определить распределение заряда вдоль провода задачи 18.17, если провод расположен перпендикулярно бесконечной проводящей плоскости. Нижний конец провода находится на расстоянии  $h = 5$  мм от плоскости (рис. 18.19). Потенциал провода относительно проводящей плоскости равен  $U$ . Рассчитать емкость между проводом и плоскостью.

**Решение.** По методу зеркальных изображений приходим к расчетной схеме, показанной на рис. 18.19Р. Последовательность расчетов такая же, как в задачах 18.18 и 18.17, но вместо (10) получим уравнение

$$\int_h^{h+l} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z + z_1)^2}} \right) \tau(z_1) dz_1 = T$$

и систему алгебраических уравнений (5) с матрицей (11). Подматрица  $\|\alpha'\|$  остается без изменений. Коэффициенты подматрицы  $\|\alpha''\|$  вычисляются по формуле

$$\alpha_{ij} = \ln \frac{2j + 2i - 1 + N}{2j + 2i - 3 + N},$$

где  $N = 2nh/l$ .

При  $n = 5$

$$\| \alpha'' \| = \begin{vmatrix} 0,693 & 0,405 & 0,288 & 0,223 & 0,182 \\ 0,405 & 0,288 & 0,223 & 0,182 & 0,154 \\ 0,288 & 0,223 & 0,182 & 0,154 & 0,134 \\ 0,223 & 0,182 & 0,154 & 0,134 & 0,118 \\ 0,182 & 0,154 & 0,134 & 0,118 & 0,053 \end{vmatrix}$$

и по (11)

$$\| \alpha \| = \begin{vmatrix} 5,301 & 0,694 & 0,223 & 0,113 & 0,069 \\ 0,694 & 5,706 & 0,876 & 0,329 & 0,182 \\ 0,223 & 0,917 & 5,840 & 0,945 & 0,377 \\ 0,113 & 0,329 & 0,945 & 5,860 & 0,981 \\ 0,069 & 0,182 & 0,377 & 0,981 & 5,941 \end{vmatrix}$$

Решив систему (5) с полученной матрицей коэффициентов, находим заряды:  $\tau_1 = 0,162T$ ;  $\tau_2 = 0,126T$ ;  $\tau_3 = 0,117T$ ;  $\tau_4 = 0,119T$ ;  $\tau_5 = 0,135T$ . Заряд провода  $q = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5) l/n = 0,659T = 0,732 \cdot 10^{-12} U$ , Кл; емкость  $C = 0,732$  пФ.

**18.20(Р).** Заземлителем служит металлическая труба, забитая вертикально в землю (рис. 18.20). Длина трубы  $l = 5$  м, диаметр  $2a = 200$  мм. Удельная проводимость земли  $\sigma = 5 \cdot 10^{-2}$  См/м.

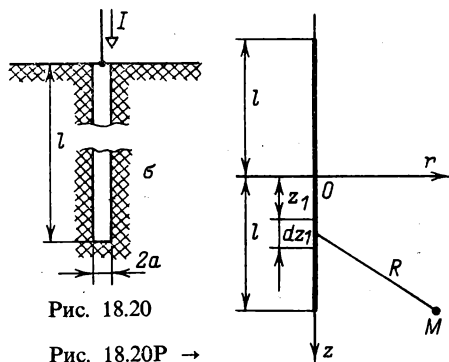


Рис. 18.20

Рис. 18.20Р →

Пренебрегая падением напряжения вдоль заземлителя, найти сопротивление растекания заземлителя. При токе  $I = 100$  А определить распределение потенциала по поверхности земли.

Решение. Применив метод зеркальных изображений, получим расчетную схему по рис. 18.20Р. Потенциал произвольной точки  $M$  поля заземлителя — цилиндра длиной  $2l$  и диаметром  $2a$ , который находится в однородной неограни-

ченной среде с проводимостью  $\sigma$  (см. решение задачи 18.17),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{-l}^l \frac{I_1(z_1) dz_1}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}}, \quad (1)$$

где  $I_1(z_1) dz_1$  — ток, стекающий с элемента  $dz_1$  трубы.

Для точки  $M$  на поверхности заземлителя

$$\int_{-l}^l \frac{I_1(z_1) dz_1}{\sqrt{a^2 + (z - z_1)^2}} = I_0, \quad (2)$$

где  $I_0 = 4\pi\sigma U$  и  $U$  — потенциал заземлителя относительно бесконечно удаленной точки.

Решим это уравнение методом алгебраизации. Запишем систему линейных уравнений, эквивалентную уравнению (2):

$$\|\alpha\| \cdot \|I_1\| = \|1\| \cdot I_0, \quad (3)$$

где  $\|\alpha\|$  — квадратная матрица коэффициентов;  $\|I_1\|$  — матрица-столбец неизвестных токов;  $\|1\|$  — единичная матрица-столбец.

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  вычисляются по формулам

$$\alpha_{ij} = \ln \frac{|2j - 2i| + 1}{|2j - 2i| - 1} \quad (\text{при } i \neq j);$$

$$\alpha_{ii} = \ln \frac{\sqrt{1 + (na/l)^2} + 1}{\sqrt{1 + (na/l)^2} - 1} \approx \ln \left[ 1 + \left( \frac{2l}{na} \right)^2 \right] \approx 2 \ln \frac{2l}{na}.$$

При  $n = 5$

$$\|\alpha\| = \begin{vmatrix} 5,993 & 1,098 & 0,511 & 0,336 & 0,251 \\ 1,098 & 5,993 & 1,098 & 0,511 & 0,336 \\ 0,511 & 1,098 & 5,993 & 1,098 & 0,511 \\ 0,336 & 0,511 & 1,098 & 5,993 & 1,098 \\ 0,251 & 0,336 & 0,511 & 1,098 & 5,993 \end{vmatrix}.$$

Вследствие симметрии частичных токов  $I_{11} = I_{15}$  и  $I_{12} = I_{14}$ , поэтому задача сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, для которой

$$\|\alpha\| = \begin{vmatrix} 6,244 & 1,434 & 0,511 \\ 1,434 & 6,504 & 1,098 \\ 1,022 & 2,196 & 5,993 \end{vmatrix}.$$

Решив систему (3) с полученной матрицей коэффициентов, получим значения токов:  $I_{11} = 0,126I_0$ ;  $I_{12} = 0,108I_0$ ;  $I_{13} =$

$= 0,105I_0$ . Ток заземлителя  $I = (2I_{11} + 2I_{12} + I_{13})/n = (0,252 + 0,216 + 0,105)4\pi\sigma U = 0,360U$ . Сопротивление растекания заземлителя  $R_3 = U/I = 1/0,360 = 2,78$  Ом. При  $I = 100$  А потенциал заземлителя  $U = 278$  В.

Т а б л и ц а 18.20

$r/l$	0,02	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\varphi(r)$ , В	278	69,8	55,7	30,6	12,8	6,4

Распределение потенциала по поверхности земли ( $z = 0$ )

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{-l}^l \frac{I_1(z_1) dz_1}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[ 2I_{11} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (r/l)^2}}{3/5 + \sqrt{(3/5)^2 + (r/l)^2}} + \right. \\ \left. + 2I_{12} \ln \frac{3/5 + \sqrt{(3/5)^2 + (r/l)^2}}{1/5 + \sqrt{(1/5)^2 + (r/l)^2}} + I_{13} \ln \frac{1/5 + \sqrt{(1/5)^2 + (r/l)^2}}{-1/5 + \sqrt{(1/5)^2 + (r/l)^2}} \right].$$

Результаты расчета сведены в табл. 18.20.

## Глава девятнадцатая ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### Введение к гл. 19

Распределение электромагнитного поля в пространстве находится как решение системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t; \quad (19.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \quad (19.2a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (19.3a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (19.4a)$$

и уравнений связи между векторами

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}; \quad (19.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad (19.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (19.7)$$

где  $\mathbf{J}$  — плотность тока проводимости;  $\rho$  — объемная плотность



свободного заряда;  $\sigma$  — удельная проводимость среды;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c_0^2$ ;  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме.

При расчете гармонических полей, как и при расчете цепей синусоидального тока, целесообразно применять комплексный метод. В комплексной форме

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon_r \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}; \quad (19.16)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} = -j\omega \mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{H}}; \quad (19.26)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}; \quad (19.36)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (19.46)$$

Векторы поля в неподвижной среде можно выразить через электродинамические потенциалы — векторный магнитный  $\mathbf{A}$  и электрический скалярный  $\phi$ :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (19.8a)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (19.9a)$$

Электродинамические потенциалы удовлетворяют соответственно векторному и скалярному уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -\mu_r \mu_0 \mathbf{J}; \quad (19.10a)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \partial^2 \phi / \partial t^2 = -\rho / \epsilon_r \epsilon_0 \quad (19.11a)$$

и связаны зависимостью

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \partial \phi / \partial t,$$

где  $c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ .

В комплексной форме

$$\dot{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}; \quad (19.86)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \phi - j\omega \dot{\mathbf{A}}; \quad (19.96)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2} \dot{\mathbf{A}} = -\mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{J}}; \quad (19.106)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \phi = -\dot{\rho} / \epsilon_r \epsilon_0. \quad (19.116)$$

Из системы (19.1)–(19.7) можно получить одно уравнение для любого вектора поля, например для вектора  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_r \mu_0 \sigma \partial \mathbf{H} / \partial t - \frac{1}{c^2} \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2 = 0. \quad (19.12a)$$

В комплексной форме

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - j\omega\mu_r\mu_0\sigma\dot{\mathbf{H}} + \frac{\omega^2}{c^2} \dot{\mathbf{H}} = 0$$

или

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \underline{\gamma}^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (19.126)$$

$$\text{где } \underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_r\mu_0\sigma - k_0^2\epsilon_r\mu_r} \quad (19.13)$$

— коэффициент распространения;  $\alpha$  — коэффициент ослабления;  $\beta$  — коэффициент фазы;  $k_0 = \omega/c_0$  — волновое число для вакуума.

Если векторы поля зависят только от одной пространственной координаты, например  $z$ , то решение уравнения (19.126) в декартовой системе координат следующее:

$$\dot{H}_i = \dot{C}_1 e^{-\underline{\gamma}z} + \dot{C}_2 e^{\underline{\gamma}z}, \quad i = x; y; z. \quad (19.14)$$

Постоянные интегрирования  $\dot{C}_{1,2}$  определяются из граничных условий

$$\dot{E}_{1r} = \dot{E}_{2r}; \quad \dot{H}_{1t} = \dot{H}_{2t}. \quad (19.15)$$

Для поля в проводящей среде можно пренебречь плотностью токов смещения  $j\omega\dot{\mathbf{D}}$  по сравнению с плотностью токов проводимости  $\dot{\mathbf{J}}$ . В этом случае первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} \quad (19.1в)$$

и коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_r\mu_0\sigma}. \quad (19.16)$$

Для поля в диэлектрике без потерь можно пренебречь плотностью токов проводимости по сравнению с плотностью токов смещения. В этом случае первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\dot{\mathbf{D}} \quad (19.1г)$$

и коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = j\beta = jk_0 \sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \quad (19.17)$$

Для диэлектрика с потерями

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = jk_0 \sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \quad (19.18)$$

У плоской электромагнитной волны векторы  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  ортогональны и находятся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Для волны в проводящей среде, распространяющейся вдоль оси  $z$  при напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}} = i\dot{E}_x; \quad \dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-\underline{\gamma}z}, \quad (19.19а)$$

напряженность магнитного поля

$$\dot{H} = j\dot{H}_y; \dot{H}_y = \dot{H}_0 e^{-\gamma z}, \quad (19.196)$$

где  $\dot{E}_0$  и  $\dot{H}_0$  — напряженности поля при  $z = 0$ , а  $\gamma$  рассчитывается по (19.16).

Отношение  $\dot{E}/\dot{H} = \dot{E}_0/\dot{H}_0 = Z_{\text{в}}$  — волновое сопротивление

$$Z_{\text{вв}} = \sqrt{\omega \mu_r \mu_0 / \sigma} e^{j45^\circ}. \quad (19.20)$$

Глубина проникновения плоской волны

$$z_0 = 1/\alpha; \quad (19.21)$$

длина волны

$$\lambda = 2\pi/\beta. \quad (19.22)$$

Для плоской волны в диэлектрике без потерь

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-jkz}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_0 e^{-jkz}, \quad (19.23)$$

где  $k = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \omega/c$  — волновое число.

Волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = z_{\text{в}} = \sqrt{\mu_r \mu_0 / \epsilon_r \epsilon_0} = 120\pi \sqrt{\mu_r / \epsilon_r} \text{ Ом}. \quad (19.24)$$

Длина волны

$$\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi c/\omega. \quad (19.25)$$

Движение энергии в электромагнитном поле характеризуется вектором Пойнтинга

$$\vec{P} = [EH]. \quad (19.26a)$$

В комплексной форме

$$\vec{P} = [\dot{E}\dot{H}^*]. \quad (19.266)$$

По теореме Умова — Пойнтинга

$$-\oint \vec{P} dS = P + \int \frac{\partial W_z}{\partial t} dV + \int \frac{\partial W_m}{\partial t} dV, \quad (19.27)$$

где  $S$  — замкнутая поверхность интегрирования;  $P$  — мощность преобразования энергии электромагнитного поля в другие виды энергии в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ;  $W_z$  и  $W_m$  — плотности энергии электрического и магнитного полей в том же объеме.

В комплексной форме

$$-\oint \vec{P} dS = P + jQ, \quad (19.28)$$

где  $P$  и  $Q$  — активная и реактивная мощности в объеме, ограниченном поверхностью  $S$ .

## 19.1. Теорема Умова – Пойнтинга

В этом параграфе приведены задачи на вычисление потоков мощности и энергии стационарных и квазистационарных полей в реальных средах.

**19.1.** По уединенному алюминиевому проводу радиусом 1 см протекает постоянный ток 1000 А. Удельная проводимость алюминия  $\sigma = 32 \cdot 10^4$  См/см.

Пользуясь теоремой Умова – Пойнтинга, найти поток мощности, входящий внутрь провода длиной 1 м. Сравнить эту мощность с мощностью, определяемой по известной из теории цепей формуле  $P = I^2 R$ . Показать, что известная формула сопротивления провода  $R = l/\sigma S$  получится, если применить теорему Умова – Пойнтинга.

**19.2(Р).** По двухпроводной линии постоянного тока передается мощность  $P$  при напряжении  $U$  и токе  $I$ .

Пренебрегая сопротивлением проводов, радиус которых  $r_0$ , найти зависимость вектора Пойнтинга от координаты  $x$  вдоль линии, соединяющей оси проводов (рис. 19.2).

**Решение.** На линии, соединяющей оси проводов (ось  $x$ ), составляющие векторов как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{H}$ , обусловленные каждым проводом в отдельности, или совпадают по направлению, или направлены противоположно.

На основании теоремы Гаусса (15.15) вне проводов получим для вектора  $\mathbf{E}$ , имеющего на оси  $x$  только составляющую  $E_x$ ,

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right),$$

где  $\tau = C_0 U$  и  $C_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r_0)}$  – емкость линии на единицу длины.

По закону полного тока (15.19) вне проводов получим для вектора  $\mathbf{H}$ , имеющего на оси  $x$  только составляющую  $H_y$ ,

$$H_y = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right).$$

Вектор Пойнтинга (19.26) вне проводов на оси  $x$  имеет только составляющую

$$\Pi_z = E_x H_y = \frac{UI}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2 (x-d)^2}.$$

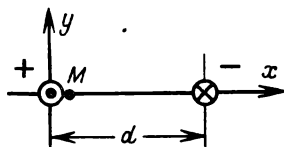


Рис. 19.2

Внутри проводов  $\Pi = 0$ , так как  $E = 0$ .

**19.3.** По двухпроводной линии, радиус проводов которой 2 мм (рис. 19.3, где расстояния указаны в миллиметрах), передается мощность 10 кВт при постоянном напряжении 220 кВ.

Пренебрегая сопротивлением проводов, найти значение и направление вектора Пойнтинга в точках  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Выяснить, как изменится решение задачи, если задано не напряжение, а сопротивление нагрузки (при той же мощности).

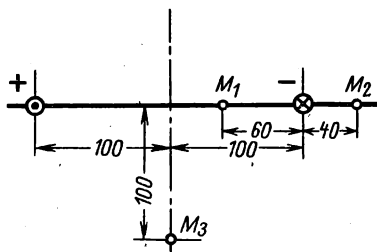


Рис. 19.3

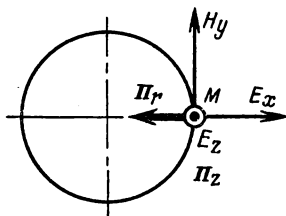


Рис. 19.4Р

**19.4(Р).** По двухпроводной линии (рис. 19.2), радиус проводов которой 1,5 мм и расстояние между осями  $d = 300$  мм, протекает постоянный ток 100 А при напряжении в начале линии 110 В. Удельная проводимость материала проводов  $\sigma = 57 \cdot 10^4$  См/см (медь).

Определить значение и направление вектора Пойнтинга в воздухе у поверхности левого провода в точке  $M$  на расстоянии  $l = 10$  м от начала линии. Нарисовать качественную картину распределения векторов Пойнтинга (по направлению) вдоль прямой, соединяющей провода (вдоль оси  $x$ ).

**Решение.** Напряжение между проводами  $U_M$  в сечении, где находится точка  $M$ , меньше напряжения  $U$  в начале линии из-за падения напряжения в проводах:  $U_M = U - IR$ , где  $R = 2l/\sigma S$  — сопротивление проводов линии.

Вектор Пойнтинга (19.26а) в точке  $M$  имеет две составляющие. Составляющая  $\Pi_z$  (рис. 19.4Р), определяющая плотность потока мощности, передаваемого вдоль линии, находится по формуле, полученной в решении задачи 19.2, после замены  $U$  на  $U_M$  и  $x$  на радиус провода  $r_0$ :

$$\begin{aligned} \Pi_z = E_x H_y &= \frac{U_M I}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{r_0^2 (d - r_0)^2} \approx \\ &\approx \frac{U_M I}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{1}{r_0^2} = 7200 \text{ Вт/см}^2. \end{aligned}$$

Вторая составляющая показывает плотность потока мощности потерь в самом проводе. Она определяется тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{E}$  на поверхности провода, которая, как следует из граничного условия для напряженности электрического поля, равна напряженности электрического поля в проводе:

$$E_z = J/\sigma = I/\sigma\pi r_0^2,$$

и напряженностью магнитного поля

$$H_y = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 - d} \right) \approx \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Эта составляющая вектора Пойнтинга направлена по радиусу внутрь провода:

$$P_r = E_z H_y = I^2/2\pi^2 \sigma r_0^3 = 0,264 \text{ Вт/см}^2.$$

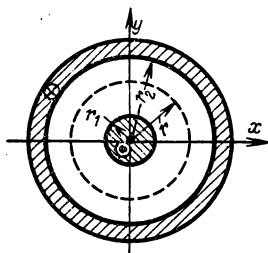


Рис. 19.5

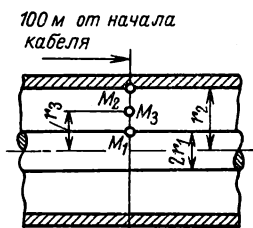


Рис. 19.6

**19.5(Р).** Пренебрегая сопротивлением проводников коаксиального кабеля (рис. 19.5), найти зависимость мощности, передаваемой внутри цилиндрической поверхности радиусом  $r$ , от значения этого радиуса.

**Решение.** В изоляции коаксиального кабеля без потерь вектор  $\mathbf{E}$  имеет только радиальную составляющую

$$E_r = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)}$$

(см. задачу 16.32), вектор  $\mathbf{H}$  по (15.19) — азимутальную

$$H_\alpha = I/2\pi r$$

и по (19.26а) вектор Пойнтинга имеет только продольную составляющую

$$P = P_z = E_r H_\alpha = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)}.$$

В жиле и оболочке вектор Пойнтинга равен нулю, так как  $E = 0$ .

Мощность, передаваемая внутри цилиндрической поверхности радиусом  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ),

$$P = \int_{r_1}^r \Pi \cdot 2\pi r \, dr = \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1).$$

**19.6.** По коаксиальному кабелю без потерь (рис. 19.6) с радиусами  $r_1 = 2$  мм,  $r_2 = 10$  мм передается при постоянном токе мощность  $P = 100$  кВт.

Определить вектор Пойнтинга в точках  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  (точки  $M_1$  и  $M_2$  в изоляции у поверхностей жилы и оболочки;  $r_3 = 6$  мм).

**19.7.** Коаксиальный кабель с воздушной изоляцией (рис. 19.6) состоит из медной трубки ( $r_2 = 10$  мм, толщина стенки равна 1 мм) и расположенной на ее оси медной жилы ( $r_1 = 2$  мм). Удельная проводимость меди  $57 \cdot 10^4$  См/см. По кабелю течет постоянный ток 50 А при напряжении в начале кабеля 100 В.

Найти значение и направление вектора Пойнтинга в точках  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  на расстоянии 100 м от начала кабеля (точки  $M_1$  и  $M_2$  в воздухе у поверхностей жилы и трубки,  $r_3 = 6$  мм).

**19.8.** Коаксиальный кабель длиной 100 м, заполненный изоляцией с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 4, и удельной проводимостью  $10^{-11}$  См/см питает приемник с сопротивлением 50 Ом. Радиус жилы 3 мм, радиусы оболочки 10 и 11 мм.

Пренебрегая потерями в жиле и оболочке, определить мощность, выделяемую в изоляции, токи в начале и в конце кабеля, мощность на входе кабеля и КПД линии передачи, если: 1) кабель подключен к источнику постоянного напряжения 10 кВ; 2) кабель подключен к источнику синусоидального напряжения 10 кВ с частотой 100 кГц.

**19.9(Р).** Определить вектор Пойнтинга на поверхности тороида с равномерно распределенной обмоткой (без потерь) в переходном процессе при подключении обмотки к источнику постоянного напряжения  $U = 300$  В через резистор с сопротивлением  $R = 300$  Ом.

Средняя длина магнитной линии в тороиде  $l = 30$  см, сечение тороида  $S = \pi r_0^2 = 0,8$  см<sup>2</sup>, относительная магнитная проницаемость материала тороида  $\mu_r = 100$ , число витков  $w = 316$ .

Пользуясь полученным выражением, определить энергию, запасенную в магнитном поле, и сравнить ее с энергией, определенной по формуле  $W_m = LI^2/2$ , где  $L$  — индуктивность тороида.

Влиянием токов в тороиде на ток в цепи пренебречь.

Решение. При включении цепи пойдет ток

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $I = U/R$  — ток установившегося режима;  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи;  $L = \mu_r \mu_0 w^2 S/l$ .

Рассматривая тороид как бесконечно длинный цилиндр, выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена параллельно вектору индукции  $B$  (рис. 19.9Р), т.е.  $B = B_z$ .

По закону электромагнитной индукции (15.21)

$$\oint E dl = -d\Phi/dt.$$

Выбрав в качестве контура интегрирования окружность радиусом  $r_0$ , получим:

$$E_\alpha \cdot 2\pi r_0 = -S dB/dt,$$

поэтому по (19.26а) вектор Пойнтинга в любой точке на поверхности тороида имеет только составляющую, направленную по радиусу  $\Pi_r = E_\alpha H_z$ , где по закону полного тока (15.19)

$$H_z = \frac{iw}{l} = \frac{Iw}{l}(1 - e^{-t/\tau}),$$

следовательно,

$$B_z = \mu_r \mu_0 H_z = \frac{Iw}{l} \mu_r \mu_0 (1 - e^{-t/\tau}) = B_0 (1 - e^{-t/\tau});$$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad E_\alpha = -\frac{S}{2\pi r_0} \frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau},$$

$$\Pi_r = -\frac{S}{2\pi r_0} \frac{I^2 w^2 \mu_r \mu_0}{l^2 \tau} e^{-t/\tau} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Знак «-» показывает, что мощность во время переходного процесса поступает внутрь тороида.

Поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность тороида

$$\begin{aligned} \Pi_r \cdot 2\pi r_0 l &= -\frac{I^2 w^2 \mu_r \mu_0 S}{l \tau} e^{-t/\tau} (1 - e^{-t/\tau}) = \\ &= -\frac{LI^2}{\tau} e^{-t/\tau} (1 - e^{-t/\tau}) = -3,15(1 - e^{-89\,500t}) e^{-89\,500t} \text{ Вт/см}^2. \end{aligned}$$

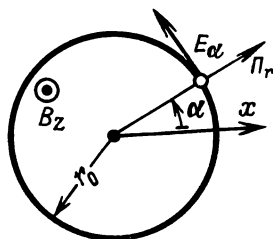


Рис. 19.9Р



Энергия, запасенная в магнитном поле тороида за время переходного процесса,

$$W_m = \int_0^{\infty} (\Pi_r \cdot 2\pi r_0 l) dt = \frac{LI^2}{2} = 1,657 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

**19.10.** У катушки с магнитопроводом — тороидом из ферромагнитного материала комплексное сопротивление  $\underline{Z} = 20 + j100 \text{ Ом}$ , число витков  $w = 400$ , средняя длина магнитной линии в тороиде 30 см, его сечение  $0,8 \text{ см}^2$ , активное сопротивление проводов обмотки 10 Ом.

Определить мгновенное значение вектора Пойнтинга на поверхности тороида, если к обмотке приложено напряжение  $u = 50 \sin(10\,000t + 30^\circ) \text{ В}$ , и поток комплексного вектора Пойнтинга через поверхность тороида.

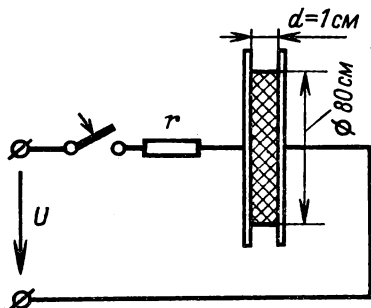


Рис. 19.11

**19.11.** Определить значение вектора Пойнтинга на поверхности диэлектрика, помещенного в плоский конденсатор, во время переходного процесса (рис. 19.11). Емкость конденсатора, заполненного диэлектриком,  $C = 4 \text{ мкФ}$ , сопротивление резистора  $r = 333 \text{ Ом}$ , постоянное напряжение  $U = 100 \text{ В}$ .

Пользуясь полученным выражением, вычислить энергию, запасенную в диэлектрике конденсатора.

**19.12(P).** По двухпроводной линии (рис. 19.2) передается энергия от генератора к приемнику. Расстояние между осями проводов  $d = 1 \text{ м}$ ; радиус провода  $r_0 = 5 \text{ мм}$ ; напряжение между проводами линии  $u = 10^4 \sin \omega t \text{ В}$ ; ток в линии  $i = 100 \sin(\omega t - \pi/3) \text{ А}$ .

Найти среднее значение вектора Пойнтинга в двух точках, лежащих на линии, соединяющей оси проводов (на оси  $x$ ). Первая точка  $M$  находится у поверхности одного из проводов, вторая — посередине между проводами. Влиянием земли и сопротивлением проводов можно пренебречь.

**Решение.** В решении задачи 19.2 получено выражение для вектора Пойнтинга вдоль линии, соединяющей оси проводов. Подставив вместо  $U$  и  $I$  мгновенные значения  $u = U_m \sin \omega t$  и  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$  и вычислив среднее значение

произведения, получим:

$$\Pi_z = \frac{U_m I_m \cos \varphi}{8\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2(x-d)^2} = \frac{3,75}{x^2(x-1)^2} \text{ кВт/м}^2.$$

В частности, при  $x = r_0 = 5 \text{ мм}$  и  $x = d/2 = 0,5 \text{ м}$  получим соответственно  $152 \cdot 10^3$  и  $60,1 \text{ кВт/м}^2$ .

## 19.2. Напряженность электрического поля в неподвижных и движущихся средах. Движение заряженных частиц

Задачи данного параграфа делятся на три группы: 1) расчет в неподвижной среде напряженности переменного электрического поля  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t$  по известным значениям скалярного  $\varphi$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов; 2) расчет напряженности переменного электрического поля в движущейся среде при скорости движения, намного меньшей скорости света; 3) вычисление траекторий движения заряженных частиц в электромагнитном поле и силы  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , действующей на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со скоростью  $v$ .

**19.13.** В линии длиной 20 км, состоящей из двух медных параллельных проводов (удельное сопротивление  $17,6 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{км}$ ) радиусом 0,5 см при расстоянии между их осями 2 м, проходит ток 40 А, возрастающий со скоростью 30 кА/с. В конце линия замкнута накоротко.

Найти напряжение в начале линии.

**19.14(Р).** Металлический диск, насаженный на вал, вращается с постоянной частотой вращения  $n = 3000 \text{ об/мин}$  в однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 1 \text{ Тл}$  и перпендикулярна плоскости диска. Радиус диска  $R = 10 \text{ см}$ .

Определить ЭДС, возникающую между валом и внешней окружностью диска.

**Решение.** Напряженность электрического поля определяется векторным произведением  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . В системе координат, изображенной на рис. 19.14Р, получим  $E = E_r = v_\phi B_z = \omega r B$ .

Электродвижущая сила

$$e = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega R^2 B}{2} = \pi n R^2 B / 60 = 1,57 \text{ В},$$

поскольку  $\omega = 2\pi f = \pi n / 30$ .

**19.15.** Металлический диск радиусом  $R$ , насаженный на вал эксцентрично (рис. 19.15), вращается в однородном магнитном

поле с индукцией  $B$ . Линии поля перпендикулярны плоскости диска. Число оборотов диска в секунду равно  $n$ . Расстояние между осью вала и осью диска равно  $d$ .

Найти ЭДС, возникающую между щетками, одна из которых скользит по окружности диска, а другая — по валу. Получить приближенное выражение для ЭДС в случае  $d/R \ll 1$ .

В диске есть множество радиальных тонких щелей, и поэтому токами в диске можно пренебречь.

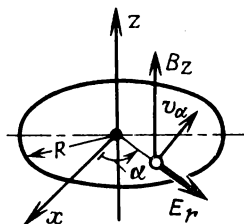


Рис. 19.14Р

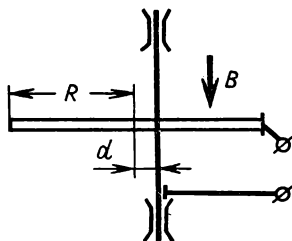


Рис. 19.15

**19.16.** Индукционный виброграф состоит из неподвижного постоянного магнита (рис. 19.16), вставленного в массивный стальной стакан, и из подвижного соленоида, механически связанного с той системой, вибрацию которой надлежит измерить. Магнитный поток постоянного магнита  $\Phi = 1,2 \cdot 10^{-4}$  Вб замыкается через стальной стакан так, что и нижний, и верхний концы соленоида оказываются вне зоны магнитного поля. Соленоид намотан равномерно и имеет 50 витков на 1 см длины. Вибрация соленоида происходит в продольном направлении по закону  $x = 0,2 \sin \omega t$  мм и в поперечном направлении — по закону  $y = 1 \sin \omega t$  мм, где  $\omega = 2\pi \cdot 200$  с $^{-1}$ .

Найти ЭДС, индуцируемую в соленоиде.

У к а з а н и е. Задача может быть решена двумя способами:

1) Сторонняя напряженность электрического поля в витке  $E = v \times B$ , где  $v$  — скорость соленоида. Электродвижущая сила равна интегралу от напряженности электрического поля по всем виткам.

2) Электродвижущая сила определяется как скорость изменения потокоцепления. Потокоцепление непостоянно из-за изменения числа витков, сцепленных с магнитным потоком.

**19.17(Р).** Стержень  $AD$  движется в магнитном поле (рис. 19.17) со скоростью  $v = 0,25$  м/с. Магнитная индукция между полюсами электромагнита (т.е. на площади 500 мм  $\times$   $\times$  200 мм) изменяется во времени по закону  $B = B_0(1 - kt)$ , где  $B_0 = 1$  Тл,  $k = 5$  с $^{-1}$ ,  $t$  — время, отсчитываемое от момента,

когда стержень  $AD$  расположен, как показано на рисунке. В остальной части контура из провода, замкнутого вольтметром, магнитным полем можно пренебречь.

Определить ЭДС, наводимую в контуре (показание вольтметра  $V$ ).

**Решение.** Электродвижущую силу, наводимую в контуре, определим по закону электромагнитной индукции:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (BS) = - \left( S \frac{dB}{dt} + B \frac{dS}{dt} \right).$$

В условиях задачи  $S = a(l - vt)$ ;  $dB/dt = -B_0 k$ ;  $dS/dt = -av$ , где  $a = 500$  мм;  $l = 50$  мм и  $e = aB_0(lk + v - 2vkt) = 0,25 - 1,25t$  В.

Заметим, что часть ЭДС, обусловленная движением контура ( $B dS/dt$ ), может быть определена иначе — по напряженности электрического поля  $aB_0(1 - kt)v$ , возникающей в проводнике, который движется в магнитном поле.

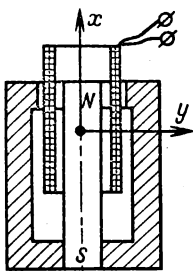


Рис. 19.16

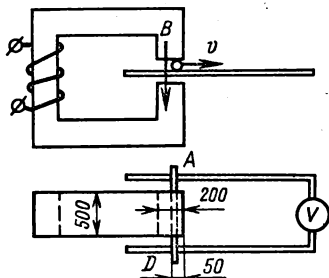


Рис. 19.17

**19.18(Р).** Медная цилиндрическая труба малой толщины  $\delta$  при среднем радиусе  $r$  коаксиально надета на провод с током и движется со скоростью  $v$  в направлении, совпадающем с осью проводника  $z$  (рис. 19.18).

Определить показания вольтметра, присоединенного к внутренней и внешней поверхностям трубы при помощи щеток. Ответить на вопрос: зависят ли показания вольтметра от магнитных и электрических свойств трубы.

**Решение.** Выберем цилиндрическую систему координат с центром на оси провода.

Вокруг провода с током существует магнитное поле, индукция которого в трубе малой толщины  $B = B_\alpha = I\mu_r\mu_0/2\pi r$ . При движении трубы со скоростью  $v = v_z$  в магнитном поле с индукцией  $B_\alpha$  возникает радиальная составляющая напря-

женности электрического поля  $E_{\text{ст}} = -vB$ , которую назовем сторонней. В проводящей трубе под действием электрического поля должен протекать ток плотностью  $J = \sigma(E + E_{\text{ст}})$ . Так как цепь разомкнута (считаем, что сопротивление вольтметра бесконечно велико) и, следовательно,  $J = 0$ , то  $E = -E_{\text{ст}}$  и в трубе есть радиальная составляющая напряженности поля, численно равная  $E_{\text{ст}}$ , т. е.  $E_r = vB$ .

Из общего выражения для напряженности поля  $E = -\nabla\varphi - \partial A/\partial t$  следует, что в условиях задачи  $E_r = -(\nabla\varphi)_r = -vB = vI\mu_r\mu_0/2\pi r$ , так как магнитное поле не изменяется в точках, где определяется  $E$  (в стенке трубы) и  $\partial A/\partial t = 0$ . Вне трубы электрическое поле равно нулю.

Показания вольтметра вычислим, применив закон электромагнитной индукции:  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\Phi/dt$ . Отметим, что вольтметр показывает разность потенциалов между его электродами, поэтому под интегралом стоит  $E = -\nabla\varphi$  (не включающее  $E_{\text{ст}}$ ).

Выберем контур, проходящий через вольтметр, по соединительным проводам и вдоль радиуса трубы между щетками, связанный с направлением магнитного потока правилом правого винта. Для такого контура  $E_r\delta + U = -d\Phi/dt$ , или  $U = -d\Phi/dt - vB\delta$ .

При движении немагнитной трубы поток, сцепленный с контуром, не изменяется, т. е.  $d\Phi/dt = 0$  и  $U = -vB\delta = -v\delta I\mu_0/2\pi r$ .

При движении магнитной трубы с относительной проницаемостью материала  $\mu_r$  конец трубы вытягивается из контура со скоростью  $v$ , что приводит к уменьшению магнитного потока  $d\Phi/dt = -\mu_0(\mu_r - 1)Iv\delta/2\pi r$  и  $U = -v\delta I\mu_0/2\pi r$ .

Как видно из приведенного решения, показания вольтметра не зависят от магнитных и электрических свойств трубы.

**19.19.** Определяется ли полностью сила, действующая на движущийся заряд, заданными значениями скорости  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\text{grad}\varphi$  и их производными во времени (токами смещения и излучением пренебречь). Иллюстрировать на примере соленоида с переменным током.

**19.20.** В зазоре магнитопровода соленоида при  $(x^2 + y^2) < r_0^2$  (рис. 19.20) индукция  $B = B_z = 1$  Тл и изменяется во времени (в рассматриваемый момент) со скоростью  $\partial B/\partial t = 10$  Тл/с; при  $(x^2 + y^2) > r_0^2$  индукция  $B = 0$  и  $\partial B/\partial t = 0$ .

Определить в зависимости от координаты  $x$  при  $y = 0$  составляющие  $f_x$  и  $f_y$  силы, которые действуют на электрон с зарядом  $q < 0$ , движущийся со скоростью  $v = v_x$ .

**19.21.** То же, что и в задаче 19.20, но для скорости электрона  $v = v_y$ .

**19.22.** Электрон с зарядом  $q < 0$  и массой  $m$  движется в магнитном поле с индукцией  $B = 8 \cdot 10^{-4}$  Тл по окружности радиусом  $r = 1$  см. Вектор магнитной индукции нормален к плоскости, в которой лежит окружность.

Определить скорость электрона.

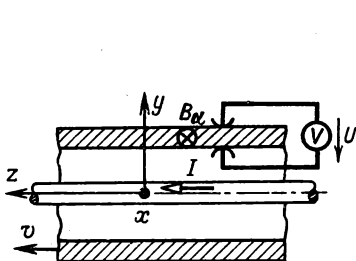


Рис. 19.18

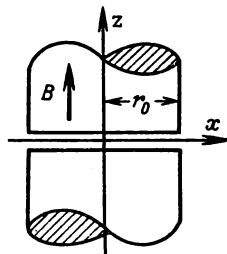


Рис. 19.20

**19.23.** Известны три проекции траектории электрона в камере Вильсона с магнитным полем  $B = B_x = 10^{-3}$  Тл: а) в плоскости  $xu$  траектория  $y = 2 \sin kx$ ; б) в плоскости  $yz$  траектория  $y^2 + z^2 - 4z = 0$ ; в) в плоскости  $xz$  траектория  $z = 2(1 - \cos kx)$ . Все размеры даны в сантиметрах,  $k = 6,28 \text{ см}^{-1}$ .

Найти составляющие начальной скорости электрона.

**19.24.** Электроны с энергией 8000 эВ вылетают из точки  $a$ , лежащей на оси  $x$ , под углом  $\alpha = 0 \div 8^\circ$  к ней и движутся в однородном постоянном магнитном поле  $B = B_x = 10^{-2}$  Тл.

Определить, на каком расстоянии от точки  $a$  электроны вновь пересекут ось  $x$ .

**19.25.** Частица с зарядом  $q > 0$  и массой  $m$  движется в области, где существуют постоянные электрическое и магнитное поля, причем  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ .

Найти траекторию движения заряженной частицы, пользуясь системой координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , при которой  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E}$ .

**19.26.** У плоского конденсатора расстояние между пластинами  $h$  и разность потенциалов между ними  $U$ . Электроны с зарядом  $q < 0$  и массой  $m$  каждый движутся от отрицательной пластины к положительной, причем скорость равна нулю у отрицательной пластины.

Найти значение индукции  $B$  поперечного магнитного поля, при котором электроны не смогут достичь положительной пластины.

**19.27(Р).** Электрон с энергией 100 эВ, зарядом  $q < 0$  и массой  $m$  влетает со скоростью  $v_0$  в поле между пластинами

плоского конденсатора у края положительного электрода (рис. 19.27), причем вектор скорости образует угол  $\alpha = 45^\circ$  с нормалью к пластине. Расстояние между пластинами  $d = 1$  см, их ширина  $b = 3$  см.

Найти, при каких значениях напряжения между пластинами  $U$ : а) электрон попадает на отрицательную пластину конденсатора; б) электрон попадает на положительную пластину конденсатора; в) электрон пролетает через конденсатор.

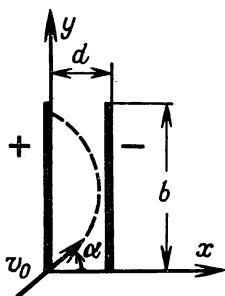


Рис. 19.27

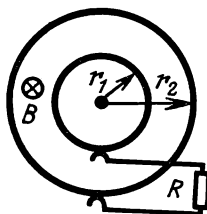


Рис. 19.28

**Решение.** В системе координат, показанной на рис. 19.27, напомним уравнения движения электрона:

$$md^2x/dt^2 = qU/d; \quad md^2y/dt^2 = 0.$$

Дважды их интегрируя, получаем:

$$x = qUt^2/2md + C_1t + C_2; \quad y = C_3t + C_4.$$

Начальные условия при  $t = 0$  и выбранной системе координат:

$$\begin{aligned} x(0) = 0; \quad y(0) = 0, \quad \text{поэтому} \quad C_2 = C_4 = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \\ = v_x(0) = v_0/\sqrt{2}; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_y(0) = v_0/\sqrt{2}, \quad \text{откуда} \quad C_1 = v_0/\sqrt{2}; \\ C_3 = v_0/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$x = v_0t/\sqrt{2} + qUt^2/2md; \quad y = v_0t/\sqrt{2}.$$

Исключив из этих уравнений время, получим траекторию электрона

$$x = y + qUy^2/mdv_0^2.$$

а) Электрон попадает на отрицательную пластину, если  $x_{\max} \geq d$ . Определим  $x_{\max}$  обычным методом. Производная  $dx/dy = 1 + 2qUy/mdv_0^2 = 0$ , откуда находим  $y$ , при котором  $x =$

$= x_{\max}$  и  $x_{\max}$ :

$$y = mdv_0^2/2U |q|; \quad x_{\max} = mdv_0^2/4U |q|.$$

Чтобы получить  $x_{\max} \geq d$ , должно быть  $U \leq mv_0^2/4 |q|$ .

б) Электрон попадает на положительную пластину, если при  $x = 0$  получим  $y \leq b$ . Из уравнения траектории при  $x = 0$  находим:  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = mdv_0^2/U |q|$ , т. е.  $U \geq mdv_0^2/b |q|$ .

в) Электрон пролетает через конденсатор, если

$$mv_0^2/4 |q| < U < mdv_0^2/b |q|.$$

**19.28.** На рис. 19.28 показан униполярный генератор, диск которого имеет радиусы  $r_1 = 10$  см,  $r_2 = 50$  см и вращается в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно диску.

Дано:  $n = 1000$  об/мин;  $B = 2/\pi$  Тл; сопротивление цепи тока в диске  $R_0 = 1$  Ом; сопротивление нагрузки  $R = 7$  Ом; момент трения  $M = 0,12/\pi$  Н·м.

Определить ЭДС, мощность на валу двигателя, вращающего генератор, и КПД генератора, считая полезной мощность, выделяемую в сопротивлении нагрузки (при вычислениях не следует заменять  $\pi$  числовым значением).

### 19.3. Электромагнитное поле в проводящей среде. Поверхностный эффект

**19.29(Р).** Для защиты от воздействия электромагнитного поля низкой частоты прибор помещен в ферромагнитный экран. Наименьший радиус кривизны поверхности экрана намного больше толщины стенки экрана, при этом в стенке экрана электромагнитные волны можно считать плоскими. Толщина экрана  $d = 6$  мм, удельная проводимость стали  $\sigma = 5 \cdot 10^4$  См/см, относительная магнитная проницаемость  $\mu_r = 300$ . Частота волны  $f = 400$  Гц.

1) Найти мгновенное значение вектора Пойнтинга на глубине, равной глубине проникновения, если на внешней поверхности векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  плоской волны параллельны поверхности стенки и напряженность магнитного поля  $H_0 = 10 \sin(\omega t + 20^\circ)$  А/см.

2) Вычислить отношение длины волны в стенке экрана к длине волны в воздухе.

3) Определить, во сколько раз значения векторов поля на внешней поверхности стенки больше, чем в середине стенки.

**Решение.** Коэффициент распространения (поверхностно-го эффекта) по (19.16)

$$\gamma = \alpha + j\beta = 21,8 \angle 45^\circ = 15,35(1 + j1) \text{ см}^{-1}.$$



Глубина проникновения по (19.21)  $z_0 = 1/\alpha = 0,065$  см = 0,65 мм намного меньше толщины стенки экрана, и, следовательно, в стенке распространяются только прямые волны от внешней поверхности к внутренней.

