Г. И. Шарыгин

Лекции по элементарной геометрии

Г. И. Шарыгин

Лекции по элементарной геометрии

Рекомендовано УМО по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 050201.65 —- математика

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Ш26

Шарыгин Г. И.
Лекции по элементарной геометрии
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
216 с.
ISBN 978-5-4439-2078-8

Книга содержит записи лекций по элементарной геометрии, прочитанных автором на математическом факультете МПГУ им. Ленина. В лекциях излагаются классические результаты элементарной геометрии на плоскости, начиная от теорем Пифагора, синусов и косинусов, и заканчивая важнейшими достижениями элементарной геометрии XIX— XX веков, теоремами Понселе, Морлея, Фейербаха и другими. Изложение ведется на традиционном школьном «синтетическом» языке, большое внимание уделяется разбору примеров применения изложенных результатов при решении различных задач, от школьных до олимпиадных. Книга предназначена для студентов педагогических специальностей, изучающих курс элементарной геометрии, школьников и учителей старших классов, а также для любителей геометрии.

Подготовлено на основе книги: *Шарыгин Г. И.* Лекции по элементарной геометрии. — М.: МЦНМО, 2014. — 216 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2078-8

Посвящается памяти моего отца
Игоря Федоровича Шарыгина,
научившего меня любить и уважать
элементарную геометрию

Предисловие
(инструкция по применению)

Всем известно, что книги читать полезно. Эта простая истина, конечно же, относится и к книгам по математике. Но сколь ни полезно читать книги по математике, их всё же читать труднее, нежели ту часть литературы, которую в мире принято называть «художественной». Книга, которая сейчас находится перед вами, несомненно, не относится к «художественным» (хотя должен признаться, что при её написании, и особенно при создании иллюстраций, я старался сделать её как можно более привлекательной если не эстетически (что было бы слишком самонадеянно для автора «нехудожественной» книги), то по крайней мере графически). А это значит, что её чтение вряд ли будет лёгким для вас. Вот для того-то, чтобы потенциальным читателям этой книги легче было преодолеть естественные трудности, и пишу я это предисловие, которое, надеюсь, читать всё же легче, чем математические тексты.

Итак, перед вами инструкция по применению данной книги. Начну её со следующего предупреждения или, лучше сказать, предуведомления читателю: хотя книга эта и возникла на основе прочитанных мною на протяжении ряда лет курсов лекций по элементарной геометрии в СУНЦ МГУ и в МПГУ имени Ленина, её ни в коем случае не следует рассматривать как учебник по элементарной или не очень элементарной геометрии. Это не предусматривалось и теми целями, которые стояли передо мной, когда я имел удовольствие вести занятия в этих замечательных во многих смыслах учебных заведениях. В первом случае речь шла о повторном прохождении с 10-классниками курса планиметрии. Основной целью этого мероприятия (несколько странного, если не принимать во внимание специфику учебного процесса в школе имени Колмогорова) являлось приведение имевшихся у школьников знаний по этому предмету к «общему знаменателю». Ведь не секрет, что в разных регионах России и даже в разных школах одного региона уровень преподавания геометрии различается радикально, так что нет ничего удивительного в том, что в одном классе могут оказаться как прекрасно подготовленные, так и крайне плохо обученные по этому предмету дети. А поэтому не надо удивляться, что значительную часть материала, изложенного здесь, составляют вполне элементарные факты, изучающиеся в обычной средней школе. С другой стороны, дети, приходящие в 10-й класс, обычно до этого уже три года изучали геометрию, и было бы неправильным (и, признаюсь, совершенно против моих математических вкусов) перегружать их аксиоматикой и прочими основаниями науки, которые в школе и так проходят, на мой взгляд, в избыточном количестве при крайне низком качестве усвоения материала. О причинах этого не очень радостного явления можно долго и нудно спорить, но я предпочёл принять его за факт и сделать из этого факта надлежащие выводы, а потому изложение материала в этой книге начинается там, где во многих школьных учебниках заканчивается 8-й класс: на теореме Пифагора.

Второй целью, которую я по мере сил преследовал при чтении курса в СУНЦ МГУ, было выведение учеников на качественно новый уровень понимания предмета. А это значит, что из всех известных геометрических фактов и утверждений предпочтение отдавалось в первую очередь наиболее интересным и красивым, и скорее сложным, чем простым. Кроме того, утверждения, которые отбирались в книгу, должны были по мере возможности быть полезными и находить применение при решении задач разного уровня сложности и из разных разделов геометрии. Это не значит, однако, что я рассказывал десятиклассникам сразу наиболее сложные и популярные разделы олимпиадной геометрии, такие как геометрические преобразования, барицентрические координаты или радикальные оси и полярные преобразования и многое другое. Это было бы слишком сложным для многих из них, особенно для школьников, перешедших в СУНЦ МГУ из неспециализированных школ. Подобный материал естественно рассказывать уже подготовленному слушателю. В соответствии с этим принципом и был построен учебный процесс, так что «углублённый» материал составит предмет **второй части этого курса, которую я также планирую рано или поздно издать**. В этой же книге мы отдаём предпочтение исключительно «элементарным» синтетическим методам, составляющим основной предмет курса геометрии обычной средней школы.

У лекций, читавшихся в педагогическом институте, тоже была своя особенность, нашедшая отражение в книге: курс там назывался «Элементарная математика» и читался на четвёртом году обучения, уже после того, как студенты прослушивали обычный курс геометрии, и одновременно с курсом «Оснований геометрии». Главной целью моего курса в этом случае было не познакомить их с предметом и не научить их научному взгляду на изучаемый материал, а скорее дать им представление об идеях и методах, применяемых при решении школьных задач, — ведь именно этим им предстояло заниматься в школах, да ещё и учить этому детей! Вследствие этого не следует удивляться, что в нашем курсе у большинства теорем и утверждений вы обнаружите не одно, а несколько доказательств, основанных зачастую на совершенно разных приёмах. Иногда эти доказательства приводятся сразу же, иногда читателю приходится ждать до следующей лекции, иногда даже мы возвращаемся к нашим теоремам через несколько занятий, когда накопленные нами знания позволяют по-новому взглянуть на старые вопросы. Из этого же принципа следует повышенное внимание, уделяемое в этом курсе (а значит, и в книге) решению задач. Почти в каждой лекции вы найдёте разбор решений тех или иных задач, а одна из лекций (лекция 4) целиком посвящена разбору различных приёмов решения геометрических задач, связанных с составлением уравнений. Многие утверждения, получившие бы в других курсах титулы лемм или даже теорем, у нас приводятся в качестве задач, и в конце каждой лекции даётся небольшой список (10 штук) задач для самостоятельного решения. Не гонясь за оригинальностью, я обычно брал задачи из популярных сборников (см. список использованной литературы в конце книги), по возможности связанные с темой данной лекции. Это удавалось не всегда, особенно в конце книги, когда разбираемые в ней теоремы становились всё менее и менее «школьными», но почти в каждом таком списке есть полезные именно для понимания данной лекции утверждения; в упражнения вынесены также многие утверждения, обобщающие и расширяющие область применения разобранных теорем.

Таковы основные особенности курса и книги. Добавим к их списку ещё несколько. Во-первых, не следует ожидать, что лекции, которые вы тут прочтёте, будут, что называется, один в один воспроизводить лекции, которые вы могли бы услышать в вышеуказанных учебных заведениях, если бы вы вдруг оказались там во время моего выступления. Нет, книга писалась после того, как все лекции уже были прочитаны, оценки поставлены, экзамены и зачёты сданы и пересданы и у автора наконец появилось свободное время, которое он (не без удовольствия) посвятил написанию этого текста. А как известно, свободное время — великая вещь, которая, будучи правильным образом использована, может принести самые неожиданные и порою полезные плоды. В данном случае главным результатом стала возможность переосмысления мною многих рассказанных результатов и возможность по-новому, более, как мне кажется, правильно расставить акценты. Некоторые темы, которые были затронуты, что называется, «в реальности», я решил перенести во вторую, не написанную пока часть книги, некоторые другие, о которых на практике ничего рассказать не удалось, наоборот, добавлены. Во-вторых, я думаю, что читателю будет очень полезно знать, что лекции написаны таким образом, чтобы они как можно меньше зависили друг от друга. Иными словами, вы можете открыть их на любом понравившемся месте и прочесть любую попавшуюся лекцию — для этого вам, за редким исключением, не потребуется знания материала, находящегося за рамками этой лекции. Исключение составляют только широко известные школьные факты, на которые я ссылаюсь, не особенно беспокоясь о том, где они до этого появлялись в тексте книги (достаточно того, что они где-то уже встречались). Надеюсь, эта небольшая оговорка не помешает достижению поставленной цели — модульности при изложении материала, позволившей бы использовать книгу не как учебник, а как сборник полезных идей, применяемых в школьной геометрии. В-третьих, я считаю своим долгом сразу сообщить читателю, что, как это почти всегда случается в столь древнем и почтённом предмете, как элементарная геометрия, все утверждения и теоремы, здесь представленные, можно найти в бессчётном множестве других источников, прежде всего в книгах и статьях моего отца, во многих других статьях в журнале «Квант» и в других журналах, посвящённых школьной математике. Если я и могу поставить что-то себе в заслугу, — так это отбор материала и стиль, в котором он изложен в этой книге.

Наконец, я должен поблагодарить всех тех, кто помогал мне при чтении лекций и проведении упражнений в СУНЦ МГУ: Владимира Шарича и Алексея Пономарёва, а также школьников «А» и «Г» классов выпуска 2008 года, своим активным (иногда даже чересчур) участием в занятиях немало поспособствовавших лучшему усвоению мной пройдённого материала. Я также хочу поблагодарить заведующего кафедрой элементарной математики МПГУ им. Ленина, Владимира Алексеевича Смирнова, доверившего мне читать один из основных курсов на потоке и посоветовавшего записывать лекции в удобочитаемом виде.

Г. Шарыгин
Bures-sur-Yvette, 24.11.2009

Лекция 1

Теорема Пифагора: незнакомый знакомец

Существует много различных способов начинать курс элементарной геометрии. Можно посвятить первую лекцию напоминанию различных систем аксиом или начать её с обсуждения топологических свойств плоских фигур. Выбор темы первой лекции зависит прежде всего от общей направленности курса (при этом можно сказать, что имеется и обратная связь). Всё зависит от того, что вы считаете своей главной задачей: научить слушателя глядеть на элементарную геометрию как на часть «взрослой» математики, или привлечь его внимание к красоте абстрактных рассуждений, или же ещё что-то. Я в своих лекциях хочу в первую очередь научить слушателей решать сложные геометрические задачи, показать им красоту нетривиальных геометрических утверждений. Мне хотелось бы как можно быстрее познакомить их со сложными и красивыми теоремами, иногда выходящими за рамки школьного курса (но от этого не менее элементарными). Поэтому естественно, что темой своей первой лекции я выбираю одно из *первых* известных человечеству красивых и нетривиальных геометрических утверждений — *теорему Пифагора*.

Напомним её формулировку.

Теорема 1. *Пусть ABC — прямоугольный треугольник* ($\angle C = 90^\circ$). *Тогда сумма квадратов катетов этого треугольника равна квадрату гипотенузы, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.*

Ниже мы приводим три различных доказательства этой теоремы. Так мы будем часто поступать и далее. Дело в том, что почти любое утверждение в геометрии (как и вообще в математике) можно доказать многими разными способами. Каждое из доказательств имеет свои преимущества и свои недостатки, каждое из них позволяет по-своему взглянуть на геометрическую суть обсуждаемой теоремы. Поэтому мы рекомендуем читателям не ограничиваться изучением лишь одного из представленных доказательств, а по возможности всегда разобрать их все.

Первое доказательство (как и второе) основывается на классической интерпретации квадратичных величин (например, квадратов длин отрезков) как площадей некоторых фигур. Так, теорему Пифагора можно переформулировать следующим образом: *сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе*. Заметим, что, хотя обычно в школьных курсах геометрии площади изучают *после* теоремы Пифагора, понятие площади никак не зависит от этой теоремы. Поэтому мы можем использовать многие свойства площадей в нашем доказательстве. Итак, рассмотрим квадраты $ACLM$, $BJKC$ и $AA'B'B$, построенные на катетах AC, BC и гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$); см. рис. 1. Нам надо доказать, что сумма площадей первых двух квадратов равна площади третьего. Для этого мы продеформируем оба квадрата, построенные на катетах, так, чтобы их площади не изменились и при этом из них получился бы квадрат $AA'B'B$. Для этого продолжим стороны LM и JK этих квадратов до пересечения в точке C'. Сместим отрезки LM и JK вдоль проведённых

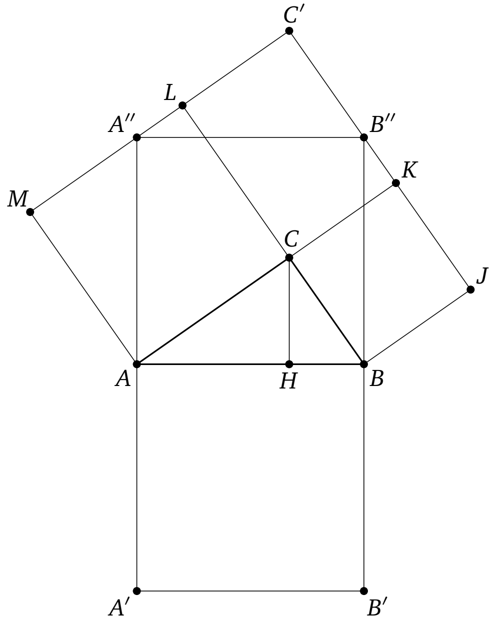

Рис. 1

прямых так, чтобы точки L и K совпали с точкой C'. При этом квадрат $ACLM$ продеформируется в параллелограмм $ACC'A''$, а квадрат $BJKC$ — в параллелограмм $BB''C'C$. Площади же параллелограммов останутся равными площадям квадратов (ведь площадь параллелограмма равна произведению его высоты на основание, которые не меняются при рассмотренной деформации).

Отметим, что отрезок CC' равен гипотенузе AB рассматриваемого треугольника и перпендикулярен ей. В самом деле, он является диагональю прямоугольника $CLC'K$, стороны которого равны катетам треугольника ABC, следовательно, $CC' = AB$, и кроме того, $\angle C'CK = \angle CBA$ и стороны CK и BC этих углов перпендикулярны, а следовательно, перпендикулярны и отрезки CC' и AB. Если мы теперь сместим отрезок CC' вдоль одноимённой прямой так, чтобы точка C совпадала с основанием высоты H, то параллелограммы $ACC'A''$ и $BB''C'C$ продеформируются (вместе) в квадрат $ABB''A''$, равный квадрату $AA'B'B$. $\square$

Второе доказательство состоит из рисунка:

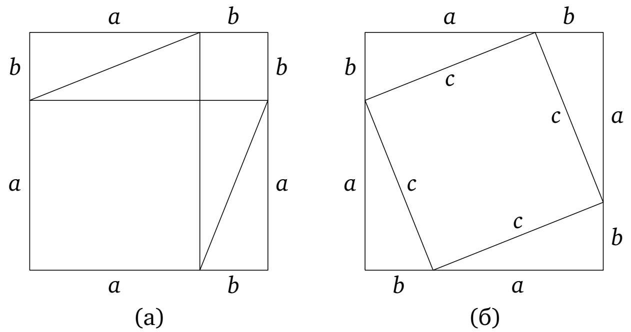

Рис. 2

Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что четырёхугольник, занимающий центр квадрата на рис. 2 (б), сам является квадратом. $\square$

Третье доказательство — наиболее стандартное из всех трёх. Оно основывается на понятии подобия. Хотя это понятие, как и идею площади, зачастую изучают после теоремы Пифагора, оно тоже никак не зависит от последней (в некоторых школьных учебниках, в которых приводится это доказательство, вместо подобия используют

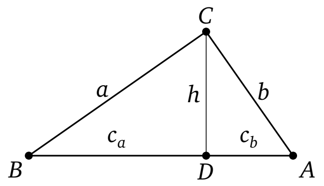

Рис. 3

эквивалентные принципы, например — теорему Фалеса и её следствия). Поэтому мы спокойно можем его использовать здесь.

Итак, опустим из вершины C прямого угла высоту на гипотенузу AB. Пусть D — основание этой высоты (мы не доказываем, что точка D лежит на отрезке AB, считая этот факт очевидным[1]). Введём стандартные обозначения: пусть катеты нашего прямоугольного треугольника равны a и b (см. рис. 3), а гипотенуза равна c. Отрезок AD (проекцию катета AC на гипотенузу) обозначим c_b, а отрезок BD — c_a. Обозначим проведённую высоту треугольника ABC буквой h. Рассмотрим образовавшиеся прямоугольные треугольники ACD и CBD. Оба они по трём углам подобны треугольнику ABC (и подобны между собой). Следовательно, мы можем записать соотношения подобия:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}, \quad \frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

или, в силу введённых обозначений,

$$\frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} = \frac{h}{a}, \quad \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c_a}{a}.$$

Отсюда получаем соотношения

$$c \cdot c_b = b^2, \quad c \cdot c_a = a^2.$$

Складывая два последних равенства, и учитывая очевидное соотношение $c = c_a + c_b$, получаем $c^2 = a^2 + b^2$. □

Заметим, кстати, что помимо полученных соотношений из подобия указанных треугольников можно получить много других равенств. Например, из равенства $\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$ получаем $h = \frac{ab}{c}$ (это уравнение, правда, можно было бы получить из сравнения различных формул для площади прямоугольного треугольника). Кроме того, так

[1] Нам пришлось бы это сделать, если бы мы пытались заниматься геометрией как аксиоматической теорией.

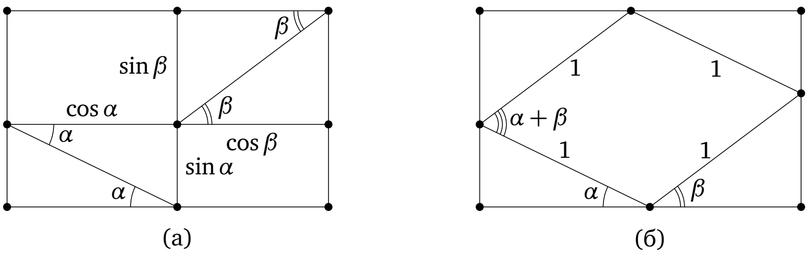

Рис. 4

как треугольники ACD и CBD подобны между собой, имеем $\frac{c_a}{h}=\frac{h}{c_b}$, откуда получается известное равенство $h^2=c_ac_b$.

Сами по себе приведённые доказательства ничем не лучше друг друга. Однако у каждого из них есть свои достоинства, которых нет у прочих. Например, способ, применённый в первом доказательстве, можно использовать для доказательства теоремы косинусов (см. в следующей лекции). Второе доказательство можно обобщить, чтобы получить формулу сложения для синуса. В самом деле, прямоугольник на рис. 4 (а) разбит на четыре прямоугольных треугольника с гипотенузой 1 и острыми углами α у одного и β у другого и два прямоугольника, стороны которых выражаются через тригонометрические функции углов α и β. На рис. 4 (б) тот же прямоугольник разбит на четыре таких же треугольника и ромб со стороной 1 и острым углом (как несложно проверить) $\alpha+\beta$. Из сравнения площадей получаем

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(напомним, что площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон на синус угла между ними).

Наконец, третий представленный способ доказательства ценен прежде всего формулами, связывающими между собой различные элементы прямоугольных треугольников, полученными при доказательстве. Эти формулы позволяют решить множество задач, в которых требуется найти тот или иной элемент прямоугольного треугольника. Правда, не всегда решение, основанное на этих формулах, самое простое и короткое. Проиллюстрируем сказанное следующим примером.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) проведена высота CD. Известно, что расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равно 1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Для решения нам потребуется следующее полезное вспомогательное утверждение: *радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле*

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c),$$

где a и b — катеты, а c — гипотенуза данного треугольника.

Доказательство. Чтобы доказать это равенство, достаточно взглянуть на рис. 5 и заметить, что четырёхугольник $IKCL$ — квадрат со стороной, равной радиусу вписанного круга, следовательно, $CK = CL = r$. Учитывая равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки (этот факт мы считаем известным), получаем $AL = AM = x$, $BK = BM = y$. Значит

$$AC + BC = x + r + y + r = x + y + 2r = AB + 2r,$$

откуда и получается требуемое равенство.

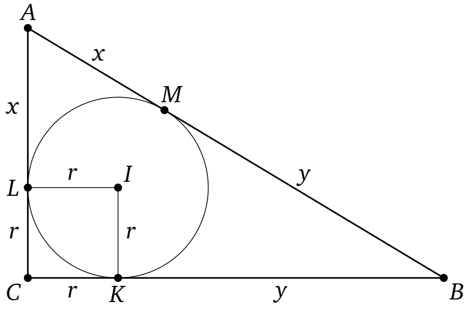

Рис. 5

Применим это наблюдение для решения задачи (обозначения см. на рис. 3 и 6). Для этого сначала опустим перпендикуляры из центров I_1 и I_2 окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, на гипотенузу большого треугольника и проведём через I_1 прямую, параллельную гипотенузе. В получившемся прямоугольном треугольнике катеты равны $r_1 + r_2$ и $r_2 - r_1$, следовательно, квадрат его гипотенузы равен $I_1I_2^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)$.

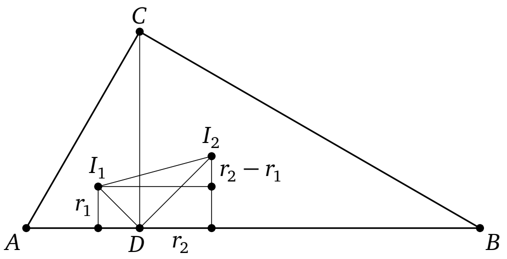

Рис. 6

С другой стороны, согласно условию задачи $I_1I_2 = 1$, следовательно, учитывая доказанную формулу, получаем

$$1 = I_1I_2^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) = 2\left(\frac{1}{4}(c_a + h - a)^2 + \frac{1}{4}(c_b + h - b)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(c_a^2 + h^2 + a^2 + 2c_ah - 2c_aa - 2ha +$$
$$+ c_b^2 + h^2 + b^2 + 2c_bh - 2c_bb - 2hb\big).$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$1 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+(c_a^2+c_b^2+2h^2)+2h(c_a+c_b)-2(c_aa+ha+hb+c_bb)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+(c_a^2+c_b^2+2c_ac_b)+2\frac{ab}{c}c-2\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{c}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+(c_a+c_b)^2+2ab-2a\frac{a^2+b^2}{c}-2b\frac{a^2+b^2}{c}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc) = \frac{1}{2}(a+b-c)^2 = 2r^2,$$

где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, т. е. искомый радиус равен $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Заметим, что в процессе решения у нас получилась неожиданная формула $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, связывающая радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD. На самом деле это утверждение — частный случай более общего факта, знание которого позволяет решить задачу гораздо короче. А именно, пусть на сторонах прямоугольного треугольника построены подобные фигуры (например, многоугольники, как на рис. 7). Выберем в этих подобных фигурах соответствующие друг другу при подобии отрезки l_a, l_b и l_c (l_a и l_b — отрезки в фигурах, построенных на катетах a и b соответ-

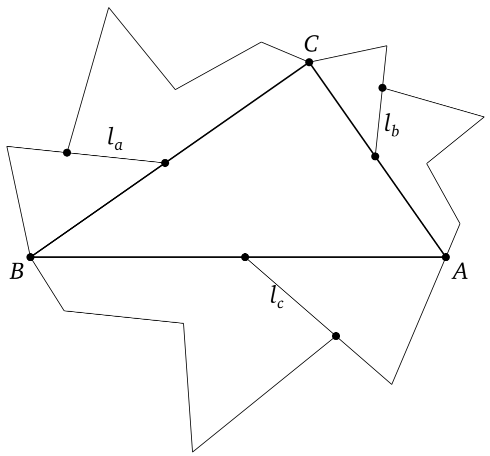

Рис. 7

ственно, а l_c — в фигуре, построенной на гипотенузе c). Тогда

$$l_a^2 + l_b^2 = l_c^2.$$

Это утверждение иногда называют *обобщённой теоремой Пифагора*. Доказывать его очень просто: пусть, например $k = \frac{l_a}{a}$. Тогда, так как построенные фигуры подобны, $k = \frac{l_b}{b} = \frac{l_c}{c}$. Поэтому

$$l_c^2 = k^2c^2 = k^2(a^2 + b^2) = (ka)^2 + (kb)^2 = l_a^2 + l_b^2.$$

Утверждение задачи теперь вытекает из следующего наблюдения: отрезки r_1, r_2 и r являются соответствующими отрезками в подобных друг другу прямоугольных треугольниках ACD, BCD и ABC. Правда, в отличие от рис. 7, треугольники эти построены не во внешнюю, а во внутреннюю сторону от исходного треугольника.

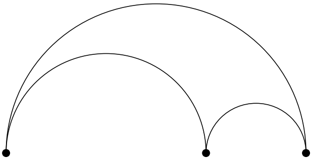

Рис. 8

Приведём ещё один пример утверждения, которое удобно доказывать с помощью теоремы Пифагора. *Арбелосом* Архимеда (по гречески «ἁρτυλος» — скорняжный нож) называется фигура, составленная из трёх полуокружностей, центры которых расположены на одном отрезке, причём две маленькие полуокружности касаются между собой (внешним образом) и касаются большей окружности (изнутри), см. рис. 8.

Пусть AB — данный отрезок (диаметр большей полуокружности), C — точка касания двух меньших полуокружностей. Проведём через C отрезок CD, перпендикулярный AB (D лежит на большей полуокружности). Этот отрезок разбивает арбелос на два криволинейных треугольника. *Теорема Архимеда об арбелосе* утверждает, что *радиусы окружностей, вписанных в эти два криволинейных треугольника, равны.*

Доказательство. Как следует из названия, эту задачу решил в своё время Архимед. Его рассуждение красиво, но достаточно сложно для понимания. В нём используются нетривиальные факты, связанные со взаимным расположением окружностей. Мы приведём его в одной из следующих лекций. Однако как это часто случается в геометрии, у этой задачи существует несколько решений. Одно из них доступно нам уже сейчас. Отметим, что по идее оно значительно проще использованного Архимедом, но древние греки, не имевшие в своём распоряжении удобного алгебраического аппарата, не смогли бы, наверное, его понять.

Пусть P, S и Q — соответственно центры полуокружностей, образующих арбелос (P и S — центры маленьких, а Q — центр большой полуокружности), а O — центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник ACD (см. рис. 9), T, U и V — точки касания этой окружности со сторонами криволинейного треугольника. Для того

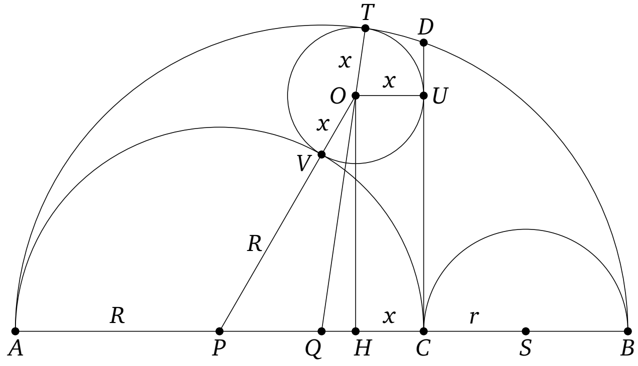

Рис. 9

чтобы доказать утверждение задачи, достаточно выразить радиус x вписанной окружности через радиусы полуокружностей, составляющих арбелос.

Итак, пусть радиус окружности с центром P равен R, а радиус окружности с центром S — равен r (тогда радиус большой полуокружности равен $R+r$). Соединим центр вписанной окружности с точками T, U и V, соединим точку V с центром P полуокружности радиуса R, а точку T — с центром Q большой полуокружности. Так как центры касающихся окружностей лежат на одной прямой с точками касания (ещё один факт, который мы считаем известным), получаем, что точки O, V и P лежат на одной прямой, так же как и точки O, T и Q. Наконец, опустим из O перпендикуляр OH на прямую AB (см. рис. 9).

Рассмотрим образовавшийся прямоугольный треугольник OPH. Его гипотенуза равна $OP = OV + VP = x + R$, а катет PH равен $PC - CH = R - x$. Следовательно, по теореме Пифагора

$$OH^2 = OP^2 - PH^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4Rx.$$

С другой стороны, отрезок OH является катетом в ещё одном прямоугольном треугольнике OQH. В этом треугольнике гипотенуза OQ равна $QT - TO = R + r - x$, а катет QH равен $AC - AQ - CH = 2R - (R+r) - x = R - r - x$. Поэтому получаем

$$OH^2 = OQ^2 - QH^2 = (R+r-x)^2 - (R-r-x)^2 = 4Rr - 4rx.$$

Приравнивая полученные выражения, получаем $x = \frac{Rr}{R+r}$. Так как это выражение, очевидно, не зависит от того, какой из двух радиусов R или r больший, мы заключаем, что радиус окружности, вписанной во второй криволинейный треугольник, равен тому же выражению (желающие могут проверить это самостоятельно). □

Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 5, а проекция второго катета на гипотенузу равна одной пятой гипотенузы. Найдите площадь треугольника.

2. Две окружности радиусов r и R касаются друг друга внешним образом и касаются одной и той же прямой (окружности лежат по одну сторону от этой прямой). Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный окружностями и их общей касательной.

3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 5, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу этого треугольника.

4. В угол величины α вписаны две окружности, касающиеся между собой. Найдите отношение радиуса большей из этих окружностей к радиусу окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный указанными окружностями и одной из сторон угла.

5. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются друг друга внутренним образом. Найдите радиус окружности, касающейся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через их центры.

6. Даны отрезки длины a, b и c. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины а) $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2}$, б) $\sqrt{ab}$, в) $\sqrt[4]{a^2bc}$, г) $\dfrac{ab}{c}$, д) $\dfrac{a^2+b^2}{c}$, е) $\sqrt[4]{a^4 \pm b^4 \pm c^4}$.