Если ось  $z$  направить от внешней поверхности внутрь стенки, то

$$H(z) = H_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t + 20^\circ - \beta z).$$

На глубине, равной глубине проникновения,

$$\begin{aligned} H(z_0) &= 10e^{-1} \sin(\omega t + 20^\circ - 57^\circ 20') = \\ &= 3,68 \sin(\omega t - 37^\circ 20') \text{ А/см.} \end{aligned}$$

Так как встречные волны отсутствуют, то  $\dot{E} = \dot{H} Z_B$ , где по (19.20) волновое сопротивление  $Z_B = 4,36 \cdot 10^{-4} \angle 45^\circ$  Ом. Мгновенное значение  $E(z_0) = 4,36 \cdot 10^{-4} \cdot 3,68 \sin(\omega t - 37^\circ 20' + 45^\circ) = 1,6 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t + 7^\circ 40') \text{ В/см.}$

1) Мгновенное значение вектора Пойнтинга по (19.26а)

$$P = P_z(z_0) = E(z_0) H(z_0) = 2,08 - 2,95 \cos(2\omega t - 29^\circ 40') \text{ мВт/см}^2.$$

2) Длина волны в стенке экрана по (19.22)  $\lambda = 2\pi/15,35 = 0,41$  см = 4,1 мм; длина волны в воздухе  $\lambda_0 = c_0/f = 75 \cdot 10^6$  см; их отношение  $\lambda/\lambda_0 = 0,546 \cdot 10^{-8}$ .

3) Отношение напряженностей поля на внешней поверхности и в середине стенки экрана

$$H(0)/H(d/2) = E(0)/E(d/2) = e^{\alpha d/2} = e^{4,6} \approx 100.$$

**19.30.** В задаче (19.29) условия изменены следующим образом: экран медный с удельной проводимостью  $5,8 \times 10^5$  См/см, толщина стенки 3 мм, частота поля 50 кГц.

Определить, при каком поле ( $E_0$ ,  $H_0$ ) на внешней поверхности экрана напряженность электрического поля на глубине, равной глубине проникновения,  $E(t) = 1,84 \cdot 10^{-5} \sin(\omega t - 27^\circ 18') \text{ В/см.}$  Найти, во сколько раз при этом напряженность электрического поля прямой волны на внутренней поверхности экрана меньше  $E_0$ .

**19.31.** По плоскому угольному пласту с удельной проводимостью  $\sigma = 500$  См/см протекает ток промышленной частоты (50 Гц). На поверхности пласта среднее значение вектора Пойнтинга  $0,2 \text{ Вт/см}^2$ .

Найти мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей плоской волны на глубине 1,5 м, считая начальную фазу напряженности электрического поля на поверхности равной нулю. Сопоставить количества выделяющегося тепла в  $1 \text{ см}^3$  у поверхности пласта и на глубине 0,5 м.

**19.32.** В проводящей среде в направлении оси  $z$  распространяется плоская волна. Относительная магнитная проницаемость среды  $\mu_r = 200$ , удельная проводимость  $\sigma = 0,5 \cdot 10^5$  См/см, частота волны 50 Гц. В точке, координата  $z$  которой выбрана равной нулю, напряженность магнитного поля  $H = H_{0m} \sin \omega t = 20 \sqrt{2} \sin \omega t$  А/см.

Определить мгновенное значение дивергенции вектора Пойнтинга, мгновенное значение мощности, преобразуемой в теплоту, и мгновенное значение мощности, с которой изменяется энергия магнитного поля в каждой точке.

**19.33(Р).** Тороид изготовлен из стальной ленты толщиной  $2a = 0,35$  мм и шириной  $b = 50$  мм. Число витков ленты  $n = 50$ . Относительная магнитная проницаемость материала ленты  $\mu_r = 1000$ , удельная проводимость  $\sigma = 10^5$  См/см. Средняя длина магнитной линии  $l = 80$  см. На тороид нанесена обмотка  $w = 400$  витков с сопротивлением  $r = 2$  Ом. По обмотке протекает ток  $I = 0,4$  А частотой  $f = 400$  Гц.

1) Найти эффективную комплексную магнитную проницаемость (среднюю проницаемость) ленты  $\underline{\mu}_{r\text{cp}}$ , среднюю по сечению индукцию в ленте  $B_{\text{cp}}$  и напряжение на зажимах обмотки  $\underline{U}$ . Поток рассеяния и магнитными потерями пренебречь.

2) Определить, при какой толщине ленты из того же материала поверхностный эффект практически не сказывается; вычислить напряжение на зажимах обмотки (общее сечение тороида остается тем же). Считать, что поверхностный эффект практически не сказывается, если мнимая часть средней проницаемости (обусловленная вихревыми токами) составляет не более 3% проницаемости материала, при этом действительная часть средней проницаемости не отличается от проницаемости материала.

**Решение.** 1) По определению средняя проницаемость

$$\underline{\mu}_{r\text{cp}} = \dot{B}_{\text{cp}} / \mu_0 \dot{H}_0 = \mu_r \operatorname{th} \underline{\gamma} a / \underline{\gamma} a,$$

где  $\dot{H}_0$  — напряженность поля на поверхности и по (19.16)  $\underline{\gamma} = 39,7(1 + j1) \text{ см}^{-1}$ .

Вычислим гиперболический тангенс комплексного аргумента по формуле

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} a = \operatorname{th} (\alpha a + j\beta a) = T e^{j\varphi},$$

$$\text{где } \underline{\gamma} a = 0,98 \angle 45^\circ; \quad T = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\alpha a - \cos 2\beta a}{\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\beta a}} = 0,92; \quad \varphi =$$

$$= \arctg \frac{\sin 2\beta a}{\operatorname{sh} 2\alpha a} = 27^\circ 40', \text{ при этом } \underline{\mu}_{\text{ср}} = 940 \angle -17^\circ 20'.$$

Таким образом, средняя проницаемость существенно отличается от проницаемости материала, т.е. поверхностный эффект заметно влияет на процессы в тороиде.

Напряженность магнитного поля на поверхности ленты (по закону полного тока)  $\dot{H}_0 = \dot{I}w/l = 2 \text{ А/см}$  и по определению  $\dot{B}_{\text{ср}} = \underline{\mu}_{\text{ср}} \mu_0 \dot{H}_0 = 0,236 \angle -17^\circ 20' \text{ Тл}$ .

Напряжение на зажимах обмотки

$$\dot{U} = \dot{I}r + j\omega w S \dot{B}_{\text{ср}} = 0,8 + 208 \angle 72^\circ 40' = 0,8 + (62 + j198) \text{ В}.$$

2) Поверхностный эффект совсем не сказывается, если средняя проницаемость практически не отличается от проницаемости материала, при этом  $\operatorname{th} \underline{\gamma} a \approx \underline{\gamma} a$  и  $\underline{\mu}_{\text{ср}} \approx \underline{\mu}_r$ . Учитывая в разложении гиперболического тангенса второй член, получаем:

$$\frac{\underline{\mu}_{\text{ср}}}{\underline{\mu}_r} = \frac{\operatorname{th} \underline{\gamma} a}{\underline{\gamma} a} = \frac{\underline{\gamma} a - (\underline{\gamma} a)^3/3}{\underline{\gamma} a} = 1 - \frac{(\underline{\gamma} a)^2}{3} = 1 - j \frac{|\underline{\gamma} a|^2}{3}.$$

По условию  $|\underline{\gamma} a|^2/3 = 0,03$ , откуда  $2a = 2 \cdot 0,3/|\underline{\gamma}| = 0,0107 \text{ см}$ . В этом случае напряжение на зажимах обмотки

$$\dot{U} = \dot{I}r + j\omega w S \mu_0 \underline{\mu}_{\text{ср}} \dot{I}w/l = 0,8 + (6,6 + j220) \text{ В}.$$

**19.34(Р).** Определить комплексное сопротивление катушки задачи 19.33. Считая, что магнитная проницаемость материала

ленты не зависит от частоты, построить частотные характеристики индуктивности, активного и реактивного сопротивлений катушки, действительной и мнимой частей средней комплексной проницаемости ленты. Определить, при какой частоте мнимая часть средней комплексной проницаемости достигает максимума. Построить зависимости тех же величин от толщины ленты при частоте 12,8 кГц и при неизменном общем сечении тороида.

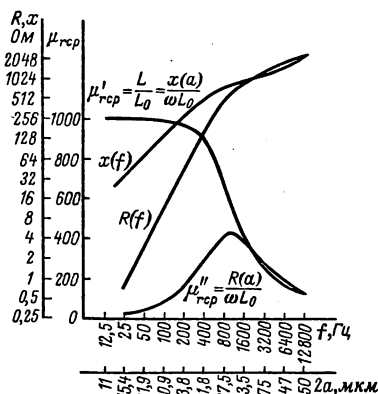


Рис. 19.34Р

**Решение.** Комплексное сопротивление катушки

$$\underline{Z} = \dot{U}/\dot{I} = r + j\omega L_0 \underline{\mu}_{\text{ср}} = r + R + jx,$$

где  $L_0 = w^2 S \mu_0 / l = 0,22 \text{ мГн}$  — индуктивность катушки с тороидом из материала с  $\mu_r = 1$ ;  $\sigma = 0$ ;

$$\begin{aligned} \mu_{r \text{ ср}} &= \mu'_{r \text{ ср}} - j\mu''_{r \text{ ср}} = \mu_r \operatorname{th} \gamma a / \gamma a = \\ &= \frac{\mu_r}{2\alpha a} \frac{(\operatorname{sh} 2\alpha a + \sin 2\alpha a) - j(\operatorname{sh} 2\alpha a - \sin 2\alpha a)}{\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\alpha a}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $R = \omega L_0 \mu''_{r \text{ ср}}$  и  $x = \omega L_0 \mu'_{r \text{ ср}}$ .

Индуктивность катушки с тороидом из стальной ленты

$$L = x / \omega = L_0 \mu'_{r \text{ ср}}.$$

Из этих соотношений следует, что  $\mu'_{r \text{ ср}}$ ,  $\mu''_{r \text{ ср}}$  и  $L$  зависят от толщины ленты  $a$  так же, как и от квадрата частоты, так как по (19.16)  $\alpha = \sqrt{\omega \mu_r \mu_0 \sigma / 2}$ .

Расчетные по этим формулам зависимости представлены на рис. 19.34Р.

Мнимая часть средней проницаемости достигает максимального значения при частоте, определяемой из условия  $d\mu''_{r \text{ ср}}/d\omega = 0$ . Решение этого уравнения приводит к значениям:  $2\alpha a = 2,25$  и  $f = 1050 \text{ Гц}$ , при этом  $\mu''_{r \text{ ср max}} = 415$ .

**19.35.** Комплексная относительная магнитная проницаемость материала стальной ленты, учитывающая гистерезисные потери,  $\mu_r = 1000 \angle -4^\circ = 1000 - j70$  при частоте  $12,8 \text{ кГц}$ ; удельная проводимость  $\sigma = 10^5 \text{ См/см}$ .

Расчитать и построить зависимости действительной и мнимой частей средней комплексной проницаемости ленты от ее толщины  $2a$  для указанной частоты. Сравнить эти зависимости с соответствующими из задачи 19.34, построенными для этой же ленты, но без учета потерь на гистерезис.

**19.36.** Магнитопровод трансформатора массой  $G = 1,5 \text{ кг}$  изготовлен из ферромагнитной ленты толщиной  $2a = 0,016 \text{ мм}$ . Относительная магнитная проницаемость материала  $\mu_r = 400$ , удельная проводимость  $\sigma = 10^5 \text{ См/см}$ , плотность стали  $\gamma = 7,2 \text{ г/см}^3$ . Трансформатор работает на частоте  $10 \text{ кГц}$ .

Определить среднюю комплексную проницаемость ленты и мощность потерь на вихревые токи при действующем значении напряженности магнитного поля токов обмоток  $2 \text{ А/см}$ .

Вычислить, как изменятся эти величины, если магнитопровод изготовить из ленты толщиной  $0,06 \text{ мм}$  или из листов того же материала толщиной  $0,2$  или  $0,5 \text{ мм}$ .

**19.37.** Магнитопровод трансформатора набран из листов трансформаторной стали толщиной  $a_1 = 0,5 \text{ мм}$ . Удельная про-

водимость стали  $10^5$  См/см, относительная магнитная проницаемость — 400. Трансформатор работает на частоте  $f_1 = 50$  Гц.

Определить среднюю комплексную проницаемость листа на заданной частоте  $f_1$  и при частоте  $f_2 = 10$  кГц. Выяснить, как надо изменить толщину листа, чтобы средняя проницаемость при частоте  $f_2$  осталась равной проницаемости при частоте  $f_1$ .

**19.38(Р).** К первичной обмотке трансформатора приложено напряжение  $u_1 = 100 \sin 12\,000t + 50 \sin 60\,000t$  В. Магнитопровод набран из листов трансформаторной стали толщиной  $2a = 0,2$  мм; удельная проводимость стали  $\sigma = 10^4$  См/см, относительная проницаемость  $\mu_r = 800$ , сечение стали  $S = 2$  см<sup>2</sup>, средняя длина магнитной линии  $l = 10$  см. Первичная и вторичная обмотки имеют по  $w_1 = w_2 = 100$  витков. Можно считать, что сопротивление  $r = 2$  Ом и индуктивность рассеяния  $L_d = 0,5$  мГн каждой обмотки не зависят от частоты.

Определить напряжение на вторичной обмотке и ток в первичной обмотке при сопротивлении нагрузки: а)  $Z_H = \infty$  и б)  $Z_H = r_H = 100$  Ом.

**Решение.** Расчет можно выполнить отдельно для каждой гармоники. Уравнения для первичного и вторичного контуров

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 (r_1 + j\omega L_{1d}) + j\omega \Phi_0 w_1 &= \dot{U}_1; \\ -\dot{I}_2 (Z_H + r_2 + j\omega L_{2d}) + j\omega \Phi_0 w_2 &= 0, \end{aligned}$$

где основной магнитный поток  $\Phi_0 = \dot{H}_0 \mu_0 \mu_r c_p S$  и  $\dot{H}_0 l = \dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_2 w_2$ .

Совместное решение этих уравнений приводит к выражению

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \dot{I}_2 Z_H / \dot{U}_1 = Z_{21} Z_H / (Z_{11} Z_{22} - Z_{21}^2),$$

где  $Z_{11} = r_1 + j\omega L_{1d} + j\omega w_1^2 \mu_0 \mu_r c_p S / l$ ;  $Z_{21} = j\omega w_1 w_2 \mu_0 \mu_r c_p S / l$ ;  $Z_{22} = Z_H + r_2 + j\omega L_{2d} + j\omega w_2^2 \mu_0 \mu_r c_p S / l$ .

Среднее значение магнитной проницаемости

$$\mu_{r\text{cp}} = \mu_r \operatorname{th} \gamma a / \gamma a.$$

При  $\omega_1 = 12\,000$  рад/с получим:  $\gamma_1 = 34,8 \angle 45^\circ \text{ см}^{-1}$ ;  $\gamma_1 a = 0,348 \angle 45^\circ = 0,246 (1 + j1)$ ;  $\operatorname{th} \gamma_1 a = 0,348 \angle 42^\circ 40'$ ;  $\mu_{1r\text{cp}} = 800 \angle -2^\circ 20'$ ;  $Z_{11} = 11,6 + j246$  Ом;  $Z_{22} = Z_H + 11,6 + j246$  Ом;  $Z_{12} = 9,6 + j240$  Ом  $= 240 \angle 87^\circ 42'$  Ом;  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,975 \angle 0^\circ 28' Z_H / (3,9 + j12 + Z_H)$ .

Аналогично при  $\omega_5 = 60\,000$  рад/с получим:  $\mu_{5r\text{cp}} = 760 \angle -11^\circ 20'$ ;  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,97 \angle 0^\circ 14' Z_H / (4 + j60 + Z_H)$ .

а)  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,975 \angle 0^\circ 28'$  при  $\omega = \omega_1$  и  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,97 \angle 0^\circ 14'$  при  $\omega = \omega_5$ . Кривая  $u_2$  практически не отличается от кривой

$u_1$ . При  $Z_H = \infty$  для каждой гармоники  $\dot{I}_1 = \dot{U}_2 / Z_{21}$  и мгновенное значение первичного тока

$$i_1 = 406 \sin(12\,000t - 87^\circ 14') + 42,5 \sin(60\,000t - 78^\circ 26') \text{ мА.}$$

б)  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,932 \angle -6^\circ 07'$  при  $\omega = \omega_1$  и  $\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,808 \angle -30^\circ$  при  $\omega = \omega_5$  и  $u_2 = 93,2 \sin(12\,000t - 6^\circ 07') + 40,4 \sin(60\,000t - 30^\circ)$  В. При такой нагрузке кривая  $u_2$  заметно отличается от кривой  $u_1$ .

Для каждой гармоники тока

$$\dot{I}_1 = (Z_{22} / Z_{21}) \dot{U}_2 / Z_H.$$

Мгновенное значение первичного тока

$$i_1 = 1045 \sin(12\,000t - 22^\circ 05') + 423 \sin(60\,000t - 34^\circ 30') \text{ мА.}$$

**19.39(Р).** В прямоугольном пазу машины, открытом сверху, заложена медная шина (рис. 19.39). Высота шины  $h = 1,5$  см, ширина  $b = 0,5$  см. Толщина изоляции между шиной и пазом мала и можно считать, что ширина паза практически равна ширине шины. Проницаемость стали велика: ее можно считать бесконечно большой. Поверхностный эффект в стальных листах отсутствует, так как они достаточно тонкие. Удельная проводимость меди  $\sigma = 5,7 \cdot 10^5$  См/см. Ток в шине  $\dot{I} = 100$  А, его частота  $f = 50$  Гц.

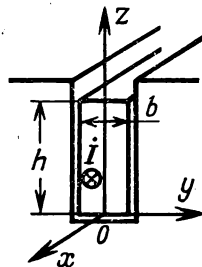


Рис. 19.39

Определить: а) распределение плотности тока в шине; б) координату  $z_1$  точек, где плотность тока совпадает по фазе с током в шине, и значение этой плотности тока; в) активное и внутреннее реактивное сопротивление шины на 1 м длины; г) мощность потерь в шине на 1 м длины.

Решение. а) Плотность тока в шине распределена по закону  $\dot{J} = \dot{J}_x = \dot{J}_0 \operatorname{ch} \gamma z$ , где  $\dot{J}_0 = -\dot{I} \gamma / b \operatorname{sh} \gamma h = -118 \angle -46^\circ 7' \text{ А/см}^2$  — плотность тока на нижней грани шины, т.е. при  $z = 0$  (знак минус получен потому, что положительное направление тока выбрано навстречу направлению оси  $x$ ); по (19.16)  $\gamma = 1,5 \angle 45^\circ = 1,06(1 + j1) \text{ см}^{-1}$  (см. также более подробное решение задачи 19.41).

При  $z = h$  получается максимальное по модулю значение плотности тока:  $\dot{J}_{\max} = \dot{J}_0 \operatorname{ch} \gamma h = -276 \angle 45^\circ 10' \text{ А/см}^2$ .

б) Запишем  $\operatorname{ch} \gamma z_1 = \operatorname{ch} \alpha z_1 \cos \beta z_1 + j \operatorname{sh} \alpha z_1 \sin \beta z_1$  в виде  $A \angle \varphi_1$ . Из полученного значения  $\dot{J}_0$  видно, что плотность тока в точке  $z_1$  будет совпадать по фазе с общим током

в шине, если  $\varphi_1 = 46^\circ 7'$ , при этом  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{th} \alpha z_1 \operatorname{tg} \beta z_1 = \operatorname{tg} 46^\circ 7' = 1,04$  ( $\alpha = \beta = 1,06 \text{ см}^{-1}$ ). Из таблиц тригонометрических и гиперболических функций определяем  $\alpha z_1 = 0,95$  и  $z_1 = 0,895 \text{ см}$ . В этих точках  $J = -147,5 \angle 0^\circ \text{ А/см}^2$ .

в) Комплексное сопротивление шины длиной  $l = 1 \text{ м}$

$$\underline{Z} = r + jx_{\text{вт}} = \frac{l\gamma}{b\sigma} \operatorname{cth} \gamma h = 3,41 \cdot 10^{-4} + j3,43 \cdot 10^{-4} \text{ Ом},$$

где  $x_{\text{вт}}$  — реактивное сопротивление, определяемое потоком внутри шины.

Сопротивление этой же шины постоянному току  $R = l/bh\sigma = 2,34 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$ .

г) Мощность потерь в шине (длиной  $1 \text{ м}$ )  $P = rI^2 = 3,41 \text{ Вт}$ .

**19.40.** Для шины задачи 19.39 определить, при какой высоте ее активное сопротивление минимально и чему при этом равно комплексное сопротивление шины.

**19.41(Р).** В прямоугольном пазу машины находятся две последовательно соединенные медные шины (рис. 19.41). Размеры шин и допущения те же, что и в задаче 19.39. Ток в каждой шине  $I = 100 \text{ А}$ ;  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Определить: а) распределение плотности тока в каждой шине; б) активное и внутреннее реактивное сопротивления шин на  $1 \text{ м}$  длины; в) мощность потерь в шинах на  $1 \text{ м}$  длины. Сопоставить значения этих величин со значениями, получаемыми при одной шине двойной высоты, по которой протекает двойной ток.

Решить дополнительно задачу для случаев: А) высота шин уменьшена в 2 раза; Б) высота шин увеличена в 2 раза.

**Решение.** а) На распределение электромагнитного поля в нижней шине наличие верхней шины не оказывает влияния. Действительно, граничные условия для нижней шины остаются теми же, что и в задаче 19.39:  $\dot{H} = 0$  при  $z = 0$  и  $\dot{H} = I/b$  при  $z = h$ , поэтому в нижней шине

$$\dot{H}_n = \dot{H}_{ny} = \frac{I}{b \operatorname{sh} \gamma h} \operatorname{sh} \gamma z; \quad \dot{E}_n = \dot{E}_{nx} = - \frac{I\gamma}{b\sigma \operatorname{sh} \gamma h} \operatorname{ch} \gamma z.$$

Для верхней шины граничные условия другие:  $\dot{H}_b = I/b$  при  $z = h$  и  $\dot{H}_b = 2I/b$  при  $z = 2h$ .

Решение целесообразно искать в виде

$$\dot{H}_b = \dot{H}_{by} = \dot{A}_1 \operatorname{sh} \gamma (2h - z) + \dot{A}_2 \operatorname{sh} \gamma (z - h),$$

где  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$  — постоянные.

При  $z = h$  получим  $I/b = \dot{A}_1 \operatorname{sh} \gamma h$  и при  $z = 2h$  получим  $2I/b = \dot{A}_2 \operatorname{sh} \gamma h$ . Из этих выражений определим постоянные

$$\dot{A}_1 = \dot{I}/b \operatorname{sh} \gamma h = \dot{A}_2/2, \text{ т. е.}$$

$$\dot{H}_b = \frac{\dot{I}}{b \operatorname{sh} \gamma h} [\operatorname{sh} \gamma (2h - z) + 2 \operatorname{sh} \gamma (z - h)].$$

Напряженность электрического поля теперь находим по первому уравнению Максвелла (19.16) для проводящей среды:

$$\dot{E}_b = \dot{E}_{bx} = -\frac{1}{\sigma} \frac{d\dot{H}_{by}}{dz} = \frac{\dot{I}\gamma}{\sigma b \operatorname{sh} \gamma h} [\operatorname{ch} \gamma (2h - z) - 2 \operatorname{ch} \gamma (z - h)].$$

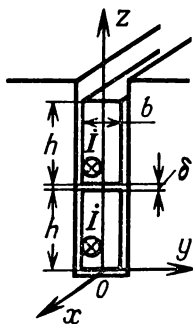


Рис. 19.41

При указанных в условии параметрах  $\gamma h = 1,59(1 + j1)$ ;  $\dot{J}_n = \sigma \dot{E}_n = (-118 \angle -46^\circ 7') \times \operatorname{ch} \gamma z$  А/см<sup>2</sup>;  $\dot{J}_a = \sigma \dot{E}_a = (-118 \angle -46^\circ 7') [2 \operatorname{ch} \gamma (z - h) - \operatorname{ch} \gamma (2h - z)]$  А/см<sup>2</sup>.

На границах шин  $\dot{J}_n(0) = -118 \angle -46^\circ 7'$  А/см<sup>2</sup>;  $\dot{J}_n(h) = -276 \angle 45^\circ 10'$  А/см<sup>2</sup>;  $\dot{J}_a(h) = 368 \angle 85^\circ$  А/см<sup>2</sup>;  $\dot{J}_a(2h) = 570 \angle -122^\circ 51'$  А/см<sup>2</sup>.

Годограф вектора плотности тока в шинах показан на рис. 19.41Р.

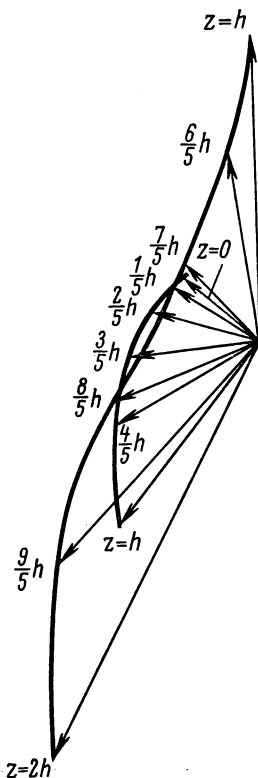


Рис. 19.41Р

б) По (19.266) вектор Пойнтинга  $\underline{\Pi} = \underline{\Pi}_z = \dot{E}_x \dot{H}_y^*$ , т. е.  $\underline{\Pi}'_n = 0$  при  $z = 0$ ;  $\underline{\Pi}'_n = -I^2 \gamma \operatorname{ch} \gamma h / \sigma b^2 \operatorname{sh} \gamma h$  при  $z = h$ ;  $\underline{\Pi}'_a = \frac{I^2 \gamma}{\sigma b^2 \operatorname{sh} \gamma h} (\operatorname{ch} \gamma h - 2)$  при  $z = h$ ;  $\underline{\Pi}''_b = \frac{2I^2 \gamma}{\sigma b^2 \operatorname{sh} \gamma h} (1 - 2 \operatorname{ch} \gamma h)$



при  $z = 2h$ .

Комплексное сопротивление нижней шины

$$\underline{Z}_н = -\frac{\underline{\Pi}_н''}{I^2} = \frac{l\underline{\gamma}}{\sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} \operatorname{ch} \underline{\gamma} h.$$

Комплексное сопротивление верхней шины

$$\underline{Z}_в = \frac{(\underline{\Pi}_в' - \underline{\Pi}_в'')}{I^2} = \frac{l\underline{\gamma}}{\sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} (5 \operatorname{ch} \underline{\gamma} h - 4).$$

Сопротивление двух последовательно соединенных шин

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_н + \underline{Z}_в = \frac{\underline{\gamma} l}{\sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} (6 \operatorname{ch} \underline{\gamma} h - 4).$$

При указанных в условии параметрах  $\underline{Z}_н = 3,41 \cdot 10^{-4} + j3,43 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $\underline{Z}_в = 11,4 \cdot 10^{-4} + j23,3 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 14,8 \times 10^{-4} + j26,7 \cdot 10^{-4}$  Ом.

в)  $P_2 = r_2 I^2 = 14,8$  Вт.

В случае одной шины двойной высоты, по которой протекает двойной ток (см. решение задачи 19.39),

$$\underline{j} = -\frac{2I\underline{\gamma}}{b \operatorname{sh} 2\underline{\gamma} h} \operatorname{ch} \underline{\gamma} z = (50 \angle 43^\circ) \operatorname{ch} \underline{\gamma} z \text{ А/см}^2.$$

На границах шины  $\underline{j}(0) = 50 \angle 43^\circ \text{ А/см}^2$ ;  $\underline{j}(2h) = 600 \angle 225^\circ \text{ А/см}^2$ .

Комплексное сопротивление шины

$$\underline{Z}_1 = \frac{l\underline{\gamma}}{\sigma b \operatorname{sh} 2\underline{\gamma} h} \operatorname{ch} 2\underline{\gamma} h = 3,72 \cdot 10^{-4} + j3,72 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}.$$

Мощность потерь (в 1 м шины)  $P_1 = r_1 (2I)^2 = 14,9$  Вт.

Таким образом, мощность потерь в шине в этом случае практически равна мощности потерь в обеих шинах в предыдущем случае.

А) При уменьшении высоты шины в 2 раза  $\underline{\gamma} h = 0,795(1 + j1)$ ;  $\underline{j}_н = (-266 \angle -12^\circ) \operatorname{ch} \underline{\gamma} z \text{ А/см}^2$ ;  $\underline{j}_в = (-266 \angle -12^\circ) [2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}(z - h) - \operatorname{ch} \underline{\gamma}(2h - z)] \text{ А/см}^2$ ;  $\underline{Z}_н = 4,31 \times 10^{-4} + j1,74 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $\underline{Z}_в = 5,95 \cdot 10^{-4} + j13,6 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 10,26 \cdot 10^{-4} + j15,34 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $P_2 = 10,26$  Вт.

При одной шине двойной высоты  $\underline{Z}_1 = 3,41 \cdot 10^{-4} + j3,43 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $P_1 = 13,64$  Вт.

В этом случае мощность потерь в одной шине больше, чем в двух шинах полдвойной высоты, т. е. разделение шины на две половинной высоты приводит к уменьшению потерь.

Б) При увеличении высоты шины в 2 раза  $\underline{\gamma} h = 3,18 \times (1 + j1)$ ;  $\underline{j}_н = (25 \angle 43^\circ) \operatorname{ch} \underline{\gamma} z \text{ А/см}^2$ ;  $\underline{j}_в = (25 \angle 43^\circ) [2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}(z - h) -$

—  $\text{ch } \gamma(2h - z)] \quad \text{А/см}^2; \quad \underline{Z}_n = 3,72 \cdot 10^{-4} + j3,72 \cdot 10^{-4} \quad \text{Ом};$   
 $\underline{Z}_b = 19,9 \cdot 10^{-4} + j19,8 \cdot 10^{-4} \quad \text{Ом}; \quad \underline{Z}_2 = 23,62 \cdot 10^{-4} + j23,52 \times$   
 $\times 10^{-4} \quad \text{Ом}; \quad P_2 = 23,6 \quad \text{Вт}.$

При одной шине двойной высоты  $\underline{Z}_1 = 3,72 \cdot 10^{-4} +$   
 $+ j3,72 \cdot 10^{-4} \quad \text{Ом}; \quad P_1 = 14,9 \quad \text{Вт}.$

В этом случае разделение шины на две половинной высоты приводит к увеличению потерь.

**19.42(Р).** Построить зависимость сопротивления  $r_2$  двух последовательно соединенных шин задачи 19.41 от их высоты. На том же графике показать зависимость от высоты сопротивления  $r_1$  шины двойной высоты, а также отношение мощности потерь  $P_2$  в двух шинах к мощности потерь  $P_1$  в одной шине двойной высоты (при двойном токе). Определить, при какой высоте шин сопротивление  $r_2$  минимально.

**Решение.** Сопротивление двух последовательно соединенных шин найдено в задаче 19.41:

$$\underline{Z}_2 = \frac{\gamma l}{\sigma b \text{ sh } \gamma h} (6 \text{ ch } \gamma h - 4) = r_2 + jx_2.$$

Экстремальные значения  $r_2$  определяются из условия

$$dr_2/dh = 0. \quad (\text{a})$$

Проще сначала дифференцировать  $\underline{Z}_2$ :

$$d\underline{Z}_2/dh = \frac{l\gamma^2 (4 \text{ ch } \gamma h - 6)}{\sigma b \text{ sh}^2 \gamma h}.$$

После отделения действительной части от мнимой уравнение (a) принимает вид:

$$\text{sh } \alpha h \sin \alpha h (\text{ch}^2 \alpha h + \cos^2 \alpha h - 3 \text{ ch } \alpha h \cos \alpha h) = 0,$$

решения которого  $\text{ch } \alpha h = 2,62 \cos \alpha h$  и  $\sin \alpha h = 0$ .

Первое удовлетворяется значением  $\alpha h = 0,96$ , при этом  $r_2$  минимально. Второе удовлетворяется при  $\alpha h = k\pi$ . Из всех последних экстремумов заметен лишь максимум при  $\alpha h = \pi$ . Уже при  $\alpha h = 2\pi$  сопротивление  $r_2$  практически достигает предельного значения:  $r_2 = 6r_\infty = 6l/\sigma b z_0$ .

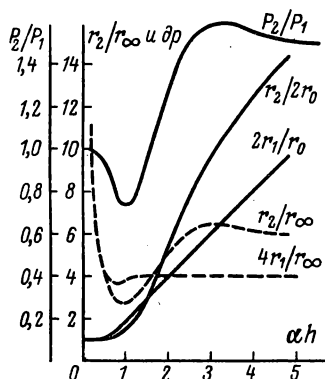


Рис. 19.42Р

На рис. 19.42Р представлены требуемые по условию задачи зависимости ( $r_0 = l/\sigma b h$  — сопротивление постоянному току).

**19.43(Р).** Для шин задачи 19.41 сравнить комплексную мощность, выходящую из нижней грани верхней шины (длиной  $l$ ), с комплексной мощностью, входящей в верхнюю грань нижней шины. Объяснить причину неравенства этих мощностей.

Определить, при какой высоте шин активная мощность, выходящая из нижней грани верхней шины, равна нулю и каковы при этом мощности, проходящие через другие горизонтальные грани шин, и комплексные сопротивления каждой шины.

**Решение.** Комплексный вектор Пойнтинга был определен в решении задачи (19.41). Комплексная мощность, выходящая из нижней грани верхней шины,

$$\underline{S}'_в = -\underline{\Pi}'_в l b = \frac{I^2 \underline{\gamma} l}{\sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} (2 - \operatorname{ch} \underline{\gamma} h),$$

а комплексная мощность, входящая в верхнюю грань нижней шины,

$$\underline{S}''_н = -\underline{\Pi}''_н l b = \frac{I^2 \underline{\gamma} l}{\sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} \operatorname{ch} \underline{\gamma} h.$$

Мощности равны только при постоянном токе, когда  $\underline{\gamma} = 0$  и  $\operatorname{ch} \underline{\gamma} h = 1$ , при переменном токе мощности различны. Это объясняется тем, что существует еще мощность, проходящая через торцевые зазоры между шинами при любой малости этих зазоров. Действительно, мощность, входящая между шинами через задний зазор  $\delta$  (рис. 19.41),  $\underline{S}'_т = -\underline{E}'_z \underline{H}^*_{\gamma} b \delta$ , а мощность, входящая между шинами через передний зазор,  $\underline{S}''_т = \underline{E}''_z \underline{H}^*_{\gamma} b \delta$ .

Через оба торцевых зазора входит мощность

$$\underline{S}_т = \underline{S}''_т + \underline{S}'_т = (\underline{E}''_z - \underline{E}'_z) \underline{H}^*_{\gamma} b \delta.$$

Разность напряженностей электрического поля определим, применив закон электромагнитной индукции к контуру, проходящему по нижней грани верхней шины, переднему торцу зазора, верхней грани нижней шины и заднему торцу зазора:

$$\underline{E}'_в l - \underline{E}'_z \delta - \underline{E}''_н l + \underline{E}''_z \delta = 0.$$

В правой части уравнения — нуль, так как считаем, что зазор очень мал, и магнитным потоком через него пренебрегаем. Искомая разность напряженностей электрического поля

$$\underline{E}''_z - \underline{E}'_z = \frac{\underline{E}'_в - \underline{E}''_н}{\delta} l = \frac{\underline{I} \underline{\gamma} l}{\delta \sigma b \operatorname{sh} \underline{\gamma} h} (2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} h - 2)$$

и мощность

$$\underline{S}_T = 2I^2\gamma(\operatorname{ch} \gamma h - 1)/\sigma b \operatorname{sh} \gamma h.$$

Ясно, что теперь баланс мощностей выполняется:  $\underline{S}'' = \underline{S}'_b + \underline{S}_T$ .

Активная мощность, выходящая из нижней грани верхней шины, равна нулю, если

$$\operatorname{Re} \underline{S}'_b = \operatorname{Re} \frac{I^2 \gamma l (2 - \operatorname{ch} \gamma h)}{\sigma b \operatorname{sh} \gamma h} = 0.$$

После преобразований получим уравнение

$$\operatorname{sh} 2\alpha h + \sin 2\alpha h = 4(\operatorname{sh} \alpha h \cos \alpha h + \operatorname{ch} \alpha h \sin \alpha h).$$

Это уравнение можно решить построением левой и правой его частей. В точке пересечения  $\alpha h = 1,49$ , при этом комплексная мощность, входящая через верхнюю грань верхней шины,  $\underline{S}'_b = I^2 r_0 (4,12 + j6,51)$ , комплексная мощность, выходящая через нижнюю грань верхней шины,  $\underline{S}'_b = I^2 r_0 (-j2,53)$ , комплексная мощность, входящая через верхнюю грань нижней шины,  $\underline{S}'' = I^2 r_0 (1,36 + j1,32)$ , где  $r_0 = l/\sigma b h$  — сопротивление шины постоянному току.

Комплексное сопротивление верхней шины  $\underline{Z}_b = r_0 (4,12 + j9,04)$ . Комплексное сопротивление нижней шины  $\underline{Z}_n = r_0 (1,36 + j1,32)$ .

**19.44.** Определить активное и внутреннее индуктивное сопротивления 1 м медного провода диаметром 2 мм при частотах: 1) 50 Гц; 2) 5 кГц; 3) 50 МГц. Удельная проводимость меди  $57 \cdot 10^4$  См/см.

Найти отношение комплексной плотности тока на поверхности проводника к комплексной плотности тока на оси проводника при частоте 5 кГц.

**19.45.** Найти, при каком диаметре алюминиевого провода плотность тока на его оси в любой момент времени противоположна по направлению плотности тока на поверхности, если частота тока 500 Гц. Удельная проводимость алюминия равна  $35 \cdot 10^4$  См/см.

Определить отношение амплитуд плотности тока на поверхности и на оси.

**19.46.** Для провода задачи 19.45 определить отношение радиуса провода к глубине проникновения и разность фаз напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности провода.

**19.47.** Сравнить активное  $R$  и внутреннее реактивное  $x$  сопротивления стальной проволоки, определенные по точной

и по приближенной формулам для случая резко выраженного поверхностного эффекта, если радиус проволоки 1 мм, относительная магнитная проницаемость материала 100, удельная проводимость  $10^5$  См/см, частота тока 4550 Гц.

**19.48(Р).** Определить, при каком отношении радиуса  $r_0$  к глубине проникновения  $z_0$ : 1) активное сопротивление и 2) реактивное сопротивление цилиндрического провода можно считать по формуле для резко выраженного поверхностного эффекта, если погрешность должна быть меньше: а) 10%; б) 5%; в) 2%.

**Решение.** Комплексное (активное и внутреннее реактивное) сопротивление цилиндрического провода определяется по формуле

$$\underline{Z}/R_0 = (R + jX)/R_0 = (qr_0/2) \underline{J}_0(qr_0)/\underline{J}_1(qr_0), \quad (a)$$

где  $R_0 = l/\pi r_0^2 \sigma$  — сопротивление постоянному току;  $q = \sqrt{-j\omega\sigma\mu_0}$ ;  $\underline{J}_0$  и  $\underline{J}_1$  — цилиндрические функции первого рода нулевого и первого порядков.

При резко выраженном поверхностном эффекте ( $\omega \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \underline{Z}_\infty/R_0 &= R_\infty/R_0 + jX_\infty/R_0 = jqr_0/2 = \\ &= j\gamma r_0/2 = (a\gamma r_0 + j\alpha r_0)/2. \end{aligned}$$

Формулу (a) можно представить в виде

$$\underline{Z}/R_\infty = (1 - j1) \underline{J}_0(qr_0)/\underline{J}_1(qr_0).$$

Для больших аргументов справедливы асимптотические представления цилиндрических функций первого рода

$$\begin{aligned} \underline{J}_0(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} + \dots\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{1^2}{1! 8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} - \dots\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]; \\ \underline{J}_1(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[ \left(1 + \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2! (8x)^2} - \dots\right) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1 \cdot 3}{1! 8x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3! (8x)^3} + \dots\right) \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Если мнимая часть аргумента  $x$  намного больше единицы (более 2,5 — 3), то  $\lg(x - \pi/4) \approx -j1$ , при этом

$$\frac{\underline{Z}}{R_0} = j \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - j \frac{3}{16x} - \frac{3}{16x^2} + j \frac{63}{256x^3} + \dots,$$

где  $x = a - ja = qr_0$ ;  $a = \alpha r_0 = r_0/z_0$ .

Разделив ряд на действительную и мнимую части, получим:

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{a}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2a} + \frac{3}{16a^2} - \frac{63}{512a^4} \dots \right) + \right. \\ \left. + j \left( 1 - \frac{3}{16a^2} - \frac{3}{16a^3} - \frac{63}{512a^4} \dots \right) \right].$$

Следовательно,

$$\frac{R}{R_\infty} = 1 + \frac{1}{2a} + \frac{3}{16a^2} - \frac{63}{512a^4} \dots; \\ \frac{X}{R_\infty} = 1 - \frac{3}{16a^2} - \frac{3}{16a^3} - \frac{63}{512a^4} \dots$$

1) Активное сопротивление можно считать по приближенной формуле для резко выраженного поверхностного эффекта с погрешностью не более 10 %, если

$$\frac{R}{R_\infty} = 1,1 = 1 + \frac{1}{2a} + \frac{3}{16a^2} - \dots$$

Решение этого уравнения дает:  $r_0/z_0 = a = 5,35$ ; при погрешности 5 % получим  $a = 10,35$ ; при погрешности 2 % получим  $a = 25,35$ .

2) Реактивное сопротивление можно считать по приближенной формуле для резко выраженного поверхностного эффекта с погрешностью до 5 %, если  $X/R_\infty = 0,95 = 1 - 3/16a^2 - 3/16a^3 - 63/512a^4 \dots$ , т. е. при  $r_0/z_0 = a = 2,4$ . При погрешности 2 % получим  $a = 3,53$ .

**19.49(P).** Определить, при каком отношении радиуса  $r_0$  к глубине проникновения  $z_0$  активное сопротивление цилиндрического провода можно считать по формуле для постоянного тока, если погрешность должна быть меньше: а) 10 %; б) 5 %; в) 2 %.

Вычислить внутреннее реактивное сопротивление (по отношению к сопротивлению постоянному току).

Решение. При небольших значениях аргументов цилиндрические функции первого рода представляются в виде рядов:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots; \\ J_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots,$$

при этом комплексное сопротивление цилиндрического провода, отнесенное к его сопротивлению постоянному току  $R_0$ ,

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{x}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{2!4!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 - \dots,$$

где  $x = qr_0 = r_0 \sqrt{-j\omega\sigma\mu_r\mu_0} = a - ja = (1 - j1) r_0/z_0$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{Z}{R_0} = \frac{R}{R_0} + j \frac{X}{R_0} &= \left[ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^4 - \frac{4}{45} \left(\frac{a}{2}\right)^8 + \dots \right] + \\ &+ j \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{13}{270} \left(\frac{a}{2}\right)^8 - \dots \right]. \end{aligned}$$

а) Активное сопротивление можно считать по формуле для постоянного тока с погрешностью не более 10%, если

$$1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^4 - \left(\frac{4}{45}\right) \left(\frac{a}{2}\right)^8 + \dots = 1,1, \text{ откуда } r_0/z_0 = a = 1,51.$$

б) При погрешности 5% получим  $a = 1,26$ .

в) При погрешности 2% имеем  $a = 1,0$ .

Внутреннее реактивное сопротивление при этих значениях

$$r_0/z_0: \quad \text{а) } \frac{X}{R_0} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{13}{270} \left(\frac{a}{2}\right)^8 \dots \right] = 0,536;$$

б)  $X/R_0 = 0,387$ ; в)  $X/R_0 = 0,248$ .

**19.50(Р).** Бесконечно длинный ферромагнитный цилиндр радиусом  $r_0$ , относительная магнитная проницаемость материала которого  $\mu_r$  и удельная проводимость  $\sigma$ , находится в однородном переменном магнитном поле напряженностью  $\dot{H}_0$ , параллельном оси цилиндра.

Определить электромагнитное поле внутри цилиндра, магнитный поток в цилиндре и среднее значение относительной комплексной проницаемости цилиндра  $\mu_{cp} = \dot{B}_{cp}/\mu_0 \dot{H}_0$ . Построить график  $\mu_{cp} |qr_0|$ , где  $q = \sqrt{-j\omega\sigma\mu_r\mu_0}$ .