7. Центры окружностей радиусов r и R расположены на расстоянии a друг от друга. Найдите длину стороны ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой.

8. Центры трёх окружностей радиуса R расположены в середине и в концах отрезка длины a. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных (разберите различные варианты расположения окружностей).

9. В единичную окружность вписан квадрат. Найдите сторону квадрата, вписанного в один из образовавшихся сегментов (две его вершины должны лежать на соответствующей дуге, а две другие — на стороне большого квадрата.

10. В параллелограмме $ABCD$ расположены три попарно касающихся окружности. Одна из них при этом касается сторон AB и AD параллелограмма, другая — сторон AD и DC, а третья — сторон AB и DC. Найдите радиус третьей окружности, если расстояние между точками касания первых двух окружностей со стороной AD равно a.

Лекция 2

Теорема Пифагора и теорема косинусов: основы «вычислительных» методов

Несмотря на всю свою простоту и элементарность, теорема Пифагора является мощным средством для решения задач по элементарной геометрии. Некоторые примеры её применения на практике мы рассмотрели на прошлой лекции. Прежде чем мы перейдём к изучению других важных теорем элементарной геометрии, давайте приведём ещё несколько примеров такого рода.

Для начала докажем такое утверждение.

Утверждение 1. *Геометрическим местом точек M на плоскости, для которых выполняется равенство*

$$AM^2 - MB^2 = \kappa, \tag{1}$$

где A и B — две фиксированные различные точки на плоскости, а κ — некоторая константа, является прямая, перпендикулярная прямой AB.

Прежде чем доказывать это утверждение, заметим, что, по существу, оно является критерием перпендикулярности двух отрезков. В самом деле, если отрезки AB и CD перпендикулярны, то точки C и D принадлежат одному геометрическому месту, описанному в утверждении, т. е. для них выполнено равенство $AC^2 - CB^2 = \kappa = AD^2 - DB^2$. Наоборот, если $AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2$, то значения параметра κ для C и D совпадают, и, значит, точки C и D принадлежат одной и той же прямой, перпендикулярной AB.

Доказательство. Пусть точка M лежит в ГМТ, определяемом уравнением (1) (для некоторого κ). Опустим тогда перпендикуляр MH из M на AB (см. рис. 1). Тогда по теореме Пифагора (для треугольников AMH и BMH) получим

$$AH^2 - HB^2 = (AM^2 - MH^2) - (BM^2 - MH^2) = AM^2 - BM^2 = \kappa.$$

Если расстояние от A до B равно d, а расстояние от B до H равно x, то

$$\kappa = (d + x)^2 - x^2,$$

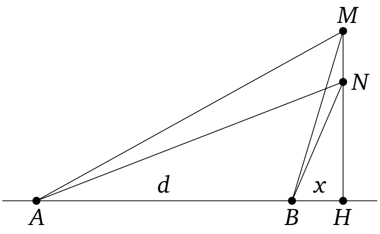

Рис. 1

следовательно,

$$x = \frac{\varkappa - d^2}{2d}.$$

При этом x может быть и отрицательным, это будет означать, что точка H лежит по другую сторону от точки B. Таким образом, положение точки H — основания перпендикуляра, опущенного из M на AB, однозначно задаётся условиями задачи (расстоянием от A до B и величиной $\varkappa$). Поэтому все точки, удовлетворяющие уравнению (1), лежат на одном перпендикуляре к AB.

Наоборот, если точки M и N лежат на одном перпендикуляре к AB с основанием H, то

$$AM^2 - MB^2 = (AH^2 + HM^2) - (HB^2 + HM^2) = AH^2 - HB^2 =$$
$$= (AH^2 + HN^2) - (HB^2 + HN^2) = AN^2 - NB^2. \quad \square$$

Хотя это утверждение само по себе достаточно простое, оно позволяет доказывать многочисленные важные и интересные теоремы. Например, с её помощью можно доказать *теорему о высотах*.

Теорема 1. *В любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.*

Для начала дадим стандартное *доказательство* этого факта, которое можно найти во многих учебниках. Оно восходит ещё к «Началам» Евклида. А именно, пусть ABC — наш треугольник, AK, BL и CM — его высоты (см. рис. 2). Нам надо доказать, что AK, BL и CM пересекаются в одной точке — *ортоцентре* треугольника ABC. Для этого мы проведём дополнительное построение: проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам. При пересечении этих прямых образуется треугольник $A_1B_1C_1$. Заметим, что вершины исходного треугольника являются серединами сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (например,

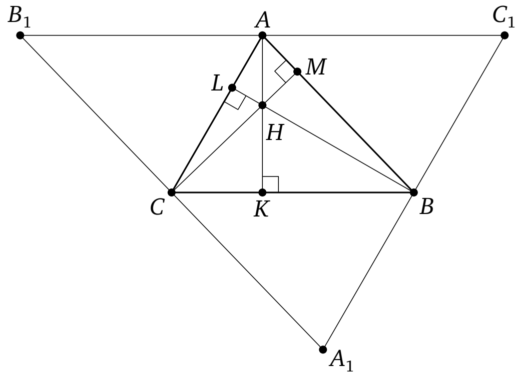

Рис. 2

заметьте, что четырёхугольники $ABCB_1$ и $ACBC_1$ — параллелограммы, а значит, $C_1A = BC = AB_1$). Но из этого следует, что отрезки AK, BL и CM, будучи перпендикулярными сторонам треугольника ABC, а следовательно, — и сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, являются серединными перпендикулярами в последнем треугольнике. Следовательно, согласно хорошо известному свойству серединных перпендикуляров они пересекаются в одной точке H — центре окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$[1]. □

Приведённое доказательство при всей кажущейся элементарности идейно весьма непросто, как это часто бывает с доказательствами, основанными на нестандартных дополнительных построениях. Как нередко случается в подобных случаях, сделанные дополнительные построения позволяют получить нетривиальные геометрические следствия/наблюдения. Например, заметим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом 2. С другой стороны, мы видели, что точка пересечения высот треугольника ABC служит центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, причём вершины A, B и C первого треугольника являются серединами сторон B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно второго треугольника. Учитывая, что в подобных треугольниках все соответствующие отрезки находятся в одинаковом отношении, получаем следующее утверждение.

[1] Начиная с этого места мы не будем каждый раз уточнять, что мы считаем известными теоремы, которые можно найти в любом школьном учебнике.

Утверждение 2. *В любом треугольнике отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения высот этого треугольника, в два раза длиннее, чем отрезок серединного перпендикуляра от центра описанной окружности этого треугольника до стороны, противоположной указанной вершине.*

Приведём теперь **второе доказательство** теоремы о высотах, основанное на теореме Пифагора. Для этого воспользуемся критерием из утверждения 1, чтобы проверить перпендикулярность отрезков CH и AB (см. рис. 3, H — точка пересечения высот AA_1 и BB_1). Точнее говоря, мы покажем, что точки C и H лежат на одном перпендикуляре к отрезку AB. Согласно утверждению 1 для этого достаточно выполнения равенства

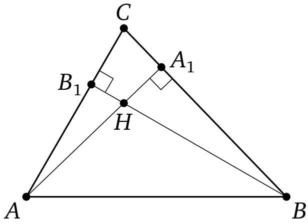

Рис. 3

$$AH^2 - HB^2 = AC^2 - CB^2.$$

Так как H лежит на AA_1 и BB_1, причём $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, получаем

$$AH^2 - HB^2 = (AH^2 - HC^2) + (CH^2 - HB^2) =$$
$$= (AB^2 - BC^2) + (CA^2 - AB^2) = AC^2 - CB^2. \qquad \square$$

Использованное сейчас нами рассуждение (доказательство того, что некоторые два отрезка перпендикулярны) можно сформулировать несколько по-иному в чуть более общем виде — в виде так называемого *критерия Карно*.

Теорема 2. *Пусть на плоскости даны шесть точек*: A, B, C *и* A_1, B_1, C_1. *Для того чтобы перпендикуляры, опущенные из точек* A_1, B_1 *и* C_1 *на прямые* BC, AC *и* AB *соответственно, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение*:

$$AC_1^2 - C_1B^2 + BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 = 0. \qquad (2)$$

Прежде чем доказать это утверждение, сделаем два замечания. Во-первых, теорему о высотах можно доказать при помощи критерия Карно, положив в равенстве (2) $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$ (здесь A, B и C — вершины данного треугольника). Во-вторых, отметим простое, но красивое следствие из критерия теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* A, B, C, A_1, B_1 *и* C_1 — *шесть точек на плоскости. Тогда перпендикуляры, опущенные из* A_1 *на* BC, *из* B_1 *на* AC

и из C_1 на AB, пересекаются в одной точке, если и только если в одной точке пересекаются перпендикуляры, опущенные из A на B_1C_1, из B на A_1C_1 и из C на A_1B_1.

Доказательство этого следствия сводится к переписыванию равенства (2) в более симметричном виде:

$$AC_1^2+BA_1^2+CB_1^2=A_1C^2+B_1A^2+C_1B^2.$$

Иначе говоря, сумма квадратов длин пунктирных отрезков на рис. 4 равна сумме квадратов длин «точечных» отрезков на том же рисунке.

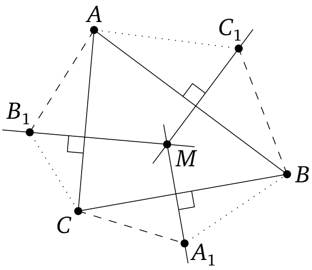

Рис. 4

Доказательство критерия Карно в целом повторяет рассуждения, использованные при доказательстве теоремы о высотах. А именно, проверим сначала необходимость поставленного условия. Пусть указанные перпендикуляры пересекаются в одной точке (точке M на рис. 4). Тогда в силу утверждения 1 справедливы равенства $AC_1^2-C_1B^2=AM^2-MB^2$, $BA_1^2-A_1C^2=BM^2-MC^2$ и $CB_1^2-B_1A^2=$ $=CM^2-MA^2$. Складывая эти равенства, получаем равенство (2).

Наоборот, пусть выполнено равенство (2). Пусть M — точка пересечения перпендикуляров, опущенных на AB и BC из C_1 и A_1 соответственно. Тогда для точки M выполнены равенства $AC_1^2-C_1B^2=$ $=AM^2-MB^2$ и $BA_1^2-A_1C^2=BM^2-MC^2$. Вычитая эти равенства из равенства (2), получаем $CB_1^2-B_1A^2=CM^2-MA^2$, т. е. в силу утверждения 1 точки M и B_1 лежат на одном перпендикуляре к AC. □

В качестве примера использования теоремы Карно решим ещё одну задачу.

Задача 2. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что их общие хорды (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Решение. Воспользуемся следующим простым свойством: *общая хорда двух окружностей всегда перпендикулярна прямой, соединяющей центры этих окружностей.* Предлагаем читателю самому убедиться в справедливости этого утверждения. Тогда (см. рис. 5) применим критерий Карно к нашей ситуации, положив $A=O_1$, $B=O_2$, $C=O_3$ (O_1, O_2, O_3 — центры данных окружностей), $A_1=K$,

$B_1 = L$, $C_1 = M$ — точки пересечения второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностей соответственно.

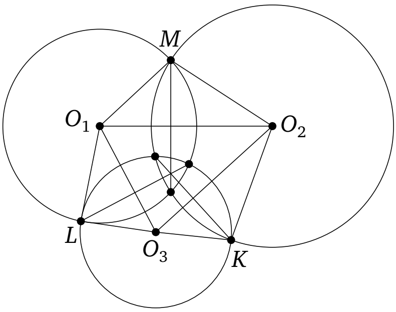

Рис. 5

Тогда, поскольку $O_1L = O_1M$, $O_2M = O_2K$, $O_3K = O_3M$ как радиусы соответствующих окружностей, получаем

$$O_1M^2 - MO_2^2 + O_2K^2 - KO_3^2 + O_3L^2 - LO_1^2 = 0,$$

т. е. перпендикуляры, опущенные из точек K, L и M на прямые O_2O_3, O_1O_3 и O_1O_2 соответственно, пересекаются в одной точке. □

Как мы убедились, теорема Пифагора при кажущейся простоте может оказаться чрезвычайно полезной при решении элементарно-геометрических задач, особенно задач, связанных с вычислениями или с составлением уравнений. Ещё одна важнейшая для приложений и составления уравнений геометрическая теорема — это теорема косинусов.

Хотя, конечно, эта теорема всем вам хорошо известна из школьного курса, мы начнём наше обсуждение с того, что сформулируем и докажем её.

Теорема 3. *Для любого треугольника ABC справедлива формула*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B.$$

Доказательство. Мы рассмотрим только случай, когда углы $\angle B$ и $\angle C$ треугольника ABC острые (случай тупого угла мы предоставляем читателю). Проведём высоту AD (см. рис. 6). По теореме Пифагора для треугольника ABD имеем

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = AB^2 - AB^2 \cos^2 \angle B.$$

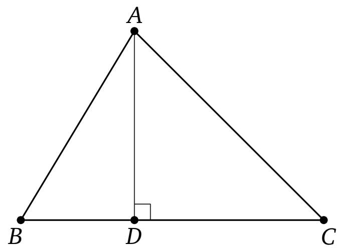

Рис. 6

С другой стороны, из треугольника ACD получаем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = AB^2 - AB^2\cos^2\angle B + (BC - AB\cos\angle B)^2 = \\ = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle B. \qquad \square$$

Эта теорема очень часто позволяет свести геометрическую задачу к решению алгебраического уравнения, если повезёт — то квадратного. Не следует, однако, злоупотреблять этой идеей: например, если треугольник равнобедренный, указанный метод часто совершенно не оправдывает себя. Тем более не следует так действовать, если треугольник (к которому применяется теорема косинусов) равносторонний или прямоугольный.

Как и теорема Пифагора, теорема косинусов имеет «графическое» доказательство. Приведём здесь его[1]. Для простоты мы ограничимся разбором случая, когда треугольник ABC тупоугольный, причём угол C, который фигурирует в теореме, — тупой. Советуем читателю самостоятельно разобраться с остальными вариантами — остроугольным треугольником и с острым углом тупоугольного треугольника. Итак, рассмотрим фигуру на рис. 7. С одной стороны, она составлена из квадрата $ABB''A''$, сторона которого равна стороне $AB = c$ данного треугольника ABC, и двух треугольников, $BB'B''$ и $A''B''C''$, равных ABC. С другой стороны, мы разбили её на два других квадрата $BB'C'C$ и $A'C'C''A''$ (стороны которых равны соответственно сторонам $BC = a$ и $AC = b$ треугольника ABC), два равных параллелограмма $ACC'A'$ и $B'B''C''C'$ и два треугольника — сам треугольник ABC и равный ему треугольник $AA'A''$. Следовательно, площадь квадрата $ABB''A''$, равная c^2, превосходит сумму

[1] Автор благодарит В. В. Вавилова, познакомившего его с этим доказательством.

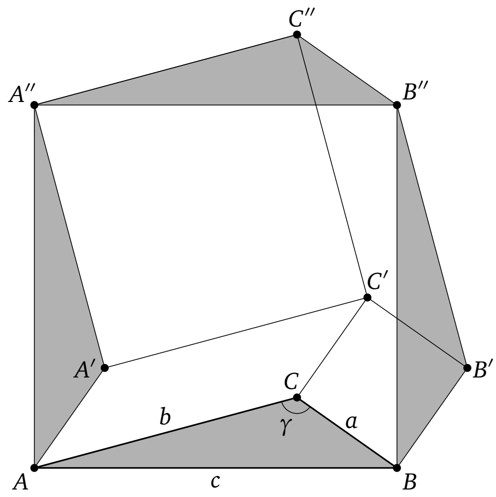

Рис. 7

площадей квадратов $BB'C'C$ и $A'C'C''A''$ (a^2+b^2) на удвоенную площадь параллелограмма $ACC'A'$. Но стороны этого параллелограмма равны сторонам треугольника — $AC=b$, $AA'=a$, а угол между ними равен $360^\circ-90^\circ-\gamma=270^\circ-\gamma$. Поэтому площадь $ACC'A'$ равна $ab\sin(270^\circ-\gamma)=-ab\cos\gamma$ (заметим, что угол γ у нас тупой, поэтому $-\cos\gamma>0$). В итоге получаем требуемое равенство

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

В качестве примера использования этой теоремы докажем несколько известных формул элементарной геометрии. Прежде всего получим формулу

$$2a^2+2b^2=d_1^2+d_2^2,$$

связывающую длины сторон a, b и диагоналей d_1, d_2 параллелограмма. На словах это свойство параллелограмма может быть выражено так:

сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Для доказательства достаточно сложить равенства $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ и $d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$ — теоремы косинусов для треугольников DAB и ABC (см. рис. 8) — и заметить, что $\alpha+\beta=180°$, а следовательно, $\cos\alpha+\cos\beta=0$.

Эта формула часто оказывается полезной при решении задач. В частности, из неё вытекает следующая формула для длины медианы треугольника:

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$$

где a, b и c — стороны треугольника, а m_c — длина медианы, проведённой из вершины C. В самом деле, достаточно достроить треугольник до параллелограмма, так, чтобы сторона c соответствовала диагонали d_1, а $d_2=2m_c$, см. рис. 8.

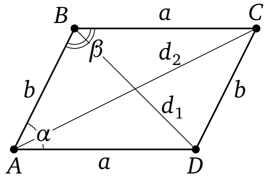

Рис. 8

Наконец, докажем теорему, обращающую свойство параллелограмма.

Теорема 4. *Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если и только если сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов его сторон, т. е. если выполнено равенство*

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

На самом деле мы докажем следующую формулу, называющуюся формулой Эйлера для расстояния между серединами диагоналей четырёхугольника:

$$PQ^2=\frac{1}{4}(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-AC^2-BD^2),$$

где P, Q — середины диагоналей BD и AC четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 9). Эта формула впервые появилась в работе Эйлера «Variae demonstrationes geometriae» («Различные геометрические доказательства») в журнале «Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae» (1750. №1). Из неё сразу следует утверждение теоремы. Ведь равенство нулю расстояния PQ означает, что диагонали четырёхугольника пересекаются в своих серединах. А это не что иное, как признак параллелограмма.

Итак, пусть $ABCD$ — наш четырёхугольник. Пусть точки K, L, M и N — середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Заметим, что отрезки KL и MN параллельны диагонали AC и равны её половине, так как являются средними линиями треугольников ABC и CDA соответственно. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ —

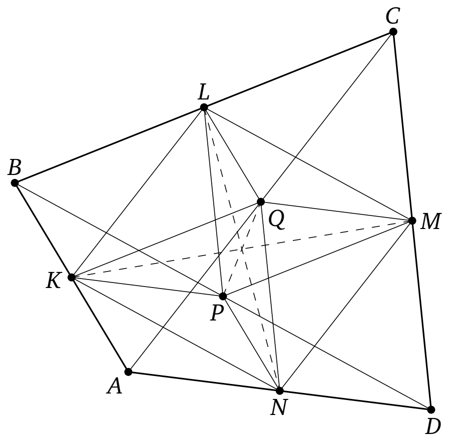

Рис. 9

параллелограмм (его иногда называют *параллелограммом Вариньона*). Применяя к нему свойство квадратов сторон параллелограмма, получаем равенство

$$KM^2 + LN^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2.$$

Мы учли что $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ (доказано выше) и $LM = NK = \frac{1}{2}BD$ (как средние линии в треугольниках BCD и DAB). Аналогичным образом, из свойств средних линий треугольника получим, что четырёхугольники $KQMP$ и $LQNP$ тоже параллелограммы, причём

$$KQ = MP = \frac{1}{2}BC, \quad QM = PK = \frac{1}{2}AD$$

и

$$LQ = NP = \frac{1}{2}AB, \quad QN = PL = \frac{1}{2}CD.$$

Таким образом, мы получаем ещё два равенства:

$$KM^2 + PQ^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}DA^2,$$

$$LN^2 + PQ^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}CD^2.$$

Складывая эти два выражения и вычитая из их суммы первое равенство, получаем требуемую формулу[1].

[1] Заметим, кстати, что из нашего рассуждения следует, что отрезки KM, LN и PQ пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках их касания с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке.

2. Дан угол AOB. На его стороне OA выберем произвольную точку M, а на стороне OB — точку N. Проведём окружности с диаметрами AN и BM. Докажите, что общая хорда этих окружностей (или её продолжение) проходит через точку пересечения высот треугольника AOB.

3. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины
$$\sqrt{a^2+b^2\pm ab\sqrt{2}},$$
если даны отрезки длины a и b. Постройте также отрезок $\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

4. Решите уравнение или систему уравнений:

(а) $\sqrt{a^2+x^2-2ax\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2-2xy\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+b^2-2yb\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}$,

(б) $\begin{cases} x=\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}, \\ y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}, \\ x=\sqrt{y^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2}; \end{cases}$ (в) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ y^2+yz+z^2=b^2, \\ z^2+zx+x^2=a^2+b^2. \end{cases}$

Здесь x, y, z — неизвестные, а a, b, c — параметры.

5. В треугольнике ABC угол C прямой и известны катеты $AC=3$, $BC=6$. Рассмотрим три окружности с центрами в вершинах этого треугольника и радиусами 1 (с центром в C), 2 (с центром в A) и 3 (с центром в B). Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех данных окружностей а) внешним образом; б) внутренним образом; в) любым возможным способом (т. е. разных окружностей — по-разному).

6. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=12$, $BC=13$, $AC=15$. На стороне AC взята такая точка K, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABK и CBK, равны между собой. Найдите отношение $AK:KC$.

7. Докажите следующую *первую теорему косинусов для четырёхугольника*: квадрат длины стороны четырёхугольника равен сумме квадратов длин трёх других сторон четырёхугольника, уменьшенной на сумму попарных произведений этих сторон, умноженных на косинус угла между ними (или их продолжениями). Иными словами, если a, b, c и d — стороны четырёхугольника $ABCD$, ($AB=a$ и т. д.), причём $\angle ABC=\alpha$, $\angle BCD=\beta$, а угол между продолжениями сторон AB и CD равен γ, то верно равенство
$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha-2bc\cos\beta-2ac\cos\gamma.$$

8. Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что $AK=1$, $KC=\sqrt{3}$, а углы AKC, ABK и KBC равны 120°, 15° и 15° соответственно. Найдите BK.

9. В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключённых внутри треугольника ABC.

10. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

Лекция 3

Вычислительные методы: теоремы косинусов и синусов

Приведём ещё несколько примеров использования теоремы косинусов на практике. Рассмотрим следующую ситуацию: на стороне AC треугольника ABC взята точка K. Попробуем выразить длину отрезка BK через длины сторон треугольника ABC и длины отрезков AK и KC.

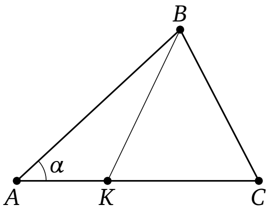

Рис. 1

Пусть угол $\angle A$ треугольника ABC равен α. По теореме косинусов имеем равенство

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha,$$

откуда получаем

$$AB\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC}.$$

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику ABK, получим

$$\begin{aligned} BK^2 &= AB^2 + AK^2 - 2AK \cdot AB\cos\alpha = \\ &= AB^2 + AK^2 - AK\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AC} = \\ &= AB^2\left(1 - \frac{AK}{AC}\right) + BC^2\frac{AK}{AC} + AK(AK - AC). \end{aligned}$$

Так как $AC = AK + CK$, получаем следующую формулу, которую называют *формулой Стюарта*:

$$BK^2 = AB^2\frac{CK}{AC} + BC^2\frac{AK}{AC} - AK \cdot CK.$$

Многие известные формулы являются частными случаями формулы Стюарта. Например, если $AK = KC = \frac{1}{2}AC$ (т. е. если BK — медиана), то $\frac{AK}{AC} = \frac{CK}{AC} = \frac{1}{2}$, и мы получаем знакомую нам формулу длины медианы:

$$BK^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2).$$

С другой стороны, если BK — биссектриса, то формула Стюарта сводится к другой хорошо известной формуле:

$$BK^2 = AB \cdot BC - AK \cdot KC.$$

Чтобы доказать этот факт, нам потребуется следующее хорошо известное свойство биссектрисы:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}, \qquad (1)$$

иными словами, *биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению сторон, между которыми она проходит.* Если воспользоваться этим утверждением, мы получим, что отношения $\frac{CK}{AC}$ и $\frac{AK}{AC}$ равны соответственно $\frac{BC}{AB+BC}$ и $\frac{AB}{AB+BC}$, откуда находим

$$BK^2 = \frac{AB^2 \cdot BC}{AB+BC} + \frac{AB \cdot BC^2}{AB+BC} - AK \cdot KC =$$
$$= AB \cdot BC\left(\frac{AB}{AB+BC} + \frac{BC}{AB+BC}\right) - AK \cdot KC = AB \cdot BC - AK \cdot KC.$$

Нам осталось лишь доказать свойство биссектрис. Это утверждение, хотя и не сложное, чрезвычайно полезно для приложений. Не удивительно, что существует огромное множество различных доказательств этого факта, основанных на самых разных геометрических идеях и теоремах. Каждый из этих подходов может оказаться полезным при решении той или иной задачи, поэтому мы и приведём несколько доказательств формулы (1).

Доказательство 1. Пусть BK — биссектриса угла B треугольника ABC. Проведём через точку C прямую, параллельную BK, пусть L — точка пересечения этой прямой с продолжением стороны AB треугольника (см. рис. 2). Тогда по свойству внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых $\angle BCL = \angle KBC$. Аналогично по свойству параллельных прямых $\angle ABK = \angle BLC$. Так как BK — биссектриса, $\angle ABK = \angle KBC$, и, значит, треугольник BLC равнобедренный, $BL = BC$. Но по теореме Фалеса (точнее, по *обобщенной* теореме Фалеса) $AB : BL = AK : KC$, откуда, заменяя BL на BC, получаем формулу (1). □

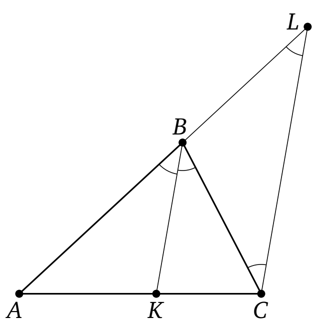

Рис. 2

Для второго доказательства нам потребуется опять вспомнить о свойствах площадей треугольников на плоскости. Правда при этом нам не нужно будет делать никаких дополнительных построений.

Доказательство 2. Рассмотрим треугольники ABK и CBK. У них общая вершина B, а противоположные стороны AK и KC лежат на одной прямой. Следовательно, высоты, опущенные в этих треугольниках из вершины B, совпадают, а поэтому отношение их площадей равно отношению длин отрезков AK и KC. С другой стороны, если воспользоваться формулой

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

(a, b — стороны треугольника, γ — угол между ними), получим

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{ABK}}{S_{CBK}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BK \sin\frac{\angle ABC}{2}}{\frac{1}{2}CB \cdot BK \sin\frac{\angle ABC}{2}} = \frac{AB}{BC}. \qquad \square$$

Оба приведённых доказательства основаны на свойствах евклидовой плоскости (в первом случае — на свойствах параллельных прямых, во втором — на свойствах площадей евклидовых треугольников), а значит, их нелегко будет обобщить на сферическую геометрию или на геометрию Лобачевского. Однако свойство биссектрисы треугольника с небольшими поправками сохраняется и в этих случаях. Но для того чтобы убедиться в этом, нам потребуется доказать его с помощью утверждения, справедливого в некотором смысле во всех трёх классических геометриях, а именно — с помощью *теоремы синусов*. Напомним её.

Теорема 1. *В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла не зависит от выбора стороны и равно диаметру описанной окружности. В виде формулы это же утверждение можно записать так*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника[1].

[1] Оговоримся, что равенство диаметра описанной окружности отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла, в отличие от равенства указанных величин между собой не имеет очевидного неевклидового аналога. В неевклидовом мире связь между сторонами треугольника и радиусом описанной около него окружности более сложная. Видимо, поэтому это равенство иногда называют обобщённой теоремой синусов.

Доказательство. Для доказательства проведём через вершину B треугольника ABC диаметр BD описанной окружности (см. рис. 3). Так как вписанные в одну и ту же окружность углы, опирающиеся на одну дугу, равны, мы получаем, что $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$. С другой стороны, так как углы, опирающиеся на диаметр окружности, прямые, $\angle BCD = 90^\circ$, откуда по определению синуса $\sin\alpha = \sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$. □

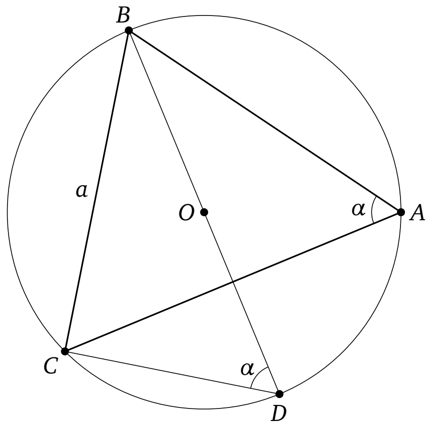

Рис. 3

Сделаем два простых замечания. Во-первых, приведённое доказательство не является полным, ведь при рассуждении мы использовали то, что $\angle A$ острый. В случае тупого угла A, угол BDC будет дополнять α до 180°. При этом, правда, синус его не будет отличаться от синуса α. Во-вторых, если бы мы хотели доказать только первую часть равенства, т. е.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

мы бы могли обойтись более простыми средствами.