Задачу решить: а) непосредственным интегрированием уравнений поля; б) считая известным распределение электромагнитного поля в цилиндрическом проводнике с током  $\dot{I}$ :

$$\dot{E} = \frac{i q}{2\pi r_0 \sigma J_1(qr_0)} J_0(qr); \quad \dot{H} = \frac{i}{2\pi r_0 J_1(qr_0)} J_1(qr).$$

**Решение.** а) Направим ось  $z$  цилиндрической системы координат по оси цилиндра. Из симметрии следует, что вектор напряженности магнитного поля имеет только  $z$ -ю составляющую, а вектор напряженности электрического поля —

только  $\alpha$ -ю составляющую. Кроме того, векторы поля зависят только от координаты  $r$ . Поэтому уравнение поля в проводящей среде (19.126) при  $\underline{\gamma}$  по (19.16) в рассматриваемом случае упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\dot{H}}{dr} \right) - \underline{\gamma}^2 \dot{H} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{H}}{dr} - \underline{\gamma}^2 \dot{H} = 0.$$

Вводя  $q^2 = -\underline{\gamma}^2$  и деля полученное уравнение на  $q^2$ , приходим к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{d(qr)^2} + \frac{1}{(qr)} \frac{d\dot{H}}{d(qr)} + \dot{H} = 0,$$

решение которого будем искать в виде

$$\dot{H} = \dot{A}_1 \underline{J}_0(qr) + \dot{A}_2 \underline{N}_0(qr),$$

где  $\underline{J}_0(qr)$  и  $\underline{N}_0(qr)$  — соответственно цилиндрические функции первого и второго рода нулевого порядка.

Функция  $\underline{N}_0(qr)$  стремится к бесконечности, когда аргумент стремится к нулю. Вместе с тем напряженность магнитного поля на оси цилиндра конечна, поэтому  $\dot{A}_2 = 0$  и  $\dot{H} = \dot{H}_z = \dot{A}_1 \underline{J}_0(qr)$ . На оси цилиндра ( $r = 0$ ) имеем  $\dot{H}(0) = \dot{A}_1$ , так как  $\underline{J}_0(0) = 1$ . Отсюда ясен смысл постоянной  $\dot{A}_1$  — это напряженность магнитного поля на оси цилиндра.

Следовательно,  $\dot{H} = \dot{H}(0) \underline{J}_0(qr)$ . На поверхности цилиндра ( $r = r_0$ ) напряженность магнитного поля задана ( $\dot{H}_0$ ), поэтому  $\dot{H}_0 = \dot{H}(0) \underline{J}_0(qr_0)$ , и выражение для напряженности магнитного поля можно представить в виде

$$\dot{H} = \dot{H}_0 \underline{J}_0(qr) / \underline{J}_0(qr_0).$$

Напряженность электрического поля определим из первого уравнения Максвелла (19.16) для проводника:

$$\dot{E} = \dot{E}_\alpha = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}_\alpha \dot{H} = -\frac{1}{\sigma} \frac{d\dot{H}_z}{dr} = \frac{\dot{H}_0 q}{\sigma \underline{J}_0(qr_0)} \underline{J}_1(qr).$$

Магнитный поток в цилиндре определим при помощи закона электромагнитной индукции:

$$\Phi = \dot{E}(r_0) 2\pi r_0 / (-j\omega) = 2\pi r_0 \dot{H}_0 \mu_r \mu_0 \underline{J}_1(qr_0) / q \underline{J}_0(qr_0).$$

Среднее значение магнитной индукции в цилиндре

$$\dot{B}_{cp} = \Phi / \pi r_0^2 = 2 \dot{H}_0 \mu_r \mu_0 \underline{J}_1(qr_0) / qr_0 \underline{J}_0(qr_0).$$

Среднее значение комплексной проницаемости цилиндра

$$\underline{\mu}_{r\text{cp}} = \dot{B}_{cp} / \mu_0 \dot{H}_0 = 2 \mu_r \underline{J}_1(qr_0) / qr_0 \underline{J}_0(qr_0).$$



б) Из симметрии уравнений Максвелла следует, что при одинаковых граничных поверхностях и аналогичных внешних

$$\begin{aligned} \dot{E} &\rightleftharpoons \dot{H}; \quad \sigma \rightleftharpoons -j\omega\mu_r\mu_0; \\ \dot{I} &\rightleftharpoons -j\omega\dot{\Phi} \quad (\dot{I} = \int \sigma \dot{E} dS \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons -\int j\omega\mu_r\mu_0 \dot{H} dS = -j\omega\dot{\Phi}). \end{aligned}$$

шение «магнитной» задачи, данное в п. «а»).

Считать, что длина катушки и цилиндра намного больше диаметра катушки.

**19.53.** Тороидальный магнитопровод катушки изготовлен из стальной проволоки диаметром  $2r_0 = 0,4$  мм с относительной проницаемостью  $\mu_r = 2000$  и удельной проводимостью  $\sigma = 10^5$  См/см. Число витков проволоки  $n = 2000$ . Отношение сечения стали к общему сечению магнитопровода  $S_1/S = 0,6$ . Число витков обмотки  $w = 1000$ . Средняя длина магнитной линии  $l = 30$  см.

672

**19.54.** В переменном магнитном поле катушки параллельно ее оси расположены изолированные друг от друга проволоки.

Определить, при каком значении радиуса проволок и неизменных проводимости и магнитной проницаемости материала, частоте и амплитуде тока средняя по объему удельная мощность потерь в проволоках будет максимальной. Найти эту максимальную мощность.

Считать, что длины катушки и проволоки намного больше диаметра катушки.

**19.55.** В катушку с числом витков  $w = 1000$  вставляется ферромагнитный цилиндр диаметром  $2r_0 = 1$  см. Относительная магнитная проницаемость материала  $\mu_r = 5$ , удельная проводимость  $\sigma = 5 \cdot 10^4$  См/см; длины катушки  $l = 20$  см и цилиндра намного больше диаметра катушки.

Определить, при какой частоте тока в катушке ее индуктивное сопротивление не изменится в результате введения цилиндра и насколько при этом изменится ее активное сопротивление.

**19.56.** Решить задачу 19.55 при относительной магнитной проницаемости  $\mu_r = 500$ .

**19.57.** Определить сопротивление  $Z_0$  на единицу длины двухпроводной воздушной линии при частоте тока 16 кГц. Выделить составляющие  $Z_0$ , обусловленные: а) полем в воздухе между проводами и б) полем в проводах.

Расстояние между осями проводов  $2a = 50$  см настолько велико, что влиянием магнитного поля одного провода на другой (эффект близости) можно пренебречь. Радиус провода  $r_0 = 1$  мм. Материал проводов — бронза, для которой  $\sigma = 3,6 \cdot 10^5$  См/см;  $\mu_r = 1$ .

**19.58.** По медной трубе в направлении ее оси проходит ток.

Определить активное и внутреннее реактивное сопротивление трубы длиной  $l = 1$  м, радиусами  $r_1 = 2,5$  см и  $r_2 = 3,5$  см при частотах: а) 0; б) 50 Гц; в) 5 кГц.

Удельная проводимость меди  $\sigma = 57 \cdot 10^4$  См/см.

**19.59.** Найти распределение электромагнитного поля: а) в жиле; б) в оболочке; в) между жилой и оболочкой в медном коаксиальном кабеле с радиусами жилы  $r_0$  и оболочек  $r_1, r_2$ . Заданы: ток кабеля  $I$  и напряжение  $U$  между жилой и оболочкой.

**19.60.** Для коаксиального кабеля задачи 19.59 найти общее выражение комплексного сопротивления. Рассмотреть частные случаи: а) низкой частоты (глубина проникновения  $z_0 \gg$

$\gg r_2$  — отсутствует поверхностный эффект как в жиле, так и в оболочке); б) высокой частоты ( $z_0 \ll r_0$ ); в) настолько высокой частоты, что и  $z_0 \ll r_0$  и  $z_0 \ll (r_2 - r_1)$ .

#### 19.4. Волны в диэлектрике, волноводы, резонаторы, излучение

В этом параграфе помещены задачи на следующие темы:

- 1) распространение волн в неограниченном диэлектрике;
- 2) отражение волн от плоской границы раздела сред при нормальном падении;
- 3) возбуждение волн ТЕ и ТМ в волноводах, критическая длина волны, приближенный учет потерь;
- 4) возбуждение полей ТЕ и ТМ в резонаторе, резонансные частоты, добротность;
- 5) мощность излучения диполя.

**19.61(Р).** Приемная антенна выполнена в виде прямоугольной рамки (рис. 19.61) с размерами  $a = 20$  см,  $b = 10$  см.

Рассчитать ЭДС, наводимую в рамке при частоте 5 МГц в поле с напряженностью  $H = 150$  мкА/м. Найти самую низ-

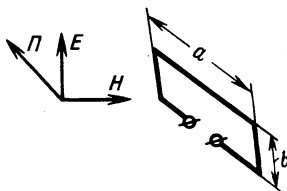


Рис. 19.61

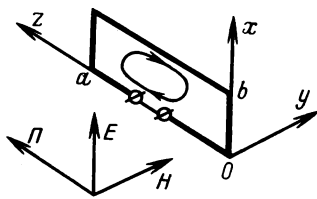


Рис. 19.61Р

кую частоту, при которой можно применить эту рамку, если максимальная чувствительность приемника 10 мкВ. Ответить на вопросы: почему размер рамки в направлении распространения волны не может быть равен целому числу длин волн; какое значение имеет размер рамки в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

**Решение.** Выберем систему координат, как показано на рис. 19.61Р. Примем  $\vec{E} = \vec{E}_x = E_0$  при  $z = 0$ , тогда по (19.23) при  $z = a$  напряженность  $\vec{E} = E_0 e^{-jk a}$ , где  $k = k_0 = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число,  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме.

По закону электромагнитной индукции ЭДС, наводимая в рамке,

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\partial\Phi/\partial t.$$

Поэтому задачу можно решить двумя путями: либо интегрированием напряженности электрического поля по контуру

рамки, либо путем определения производной по времени от магнитного потока, пронизывающего рамку.

Решим задачу первым путем. Обходя контур, как показано на рисунке, получим:

$$\mathcal{E} = \oint \dot{E} dl = E_0 e^{-jk_0 a} b - E_0 b = E_0 b (e^{-jk_0 a} - 1).$$

Если размер рамки  $a$  намного меньше длины волны  $\lambda_0$ , то в разложении показательной функции в степенной ряд можно оставить первые два слагаемых:  $e^{-jk_0 a} \approx 1 - jk_0 a$ , при этом

$$\mathcal{E} = -jk_0 ab E_0 = -j \frac{2\pi ab}{\lambda_0} E_0 = -j 119 \text{ мкВ},$$

где  $E_0 = z_b H_0$  и по (19.24)  $z_b = 376,7 \text{ Ом}$ .

**19.62.** Круглый виток диаметром 20 см находится в электромагнитном поле частотой 1 МГц. Напряженность электрического поля в месте расположения витка 100 мкВ/м.

Расположить виток так, чтобы ЭДС, наводимая в нем, была максимальной, и определить действующее значение этой ЭДС.

**У к а з а н и е.** Электродвижущая сила, наводимая в витке (рамочной антенне), пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего рамку. При неизменной частоте поля ЭДС максимальна при максимальном потоке. Поэтому плоскость рамки должна быть перпендикулярной направлению вектора напряженности магнитного поля. При расчете ЭДС учесть, что размеры рамки намного меньше длины волны, и поэтому можно пренебречь различием фаз напряженности магнитного поля в разных точках внутри витка.

**19.63.** Антенна сделана из ферритового стержня сечением  $0,25 \text{ см}^2$  и имеет в средней части катушку из пятидесяти витков. Средняя магнитная проницаемость стержня (с учетом формы тела — отношение средней индукции внутри стержня к напряженности внешнего магнитного поля, деленное на  $\mu_0$ ) равна 16. Напряженность электрического поля в месте расположения антенны 30 мВ/м.

Определить значение ЭДС, наводимой в катушке приемной антенны, если передающая станция работает на частоте 600 кГц. Считать, что ось катушки совпадает с направлением вектора напряженности магнитного поля.

**19.64.** Энергия плоской волны, падающей в воздухе на нормальную к ней абсолютно поглощающую площадку в  $1 \text{ см}^2$ , составляет 2,2 кал в 1 мин.

Найти амплитуды напряженностей электромагнитного поля волны.

**19.65.** Плоская электромагнитная волна падает на поверхность воды ( $\epsilon_r = 80$ ;  $\sigma = 0,1$  См/см) нормально к ней. Напряженность электрического поля в воздухе у поверхности воды 1 мВ/м.

Определить длину волны в воде и напряженность магнитного поля на глубине, равной длине этой волны. Расчет провести для двух частот: 1) 10 МГц; 2) 50 ГГц.

**19.66.** Решить задачу 19.65 для случая, когда задано значение напряженности электрического поля падающей волны в воздухе у поверхности воды 1 мВ/м.

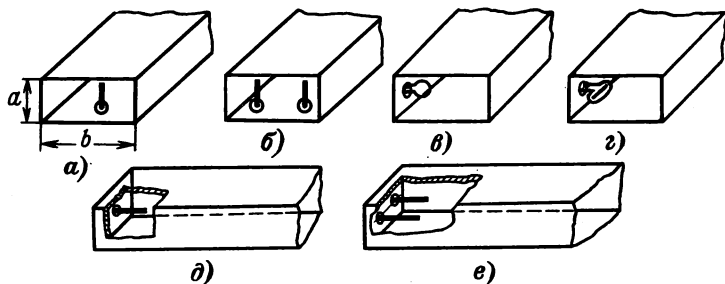


Рис. 19.69

**19.67.** Для уменьшения отражения света от поверхности линз оптических приборов их покрывают слоем лака («просветленная оптика»). Действие этого слоя можно уподобить четвертьволновому трансформатору, согласующему входное сопротивление стекла (равное его волновому сопротивлению при отсутствии отраженной волны) и волновое сопротивление воздуха.

Найти толщину слоя лака и его относительную диэлектрическую проницаемость, если относительная диэлектрическая проницаемость стекла равна 7.

Расчет провести для средней длины волны видимой части спектра 0,6 мкм.

**19.68.** Для уменьшения отражения от идеально проводящей поверхности применили двухслойное покрытие. Первый слой, прилегающий к проводящей поверхности, — диэлектрик с  $\epsilon_r = 2,25$ , второй слой — проводник с  $\sigma = 10^3$  См/см.

Определить толщины диэлектрика и проводника, если нужно получить неотражающее покрытие при частоте 3 ГГц.

**19.69.** На рис. 19.69, а–е изображены различные способы возбуждения прямоугольного волновода. Зная, что штырь по-

мещается в область концентрации электрического поля, а рамка — в область концентрации магнитного поля, определить, какие типы волн могут при этом возбуждаться. Написать уравнения для электрического и магнитного полей. Указать необходимые фазы токов в штырях на рис. 19.69, б и е.

**19.70(Р).** Какие типы волн могут возникнуть в прямоугольном волноводе с поперечными размерами  $34 \times 72$  мм при частотах: 1) 3000 МГц; 2) 9000 МГц, если возбуждение производится: а) электрической антенной (штырем), расположенной в середине широкой стенки волновода (рис. 19.69, а); б) рамкой с током, которая находится в середине узкой стенки и плоскость которой параллельна широкой стенке волновода (рис. 19.69, з). Найти длину волны в волноводе.

**Решение.** В волноводе могут возникнуть те типы волн, у которых критическая длина волны  $\lambda_{кр}$  больше длины волны в свободном пространстве  $\lambda_0$ . Критическая длина волны определяется поперечными размерами волновода  $a$  и  $b$  (рис. 19.69):

$$\lambda_{кр} = \frac{1}{\sqrt{(m/2a)^2 + (n/2b)^2}},$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа.

В табл. 19.70 приведены значения  $\lambda_{кр}$  для разных значений  $m$  и  $n$  при  $a = 34$  мм и  $b = 72$  мм.

Таблица 19.70

$m$	0	0	1	1	1	0	1
$n$	1	2	0	1	2	3	3
$\lambda_{кр}$	14,4	7,2	6,8	6,5	5,1	4,7	4,0
$m$	0	2	2	2	1	0	3
$n$	4	0	1	2	4	5	0
$\lambda_{кр}$	3,6	3,4	3,28	3,25	3,23	2,88	2,3

Из таблицы видно, что при  $f = 3$  ГГц ( $\lambda_0 = 10$  см) в волноводе может распространяться только волна  $TE_{mn}$  при  $m = 0$  и  $n = 1$ . При частоте  $f = 9$  ГГц ( $\lambda_0 = 3,3$  см) в том же волно-

воде могут распространяться волны, типы которых имеют индексы 01, 02, 10, 11, 12, 03, 13, 04, 20.

а) При возбуждении волновода штырем в середине широкой стенки могут возбуждаться волны  $TE_{mn}$  с любым индексом  $m$  и нечетным индексом  $n$ , т.е.  $TE_{01}$  при  $\lambda_0 = 10$  см, и с индексами 01, 11, 03, 13, 21 при  $\lambda_0 = 3,3$  см.

б) При возбуждении рамкой могут возникнуть волны  $TM_{mn}$  с нечетным индексом  $m$ . Следовательно, при  $\lambda_0 = 10$  см волны распространяться не будут, а при  $\lambda_0 = 3,3$  см могут быть волны  $TM_{11}$ ,  $TM_{12}$ ,  $TM_{13}$ .

**19.71.** Определить потери в стенках медного ( $\sigma = 56 \cdot 10^4$  См/см) прямоугольного волновода с поперечными размерами  $34 \times 72$  мм, длиной 50 см при частоте 3 ГГц, если по волноводу бегущей волной типа  $TE_{01}$  переносится мощность 1 кВт. Вычислить коэффициент ослабления для волны этого типа в волноводе и уменьшение (в процентах) амплитуды бегущей волны на расстоянии 50 см.

**19.72.** Решить предыдущую задачу для волны  $TM_{11}$  при частоте 6 ГГц.

**19.73(Р).** Часть прямоугольного волновода с поперечными размерами  $34 \times 72$  мм заполнена диэлектриком ( $\epsilon_r = 2,5 - j0,02$ ).

Определить мощность, проходящую в волновод за диэлектриком, если мощность падающей волны до диэлектрика

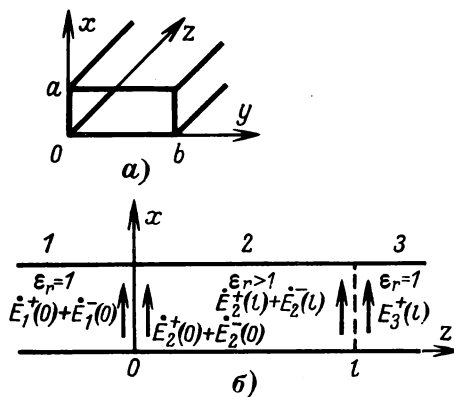


Рис. 19.73Р

$P_0 = 1$  кВт, частота  $3 \cdot 10^9$  Гц, тип колебаний  $TE_{01}$  во всех трех частях волновода, длина заполненной диэлектриком части волновода 0,2 м.

Решение. Мощность, передаваемую по волноводу, выразим при помощи потока вектора Пойнтинга через поперечное сечение волновода. В системе координат, изображенной на рис. 19.73Р, а, для волны  $TE_{01}$  по (19.28) и (19.26б)

$$P = \operatorname{Re} \int (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) dS = \operatorname{Re} \frac{abE_0^2}{2Z_c}, \quad (1)$$

где  $E_0$  — напряженность электрического поля в волноводe при  $y = b/2$  (действующее значение);  $Z_c = 120\pi/\sqrt{\epsilon_r - (f_0/f)^2}$  — характеристическое сопротивление волновода;  $f_0 = c_0/2b$  — критическая частота волновода при  $\epsilon_r = 1$ ;  $c_0$  — скорость света в вакууме.

В рассматриваемой задаче волновод состоит из трех частей (рис. 19.73Р, б). Отношение мощностей падающих волн в областях 1 и 3, как следует из формулы (1),

$$P_1^+/P_3^+ = (E_{01}^+/E_{03}^+)^2,$$

где знаком плюс отмечены волны, движущиеся вдоль оси  $z$ . Отношение  $E_{01}^+/E_{03}^+$  зависит от условий на границах раздела частей 1-2, 2-3 и расстояния  $l$  между ними.

На границе 1-2 по (19.15)

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^+(0) + \dot{E}_1^-(0) &= \dot{E}_2^+(0) + \dot{E}_2^-(0); \\ \dot{H}_1^+(0) - \dot{H}_1^-(0) &= \dot{H}_2^+(0) - \dot{H}_2^-(0) \quad \text{или} \\ \frac{\dot{E}_1^+(0) - \dot{E}_1^-(0)}{Z_{c1}} &= \frac{\dot{E}_2^+(0) - \dot{E}_2^-(0)}{Z_{c2}}. \end{aligned}$$

Аналогично на границе 2-3

$$\begin{aligned} \dot{E}_2^+(l) + \dot{E}_2^-(l) &= \dot{E}_3^+(l); \\ \dot{H}_2^+(l) - \dot{H}_2^-(l) &= \dot{H}_3^+(l) \quad \text{или} \quad \frac{\dot{E}_2^+(l) - \dot{E}_2^-(l)}{Z_{c2}} = \frac{\dot{E}_3^+(l)}{Z_{c3}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\dot{E}_1^+(l) = \dot{E}_1^+(0)e^{-\gamma l}; \quad \dot{E}_1^-(l) = \dot{E}_1^-(0)e^{\gamma l},$$

где  $\gamma$  вычисляется по (19.18).

Замечая, что в условиях данной задачи  $Z_{c3} = Z_{c1}$ , и обозначая  $(Z_{c1} - Z_{c2})/(Z_{c1} + Z_{c2}) = \underline{N}$ , из написанных уравнений находим:

$$\frac{\dot{E}_{01}^+}{\dot{E}_{03}^+} = \frac{e^{\gamma l}(1 - \underline{N}^2 e^{-2\gamma l})}{1 - \underline{N}^2}; \quad \underline{N} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}};$$



$$\text{здесь } \underline{n} = \sqrt{\frac{1 - (f_0/f)^2}{\epsilon_r - (f_0/f)^2}} \approx 0,5 \text{ при } f_0/f = 3 \cdot 10^{10}/2 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 10^9 = 0,695;$$

$$\underline{N} = (1 - 0,5)/(1 + 0,5) = 1/3;$$

$$\underline{\gamma}l = \frac{2\pi l}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r - (f_0/f)^2} = 2\pi \cdot 2,84 (1 - j4,96 \cdot 10^{-3})$$

и

$$\dot{E}_{01}^+ / \dot{E}_{03}^+ = 1,3 \angle -62^\circ 30'.$$

Отношение мощностей равно отношению квадратов модулей напряженностей полей. Таким образом,

$$P_3^+ = 1,3^{-2} P_1^+ = 592 \text{ Вт.}$$

**19.74.** Определить потери в диэлектрике, заполняющем волновод с поперечными размерами  $23 \times 10$  мм, при частоте  $10^{10}$  Гц для волны  $TE_{01}$ . Длина волновода, заполненного диэлектриком с  $\epsilon_r = 1,5 - j0,015$ , равна 50 см. Мощность на входе волновода 1 кВт. Потерями в стенках волновода пренебречь.

**19.75.** Решить предыдущую задачу для волны  $TM_{11}$  при частоте  $2 \cdot 10^{10}$  Гц.

**19.76.** Определить резонансные частоты прямоугольного резонатора с размерами  $10 \times 23 \times 30$  мм при возбуждении колебаний типа: а)  $TE_{011}$ ; б)  $TE_{012}$ ; в)  $TE_{021}$ .

**19.77(P).** Прямоугольный резонатор имеет размеры  $a = 10$  мм,  $b = 23$  мм (рис. 19.77). В резонаторе возбуждаются колебания типа  $TE_{012}$ .

Определить составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также размер  $c$  резонатора вдоль оси  $z$ , если резонансная частота должна быть равна  $10^{10}$  Гц.

**Решение.** Если поперечное сечение волновода или резонатора совпадает с плоскостью  $xy$ , то электрическое поле волны типа  $TE$  может иметь только составляющие по осям  $x$  и  $y$ . Для волны типа  $TE_{012}$ , как и для других волн типа  $TE_{0n}$ , составляющая поля  $E_x$  не зависит от координаты  $x$ . Из условия  $\text{div } \dot{\mathbf{E}} = 0$  следует, что в этом случае составляющая  $E_y = 0$ . Кроме того, составляющая  $E_x$  должна обращаться в нуль на тех стенках (четыре боковых) резонатора, где она будет тангенциальной. Поэтому для волны  $TE_{012}$  имеем:

$$\dot{E}_x = \dot{A} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{2\pi z}{c},$$

где  $\dot{A}$  — константа, определяемая мощностью возбуждения.

Напряженность поля  $\dot{H}$  найдем из второго уравнения Максвелла (19.26) при  $\mu_r = 1$ , откуда

$$\dot{H}_y = \frac{2\pi j \dot{A}}{\omega \mu_0 c} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{2\pi z}{c};$$

$$\dot{H}_z = - \frac{\pi j \dot{A}}{\omega \mu_0 b} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{2\pi z}{c}.$$

Размер  $c$  резонатора для волны  $TE_{012}$  должен равняться длине волны  $TE_{01}$  в волноводе:

$$c = \lambda_0 / \sqrt{1 - (\lambda_0/2b)^2} = 39,6 \text{ мм},$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме при частоте  $10^{10}$  Гц.

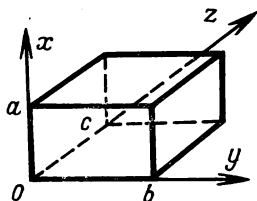


Рис. 19.77

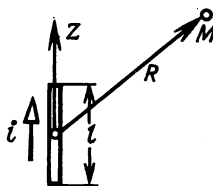


Рис. 19.81

**19.78.** Найти размер  $c$  резонатора предыдущей задачи для колебаний типа  $TM_{111}$  при частоте  $2 \cdot 10^{10}$  Гц.

**19.79.** У радиостанции мощностью 500 кВт, работающей на волне 1744 м, передающая антенна расположена вертикально и имеет высоту 150 м.

Считая, что антенна со своим зеркальным изображением может рассматриваться как электрический диполь, определить ток в антенне.

**19.80.** В круглом витке диаметром 20 см ток равен 10 А при частоте 1 МГц.

Определить мощность и сопротивление излучения.

**19.81.** Вдоль короткого прямолинейного проводника (диполь Герца), длина которого равна  $l$ , протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$  (рис. 19.81).

Предполагая, что длина волны намного больше длины проводника и что ток по всей длине проводника один и тот же, определить векторный потенциал электромагнитного поля в точке наблюдения  $M$  при  $R \gg l$ . Задачу решить, применив декартову систему координат.

**19.82.** Пользуясь уравнением связи между векторным и скалярным потенциалами электромагнитного поля, найти скалярный потенциал в точке  $M$  задачи 19.81 (см. также ответ к задаче 19.81).

**19.83.** Пользуясь ответами к задачам 19.81 и 19.82, найти составляющие напряженности электрического и магнитного полей диполя Герца задачи 19.81 в декартовой системе координат.

**19.84.** Пользуясь ответом к задаче 19.83, найти напряженности электрического и магнитного полей диполя Герца задачи 19.81 в ближней зоне. Ближней зоной считать область (рис. 19.81), для точек которой  $R \ll \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме при частоте тока  $\omega$ . Доказать справедливость формулы Био — Савара в этой области.

**19.85.** Пользуясь ответом к задаче 19.83, найти напряженности электрического и магнитного полей диполя Герца задачи 19.81 в дальней зоне. Дальней зоной считать область (рис. 19.81), для точек которой  $R \gg \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме при частоте тока  $\omega$ . Найти среднее значение вектора Пойнтинга в дальней зоне.

**19.86.** При решении задачи 19.85 выяснилось, что вектор Пойнтинга в дальней зоне направлен вдоль радиуса-вектора  $R$  (рис. 19.81), и было найдено его среднее значение за период (см. ответ к задаче 19.85).

Определить среднюю за период мощность, излучаемую диполем Герца.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 1

- 1.1.  $I = 6 \text{ A}$ ;  $I_1 = 4 \text{ A}$ ;  $I_2 = 2 \text{ A}$ .  
 1.2.  $I_1 = Ir_2/(r_1 + r_2)$ ;  $I_2 = Ir_1/(r_1 + r_2)$ .  
 1.3.  $r_1 r_2/(r_1 + r_2)$ .  
 1.4.  $(r_1 r + r_2 r + r_1 r_2)/(r_1 + r_2)$ .  
 1.7. См. решение.  
 1.8. См. решение.  
 1.9.  $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ ;  $u_C = 100 \text{ В}$ ;  $u_L = 100 \text{ В}$ .  
 1.10.  $i_1 = 0$ ;  $i_2 = -2 \text{ A}$ ;  $i_3 = 2 \text{ A}$ ;  $u_C = 100 \text{ В}$ .  
 1.11.  $i_1 = 0,5 \text{ A}$ ;  $i_2 = -3 \text{ A}$ ;  $i_3 = -3,5 \text{ A}$ ;  $u_C = 30 \text{ В}$ ;  $u_L = 35 \text{ В}$ .  
 1.12. 1)  $1,6 \text{ В}$ ; 2)  $2,4 \text{ В}$ .  
 1.13. 1)  $20 \text{ A}$ ; 2)  $-180 \text{ A}$ .  
 1.14. 1)  $21 \text{ A}$ ;  $13 \text{ A}$ ;  $16 \text{ A}$ ;  $8 \text{ A}$ ;  $8 \text{ A}$ ; 2)  $1 \text{ A}$ ;  $3 \text{ A}$ ;  $2 \text{ A}$ ;  $3 \text{ A}$ ;  $5 \text{ A}$ .  
 1.15. 1)  $3112 \text{ Вт} = 3112 \text{ Вт}$ ; 2)  $230 \text{ Вт} = 230 \text{ Вт}$ .  
 1.16. 1)  $22 \text{ A}$ ; 2)  $3 \text{ A}$ ;  $2 \text{ A}$ ;  $3 \text{ A}$ ;  $5 \text{ A}$ .  
 1.17.  $I_1 = 3 \text{ A}$ ;  $I_3 = 1 \text{ A}$ ;  $I_4 = 3 \text{ A}$ ;  $I_5 = 1,5 \text{ A}$ ;  $I_6 = -1,5 \text{ A}$ ;  $37 \text{ Вт} = 37 \text{ Вт}$ .  
 1.18. См. решение.  
 1.19.  $\varphi_a = 6 \text{ В}$ ;  $\varphi_c = 5 \text{ В}$ ;  $\varphi_3 = 7 \text{ В}$ ;  $\varphi_d = 3 \text{ В}$ ;  $\varphi_b = 3 \text{ В}$ .  
 1.20.  $21 \text{ A}$ ;  $13 \text{ A}$ ;  $16 \text{ A}$ ;  $8 \text{ A}$ .  
 1.21. 1а)  $r_5$  и  $r_6$ ; 1б) нет; 2а)  $r_5$  и  $r_1 + r_7$ ; 2б)  $r_1$  и  $r_7$ .  
 1.22. 1)  $2,22 \text{ Ом}$ ; 2)  $1,2 \text{ Ом}$ ; 3)  $0,8 \text{ Ом}$ ; 4)  $1,2 \text{ Ом}$ .  
 1.23. 1)  $4,4 \text{ Ом}$ ; 2)  $10 \text{ Ом}$ .  
 1.24.  $3,25 \text{ Ом}$ ;  $468 \text{ Вт}$ .  
 1.25. 1А)  $3 \text{ Ом}$ ; 1Б)  $19 \text{ Ом}$ ; 2)  $19 \text{ Ом}$ ;  $40 \text{ Ом}$ ;  $40 \text{ Ом}$ .  
 1.26. 1)  $r_a = r_c = 2 \text{ Ом}$ ;  $r_b = 1 \text{ Ом}$ ; 2)  $7 \text{ Ом}$ ;  $4 \text{ Ом}$ .  
 1.27. 1)  $r_{ad} = r_{cd} = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_{ac} = 13,33 \text{ Ом}$ ; 2)  $r_{bc} = 15,2 \text{ Ом}$ ;  $r_{bd} = 19 \text{ Ом}$ ;  $r_{cd} = 38 \text{ Ом}$ .  
 1.28.  $-8 \text{ A}$ ;  $22 \text{ A}$ .  
 1.29.  $-8 \text{ A}$ ;  $22 \text{ A}$ .  
 1.30. 1)  $440 \text{ Вт}$ ; 2)  $-240 \text{ Вт}$ .  
 1.31. 1)  $-2,8 \text{ A}$ ;  $3,6 \text{ A}$ ;  $0,8 \text{ A}$ ; 2а)  $360 \text{ Вт} = (78,4 + 259,2 + 6,4 + 16) \text{ Вт}$ ; 2б)  $(140 + 56) \text{ Вт} = (78,4 + 39,2 + 78,4) \text{ Вт}$ .  
 1.32.  $1 \text{ A}$ ;  $3 \text{ A}$ ;  $2 \text{ A}$ ;  $3 \text{ A}$ ;  $5 \text{ A}$ .  
 1.33. 1)  $230 \text{ Вт} = 230 \text{ Вт}$ ; 2)  $158 \text{ Вт} = 158 \text{ Вт}$ .  
 1.34. См. решение.  
 1.35.  $1,38 \text{ мс}$ ;  $6 \text{ В}$ .

- 1.36.  $(2 + e^{-15t})$  A.  
 1.37.  $(1 + e^{-80t})$  A;  $-8e^{-80t}$  B.  
 1.38.  $2 - 0,5e^{-750t}$  A;  $125e^{-750t}$  B.  
 1.39. См. решение.  
 1.40.  $10(1 - e^{-1000t})$  B;  $1e^{-1000t}$  A; 6,3 B; 0,37 A.  
 1.41. 1 A; 1 A.  
 1.42.  $10(1 - e^{-750t})$  B;  $-0,75e^{-750t}$  A.  
 1.43.  $2 \cdot 10^3(1 - e^{-2500t})$  B;  $10e^{-2500t}$  A.  
 1.44.  $0,66e^{-t/15 \cdot 10^{-6}}$  A;  $30 + 10e^{-t/15 \cdot 10^{-6}}$  B.  
 1.45. См. решение.  
 1.46. 0,5 A; -0,2 A; 0,5 A; 0,25 A; 0,75 A; 1,0 A; 0,25 A.  
 1.47. 0,3 A; 0,15 A; 0,25 A; 0,5 A; 0,4 A; 0,25 A; 0,25 A;  
 -0,5 A.

$$1.48. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.49. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.50. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.52. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.53. 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

- 1.54. См. решение.  
 1.55. 0,075 A; 0,025 A; 0,1 A; 0,125 A; 0,075 A; 0,3 A;  
 0,125 A; 0,1 A; 0,1 A; -0,2 A.  
 1.56. См. решение.  
 1.57. 2 A; 1 A; 0,25 A; 0,75 A; 0,25 A; 1,75 A; 1 A.  
 1.58. См. решение.  
 1.59. 0,1 A; 0,1 A; 0,2 A; 0,3 A; 0,4 A.  
 1.60. 0,25 A; 0,14 A; 2,1 A; 0,11 A; 0,89 A.  
 1.61. 0,02 A; 0,02 A; 0,01 A.  
 1.62. 0,1 A.  
 1.63. 40 B.  
 1.64. 36,4 B.  
 1.65. 180 B; 120 B.  
 1.66. 56 B.  
 1.67. См. решение.  
 1.68. 0,025 A; 0,05 A; 0,1 A; 0,125 A; 0,05 A; 0,1 A.  
 1.69. См. решение.  
 1.70. 
$$\left\| \begin{array}{ccccc} (g_1 + g_2 + g_3) & -g_3 & 0 & -g_1 - g_2 & \\ -g_3 & (g_3 + g_4) & -g_4 & 0 & \\ 0 & -g_4 & (g_4 + g_5) & -g_5 & \\ -g_1 - g_2 & 0 & -g_5 & (g_1 + g_2 + g_5) & \end{array} \right\|.$$
  
 1.71. См. решение.  
 1.72. 2 A; 5 A; 10 A; -3 A; 4 A; 2 A.  
 1.73. 0,05 A; 0,1 A; 0,2 A; 0,1 A; 0,2 A; 0,05 A.  
 1.74. См. решение.  
 1.75. 4 A; 2 A; 1 A; 3 A; 1 A; 4 A.  
 1.76. 5 A; 1 A; 6 A; 2 A; 3 A.  
 1.77. 1 A; 2 A; 3 A; 1 A; 4 A.  
 1.78. См. решение.

1.79.

$$\left\| \begin{array}{ccc} (r_1 + r_4 + r_6) & -r_6 & -r_4 \\ -r_6 & (r_2 + r_5 + r_6) & -r_5 \\ -r_4 & -r_5 & r_3 + r_4 + r_5 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} r_4 J \\ r_5 J \\ E_3 - r_4 J - r_5 J \end{array} \right\|;$$

$$\left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J \\ J \\ 0 \end{array} \right\|$$

1.80.

$$\begin{vmatrix} (r_1 + r_2 + r_3) & -r_3 & -r_2 \\ -r_3 & (r_3 + r_4 + r_5) & -r_5 \\ -r_2 & -r_5 & (r_5 + r_6 + r_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} E_1 - r_2 J \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.81. \begin{vmatrix} (r_1 + r_4 + r_3) & -r_3 \\ -r_3 & (r_2 + r_5 + r_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 + r_4 J \\ E_2 - r_5 J \end{vmatrix}.$$

1.82. См. решение.

1.83. -4 A; -8 A; 4 A.

1.84. 0,2 A.

1.85. 0,8 A.

1.86. -6,4 A.

1.87. 2 A.

1.88. -12 В.

1.89.  $g_{15} = g_{51} = 0,022$  См.

1.90. 1) 8/15; 1/9; 4/9; 2) 10,7 Ом; 77,1 В.

1.91. 5,53 A; 7,03 A.

1.92. См. решение.

1.93.  $U_5 = 11,33 - 8,34I_3$ .

1.94. 3 A.

1.95.  $I_1 = 1,25 - 1,5I_4$  (токи - в амперах).

1.96.  $U_{12} = -9 + 3U_{34}$  (напряжения - в вольтах).

1.97. 3 мА; 1,25 мА; 1,75 мА; 0,75 мА; 1 мА; 0,5 мА;

0,5 мА.

1.98. 40 A; 10 A; 30 A; 20 A; 10 A; 4,8 A; 9,6 A; 14,4 A.

1.99. 8 мА; 8 мА; 2 мА; 6 мА; 4 мА; 2 мА.

1.100. См. решение.

1.101. 3 A; 1 A; 2 A; 0; 1 A.

1.102. 0,2 A; 3,2 A; 30,8 Вт = 30,8 Вт.

1.103. 127 В; 0,111 Ом; 3,6 кВт; 4,8 кВт.

1.104. См. решение.

1.105. 0,8 A.

1.106. -30 мА.

1.107. См. решение.

1.108. 5,08 A.

1.109. 2 A.

1.110. 0,9 A.

1.111. 1,71 A.

1.112. 3,2 кОм; 125 мВт.

1.113. 1 A.

1.114. 12,2 A.

1.115. 2,625.

1.116. 44.

1.117. 2,625; 44.

1.118. См. решение.

1.119. См. решение.

1.120. 50 В.

1.121. 0,321; 0,157; 0,066 В.

1.122. 0,0788 А.

1.123. См. решение.

1.124. 0,5 Ом.

1.125. -7,72 мА.

1.126. См. решение.

$$1.127. x_1 = \frac{abd}{1 - ed - cbd} x_0.$$

$$1.128. \frac{x_3}{x_0} = \frac{ah + cdh + cg}{1 - eh - bd - ebd}.$$

$$1.129. \frac{x_2}{x_0} = \frac{ab + c(1 - eh)}{1 - eh - bd - ebg}; \quad \frac{x_3}{x_0} = \frac{ah + cdh + cg}{1 - eh - bd - ebg}.$$

$$1.130. x_1 = ax_0 + dx_2 + ex_3; \quad x_2 = cx_0 + bx_1; \quad x_3 = hx_1 + gx_2 + fx_3.$$

1.131. См. решение.

1.132. -18; -52; -14.

1.133. Рис. 1.133О.

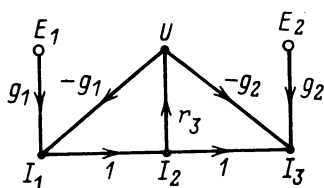


Рис. 1.133О

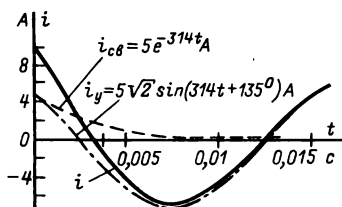


Рис. 2.3О

1.134. См. решение.

1.135. 1,1 А.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 2

2.1. См. решение.

2.2.  $120 \sin(\omega t - 66,8^\circ) + 147e^{-8000t}$  В.

2.3.  $5\sqrt{2} \sin(314t + 135^\circ) + 5e^{-314t}$  А; рис. 2.3О.

2.4.  $0,45 \sin(\omega t - 26,6^\circ) + 0,2e^{-25t}$  А.



2.5.  $15,4 \cos(10^4 t - 31,4^\circ) + 13,1 e^{-16,3 \cdot 10^3 t}$  B.  $8,6 \cos(10^4 t - 31,4^\circ) + 7,3 e^{-16,3 \cdot 10^3 t}$  A.

2.6.  $17,9 \cos(2500 t - 60,3^\circ) + 8,87 e^{-5 \cdot 10^3 t}$  B.

2.7.  $1,64 \sin(\omega t + 48^\circ) - 0,977 e^{-11,1 \cdot 10^3 t}$  A.

2.8. 1)  $100 \sin \omega(t + T/8)$  B; 2)  $100 \sin \omega(t + T/4)$  B;  
3)  $100 \sin \omega(t + 3T/8)$  B; 4)  $100 \sin \omega(t \pm T/2)$  B; 5)  $100 \sin \omega(t + 3T/4) = 100 \sin \omega(t - T/4)$  B.

2.9. а)  $7,07 \sin \omega t$  A;  $311 \sin(\omega t + 90^\circ) = 311 \cos \omega t$  B;  
б)  $7,07 \sin(\omega t + 45^\circ)$  A;  $311 \sin(\omega t + 135^\circ)$  B; в)  $7,07 \sin(\omega t - 30^\circ)$  A;  $311 \sin(\omega t + 60^\circ)$  B.

2.10.  $100 \sin(157 t - 45^\circ)$  B.

2.11. См. рис. 2.11О.

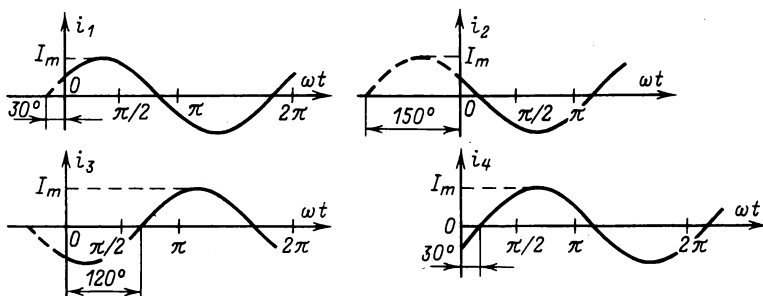


Рис. 2.11О

2.12.  $6 \sin(314 t + 30^\circ)$  A;  $60 \sin(314 t - 60^\circ)$  B;  $-90^\circ$ .

2.13.  $-150^\circ = 210^\circ$ ; 50 Гц; 10  $\angle 210^\circ$  A;  $7,07 \angle 210^\circ$  A;  
 $-6,12 - j3,53$  A.

2.14. 1)  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ ; 2)  $-60^\circ$ ;  $-120^\circ$ ; 3)  $(10/\sqrt{2}) \angle 60^\circ$ ;  
 $(10/\sqrt{2}) \angle 120^\circ$ ;  $(10/\sqrt{2}) \angle -60^\circ$ ;  $(10/\sqrt{2}) \angle -120^\circ$ .

2.15. 1)  $220 \angle 20^\circ = 205 + j75$ ; 2)  $15 \angle 40^\circ = 11,5 + j9,64$ ;  
3)  $380 \angle -80^\circ = 66 - j374$ ; 4)  $100 \angle -120^\circ = -50 - j86,6$ .

2.16. 1)  $4,33 + j2,5$ ; 2)  $3,42 + j9,4$ ; 3)  $-0,0347 + j0,197$ ;  
4)  $-0,0345 + j0,00607$ ; 5)  $-2,41 - j64,7$ ; 6)  $-11,2 - j27,8$ ; 7)  $0,174 - j1,99$ ;  
8)  $-j190 + 329$ ; 9)  $0,297 \cdot 10^{-3} - j0,017$ ; 10)  $-1000 - j34,9$ ; 11)  $15 + j0,175$ .

2.17. 1)  $100 \angle 53^\circ 10'$ ; 2)  $100 \angle 36^\circ 50'$ ; 3)  $316 \angle 198^\circ 26'$ ;  
4)  $72,8 \angle 106^\circ$ ; 5)  $9 \angle -3^\circ 10'$ ; 6)  $100 \angle 181^\circ 43'$ ; 7)  $3 \cdot 10^{-3} \angle 176,19^\circ$ .