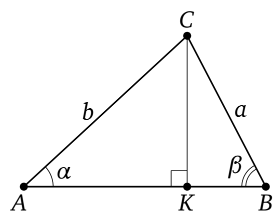

Рис. 4

Например, можно было бы опустить высоту CK из вершины C (см. рис. 4). Тогда из прямоугольных треугольников ACK и BCK получаем

$$CK = AC\sin\angle CAK,$$

а с другой стороны, $CK = BC \sin \angle CBK$, откуда следует, что $a \sin \beta = b \sin \alpha$, или

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Достоинство этого наблюдения — в его независимости от свойств евклидовой плоскости, а точнее — в возможности его обобщения на неевклидовы геометрии (например, на геометрию на сфере), в отличие от предыдущего доказательства, в котором использовались свойства вписанных углов, не выполняющиеся в неевклидовых геометриях. С другой стороны, связь углов и сторон треугольника с диаметром описанной окружности часто оказывается чрезвычайно полезной при решении задач. Ниже мы приведём примеры подобного использования теоремы синусов. А пока что докажем с её помощью (точнее, с помощью её «абсолютной» части) свойство биссектрисы. Рассмотрим треугольники ABK и CBK (см. рис. 5). По теореме синусов имеем

$$\frac{AK}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{AB}{\sin \varphi}, \quad \text{и} \quad \frac{CK}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{BC}{\sin(\pi - \varphi)}.$$

Отсюда находим

$$AK = \frac{AB \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \varphi}, \quad KC = \frac{BC \sin \frac{\beta}{2}}{\sin(\pi - \varphi)}.$$

А так как $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$, получаем

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \varphi} : \frac{BC \sin \frac{\beta}{2}}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{AB}{BC}.$$

Существует много других примеров использования теоремы синусов. Например, с помощью неё легко доказать известную формулу для площади S треугольника: $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны треугольника, а R — радиус описанной окружности. Достаточно воспользоваться равенством $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$, чтобы выразить $\sin \gamma$ через сторону c и радиус описанной окружности ($\sin \gamma = \frac{c}{2R}$) и подставить полученное равенство в выражение $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Другим важным следствием теоремы синусов является такое замечательное свойство хорд окружности: *отношение длин хорд одной и той же окружности равно отношению синусов вписанных углов*

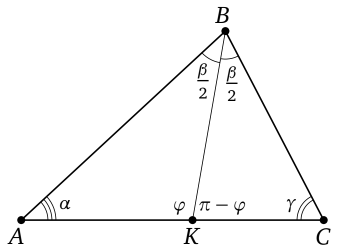

Рис. 5

этой окружности, опирающихся на эту хорду. Доказательство этого факта сводится к следующему наблюдению: из теоремы синусов следует, что отношение длины любой хорды к синусу противолежащего ей вписанного угла равно диаметру данной окружности. Из сделанного замечания и из свойств пропорций (напомним, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$) следует, что в выражении $\frac{a+b}{c+d}$ (и в более сложных выражениях такого рода, где a, b, c и d — длины хорд одной окружности) можно a, b, c, d заменить на синусы противоположных углов, и при этом результат не изменится. Проиллюстрируем, как это наблюдение работает, на примере задачи.

Задача 3. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($BC \parallel AD$), M — точка на дуге BC окружности, описанной около $ABCD$. Пусть $AB=CD=a$, $BC=b$, $AC=BD=c$. Найдите отношение $\frac{BM+MC}{AM+MD}$.

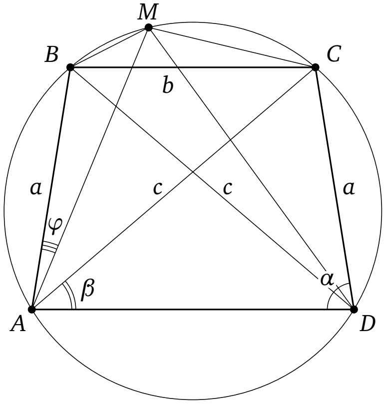

Рис. 6

Решение. Введём вспомогательные обозначения: $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ и $\angle BAM = \varphi$ (см. рис. 6). Тогда $\angle MAC = \alpha - \beta - \varphi$, $\angle MAD = \alpha - \varphi$ и $\angle MDA = \angle CDA - \angle CDM = \alpha - \angle MAC = \beta + \varphi$ (мы воспользовались равенством углов при основании равнобедренной трапеции и равенством вписанных углов, опирающихся на одну дугу). Поэтому

$$\frac{BM+MC}{AM+MD} = \frac{\sin\angle BAM + \sin\angle MAC}{\sin\angle MDA + \sin\angle MAD} = \frac{\sin\varphi + \sin(\alpha-\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)+\sin(\beta+\varphi)} =$$
$$= \frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+2\varphi-\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+2\varphi-\alpha}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} =$$
$$= \frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{b}{c+a}.$$

В этих выкладках мы активно использовали свойства тригонометрических функций, в частности формулу

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и обратную к ней[1]. □

Таким же образом можно доказать знаменитую *теорему Птолемея*.

Теорема 2. *Если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то выполняется равенство*

$$AB\cdot CD + BC\cdot DA = AC\cdot BD.$$

Доказательство. Пусть R — радиус круга, в который можно вписать четырёхугольник $ABCD$. Введём углы α, β, γ и δ, как показано на рис. 7 (при этом мы пользовались свойством вписанных углов). Заметим, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$, и кроме того, по теореме синусов $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin\beta$, $CD = 2R\sin\alpha$, $DA = 2R\sin\delta$ и $AC = 2R\sin(\alpha+\delta)$, $BD = 2R\sin(\alpha+\beta)$. Поэтому

$$AB\cdot CD + BC\cdot DA = 4R^2(\sin\gamma\sin\alpha + \sin\beta\sin\delta),$$

[1] Тригонометрию обычно проходят в конце 10-го класса, поэтому эти формулы могут быть незнакомы некоторым десятиклассникам. Впрочем, они легко следуют из доказанной нами формулы сложения для синусов (см. лекцию 1).

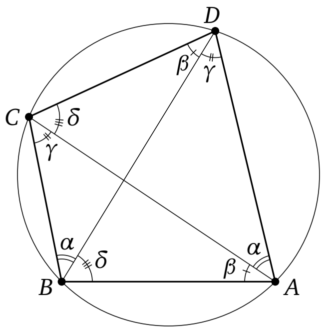

Рис. 7

и аналогично

$$AC\cdot BD = 4R^2 \sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha+\beta).$$

Но так как $\alpha+\gamma=180^\circ-\beta-\delta$, получаем

$$\begin{aligned}
&\sin\gamma\sin\alpha+\sin\beta\sin\delta =\\
&\quad=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)) =\\
&\quad=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\delta)) = \cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\\
&\quad=\cos(\alpha+\beta-90^\circ)\cos(90^\circ-\alpha-\delta) = \sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha+\beta). \quad \square
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, мы свели геометрические сложности к тригонометрическим преобразованиям. Следующая задача — пример несколько иного рода. Хотя и тут мы пользуемся теоремами синусов и косинусов, тем не менее, их использование основано на вполне геометрических соображениях, и каждый шаг решения имеет вполне отчётливый геометрический смысл.

Задача 4. Диагонали трапеции пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон — по углом 45°. Найдите высоту трапеции, если основания равны a и b $(a>b)$.

Решение. Прежде чем приступать к непосредственным вычислениям, попробуем понять, каков геометрический смысл задачи. Для этого попробуем построить трапецию, удовлетворяющую условиям. Точнее, попробуем определить, как будут расположены вершины подобной трапеции.

Итак, пусть трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$) удовлетворяет условиям. Сделаем дополнительные построения: проведём через точку C прямые, параллельные диагонали BD и боковой стороне AB. Пусть E и F — точки пересечения проведённых прямых с прямой AD (см. рис. 8). Так как диагонали трапеции перпендикулярны, $\angle ACE = 90°$, следовательно, точка C лежит на окружности с диаметром AE. Аналогично угол DCF равен углу, под которым пересекаются продолжения боковых сторон трапеции, значит, он равен $45°$, и, следовательно, точка B лежит на дуге окружности, проходящей через точки F и D таким образом, что все углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на отрезок DF, равны $45°$.

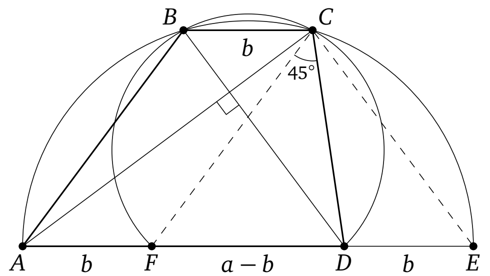

Рис. 8

С другой стороны, четырёхугольник $DBCE$ — параллелограмм, и, значит, $DE = BC = b$, и аналогично, из параллелограмма $FCBA$ находим, что $AF = BC = b$. Следовательно, отрезки AE и DF равны соответственно $a + b$ и $a - b$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению расстояния от прямой AD до точки пересечения двух окружностей, расположенных, как показано на рис. 8 (т. е. полуокружности с диаметром AE и дуги окружности, из которой отрезок FD виден под углом $45°$).

Чтобы найти это расстояние, мы воспользуемся изученными нами теоремами синусов и косинусов: посмотрим на рис. 9. На нём точки P и Q — центры первой и второй из рассмотренных окружностей соответственно. Тогда отрезок PC равен радиусу окружности, описанной около прямоугольного треугольника ACE, а следовательно, он равен половине гипотенузы $AE = a + b$. С другой стороны, по теореме синусов отрезок QC равен $\frac{FD}{2\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$. Наконец, отрезок PQ перпендикулярен AD и равен половине FD (ведь проек-

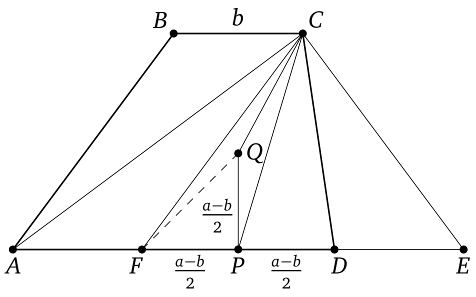

Рис. 9

цией точки Q на AD служит середина отрезка FD, которая совпадает с серединой отрезка AE, т. е. с P, а угол FQP равен 45°). Значит, $PQ = \frac{1}{2}(a-b)$. Чтобы теперь найти высоту h трапеции $ABCD$, достаточно заметить, что она равна проекции отрезка PC на прямую PQ (ведь $PQ \perp AD$), т. е. она равна $PC\cos\angle QPC$. Теперь по теореме косинусов, получаем

$$h = PC\cos\angle QPC = \frac{PQ^2+PC^2-QC^2}{2PQ} =$$
$$= \frac{\frac{1}{4}(a-b)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}{a-b} = \frac{ab}{a-b}. \qquad \square$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя теорему синусов, докажите *теорему Чевы* и *теорему Чевы в синусах*: прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (или параллельны), если и только если выполнено одно (любое) из следующих равенств:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

или

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA} = 1$$

(здесь A, B и C — неколлинеарные точки, а A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки на прямых BC, AC и AB соответственно).

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах AB и BC взяты точки K и L, так, что $AK = CL$. Пусть M — точка пересечения отрезков AL и CK. Докажите, что DM — биссектриса угла ADC.

3. Стороны параллелограмма равны a и b $(a \neq b)$. В каких пределах может меняться косинус острого угла между диагоналями этого параллелограмма?

4. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

5. Найдите радиус наименьшей окружности, содержащей равнобедренную трапецию с основаниями 15 и 14 и боковыми сторонами, равными 9.

6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle CAD = \angle CDM$, где M — середина BC. Найдите углы трапеции.

7. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)BO$. Найдите углы треугольника.

8. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности. E — одна из точек пересечения CD с меньшей окружностью. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AEC.

9. Найдите наибольший угол треугольника, если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника, в два раза меньше наименьшей высоты данного треугольника.

10. В треугольнике ABC биссектриса угла C перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B. Центр вписанной окружности лежит на окружности, проходящей через точки A, C и центр описанной окружности. Найдите AB, если $BC = 1$.

Лекция 4

Решение геометрических задач алгебраическими методами, или «уравнения в школьной геометрии»

В предыдущих лекциях мы изучали основные «аналитические» теоремы элементарной геометрии и их простейшие следствия. В данном случае под «аналитической» теоремой мы понимаем теорему, утверждение которой может быть сформулировано на алгебраическом языке в виде того или иного уравнения. Роль этих и подобных им теорем в школьном курсе очень велика — очень многие школьные задачи, особенно те из них, в которых требуется найти ту или иную величину, удобно решать как текстовые задачи по алгебре — сводя все их геометрическое содержание к набору уравнений, в чём нам помогают теоремы, изученные на первых трёх лекциях. При этом надо заранее быть готовым к тому, что одна и та же задача может быть решена многими разными способами, что составлять уравнения можно по-разному, с помощью разных теорем и наблюдений. Получающиеся уравнения или системы уравнений могут оказаться сильно разного уровня сложности — в случае одной и той же задачи верно выбранный подход позволит получить простые уравнения степени не выше 2-й, тогда как излишняя прямолинейность в использовании теорем приводит к большим вычислительным трудностям.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 5. В треугольнике ABC известны стороны:

$$AB = 12, \quad BC = 13, \quad AC = 15.$$

На стороне AC этого треугольника отмечена такая точка M, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB и CMB, равны. Найдите отношение, в котором точка M делит сторону AC.

Решение 1. Попробуем сначала решить эту задачу, что называется, «в лоб» (см. рис. 1). А именно, положим

$$\frac{CM}{MA} = k, \quad MA = x, \quad MB = l \quad \text{и} \quad \angle AMB = \varphi.$$

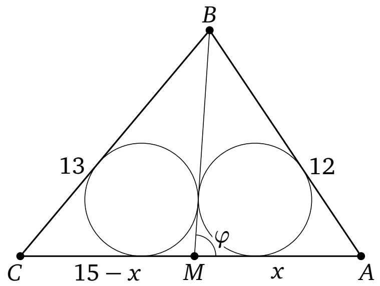

Рис. 1

Тогда $MC = 15 - x = kx$, или $x = \dfrac{15}{k+1}$. По теореме косинусов для треугольников AMB и CMB имеем

$$144 = l^2 + x^2 - 2lx\cos\varphi$$

и

$$169 = l^2 + k^2x^2 + 2klx\cos\varphi$$

(мы пользуемся тем, что $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$). Домножая первое уравнение на k и складывая со вторым, после несложных преобразований получаем

$$k(12-l)(12+l) + (13-l)(13+l) = k(k+1)x^2.$$

Если, с другой стороны, ρ — радиус любой из данных окружностей, то, так как площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности (это одно из многочисленных элементарных утверждений которые мы считаем известными), получаем

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}\rho(12+x+l), \quad \text{и} \quad S_{CMB} = \frac{1}{2}\rho(13+kx+l).$$

Тогда

$$\frac{S_{AMB}}{S_{CMB}} = \frac{12+l+x}{13+l+kx} = \frac{1}{k}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что у рассматриваемых треугольников общая высота, опущенная из вершины B.

Теперь можно выразить l через k из последнего равенства: $l = \dfrac{13-12k}{k-1}$ (как видно, неизвестная x из формулы пропадает). Так как $l > 0$ и $1 < k$, получаем ограничения на k: $\dfrac{12}{13} > k > 1$. Подставляя теперь найденные выражения для x и l в полученное ранее уравнение, получаем уравнение на k. Самое главное здесь — с одной стороны, не испугаться трудных вычислений, а с другой — не слишком торопиться раскрывать все скобки и уничтожать все знаменатели: если сделать это сразу, то можно, запутавшись в вычислениях, не заметить, что уравнение легко решается. В самом деле, после преобразований получим

$$\frac{24k-25}{k-1}\cdot\frac{1}{k-1}+\frac{25k-26}{k-1}\cdot\frac{1}{k-1}=\frac{225}{k+1}.$$

После умножения на знаменатель мы получаем квадратное уравнение, один из корней которого $k=\frac{3}{2}$ приходится откинуть, так как он не удовлетворяет найденному выше ограничению. Таким образом, единственным ответом будет $k=\frac{23}{22}$. $\square$

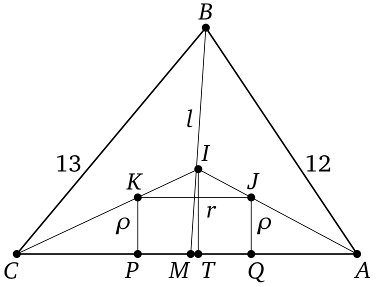

Рис. 2

Приведённое решение, при всей его идейной простоте, весьма сложно с точки зрения вычислений. Больше того, на самом деле мы организовали вычисления более-менее оптимальным образом — если считать всё совсем уж «в лоб», можно оказаться перед необходимостью решать уравнение даже не третьей, а четвёртой степени без сколь-нибудь явных корней. Однако даже теперь вычисления можно значительно сократить, если использовать несколько тривиальных геометрических (и алгебраических) соображений.

Решение 2. Пусть K, J и I — центры окружностей, вписанных в треугольники CMB, AMB и ABC соответственно, ρ и r — их радиусы (см. рис. 2). Пусть P, Q и T — точки касания этих окружностей со стороной AC треугольника ABC. Введём ещё одну переменную $\kappa=\frac{\rho}{r}$ (на самом деле величину r несложно найти, если вспомнить, что площадь любого треугольника равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр, но нам это не понадобится). Найдём длины отрезков AQ, AT, CT, CP и PQ: мы можем воспользоваться известными формулами, выражающими длину отрезка стороны треугольника от вершины до точки касания со вписанной окружностью через стороны треугольника:

$$AQ = \frac{12+x-l}{2}, \qquad CP = \frac{28-x-l}{2}, \qquad PQ = 15-CP-AQ = l-5,$$

и аналогично $AT = 7$, $CT = 8$.

Тогда из подобия треугольников AJQ и AIT следует, что

$$\kappa = \frac{\rho}{r} = \frac{AQ}{AT} = \frac{12+x-l}{14},$$

и аналогично из подобия CKP и CIT получаем

$$\kappa = \frac{28-x-l}{16}.$$

По известному свойству пропорции (если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$), имеем

$$\kappa = \frac{(28-x-l)-(12+x-l)}{16-14} = \frac{16-2x}{2} = 8-x.$$

С другой стороны, из подобия треугольников KIJ и CIA следует, что их высоты относятся так же, как основания, и, следовательно,

$$\frac{l-5}{15} = \frac{r-\rho}{r} = 1-\kappa,$$

откуда находим $\kappa = \frac{20-l}{15}$. Подставляя это выражение в найденное выше равенство, находим

$$x = 8-\kappa = \frac{l+100}{15}.$$

Наконец, как и прежде, из того, что площади треугольников AMB и CMB относятся как их периметры, получаем

$$\frac{l-x+28}{l+x+12} = \frac{15-x}{x},$$

и по тому же свойству пропорций

$$\frac{15-x}{x} = \frac{(l-x+28)-(15-x)}{(l+x+12)-x} = \frac{l+13}{l+12}.$$

Подставляя найденное выше выражение для x, получаем

$$\frac{125-l}{l+100} = \frac{l+13}{l+12},$$

откуда находим $l^2 = 100$, и $l = 10$. Заменяя l на это значение в выражении $\frac{CM}{MA} = \frac{15-x}{x} = \frac{l+13}{l+12}$, получаем $\frac{CM}{MA} = \frac{23}{22}$. □

Как видно, в этом случае нам даже не пришлось отбрасывать лишние корни, да и квадратное уравнение получилось гораздо более простым. Ситуация, с которой мы столкнулись, часто встречается при решении задач по геометрии: одна и та же задача может быть решена как при помощи прямолинейных вычислений, сопряжённых с большими техническими сложностями, так и исходя из несложных геометрических наблюдений, которые значительно облегчают выкладки.

Тем не менее задачи на составление уравнений — один из наиболее часто встречающихся видов геометрических задач в школьной математике. В особенности это относится к задачам вступительного экзамена прежнего времени (а теперь и ЕГЭ). Существует множество способов составлять уравнения и системы на основе геометрических данных. Чаще всего для этого используются такие теоремы, как теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема синусов и их следствия (например, формула для длины медианы). Нередко используются различные формулы для площадей фигур (например, мы использовали формулу $S=rp$, связывающую площадь треугольника с радиусом вписанной окружности), соотношения, связывающие касательные и секущие (о них мы поговорим позже), или различные пропорции, следующие из подобия различных фигур. Но иногда для составления уравнений надо применять совсем неожиданные факты. Вот один из таких экзотических примеров: задача, в которой для составления уравнения удобно применить критерий перпендикулярности, найденный нами на второй лекции.

Задача 6. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка M, что прямая, соединяющая точку пересечения медиан треугольника BCM с центром описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна CM. Найдите отношение $\frac{BM}{BA}$, если $\frac{BC}{BA}=k$.

Решение. Заметим прежде всего, что без ограничения общности мы можем считать, что $AB=1$, тогда $BC=k$. Обозначив искомую величину $\frac{BM}{BA}$ через x, получим $BM=x$, $MA=1-x$ (см. рис. 3; у нас получилось, что $x<\frac{1}{2}$). Пусть O — центр, а R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Обозначим буквой G точку пересечения медиан треугольника BMC. Тогда согласно указанному критерию перпендикулярности $CM\perp OG$, если и только если

$$OC^2-OM^2=GC^2-GM^2.$$

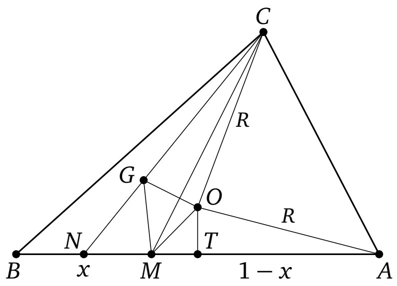

Рис. 3

Найдём величины, входящие в это равенство:

$$OC^2 = R^2$$

и

$$OM^2 = OT^2 + TM^2 = OA^2 - AT^2 + TM^2 = R^2 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2.$$

С другой стороны, по теореме о длине медианы имеем

$$GC^2 = \left(\frac{2}{3}CN\right)^2 = \frac{1}{9}(2CM^2 + 2k^2 - x^2),$$

и аналогично $GM^2 = \frac{1}{9}(2CM^2 + 2x^2 - k^2)$, мы также воспользовались важным свойством медиан: точка пересечения медиан делит их в отношении $2:3$, считая от вершины. Таким образом, получаем уравнение

$$x - x^2 = \frac{1}{3}(k^2 - x^2),$$

откуда находим ответ: $x = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 8k^2}}{4}$ (второй корень пришлось отбросить, так как x должно быть меньше 1). □

Заметим, что в данном случае мы использовали ещё один общий для задач такого типа приём: мы не постеснялись ввести много переменных. В самом деле, в найденных выражениях для отрезков OC, OM, GC и GM встречаются величины R и CM, которые никак не связаны с введённым нами неизвестным x и параметром k. На самом деле они не являются независимыми — и та и другая могут быть выражены через стороны треугольника ABC и длину отрезка BM. Однако, вместо того чтобы сводить количество рассматриваемых величин к минимуму, мы спокойно пользуемся всеми ими — и это вполне оправдано, ведь в конечном итоге и R и CM сокращаются и никак не влияют на результат. К такому приёму приходится прибегать довольно часто — хотя заранее предсказать, что он сработает, порой нелегко. Вот ещё один пример рассуждения подобного рода: *задача Ферма*.

Задача 7. На стороне AB прямоугольника $ABFE$ как на диаметре построена во внешнюю сторону полуокружность. Пусть M — произвольная точка на этой полуокружности. Проведём отрезки EM и FM. Пусть R и S — точки пересечения AB с EM и FM соответственно. Докажите, что если $AB : BF = \sqrt{2} : 1$, то $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

Решение. Для начала опустим перпендикуляр MU из точки M на AB (см. рис. 4). Пусть O — центр рассматриваемой полуокружности. Положим $OU = x$, $MU = d$, $AE = a$, тогда выполнено соотношение

$$x^2 + d^2 = \frac{1}{2}a^2$$

(мы учли, что $AB = AE\sqrt{2}$). С другой стороны, так как треугольники AER и UMR подобны, выполняются равенства

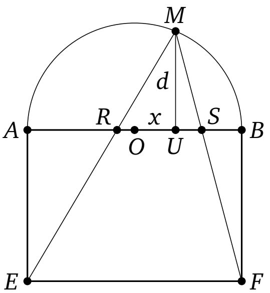

Рис. 4

$$MU : UR = EA : AR,$$

или

$$AR = \frac{UR}{MU} \cdot EA = a\frac{UR}{d} = a\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + x - AR}{d},$$

откуда получаем

$$AR = \frac{a^2\sqrt{2} + 2ax}{2a + 2d}.$$

Аналогично из треугольников MUS и FBS находим $BS = \dfrac{a^2\sqrt{2} - 2ax}{2a + 2d}$. Тогда

$$AS = AB - BS = a\sqrt{2} - \frac{a^2\sqrt{2} - 2ax}{2a + 2d} = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{2} + 2d\sqrt{2} + 2x}{a + d},$$

и аналогично

$$BR = AB - AR = a\sqrt{2} - \frac{a^2\sqrt{2} + 2ax}{2a + 2d} = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{2} + 2d\sqrt{2} - 2x}{a + d}.$$

В итоге, учитывая соотношение, связывающее x, a и d, получаем

$$\begin{aligned}AS^2+BR^2 &= \frac{a^2}{4(a+d)^2}(4a^2+16d^2+8x^2+16ad) = \\ &= \frac{a^2}{4(a+d)^2}(4(a^2+d^2+2ad)+4d^2+8(d^2+x^2)+8ad) = \\ &= \frac{a^2}{4(a+d)^2}(4(a+d)^2+4d^2+4a^2+8ad) = \\ &= \frac{a^2}{4(a+d)^2}(8(a+d)^2) = 2a^2 = AB^2.\end{aligned}$$

Доказательство закончено. □

Как обычно, полученное решение очень просто идейно, но при этом сопряжено с большими алгебраическими выкладками. Вот для сравнения доказательство этой же теоремы, предложенное Эйлером (это один из редких случаев, когда Леонард Эйлер предпочёл геометрическое рассуждение алгебраическому). Итак, для начала заметим, что если точки R и S лежат на отрезке AB (R — между A и S), то выполнено равенство $AB\cdot RS+AR\cdot BS=AS\cdot BR$. В самом деле,

$$\begin{aligned}AB\cdot RS+AR\cdot BS &= (AS+BS)\cdot(BR-BS)+AR\cdot BS = \\ &= AS\cdot BR-(AS-AR)\cdot BS+BS\cdot RS = AS\cdot BR.\end{aligned}$$

Проведём теперь прямые MA и MB (см. рис. 5). Пусть P и Q — точки их пересечения с прямой EF. Обозначим угол PAE через α, а угол FBQ через β. Тогда $\alpha+\angle MAB=\frac{\pi}{2}$ и $\beta+\angle MBA=\frac{\pi}{2}$. Но AB — диаметр окружности, в которую вписан угол AMB, поэтому $\angle MAB+\angle MBA=\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Треугольники PAE и BQF прямоугольные, поэтому из доказанного равенства углов следует, что $\beta=\angle APE$, $\alpha=\angle BQF$, а значит, эти треугольники подобны. Запишем соотношение подобия $PE:AE=BF:QF$,

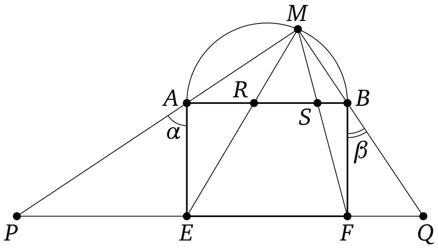

Рис. 5

значит, $PE \cdot QF = AE \cdot BF = AE^2$. Но так как $EF = AB = \sqrt{2}AE$, мы получаем равенство $2PE \cdot QF = EF^2$. В силу того что треугольники PMQ и AMB подобны, аналогичное равенство должно выполняться и для точек A, B, R и S, т. е. $2AR \cdot SB = RS^2$. Учитывая это равенство и утверждение, доказанное выше, а также очевидное равенство $AS + BR = AB + RS$, получаем

$$\begin{aligned} AS^2 + BR^2 &= (AS + BR)^2 - 2AS \cdot BR = \\ &= (AB + RS)^2 - 2(AB \cdot RS + AR \cdot BS) = \\ &= AB^2 + RS^2 + 2AB \cdot RS - 2AB \cdot RS - RS^2 = AB^2. \end{aligned}$$

Ещё один обширный источник идей, которые можно использовать для составления уравнений,— понятие площади фигуры. А именно, записывая площадь той или иной фигуры через различные параметры и приравнивая получившиеся выражения, мы получаем возможность составлять уравнения. Иногда этот подход оказывается очень выгоден. Например, с его помощью мы доказали известное свойство биссектрисы угла треугольника (то, что биссектриса делит противоположную сторону в отношении, равном отношению боковых сторон треугольника, $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$; см. лекцию 3). Да и на этой лекции решить первую задачу нам помогла связь площади с периметром треугольника и радиусом его вписанной окружности. Во многих учебниках геометрии связанные с понятием площади приёмы решения задач даже выделяют в отдельный *метод площадей*.

Приведём ещё два примера.

Задача 8. Докажите, что длина биссектрисы треугольника может быть вычислена по формуле

$$l = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a + b},$$

где a, b — длины сторон, между которыми проходит данная биссектриса, а α — величина соответствующего угла треугольника.

Решение. Рассмотрим рис. 6. Площади треугольников ABD и BCD равны $\frac{1}{2}al\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{1}{2}bl\sin\frac{\alpha}{2}$ соответственно. С другой стороны, площадь ABC равна $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Но $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD}$, откуда получаем

$$l = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\alpha}{\frac{1}{2}a\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}b\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{(a + b)\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad \square$$

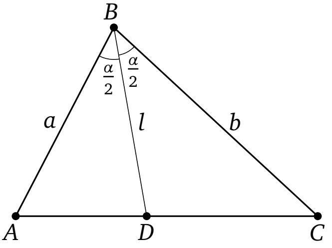

Рис. 6

Вторая наша задача сложнее первой, так что даже не сразу видно, каким образом понятие площади может принести пользу при её решении.

Задача 9. Окружность радиуса R касается прямой l в точке A, AB — диаметр этой окружности, BC — произвольная хорда, точка D — основание перпендикуляра, опущенного из C на AB. Точка E лежит на продолжении CD за точку D, причём $ED = BC$. Касательные к окружности, проходящие через точку E, пересекают прямую l в точках K и N. Найдите KN.