2.18. A. 1)  $5 \angle 36^\circ 50'$ ; 2)  $1,12 \angle 63^\circ 25'$ ; 3)  $7 \angle 90^\circ$ ;  
4)  $5 \angle 53^\circ 10'$ ; 5)  $7,28 \angle 74^\circ 4'$ ; 6)  $15 \angle 180^\circ$ ; 7)  $3,46 + j2$ ;  
8)  $22,8 \angle 66^\circ 50'$ ; 9)  $4,5 \angle -90^\circ$ ; 10)  $0,9 + j1,07$ ; 11)  $61 \angle 4^\circ 42'$ ;  
12)  $5 \angle 143^\circ 10'$ ; 13)  $1,12 \angle 26^\circ 35'$ ; 14)  $5 \angle 0^\circ$ ; 15)  $5 \angle -36^\circ 50'$ ;  
16)  $5 \angle 216^\circ 50' = 5 \angle -143^\circ 10'$ ; 17)  $16,4 \angle 148^\circ 45'$ .

Б.  $1,8885 \angle 5,1^\circ = 1,88 + j0,168$ ;

В.  $1,71 \angle 6,8^\circ = 1,7 + j0,2$ .

2.19.  $103 \cos(10^4 t + 76^\circ)$  В;  $66 \cos(10^4 t + 63^\circ 27')$  В.

2.20.  $u_r = 20 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В;  $u_L = 25 \sin(\omega t + 120^\circ)$  В;  $u_C = 20 \sin(\omega t - 60^\circ)$  В;  $u = 20,6 \sin(\omega t + 44^\circ)$  В;  $p = 17,67 - 18 \cos(2\omega t + 74^\circ)$  Вт.

2.21. 180 В; 0,0477 Гн.

2.22.  $\omega^2 = -\frac{3}{2} \left(\frac{r}{L}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{9}{4} \left(\frac{r}{L}\right)^4 + \frac{1}{(LC)^2}}$ ;  $\omega = 3400$  рад/с.

2.23. 200 В; 1,73 А; 1 А; 300 Вт.

2.24.  $63^\circ 30'$ .

2.25.  $72,4 \sin(\omega t - 33^\circ 40')$  В;  $72,4 \sin(\omega t + 33^\circ 40')$  В; 1 А; 51 В; 51 В.

2.26. 1) 100 В; см. рис. 2.26О; 2) 0.

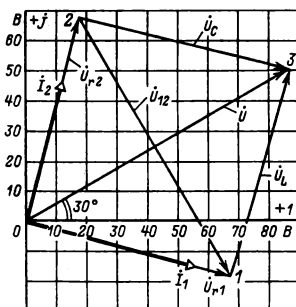


Рис. 2.26О

2.27. 43,3 Ом; 25 Ом;  $\sqrt{2}/2$ .

2.28.  $\sqrt{2} \cdot 2,5 \sin \omega t$  В. Топографическая диаграмма:  $i = 0,05$  А;  $\phi_1 = 0$ ;  $\phi_2 = 7,5 \angle -90^\circ$  В;  $\phi_3 = 2,5 - j2,5$  В;  $\phi_4 = 10 - j2,5$  В;  $\phi_5 = 10$  В.

2.29. Токи:  $2\sqrt{2}$  А;  $-\sqrt{2}$  А;  $-\sqrt{2}$  А;  $2\sqrt{2}$  А;  $\sqrt{2}$  А. Топографическая диаграмма:  $\phi_1 = 0$ ;  $\phi_2 = -j60\sqrt{2}$  В;  $\phi_3 = 50\sqrt{2} - j60\sqrt{2}$  В;  $\phi_4 = 50\sqrt{2} - j80\sqrt{2}$  В;  $\phi_5 = 50\sqrt{2}$  В.

2.30. 1)  $j1$  А;  $-j1$  А; 0; 1 А; 1 А;  $j1$  А;  $1 + j1$  А;  $-j1$  А; 1 А; 1 А; 2 А; 2)  $j2$  А;  $-j0,5$  А;  $j1,5$  А; 1 А;  $1 + j1,5$  А;  $j2$  А;  $1 + j3,5$  А;  $-j0,5$  А;  $1 + j3$  А; 1 А;  $2 + j3$  А.

2.31.  $x_L/r_1 = x_C/r_2 = 1/\sqrt{3}$ .

2.32. См. решение.

2.33.  $i_1 = -1 + j1$  А;  $i_2 = 1 - j1$  А;  $i_3 = 1$  А;  $i_4 = -j2$  А;  $i_5 = 1 - j2$  А;  $\phi_d = j1$  В;  $\phi_e = 1 + j1$  В;  $\phi_b = 1$  В;  $\phi_f = -1$  В;  $\phi_a = 3 - j4$  В;  $E = 4 - j4$  В.

2.34.  $i_1 = i_3 = 5 \sin(\omega t + 45^\circ)$  А;  $i_2 = 15 \sin(\omega t - 135^\circ)$  А;  $i_4 = 15 \sin(\omega t + 45^\circ)$  А;  $u_{ab} = 150 \sin(\omega t - 45^\circ)$  В;  $u_{ac} = 300 \sin(\omega t - 45^\circ)$  В;  $u_{ad} = 900 \sin(\omega t - 45^\circ)$  В. Топографическая диаграмма:  $\phi_e = 150$  В;  $\phi_a = 75\sqrt{2} \angle -45^\circ$  В;  $\phi_c = 75\sqrt{2} \angle 135^\circ$  В;  $\phi_d = 375\sqrt{2} \angle 135^\circ$  В.

2.35. 10 А.

2.36. 6,5 А; 2,07 А; 7,55 А.

2.37. См. решение.

2.38.  $-j1$  МА.

2.39. 7,07 МА;  $6,4 \angle -6^\circ 20'$  МА;  $5,01 \angle 129^\circ 20'$  МА;  $4,5 \angle 45^\circ$  МА.

2.40.  $18,3 \angle 177^\circ 19'$  МА.

2.41. 1)  $0,708 \angle -135^\circ$  А;  $1,58 \angle 18^\circ 25'$  А;  $0,946 \angle 45^\circ$  А;  $0,746 \angle -63^\circ 25'$  А;  $7,19 \angle 54^\circ 35'$  В; 2)  $\phi_1 = 7,92 \angle 18^\circ 25'$  В;  $\phi_3 = 10$  В;  $\phi_4 = 4,7 \angle -45^\circ$  В.

2.42.  $(910 - j303)$  В · А;  $(151 + j455)$  В · А.

2.43. а) 0,52 А;  $j0,52$  А;  $0,733 \angle 45^\circ$  А; б)  $0,364 \angle -45^\circ 10'$  А;  $1,04 \angle 89^\circ 50'$  А;  $0,815 \angle 71^\circ 30'$  А; в)  $0,867 \angle 123^\circ 40'$  А;  $0,433 \angle 33^\circ 40'$  А;  $0,685 \angle 142^\circ$  А;  $0,685 \angle 52^\circ$  А;  $0,97 \angle 97^\circ$  А; г)  $1,22 \angle 78^\circ 50'$  А;  $-0,306 \angle -101^\circ 10'$  А;  $0,915 \angle 78^\circ 50'$  А;  $0,966 \angle 186,5^\circ$  А;  $0,914 \angle -11^\circ 10'$  А;  $1,52 \angle 41^\circ 50'$  А.

2.44. Рис. 2.44О;  $r_1 = x_h = r_3 = 10$  Ом;  $x_c = 20$  Ом.

2.45. Показания не зависят от положения ключа: 2,5 А; 125 Вт.

2.46.  $\underline{S}_1 = \dot{E}_1 \dot{I}^*$  (отдается);  $\underline{S}_2 = \dot{E}_2 \dot{I}^*$  (потребляется);  $\underline{S}_A = \dot{U}_A \dot{I}^*$  (потребляется);  $\underline{S}_B = \dot{U}_B \dot{I}^*$  (потребляется).

$S$	$a$	$b$	$c$
$\underline{S}_1$	$P > 0; Q < 0$	$P < 0; Q < 0$	$P > 0; Q > 0$
$\underline{S}_2$	$P > 0; Q < 0$	$P < 0; Q = 0$	$P > 0; Q > 0$
$\underline{S}_A$	$P > 0; Q > 0$	$P < 0; Q < 0$	$P < 0; Q > 0$
$\underline{S}_B$	$P = 0; Q < 0$	$P < 0; Q > 0$	$P > 0; Q > 0$

2.47. 10 А;  $721 \angle 33,7^\circ$  В.

2.48. 3,14 Вт; 7,08 Ом.

2.49. а) 10 А;  $7,07 \angle 135^\circ$  А;  $7,07 \angle 135^\circ$  А;  $7,07 \angle 45^\circ$  А; 800 Вт; б)  $3,51 \angle -34^\circ 50'$  А;  $5,5 \angle 18,5^\circ$  А;  $3,5 \angle 52^\circ 10'$  А;  $1,37 \angle 71,5^\circ$  А;  $4,96 \angle 7^\circ 10'$  А; 337 Вт.

2.50.  $20 + j20$  Ом;  $7,4 \angle -19^\circ$  А.

- 2.51.  $2,23 \angle 26^\circ 35'$  A;  $2,23 \angle 63^\circ 25'$  A;  $3,6 \angle -123^\circ 40'$  A;  
 $5,82 \angle -121^\circ$  A.  
 2.52. См. решение.  
 2.53. См. решение.  
 2.54. 1)  $R = x_C = 200$  Ом; 2)  $R = 500$  Ом;  $x_C = 250$  Ом.  
 2.55. См. решение.  
 2.56. а)  $x_L = 43,8$  Ом;  $r = 4,4$  Ом; б)  $x'_L = 44,4$  Ом;  $R = 440$  Ом.  
 2.57.  $x'_C = 6,33$  кОм;  $r = 2$  кОм.

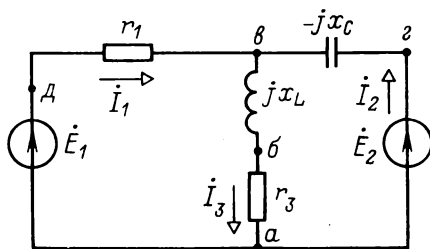


Рис. 2.440

- 2.58.  $3,24$  кОм.  
 2.59.  $5,3$  Ом;  $3,86$  Ом;  $5,2$  Ом;  $4,34$  кВ·А;  $4,06$  кВт;  
 $1,5$  квар.  
 2.60.  $2,4$  кОм;  $1,8$  кОм.  
 2.61.  $0,025$ ;  $577$  В·А;  $14,5$  Вт;  $577$  вар.  
 2.62.  $500$  пФ;  $200$ ;  $0,01$  В.  
 2.63.  $10^6$  рад/с;  $10^{-6}$  Гн.  
 2.64.  $j2$  А.  
 2.65.  $50$  А;  $10^{-3}$  Ф;  $5$  Ом.  
 2.66.  $I_1 = I_3 = 10$  А;  $x_L = 10$  Ом;  $r = x_C = 5$  Ом.  
 2.67.  $15,75$  Ом и  $31,5$  Ом или  $0,25$  Ом и  $0,5$  Ом.  
 2.68.  $11,35$  А;  $11,35$  А;  $0$ ;  $11$  А;  $440$  В.  
 2.69. 1)  $20$  А; 2)  $176$  мкФ; 3)  $10$  А.  
 2.70.  $30$  Ом;  $20$  А;  $16$  А;  $12$  А.  
 2.71.  $0,9 - 1,11$  рад/с;  $4,77$ ;  $10$  Ом;  $4,77 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $2,1 \cdot 10^{-6}$  Ф;  
 $500 - j500$  В·А;  $500 + j500$  В·А.  
 2.72. При  $\omega_1 = 250$  рад/с токи  $2$  А;  $2/3$  А;  $8/3$  А; при  
 $\omega_2 = 500$  рад/с токи  $0$ ;  $0,1$  А;  $0,1$  А.  
 2.73. См. решение.  
 2.74.  $1000$  пФ; действующее значение тока не изменится,  
 но его фаза изменится на  $180^\circ$ .  
 2.75.  $50$  Ом;  $100$  Ом.

2.76. Рис. 2.76О;  $\omega_1 = 811,5 \cdot 10^3$  рад/с (резонанс токов);  
 $\omega_2 = 813 \cdot 10^3$  рад/с (резонанс напряжений).

2.77. Рис. 2.77О;  $\omega_1 = 3,67 \cdot 10^7$  рад/с (резонанс напряжений  
 при  $\omega_1 L_1 = 1/\omega_1 C_1$ );  $\omega_2 = 3,71 \cdot 10^7$  рад/с [резонанс токов при  
 $\omega_2 C_0 = 1/(\omega_2 L_1 - 1/\omega_2 C_1)$ ].

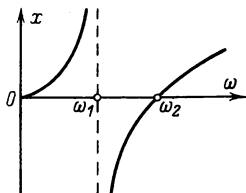


Рис. 2.76О

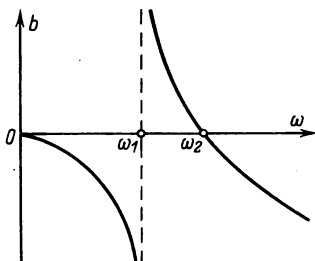


Рис. 2.77О

2.78. См. решение.

$$2.79. \dot{I} = \dot{E} \frac{k_{12}}{j\omega_0^2 L_1 L_2 (k_{12}^2 - \Omega^2)}.$$

2.80.  $500 + j500$  Ом; 0,9 Вт.

2.81.  $|x_1| = 30$  Ом;  $|x_2| = 33,3$  Ом;  $x_1 x_2 < 0$ ; 40 Вт;  
 в 3,02 раза.

2.82.  $|x_1| = 33,3$  Ом;  $|x_2| = 30$  Ом;  $x_1 x_2 < 0$ ; 0,331 от  
 максимальной.

2.83. Рис. 2.83О.

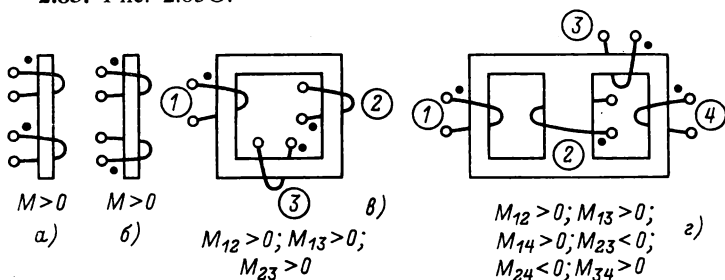


Рис. 2.83О

2.84. 144 В.

2.85. Рис. 2.85О; 8 В; 14 В.

2.86. 1) 97 В; 100 В; 0 В; 2) 0; 0; 62,5 В.

2.87. 6,8 мГн.

2.88.  $j0,72$  кОм;  $j2,16$  кОм; не может.

2.89. 192 Вт; 59,4 В.

2.90. 4 А.

2.91. а)  $30 + j10 \text{ Ом}$ ; б)  $1,2 + j8,4 \text{ Ом}$ .

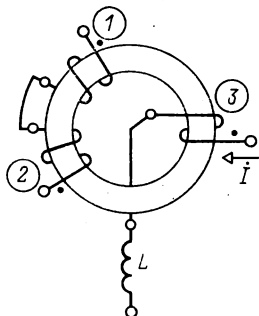


Рис. 2.850

2.92. 1) Рис. 2.920, а;  $\dot{I}_1 = 2,83 \angle 45^\circ \text{ А}$ ;  $\dot{I}_2 = 2,24 \angle 63^\circ 25' \text{ А}$ ;  $\dot{E} = 50 \text{ В}$ ;  $\phi_\delta = 44,8 \angle 63^\circ 26' \text{ В}$ ;  $\phi_\delta = 72,5 \angle 106^\circ \text{ В}$ . 2) Рис. 2.920, б;  $\dot{I}_1 = 2,83 \angle 98^\circ 8' \text{ А}$ ;  $\dot{I}_2 = 3,13 \angle 116^\circ 34' \text{ В}$ ;  $\dot{E} = 73,36 \angle 78^\circ 55' \text{ В}$ ;  $\phi_\delta = 62,6 \angle 116^\circ 34' \text{ В}$ ;  $\phi_\delta = 101 \angle 145^\circ 40' \text{ В}$ .

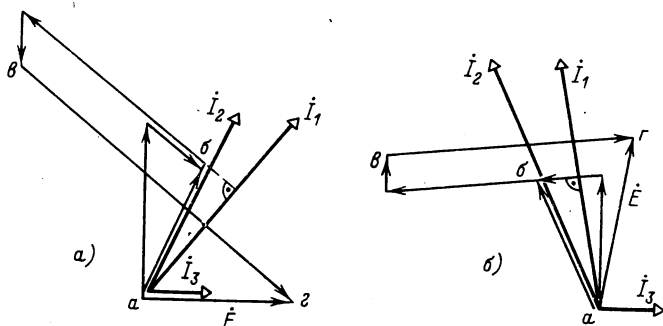


Рис. 2.920

2.93. 1) 2 кОм; 2)  $2 - j0,8 \text{ кОм}$ .

2.94. 0,1 мкФ.

2.95. 1) При параллельном резонансе: 3,33 мА; 3,33 мА; 20 мА; 20 мА; при последовательном резонансе: 13,3 мА; 6,67 мА; 20 мА; 40 мА; 2) при параллельном резонансе: 10 мА; 10 мА; 20 мА; 20 мА; при последовательном резонансе: 40 мА; 20 мА; 20 мА; 40 мА.

2.96.  $50/3 \text{ Ом}$ ; 1000 Вт.

2.97. а) 0 А; 6 А; -6 А; 120 В; 0 Вт; б)  $32,5 \angle 33^\circ 45'$  А; 27 А;  $j18$  А; 4850 Вт; в)  $(6 + j6)$  А;  $30(j - 1)$  А;  $-3(1 + j)$  А; 8,5 А; 42,5 В; 0 В; 0 Вт; г)  $-10 + j15$  А; 10 А; 150 В; 3000 Вт.

2.98. Рис. 2.98О;  $5,79 \angle -66^\circ$  А;  $5,33 \angle 96^\circ 23'$  А; 1,76 А;  $\phi_6 = 52,8^\circ$  В;  $\phi_8 = 88 \angle 53^\circ 10'$  В;  $\phi_2 = 118 \angle 63^\circ 20'$  В;  $\phi_e = 179 \angle 152^\circ 40'$  В.

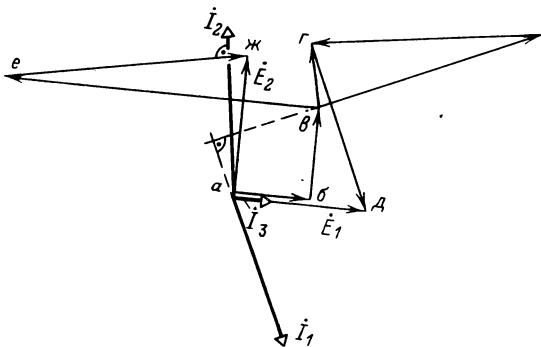


Рис. 2.98О

2.99. 10 Ом; 100 Вт; 20 Ом.

2.100. См. решение.

2.101. 100 В; 0.

2.102.  $6,67$  мкФ;  $10\sqrt{2} \sin(\omega t + 34^\circ)$  А; не изменится.

2.103.  $0,129 - j0,3$  кОм;  $0,329 + j0,7$  кОм.

2.104. 25 В; 25 В; 12,5 В; 50 В.

2.105. См. решение.

2.106.  $7,23 + j432$  Ом;  $(0,376 + j22,5) \cdot 10^{-3}$  Ом.

2.107. Рис. 2.107О.

2.108. Значение напряжения не изменяется; фаза изменяется в пределах от 0 до  $180^\circ$ ; это справедливо и при других значениях сопротивления  $r_1$ .

2.109.  $U_{ab} = 50$  В = const (изменяется лишь фаза напряжения  $U_{ab}$ ).

2.110. 1) 14,7 А; 5,5 Ом или 6,32 А; 29 Ом; 2) 16,5 А; 4,1 Ом.

2.111. 1) 17,5 Ом; 2) 10 Ом; 3)  $I_1 = 9,7$  А;  $I_2 = 5$  А;  $I = 14,5$  А.

2.112. 1) 35 Ом; 420 Вт; 2а) 12,7 Ом; 2б) 95 Ом.

2.113. 1) 37 Ом; 254 Вт; 254 вар; 2,12 А; 85 В; 2) 2,92 А; 32 В; 85 Вт; 344 вар; 354 В · А.

2.114. 1) 0,79 А; 98 Ом; 2) 2,2 А; 33 Ом;  $48^\circ$ .

2.115. 1) 0,8 Ом; потребляет 965 Вт;  $22,5^\circ$ ; 2) 2 Ом; 800 Вт.

2.116. 0,55 А; 17,6 Вт; 51,6 вар; 55 В·А.

2.117. См. решение.

2.118. См. решение.

2.119.  $10 \angle -45^\circ$  А; 7,96 В.

2.120.  $3,55 \angle -56^\circ 20'$  Ом; 23,6 В.

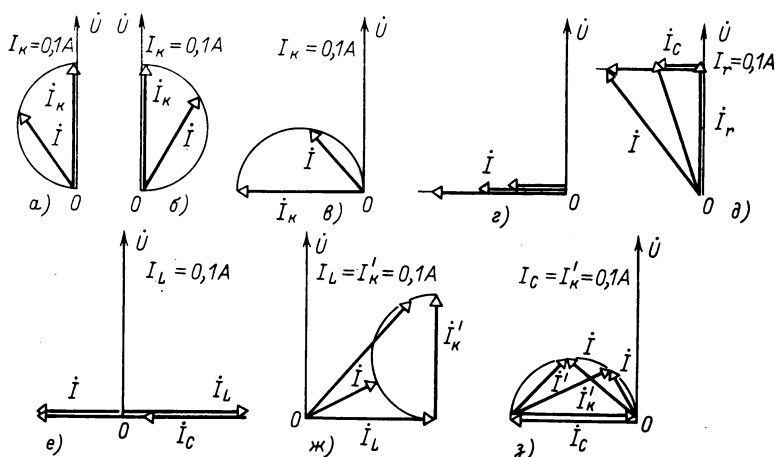


Рис. 2.1070

2.121.  $0,372 \angle -68^\circ 10'$ ;  $9,65 \angle -79^\circ 28'$  Ом;  
 $0,187 \angle -68^\circ 10'$  См;  $2,89 \angle -49^\circ 7'$ ;  $53,6 \angle 68^\circ 10'$  В.

2.122. См. решение.

2.123.  $11,2 \angle 79^\circ 32'$  В.

2.124.  $0,227 \angle 20^\circ 30'$ ; 91 В.

### ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 3

3.1. См. решение.

3.2. См. решение.

3.3. 1) X, Y, Z или A, B, C; 2) X и B; Y и C; Z и A  
 или A и Y; B и Z; C и X.

3.4. 1) 220 В; 220 В; 380 В; 2) 220 В; 220 В; 220 В.

3.5. а) 254 В; б) 254 В; в) 0.

3.6. 380 В; 760 В.

3.7. 127 В; 127 В.

3.8. H — 3 и 5; K — 4 и 6.

3.9. 1) 4; 2; 6 или 1; 5; 3; 2) 1 и 6; 2 и 3; 4 и 5 или  
 1 и 2; 3 и 4; 5 и 6.

3.10. См. решение.



- 3.11. 11 А.  
 3.12. 22 А.  
 3.13. 10 А; 17,3 А.  
 3.14. 34,6 А; 20 А.  
 3.15. 11 А; 19 А.  
 3.16. 207,5 В; 4 А; 2,3 А; 625 Вт; 950 Вт;  $i = 3\sqrt{2} \sin \omega t$  А.  
 3.17. 5 А; 8,65 А; 1900 Вт;  $i = 8,65\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$  А.  
 3.18. 538 В; 36,3 кВт; 36,3 кВт; 0; 72,6 кВт; 0. При  $\dot{U}_A = 220$  В потенциал  $\phi_a = 310 \angle -45^\circ$  В.  
 3.19. 140 кВт; 280 кВт. При  $\dot{U}_{AB} = 6600 \angle 30^\circ$  В потенциал  $\phi_a = 3030 \angle -37^\circ$  В.  
 3.20. 4,8 А; 4,75 А; 6,7 А; 3,9 А. При  $\dot{U}_A = 220$  В потенциал  $\phi_a = 192 \angle -30^\circ$  В.  
 3.21. 1) 22 А; 22 А; 31,1 А; 12,7 А; 17,96 А; 539 В; 427 В; 14,5 кВт; 2) 9,82 А; 9,82 А; 0; 5,67 А; 0; 239 В; 190,5 В; 2,9 кВт.  
 3.22.  $1,85 + j1,39$  Ом.  
 3.23. 164 А; 95 А.  
 3.24. 15 Ом; 20 Ом.  
 3.25. 3,22 мкФ; 1350 и 660 Вт.  
 3.26. 278 Вт; 109 Вт.  
 3.27. 834 Вт; 327 Вт.  
 3.28. См. решение.  
 3.29. 7,07 А.  
 3.30. 5 А.  
 3.31. 3 А.  
 3.32. 1,1 кВт; уменьшить до значения 5,78 Ом.  
 3.33. 40 А; 54,6 А.  
 3.34. 5,45 А; 96,4 В; 132 В; 160 В.  
 3.35. 13,66 А; 8,67 А; 8,67 А; 3,65 А.  
 3.36. 195 В; 212 В; 259 В.  
 3.37. 175 В; 212 В; 298 В.  
 3.38. 170 В; 50 В; 190 В. При  $\dot{U}_A = 127$  В потенциал  $\phi_n = 80,5 \angle -108^\circ$  В.  
 3.39. 2,6 А; 5 А; 5 А.  
 3.40. 220 В; 114 В; 114 В; 93 В.  
 3.41. 1646 Вт; 254 Вт.  
 3.42. 207 В.  
 3.43. 17,3 А.  
 3.44. 1) 24,5 А; 15,7 А; 15,7 А; 2) 7,3 А; 19,4 А; 19,4 А.  
 3.45. 1а) 197 В; 196 В; 196 В; 16) 381 В; 330 В; 330 В;  
 2а) 197 В; 573 В; 573 В; 2б) 381 В; 526 В; 526 В.  
 3.46. 60 А; 34,6 А; 34,6 А.  
 3.47. 1) 10 А; 10 А; 10 А; 0; 2) 30 А; 17,3 А; 17,3 А; 0;  
 3) 0; 8,65 А; 8,65 А; 0.

- 3.48. 1) 0,35 A; 2) 156 B; 0; 156 B.  
 3.49. 0; 95 A; 95 A; 0; 33 A; 33 A.  
 3.50. 330 A; 190 A; 190 A; 330 A; 165 A; 165 A.  
 3.51. 110 A; 110 A; 110 A; 110 A; 55 A; 55 A.  
 3.52. 380 B; 190 B.  
 3.53. 127 B; 63,5 B.  
 3.54. 10 A; 10 A; 10 A; 17,3 A; 19,3 A; 5,2 A.  
 3.55. 22 A; 15,6 A; 44 A; 58 A; 23,2 A; 59 A.  
 3.56. 10 A; 10 A; 10 A; 220 B.  
 3.57. 10 A; 10 A; 10 A; 110 B.  
 3.58. 110 B; 2360 Вт; 169 Вт;  $\sqrt{3}(2360 + 169) = 4400$  вар.  
 3.59.  $220 \angle 30^\circ$  B;  $220 \angle -90^\circ$  B;  $220 \angle 150^\circ$  B.  
 3.60. 2,54 A; 1,12 A; 2,61 A; 2,54 A; 1,55 A; 2,54 A.  
 3.61. 45,5 A; 19 A; 26,9 B; 26,9 A; 36,7 A; 55,3 A.  
 3.62. а) 38 A; 19,7 A; 38 A; 73,4 A; 47,1 A; 47,1 A; б) 22 A; 38 A; 22 A; 22 A; 58,1 A; 58,1 A.  
 3.63. а) 38 A; 19,7 A; 38 A; 19,6 A; 19,6 A; 19,6 A; б) 22 A; 38 A; 22 A; 38,1 A; 33,1 A; 33,1 A.  
 3.64. 1) 10 A; 0; 10 A; 17,3 A; 10 A; 10 A; 2) 5 A; 5 A; 10 A; 15 A; 0; 15 A.  
 3.65. 120 B; 108 B; 12 B.  
 3.66. а) 220 B; 155,6 B; б) 155,6 B; 220 B; в) 220 B; 0.  
 3.67. 0; 95 A; 95 A; 33 A; 0; 33 A.  
 3.68. 330 A; 190 A; 190 A; 165 A; 0; 165 A.  
 3.69. 158,6 A; 116,4 A; 44 A; 44 A; 88 A; 152,4 A.  
 3.70. См. решение.  
 3.71. а) 0,268; б) 0,366; в) 0,378; г) 0,5.  
 3.72. а) 29,1 A; 5,18 A; 5,18 A; б) 25 A; 5 A; 5 A; в) 10 A; 10 A; 10 A; г) 17,3 A; 0; 17,3 A; д) 10 A; 10 A; 10 A.  
 3.73. См. решение.  
 3.74.  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} - j\omega M$ ;  $\underline{Z}_0 = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N + j2\omega M - j6\omega M_N$ .  
 3.75.  $\underline{Z}_1 = \underline{Z} + a\underline{Z}_M + a^2\underline{Z}_m$ ;  $\underline{Z}_2 = \underline{Z} + a^2\underline{Z}_M + a\underline{Z}_m$ ;  $\underline{Z}_0 = = \underline{Z} + \underline{Z}_M + \underline{Z}_m$ .  
 3.76. См. решение.  
 3.77. а) 44,4 A; 44,4 A; 19,1 A; б) 57,6 A; 31,2 A; 31,2 A; в) 53,9 A; 36,1 A; 22,4 A; г) 5,1 A; 46,4 A; 46,4 A.  
 3.78. См. решение.  
 3.79. 30 A; 62 B; 62 B; 121,2 B.  
 3.80. 40 B; 60 B; 20 B; 17,3 A.  
 3.81. 1) 110 B; 155 B; 60 A; 0; 60 A; 0; 183 B; 2) 95 B; 59 B; 0; 45,8 A; 30 A; 120 B; 0; 3) 112 B; 74 B; 0; 48,5 A; 0; 112 B; 56 B; 4) 160 B; 131 B; 0; 34,6 A; 0; 160 B; 106 B.  
 3.82. 30 A; 8,66 A; 8,66 A; 0; 8,66 A; 8,66 A.  
 3.83. 22 A; 1,65 A; 1,65 A; 1,58 A; 1,65 A; 1,65 A.

3.84. 180 В; 151 В; 0; 69,2 А; 120 В.

$$3.85. \frac{I_2}{I_1} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z} + 3\underline{Z}_2|}; \quad \dot{U}_{Aa} = \dot{U} \frac{3\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + 3\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}.$$

3.86. 90 В; 36 А.

3.87. См. решение.

3.88. 1) и 2) Круговое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, и угловой скоростью  $\omega$ ; направление вращения в случае 1 — по направлению движения часовой стрелки, в случае 2 — обратное. 3) Эллиптическое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m \sqrt{5/2 + (3/2) \cos 2\omega t}$  и угловой скоростью  $4\omega/(5 + 3 \cos 2\omega t)$ ; направление вращения — по направлению движения часовой стрелки;  $B_x^2/B_{\max}^2 + B_y^2/B_{\min}^2 = 1$ . 4) Эллиптическое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m \times \sqrt{5/8 - (3/8) \cos 2\omega t}$  и угловой скоростью  $4\omega/(5 - 3 \cos 2\omega t)$ ; направление вращения — против направления движения часовой стрелки;  $B_x^2/B_{\min}^2 + B_y^2/B_{\max}^2 = 1$ .

3.89. 1) и 2) Эллиптическое вращающееся магнитное поле с индукцией соответственно  $B = kI_m \sqrt{1 \mp (1/2) \sin 2\omega t}$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, с угловой скоростью  $\sqrt{3} \omega/(2 \mp \sin 2\omega t)$  и направлением вращения — соответственно по и против направления движения часовой стрелки. Для системы координатных осей  $x'$  и  $y'$ , повернутой относительно осей  $x$  и  $y$  на  $30^\circ$  по направлению движения часовой стрелки:  $B_{x'}^2/B_{\min}^2 + B_{y'}^2/B_{\max}^2 = 1$ .

3.90. 1) и 2) Круговое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, и угловой скоростью, равной  $\omega$ ; направление вращения — соответственно по и против направления движения часовой стрелки.

3.91. 1) Эллиптическое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m \sqrt{2 + \cos 2\omega t}$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, и угловой скоростью  $\sqrt{3} \omega/(2 + \cos 2\omega t)$ ; направление вращения — против направления движения часовой стрелки  $B_x^2/B_{\max}^2 + B_y^2/B_{\min}^2 = 1$ . 2) Круговое вращающееся магнитное поле с индукцией  $B = kI_m$  и угловой скоростью  $\omega$ ; направление вращения — по направлению движения часовой стрелки.

#### ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 4

4.1. См. решение.

4.2. См. решение.

4.3.  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 2$ ;  $\underline{A}_{12} = 15$  Ом;  $\underline{A}_{21} = 0,2$  См;  $\underline{Z}_{11} =$

$= -Z_{22} = 10 \text{ Ом}; Z_{12} = -Z_{21} = -5 \text{ Ом}; Y_{11} = -Y_{22} = 2/15 \text{ См};$   
 $Y_{12} = -Y_{21} = -1/15 \text{ См}; H_{11} = 7,5 \text{ Ом}; H_{12} = H_{21} = 0,5; H_{22} =$   
 $= -0,1 \text{ См}.$

4.4. а)  $A_{11} = A_{22} = 1; A_{12} = Z; A_{21} = 0$ ; матрицы  $Z$  не существует;  $Y_{11} = -Y_{22} = 1/Z; Y_{12} = -Y_{21} = -1/Z$ ; б)  $A_{11} = A_{22} = 1; A_{12} = 0; A_{21} = 1/Z; Z_{11} = -Z_{22} = -Z_{12} = Z_{21} = Z$ ; матрицы  $Y$  не существует.

4.5.  $Y_{11} = -Y_{22} = 0,06 \text{ См}; Y_{12} = -Y_{21} = -0,05 \text{ См}; H_{11} =$   
 $= 16,7 \text{ Ом}; H_{12} = H_{21} = 0,83; H_{22} = -0,018 \text{ См}.$

4.6.  $Z_{11} = Z_1; Z_{12} = Z_{21} = 0; Z_{22} = -Z_2$ ; 1)  $Z_{11} = Z_{12} =$   
 $= Z_{21} = 0; Z_{22} = -Z_2$ ; 2)  $Z_{11} = Z_1; Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = 0.$

4.7.  $A_{11} = w_1/w_2; A_{12} = A_{21} = 0; A_{22} = w_2/w_1.$

4.8. См. решение.

4.9.  $Z_{11} = Z_{1x}; Z_{12} = -Z_{21} = \sqrt{Z_{2x}(Z_{1x} - Z_{1x})}; Z_{22} = -Z_{2x}.$

4.10. а) 1;  $Z$ ;  $1/Z$ ; 2; 20 В; б)  $0,5 + j0,5; 20 + j20 \text{ Ом};$   
 $(-1,25 + j3,75) \cdot 10^{-2} \text{ См}; 0,5 + j0,5; 28,3 \text{ В};$  в)  $\sqrt{2} \angle 45^\circ;$   
 $0,1 \angle 90^\circ \text{ Ом}; 22,4 \angle 63^\circ 30' \text{ См}; 1 \angle 90^\circ; 14,2 \text{ В}.$

4.11. См. решение.

4.12. 1) 6 мА; 24 В; 2) 7 мА; 12 В; 3) 8 мА; 0.

4.13. См. решение.

4.14. 1) 1;  $10 + j20 \text{ Ом}; 0,02 - j0,04 \text{ См}; 2; 2) 56,6 \text{ В};$   
 3)  $4,5 \text{ мА}; 4) 64,2 \text{ Вт}.$

4.15. См. решение.

4.17. 5,54; 545 Ом; 0,0545 См; 5,54.

4.18. 1) Нельзя, так как у обоих четырехполюсников соответственно одинаковы сопротивления холостого хода и короткого замыкания, например  $Z_{1x} = j5 \text{ Ом}.$  2) Можно, сопротивления холостого хода и короткого замыкания различны, например у 1-го четырехполюсника  $Z_{1x} = j6,65 \text{ Ом},$  у 2-го четырехполюсника  $Z_{1x} = 5,69 \text{ Ом}.$

4.20. 0,22 мкФ; 100 Ом; 35,6 мГн.

4.21. 16,5 пФ; 20 МГц; 3,4 кВт.

4.22. См. решение.

4.23. 600 Ом; 1 Нп.

4.24. См. решение.

4.25.  $Z_T = 0$  и  $Z_{\Pi} = \infty; A = 0; B = 180^\circ.$

4.26.  $Z_C = \sqrt{L/C} = \text{const}; A = 0; \cos B = (1 - \omega^2 LC)/(1 +$   
 $+ \omega^2 LC).$

4.27. 10 Ом; 20 Ом.

4.28.  $Z/\sqrt{2}; Z/\sqrt{2}.$

4.29.  $26,7 \angle -31^\circ 40' \text{ Ом}.$

4.30. 1) См. решение; 2) 44,7 Ом; 0,96 Нп.

4.31. 3,66 мВт;  $Z_1/2 = 76,2 \text{ Ом}; Z_2 = 27,6 \text{ Ом}.$

4.32. 100 Ом; 2,4 Нп.

- 4.33. См. решение.
- 4.34. 1.
- 4.35.  $205 \angle 38^\circ 20'$  Ом.
- 4.36. 1)  $\underline{Z}_1/2 = 8 - j3$  Ом;  $\underline{Z}_2 = -3 + j3$  Ом; 2)  $\underline{Z}_1 = 8 - j3$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 2 + j3$  Ом.
- 4.37. 1)  $\underline{Z}_1/2 = 10 + j5$  Ом;  $\underline{Z}_2 = j5$  Ом;  $14,6 \angle 40^\circ 40'$  Ом; 28,4 В; 2)  $\underline{Z}_1 = 10$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 40 + j30$  Ом;  $\underline{Z}_3 = j10$  Ом;  $14,4 \angle 38^\circ 30'$  Ом; 20 В.
- 4.38. См. решение.
- 4.39.  $\underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1)/\underline{A}_{21}$ ;  $\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1)/\underline{A}_{21}$ ;  $\underline{Z}_3 = 1/\underline{A}_{21}$ .
- 4.40. См. решение; 3,73.
- 4.41. 6 Ом; 5,5 Ом; 2 Ом.
- 4.42. См. решение.
- 4.43. См. решение.
- 4.44. 10 Ом;  $A = 0$ ;  $B = -\pi/2$ .
- 4.45.  $\underline{A}_{11} = 0,5$ ;  $\underline{A}_{12} = j3,75$  Ом;  $\underline{A}_{21} = 0,005 + j0,2$  См;  $\underline{A}_{22} = 0,5 + j0,0375$ .
- 4.46. 1; 10 Ом; 0,01 См; 1,1.
- 4.47. См. решение.
- 4.48. 4;  $17,7 \angle -45^\circ$  Ом;  $0,85 \angle 45^\circ$  См; 4.
- 4.49. 1)  $A_{11} = 2$ ;  $A_{12} = 3r$ ;  $A_{21} = 3/r$ ;  $A_{22} = 5$ ; 2)  $A_{11} = 1$ ;  $A_{12} = r/2$ ;  $A_{21} = 2/r$ ;  $A_{22} = 2$ ; 3)  $A_{11} = 1$ ;  $A_{12} = 2r$ ;  $A_{21} = 1/2r$ ;  $A_{22} = 2$ .
- 4.50.  $\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22} = 5/300$  См;  $\underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_{12} = 4/300$  См.
- 4.51. См. решение.
- 4.52.  $\underline{Y}_{11} = 0$ ;  $\underline{Y}_{12} = 0$ ;  $\underline{Y}_{21} = -0,01$  См;  $\underline{Y}_{22} = -2 \cdot 10^{-4}$  См.
- 4.53. См. решение.
- 4.54.  $0,5 - j0,5$ .
- 4.55.  $A_{11} = 290 \cdot 10^{-6}$ ;  $A_{12} = 79$  Ом;  $A_{21} = 0,527 \cdot 10^{-6}$  См;  $A_{22} = 1,05$ ;  $\Delta_A = 260 \cdot 10^{-6}$ .
- 4.56. 75 Ом;  $2,5 \cdot 10^{-4}$ ; 0,95;  $-5 \cdot 10^{-7}$  См.
- 4.57. См. решение.
- 4.58. См. решение.
- 4.59. См. решение.
- 4.60. Сигнальный граф показан на рис. 4.60О;
- $$\underline{H}_{11} = -r_1 + \frac{r_3(1-\beta)}{1-\mu+r_3/r_2}; \quad \underline{H}_{12} = \frac{r_3/r_2-\mu}{1-\mu+r_3/r_2}; \quad \underline{H}_{21} =$$
- $$= \frac{\beta(1-\mu)+r_3/r_2}{1-\mu+r_3/r_2}; \quad \underline{H}_{22} = -\frac{1}{r_3+r_2(1-\mu)}.$$
- 4.61. 425 Ом; -25 Ом; -2,5 МОм; -50 кОм.
- 4.62. 375 Ом; 49 975 Ом; 25 Ом; 40.
- 4.63. 1399 Ом; 0,9995; 40,98;  $-1,999 \cdot 10^{-5}$  См.
- 4.64. См. решение.

4.65.  $-1$ ;  $-1$ .

4.66.  $1/(1 + jk)$ , где  $k = rC\omega$ .

4.67.  $H_U = 1/2 \sqrt{1 + (k/2)^2}$ ;  $\text{tg } \psi = -k/2$ , где  $k = rC\omega$ .

4.68. а)  $jk/(1 + jk)$ , где  $k = rC\omega$ ; б)  $1/(1 + jk)$ , где  $k = \omega L/r$ .

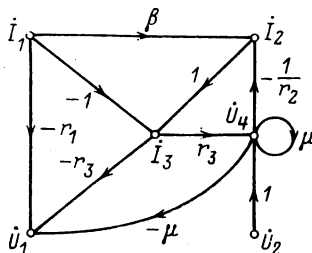


Рис. 4.600

4.69. См. решение.

4.70.  $8 \cdot 10^{-3} \omega [(9 - 0,8 \cdot 10^{-6} \omega^2)^2 + 0,059 \omega^2]^{-1/2}$ .

4.71. См. решение.

4.72.  $f(\omega) = \frac{1}{k} (1 + 1/j\omega\tau)$ .

4.73.  $(0,049 + j1,65 \cdot 10^{-6} \omega)/(0,00056 + j1,65 \cdot 10^{-6} \omega)$ .

4.74. См. решение.

4.75. 1389 Ом;  $-22,22$ .

4.76. См. решение.

4.77.  $-0,9834 \angle -115,5^\circ$ .

4.78. См. решение.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 5

5.1. См. решение.

5.2. 2,84 Ом/км; 1,94 мГн/км; 0,70 мкСм/км; 6250 пФ/км.

5.3. 1) 11,7 мГн; 2) 15,1 мГн; 3)  $65,6 \cdot 10^3$  км/с; 4) 818 км.

5.4.  $r_0 = 0,51$  Ом/км;  $x_0 = 0,12$  Ом/км;  $g_0 = 0$ ;  $b_0 = 54,3$  мкСм/км;  $Z_b = 98,4 \angle -38^\circ 30'$  Ом;  $\gamma = (3,34 + j4,16) \times 10^{-3}$  км $^{-1}$ .

5.5. См. решение.

5.6. 1,33 мГн/км; 8,3 нФ/км; 400 Ом; 12 град/м.

5.7. См. решение.

5.8. См. решение.

5.9. См. решение.

5.10. См. решение.

5.11. См. решение.

5.12. См. решение.