Решение. Прежде всего заметим, что из условия задачи следует равенство отрезков BD и $EF = EG$ (где F, G — точки касания данной окружности с прямыми EN и EK, см. рис. 7). В самом деле, по свойству касательных (мы докажем его на следующей лекции) имеем $EF^2 = EP \cdot EC = (ED - DP)(ED + DC) = ED^2 - CD^2 = BC^2 - CD^2 = BD^2$.

Обозначим теперь $AK = KF = x$ и $EF = EG = BD = y$. Тогда $y + EN = NF = NA = x + KN$, $EK = x + y$ и $DA = AB - BD = 2R - y$. Найдём

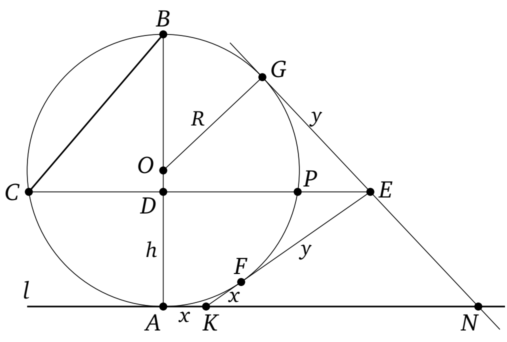

Рис. 7

площадь треугольника EKN: с одной стороны, она равна половине произведения высоты DA на основание KN. С другой стороны, так как данная окружность является вневписанной для треугольника EKN, его площадь может быть найдена как произведение радиуса R на разность его полупериметра и стороны EK. Полупериметр треугольника EKN равен, как несложно заметить, отрезку NA, значит, мы получили уравнение $\frac{1}{2}(2R-y)KN = R(x+KN-(x+y))$, откуда следует, что $KN = 2R$. □

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть BD — биссектриса *внешнего* угла треугольника ABC (точка D лежит на прямой AC). Докажите, что выполнено следующее соотношение: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

2. На плоскости дан треугольник ABC. Найдите все точки M на плоскости, для которых выполняются равенства $S_{AMB} = S_{BMC} = S_{CMA}$.

3. Воспользуйтесь свойствами площадей и докажите теорему о медианах треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $2:1$, считая от вершины).

4. Сторона квадрата равна a, произведения расстояний от противоположных вершин до прямой равны между собой. Найдите расстояние от центра квадрата до прямой l, если известно, что ни одна из сторон квадрата не параллельна l.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Найдите угол ADB.

6. Найдите радиус окружности, вписанной в арбелос, если радиусы полуокружностей, составляющих арбелос, равны r, R и $R+r$.

7. Углы тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\sin(\angle A - \angle B) = \sin^2 \angle A - \sin^2 \angle B.$$

Найдите периметр этого треугольника, если известен радиус описанной около него окружности R, а один из его углов равен $\frac{\pi}{8}$.

8. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите углы треугольника.

9. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

10. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 8, а площадь 2, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания. В треугольнике ABC угол $\angle B$ равен $120°$. Проведём биссектрисы AK, BL и CM углов треугольника. Найдите величину угла $\angle KLM$.

Лекция 5

Окружности и углы, с ними связанные (признак вписанного четырехугольника)

На этой лекции мы начинаем обсуждение нового круга геометрических идей и методов, а именно всего того, что может быть связано со свойствами окружностей. Надо сказать, что было бы практически невозможно перечислить здесь все геометрические результаты, так или иначе основанные на этих свойствах. Поэтому в этой и последующих лекциях мы лишь постараемся дать читателю общее представление о том, какие геометрические богатства скрываются за теми простыми фактами, знакомство с которыми мы сейчас начнём.

Для начала вспомним простое утверждение из школьного курса геометрии.

Теорема 1. *Угол, вписанный в некоторую окружность, равен половине центрального угла той же окружности, опирающегося на соответствующую дугу* (*см. рис.* 1).

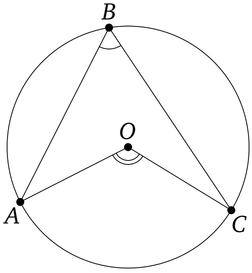

Рис. 1

Напомним, что *вписанным* называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность в точках, отличных от вершины угла, т. е. на рис. 1 это угол ABC. При этом говорят, что угол ABC *опирается на дугу* AC. *Центральным* же называют угол с вершиной в центре окружности, т. е. угол AOC на рис. 1. Кроме того, напомним, что по определению угловая (градусная) мера дуги некоторой окружности равна градусной мере соответствующего этой дуге центрального угла. Поэтому утверждение теоремы 1 часто формулируют таким образом: *вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.* Это простое утверждение, доказательство которого можно найти в любом учебнике, чрезвычайно важно для приложений. Для начала отметим несколько очевидных следствий из теоремы 1.

1. *Два вписанных угла, опирающиеся на равные дуги, равны между собой. В частности, два угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

2. *Углы, вписанные в одну и ту же окружность, равны, если и только если они опираются на равные хорды.*

3. *Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром окружности, описанной около этого треугольника. Таким образом, центром этой окружности служит середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы. В частности, прямоугольные треугольники с общей гипотенузой имеют одну и ту же описанную окружность.*

4. *Если все вершины четырёхугольника лежат на окружности, то сумма его противоположных углов равна* $180°$.

5. *Угол между касательной к окружности и хордой этой окружности, проходящей через точку касания, равен углу, опирающемуся на данную хорду.*

Последнее утверждение следует из рассмотрения равнобедренного треугольника, образованного хордой и радиусами окружности, проведёнными в её концы. Если его центральный угол равен 2α, то углы при основании будут равны $\frac{\pi}{2}-\alpha$, следовательно, угол между касательной и хордой равен α (так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной). Уже этих простых фактов бывает достаточно, чтобы решить многие задачи. Например, докажем теорему о высотах треугольника.

Теорема 2. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением остроугольного треугольника. Итак, пусть высоты AK и BL треугольника ABC пересекаются в точке H. Для доказательства теоремы достаточно показать, что прямая CH перпендикулярна стороне AB треугольника (см. рис. 2).

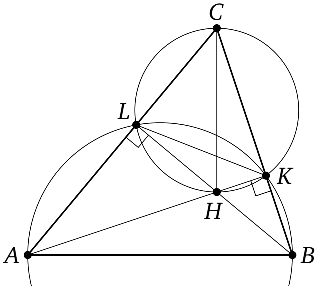

Рис. 2

Но согласно п. 3 приведённых выше наблюдений у треугольников ABK и ABL общая описанная окружность, так же как и у треугольников CHK и CHL. Отсюда следует равенство $\angle KAB=\angle KLB=\angle KLH=\angle KCH=\angle BCH$. Но так как угол $\angle KAB$ дополняет $\angle ABC$ до $90°$, то же самое верно и для угла $\angle BCH$, а это значит, что прямая CH перпендикулярна AB. □

Докажем теперь на основании сделанных выше наблюдений несколько важных утверждений о свойствах углов, касательных и секущих, ассоциированных с окружностью.

Утверждение 1. *Если точка M лежит на расстоянии a от центра окружности радиуса R и $R > a$, то для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M, произведение длин отрезков $AM \cdot MB$ равно $R^2 - a^2$.*

Доказательство. Пусть CD — произвольная хорда, отличная от AB, проходящая через M. Рассмотрим треугольники AMC и DMB (см. рис. 3). Из свойства 1 следует, что $\angle CAM = \angle BDM$, $\angle ACM = \angle DBM$, а следовательно, эти треугольники подобны. Поэтому $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$, откуда получаем $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. В частности, если мы проведём через точку M диаметр PQ окружности то получим

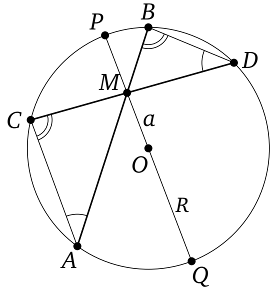

Рис. 3

$$AM \cdot MB = PM \cdot MQ = (PO - OM)(OQ + OM) = R^2 - a^2. \qquad \square$$

Двойственным образом можно доказать утверждение, связывающее длины касательных и секущих.

Утверждение 2. *Если точка M лежит на расстоянии a от центра окружности радиуса R и $R < a$, то для любой секущей AM, из которой окружность высекает хорду AB, произведение длин отрезков $MA \cdot MB$ равно $a^2 - R^2$.*

Доказательство в основном повторяет предыдущие рассуждения. В этот раз равенство углов $\angle CAM$ и $\angle BDM$ следует из того, что они оба дополняют до развёрнутого $\angle CDB$. Кроме того, разности квадратов $a^2 - R^2$ в этом случае можно придать геометрический смысл: она равна квадрату длины касательной MT, проведённой к данной окружности из точки M (это следует из теоремы Пифагора). В добавок, равенство $MA \cdot MB = MT^2$ можно доказать непосредственно, рассмотрев треугольники AMT и TMB (см. рис. 4): они подобны, так как $\angle M$ у них общий, а $\angle TAM = \angle BTM$ согласно последнему из вышеприведённых утверждений. □

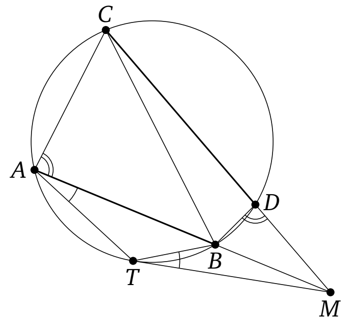

Рис. 4

Утверждение 3. *В условиях утверждения* 3, *угол между прямыми* AB *и* CD *равен полусумме дуг* AC *и* BD, *а в условиях утверждения* 2 *тот же угол равен полуразности указанных дуг.*

Доказательство. Мы ограничимся только вторым случаем, первая часть доказывается абсолютно аналогично. Итак, рассмотрим треугольник MBC (см. рис. 4). С одной стороны, его внешний угол $\angle CBA$ равен половине дуги AC, а с другой стороны, по свойству внешнего угла он равен сумме углов $\angle MCB$ и $\angle CMB$. Первый из этих углов опирается на дугу BD. □

Доказанные нами только что факты часто используются при решении геометрических задач. Например, их удобно использовать для составления уравнений. Примеры таких задач приводились ранее. Мы же для иллюстрации докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Геометрическим местом точек пересечения касательных к окружности* ω *с центром* O, *проведённых через точки* A *и* B — *концы произвольной хорды, проходящей через фиксированную точку* M *внутри окружности, является прямая* l, *перпендикулярная* OM (*таким образом положение этой прямой зависит только от положения точки* M).

Доказательство. Пусть X — точка пересечения указанных в условии задачи касательных. Для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать (см. вторую лекцию, критерий перпендикулярности двух отрезков), что значение разности $OX^2 - XM^2$ не зависит от выбора хорды AB, проходящей через M. Пусть C — точка пересечения прямых OX и AB (см. рис. 5), R — радиус окружности ω, тогда по теореме Пифагора имеем

$$OX^2 = R^2 + AX^2 = R^2 + AC^2 + CX^2, \quad XM^2 = CX^2 + CM^2,$$

поэтому

$$OX^2 - XM^2 = R^2 + (AC^2 - CM^2) = R^2 + (AC + CM)(BC - CM) =$$
$$= R^2 + AM \cdot MB = 2R^2 - OM^2.$$

Наоборот, из любой точки Y на найденном перпендикуляре можно провести касательную YK к окружности ω. Проведем хорду KL через точку касания K и данную точку M. Рассмотрим касательную к ω, проходящую через L Точка ее пересечения с YK должна лежать на том же перпендикуляре к OM, что и Y, следовательно, она совпадает с Y. □

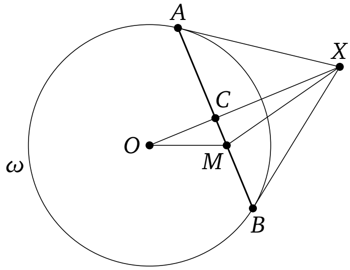

Рис. 5

Отметим, в частности, что из доказанного следует, что все хорды, соединяющие точки касания данной окружности ω с прямыми, проходящими через произвольную точку X, принадлежащую фиксированной прямой l (при условии, что l не пересекает ω), проходят через одну и ту же фиксированную точку M внутри окружности. Полученное взаимно однозначное соответствие между прямыми и точками называется *полярным преобразованием*, точка M называется *полюсом* прямой l, а l называют в таком случае *полярой* точки M (и то и другое — относительно окружности ω). Кроме того, величину $a^2 - R^2$, встречающуюся в утверждениях 1 и 2, называют *степенью точки M относительно данной окружности*. Это понятие часто оказывается полезным для приложений.

Приведём ещё один пример использования сделанных нами наблюдений. В третьей лекции мы доказали формулу, связывающую длину биссектрисы треугольника с длинами сторон, между которыми она проходит, и с длинами отрезков, на которые она делит ту сторону, которую пересекает. Сейчас мы приведём ещё одно доказательство этого факта.

Итак, рассмотрим треугольник ABC, пусть CD — биссектриса угла $\angle C$ этого треугольника. Опишем около ABC окружность и продолжим CD до пересечения с этой окружностью (точка E, рис. 6). Тогда $\angle CAD = \angle CEB$ как опирающиеся на одну и ту же дугу описанной окружности, и $\angle ACD = \angle ECB$, так как CD — биссектриса. Поэтому треугольники ACD и ECB подобны, откуда по свойству подобия получаем равенство

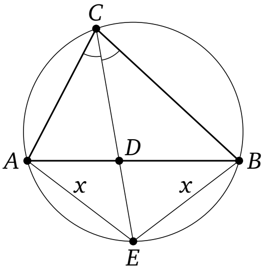

Рис. 6

$$\frac{AC}{EC} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{или} \quad AC \cdot CB = EC \cdot CD.$$

Поэтому

$$CD^2 = (EC - ED) \cdot CD = EC \cdot CD - ED \cdot CD = AC \cdot CB - AD \cdot DB.$$

Последнее равенство следует непосредственно из утверждения 3.

Отметим кстати, что из этого же построения можно получить и другой результат — свойство биссектрисы делить противоположную сторону в отношении, равном отношению сторон, между которыми она проходит. А именно, так как $\angle ACE = \angle BCE$, равны и отрезки AE и BE. Обозначим их длину буквой x. Тогда из подобия треугольников ACD и EBD следует, что

$$\frac{AC}{x} = \frac{CD}{DB}, \quad \text{или} \quad AC \cdot DB = x\,CD.$$

Аналогично из подобия треугольников BCD и EAD получаем

$$AD \cdot CB = x\,CD.$$

Приравнивая полученные выражения, получаем $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$.