- 5.13. См. решение.  
 5.14. См. решение.  
 5.15. См. решение.  
 5.16. См. решение.  
 5.17. 229 кВ; 700 А; 355 МВт.  
 5.18.  $295 \cdot 10^3$  км/с; 5900 км; 84,5 %.  
 5.19. 683 кВ; 820 А.  
 5.20. 272 МВт; 362 кВ; 527 А.  
 5.21. См. решение.  
 5.22. 1) 416 кВ; 2) 229 кВ.  
 5.23. 82,2 кВт; 94,3 кВт; 82,7 кВт; 91,0 кВт; 87,3 и 91,0 %.  
 5.24. 4,0 кВт.  
 5.25. См. решение.  
 5.26. См. решение.  
 5.27. 12 В; 0; 12 В; 0; 12 В; 0.  
 5.28. См. решение.  
 5.29. 1)  $n\lambda/2$ , где  $n$  — целое число; 2)  $k\lambda/4$ , где  $k$  — целое нечетное число;  $U_{\max} = 120$  В в конце линии;  $U_{\min} = 60$  В;  $I_{\max} = 0,4$  А в конце линии;  $I_{\min} = 0,2$  А.  
 5.31. 20 мВ и 31,8 мВ; 20 мВ; 129 см (0).  
 5.32.  $n\lambda/2$ , где  $n$  — целое число.  
 5.33.  $\lambda/4$ ;  $\sqrt{r_1 r_2 / c_0}$ ;  $1/c_0 \sqrt{r_1 r_2}$ , где  $c_0$  — скорость света в вакууме.  
 5.34. См. решение.  
 5.35. 0,29 А.  
 5.36. 2,72 м; 4,12 м.  
 5.37. 58,9 и 66,7 Вт; в 7 раз; 5 м.  
 5.38. 1) 9,12 м; 2) 693 Ом.  
 5.39. 218 и 232 В.  
 5.40. См. решение.  
 5.41. 1,36 м; 850 Ом.  
 5.42. См. решение.  
 5.43.  $j0,5z_b \sin 2\beta x$ .  
 5.44. См. решение.  
 5.45. 0,75 м.  
 5.46. 0,3 пФ.  
 5.47. См. решение.  
 5.48.  $503 \angle 10^\circ$  Ом.  
 5.49.  $680 \angle -24^\circ$  Ом.  
 5.50. См. решение.  
 5.51. 1,06 МОм.  
 5.52. См. решение.  
 5.53.  $Z_1/2 = 547 \angle -14^\circ 30'$  Ом;  $Z_2 = 307 \angle 39^\circ 30'$  Ом; 40,4 и 80 В.

- 5.54. 1) 6,6 %; 2) 10 %; 3) 99,8 %.  
 5.55. 1,5 мкГн; 1,5 мкГн; 8,4 пФ.  
 5.56. 45 Ом; 45 Ом; 40 Ом.  
 5.57. 1)  $j795$  Ом;  $j795$  Ом;  $-j795$  Ом; 2)  $j795$  Ом;  $-j795$  Ом;  $-j795$  Ом; 3)  $j795$  Ом;  $-j795$  Ом.  
 5.58. 200 Ом; 2,44 рад/м;  $j543$  Ом;  $j543$  Ом;  $-j309$  Ом.  
 5.59. 60,7 км; 52,7 Ом; при частотах, меньших, чем граничная.  
 5.60. См. решение.  
 5.61. 100 мВ; 0,224 мВт; 1,1 %.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 6

- 6.1. См. решение.  
 6.2. См. решение.  
 6.3.  $50 - 40,5 \cos \omega t - 4,50 \cos 3\omega t - 1,62 \cos 5\omega t$  В.  
 6.4. а)  $5,09 - 2,0 \sin \omega t - 3,42 \cos 2\omega t - 0,67 \cos 4\omega t$  В;  
 б)  $-0,91 - 2,0 \sin \omega t - 3,42 \cos 2\omega t - 0,67 \cos 4\omega t$  В.  
 6.5.  $100 + 191 \sin(\omega t - 60^\circ) + 95,5 \sin(2\omega t + 60^\circ) + 63,7 \sin(3\omega t + 180^\circ)$  В.  
 6.6. См. решение.  
 6.7.  $5,0 \sin(\omega t + 30^\circ) + 3,0 \sin(2\omega t - 60^\circ)$ , А; см. рис. 6.70.

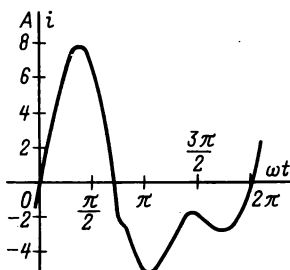


Рис. 6.70

- 6.8. См. решение.  
 6.9. а)  $34,0 \sin(\omega t + 45^\circ) + 37,9 \sin(3\omega t + 71^\circ 35')$  В;  
 б)  $34,0 \sin(\omega t - 45^\circ) + 12,6 \sin(3\omega t - 18^\circ 30')$  В.  
 6.10.  $170 \sin(\omega t + 45^\circ) + 42,4 \sin(2\omega t + 135^\circ)$  мА.  
 6.11. См. решение.  
 6.12. 49,6 В.  
 6.13.  $1 + 0,707 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,408 \sin(3\omega t + 45^\circ 50')$  А.  
 6.13.  $1 + 0,707 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,408 \sin(3\omega t + 45^\circ 50')$  А.  
 6.14. 35,1 Вт.



- 6.15.  $10 \sin(\omega t + 90^\circ) + 5 \sin(3\omega t + 37^\circ) + 3 \sin(5\omega t + 22^\circ 40')$  В.
- 6.16. 1)  $20 \sin(\omega t + 90^\circ) + 20 \sin(2\omega t + 53^\circ 10')$  В;
- 2)  $18,2 \sin(\omega t + 95^\circ 13') + 19,1 \sin(2\omega t + 58^\circ 0')$  В.
- 6.17. 1)  $u_{\text{вх}} = 28,6 \sin(\omega t + 44^\circ 30') + 31,0 \sin(3\omega t + 70^\circ 40')$  В;  
 $u_{\text{вых}} = 9,06 \sin(\omega t + 84^\circ 50') + 13,5 \sin(3\omega t + 82^\circ 20')$  В; 2)  $u_{\text{вх}} =$   
 $= 238 \sin(\omega t + 5^\circ 47') + 120 \sin(3\omega t + 1^\circ 55')$  В;  $u_{\text{вых}} = 200 \sin(\omega t +$   
 $+ 6^\circ 18') + 100 \sin(3\omega t + 2^\circ 6')$  В.
- 6.18. См. решение.
- 6.19. 21,0 В; 20,0 В; 6,5 В.
- 6.20. 122 В; 3,48 А; 423 Вт.
- 6.21. 226 Вт; 1,97 А; 1,64 А; 0,71 А.
- 6.22. 1) 7,31 В; 2) 3,50 В; 0,272 А.
- 6.23. 0,172 В.
- 6.25. 9,82 А; 1,65 А; 10,69 А; 6,0 А; 96,2 В; 36 Вт.
- 6.26. См. решение.
- 6.27. 0,9936; 0,9463.
- 6.28. См. решение.
- 6.29.

	1	2	3	4	5	6
а	0	10,0	6,37	-6,37	3,18	-3,18
б	7,07	12,2	7,07	7,07	5,00	5,00
в	7,07	7,07	3,07	3,07	3,86	3,86
г	7,07	7,07	2,97	2,97	2,13	2,13
д	7,07	7,07	4,50	3,63	2,25	4,82

Все напряжения в вольтах.

- 6.30. Для обоих напряжений: а) 0; б) 8,86 В; в) 8,86 В;  
 г) 7,07 В; д) 7,00 В.

6.31.

	1	2	3	4		1	2	3	4
а	0	7,07	5,0	0	в	11,1	7,85	4,82	9,62
б	10,0	7,07	5,0	10,0	г	7,07	5,00	6,12	12,3

Все напряжения в вольтах.

- 6.32. а) 4 Вт; б) 3 Вт; в) 3,2 Вт; г) 3,67 Вт; д) 2 Вт;  
 е) 3 Вт.

6.33. 1,33 Вт.

6.34.  $k_{\Phi} = 1; 1,154; 1,089; k_a = 1; 1,73; 1,22; k_{\text{иск}} = 0,900; 0,993; 0,993$ .

6.35. См. решение.

6.36.  $39,2 \sin(\omega t + 71^\circ) + 60 \sin 3\omega t$ , В.

6.37. 0,100 мкФ; 0,0185 мкФ; 6,00 мГн.

6.38. 0,451 мкФ; 3,62 мкФ.

6.39.  $9,6 \sin \omega t + 5,0 \cos \omega t + 2,5 \sin(3\omega t - 45^\circ)$  А.

6.40. Мгновенные значения: 1)  $97,8 \sin \omega t - 3,79 \sin(3\omega t - 69^\circ 30') + 0,80 \sin(5\omega t - 78^\circ 10')$  мА; 2)  $12,1 \sin(\omega t + 82^\circ 50') - 37,9 \sin 3\omega t + 1,16 \sin(5\omega t - 70^\circ 50')$  мА; 3)  $4,05 \sin(\omega t + 87^\circ 35') - 1,99 \sin(3\omega t + 79^\circ 20') + 3,9 \sin 5\omega t$  мА. Действующие значения: 1) 68,9 мА; 2) 28,1 мА; 3) 4,2 мА.

6.41. Напряжение  $u$ , повторяет форму кривой напряжения  $u$ , но максимальное значение импульсов 8 В; токи:  $i_L = 2,75 \sin(\omega t - 32^\circ 10') - 0,17 \sin(3\omega t - 62^\circ 20') + 0,039 \sin(5\omega t - 72^\circ 10')$  А;  $i_C = 1,72 \sin(\omega t + 57^\circ 50') - 0,32 \sin(3\omega t + 28^\circ 00') + 0,123 \sin(5\omega t + 17^\circ 40')$  А.

6.42. См. решение.

6.43. 22,1 В.

6.44. 1) 130 В и 0; 2) 141 В, 165 В.

6.45. 3,38 А.

6.46. См. решение.

6.47.  $12,6 \sin(\omega t + 48^\circ) + 26,6 \sin(3\omega t - 45^\circ) + 8,57 \sin(5\omega t - 179^\circ)$  А;  $80,2 \sin(3\omega t - 45^\circ)$  А;  $120 \sin(\omega t + 120^\circ) + 113 \sin(3\omega t - 90^\circ) + 30 \sin(5\omega t - 90^\circ)$  В; 104,2 В; 151,5 В; 118,5 В; 21,8 А; 56,7 А.

6.48.  $20,8 \sin(\omega t + 30^\circ) + 5,2 \sin(5\omega t - 30^\circ)$  А; 15,2 А.

6.49. 3,69 А; 2,13 А; 179 В.

6.50. 7,58 В; 0,111 А.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 7

7.1. См. решение.

7.2. См. решение.

7.3. Схема фильтра приведена в табл. 7.1, где  $L = 9,6$  Гн и  $C/2 = 13,3$  мкФ; 4,6 Нп;  $\pi$  рад;  $4,6 + j3,14; 100, 0$  и  $20$  Гц.

7.4. 10,2 мГн, 15,9/2 нФ; 2,62 Нп.

7.5. 1; 0,68; 0,28; 1; 1,88; 24 Гц.

7.6. См. решение.

7.7.  $220/\sqrt{3}$  В; 1;  $-60^\circ$ .

7.8.  $0,35 \angle -23^\circ 30'$  В;  $89,6 \angle 116^\circ 35'$  В.

7.9.  $0 - 192$  кГц и  $96 - \infty$  кГц; 1) 0; 0; 2) 1,4 Нп; 0.

7.10. 140 кГц.

7.11. 0,34 мГн; нет; три звена.

7.12. См. решение.

7.13. 7,2 мГц; 0,1 мкФ; 6,62 кГц.

7.14. См. решение.

7.15. Увеличится в  $\sqrt{2}$  раз ( $1250 \sqrt{2}$  Гц).

7.16.  $\sqrt{2} f_2$ ; 1,76 Нп;  $1,67 f_2$ .

7.17. 3,6 кГц; 8,94 Нп; 72 мВ.

7.18. См. решение.

7.19. См. решение.

7.20. 1) 0 и 4 МГц; 2) 4,62 МГц; 3) 0 и 3,77 МГц.

7.21. 1,71 Нп; в 5,5 раза.

7.22. Нет, так как полувольта не будут соединены по принципу согласования ( $Z_{\Pi} \neq Z_{\Pi m}$ ).

7.23. Рис. 7.23О, где  $C_{2m}/2 = 0,025$  мкФ;  $L_{1m}/2 = 50$  мГн;  $2C_{1m} = 0,075$  мкФ.

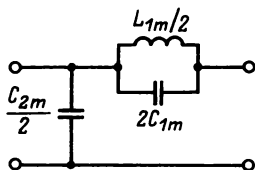


Рис. 7.23О

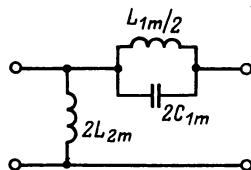


Рис. 7.24О

7.24. Рис. 7.24О, где  $2L_{2m} = 0,17$  мГн;  $L_{1m}/2 = 0,095$  мГн;  $2C_{1m} = 0,106$  мкФ.

7.25. 0—3,98 кГц; 5,34 кГц; не изменится.

7.26. 1) 612 Ом; 2)  $j707$  Ом.

7.27. 0— $\infty$ .

7.28. См. решение.

7.29. 0,6.

7.30. См. решение.

7.31. См. решение.

7.32. 1,53 Нп.

7.33. 159 кГц.

7.34. См. решение.

$$7.35. H = \sqrt{\frac{n^2 v^4 K^2}{(1 - nv^2)^2 + v^2 (2n + 1 - K)^2}};$$

$$H_{\text{дБ}} = 20 \lg nv^2 K - 10 \lg [(1 - nv^2)^2 + v^2 (2n + 1 - K)^2].$$

Результаты расчета амплитудно-частотной характеристики приведены в таблице:

$\nu$	0,2	1,0	2,0	2,42	3,0	5,0	10	100
$H$ , дБ	-39,1	-9,8	2,77	3,52	3,1	1,75	1,06	0,83

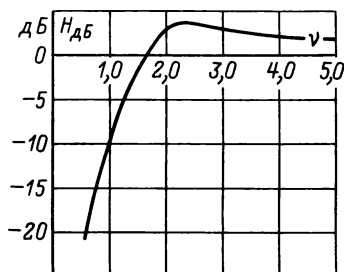


Рис. 7.350

График амплитудно-частотной характеристики показан на рис. 7.350.

### ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 8

- 8.1. См. решение.  
 8.2. См. решение.  
 8.3.  $2e^{-150t}$  А.  
 8.4.  $0,5e^{-60t}$  А.  
 8.5.  $6e^{-40t}$  А.  
 8.6.  $0,4e^{-1200t}$  А.  
 8.7. -2995 В.  
 8.8. См. решение.  
 8.9. См. решение.  
 8.10. См. решение.  
 8.11.  $0,2 - 0,2e^{-750t}$  А;  $60e^{-750t}$  В.  
 8.12.  $8 - 0,6e^{-500t}$  А.  
 8.13.  $6 - 6e^{-600t}$  А; 0,676 мс; 5,99 мс.  
 8.14.  $2 - 1,5e^{-250t}$  А.  
 8.15.  $1,33 - 0,53e^{-300t}$  А.  
 8.16.  $3 - 2e^{-400t}$  А;  $e^{-400t}$  А;  $3 - 3e^{-400t}$  А.  
 8.17.  $2,5 - 1,5e^{-1200t}$  А;  $2,5 - 2,5e^{-1200t}$  А.  
 8.18.  $2 - 1,2e^{-1600t}$  А;  $1,5 - 1,5e^{-1600t}$  А.  
 8.19.  $1,6 - 0,4e^{-445t}$  А.  
 8.20.  $1,5e^{-125t}$  А;  $3 - 0,5e^{-125t}$  А;  $6 - 1e^{-125t}$  А;  $9 - 3e^{-125t}$  А;  
 $3 - 2e^{-125t}$  А.  
 8.21. См. решение.  
 8.22. См. решение.

8.23. 1)  $1,572 \sin(314t - 50,95^\circ) + 1,220e^{-50t}$  А; 2)  $80,95^\circ + k \cdot 180^\circ$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $1,572 \sin 314t$  А; 3)  $170,95^\circ + k \cdot 180^\circ$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $2,766$  А.

8.24.  $0,707 \sin(1000t - 75^\circ) + 0,683e^{-1000t}$  А;  $-141 \sin(1000t + 15^\circ) + 136,6e^{-1000t}$  В.

8.25.  $0,314 \sin(2500t - 63,69^\circ) + 1,281e^{-500t}$  А.

8.26.  $1,517 \sin(314t + 47,67^\circ) - 0,413e^{-100t}$  А.

8.27.  $0,447 \sin(1000t + 3,44^\circ) + 0,064e^{-2000t}$  А;  
 $0,632 \sin(1000t + 48,44^\circ) - 0,064e^{-2000t}$  А.

8.28. См. решение.

8.29. См. решение.

8.30.  $100e^{-500t}$  В;  $0,05e^{-500t}$  А.

8.31.  $50e^{-400t}$  В;  $0,2e^{-400t}$  А.

8.32.  $60 + 60e^{-2500t}$  В;  $60 - 240e^{-2500t}$  В;  $0,8e^{-2500t}$  А.

8.33.  $-61,2e^{-1000t}$  В.

8.34.  $62e^{-125t}$  В;  $0,0775e^{-125t}$  А.

8.35. См. решение.

8.36. См. решение.

8.37. См. решение.

8.38. 1)  $100 - 100e^{-400t}$  В;  $0,04e^{-400t}$  А; 2)  $100 - 50e^{-400t}$  В;  
 $0,02e^{-400t}$  А; 3)  $100 - 150e^{-400t}$  В;  $0,06e^{-400t}$  А.

8.39.  $200 - 200e^{-500t}$  В;  $0,2e^{-500t}$  А.

8.40.  $80 - 180e^{-4000t}$  В;  $0,72e^{-4000t}$  А.

8.41.  $100 - 100e^{-200t}$  В;  $0,5 - 0,2e^{-200t}$  А;  $0,2e^{-200t}$  А.

8.42.  $60 + 120e^{-500t}$  В;  $0,5 - 0,5e^{-500t}$  А;  $0,5 + 1,0e^{-500t}$  А.

8.43.  $96 - 96e^{-490t}$  В;  $1,200 - 0,166e^{-490t}$  А.

8.44.  $100 + 150e^{-625t}$  В;  $1,0 + 1,5e^{-625t}$  А.

8.45.  $60 - 60e^{-625t}$  В;  $1,0 + 1,5e^{-625t}$  А.

8.46.  $120 - 75e^{-1000t}$  В;  $1,0 + 1,25e^{-1000t}$  А;  $1,000 - 0,625e^{-1000t}$  А.

8.47.  $80 - 40e^{-800t}$  В;  $0,4e^{-800t}$  А.

8.48.  $1,2e^{-400t}$  А;  $2 - 1,2e^{-400t}$  А;  $120 - 120e^{-400t}$  В;  
 $160 - 72e^{-400t}$  В.

8.49. См. решение.

8.50. См. решение.

8.51. 1)  $39,4 \sin(314t - 52,74^\circ) + 31,3e^{-40t}$  В;  $1,238 \sin(314t + 37,26^\circ) - 0,126e^{-40t}$  А; 2)  $82,74^\circ + k \cdot 180^\circ$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $39,4 \sin 314t$  В; 3)  $-7,26^\circ + k \cdot 180^\circ$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $65,8$  В.

8.52.  $54,6 \sin(314t - 42,34^\circ) + 66,8e^{-100t}$  В;  $1,37 \sin(314t + 47,66^\circ) - 0,53e^{-100t}$  А.

8.53.  $169,4 \sin(314t - 2,13^\circ) - 43,4e^{-500t}$  В.

8.54.  $24,4 \sin(314t - 57^\circ) + 20,5e^{-133t}$  В;  $73,2 \sin(314t - 57^\circ) - 18,6e^{-133t}$  В.

8.55. См. решение.

- 8.56. См. решение.  
 8.57. См. решение.  
 8.58.  $42,16e^{-50t} \sin(150t + 71,56^\circ)$  B;  $1,33e^{-50t} \sin 150t$  A.  
 8.59.  $-72,95e^{-100t} \sin(200t - 43,26^\circ)$  B;  $1,305e^{-100t} \sin(200t + 73,3^\circ)$  A.  
 8.60.  $-20 \cdot 10^3 te^{-1000t}$  B;  $0,2e^{-1000t} + 200te^{-1000t}$  A.  
 8.61.  $26,56e^{-460t} + 73,44e^{-1740t}$  B;  $-0,144e^{-460t} + 0,544e^{-1740t}$  A.  
 8.62.  $0,734e^{-230t} + 0,266e^{-870t}$  A;  $0,544e^{-230t} - 0,144e^{-870t}$  A.  
 8.63. См. решение.  
 8.64. См. решение.  
 8.65. См. решение.  
 8.66.  $-0,5$  A;  $-0,5$  A; 0;  $-50$  B;  $100$  B;  $1000$  A/c;  $0$   $1000$  A/c; 0;  $-10^5$  B/c.  
 8.67. 0; 0;  $-2$  A;  $-2$  A; 0; 0;  $10^4$  A/c;  $-10^4$  A/c; 0;  $2 \cdot 10^4$  A/c;  $-0,4 \cdot 10^6$  B/c;  $0,4 \cdot 10^6$  B/c.  
 8.68.  $0,750 - 0,333e^{-200t} - 0,417e^{-2000t}$  A;  $0,333e^{-200t} - 0,333e^{-2000t}$  A.  
 8.69.  $2,83 - e^{-30t} + e^{-200t}$  A;  $10e^{-30t} + 75e^{-200t}$  B.  
 8.70.  $1,9e^{-400t} + 0,1e^{-2500t}$  A;  $80 - 95e^{-400t} + 15e^{-2500t}$  B.  
 8.71.  $0,57e^{-200t} + 4,43e^{-952t}$  A;  $50 - 13,3e^{-200t} + 13,3e^{-952t}$  B.  
 8.72.  $0,6e^{-100t} \sin 2000t$  A;  $120 - 120,1e^{-100t} \sin(2000t + 87,1^\circ)$  B;  $0,555$  A;  $222,5$  B.  
 8.73.  $0,125 - 0,150e^{-200t} \sin 200t$  A;  $37,5 + 53e^{-200t} \sin(200t - 135^\circ)$  B.  
 8.74.  $2 + 3,33e^{-800t} \sin(600t - 144^\circ)$  A;  $2 + 2,11e^{-800t} \times \sin(600t - 71^\circ)$  A;  $60 + 66,7e^{-800t} \sin(600t + 37^\circ)$  B.  
 8.75.  $3 + 3,35e^{-250t} \sin(250t - 63,3^\circ)$  A;  $212e^{-250t} \sin(250t + 45^\circ)$  B.  
 8.76.  $0,1 - 0,144e^{-115t} + 0,088e^{-435t}$  A;  $10 - 15,63e^{-115t} + 15,63e^{-435t}$  B.  
 8.77.  $-0,0023e^{-115t} + 0,0523e^{-435t}$  A;  $10 + 1,8e^{-115t} - 6,8e^{-435t}$  B.  
 8.78.  $e^{-100t} + 20te^{-100t}$  A;  $120 - 120e^{-100t} - 2400te^{-100t}$  B.  
 8.79.  $12,5 - 0,48e^{-85t} + 7,98e^{-945t}$  A;  $3,71e^{-85t} - 41,2e^{-945t}$  B.  
 8.80.  $12,5 - 13,73e^{-85t} + 1,23e^{-945t}$  A;  $62,5 + 41,21e^{-85t} - 3,69e^{-945t}$  B.  
 8.81.  $4,5 + 7,78e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ)$  A;  $55 + 55\sqrt{2}e^{-100t} \times \sin(100t - 45^\circ)$  B.  
 8.82.  $1 + 2e^{-100t} + 40te^{-100t}$  A;  $2 - 2e^{-100t} - 40te^{-100t}$  A.  
 8.83.  $0,5 + 0,25e^{-277t} + 0,25e^{-723t}$  A;  $0,362e^{-277t} + 0,138e^{-723t}$  A;  $100 + 50e^{-277t} + 50e^{-723t}$  B.  
 8.84. 1)  $0,5 \sin 10^4t - 0,5e^{-100t} \sin 10^4t$  A;  $250 \sin(10^4t - 90^\circ) + 250e^{-100t} \cos 10^4t + 2,5e^{-100t} \sin 10^4t$  B; 2)  $5 \cdot 10^{-4} \sin 10^4t -$

$-5 \cdot 10^{-3} e^{-250t} \sin 10^5 t$  А;  $5 \sin(10^4 t - 90^\circ) + 5e^{-250t} \cos 10^5 t + 0,0125e^{-250t} \sin 10^5 t$  В; 10,56; 3)  $-\cos 10^5 t + e^{-100t} \cos 10^4 t - 0,01e^{-100t} \sin 10^4 t$  МА;  $-50 \sin 10^5 t + 500e^{-100t} \sin 10^4 t$  МВ; 10,71.

**8.85.**  $3 \sin(10^5 t - 53^\circ) + (4,4 - 2,16 \cdot 10^6 t) e^{-2 \cdot 10^5 t}$  А;  $80 \sin(10^5 t + 37^\circ) + (-88 + 43,2 \cdot 10^6 t) e^{-2 \cdot 10^5 t}$  В.

**8.86.**  $0,403 \sin(10^4 t - 45^\circ) + 0,218e^{-10^3 t} + 0,066e^{-15 \cdot 10^3 t}$  А;  $1,28 \sin(10^4 t + 26,7^\circ) - 0,109e^{-10^3 t} + 0,034e^{-15 \cdot 10^3 t}$  А.

**8.87.** См. решение.

**8.88.**  $10 - 6,17e^{-69,4t} - 3,83e^{-671t}$  А;  $2,96e^{-69,4t} - 2,96e^{-671t}$  А.

**8.89.**  $20 - 1,575e^{-56t} - 18,425e^{-670t}$  А;  $10 - 6,48e^{-56t} - 3,52e^{-670t}$  А.

**8.90.**  $1,83 \sin(100t - 45,5^\circ) + 1,22e^{-30t} + 0,07e^{-1270t}$  А;  $0,782 \sin(100t + 13,5^\circ) - 0,238e^{-30t} + 0,065e^{-1270t}$  А.

**8.91.**  $2,08 \sin(100t - 32^\circ) - 0,176e^{-28t} - 0,264e^{-712t}$  А;  $1,30 \sin(100t + 8^\circ) + 0,0717e^{-28t} - 0,2517e^{-712t}$  А.

**8.92.** См. решение.

**8.93.** См. решение.

**8.94.** См. решение.

**8.95.** См. решение.

**8.96.** См. решение.

**8.97.** См. решение.

**8.98.** См. решение.

**8.99.** См. решение.

**8.156.** См. решение.

**8.157.** См. решение.

**8.158.**  $\frac{U}{r(a+p)} [a(1 - e^{pt}) + p(1 - e^{-at})]$ , где  $p = -r/L$ .

**8.159.** Рис. 8.159О. В интервалах времени  $0 \leq t \leq T_1$ ,  $T_1 \leq t \leq T_2$  и  $t \geq T_2$  ток  $i_1$  соответственно равен: 0;  $10^{-3} [15e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})} - 5]$  А и  $10^{-3} [15e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})} - 5e^{-2 \cdot 10^3 (t-2 \cdot 10^{-3})}]$  А; напряжение  $u_2$  соответственно равно: 0;  $15 [1 - e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})}] - 10^4 (t - 10^{-3})$  В и  $-15e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})} + 5e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})}$  В.

**8.160.**  $\frac{U}{r(a+p)} (pe^{pt} + ae^{-at})$ , где  $p = -1/rC$ .

**8.161.** В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T/2$ ;  $T/2 \leq t \leq T$  и  $t \geq T$  ток  $i$  соответственно равен: 0;  $0,4t - 1,2 \times 10^{-4} (1 - e^{-1250t})$  А;  $0,4(10^{-3} - t) + 1,2 \cdot 10^{-4} [1 + 1e^{-1250t} - 2e^{-1250(t-5 \cdot 10^{-4})}]$  А и  $1,2 \cdot 10^{-4} [e^{-1250t} + 1e^{-1250(t-10^{-3})} - 2e^{-1250(t-5 \cdot 10^{-4})}]$  А; напряжение  $u_2$  соответственно равно: 0;  $0,6(1 - e^{-1250t})$  В;  $0,6 [2e^{-1250(t-5 \cdot 10^{-4})} - 1e^{-1250t} - 1]$  В и

$0,6 [2e^{-1250(t-5 \cdot 10^{-4})} - 1e^{-1250t} - 1e^{-1250(t-10^{-3})}]$  В;  $i(t_1) = 6,779 \cdot 10^{-5}$  А;  $i(t_2) = 9,141 \cdot 10^{-5}$  А;  $i(t_3) = 1,896 \cdot 10^{-5}$  А;  $u_2(t_1) = 0,161$  В;  $u_2(t_2) = 4,298 \cdot 10^{-2}$  В;  $u_2(t_3) = -0,09481$  В.

**8.162.** В интервалах времени  $0 < t$ ;  $0 \leq t \leq T$  и  $t \geq T$  ток  $i_2$  соответственно равен: 0;  $0,4639e^{-4 \cdot 10^3 t} + 1,536 \cos 10^3 \pi t - 0,3643 \sin 10^3 \pi t - 8,3 \cdot 10^{-6}$  мА;  $-2,228e^{-4 \cdot 10^3 t}$  мА;  $0,9992$  мА;  $-0,1109$  мА.

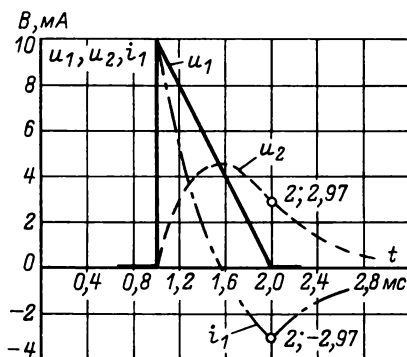


Рис. 8.159О

**8.163.** В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T$  и  $t \geq T$  ток соответственно равен 0;  $\frac{Ur_2}{\rho p} \left[ (p-1)(1-e^{pt}) - p \frac{t}{T} \right]$  и  $\frac{Ur_2}{\rho p} (1-p-e^{-pT}) e^{pt}$ , где  $\rho = rr_1 + rr_2 + r_1 r_2$ ;  $p = -\rho/L(r_1 + r_2)$ .

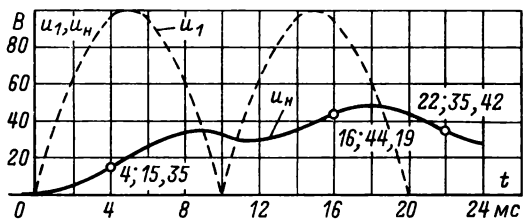


Рис. 8.164О

**8.164.** Рис. 8.164О. В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T/2$ ;  $T/2 \leq t \leq T$  и  $t \geq T$  напряжение  $u_H$  соответственно равно: 0;  $11,47 [5 \sin 10^2 \pi t + \pi(e^{-500t} - \cos 10^2 \pi t)]$  В;  $-11,47 \{5 \sin 10^2 \pi t - \pi [(1 + 2e^{250T}) e^{-500t} + \cos 10^2 \pi t]\}$  В;  $36,04e^{-500t} (1 + 2e^{250T} + 1e^{500T})$  В.



**8.165.** В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T$ ;  $T \leq t \leq 2T$  и  $t \geq 2T$  напряжение  $u_n$  соответственно равно:  $0$ ;  $\frac{Ur_n}{pT(r+r_n)} \times (pt+1-e^{pt})$ ;  $\frac{Ur_n}{r+r_n} \left[ \left( 2 + \frac{1}{pT} \right) e^{p(t-T)} - 1 - \frac{1}{pT} e^{pt} \right]$ ;  $\frac{Ur_n}{r+r_n} \times \left[ \left( 2 + \frac{1}{pT} \right) e^{p(t-T)} - 1 - \frac{1}{pT} e^{pt} \right] + U \frac{r_n}{r+r_n} (1 - e^{p(t-2T)})$ , где  $p = -(r+r_n)/rr_n C$ .

**8.166.** Рис. 8.166О. При  $t \geq 0$   $i = 5(1,5e^{-0,5 \cdot 10^6 t} - 1e^{-10^6 t})$  мА;  $u_L = 5(2e^{-10^6 t} - 1e^{-0,5 \cdot 10^6 t})$  В.

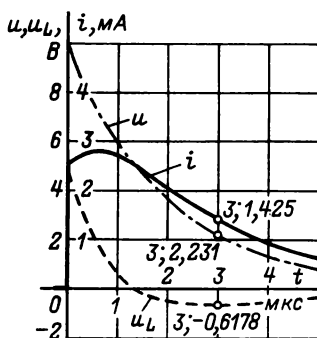


Рис. 8.166О

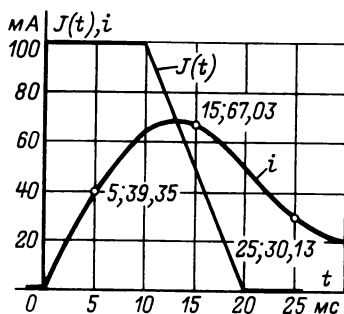


Рис. 8.167О

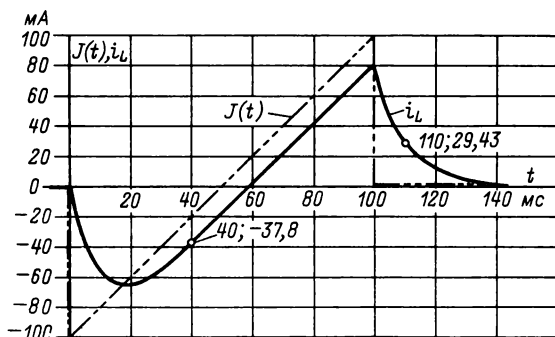


Рис. 8.168О

**8.167.** Рис. 8.167О. В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T_0$ ;  $T_0 \leq t \leq 2T_0$  и  $t \geq 2T_0$  ток соответственно равен:  $0$ ;  $100(1 - e^{-100t})$  мА;  $100(3 - 10^2 t - 3,718e^{-100t})$  мА и  $367,1e^{-100t}$  мА.

8.168. Рис. 8.168О. В интервалах времени  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq T$  и  $t \geq T$  ток соответственно равен:  $0$ ;  $2 \cdot 10^3 t - 120(1 - e^{-100t})$  мА и  $1,762 \cdot 10^6 e^{-100t}$  мА.

8.169. См. решение.

8.170. Рис. 8.170О;  $\frac{5}{9} e^{-200t} - \frac{500}{3} t e^{-500t} - \frac{5}{9} e^{-500t}$  В.

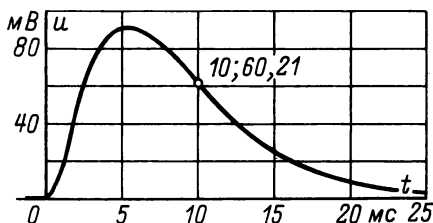


Рис. 8.170О

8.171. См. решение.

8.172. См. решение.

8.173. См. решение.

8.174.  $0,7276 \sin(10^3 t + 44,04^\circ) - 0,0965 e^{-250t}$  А.

8.175.  $0,2 \sqrt{2} \sin(10^4 t - 45^\circ) - 0,2 e^{-10^4 t}$  А.

8.176. См. решение.

8.177.  $6,07 e^{-293t} - 206 e^{-1707t}$  А.

8.178.  $0,784 \sin(10^4 t + 71,31^\circ) + 0,2233 e^{-2000t}$  А.

8.179.  $0,2397 \sin(10^3 t - 38,5^\circ) + 0,0308 e^{-200t}$  А.

8.180. См. решение.

8.181. См. решение.

8.182. См. решение.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 9

9.1. См. решение.

9.2. Рис. 9.2О (см. стр. 714).

9.3. Рис. 9.3О. При  $0 \leq x \leq 75$  км ток  $i = 500$  А; при  $75 \leq x \leq 300$  км ток  $i = \left[ 10^6 (t_1 - x/c) + 10^6 \left( t_1 - \frac{2l - x}{c} \right) - 10^3 \left( 1 - e^{-2 \cdot 10^3 \left( t_1 - \frac{2l - x}{c} \right)} \right) \right]$  А (см. стр. 714).

9.4. Рис. 9.4О. При  $0 \leq t \leq 0,3$  мс  $u_A = 0$ ,  $i_A = 0$ ; при  $0,3 \leq t \leq 0,7$  мс  $u_A = 300$  кВ,  $i_A = 600$  А; при  $0,7 \leq t \leq 1,4$  мс

$$u_A = 400(1 - e^{-3 \cdot 10^3 (t - 0,7 \cdot 10^{-3})}) \text{ кВ}, \quad i_A = (400 + 800 \times e^{-3 \cdot 10^3 (t - 0,7 \cdot 10^{-3})}) \text{ А.}$$

9.5. При  $0 \leq x \leq l/2$  и  $l/2 \leq x \leq l$  соответственно 20,2 кВ; 50,5 А и  $8,1(1 + 4e^{-5 \cdot 10^3 \theta})$  кВ;  $81(1 - e^{-5 \cdot 10^3 \theta})$  А, где  $\theta = x/c - \frac{l/2}{c}$ ; 1,79 кВ.

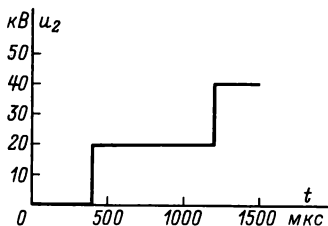


Рис. 9.20

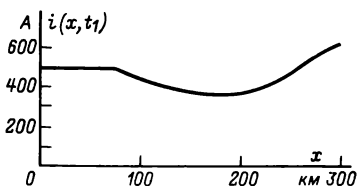


Рис. 9.30

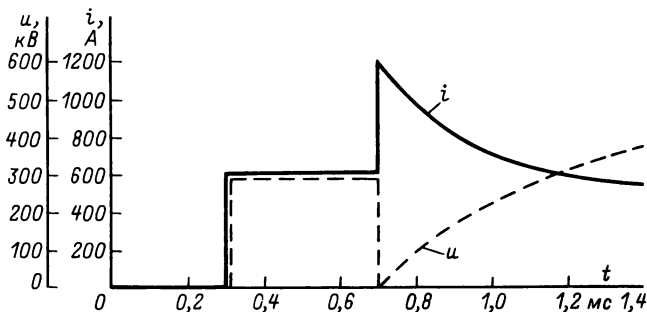


Рис. 9.40

9.6. Рис. 9.60, где при  $0 \leq x \leq 5$  м  $u = 100 \sin \left[ 2\pi \times 10^7 \left( t_1 - \frac{x}{c/2} \right) + \frac{\pi}{6} \right]$  В; при  $5 \leq x \leq 10$  м  $u = 100 \sin \left[ 2\pi \times 10^7 \left( t_1 - \frac{x}{c/2} \right) + \frac{\pi}{6} \right] + 50 \sin \left[ 2\pi \cdot 10^7 \left( t_1 - \frac{2l-x}{c/2} \right) + \frac{\pi}{6} \right]$  В.

9.7. См. решение.

9.8. Напряжение и ток согласующей линии после третьего отражения: 199,6 В; 3,99 А.

$$9.9. u' = \left( 127 - 113e^{-2,2 \cdot 10^4 \left( t_1 - \frac{l_1 - x'}{c} \right)} \right) \text{ кВ}; \quad i' =$$

$$= 282e^{-2,2 \cdot 10^4 \left(t_1 - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} \text{ A}; \quad u'' = 14,1e^{-2,2 \cdot 10^4 (t_1 - x''/c)} \text{ кВ}; \quad i'' = 282e^{-2,2 \cdot 10^4 (t_1 - x''/c)} \text{ A}.$$

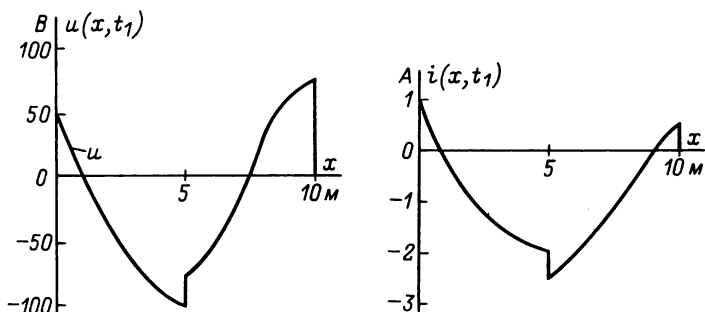


Рис. 9.60

**9.10.** Рис. 9.100, где при  $0 \leq x \leq 60$  км  $u = 0$ ;  $i = 0$ ; при  $60 \leq x \leq 72$  км

$$u' = \left[ -77,77 + 177,77e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i' = \left[ 194,44 - 444,44e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} \right] \text{ A};$$

при  $72 \leq x \leq 120$  км

$$u' = 177,77 \left[ e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} - e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - 40 \cdot 10^{-6} - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i' = -444,44 \left[ e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} - e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - 40 \cdot 10^{-6} - \frac{l_1 - x'}{c}\right)} \right] \text{ A};$$

при  $120 \leq x \leq 138$  км

$$u'' = -22,22 \left[ e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - l_1/c - \frac{x''}{c/2}\right)} - e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - 40 \cdot 10^{-6} - l_1/c - \frac{x''}{c/2}\right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i'' = -444,44 \left[ e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - l_1/c - \frac{x''}{c/2}\right)} - e^{-5 \cdot 10^3 \left(t_1 - 40 \cdot 10^{-6} - \frac{x''}{c/2}\right)} \right] \text{ A};$$

при  $138 \leq x \leq 150$  км

$$u'' = 22,22 \left[ 1 - e^{-5 \cdot 10^3 \left( t_1 - l_1/c - \frac{x''}{c/2} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i'' = 444,44 \left[ 1 - e^{-5 \cdot 10^3 \left( t_1 - l_1/c - \frac{x''}{c/2} \right)} \right] \text{ А}.$$

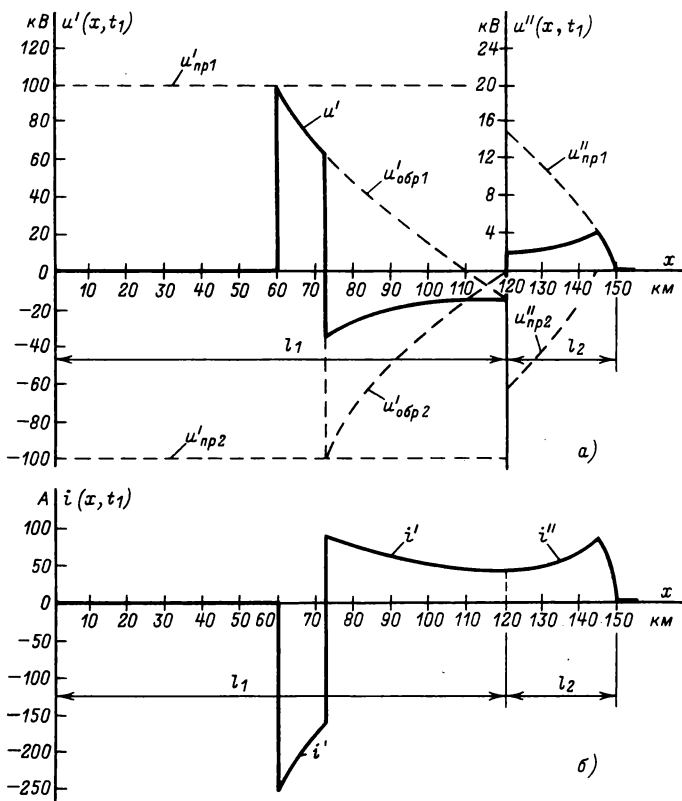


Рис. 9.100

9.11. Рис. 9.11О, где при  $0 \leq x' \leq 30$  км  $u' = 127$  кВ;  
 $i' = 317,5$  А; при  $30 \leq x' \leq 150$  км

$$u' = 152 \left[ 1 - e^{-4,17 \cdot 10^3 \left( t_1 - \frac{l_1 - x'}{c} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i' = \left[ 254 + 382e^{-4,17 \cdot 10^3 \left( t_1 - \frac{l_1 - x'}{c} \right)} \right] \text{ A};$$

при  $0 \leq x'' \leq 120 \text{ км}$

$$u'' = 103 [1 - e^{-4,17 \cdot 10^3 (t_1 - x''/c)}] \text{ кВ};$$

$$i'' = 254 [1 - e^{-4,17 \cdot 10^3 (t_1 - x''/c)}] \text{ A};$$

при  $120 \leq x'' \leq 150 \text{ км}$   $u'' = 0$ ;  $i'' = 0$ .

Здесь  $t_1 = 40 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  — время после подхода прямой волны в первой линии к точке  $A$  (рис. 9.11);  $x'$  и  $x''$  — соответственно расстояния, отсчитываемые от начала первой и начала второй линий.

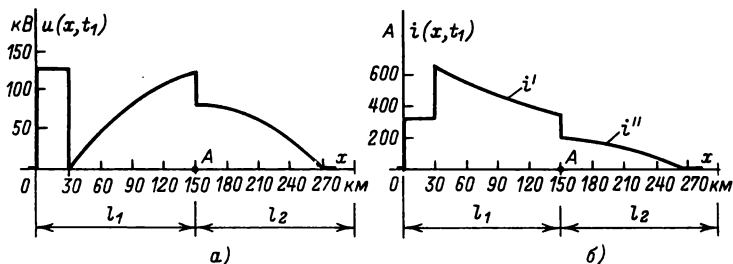


Рис. 9.11О

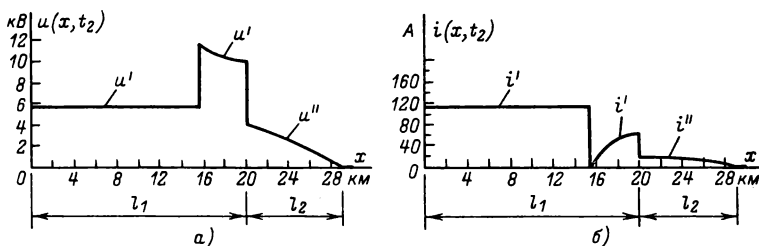


Рис. 9.12О

**9.12.** Рис. 9.12О, где при  $0 \leq x' \leq 15,5 \text{ км}$   $u' = 5,8 \text{ кВ}$ ;  $i' = 116 \text{ А}$ ; при  $15,5 \leq x' \leq 20 \text{ км}$

$$u' = \left[ 7,14 + 4,46e^{-2,6 \cdot 10^4 \left( t_1 - \frac{l_1 - x'}{c/2} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i' = 89,2 \left[ 1 - e^{-2,6 \cdot 10^4 \left( t_1 - \frac{l_1 - x'}{c/2} \right)} \right] \text{ А};$$

при  $0 \leq x'' \leq 9$  км

$$u'' = 7,14 [1 - e^{-2,6 \cdot 10^4 (t_1 - x''/c)}] \text{ кВ};$$

$$i'' = 17,84 [1 - e^{-2,6 \cdot 10^4 (t_1 - x''/c)}] \text{ А},$$

где  $t_1 = 30 \cdot 10^{-6}$  с — время после подхода прямой волны в первой линии к точке А (рис. 9.12);  $x'$  и  $x''$  — соответственно расстояния, отсчитываемые от начала первой и второй линий.

9.13. При  $0 \leq x' \leq 7,5$  км  $u' = 10$  кВ;  $i' = 200$  А; при  $7,5 \leq x' \leq 30$  км  $u' = 17,5$  кВ;  $i' = 50$  А; при  $0 \leq x'' \leq 15$  км  $u'' = 15$  кВ;  $i'' = 50$  А; при  $15 \leq x'' \leq 30$  км

$$u'' = 30 \left[ 1 - e^{0,33 \cdot 10^5 \left( t_2 - \frac{t_2 - x''}{c} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i'' = 100e^{-0,33 \cdot 10^5 \left( t_2 - \frac{t_2 - x''}{c} \right)} \text{ А},$$

где  $x'$  и  $x''$  — соответственно расстояния, отсчитываемые от начала первой и второй линий.

9.14. См. решение.

9.15. См. решение.

9.16. Рис. 9.16О, где при  $0 \leq x \leq 10$  км  $u = 63,5$  кВ;  $i = 0$ ; при  $10 \leq x \leq 70$  км

$$u = \left[ 21,1 + 42,4e^{-6 \cdot 10^5 \left( t_1 - \frac{t_1 - x}{c} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i = 106 \left[ 1 - e^{-6 \cdot 10^5 \left( t_1 - \frac{t_1 - x}{c} \right)} \right] \text{ А},$$

где  $t_1 = 200 \cdot 10^{-6}$  с — время движения обратной волны от конца линии.

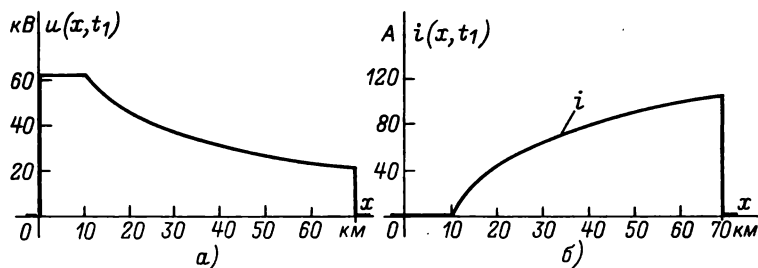


Рис. 9.16О

9.17. Рис. 9.17О, где при  $0 \leq x' \leq 60$  км  $u' = 3$  кВ;  $i' = 620$  А; при  $60 \leq x' \leq 120$  км  $u' = 27,3$  кВ;  $i' = 681,8$  А; при  $0 \leq x'' \leq 30$  км  $u'' = 27,3$  кВ;  $i'' = 545,4$  А; при  $30 \leq x'' \leq 60$  км

$$u'' = 40,84 \left[ 1 - e^{-5,33 \cdot 10^4 \left( t_1 - \frac{2l_2 - x''}{c/2} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i'' = \left[ 273,1 + 816,9e^{-5,33 \cdot 10^4 \left( t_1 - \frac{2l_2 - x''}{c/2} \right)} \right] \text{ А},$$

где  $x'$  и  $x''$  — соответственно расстояния, отсчитываемые от начала первой и второй линий.

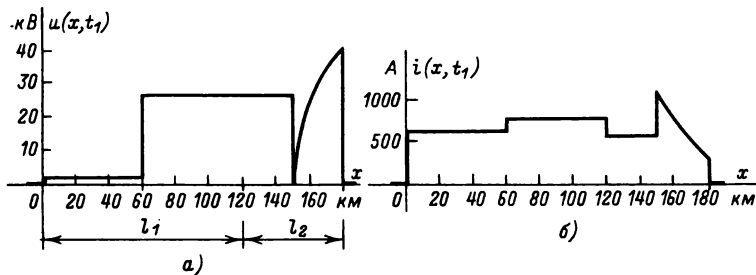


Рис. 9.17О

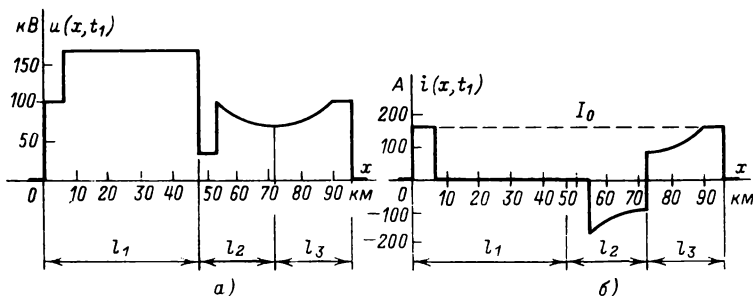


Рис. 9.18О

**9.18.** Рис. 9.18О, где при  $0 \leq x' \leq 6$  км  $u' = 100$  кВ;  $i' = 166,66$  А; при  $6 \leq x' \leq 48$  км  $u' = 166,64$  кВ;  $i' = 0$ ; при  $0 \leq x'' \leq 6$  км  $u'' = 33,36$  кВ;  $i'' = 0$ ; при  $6 \leq x'' \leq 18$  км

$$u'' = \left[ 33,36 + 66,64e^{-10^4 \left( t_1 - \frac{2l_2 - x''}{c} \right)} \right] \text{ кВ};$$

$$i'' = -166,66e^{-10^4 \left( t_1 - \frac{2l_2 - x''}{c} \right)} \text{ А};$$

при  $0 \leq x''' \leq 18$  км

$$u''' = \left[ 33,36 + 66,64e^{-10^4 \left( t_1 - \frac{l_2 + x'''}{c} \right)} \right] \text{ кВ};$$



$$i''' = 166,66e^{-10^4 \left( t_1 - \frac{l_2 + x'''}{c} \right)} \text{ А};$$

при  $18 \leq x''' \leq 24 \text{ км}$   $u''' = 100 \text{ кВ}$ ;  $i''' = 166,66 \text{ А}$ .

Здесь  $t_1 = 140 \cdot 10^{-6} \text{ с}$  — время, отсчитываемое с момента коммутации;  $x'$ ,  $x''$  и  $x'''$  — расстояния, отсчитываемые соответственно от начала первой, второй и третьей линий.

9.19. См. решение.

9.20. Рис. 9.20О, где  $u_r = E [1(t - \tau) - 1(t - 3\tau) + 1(t - 5\tau) - 1(t - 7\tau) + 1(t - 9\tau) - \dots]$ .

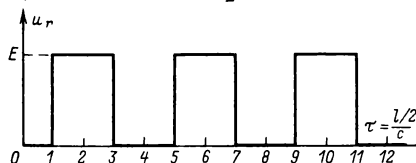


Рис. 9.20О

9.21.  $i_2 = J/4 [1(t - 2\tau) - 1(t - 4\tau) + 1(t - 6\tau) - 1(t - 8\tau) + \dots]$ , где  $\tau = l/c$ .

9.22. См. решение.

$$9.23. U_1 \frac{r_2 \operatorname{ch} \alpha(\tau - \tau_x) + z_b \operatorname{sh} \alpha(\tau - \tau_x)}{r_2 \operatorname{ch} \alpha\tau + z_b \operatorname{sh} \alpha\tau};$$

$$\frac{U_1}{z_b} \frac{r_2 \operatorname{sh} \alpha(\tau - \tau_x) + z_b \operatorname{ch} \alpha(\tau - \tau_x)}{r_2 \operatorname{ch} \alpha\tau + z_b \operatorname{sh} \alpha\tau}.$$

$$9.24. u = U_1 e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x);$$

$$i = \frac{U_1}{z_b} e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x),$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления;  $\tau = l/c$ ;  $\tau_x = x/c$ .

9.25.

$$u = U_1 \{ e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x) - e^{-\alpha(2\tau - \tau_x)} \cdot 1[t - (2\tau - \tau_x)] + e^{-\alpha(2\tau + \tau_x)} \cdot 1[t - (2\tau + \tau_x)] - \dots \};$$

$$i = \frac{U_1}{z_b} \{ e^{-\alpha\tau_x} \cdot 1(t - \tau_x) - e^{-\alpha(2\tau - \tau_x)} \cdot 1[t - (2\tau - \tau_x)] + e^{-\alpha(2\tau + \tau_x)} \cdot 1[t - (2\tau + \tau_x)] - \dots \},$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления;  $\tau = l/c$ ;  $\tau_x = x/c$ .

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 10

10.1. См. решение.

10.2. См. решение.

10.3. Схема начинается с продольной емкости  $C'_1 = 0,13 \text{ мкФ}$  и содержит еще поперечную индуктивность  $L'_2 = 6,62 \text{ мГн}$ , про-

дольную емкость  $C'_3 = 0,028$  мкФ и поперечную индуктивность  $L'_4 = 4,92$  мГн.

**10.4.** Схема представляет собой параллельный контур с индуктивностью  $L_2 = 0,13$  Гн и емкостью  $C_2 = 0,15$  мкФ, последовательно с которым включена емкость  $C_0 = 0,30$  мкФ.

**10.5.** Схема представляет собой параллельный контур с индуктивностью  $L_1 = 11,9$  мГн и емкостью  $C_1 = 8,47$  пФ, последовательно с которым включена  $L_\infty = 0,79$  мГн.

**10.6.** 1) См. рис. 10.6О, а; 2) качественно такая же, как и на рис. 10.1Р; 3) качественно такая же, как и на рис. 10.6О, а; 4) См. рис. 10.6О, б.

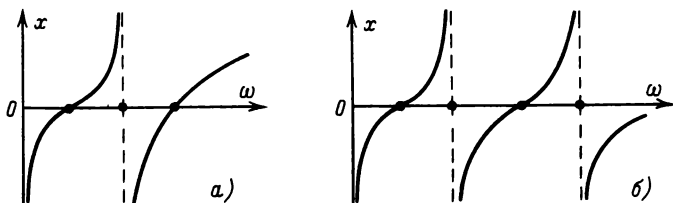


Рис. 10.6О

**10.7.** Первая каноническая схема имеет два параллельных контура: 5,31 мкГн, 1460 мкФ и 12,05 мкГн, 84,8 мкФ; вторая каноническая схема с последовательным контуром 57,8 мкГн, 98,8 мкФ, параллельно которому включены индуктивность 17,5 мкГн и емкость 80,0 мкФ; первая цепная схема с продольными индуктивностями 13,4 мкГн, 4,1 мкГн и поперечными емкостями 80,0 мкФ, 1820 мкФ (начинается с емкости); вторая цепная схема с продольными емкостями 179 мкФ, 144 мкФ и поперечными индуктивностями 17,5 мкГн, 17,7 мкГн (начинается с индуктивности).

**10.8.** 1) Два последовательно соединенных параллельных контура 90,0 мГн, 11,1 мкФ и 11,1 мГн, 10,0 мкФ и последовательно с ними присоединенная индуктивность 10,0 мГн; 2) два параллельно соединенных последовательных контура 56,0 мГн, 4,5 мкФ и 220,0 мГн, 0,18 мкФ и параллельно с ними присоединенная индуктивность 111,1 мГн.

**10.9.** Да.

**10.10.** См. решение.

**10.11.** Продольная индуктивность 0,294 Гн и поперечные емкости 0,10 мкФ, 0,204 мкФ (начинается с поперечной емкости).

**10.12.** Продольные индуктивности 5,0 мГн, 32,8 мГн;

поперечные емкости около 0,1 мкФ, около 0,03 мкФ (схема начинается с продольной индуктивности).

10.13. См. решение.

10.14. Два параллельно соединенных последовательных контура 4,77 Ом, 0,75 Ф и 1,27 Ом, 0,21 Ф.

10.15. Продольные емкости 1 Ф и 2/9 Ф; поперечные сопротивления 3 Ом и 1,5 Ом (схема начинается с продольной емкости).

10.16. При разложении входного сопротивления на простейшие дроби — два параллельных контура: 6 Ом, 1/6 Ф и 2/3 Ом, 0,5 Ф и последовательно с ними 4 Ом. При разложении входной проводимости на простейшие дроби — два последовательных контура: 16 Ом, 1/32 Ф и 32/3 Ом, 3/128 Ф и параллельно с ними 32/3 Ом. Цепная схема с продольными сопротивлениями 4 Ом, 16/3 Ом, 4/3 Ом и поперечными емкостями 1/8 Ф, 3/8 Ф (схема начинается с продольного сопротивления). Цепная схема с продольными емкостями 7/128 Ф, 21/3872 Ф и поперечными сопротивлениями 32/3 Ом, 352/49 Ом, 176/3 Ом (начинается с поперечного сопротивления).

10.17. Да.

10.18. Да.

10.19. См. решение.

10.20. Параллельно соединенные три ветви: последовательный контур 0,1 мГн, 0,01 мкФ; активное сопротивление 100 Ом; емкость 0,01 мкФ.

10.21. Рис. 10.21О.

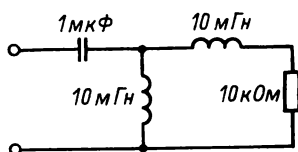


Рис. 10.21О

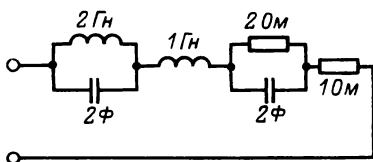


Рис. 10.22О

10.22. Рис. 10.22О.

10.23. См. решение.

10.24. Сопротивления  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = -j1/\omega C_2$ , где  $L_1 = 10/3$  мкГн;  $C_2 = 10/3$  пФ.

10.25. Сопротивление  $\underline{Z}_1$  — параллельно соединенные  $L_1 = 10$  мГн и  $r_1 = 100$  Ом; сопротивление  $\underline{Z}_2$  — последовательно соединенные  $C_2 = 1$  мкФ и  $r_2 = 100$  Ом.

10.26. См. решение.

10.27. Сопротивления  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = j\omega L_2 - j1/\omega C_2$ , где  $L_1 = L_2 = 4$  мГн;  $C_2 = 500$  пФ.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 11

11.1. См. решение.

11.2. Рис. 11.2О.

11.3. Рис. 11.3О; от 14 до 16 В.

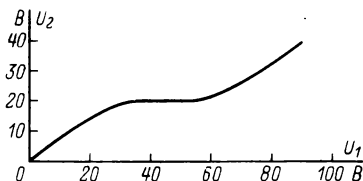


Рис. 11.2О

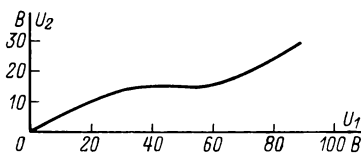


Рис. 11.3О

11.4. 0,2 А; 10 В; 25 В; 7 Вт; рис. 11.4О, а и б.

11.5. 0,25 А; 0,1 А; 7 Вт; рис. 11.5О.

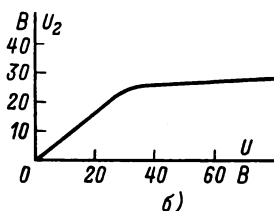
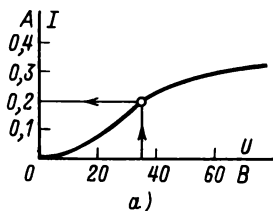


Рис. 11.4О

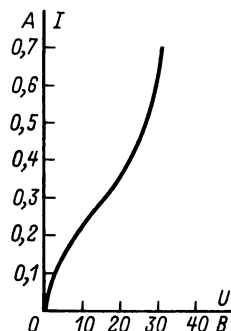


Рис. 11.5О

11.6. а) См. решение; б–е) рис. 11.6О (см. стр. 724).

11.7. Для рис. 11.6, а: 1) 0,06 А; 18 В; 2) 0,17 А; 6 В;  
для рис. 11.6, б: 1) 0,04 А; 16 В; 2) 0,15 А; 4 В.

11.8. См. решение.

11.9. Рис. 11.9О, а и б (соответственно для  $E = 0$ ,  $E = 20$  В) (см. стр. 724).

11.10. См. решение.

11.11. Рис. 11.11О (см. стр. 725).

11.12. См. решение.

11.13. 0,1 А; 0,2 А; 0,1 А; рис. 11.13О (см. стр. 725).

11.14. См. решение.

11.15. 0,2 А; 0,4 А; 0,6 А; 25 В.

11.16. 0,2 А; 184 Вт.

11.17. 40 В; 0,3 А.

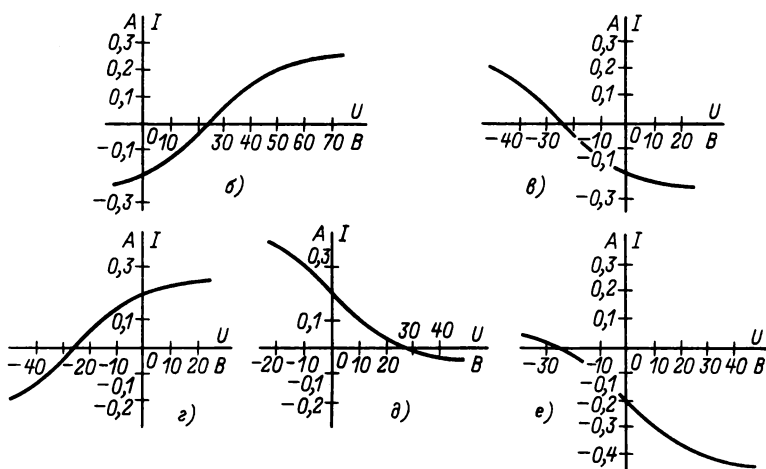


Рис. 11.60

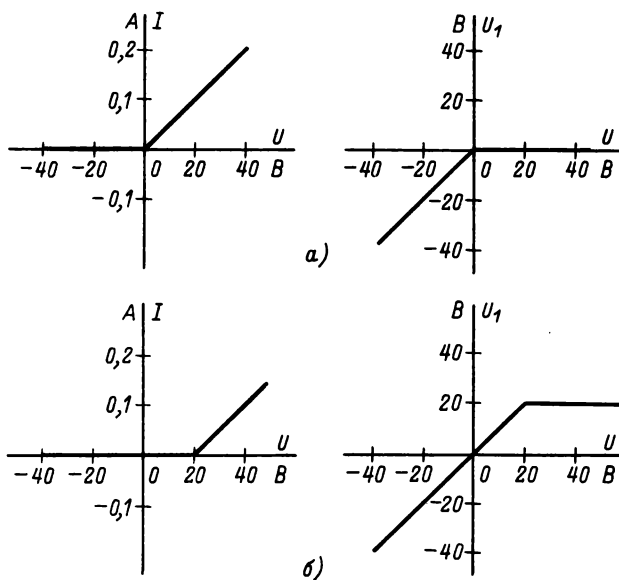


Рис. 11.90

11.18. См. решение.

11.19. 0,28 А; 0,06 А; 0,22 А; 36 В; 14 В; 14 В; 14 В.

11.20. 0,04 А; 0,21 А; 0,25 А; 11 В; 21 В; 19 В.

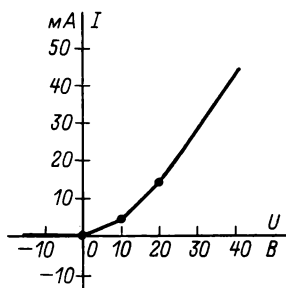


Рис. 11.110

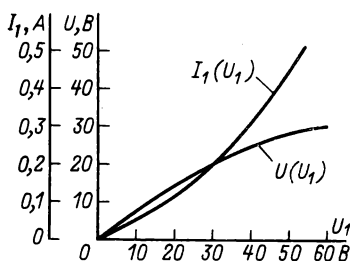


Рис. 11.130

11.21. 8,6 Вт.

11.22. См. решение.

11.23. 0,25 А; 0,08 А; 0,37 А; 22 В; 18 В; 48 В.

11.24. а) См. решение; б) -3 В; -0,1 А; в) 2,5 В; 0,07 А.

11.25. а) 21 В; 0,11 А; б) 27 В; 0,26 А.

11.26. См. решение.

11.27. а) 12,5 В; б) 17 В.

11.28. Рис. 11.280.

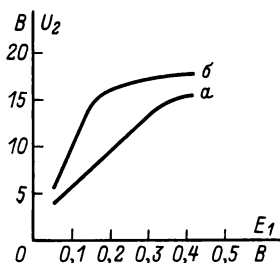


Рис. 11.280

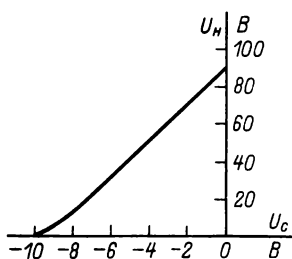


Рис. 11.290

11.29. 10 мА; 50 В; рис. 11.290.

11.30. а) См. решение; б) 0,8 А.

11.31. а, б) 0,50 А; 1,25 А; 0,75 А; 1 В.

11.32. а) См. решение; б) 10 В; 0,05 А.

11.33. а, б) 2 Вт.

11.34. а, б) 0,67 В.

11.35. См. решение.

- 11.36. 160 В; 2 А; 1 А; 1 А.  
 11.37. 1 А; 0,4 А; 0,6 А; 20 В; 10 В; 10 В.  
 11.38. См. решение.  
 11.39. 30 Вт.  
 11.40. См. решение.  
 11.41. 6,32 мА; 1,44 В; 1,56 В.  
 11.42. 1,53 А.  
 11.43. 20 В; 0,1 А; 16,8 Вт.  
 11.44. См. решение.  
 11.45. 0,35 А; 0,30 А; 0,65 А; 4,4 В; 5,4 В.  
 11.46. а, б) 4,1 В; 3,1 В; 3,9 В; 0,345 А; 0,250 А; 0,595 А.  
 11.47. 0,31 А; 0,34 А; 0,65 А; 3 В; 8 В; 4 В.  
 11.48. 2,7 В; 1,6 В; 3,7 В; 0,3 А; 0,2 А; 0,5 А.  
 11.49. См. решение.  
 11.50. 8 В; 0,2 А; 8 Вт.  
 11.51. 10 В; 0,2 А; 0,3 А; 0,1 А.  
 11.52. 46 В; 0,2 А; 0,5 А.  
 11.53. 8 В; 0,2 А.  
 11.54. См. решение.  
 11.55. 0,3 А; 0,2 А; 0,1 А; 28,5 В; 18 В.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 12

- 12.1. См. решение.  
 12.2.  $3,82 \cdot 10^7 \text{ Гн}^{-1}$ ; на  $\pm 33\%$ ;  $\Phi = 2,62 \cdot 10^{-8} I_w \text{ Вб}$ , где ток — в амперах.  
 12.3.  $I_{ab} = 40 \text{ мА}$ .  
 12.4. а)  $-60 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ ;  $120 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ ;  $-60 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ ;  
 б)  $71 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ ;  $-90 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ ;  $19 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}$ .  
 12.5. а) 0,75 мкВб.  
 12.6. 1,09 мВб.  
 12.7. В случае рис. 12.7, б в 2 раза меньше, чем в случае рис. 12.7, а.  
 12.8.

В, Тл . . . . .	0	0,4	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,48	1,56	1,59	1,6
Н, А/см . . . . .	0	2,87	5,73	7,67	10,60	13,07	16,53	22,11	31,68	41,52	51,47

- 12.9.  $8,88 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ .  
 12.10. 1080 А.  
 12.11. 2,4 мВб.  
 12.12. См. решение.  
 12.13.  $F_1 = -858 \text{ А}$ ;  $F_3 = 1374 \text{ А}$ .  
 12.14. 1,3 мм.  
 12.15. См. решение.

12.16. 1,7 Тл; 1,1 Тл (поток  $\Phi_2$  направлен навстречу МДС  $F_2$ ).

12.17. 10 А.

12.18. 0,65 мм; 140.

12.19. 950 А; 2,4 мВб (вверх); 1,1 мВб (вниз).

12.20. 950 А; 2,4 мВб (вверх); 1,3 мВб (вниз).

12.21.

$B$ , Тл	0	0,5	1,0	1,5	1,0	0,5	0
$I$ , А	19,25	23,10	32,75	98,25	4,0	-13,40	-19,25

12.22. а)  $+B_s$  у тороидов  $x_2y_1$ ;  $x_2y_3$ ;  $x_3y_1$ ,  $x_3y_3$ ; б)  $+B_s$  у тороидов  $x_2y_1$ ;  $x_2y_2$ ;  $x_3y_3$ ; у остальных  $-B_s$ .

12.23. 0,25 Тл.

12.24. 0,18 Тл.

### ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 13

13.1. См. решение.

13.2. 0,0638 А; 0,1 А; 10 Вт.

13.3. 2 А; 0,44 А; 36 В.

13.4. 0,127 А; 20 Вт; 400 В.

13.5. 2,11 А; 1,9 А; 800 Вт; 538 В; 0,95 А.

13.6. 0,25 мс; 0,52 мс.

13.7. 0,25 см.

13.8. Рис. 13.8О.

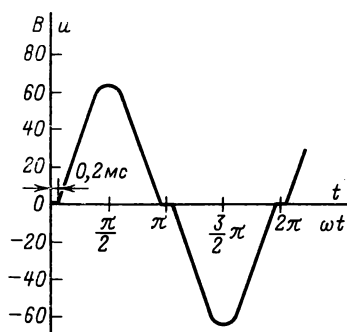


Рис. 13.8О

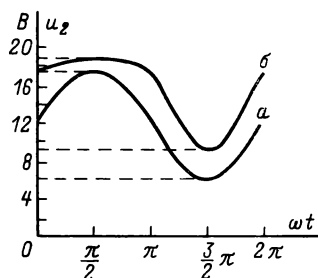


Рис. 13.14О

13.9. См. решение.

13.10. 12,9 А; 13,05 А; 3400 Вт; 4,3 А; 540 В.

13.11. 0,524 мс.

13.12. а) 20 В; б) 25,5 В; в) 38,2 В.

13.13. См. решение.

13.14. Рис. 13.14О.



13.15. Рис. 13.15О.

13.16. См. решение.

13.17. Рис. 13.17О, где  $i = 0,133 \sin 1000t$  А при  $0 \leq \omega t \leq 0,27\pi$ ;  $0,73\pi \leq \omega t \leq 1,27\pi$ ;  $i = -1,4 + 2 \sin 1000t$  А при  $0,27\pi \leq \omega t \leq 0,73\pi$ ;  $i = 1,4 + 2 \sin 1000t$  А при  $1,27\pi \leq \omega t \leq 1,73\pi$ .

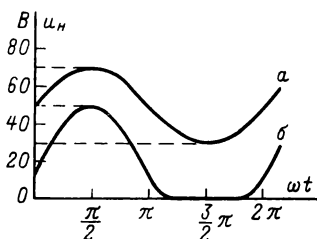


Рис. 13.15О

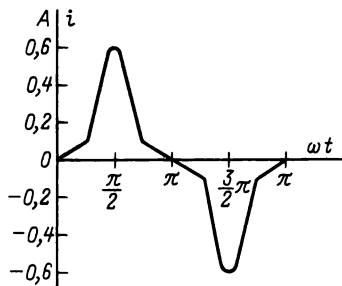


Рис. 13.17О

13.18. См. рис. 13.18О, где  $i_1 = 0,08 \sin \omega t$  А,  $u_2 = 0$  при  $2\pi/3 \leq \omega t \leq \pi$ ;  $5\pi/3 \leq \omega t \leq 2\pi$ ;  $i_1 = 0$ ;  $u_2 = 20 \sin \omega t$  В при  $0 \leq \omega t \leq 2\pi/3$ ;  $\pi \leq \omega t \leq 5\pi/3$ .

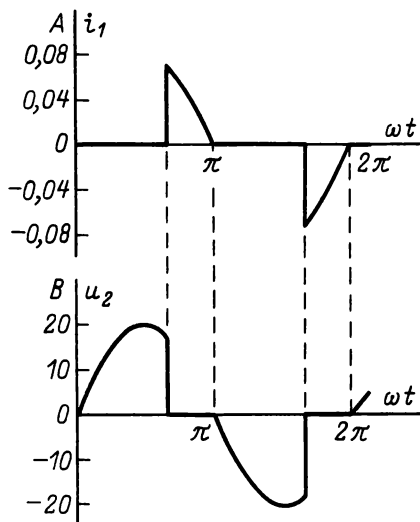


Рис. 13.18О

13.19. а)  $0,2455 \sin \omega t - 0,0488 \sin 3\omega t$ , А; 0,177 А;  
б)  $0,0678 \sin \omega t - 0,0061 \sin 3\omega t$  А; 0,048 А.

13.20. См. решение.

13.21. 1 A; 53 В; 103 В; 88 В.

13.22. См. решение.

13.23.  $10,6 \sin(4 \cdot 10^4 t - 90^\circ) - 8 \sin 6 \cdot 10^4 t$  мА.

13.24. См. решение.

13.25.  $100 \sin \omega t$  В.

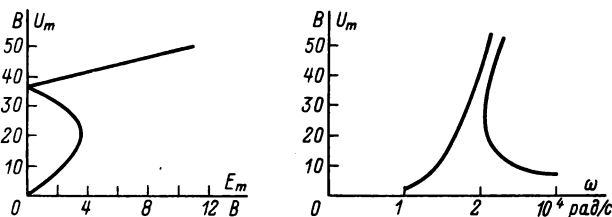


Рис. 13.29О

13.26.  $0,21 \sin \omega t$  А.

13.27.  $10^{-3}$  Вб;  $32^\circ$ ;  $0,08 \sin(10^4 t - \eta) - 0,01 \sin(3 \cdot 10^4 t - \eta)$  А.

13.28. 0,2 А;  $15^\circ 40'$ .

13.29. Рис. 13.29О.

13.30. См. рис. 13.30О.

13.31. См. рис. 13.30О.

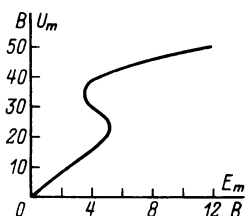


Рис. 13.30О

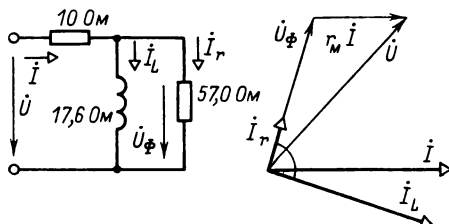


Рис. 13.38О

13.32. См. решение.

13.33.  $0,184 \sin(10^4 t - 45^\circ 40') + 0,004 \sin(3 \cdot 10^4 t + 124^\circ 30')$  А.

13.34.  $0,0181 \sin(10^5 t + 48^\circ 40') + 0,0012 \sin(3 \cdot 10^5 t - 86^\circ 30')$  А;  
 $173 \sin(10^5 t - 36^\circ) - 9 \sin(3 \cdot 10^5 t - 86^\circ 30')$  В.

13.35.  $0,109 \sin(10^4 t + 27^\circ) + 0,003 \sin(3 \cdot 10^4 t - 101^\circ)$  А;  
 $45,6 \sin(10^4 t + 27^\circ) + 1,2 \sin(3 \cdot 10^4 t + 97^\circ 30')$  В;  $0,157 \sin(10^4 t - 19^\circ) + 0,003 \sin(3 \cdot 10^4 t - 82^\circ 30')$  А.

13.36.  $0,3447 \sin(10^4 t - 14^\circ 30') + 0,0095 \sin(3 \cdot 10^4 t + 124^\circ)$  А;  
 $60 \sin(10^4 t - 20^\circ) + 3,6 \sin(3 \cdot 10^4 t - 37^\circ 30')$  В.

13.37. См. решение.

13.38. Рис. 13.38О.

13.39. 1900 витков; 0,17 А.

13.40. 1 А; 220 В.

13.41. 3 А.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 14

14.1. См. решение.

14.2. См. решение.

14.3. а)  $i = 1/12,5 (0,2 + t)^2$  А;  $L_d(t) = 0,5 + 2,5t$  Гн; б)  $i = 2e^{-7,5t}$  А;  $L_d = 0,666$  Гн при  $0,5 \text{ А} \leq i \leq 2 \text{ А}$ ;  $i = 0,5e^{-2,5(t-0,18)}$  А;  $L_d = 2$  Гн при  $0 \leq i \leq 0,5 \text{ А}$ , где  $t$  — в секундах.

14.4.  $u_2 = 12e^{-5t}$  В при  $0 \leq i \leq 0,5 \text{ А}$ ;  $u_2 = 8e^{-40(t-81 \cdot 10^{-3})}$  В при  $0,5 \text{ А} \leq i \leq 1,5 \text{ А}$ . В отсутствие насыщения  $u_2 = 12e^{-5t}$  В.

14.5. 1,20 мс; 1,11 мс.

14.6. а)  $10^{-2} [(1 - e^{-4 \cdot 10^3 t}) / (1 + e^{-4 \cdot 10^3 t})]$  А; б)  $10^{-2} (1 - e^{-2 \cdot 10^3 t})$  А; 0,65 мс.

14.7. а)  $1 \cdot 10^{-3}$  с; б)  $0,9 \cdot 10^{-3}$  с; в)  $1,04 \cdot 10^{-3}$  с.

14.8.  $u = 1,5 (1 - e^{-5 \cdot 10^3 t})$  В при  $0 \leq u \leq 0,5 \text{ В}$ ;  $u = 0,75 - 0,25e^{-10^4(t-81,1 \cdot 10^{-6})}$  В при  $0,5 \text{ В} \leq u \leq 1,0 \text{ В}$ , где  $t$  — в секундах.

14.9. 8,625 мс.

14.10. 1,0 мс; 0,7 мс.

14.11. а)  $10 + 140e^{-1,78 \cdot 10^5 t}$  В;  $10 + 40e^{-0,715 \cdot 10^5(t-7 \cdot 10^{-6})}$  В; б)  $10 + 140e^{-1,3 \cdot 10^5 t}$  В.

14.12. 5,62 А.

14.13. См. решение.

14.14. См. решение.

14.15.  $a_{01} = 0$ , устойчиво при  $\varepsilon < 0$ ;  $a_{02} = 2$ , устойчиво при  $\varepsilon > 0$ .

14.16.  $x_0 = 0$ , устойчиво при  $\varepsilon < 0$ .

14.17.  $(g_d + 1/r) > 0$ , где  $g_d = di/du$ ; рис. 14.17О (область, в которой возможны неустойчивые состояния равновесия, заштрихована).

14.18.  $C < L/(r |r_d|)$ .

14.19.  $(rr_d C + L - \mu M) < 0$ ; рис. 14.19О (область возбуждения заштрихована).

14.20.  $k > 3$ ; а), б) область в первом квадранте, расположенная выше прямой,  $k = 3$ .

14.21.  $k > 1 + \alpha$ ;  $-\infty < k < 1$ ;  $[k^2(12 - \alpha) - k(24 + 13\alpha) + 12 + 14\alpha + 3\alpha^2] > 0$ , где  $\alpha = r/R$ .

14.22. См. решение.

14.23. Рис. 14.23О.

14.24. Рис. 14.24О.

14.25.  $di/dt = -(i/C) [r + 1/(2\sqrt{ai})]$ .

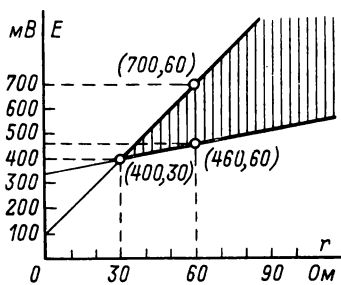


Рис. 14.170

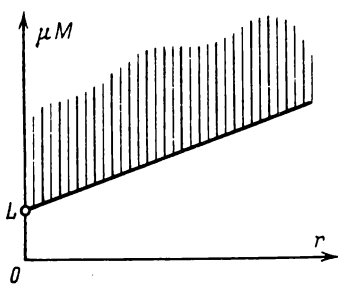


Рис. 14.190

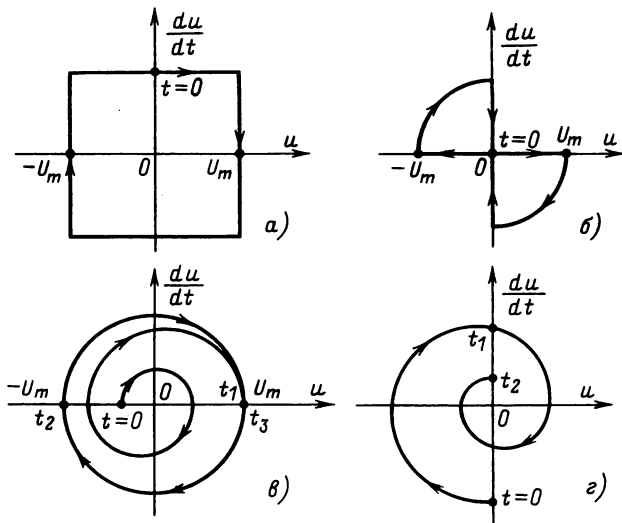


Рис. 14.230

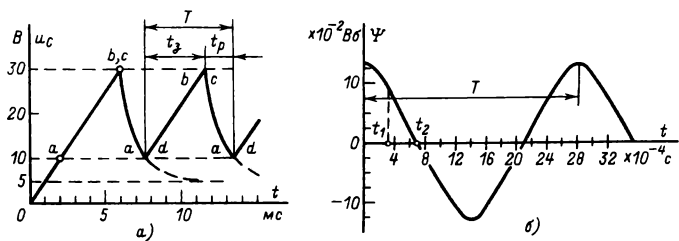


Рис. 14.240

14.26.  $d\Psi/dt = 250 - 62,5\Psi^2$ .

14.27. Фазовый портрет дан на рис. 14.24, а; зависимость  $u_C(t)$  приведена на рис. 14.24б, а; состояние равновесия  $I_0 = 5$  мА,  $U_0 = 20$  В — неустойчиво;  $T = 0,561$  мс.

14.28. а)  $\frac{y^2}{(2,24 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{(x - 8,5 \cdot 10^{-2})^2}{(5 \cdot 10^{-2})^2} = 1$  при  $0 \leq t \leq t_1$ ;  
 $\frac{y^2}{(2,43 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{x^2}{(23,1 \cdot 10^{-2})^2} = 1$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ ; рис. 14.24, б;  
 б)  $28,344 \cdot 10^{-4}$  с; в)  $59,8 \cdot 10^{-4}$  с.

14.29.  $\frac{y^2}{J^2/LC} + \frac{(x - J)^2}{J^2} = 1$ ;  $x = J$ ,  $y = 0$  — состояние равновесия.

14.30. а)  $0 < k \leq 1$  — устойчивый узел;  $1 < k < 3$  — устойчивый фокус;  $k = 3$  — центр;  $3 < k < 5$  — неустойчивый фокус;  $5 \leq k < \infty$  — неустойчивый узел; б)  $0 < |k| < \infty$  — устойчивый узел.

14.31.  $\delta > 0$  и  $\delta^2 > \gamma$  — устойчивый узел;  $\delta > 0$  и  $\delta^2 < \gamma$  — неустойчивый узел;  $\delta = 0$  — центр;  $\delta < 0$  и  $\delta^2 > \gamma$  — устойчивый фокус;  $\delta < 0$  и  $\delta^2 < \gamma$  — неустойчивый фокус, где  $\delta = rr_i C + L - \mu M$ ;  $\gamma = 4r_i LC(r + r_i)$ .

14.32. См. решение.

14.33.

$$\Psi_0 e^{-t/2rC} \cos \left[ \sqrt{k_1/C} t + \frac{3k_3 \Psi_0^2}{8\sqrt{k_1/C}} (1 - e^{-t/rC}) \right].$$

14.34.  $Q_0 e^{-tr/2L} \cos \left[ \omega_0 t + \frac{3}{8} \frac{k_3 Q_0^2}{\omega_0} (1 - e^{-tr/L}) \right]$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k_1/L}$ .

14.35.  $2,76 \cdot 10^{-5}$  с.

14.36.  $22 \cdot 10^{-4}$  с.

14.37. а)  $\frac{da}{d\tau} = -\frac{\delta}{2} a + \frac{P}{2} \sin \varphi$ ;  $\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\xi}{2} - \frac{3\kappa}{8} a^2 + \frac{P}{2a} \cos \varphi$ ;

б)  $P = a \sqrt{\delta^2 + \left( \xi - \frac{3\kappa}{4} a^2 \right)^2}$ ; в)  $\xi = \frac{3\kappa}{4} a^2 \pm \sqrt{\frac{P^2}{a^2} - \delta^2}$ .

14.38.  $a = \sqrt[3]{4U_m/3k\omega}$ .

14.39.

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d}{v^2} + \frac{bdha^2}{4} \right) \cos \varphi + \frac{\delta}{v} a - \frac{bh}{4v^2} a^3 \right];$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2a} \left[ \left( 1 - \frac{1}{v^2} \right) a - \delta b^2 v h \frac{3}{4} a^3 + \left( \frac{d}{v^2} + \frac{3bdha^2}{4} \right) \sin \varphi \right],$$

где  $a = u_C/U_{Cm}$ ;  $\tau = \omega t$ ;  $v = \omega/\omega_0$ ;  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C}$ ;  $b = \omega_0 C$ ;  $\delta = \omega_0 r C$ ;  $d = U_m/U_{Cm}$ ;  $h = (U_{Cm}/I_0)^2$ .

14.40. См. решение.

14.41. См. решение.

14.42.  $\mu M > rr_i C + L$ ;  $\omega = \sqrt{(1 + r/r_i)/LC}$ .

14.43. а) 
$$\frac{[2\sqrt{(k_1 r - 1)/3k_2 r}]}{\sqrt{\{[4(k_1 r - 1)/3k_2 r U_0^2] - 1\} e^{(1-k_1 r)t/rC} + 1}};$$

б)  $1/\sqrt{LC}$ ;  $2\sqrt{(k_1 r - 1)/3k_2 r}$ .

14.45.  $U_{1m} = 2\sqrt{(k_1 - 3)/3k_3}$ ;  $\omega = 1/rC$ .

14.46.  $1/\sqrt{LC}$ ;  $2\sqrt{(a_1 - r)/3a_2}$ ;  $a_1 > r$ .

14.47. 
$$\frac{\sqrt{3}}{rC} \sqrt{\frac{2\alpha - 9 \pm \sqrt{81 + 12\alpha}}{15 \pm \sqrt{81 + 12\alpha}}}, \text{ где } \alpha = r/R.$$

14.48. См. решение.

14.49. См. решение.

14.50. См. решение.

14.51.  $\Psi_{k+1} = \Psi_k + \sqrt{2} \cdot 0,06 \sin(800\pi t_k + \alpha)$ ;  $i_{k+1} = 1,5\Psi_{k+1}$ ;  $-1,04 \text{ В6}$ ;  $-1,84 \text{ А}$  при  $\alpha = 3,25$ .

14.52.  $11,5 \text{ В}$  при  $t = 0,25 \text{ с}$ .

14.53. а)  $u_{Cmax} = 23,303 \text{ В}$ ;  $i_{max} = 7,321 \text{ мА}$ ; б)  $u_{Cmax} = 320,851 \text{ В}$ ;  $i_{max} = 1,527 \text{ А}$ .

14.54.  $4,75 \text{ мс}$ .

14.55.  $72,5 \text{ мВ}$ .

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 15

15.1. См. решение.

15.2. 4.

15.3.  $8,5 \text{ см/с}$ .

15.4.  $62^\circ 40'$ .

15.5. См. решение.

15.6. См. решение.

15.7. См. решение.

15.8. См. решение.

15.9.  $36,5\alpha/180^\circ \text{ пФ}$ , где  $\alpha$  — в градусах.

15.10. а) См. решение; б) 1)  $-2,82 \cdot 10^3 [1 - 0,4/R + (0,08/R^2) \ln(1 + 5R)] \text{ В/см}$ ;  $-1130 [0,25 - 2,5R + (1/5R + 1) \times \ln(1 + 5R)] \text{ В}$ ; 2)  $-424/R^2 \text{ В/см}$ ;  $-424/R \text{ В}$ , где  $R$  — в сантиметрах;  $\varphi = 0$  при  $R = \infty$ .

15.11. См. решение.

15.12. См. решение.

15.13. См. решение. 1)  $-11,3r$  мВ/см;  $0,565 \cdot 10^{-2} r^2$  В; 2)  $-0,113/r$  мВ/см;  $0,565 \cdot 10^{-4} (1 + 2 \ln 10r)$  В, где  $r$  — в сантиметрах.

15.14. 1) 0; 0; 2)  $3,6/r$  В/м;  $3,6 \ln(r_0/r)$  В, где  $r$  — в метрах и  $\varphi = 0$  при  $r = r_0$ . Не изменится.

15.15. а)  $D_1 = \tau/2\pi r = D_2$ ;  $\tau/2\pi r_1$ ;  $-\tau/2\pi r_2$ ;  $\tau/2\pi r_3$ ; б)  $D_1 = \tau/2\pi r$ ;  $D_2 = 0$ ;  $\tau/2\pi r_1$ ;  $-\tau/2\pi r_2$ ; 0; в)  $D_1 = 0$ ;  $D_2 = \tau/2\pi r$ ; 0; 0;  $\tau/2\pi r_3$ .

$$15.16. E = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)} = \frac{910}{r} \text{ В/см}; \quad \varphi = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r_2/r) = 910 \ln(r_2/r) \text{ В};$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} = 50 \text{ пФ/м}; \quad \varphi = 0 \text{ при } r = r_2.$$

15.17.  $e \approx 2,7$ .

15.18. См. решение.

15.19. 64 мкДж. Вращающий момент пропорционален току, так как индукция магнитного поля постоянна.

15.20. Если угол закручивания пружины пропорционален вращающему моменту, то у амперметра и вольтметра — шкалы квадратичные, а у ваттметра — равномерная шкала.

15.21.  $3,46 \cdot 10^{-4}$  Тл;  $1,98 \cdot 10^{-4}$  Тл; нет.

15.22. См. решение.

15.23. 0,116 мГн; 11,6 мГн; 1,16 мГн; 1.

$$15.24. 150 \text{ Н}; 0; 150 \text{ Н}; f_a = -173 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(2\omega t + 30^\circ) \right] \text{ Н};$$

$$f_b = 346 \cos(2\omega t - 150^\circ) \text{ Н}; f_c = -173 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(2\omega t + 30^\circ) \right] \text{ Н}$$

15.25. См. решение.

15.26.  $\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d_{12} d_{1'2}}{d_{12} d_{1'2'}} = 4,5$  мкГн, где  $d_{mn}$  — расстояния между соответствующими проводами.

15.27.  $-0,874 \cos 314t$  мВ.

15.28. Для первого расположения проводов: а) 31,2 мВ/км; б) 31,2 мВ/км. Для второго расположения проводов: а) 0,628 мВ/км; б) 0.

15.29. Нормальная к плоскости катушки индукция  $B_n = 0,055$  Тл. Нужно измерить другие составляющие вектора индукции.

15.30. 0,6 Тл.

15.31. Изменится, так как уменьшится число витков катушки.

15.32. Не изменится.

15.33. См. решение.

- 15.34. 0,01 В; 0.
- 15.35. См. решение.
- 15.36. 0,015 В; -0,005 В; 0,005 В.
- 15.37. 0,02 В; 0; 0,01 В.
- 15.38. См. решение.
- 15.39. 0,02 В; -0,01 В; 0,005 В.
- 15.40. 0,03 В; 0; 0,015 В.
- 15.41. Сдвинуть на  $1/8$  окружности по направлению движения часовой стрелки.
- 15.42. См. решение.
- 15.43. а) См. решение. б) См. решение. в) Потенциальное поле без истоков, например магнитное поле вне провода с током; 0; 0; г) потенциальное поле без истоков, например электрическое поле вне заряженного цилиндра; 0; 0.
- 15.44. а) Потенциальное поле с истоками, например электрическое поле объемных зарядов;  $\rho = -c/x^2$ ; 0;  $-c/x^2$ ; б) потенциальное поле с истоками, например электрическое поле равномерно распределенного объемного заряда; 0; с; в) потенциальное поле без истоков, например электрическое поле заряженного цилиндра радиусом  $a$ ; 0; 0.
- 15.45. 1)  $\rho = -\epsilon_r \epsilon_0 E_0 a/x^2$ ; 2)  $\rho = 0$ , поле заряженного цилиндра радиуса  $a$ .
- 15.46. 1)  $\text{rot } \mathbf{E} = 2ce_z$ ;  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ; 2)  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ;  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ;  $x^2 - y^2 = K$ , где  $K$  определяется электрическим потоком, проходящим в заданной силовой трубке.  $\phi = c_1 - cxu$ , где  $c_1 = 0$ , если  $\phi = 0$  при  $x = y = 0$ .
- 15.47. См. решение.
- 15.48.  $-\epsilon_0 E_0 x/d^2$ ;  $5dE_0/6$ ; добавится слагаемое  $E = (U - U_0)/d$ .
- 15.49.  $100\epsilon_0/r$  Кл/см<sup>3</sup>, где  $r$  — в сантиметрах.
- 15.50. Вихревое поле без истоков; такое поле создается в прямоугольном волноводе (полый металлической трубе прямоугольного сечения), если возбуждающая антенна — штырь — расположена в середине большой стороны трубы или возбуждающая рамка расположена так, что ее плоскость параллельна торцу волновода.
- 15.51. 1)  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = -2,5 \cdot 10^{-9}/\epsilon_0$  В/см<sup>2</sup> при  $R < R_0$ ;  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  при  $R > R_0$ . Поле всюду потенциальное ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ); 2)  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = -2,5 \cdot 10^{-9}a/(a + R)$  В/см<sup>2</sup> при  $R < R_0$ ;  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  при  $R > R_0$ . Поле всюду потенциальное ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ).
- 15.52.  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = -2 \cdot 10^{-15}/\epsilon_0$  В/см<sup>2</sup> при  $r < r_0$ ;  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  при  $r > r_0$ . Поле всюду потенциальное ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ).



## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 16

16.1. См. решение.

16.2. См. решение.

16.3.  $-0,0348$  мкКл/м<sup>2</sup>;  $0,0038$  мкКл/м<sup>2</sup>;  $0,0038$  мКл/м<sup>2</sup>;  $0,0178$  мкКл/м<sup>2</sup>;  $900$  В.

16.4. а)  $19,5$  мкН; б)  $1,5$  мкН.

16.5. См. решение.

16.6.  $E_R = 2,16 \cdot 10^4 \frac{\cos \theta}{R^3}$  В/см;  $E_\theta = 1,08 \cdot 10^4 \frac{\sin \theta}{R^3}$  В/см;

$\varphi = 1,08 \cdot 10^4 \frac{\cos \theta}{R^2}$  В. При  $\theta = 0$   $E_R = \frac{2,16 \cdot 10^4}{R^3}$  В/см;  $E_\theta = 0$ ;

при  $\theta = \pi/2$   $E_R = 0$ ;  $E_\theta = \frac{1,08 \cdot 10^4}{R^3}$  В/см; для точечного заряда

$q = 12 \cdot 10^{-9}$  Кл  $E_R = \frac{1,08 \cdot 10^4}{R^2}$  В/см;  $E_\theta = 0$ .

16.7. См. решение.

16.8. См. решение.

16.9.  $620$  В/см;  $700$  В/см;  $350$  В/см;  $435$  В/см;  $0$ ;  $0,98$  кВ;  $1,95$  кВ;  $0$ ;  $7,80$  пФ/м;  $E(x, 0)/E(0, 0) = 20,4/(20,4 - x^2)$ ;

$$\frac{\varphi(x, 0)}{U/2} = \frac{1}{3,58} \ln \left| \frac{x - 4,5}{x + 4,5} \right|,$$

где  $x$  — в сантиметрах.

16.10. Эквипотенциаль:  $5,05$  см;  $0$ ; радиус  $2,28$  см; силовая линия:  $0$ ;  $1,49$  см; радиус  $4,78$  см.

16.11. См. решение.

16.12.  $26,6$  пФ/м.

16.13.  $0,524$  пФ/см;  $21,8$  кВ.

16.14. См. решение.

16.15. См. решение.

16.16.  $82,5$  мкКл/км;  $-152$  мкКл/км;  $104,5$  мкКл/км.

16.17. а) См. решение.

$$\text{б) } \varphi = \left[ 7500 \ln \left( \frac{y+8}{y-8} \frac{y-5}{y+5} \right) - 2000y \right] \text{ В};$$

$$q_s = \left[ 3750 \left( \frac{32}{x^2 + 64} - \frac{20}{x^2 + 25} \right) + 2000 \right] \varepsilon_0 \text{ Кл/м}^2,$$

где  $x$  и  $y$  — в метрах,  $\varepsilon_0$  — в фарадах на метр.

16.18. См. решение.

$$16.19. \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \times \ln \frac{\sqrt{[(x-l_2)^2 + (y+l_1)^2][(x+l_2)^2 + (y-l_1)^2]}}{\sqrt{[(x-l_2)^2 + (y-l_1)^2][(x+l_2)^2 + (y+l_1)^2]}};$$

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0/\ln \frac{(4l_1^2 + r_0^2)(4l_2^2 + r_0^2)}{8r_0^2(l_2^2 + l_1^2)};$$

$$q_s = -\frac{\tau}{2\pi} \left[ \frac{l_1}{l_1^2 + (x-l_2)^2} + \frac{l_1}{l_1^2 + (x+l_2)^2} \right] \text{ при } y=0;$$

$$q_s = -\frac{\tau}{2\pi} \left[ \frac{l_2}{l_2^2 + (y-l_1)^2} + \frac{l_2}{l_2^2 + (y+l_1)^2} \right] \text{ при } x=0.$$

Рис. 16.19О.

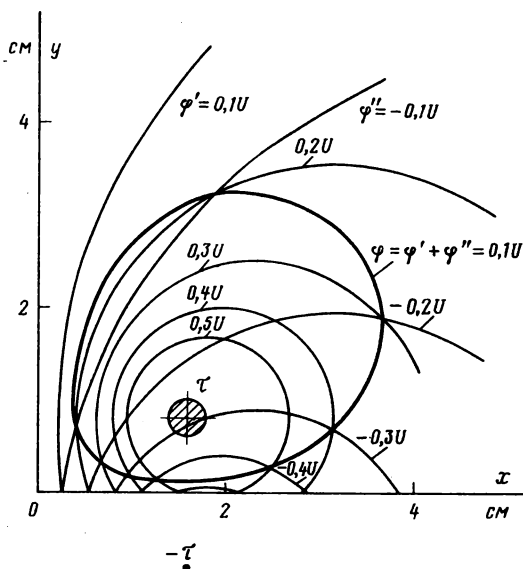


Рис. 16.19О

16.20. См. решение.

16.21. а)  $C_{11} = C_{22} = 15,2$  пФ/м;  $C_{12} = 1,11$  пФ/м; б)  $C_{11} = C_{22} = 16,2$  пФ/м;  $C_{12} = 0,940$  пФ/м; в)  $C_{11} = 17,5$  пФ/м;  $C_{12} = 0,945$  пФ/м;  $C_{22} = 14,5$  пФ/м.

16.22.  $-333$  В;  $97$  мкКл/км;  $682$  мкКл/км;  $-779$  мкКл/км.

16.23.  $C_{12} = 5,9$  пФ;  $C_{13} = 35,4$  пФ;  $C_{23} = 17,7$  пФ.

- 16.24.  $-62,5 \text{ В}$ .
- 16.25.  $2,95 \text{ нКл}$ .
- 16.26.  $55,8 \text{ пКл}$ ;  $28 \text{ мкН}$ .
- 16.27. Любое значение ( $q$ );  $qE$ .
- 16.28Р. См. решение.
- 16.29. Без зазора  $100 \text{ кВ}$ ; с зазором  $4,05 \text{ кВ}$ .
- 16.30. 1)  $775 \text{ мкКл/см}^2$ ;  $775 \text{ мкКл/см}^2$ ;  $1250 \text{ В/см}$ ;  $8750 \text{ В/см}$ ;  $664 \text{ мкКл/см}^2$ ;  $0$ ;  $(10 - 8,75x) \text{ кВ}$  при  $0 < x < 0,5 \text{ см}$ ;  $(6,25 - 1,25x) \text{ кВ}$  при  $0,5 \text{ см} < x < 1,5 \text{ см}$ ;  $(17,50 - 8,75x) \text{ кВ}$  при  $1,5 \text{ см} < x < 2 \text{ см}$ ; 2)  $332 \text{ мкКл/см}^2$ ;  $332 \text{ мкКл/см}^2$ ;  $-3750 \text{ В/см}$ ;  $3750 \text{ В/см}$ ;  $-3,75x \text{ кВ}$  при  $0 < x < 0,5 \text{ см}$ ;  $(-3,75 + 3,75x) \text{ кВ}$  при  $0,5 \text{ см} < x < 1,5 \text{ см}$ ;  $(7,5 - 3,75x) \text{ кВ}$  при  $1,5 \text{ см} < x < 2 \text{ см}$ .
- 16.31. 1)  $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r3} < \epsilon_{r2}$ ; 2)  $\varphi = Ux/d_3$ ; 3) диэлектрик слоя 3 имеет остаточную поляризацию; напряженности поля на данном участке.
- 16.32. См. решение.
- 16.33. См. решение.
- 16.34.  $100 \text{ В/см}$ ;  $150 \text{ В/см}$ ;  $600\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ ;  $300\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ ;  $200\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ ;  $300\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ ;  $100\epsilon_0 \text{ Кл/см}^2$ , где  $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-14} \text{ Ф/см}$ .
- 16.35. См. решение.
- 16.36. См. решение.
- 16.37. См. решение.
- 16.38.  $45 \text{ кВ} \cdot \text{см}$ .
- 16.39. См. решение.
- 16.40.  $-12,7 \text{ кВ} \cdot \text{см}$ .
- 16.41.  $12 \text{ нКл}$ .
- 16.42.  $12 \text{ нКл}$ .
- 16.43.  $0$ .
- 16.44.  $20,3 \text{ кВ} \cdot \text{см}$ .
- 16.45.  $10,1 \text{ кВ} \cdot \text{см}$ .
- 16.46. См. решение.
- 16.47.  $-350(1/r + 0,15r) \text{ пКл/см}^3$ , где  $r$  — в сантиметрах.
- 16.48.  $-35x \text{ пКл/см}^3$ , где  $x$  — в сантиметрах.
- 16.49.  $16,7(0,2 + x) \text{ кВ/см}$ ;  $147(0,6 - x) \text{ пКл/см}^2$ ;  $147 \text{ пКл/см}^3$ ;  $4,72 \text{ пФ}$ , где  $x$  — в сантиметрах.
- 16.50. См. решение.
- 16.51.  $133r \text{ В/см}$ ;  $1890/r \text{ пКл/см}^2$ ;  $(1890/r - 11,8) \text{ пКл/см}^2$ , где  $r$  — в сантиметрах;  $23,6 \text{ пКл/см}^3$ .
- 16.52.  $A/r$ , где  $A = \text{const}$ .
- 16.53. См. решение.
- 16.54.  $9,1 \cdot 10^{-9} \text{ См/м}$ ;  $5,46 \text{ мкА/м}$ ;  $216 \text{ мкА/м}^2$ ;  $108 \text{ мкА/м}^2$ ;  $46,5 \text{ мкВт/м}^3$ ;  $11,6 \text{ мкВт/м}^3$ ;  $3250 \text{ мкВт/м}$ .
- 16.55.  $6,06 \text{ мкА/см}$ .

- 16.56. См. решение.  
 16.57.  $4,9 \cdot 10^{-10}$  А.  
 16.58. См. решение.  
 16.59. 220 В.  
 16.60. См. решение.  
 16.61.  $5,39 \cdot 10^{-10}$  См/см.  
 16.62. См. решение.  
 16.63. См. решение.  
 16.64. См. решение.  
 16.65.  $-256$  пКл/см<sup>3</sup>;  $256$  пКл/см<sup>3</sup>.  
 16.66.  $-355 \cdot 10^{-12}/(0,2 + x)^2$  Кл/см<sup>3</sup>;  $2$  мВт.  
 16.67. 1)  $725/r$  В/см;  $256 \cdot 10^{-12}/r$  Кл/см<sup>2</sup>;  $0$ ;  $0$ ;  $455 \cdot 10^{-12}$  См/см;  $45,5$  мкА/см; 2)  $333$  В/см;  $118 \cdot 10^{-12}$  Кл/см<sup>2</sup>;  $89,5 \cdot 10^{-12}/r$  Кл/см<sup>3</sup>;  $118 \cdot 10^{-12}/r$  Кл/см<sup>3</sup>;  $209 \cdot 10^{-12}$  См/см;  $20,9$  мкА/см; 3)  $133r$  В/см;  $47,2 \cdot 10^{-12}r$  Кл/см<sup>2</sup>;  $71 \cdot 10^{-12}$  Кл/см<sup>3</sup>;  $94,4 \cdot 10^{-12}$  Кл/см<sup>3</sup>;  $83,5 \cdot 10^{-12}$  См/см;  $8,35$  мА/см; 4)  $1330/r^2$  В/см;  $472 \cdot 10^{-12}/r^2$  Кл/см<sup>2</sup>;  $-355 \cdot 10^{-12}/r^3$  Кл/см<sup>3</sup>;  $-472 \times 10^{-12}/r^3$  Кл/см<sup>3</sup>;  $840 \cdot 10^{-12}$  См/см;  $84$  мкА/см.  
 16.68. См. решение.  
 16.69.  $(1 - 1e^{-113 \cdot 10^3 t}) 10^3$  В/см;  $[441 - 353e^{-200t} - 88e^{-113 \cdot 10^3 t}]$  пКл/см<sup>2</sup>;  $(352 - 353e^{-200t} + 1e^{-113 \cdot 10^3 t})$  пКл/см<sup>2</sup>;  $(0,708e^{-200t} + 100e^{-113 \cdot 10^3 t})$  мкА;  $W_{\text{и}} = W + W_r + W_{\text{т}}$ , где  $W_{\text{и}} = 442$  нДж — энергия источника;  $W = 221$  нДж — энергия, накопленная в электрическом поле;  $W_r = 46,7$  нДж — энергия потерь в резисторе;  $W_{\text{т}} = 174$  нДж — энергия потерь в вязком диэлектрике.  
 16.70. См. решение.  
 16.71. 225 МГц.  
 16.72. а)  $\sigma' = 10^{-9}$  См/см;  $\sigma'' = 4,86 \cdot 10^{-13}\omega$  См/см;  $\epsilon'_r = 5,5$ ;  $\epsilon''_r = 11,3 \cdot 10^3/\omega$ , где  $\omega$  — в радианах на секунду; б) при всех частотах  $E = 100$  В/см;  $D = 550\epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>;  $P = 450\epsilon_0$  Кл/см<sup>2</sup>; где  $\epsilon_0$  — в фарадах на сантиметр; плотности тока: 1)  $0,10$  мкА/см и  $0,1$  мкА/см при  $f_1 = 328$  Гц; 2)  $0,10$  мкА/см и  $0$ ; 3)  $0,10$  мкА/см и  $\rightarrow \infty$ .  
 16.73. См. решение.  
 16.74. См. решение.  
 16.75.  $605(1 - 1e^{-t/79})$  пКл/см<sup>2</sup>;  $(-431 + 417e^{-t/79})$  пКл/см<sup>2</sup>;  $10^{-14}(19,8 + 758e^{-t/79})$  А/см<sup>2</sup>;  $10^{-16}(1980 - 758e^{-t/79})$  А/см<sup>2</sup>;  $(-468 \cdot 10^{-14}e^{-t/79})$  А/см<sup>2</sup>;  $298 \cdot 10^{-14}e^{-t/79}$  А/см<sup>2</sup>;  $11,6$  пДж;  $1160$  пДж;  $790$  пВт;  $79$  пВт.  
 16.76.  $1,67 \sin(\omega t + 132^\circ)$  нКл/см<sup>2</sup>;  $1,45 \sin(\omega t - 35^\circ 35')$  нКл/см<sup>2</sup>, если начальная фаза напряжения равна нулю;  $58,6$  Вт/см<sup>3</sup>;  $25,8$  Вт/см<sup>3</sup>.

16.77. 600 рад/с и 400 рад/с. При  $\omega = 400$  рад/с  
 $0,41 \angle 9^\circ 30'$  кВ/см;  $73 \angle 9^\circ 30'$  пКл/см<sup>2</sup>;  $36,5 \angle 9^\circ 30'$  пКл/см<sup>2</sup>;  
 $0,6 \angle -6^\circ 30'$  кВ/см;  $150 \angle -51^\circ 30'$  пКл/см<sup>2</sup>;  
 $119 \angle -69^\circ 55'$  пКл/см<sup>2</sup>;  $(5,88 + j4,68) 10^{-10}$  См;  $0,294$  мВт;  
 при  $\omega t_1 = 80^\circ 40'$ , при  $\omega t_2 = 68^\circ 20'$ .

16.78.  $0,48$  пФ/см;  $0,483 \cdot 10^{-14}$  См/см;  $\text{tg } \delta = \sigma d / \omega (\epsilon_r d +$   
 $+ D) \epsilon_0 = 1/100\omega$ ; в воздухе  $q_s = \frac{U \epsilon_0}{r_1 \ln r_2 / r_1}$ ; в диэлектрике  $q_s =$   
 $= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U}{r_1 \ln (r_2 / r_1)}$ ;  $q_{s \text{ связ}} = \frac{\epsilon_0 (1 - \epsilon_r) U}{r_1 \ln (r_2 / r_1)}$ .

16.79. См. решение.

16.80. См. решение.

16.81. См. решение.

16.82.  $2,49 \cdot 10^{-8} \cos 314t$  А/см<sup>2</sup>;  $1,24 \cdot 10^{-10} \cos 314t$  А/см<sup>2</sup>.

16.83. См. решение.

16.84.  $4160 - 76,6e^{-10^4 t}$  пКл/м;  $13,2(1 - 1e^{-10^4 t}) \times$   
 $\times \left[ \frac{1}{0,01^2 + (0,02 - x)^2} - \frac{1}{0,01^2 + x^2} \right]$  пКл/м<sup>2</sup>;  $-10,62e^{-10^4 t} \times$   
 $\times \left[ \frac{1}{0,01^2 + (0,02 - x)^2} - \frac{1}{0,01^2 + x^2} \right]$  пКл/м<sup>2</sup>, где  $x$  — в метрах,

отсчитывается от точки, лежащей на поверхности земли под  
 положительно заряженным проводом.

16.85. 1) См. решение; 2а)  $5$  кВ/см;  $0$ ;  $0$ ; 2б)  $3,3(1 +$   
 $+ 0,5x)$  кВ/см;  $0,321$  нКл/см<sup>3</sup>;  $-0,177$  нКл/см<sup>3</sup>; 3а)  $U \alpha e^{-\alpha x} / (1 -$   
 $- e^{-\alpha d})$ ;  $0$ ;  $U \epsilon_0 \alpha^2 e^{\alpha(d-x)}$ ; 3б) совпадает с данными в п. 3а;  
 $4а) \frac{U}{b(a + bx) \ln [(a + bd)/a]}$ ;  $0$ ;  $\frac{\epsilon_0 U}{(a + bx)^2 \ln [(a + bd)/a]}$ ; 4б) сов-  
 падает с данными в п. 4а.

16.86. А. 1) Всегда равен  $0$ ; 2)  $\epsilon_r \neq \text{const}$ ; 3)  $\epsilon_r \neq \text{const}$ ,  
 но свободный заряд равен  $0$ ; 4)  $\epsilon_r = \text{const}$ ; 5) невозможно.  
 Б. 1)  $(\epsilon_r - 1)/\sigma = \text{const}$ ; 2)  $\sigma \neq \text{const}$ ;  $\epsilon_r/\sigma = \text{const}$ ; 3)  $\epsilon_r/\sigma \neq$   
 $\neq \text{const}$ ; 4)  $\epsilon_r/\sigma = \text{const}$ ;  $(\epsilon_r - 1)/\sigma = \text{const}$ , т. е.  $\epsilon_r = \text{const}$  и  
 $\sigma = \text{const}$ ; 5)  $\sigma = \text{const}$ ;  $\epsilon_r/\sigma \neq \text{const}$ .

16.87. а) Во всех случаях  $E = 725/r$  В/см;  $\rho = 0$ ;  $\rho_{\text{связ}} = 0$ ;  
 б) см. ответ к задаче 16.67.

16.88. 1) Удовлетворяет; 2)  $3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ ; 3)  $\varphi = E_0 (R -$   
 $a^3/R^2) \cos \theta + q/4\pi\epsilon_0 R$ .

16.89. 1) Удовлетворяет; 2)  $2\epsilon_0 E_0 \cos \alpha$ ; 3)  $\varphi =$   
 $= E_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \alpha + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$ .

16.90. См. решение.

$$16.91. \quad \varphi_i = -E_0 \frac{2\varepsilon_{re}r}{\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{re}} \cos \alpha; \quad \varphi_e = -E_0 r \cos \alpha + E_0 \frac{a}{r} \times \\ \times \frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{re}} \cos \alpha; \quad E_i = E_0 \frac{2\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{re}}; \quad q_{\text{связ}} = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{re}} \cos \alpha.$$

16.92. 1) Линии векторов  $D$  и  $E$  втягиваются в цилиндр, число линий  $E$  внутри цилиндра уменьшается. Линии вектора  $P$  существуют только внутри цилиндра. Поле внутри цилиндра однородно;  $59 \text{ пКл/см}^2$ ; 2) линии векторов  $D$  и  $E$  выталкиваются цилиндром. Число линий  $E$  внутри больше. Линии вектора  $P$  существуют только в окружающем цилиндр диэлектрике. Поле внутри цилиндра однородно;  $-59 \text{ пКл/см}^2$ .

16.93.  $3,42 \text{ кВ}$ .

16.94. 1)  $20 \text{ кВ}$ ; 2)  $24,5 \text{ кВ}$ ; 3)  $60 \text{ кВ}$ .

16.95. См. решение.

16.96.  $E_{iR} = \frac{250\sqrt{2}}{2} e^{pt} \text{ В/см}$ ;  $E_{i\theta} = E_{e\theta} = -250 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{pt} \text{ В/см}$ ;  
 $E_{eR} = 3000 \frac{\sqrt{2}}{2} - 500 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{pt} \text{ В/см}$ , где  $p = -\sigma_i/\varepsilon_0 (\varepsilon_{ri} + 2\varepsilon_{re}) =$   
 $= -0,943 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ;  $P_i = P_{iz} = 196\varepsilon_0 e^{pt} \text{ Кл/см}^2$ ;  $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/см}^3$ .  
 Геометрическое место вектора напряженности в точке  $A$  — прямая — получается из выражений  $E_{iR}$  и  $E_{i\theta}$ ; вектор напряженности в точке  $A$  во время переходного процесса не изменяется по направлению. Геометрическое место вектора напряженности в точке  $B$  — кривая — получается из выражений  $E_{eR}$  и  $E_{e\theta}$ ; вектор напряженности в точке  $B$  во время переходного процесса изменяется по направлению и в установившемся режиме направлен по радиусу.

16.97. 1)  $0$ ;  $3 \cos \theta \text{ мкКл/см}^2$ ; 2)  $5 \cos \theta \text{ мкКл/см}^2$ ;  
 $5 \cos \theta \text{ мкКл/см}^2$ .

16.98. См. решение.

16.99. См. решение.

16.100. См. решение.

16.101. См. решение.

16.102. См. решение.

$$16.103. \quad \frac{\rho_0}{a^2 \varepsilon_0} \left[ \frac{e^{ad} - 1}{d} x + 1 - 1e^{ax} \right] - U \left( \frac{x}{d} - 1 \right); \quad \frac{U}{d} + \\ + \frac{\rho}{\varepsilon_0 a^2} \left( ae^{ax} - \frac{e^{da} - 1}{d} \right).$$

16.104. А.  $(-50x^3 + 675x + 500) \text{ В}$ ;  $(150x^2 - 675) \text{ В/см}$ , где  $x$  — в см;  $1450 \text{ В}$ ;  $-75 \text{ В/см}$ ; Б. 1) Ничего не изменится; 2)  $(-50x^3 + 500) \text{ В}$  при  $x \leq d/2$ ;  $(-50x^3 + 1350x - 2200) \text{ В}$  при  $x \geq d/2$ .

- 16.105. 1) Да; 2) нет.  
 16.106.  $K\varepsilon_0 \cos \alpha / (R^3 \sin^2 \theta)$ .  
 16.107. См. решение.  
 16.108. См. решение.  
 16.109. См. решение.  
 16.110. См. решение.  
 16.111.  $2,21 \cdot 10^{-7} \text{ х}^{-2} \text{ Н}$ .  
 16.112.  $5,4 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ .  
 16.113.  $8,48 \cdot 10^{-9} \alpha^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$ , где  $\alpha$  — в радианах.  
 16.114.  $-3,1 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .  
 16.115.  $5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .  
 16.116.  $-26,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .  
 16.117.  $68,1 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$ ; сила направлена к пластине 1.  
 16.118.  $-12,5 \text{ В}$ ;  $-125 \text{ В}$ .  
 16.119. а) Да; б) нет.  
 16.120. См. решение.  
 16.121.  $6,63/(1 + 15x) \cdot \text{Н}$ ;  $0,497/(1 + 15x)^2 \text{ Н}$ .

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 17

- 17.1.  $\frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \beta = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ .  
 17.2.  $\frac{\mu_0 I w_0}{2} \left[ \frac{x + l/2}{\sqrt{(x + l/2)^2 + a^2}} - \frac{x - l/2}{\sqrt{(x - l/2)^2 + a^2}} \right] =$   
 $= \frac{\mu_0 I w_0}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$ ; а) 0,485; б) 0,329; в) 0,204.  
 17.3. См. решение.  
 17.4.  $B = B_z = 1,58 (r_0^2 - r^2) \cdot 10^{-9} \text{ Тл}$ .  
 17.5.  $B = B_z = \mu_0 \frac{I w_0}{2} \left[ \cos \gamma - \sin \gamma + \sin^2 \gamma \times \right.$   
 $\times \ln \frac{\text{tg}(\gamma/2 + \pi/4)}{\text{tg}(\gamma/2)} \left. \right]$ .  
 17.6. 1)  $B = B_z = \mu_0 \frac{I w_0}{2} \left[ \cos(\gamma - \beta_2) - \cos(\gamma - \beta_1) + \sin^2 \gamma \times \right.$   
 $\times \ln \frac{\text{tg}(\gamma/2 + \beta_1/2)}{\text{tg}(\gamma/2 + \beta_2/2)} \left. \right]$ ;  
 2)  $B = B_z = \mu_0 \frac{I w_0}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$ .  
 17.7.  $B = B_z = \mu_0 \frac{I w_0}{2} \left[ \sin \beta_2 - \sin \beta_1 + \ln \frac{\text{tg}(\pi/4 + \beta_1/2)}{\text{tg}(\pi/4 + \beta_2/2)} \right]$ .

17.8.  $\mu_0 I w / 4a = 3,14 \cdot 10^{-3}$  Тл.

17.9. См. решение.

17.10.  $\frac{\mu_0 I}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{a}{2h} = 8,9 \cdot 10^{-5}$  Тл.

17.11. См. решение.

17.12.  $H_x = \frac{I}{4\pi a} \ln \left[ \frac{x^2 + (y - a/2)^2}{x^2 + (y + a/2)^2} \frac{(x - d)^2 + (y + a/2)^2}{(x - d)^2 + (y - a/2)^2} \right];$

$$H_y = \frac{I}{2\pi a} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y + a/2}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y - a/2}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y + a/2}{x - d} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{y - a/2}{x - d} \right].$$

17.13. 28,6 А/см; 12,7 А/см; 9,55 А/см; не изменятся.

17.14. а)  $36 \cdot 10^{-4}$  Тл; 0,32 Тл;  $12 \cdot 10^{-4}$  Тл; 0; 0; 2530 А/см;

б)  $36 \cdot 10^{-4}$  Тл;  $16 \cdot 10^{-4}$  Тл;  $12 \cdot 10^{-4}$  Тл; 0; 0; 0.

17.15. См. решение.

17.16. 11,6 см; 10 А/см.

17.17. См. решение.

17.18.  $\frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (x - h)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (x + h)^2]^{3/2}} \right\} =$   
 $= 2,51 \cdot 10^{-4} \left\{ \frac{1}{[1 + (2x - 1)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[1 + (2x + 1)^2]^{3/2}} \right\}$  Тл.

17.19.  $B_x = -46,5 \cdot 10^{-6}$  Тл;  $B_y = 155 \cdot 10^{-6}$  Тл, если ось  $x$  — ось второй катушки; ось  $y$  лежит в плоскости осей катушек и направлена от точки  $M$  в сторону первой катушки.

17.20.  $\mu_0 \sqrt{r_1 r_2} [(2/C - C)k - (2/C)E] = 2,4 \cdot 10^{-7}$  Гн, где  $C^2 = 4r_1 r_2 / [h^2 + (r_1 + r_2)^2]$ ;  $K$  — эллиптический интеграл первого рода;  $E$  — эллиптический интеграл второго рода.

17.22. См. решение.

17.23. См. решение.

17.24.  $75(4r + 3/r)$  А/см<sup>2</sup>;  $25 \cdot 10^4 (r + 3/4r)$  См/см.

17.25. См. решение.

17.26. См. решение.

17.27. См. решение.

17.28. См. решение.

17.29.  $A_1 = (-100r^2/r_1^2 + 101,5) \cdot 10^{-6}$  Вб/см при  $r < r_1$ ;  
 $A_2 = [-2 \ln(r/r_1) + 1,5] \cdot 10^{-6}$  Вб/см при  $r_1 < r < r_2$ ;  $A_3 =$   
 $= [r^2/r_1^2 - 10 \ln(r/r_1) + 3,05] 10^{-6}$  Вб/см при  $r_2 < r < r_3$ ;  $A_4 = 0$   
 при  $r > r_3$ .

17.30. См. решение.

17.31. См. решение.



$$17.32. \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{[(b+d)^2 + h^2][(b-d+2d_1)^2 + h^2]}{[(b-d)^2 + h^2][(b+d+2d_1)^2 + h^2]} = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 0,388.$$

$$17.33. L_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{d_{AB} d_{CA}}{r_0 d_{BC}}; \quad L_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{d_{BC} d_{AB}}{r_0 d_{CA}}; \quad L_C = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \\ \times \ln \frac{d_{CA} d_{BC}}{r_0 d_{AB}}.$$

$$17.34. \text{ а) } A_i = C; \quad A_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + C, \text{ где } C - \text{ постоянная;}$$

$$\text{ б) } A_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 - r_1^2/r_0^2 - \ln \frac{r_0^2}{a^2} \right); \quad A_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{a^2}{r_1^2}; \quad A_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \\ \times \ln \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Во внутреннем проводнике  $r_1 = C_1$ ; между проводниками  $r_1 = C_2$ ; вне оболочки  $r_2/r_1 = C_3$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — постоянные, соответствующие линиям магнитной индукции. Все линии — окружности.

$$17.35. \text{ а) } A_0 = C; \quad A_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{a_1^2 - r^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_1^2}{r^2} \right] + C; \\ A_e = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ -1 + \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_1^2}{a_2^2} - \ln \frac{a_2^2}{r^2} \right] + C, \text{ где } C - \text{ постоянная;}$$

$$\text{ б) } A_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_1^2}{a_2^2} + \ln \frac{r_0^2}{a_2^2} + \frac{r_1^2}{r_0^2} \right); \quad A_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 + \right. \\ \left. + \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_1^2}{a_2^2} - \ln \frac{a_2^2}{r_1^2} \right); \quad A_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2}; \quad A_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{a_2^2 - r_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_2^2}{r_2^2} - \ln \frac{a_2^2}{r_1^2} \right).$$

17.36. См. решение.

$$17.37. \text{ Цилиндр: } N = \frac{1}{2}; \quad \mu_r = \frac{\mu_r}{1 + (\mu_r - 1)/2}; \quad \mu_{r \max} = 2; \\ \text{ шар: } N = \frac{1}{3}; \quad \mu_r = \frac{\mu_r}{1 + (\mu_r - 1)/3}; \quad \mu_{r \max} = 3.$$

17.38. См. решение. А)  $2 \cdot 10^{-4}$  Вб; Б)  $12,5 \cdot 10^{-8}$  Вб; В)  $4,2 \cdot 10^{-4}$  Вб; Г)  $6,28 \cdot 10^{-7}$  Вб; Д)  $8,37 \cdot 10^{-7}$  Вб.

17.39. См. решение.

$$17.40. \quad B = B_y = \mu_0 I x / \pi (h^2 + x^2) \quad \text{при} \quad y = 0; \quad B = B_x = \\ = \mu_0 I y / \pi (h^2 - y^2) \quad \text{при} \quad x = 0; \quad F = \mu_0 I^2 / 4\pi h = 10^{-2} \text{ Н.}$$

17.41. См. решение.

$$17.42. B_{1r} = -\frac{\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{\mu_{r2} + \mu_{r1}} \frac{I}{2\pi} \sin \alpha \left[ \left(1 + \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right) \frac{b}{r_1^2} + \left(1 - \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right) \frac{a}{r_2^2} \right];$$

$$B_{1\alpha} = \frac{\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{\mu_{r2} + \mu_{r1}} \frac{I}{4\pi r} \left[ 2 + \left(1 + \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right) \frac{r^2 - b^2}{r_1^2} + \left(1 - \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right) \frac{r^2 - a^2}{r_2^2} \right];$$

$$B_{2r} = -\frac{\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{\mu_{r2} + \mu_{r1}} \frac{I}{2\pi} 2 \frac{b}{r_1^2} \sin \alpha;$$

$$B_{2\alpha} = \frac{\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{\mu_{r2} + \mu_{r1}} \frac{I}{2\pi r} \left[ \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} + \frac{r^2 - b^2}{r_1^2} \right].$$

17.43. См. решение.

17.44.  $A = (\mu_0 I / 2\pi) \ln (r_0^2 / r_1 r_2)$ ;  $r_1 r_2 = C$ ; линии вектора магнитной индукции построены на рис. 17.44О.

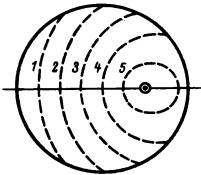


Рис. 17.44О

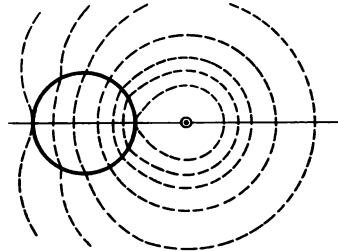


Рис. 17.47О

$$17.45. A_1 = \frac{2\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \ln \frac{a}{r_2}; \quad A_2 = \mu_0 \mu_{2r} \frac{I}{2\pi} \left( \ln \frac{a}{r_2} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \ln \frac{r}{r_1} \right).$$

17.46.

$$B_{1r} = -\frac{2\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \frac{a \sin \alpha}{r_2^2}; \quad B_{1\alpha} = \frac{2\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{I}{2\pi} \frac{r - a \cos \alpha}{r_2^2};$$

$$B_{2r} = -\mu_0 \mu_{2r} \frac{I}{2\pi} \sin \alpha \left( \frac{a}{r_2^2} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{b}{r_1^2} \right);$$

$$B_{2\alpha} = \mu_0 \mu_{2r} \frac{I}{2\pi} \frac{1}{2r} \left( \frac{r^2 - a^2}{r_2^2} + \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \frac{r^2 - b^2}{r_1^2} + \frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} \right).$$

$$17.47. 1) r_2 = C; 2) r^2 = b(r')^2 r_2^{2n} \frac{r_2^2 - a^2 + r_0^2}{a(r'_1)^2 (r'_2)^{2n} - (a-b)r_2^{2n} (r')^2},$$

где  $n = (\mu_{1r} + \mu_{2r})/(\mu_{1r} - \mu_{2r})$ ;  $r'$ ,  $r'_1$  и  $r'_2$  — значения соответственно  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$  вне цилиндра для точки, через которую должна пройти линия магнитной индукции. На рис. 17.470 показано несколько линий индукции.

17.48. См. решение.

17.49. См. решение.

17.50. См. решение.

17.51. См. решение.

17.52.  $\omega t_1 = -26^\circ$ ; 6,98 А;  $M = 0$ .

$$17.53. \quad 0,74 \text{ ВТ/м}; \quad \Delta \underline{Z} = j\omega \frac{\mu_0(\underline{\mu}_r - 1)}{\pi(\underline{\mu}_r + 1)} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} = \\ = 0,185(1 + j4) \frac{\text{Ом}}{\text{м}}.$$

17.54.  $B_{1m} = 2,51 \cdot 10^{-5}$  Тл;  $0,775 \cdot 10^{-10}$  ВТ/см. В заданной точке  $B_{2r} = \mu_0 \cdot 0,173 \sin \omega t$  Вб/см<sup>2</sup>;  $B_{2\alpha} = -\mu_0 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t + 0^\circ 34' 30'')$  Вб/см<sup>2</sup>, где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$  Гн/см.

17.55. См. решение.

17.56.  $F_l = \partial W / \partial l = -2r^2 w^2 I^2 \cdot 10^{-4} / (9r + 10l)^2 = -0,005$  Н, где знак минус указывает направление силы: она стремится уменьшить размер  $l$ , т.е. сжимает витки катушки;  $F_\alpha = \partial W / \partial (2\pi r) = 2w^2 I^2 r (9r + 20l) 10^{-5} / (9r + 10l)^2 2\pi = 0,0071$  Н.

17.57.  $-I^2 \sqrt{L_1 L_2} \cdot 0,4 \sin \alpha = -3,84 \cdot 10^{-3}$  Дж. Знак минус показывает, что сила стремится уменьшить угол  $\alpha$ .

$$17.58. \quad \frac{\mu_0 \mu_r}{2} l_2 S \left( \frac{I w}{l_2 + \mu_r l_1} \right)^2 = 0,14 \text{ Дж}; \quad \frac{\mu_0}{2} l_1 S \left( \frac{I w \mu_r}{l_2 + \mu_r l_1} \right)^2 = \\ = 0,112 \text{ Дж}; \quad 0,504 \text{ Гн}; \quad \frac{\mu_0 \mu_r}{2} S (\mu_r - 1) \left( \frac{I w}{l_2 + \mu_r l_1} \right)^2 = 279,5 \text{ Н}.$$

17.59. См. решение.

17.60. См. решение.

17.61. а)  $B_0^2 S l_b / \mu_0 = 22,1$  Дж; б)  $F_1 = B_0^2 S / \mu_0 = 11\,050$  Н;  $F_2 = B_\kappa^2 S / \mu_0 = 25\,900$  Н, где  $B_0$  и  $B_\kappa$  — индукция соответственно в начальном и конечном положениях якоря; в)  $W_\kappa = \int i d\Psi = 8$  Дж; г)  $\Delta W_c = 8$  Дж;  $\Delta W_b = -22,1$  Дж.

17.62. а) 39,1 Дж; б) 11 050 Н; 25 900 Н; в) 25 Дж; г) 8 Дж; -22,1 Дж.

17.63.  $4 \cdot 10^{-7}$  А/деление.

17.64. См. решение.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 18

**18.1.** а) Поле двух электродов-полуплоскостей разного потенциала, сходящихся в начале координат (рис. 18.1О):  $\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha_0} \alpha$ ;  $\psi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha_0} \ln \frac{r}{C_2}$ ;  $A = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha_0}$ ; б) поле заряженной с линейной плотностью  $\tau$  оси, проходящей через начало координат;  $\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_1}{r}$ ;  $\psi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \alpha + C_2$ ;  $A = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}$ . Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные.

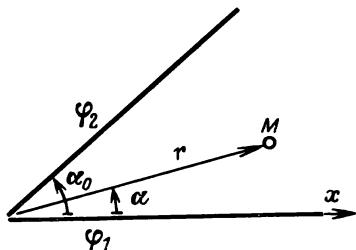


Рис. 18.1О

**18.2.** См. решение.

**18.3.** См. решение.

**18.4.** 1)  $\underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a^n + z^n}{a^n - z^n}$ ;  $\psi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{2(r/a)^n \sin n\alpha}{1 - (r/a)^{2n}}$ ;  
 $\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + (r/a)^{2n} + 2(r/a)^n \cos n\alpha}{1 + (r/a)^{2n} - 2(r/a)^n \cos n\alpha}$ ; 2)  $n\pi\epsilon_0 / \ln \frac{2a}{nr_0}$ ; 3) семейство эквипотенциалей:  $\cos n\alpha = \frac{K}{2} [(r/a)^n + (a/r)^n]$ , где  $K = \operatorname{th} \frac{2\pi\epsilon_0\varphi}{\tau}$ ; семейство линий поля:  $\sin n\alpha = C \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n - \left( \frac{r}{a} \right)^n \right]$ ,  
 где  $C = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2\pi\epsilon_0\psi}{\tau}$ .

**18.5.** 1)  $\underline{w} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 - (z/b)^n e^{jn\beta}}{1 - (z/a)^n}$ ;  
 $\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + (r/b)^{2n} - 2(r/b)^n \cos n(\alpha + \beta)}{1 + \left( \frac{r}{a} \right)^{2n} - 2(r/a)^n \cos n\alpha}$ ;  
 $\psi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\sin n\beta - (a/r)^n \sin n(\alpha + \beta) + (b/r)^n \sin n\alpha}{\cos n\beta - (a/r)^n \cos n(\alpha + \beta) - (b/r)^n \cos n\alpha + (ab/r^2)^n}$ ;

$$2) \ n2\pi\epsilon_0/\ln\left[\frac{(a^{2n} + b^{2n}) - 2a^n b^n \cos n\beta}{(ab)^{n-1} n^2 r_0^2}\right].$$

18.6. См. решение.

18.7. См. решение.

18.8. См. решение.

$$18.9. \frac{x^2}{a^2 \sin^2(\psi/a)} - \frac{y^2}{a^2 \cos^2(\psi/a)} = 1 - \text{линии поля};$$

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2(\varphi/A - 2,3)} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2(\varphi/A - 2,3)} = 1 - \text{эквипотенциали.}$$

$$18.10. \tau/2\pi\epsilon_0; \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2R/a)}; \tau/2\pi\sqrt{a^2 - x^2}; a/2.$$

$$18.11. \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln[(a_1 - \sqrt{a_1^2 - a^2})/(a_2 - \sqrt{a_2^2 - a^2})]} = \\ = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln[(a_2 + \sqrt{a_2^2 - a^2})/(a_1 + \sqrt{a_1^2 - a^2})]}.$$

18.12. См. решение.

18.13. См. решение.

18.14. См. решение.

18.15. См. решение.

$$18.16. 1) \underline{w} = -\frac{i}{2\pi\sigma_2} \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2b} (\underline{z} + jh) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2b} (\underline{z} - jh) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{tg} \frac{\pi}{2b} \left( \underline{z} + \frac{b}{2} + jh \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2b} \left( \underline{z} + \frac{b}{2} - jh \right) \right]; \\ \underline{E}^* = \frac{2i \operatorname{ch} \frac{\pi}{b} h}{b\sigma_2} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{b} \underline{z}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} h - \cos \frac{2\pi}{b} \underline{z}} + \frac{\cos \frac{\pi}{b} \underline{z}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} h + \cos \frac{2\pi}{b} \underline{z}} \right];$$

$$2) \frac{\pi\sigma_2}{\ln \left[ \frac{2b}{\pi r_0} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{b} \right]} \approx 0,045 \text{ См/м};$$

$$3) 187 \text{ Вт/м}^2.$$

18.17. См. решение.

18.18. См. решение.

18.19. См. решение.

18.20. См. решение.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 19

- 19.1. 100 Вт.  
 19.2. См. решение.  
 19.3.  $9,8 \text{ ВТ/см}^2$ ;  $7,5 \text{ ВТ/см}^2$ ;  $1,72 \text{ ВТ/см}^2$ .  
 19.4. См. решение.  
 19.5. См. решение.  
 19.6.  $247 \text{ кВт/см}^2$ ;  $9,9 \text{ кВт/см}^2$ ;  $27,5 \text{ кВт/см}^2$ .  
 19.7. 1)  $\Pi_t = 11\,400 \text{ ВТ/см}^2$ ;  $\Pi_n = 28 \cdot 10^{-3} \text{ ВТ/см}^2$ ; 2)  $\Pi_t = 456 \text{ ВТ/см}^2$ ;  $\Pi_n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ ВТ/см}^2$ ; 3)  $\Pi_t = 2850 \text{ ВТ/см}^2$ ;  $\Pi_n = 8 \cdot 10^{-3} \text{ ВТ/см}^2$ .  
 19.8. 1)  $52,4 \text{ ВТ}$ ;  $200 + 5,24 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ ;  $200 \text{ А}$ ;  $2000 \text{ кВт}$ ;  $1/(1 + 2,62 \cdot 10^{-5})$ ; 2)  $52,4 \text{ ВТ}$ ;  $231 \angle 29^\circ 50' \text{ А}$ ;  $200 \text{ А}$ ;  $2000 \text{ кВт}$ ;  $1/(1 + 2,63 \cdot 10^{-5})$ .  
 19.9. См. решение.  
 19.10.  $12,65 \cdot 10^{-3} - 0,1265 \cos(2\omega t - 13^\circ) \text{ ВТ/см}^2$ ;  $1,2 + j12 \text{ В} \cdot \text{А}$ .  
 19.11.  $0,12e^{-750t}(1 - e^{-750t}) \text{ ВТ/см}^2$ ;  $0,2 \text{ Дж}$ .  
 19.12. См. решение.  
 19.13.  $1800 \text{ В}$ .  
 19.14. См. решение.  
 19.15.  $\pi n B (R^2 - 2d \cos \omega t \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \omega t} + d^2 \cos 2\omega t) \approx$   
 $\approx \pi n B R^2 \left(1 - 2 \frac{d}{R} \cos \omega t\right)$  при  $d \ll R$ , где  $\omega = 2\pi n$ .  
 19.16.  $151 \cos \omega t \text{ мВ}$ .  
 19.17. См. решение.  
 19.18. См. решение.  
 19.19. Нет.  
 19.20.  $0$ ;  $|q| \left(v_x B + \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t}\right)$  при  $r < r_0$  и  $0$ ;  $|q| \frac{r^2}{2x} \frac{\partial B}{\partial t}$  при  $r > r_0$ .  
 19.21.  $|q| v_y B$ ;  $|q| \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$  при  $r < r_0$  и  $|q| \frac{r^2}{2x} \frac{\partial B}{\partial t}$ ;  $0$  при  $r > r_0$ .  
 19.22.  $v = |q| B r / m = 1,41 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .  
 19.23.  $v_x = 2,8 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ ;  $v_y = 3,52 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ ;  $v_z = 0$ .  
 19.24.  $x_1 = 19 \text{ см}$  при  $\alpha = 0$ ;  $x_2 = 18,7 \text{ см}$  при  $\alpha = 8^\circ$ .  
 19.25. Окружность радиусом  $r = mv/qB$ .  
 19.26.  $B = \sqrt{2mv/|q|}$ .  
 19.27. См. решение.

19.28.  $\frac{\omega B}{2}(r_2^2 - r_1^2) = 8 \text{ В}; \quad \mathcal{E}I + \omega M = 12 \text{ В}; \quad \text{где } \omega = 120\pi n \cdot 58,2\%.$

19.29. См. решение.

19.30.  $5 \cdot 10^{-5} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В/см}; \quad 0,584 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ А/см};$   
 $e^{10,15}$

19.31.  $65 \cdot 10^{-6} \sin(\omega t - 270^\circ) \text{ В/см}; \quad 0,73 \sin(\omega t - 315^\circ) \text{ А/см};$   
 $1,26 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/см}^3; \quad 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/см}^3.$

19.32.  $-(\sigma E^2 + \partial W_M / \partial t) = -H_{0m}^2 \omega \mu_r \mu_0 e^{-2\alpha z} [1/2 + \sin(2\omega t - 2\beta z)] = -0,315 e^{-8,88z} [1 + 2 \sin(2\omega t - 8,88z)] \text{ Вт/см}^3;$   
 $0,315 e^{-8,88z} [1 + \sin(2\omega t - 8,88z)] \text{ Вт/см}^3; \quad \partial W_M / \partial t = 0,315 e^{-8,88z} \times$   
 $\times \sin(2\omega t - 8,88z) \text{ Вт/см}^3, \text{ где } z - \text{ в сантиметрах.}$

19.33. См. решение.

19.34. См. решение.

19.35.  $\mu'_{\text{ср}} = \frac{|\mu_r|}{|\gamma|^2} \frac{\beta \operatorname{sh} 2\alpha a + \alpha \sin 2\beta a}{a(\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\beta a)} =$   
 $= \frac{2,15 \operatorname{sh} 2\alpha a + 2,3 \sin 2\beta a}{a(\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\beta a)};$   
 $\mu''_{\text{ср}} = \frac{|\mu_r|}{|\gamma|^2} \frac{\alpha \operatorname{sh} 2\alpha a - \beta \sin 2\beta a}{a(\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\beta a)} = \frac{2,3 \operatorname{sh} 2\alpha a - 2,15 \sin 2\beta a}{a(\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\beta a)}, \quad \text{где}$   
 $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\sigma\mu_r\mu_0} = 232 + j217 \text{ см}^{-1}.$

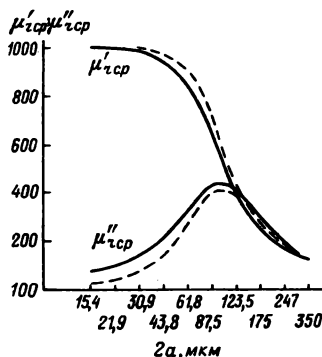


Рис. 19.350

Эти зависимости представлены на рис. 19.350, где пунктирные кривые соответствуют проницаемостям без учета потерь на гистерезис.

19.36.  $P = \omega \mu_0 \mu_r'' \text{ср} H^2 G / \gamma;$

$2a, \text{ мм}$	0,016	0,06	0,2	0,5
$\mu_r \text{ср}$	$400 - j2,7$	$397 - j38,2$	$198 - j163$	$63,6 - j63,6$
$P, \text{ Вт}$	0,071	1,0	4,3	1,67

19.37.  $400 - j13,4$ ;  $63,6(1 - j1)$ ;  $2a_2 = 2a_1 \sqrt{f_1/f_2} = 0,0353$  мм.

19.38. См. решение.

19.39. См. решение.

19.40. При  $h/z_0 = \pi/2$  или  $h = 1,48$  см;  $\underline{Z} = R_\infty (1 + j1) \operatorname{th}(\pi/2) = 0,917 R_\infty (1 + j1)$ , где  $R_\infty = l/\sigma b z_0 = 37,2 \cdot 10^{-5}$  Ом/м — сопротивление при резко выраженном поверхностном эффекте;  $z_0$  — глубина проникновения. При других экстремальных значениях  $h$  сопротивление практически не отличается от  $R_\infty$ .

19.41. См. решение.

19.42. См. решение.

19.43. См. решение.

19.44. 1)  $R_0(1 + j0,0028)$ ; 2)  $R_0(1,025 + j0,28)$ ; 3)  $R_0(53 + j53)$ , где  $R_0 = 56 \cdot 10^{-4}$  Ом;  $1,077 \angle 31^\circ 11'$ .

19.45. 2,7 см; 6,33.

19.46. 3,55;  $41^\circ$ .

19.47. По точной формуле  $R = 76 \cdot 10^{-3}$  Ом/м;  $X = 66,5 \cdot 10^{-3}$  Ом/м. По приближенной формуле  $R = X = 67,5 \cdot 10^{-3}$  Ом/м.

19.48. См. решение.

19.49. См. решение.

19.50. См. решение.

19.51.  $\Delta \underline{Z} = j\omega^2 \pi r_0^2 \frac{\mu_0}{l} (\underline{\mu}_{\text{ср}} - 1) = 5,86 - j56,1$  Ом, где  $\underline{\mu}_{\text{ср}}$

см. в решении задачи 19.50.

19.52. а)  $16,8 - j42$  Ом; б)  $20,5 - j12,1$  Ом; в)  $-j62$  Ом; 62/100.

19.53.  $\underline{Z} = \underline{Z}_0 (\underline{\mu}_{\text{ср}} S_1/S - S_1/S + 1)$ , где  $\underline{Z}_0 = j\omega^2 \mu_0 S/l$ ,  $\underline{\mu}_{\text{ср}} = \frac{2\mu_r J_1(qr_0)}{qr_0 J_0(qr_0)}$ ; а)  $26,4 + j660$  Ом; б)  $2060 + j5510$  Ом.

19.54. При  $r_0 = 1,8z_0$ , где  $z_0$  — глубина проникновения,  $p_{\text{max}} = 0,38\omega\mu_r\mu_0 H_0^2$ , где  $H_0$  — напряженность внешнего магнитного поля тока в катушке.

19.55. 10 200 Гц; 28,4 Ом.

19.56. 1,016 МГц; 3140 Ом.

19.57.  $(19,3 + j257) 10^{-3}$  Ом/м; а)  $j248 \cdot 10^{-3}$  Ом/м; б)  $(19,3 + j8,9) 10^{-3}$  Ом/м.

19.58.  $\underline{Z} = \frac{ql}{2\pi r_2 \sigma} \frac{N_1(qr_1) J_0(qr_2) - J_1(qr_1) N_0(qr_2)}{J_1(qr_2) N_1(qr_1) - J_1(qr_1) N_1(qr_2)}$ , где  $q = \sqrt{-j\omega\sigma\mu_0}$ ;  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  — цилиндрические функции первого рода соответственно нулевого и первого порядка;  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$  — цилиндрические функции второго рода соответственно нулевого и первого порядка; а)  $\underline{Z} = 0,935 \cdot 10^{-5}$  Ом; б)  $\underline{Z} = (1,4 + j0,525) 10^{-5}$  Ом; в)  $\underline{Z} = 8,5(1 + j1) \cdot 10^{-5}$  Ом.



$$19.59. \text{ а) } \dot{E} = \dot{E}_z = \frac{i q J_0(qr)}{2\pi r_0 \sigma J_1(qr_0)}; \quad \dot{H} = \dot{H}_z = \frac{i J_1(qr)}{2\pi r_0 J_1(qr_0)}, \text{ где } q = \sqrt{-j\omega\sigma\mu_0};$$

$$\text{ б) } \dot{E} = \dot{E}_z = \frac{i q}{2\pi r_1 \sigma T} [J_0(qr) N_1(qr_2) - N_0(qr) J_1(qr_2)]; \quad \dot{H} = \dot{H}_z = \frac{i}{2\pi r_1 T} [J_1(qr) N_1(qr_2) - N_1(qr) J_1(qr_2)], \text{ где } T = J_1(qr_1) \times \\ \times N_1(qr_2) - J_1(qr_2) N_1(qr_1);$$

$$\text{ в) } \dot{E}_r = \frac{\dot{U}}{r \ln \frac{r_1}{r_0}}; \quad \dot{E}_z = \dot{E}_z(r_0) - [\dot{E}_z(r_0) - E_z(r_1)] \frac{\ln r/r_0}{\ln r_1/r_0}; \quad \text{ где }$$

$$E_z(r_0) = \frac{i q J_0(qr_0)}{2\pi r_0 \sigma J_1(qr_0)};$$

$$E_z(r_1) = \frac{i q}{2\pi r_1 \sigma} \frac{N_1(qr_2) J_0(qr_1) - J_1(qr_2) N_0(qr_1)}{J_1(qr_1) N_1(qr_2) - J_1(qr_2) N_1(qr_1)}; \quad \dot{H} = \dot{H}_z = \frac{i}{2\pi r}.$$

$$19.60. \quad \underline{Z} = \frac{l q}{2\pi r_1 \sigma} \left[ \frac{r_1 J_0(qr_0)}{r_0 J_1(qr_0)} - \frac{N_1(qr_2) J_0(qr_1) - J_1(qr_2) N_0(qr_1)}{J_1(qr_1) N_1(qr_2) - J_1(qr_2) N_1(qr_1)} - q r_1 \ln \frac{r_1}{r_0} \right],$$

где  $J_k(z)$  и  $N_k(z)$  — цилиндрические функции соответственно первого и второго рода порядка  $k$ .

$$\text{ а) } \underline{Z} = \frac{l}{\pi \sigma} \left[ \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad \text{ б) } \underline{Z} = \frac{\gamma l}{2\pi r_1 \sigma} \left[ \frac{r_1}{r_0} + \text{cth } \gamma(r_2 - r_1) + \gamma r_1 \ln \frac{r_1}{r_0} \right], \text{ где } \gamma = \sqrt{j\omega\sigma\mu_0}; \quad \text{ в) } \underline{Z} = \frac{l}{2\pi r_1 \sigma z_0} \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} + 1 \right) + j \left( \frac{r_1}{r_0} + 1 + 2 \frac{r_1}{z_0} \ln \frac{r_1}{r_0} \right) \right].$$

19.61. См. решение.

19.62. 0,0657 мкВ.

19.63. 7,5 мкВ.

19.64. 10,75 В/см; 0,0284 А/см.

19.65. 1) 31,4 см; 0,665 мкА/м; 2) 0,67 мм; 20,7 мкА/м.

19.66. 1) 31,4 см; 0,00985 мкА/м; 2) 0,67 мм; 4,16 мкА/м.

19.67. 92,5 нм; 2,64.

19.68. 1,67 см;  $2,65 \cdot 10^{-3}$  см.

19.69. а)  $TE_{mn}$ ,  $m$  — любое;  $n = 2p + 1$ ; б)  $TE_{mn}$ ,  $m$  — любое,  $n = 2p$ ; в)  $TE_{mn}$ ,  $m = 2p$ ,  $n$  — любое; г)  $TM_{mn}$ ,  $m = 2p + 1$ ,  $n$  — любое; д)  $TM_{mn}$ ,  $m = 2p + 1$ ,  $n = 2q + 1$ ; е)  $TM_{mn}$ ,  $m = 2p + 1$ ,  $n = 2q$ ; в случаях б и е токи в штырьках в противофазе.

19.70. См. решение.

19.71. 4,64 Вт;  $4,46 \cdot 10^{-6}$  Нп/см; на 0,082 %.

19.72. 4,85 Вт;  $4,85 \cdot 10^{-5}$  Нп/см; на 0,24 %.

19.73. См. решение.

19.74. 772 Вт.

19.75. 936,4 Вт.

19.76. а) 8,2; б) 11,9; в) 13,96 ГГц.

19.77. См. решение.

19.78. 13 мм.

19.79. 207 А.

19.80.  $3,8 \cdot 10^{-7}$  Вт;  $3,8 \cdot 10^{-9}$  Ом.

19.81.  $\dot{A} = \dot{A}_z = \mu_0 I l e^{-jk_0 R} / 4\pi R$ , где  $k_0 = \omega/c_0$ ;  $c_0$  — скорость света в вакууме;  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$19.82. \quad \phi = \frac{j\omega\mu_0 I l z}{4\pi R} \left( \frac{1}{jk_0 R} - \frac{1}{k_0^2 R^2} \right) e^{-jk_0 R}.$$

$$19.83. \quad \dot{E}_x = \frac{j\omega\mu_0 I l z x}{4\pi R^3} \left( 1 + \frac{3}{jk_0 R} - \frac{3}{k_0^2 R^2} \right) e^{-jk_0 R};$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= \frac{j\omega\mu_0 I l z y}{4\pi R^3} \left( 1 + \frac{3}{jk_0 R} - \frac{3}{k_0^2 R^2} \right) e^{-jk_0 R}; \quad \dot{E}_z = \frac{j\omega\mu_0 I l}{4\pi R} \left[ \frac{z^2}{R^2} \left( 1 + \frac{3}{jk_0 R} - \frac{3}{k_0^2 R^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{jk_0 R} - \frac{1}{k_0^2 R^2} \right) \right] e^{-jk_0 R}; \\ \dot{H}_x &= \frac{I l k_0^2 y}{4\pi R} \times \\ &\times \left( \frac{1}{jk_0 R} - \frac{1}{k_0^2 R^2} \right) e^{-jk_0 R}; \quad \dot{H}_y = -\frac{I l k_0^2 x}{4\pi R} \left( \frac{1}{jk_0 R} - \frac{1}{k_0^2 R^2} \right) e^{-jk_0 R}; \\ H_z &= 0. \end{aligned}$$

$$19.84. \quad \dot{E}_x = -\frac{3I l z x}{4j\omega\pi\epsilon_0 R^5}; \quad \dot{E}_y = -\frac{3I l z y}{4j\omega\pi\epsilon_0 R^5};$$

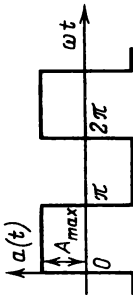
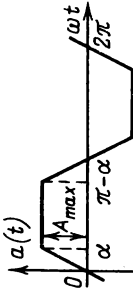
$$\dot{E}_z = -\frac{I l z}{4j\omega\pi\epsilon_0 R^3} \left( 1 - \frac{3z^2}{R^2} \right); \quad \dot{H}_x = -\frac{I l y}{4\pi R^3}; \quad \dot{H}_y = \frac{I l x}{4\pi R^3}; \quad H_z = 0.$$

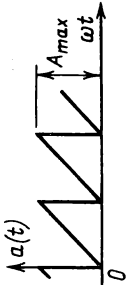
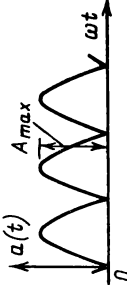
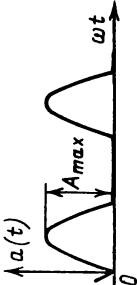
$$19.85. \quad \dot{E}_x = \frac{j\omega\mu_0 I l z x}{4\pi R^3} e^{-jk_0 R}; \quad \dot{E}_y = \frac{j\omega\mu_0 I l z y}{4\pi R^3} e^{-jk_0 R}; \quad \dot{E}_z =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{j\omega\mu_0 I l}{4\pi R} \left( \frac{z^2}{R^2} - 1 \right) e^{-jk_0 R}; \quad \dot{H}_x = \frac{I l k_0 y}{4\pi j R^2} e^{-jk_0 R}; \quad \dot{H}_y = -\frac{I l k_0 x}{4\pi j R^2} \times \\ &\times e^{-jk_0 R}; \quad \dot{H}_z = 0; \quad \Pi_{\text{ср}} = \frac{\omega^2 \mu_0 I^2 l^2 (x^2 + y^2)}{16\pi^2 c_0 R^4}. \end{aligned}$$

$$19.86. \quad 80\pi^2 I^2 (l/\lambda_0)^2.$$

Разложение в ряд Фурье

Функция	Ряд Фурье	Действующее значение	Среднее по модулю значение
	$a(t) = \frac{4}{\pi} A_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots + \frac{1}{k} \sin k \omega t + \dots \right)$	$A_{\max}$	$A_{\max}$
	$a(t) = \frac{4}{\alpha \pi} A_{\max} \left( \sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3 \alpha \cdot \sin 3 \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \alpha \cdot \sin 5 \omega t + \dots + \frac{1}{k^2} \sin k \alpha \cdot \sin k \omega t + \dots \right)$	$A_{\max} \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}$	$A_{\max} \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$

	$a(t) = A_{max} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots + \frac{1}{k} \sin k\omega t + \dots \right) \right]$	$\frac{A_{max}}{\sqrt{3}}$	$\frac{A_{max}}{2}$
	$a(t) = \frac{4}{\pi} A_m \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$
	$a(t) = \frac{2}{\pi} A_m \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \sin \omega t - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \dots - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$	$\frac{A_m}{2}$	$\frac{A_m}{\pi}$

## Приложение 2

Таблица оригиналов и их изображений по Лапласу

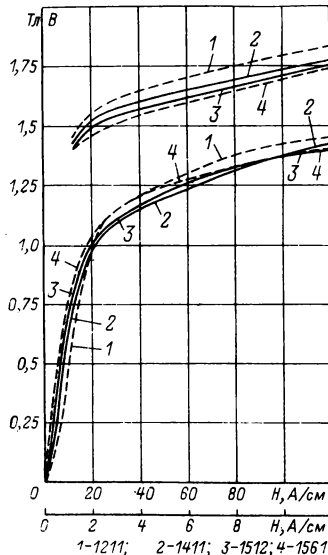
Оригинал	Изображение
$E = \text{const}$	$\frac{E}{p}$
$\delta(t)$	1
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
$\frac{1}{a-b} \left( e^{-bt} - e^{-at} \right)$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{b-a} \left( be^{-bt} - ae^{-at} \right)$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left( \frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} \left[ 1 - e^{-at}(1+at) \right]$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{(p-j\omega)}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t + \psi)$	$\frac{(p+a) \cos \psi - \omega \sin \psi}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t + \psi)$	$\frac{(p+a) \sin \psi + \omega \cos \psi}{(p+a)^2 + \omega^2}$

# Приложение 3

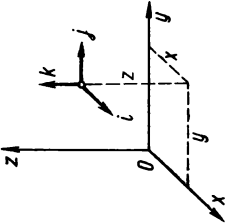
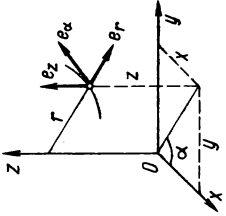
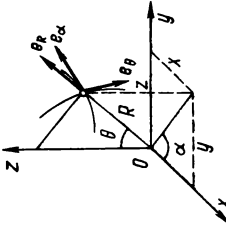
## Кривые намагничивания сталей 1211, 1411, 1512, 1561

Марка стали, индукция	H, A/cm												
	0	0,2	0,4	1	1,4	1,8	2,4	4	6	8	10	12	14
1211, B Тл	0	0,03	0,11	0,53	0,73	0,90	1,10	1,23	1,32	1,38	1,42	1,45	1,48
1411, B, Тл	0	0,04	0,18	0,67	0,81	0,92	1,05	1,14	1,23	1,30	1,38	1,42	1,46
1512, B, Тл	0	0,11	0,35	0,73	0,87	0,96	1,06	1,16	1,25	1,32	1,37	1,40	1,44
1561, B, Тл	0	0,20	0,44	0,75	0,88	0,98	1,11	1,20	1,27	1,32	1,37	1,40	1,42

Марка стали, индукция	H, A/cm					
	18	22	24	40	80	120
1211, B, Тл	1,54	1,57	1,59	1,64	1,75	1,83
1411, B, Тл	1,50	1,53	1,55	1,59	1,69	1,78
1512, B, Тл	1,48	1,50	1,51	1,57	1,68	1,76
1561, B, Тл	1,44	1,46	1,47	1,54	1,65	1,74



Декартовы, цилиндрические и сферические координаты. Операции векторного анализа

Декартовы	Цилиндрические	Сферические
	 <p style="text-align: center;">Элемент длины</p> $x = r \cos \alpha; \quad y = r \sin \alpha$	 $x = R \sin \theta \cos \alpha; \quad y = R \sin \theta \sin \alpha; \quad z = R \cos \theta$
$dl = i dx + j dy + k dz$	$dl = e_r dr + e_\alpha r d\alpha + e_z dz$	$dl = e_R dR + e_\theta R d\theta + e_\alpha R \sin \theta d\alpha$

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = e_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + e_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = e_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + e_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + e_\alpha \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 F_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_r & e_\alpha & e_z \\ r & r & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{e_R}{R^2 \sin \theta} & \frac{e_\theta}{R \sin \theta} & \frac{e_z}{R} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ F_R & R F_\theta & R \sin \theta F_\alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R \varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2};$$

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla (\nabla \times \mathbf{F}) = 0; \quad \text{rot grad } \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0;$$

$$\text{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B};$$

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F};$$

$$\oint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV; \quad \oint_l \mathbf{F} dl = \int_S \text{rot } \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$



# ЕДИНИЦЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН Единицы Международной системы СИ

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	международное
Электрические				
Сила электрического тока	ампер		A	A
Количество электричества, заряд	кулон		Кл	C
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	вольт		$A \cdot c = Кл$	V
Напряженность электрического поля	вольт на метр		$кг \cdot м^2/(A \cdot c^3) = В$	V/m
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	фарад на метр		$кг \cdot м/(A \cdot c^3) = В/м$	F/m
Электрический момент диполя	кулон-метр		$A^2 \cdot c^4/(кг \cdot м^3)$	C · m
Электрическое смещение (индукция)	кулон на кв. метр		$A \cdot c \cdot м = Кл \cdot м$	C/m <sup>2</sup>
Поляризованность	кулон на кв. метр		$A \cdot c/m^2 = Кл/м^2$	C/m <sup>2</sup>
Электрическая емкость	фарад		$A \cdot c/m^2 = Кл/м^2$	F
Плотность тока	ампер на кв. метр		$A^2 \cdot c^4/(кг \cdot м^2) = c/Ом$	A/m <sup>2</sup>
Электрическое сопротивление	ом		$A/m^2$	Ω
Электрическая проводимость	сименс		$кг \cdot м^2/(A^2 \cdot c^3) = В/А$	S
Удельное электрическое сопротивление *	ом-метр		$A^2 \cdot c^3/(кг \cdot м^2) = 1/Ом$	Ω · m
Удельная электрическая проводимость **	сименс на метр		$кг \cdot м^3/(A^2 \cdot c^3) = Ом \cdot м$	S/m
Подвижность электронов	метр в секунду, деленный на вольт на метр		$A^2 \cdot c^3/(кгс \cdot м^3) = 1/Ом \cdot м$	$\frac{м/с}{В/м}$

Полная мощность	вольт-ампер	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$	$\text{В} \cdot \text{А}$	$\text{В} \cdot \text{А}$
Реактивная мощность	вар	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$	вар	вар
<i>Магнитные</i>				
Магнитный поток	вебер	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{А} \cdot \text{с}^2) = \text{В} \cdot \text{с}$	Вб	Вб
Магнитная индукция	тесла	$\text{кг}/(\text{А} \cdot \text{с}^2) = \text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$	Тл	Т
Абсолютная магнитная проницаемость	генри на метр	$\text{кг} \cdot \text{м}/(\text{А}^2 \cdot \text{с}^2)$	Гн/м	Гн/м
Магнитный момент электрического тока, магнитный момент диполя	ампер-кв. метр	$\text{А} \cdot \text{м}^2$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$
Намагниченность	ампер на метр	$\text{А}/\text{м}$	$\text{А}/\text{м}$	$\text{А}/\text{м}$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	$\text{А}/\text{м}$	$\text{А}/\text{м}$	$\text{А}/\text{м}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	генри	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{А}^2 \cdot \text{с}^2) = \text{В} \cdot \text{с}/\text{А} = \frac{\text{Вб}}{\text{Бб}}/\text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с}$	Гн	Гн
Магнитодвижущая сила, разность скалярных магнитных потенциалов	ампер	$\text{А}$	$\text{А}$	$\text{А}$
Магнитное сопротивление	ампер на вебер	$\frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}^2}{(\text{м}^2 \cdot \text{кг})} = \frac{\text{А}}{\text{Вб}} = 1/\text{Гн}$	$\text{А}/\text{Вб}$	$\text{А}/\text{Вб}$
Магнитная проводимость	вебер на ампер	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{А}^2) = \text{Гн}$	$\text{Вб}/\text{А}$	$\text{Вб}/\text{А}$
Векторный магнитный потенциал	вебер на метр	$\text{кг} \cdot \text{м}/(\text{А} \cdot \text{с}^2) = \text{В} \cdot \text{с}/\text{м}$	$\text{Вб}/\text{м}$	$\text{Вб}/\text{м}$

\*  $1 \text{ Ом} \cdot \text{см} = 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ;  $1 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м} = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м} = 1 \text{ мОм} \cdot \text{м}$ .

\*\*  $1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} = 100 \cdot \text{См}/\text{м}$ ;  $1 \text{ м}/\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 = 10^6 \cdot \text{См}/\text{м} = 1 \text{ МС}/\text{м}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1978. — 528 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высшая школа, 1978. — 231 с.
3. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 536 с.
4. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 416 с.
5. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория цепей/Под ред. К. М. Поливанова. — М.: Энергия, 1973. — 304 с.
6. Колли Я. Н., Соболева Л. П., Фрадкин Б. М. Задачник по теоретическим основам электротехники. Теория поля. — М.: Энергия, 1972. — 168 с.
7. Основы теории цепей/Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. — М.: Энергия, 1975. — 752 с.
8. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 1. — М.: Энергия, 1972. — 239 с.
9. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Т. 2. — М.: Энергия, 1972. — 200 с.
10. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 3. — М.: Энергия, 1975. — 208 с.
11. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основы теории линейных цепей/Под ред. П. А. Ионкина. — М.: Высшая школа, 1976. — 544 с.
12. Теоретические основы электротехники. Т. 2. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля/Под ред. П. А. Ионкина. — М.: Высшая школа, 1976. — 383 с.
13. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978. — 592 с.
14. Теоретические основы электротехники. Ч. 2 и 3. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле/Г. И. Атабеков, С. Д. Купалаян, А. Б. Тимофеев, С. С. Хухриков. — М.: Энергия, 1979. — 432 с.
15. Толстов Ю. Г. Теория линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1978. — 279 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава первая. <b>Линейные цепи с источниками постоянных ЭДС и токов</b> (А. И. Донской, П. А. Ионкин, В. А. Кузовкин, В. Г. Миронов, М. Д. Пирогова)	5
Введение к гл. 1	5
1.1. Простейшие электрические цепи	15
1.2. Переходные и установившиеся процессы в простейших цепях	23
1.3. Применение уравнений Кирхгофа	28
1.4. Применение узловых уравнений и уравнений с напряжениями ветвей дерева	33
1.5. Применение контурных уравнений	41
1.6. Метод наложения. Свойство взаимности	44
1.7. Линейные соотношения между напряжениями и токами	47
1.8. Преобразования электрических схем	49
1.9. Эквивалентные источники (активные двухполюсники)	52
1.10. Топологические методы расчета передаточных функций	55
1.11. Применение сигнальных графов	59
Глава вторая. <b>Линейные цепи с источниками гармонических ЭДС и токов</b> (И. И. Баранов, С. И. Ващенко, Ф. П. Жарков, В. М. Юркевич)	63
Введение к гл. 2	63
2.1. Переходные и установившиеся процессы в простейших цепях	70
2.2. Мгновенные значения синусоидальных величин. Простейшие операции с комплексными числами. Последовательное и параллельное соединения элементов цепи	73
2.3. Разветвленные электрические цепи. Векторные и топографические диаграммы. Энергетические соотношения	77
2.4. Эквивалентные схемы двухполюсников	89
2.5. Резонанс. Режим согласованной нагрузки	92
2.6. Электрические цепи с взаимной индукцией	99
2.7. Диаграммы для цепей с изменяющимися параметрами	108
2.8. Топологические методы анализа. Расчет схемных функций	113
2.9. Применение сигнальных графов	115
Глава третья. <b>Трехфазные цепи</b> (Н. К. Круг, В. А. Майбога)	117
Введение к гл. 3	117
3.1. Соединение обмоток и разметка выводов трехфазных источников	123
	763

3.2. Симметричная нагрузка . . . . .	126
3.3. Несимметричная нагрузка . . . . .	131
3.4. Симметричные составляющие . . . . .	141
3.5. Вращающееся магнитное поле . . . . .	150
<b>Глава четвертая. Четырехполюсники (Б. Я. Жуховицкий, В. И. Пароткин)</b> . . . . .	153
Введение к гл. 4 . . . . .	153
4.1. Уравнения и коэффициенты пассивных четырехполюсников . . . . .	162
4.2. Характеристические (вторичные) параметры . . . . .	170
4.3. Схемы замещения . . . . .	172
4.4. Соединения четырехполюсников . . . . .	175
4.5. Активные четырехполюсники . . . . .	179
4.6. Передаточные функции . . . . .	184
<b>Глава пятая. Цепи с распределенными параметрами (Б. Я. Жуховицкий)</b> . . . . .	192
Введение к гл. 5 . . . . .	192
5.1. Параметры линии . . . . .	196
5.2. Линия с потерями . . . . .	199
5.3. Линия без потерь . . . . .	204
5.4. Схемы замещения линии . . . . .	212
<b>Глава шестая. Линейные цепи с негармоническими периодическими источниками (В. А. Киселева, В. Н. Кудин)</b> . . . . .	216
Введение к гл. 6 . . . . .	216
6.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье . . . . .	220
6.2. Периодические процессы в линейных цепях . . . . .	224
6.3. Мощность. Коэффициенты, характеризующие формы периодических кривых. Измерения в цепях несинусоидального тока . . . . .	228
6.4. Резонанс в цепях несинусоидального тока . . . . .	235
6.5. Несинусоидальные режимы симметричных трехфазных цепей . . . . .	238
<b>Глава седьмая. Фильтры (Б. Я. Жуховицкий, В. И. Пароткин)</b> . . . . .	242
Введение к гл. 7 . . . . .	242
7.1. Фильтры типа $k$ . . . . .	246
7.2. Другие типы фильтров . . . . .	253
<b>Глава восьмая. Переходные процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами (Б. А. Болдов, В. И. Пароткин)</b> . . . . .	260
Введение к гл. 8 . . . . .	260
8.1. Переходные процессы в цепях $rL$ (классический метод расчета) . . . . .	267
8.2. Переходные процессы в цепях $rC$ (классический метод расчета) . . . . .	281
8.3. Переходные процессы в цепях с несколькими реактивными элементами (классический метод расчета) . . . . .	295

8.4. Операторный метод расчета переходных процессов	315
8.5. Переходные процессы при действии источников напряжения или тока произвольной формы	324
8.6. Переходные процессы при скачкообразных изменениях токов в индуктивностях и напряжений на емкостях	333
8.7. Расчет переходных процессов методом переменных состояний	339
<b>Глава девятая. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами (Е. С. Кухаркин, С. А. Левитан)</b>	349
Введение к гл. 9	349
9.1. Формирование прямой и обратной волн в линии без потерь	352
9.2. Переход волны с одной линии на другую	355
9.3. Волны в линиях при подключении и отключении ветвей	359
9.4. Формирование импульсов	362
9.5. Волны в линии без искажений	364
<b>Глава десятая. Элементы синтеза линейных цепей (Б. Я. Жуховицкий)</b>	366
Введение к гл. 10	366
10.1. Двухполосники без потерь	370
10.2. Двухполосники с потерями. Мостовые четырехполосники	376
<b>Глава одиннадцатая. Нелинейные цепи постоянного тока (П. А. Ионкин, В. В. Каратаев, Ф. Н. Шакирзянов)</b>	380
Введение к гл. 11	380
11.1. Графический метод расчета	382
11.2. Аналитический метод расчета	395
11.3. Численные методы расчета	399
<b>Глава двенадцатая. Магнитные цепи при постоянных потоках (Г. П. Андреев)</b>	406
Введение к гл. 12	406
12.1. Линейная магнитная цепь	407
12.2. Нелинейная магнитная цепь без гистерезиса	409
12.3. Расчет магнитной цепи с учетом гистерезиса. Постоянные магниты	416
<b>Глава тринадцатая. Нелинейные цепи переменного тока (Б. А. Болдов, Г. Г. Гусев, В. В. Каратаев)</b>	418
Введение к гл. 13	418
13.1. Графические и графо-аналитические методы расчета	420
13.2. Аналитические методы расчета	428
13.3. Расчет по действующим значениям токов и напряжений	437
<b>Глава четырнадцатая. Переходные процессы в нелинейных цепях. Автоколебания (Б. А. Болдов, Г. Г. Гусев, В. В. Каратаев)</b>	439
Введение к гл. 14	439
14.1. Аналитические и графические методы расчета	447

14.2. Устойчивость состояния равновесия . . . . .	456
14.3. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости . . . . .	462
14.4. Метод усреднения . . . . .	467
14.5. Автоколебания . . . . .	471
14.6. Численные методы интегрирования . . . . .	476
<b>Глава пятнадцатая. Вводные задачи теории поля (Л. П. Соболева)</b> . . . . .	<b>479</b>
Введение к гл.15 . . . . .	479
15.1. Симметричные поля . . . . .	483
15.2. Анализ полей . . . . .	499
<b>Глава шестнадцатая. Электрическое поле (Я. Н. Колли, Л. П. Соболева)</b> . . . . .	<b>503</b>
Введение к гл.16 . . . . .	503
16.1. Электростатическое поле в вакууме . . . . .	509
16.2. Электростатическое поле в диэлектрике . . . . .	524
16.3. Стационарное электрическое поле в проводящей среде . . . . .	535
16.4. Квазистатическое электрическое поле в реальной среде . . . . .	543
16.5. Уравнения Лапласа и Пуассона . . . . .	554
16.6. Энергия и силы в электрическом поле . . . . .	563
<b>Глава семнадцатая. Магнитное поле (Б. М. Фрадкин)</b> . . . . .	<b>566</b>
Введение к гл. 17 . . . . .	566
17.1. Постоянное магнитное поле в однородной неограниченной среде . . . . .	569
17.2. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Векторный и скалярный потенциалы . . . . .	578
17.3. Магнитное поле в присутствии магнитных тел . . . . .	593
17.4. Энергия и силы в магнитном поле . . . . .	606
<b>Глава восемнадцатая. Специальные методы расчета потенциальных полей (Я. Н. Колли, Б. М. Фрадкин)</b> . . . . .	<b>611</b>
Введение к гл. 18 . . . . .	611
18.1. Применение функций комплексного переменного . . . . .	612
18.2. Метод интегральных уравнений . . . . .	632
<b>Глава девятнадцатая. Электромагнитное поле (Я. Н. Колли, Б. М. Фрадкин)</b> . . . . .	<b>639</b>
Введение к гл. 19 . . . . .	639
19.1. Теорема Умова — Пойнтинга . . . . .	643
19.2. Напряженность электрического поля в неподвижных и движущихся средах. Движение заряженных частиц . . . . .	649
19.3. Электромагнитное поле в проводящей среде. Поверхностный эффект . . . . .	655
19.4. Волны в диэлектрике, волноводы, резонаторы, излучение . . . . .	674
Ответы к задачам гл. 1 . . . . .	683
Ответы к задачам гл. 2 . . . . .	687
Ответы к задачам гл. 3 . . . . .	695
Ответы к задачам гл. 4 . . . . .	698

Ответы к задачам гл. 5 . . . . .	701
Ответы к задачам гл. 6 . . . . .	703
Ответы к задачам гл. 7 . . . . .	705
Ответы к задачам гл. 8 . . . . .	707
Ответы к задачам гл. 9 . . . . .	713
Ответы к задачам гл. 10 . . . . .	720
Ответы к задачам гл. 11 . . . . .	723
Ответы к задачам гл. 12 . . . . .	726
Ответы к задачам гл. 13 . . . . .	727
Ответы к задачам гл. 14 . . . . .	730
Ответы к задачам гл. 15 . . . . .	733
Ответы к задачам гл. 16 . . . . .	736
Ответы к задачам гл. 17 . . . . .	742
Ответы к задачам гл. 18 . . . . .	747
Ответы к задачам гл. 19 . . . . .	749
Приложение 1. Разложение в ряд Фурье . . . . .	754
Приложение 2. Таблица оригиналов и их изображений по Лапласу . . . . .	756
Приложение 3. Кривые намагничивания сталей 1211, 1411, 1512, 1561 . . . . .	757
Приложение 4. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты. Операции векторного анализа . . . . .	758
Единицы электрических и магнитных величин . . . . .	760
Список литературы . . . . .	762



**Георгий Павлович Андреев**, *Сергей Николаевич*

*Андреев, Игорь Иванович Баранов, Борис Алексеевич Болдов, Светлана Ивановна Ващенко, Геннадий Григорьевич Гусев, Алексей Иванович Донской, Феликс Петрович Жарков, Борис Яковлевич Жуховицкий,*

**Петр Афанасьевич Ионкин**, *Евгений Иванович*

*Калугин, Владимир Васильевич Каратаев, Валерия Александровна Киселева, Яков Николаевич Колли, Наталья Карловна Круг, Всеволод Николаевич Кудин, Владимир Александрович Кузовкин, Евгений Степанович Кухаркин, Семен Аркадьевич Левитан, Виктор Алексеевич Майбога, Владимир Георгиевич Миронов, Владимир Иванович Паротькин, Мальвина Дмитриевна Пирогова, Лидия Петровна Соболева, Борис Михайлович Фрадкин, Феликс Нитматзянович Шайкрянов, Владимир Михайлович Юркевич*

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Редактор Б. Я. Жуховицкий**

Редакторы издательства **Л. А. Решмина, Н. Б. Фомичева**

Переплет художника **В. Д. Козлова**

Технический редактор **О. Н. Адаскина**

Корректоры **З. Б. Драновская, Л. С. Тимохова**

ИБ № 2795

Сдано в набор 13.07.81. Подписано к печати 24.03.82.  
Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2. Гарн. шрифта таймс. Печать высокая. Усл. печ. л. 40,32. Уч.-изд. л. 42,1. Тираж 50 000 экз. Заказ 18. Цена 1 р. 50 к.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

1 р. 50 к.

59