Ещё одним следствием из рассматриваемой конфигурации является следующее утверждение, известное как

Формула Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей. *Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, а r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник, то расстояние между центрами указанных окружностей вычисляется по формуле*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

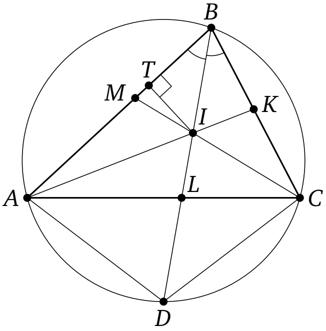

Рис. 7

Доказательство. Рассмотрим на рис. 7 треугольник AID (I — центр вписанной окружности). В силу равенства углов, опирающихся на одну дугу, в нём угол IAD равен полусумме углов A и B треугольника ABC. С другой стороны, угол AID этого треугольника является внешним при угле I треугольника AIB, следовательно, он равен сумме внутренних углов A и B этого треугольника, т. е. той же самой полусумме. Следовательно, треугольник AID равнобедренный, $AD = ID$. По теореме синусов $ID = AD = 2R\sin\frac{\angle B}{2}$. С другой стороны, из треугольника BIT, где T — точка касания стороны AB с вписанной окружностью, получаем

$$BI = \frac{r}{\sin\frac{\angle B}{2}}.$$

Теперь мы можем применить утверждение 1 к хорде BD описанной окружности:

$$R^2 - d^2 = BI \cdot ID = \frac{r}{\sin\frac{\angle B}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\angle B}{2} = 2Rr,$$

откуда получаем требуемое утверждение. □

Одним из самых полезных из свойств вписанных углов, полученных выше, является пункт 3 из перечисленных в начале лекции пяти простых следствий из теоремы 1. А именно, оно является *критерием существования окружности, проходящей через несколько точек* (конечно, точек должно быть 4 или больше, иначе вопрос тривиален). Если точек ровно 4, то утверждение такого рода также называют *критерием вписанности четырёхугольника*. Из всех известных критериев вписанности четырёхугольника важнейшим для приложений является следующее обобщение этого утверждения.

Теорема 4. *точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если и только если выполнено любое из следующих равенств*:

$$\angle ABD = \angle ACD \tag{1}$$

(*при условии, что точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD*) *или*

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \tag{2}$$

(*при условии, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*).

Прежде чем доказывать эту теорему, переформулируем её утверждение следующим образом: так как сумма углов любого треугольника равна 180°, а сумма углов любого четырёхугольника равна 360°, вместо равенств (1) и (2) можно соответственно написать

$$\angle BAC + \angle ACD = \angle ABD + \angle BDC \tag{3}$$

и

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD. \tag{4}$$

Замечательно то, что равенства (3) и особенно (4) никак не зависят от того, чему равна сумма углов треугольника. Более того, в новой формулировке теорему 4 можно доказать независимо от свойств параллельных линий! Следовательно, равенства (3) и (4) являются критерием вписанного четырёхугольника в абсолютной геометрии (т. е. геометрии, не использующей 5-го постулата Евклида, например геометрии на сфере, и на плоскости Лобачевского)!

Доказательство. Прежде всего заметим, что выполнение равенств (1) и (2) для вписанного четырехугольника следует непосредственно из свойств вписанных углов (в абсолютном случае надо рассмотреть равнобедренные треугольники, образованные радиусами, проведёнными в вершины четырёхугольника). Нам осталось доказать только обратное утверждение. В нашей лекции мы приведём обычное, евклидово, доказательство первой части равенства и «абсолютное» доказательство второй части.

Пусть для точек A, B, C, D выполняется равенство (1). Опишем окружность около треугольника ABD. Если точка C лежит на ней, то утверждение теоремы выполнено, доказывать ничего не надо.

В противном случае обозначим точку пересечения этой окружности с прямой AC буквой C'. Мы будем считать, что точка C' лежит между A и C (см. рис. 8). Если наоборот, точка C' попадает между A и C, наше доказательство не изменится. Рассмотрим четырёхугольник $ABC'D$. Все четыре его вершины лежат на одной окружности, поэтому для них выполняется равенство (1), $\angle ABD = \angle AC'D$. Однако согласно условию $\angle ABD = \angle ACD$, следовательно, $\angle ACD = \angle AC'D$. Но из этого следует, что $AC \| AC'$, чего не может быть.

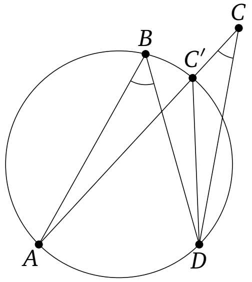

Рис. 8

Чтобы доказать вторую часть допустим для определённости, что $\angle ABC > \angle BAD$ и перепишем равенство (4) в виде

$$\angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle ADC.$$

Теперь отложим от прямой AB в точке B угол, равный $\angle BAD$, а от CD в точке C — угол, равный $\angle ADC$ (см. рис. 9). Мы получим три равнобедренных треугольника ALB, BNC и CMD, биссектрисы углов при вершинах L, M и N этих треугольников будут являться биссектрисами внутренних углов треугольника LMN, следовательно, они пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности указанного треугольника. Но с другой стороны, эти биссектрисы являются серединными перпендикулярами к сторонам AB, BC и CD четырёхугольника $ABCD$, поэтому точка их пересечения равноудалена от всех его вершин. □

Мы настоятельно рекомендуем заинтересованному читателю самостоятельно придумать «абсолютное» доказательство первой

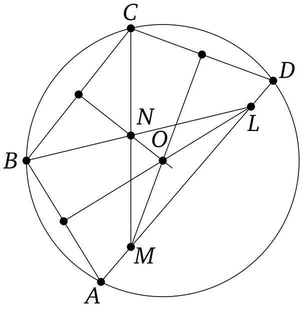

Рис. 9

части и евклидово доказательство второй части теоремы 4. Кроме того, ещё одно доказательство, основанное на теореме синусов, мы предлагаем в качестве упражнения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что трапеция может быть вписана в окружность, если и только если она равнобедренная.

2. Три прямые пересекаются в одной точке и образуют друг с другом равные углы. Из точки M, отличной от точки пересечения прямых, на данные прямые опущены перпендикуляры. Найдите углы треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

3. На плоскости нарисован прямой угол POQ. Найдите геометрическое место точек C, являющихся вершинами прямого угла равных между собой прямоугольных треугольников ABC, если вершина A этих треугольников лежит на луче OP, а вершина B — на луче OQ.

4. (Задача Коперника.) Какую кривую пробегает точка на границе круга радиуса r, когда этот круг катится без проскальзывания по внутренней стороне окружности радиуса $2r$?

5. В треугольнике ABC вписанная окружность делит медиану, проведённую из вершины A, на три равные части. Найдите отношение сторон треугольника.

6. Около треугольника ABC описана окружность. Пусть продолжения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника пересекают эту окружность в точках P и Q соответственно. Пусть M и N — точки пересечения отрезка PQ со сторонами AC и BC треугольника. Докажите, что $CM = CN$.

7. Хорды AB и CD одной окружности перпендикулярны, $AC = a$, $BD = b$. Найдите радиус данной окружности.

8. Около равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и основанием a описана окружность. Хорда AB этой окружности пересекается с боковыми сторонами треугольника и делится ими на три равные части. Найдите длину этой хорды.

9. Докажите, что центр любой вневписанной окружности любого треугольника лежит на окружности, проходящей через вершины стороны, которой касается данная окружность, и через центр вписанной окружности этого треугольника.

10. Воспользуйтесь теоремой синусов, чтобы найти расстояние от стороны треугольника до центра его описанной окружности в зависимости от длины данной стороны и величины угла треугольника, противоположного этой стороне. Используйте полученный результат для доказательства признака вписанного четырёхугольника (см. теорему 4). Является ли полученное доказательство «абсолютным»?

Лекция 6

Метод вспомогательной окружности: прямая Симсона, теорема Бретшнейдера

В предыдущей лекции мы начали знакомиться со свойствами вписанных и центральных углов и следствиями этих свойств. Одним из важнейших результатов, доказанных нами, является признак вписанного четырёхугольника. Напомним его:

четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, если и только если выполняется любое из следующих равенств:

$$\angle ABD = \angle ACD \quad \textit{или} \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Приведём теперь несколько примеров того, как этот признак работает при доказательстве теорем. Начнём с широко известного утверждения, называемого *теоремой о прямой Симсона*.

Теорема 1. *Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, тогда и только тогда, когда основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые AB, BC и CA, лежат на одной прямой.*

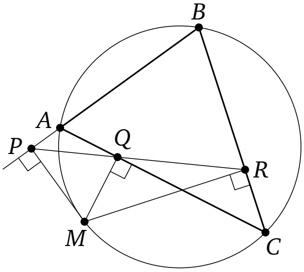

Рис. 1

Доказательство. Для начала пусть точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC. Пусть P, Q и R — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны треугольника или их продолжения (см. рис. 1). Рассмотрим четырёхугольник $PAQM$. Так как сумма его противоположных углов равна 180° (поскольку $\angle MPA = 90^\circ$, $\angle MQA = 90^\circ$), около этого четырёхугольника можно описать окружность. Следовательно, по свойству вписанных углов $\angle PMA = \angle PQA$. Аналогичным образом, существует окружность, описанная около четырёхугольника $MCRQ$ (на этот раз помогает равенство углов $\angle MQC = 90^\circ = \angle MRC$), следовательно, $\angle RQC = \angle RMC$. Наконец, так как в четырёхугольнике $PBRM$ сумма противоположных углов равна 180° ($\angle MPB = \angle MRB = 90^\circ$), он тоже является вписанным, откуда получаем $\angle PMQ = 180^\circ - \beta$, где β — угол при вершине B треугольника. С другой стороны, четырёхугольник $ABCM$ является вписанным по условию, значит, $\angle AMC = 180^\circ - \beta = \angle PMR$, откуда следует равенство углов $\angle PMA = \angle RMC$. Следовательно, $\angle PQA = \angle RQC$, т. е. точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Наоборот, пусть точки P, Q и R лежат на одной прямой. Это значит, что углы PQA и RQC равны. Отметим теперь, что свойство четырёхугольников $PAQM$, $MCRQ$ и $PBRM$ быть вписанными не зависит от положения точки M. Таким образом, мы получаем равенство углов PMA и RMC. Следовательно, $\angle AMC = \angle PMR = 180^\circ - \beta$, и, значит, четырёхугольник $ABCM$ вписанный. ☐

Прямая Симсона является не только красивым геометрическим объектом сама по себе, но и полезна для многих приложений. Докажем, например, с её помощью (и с помощью теоремы синусов) ещё раз теорему Птолемея, уже доказанную нами ранее на лекции 3.

Теорема 2. *Для любого четырёхугольника $ABCD$ выполняется неравенство*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD,$$

причём равенство достигается, если и только если этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

Доказательство. Обозначим для краткости стороны четырёхугольника $ABCD$ в порядке обхода буквами a, b, c и d. Пусть m и n — диагонали четырёхугольника (см. рис. 2). Опустим из точки A перпендикуляры AK, AL, AM на прямые CD, BD и BC соответственно. Применяя только что доказанную теорему 1 к треугольнику BCD и точке A, получаем, что нам достаточно показать, что точки K, L и M лежат на одной прямой, если и только если в указанном выражении достигается равенство (и что во всех остальных случаях неравенство строгое).

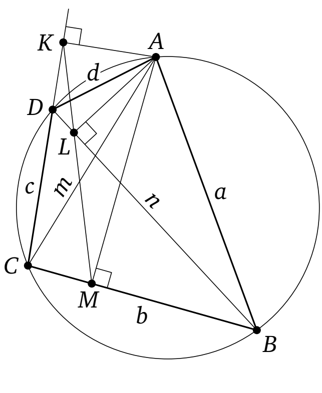

Рис. 2

Итак, рассмотрим четырёхугольник $AKDL$. Так как противоположные углы этого четырёхугольника равны по 90°, его можно вписать в окружность с диаметром $AD = d$. Применив теорему синусов к треугольнику DKL, получаем

$$d = \frac{KL}{\sin(180^\circ - \angle CDB)}, \quad \text{следовательно, } KL = d\sin\angle CDB.$$

(Мы воспользовались тем, что $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.) Аналогично четырёхугольники $AKCM$ и $ALBM$ вписаны в окружности с диаметрами $AC = m$ и $AB = a$. Применяя теорему синусов к треугольникам KCM и LBM, получаем

$$KM = m\sin\angle BCD \quad \text{и} \quad LM = a\sin\angle CBD.$$

С другой стороны, если R — радиус окружности, описанной около треугольника BCD, то по теореме синусов $\sin\angle CDB = \frac{BC}{2R} = \frac{b}{2R}$ и аналогично $\sin\angle BCD = \frac{n}{2R}$, $\sin\angle CBD = \frac{c}{2R}$. Подставляя эти значения в полученные выражения для KL, LM и KM, получаем

$$KL = \frac{bd}{2R}, \quad LM = \frac{ac}{2R}, \quad KM = \frac{mn}{2R}.$$

Запишем, наконец, неравенство треугольника для $\triangle KLM$:

$$\frac{mn}{2R} = KM \leqslant KL + LM = \frac{bd}{2R} + \frac{ac}{2R}.$$

Таким образом, неравенство треугольника для $\triangle KLM$ эквивалентно неравенству из теоремы 2. При этом равенство достигается, если и только если точки K, L и M лежат на одной прямой. □

Теорему Птолемея можно доказывать и по-другому. Например, рассмотрим рис. 3. Точка E на диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ взята таким образом, что угол DAE равен углу CAB. Тогда в силу того, что $\angle ADE = \angle ADB = \angle ACB$, треугольники ADE и ACB подобны, а значит $\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC}$, т. е. $DE = \frac{BC \cdot DA}{AC}$. Кроме того, $\angle DEA = \angle CBA$. Но сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника, так же как и сумма смежных углов равна 180°, следовательно, $\angle AEB = \angle ADC$. Значит, треугольники AEB и ADC тоже подобны ($\angle ACD = \angle ABE$ как опирающиеся на одну дугу), откуда находим $EB = \frac{AB \cdot CD}{AC}$. Так как $BD = BE + ED$, мы получаем, что для вписанного четырёхугольника выполняется равенство теоремы 2.

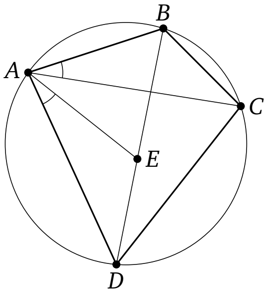

Рис. 3

Второе приведённое доказательство, к сожалению, ничего не говорит о том, что происходит с выражением

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA - AC \cdot BD$$

в случае четырёхугольника, который нельзя вписать в окружность. В этом смысле оно «слабее» того, которое мы использовали раньше. Но имеется и более «сильное» утверждение, которое позволяет не только указать, какой знак имеет разность

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA - AC \cdot BD,$$

но и в точности вычислить её значение. А именно, докажем следующую теорему, называемую иногда *теоремой Бретшнейдера* или *теоремой косинусов для четырёхугольника*.

Теорема 3. *Пусть a, b, c и d — стороны четырёхугольника $ABCD$ (в циклическом порядке) m, n — его диагонали, а φ — сумма величин двух противоположных его углов. Тогда выполняется равенство*

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi = m^2n^2. \tag{1}$$

Прежде чем мы примемся доказывать это утверждение, заметим, что выражение, стоящее в левой части равенства, не зависит от выбора пары противоположных углов четырёхугольника. В самом деле, сумма углов любого четырёхугольника равна $360^\circ = \dfrac{2}{\pi}$, при этом $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$ для любого α.

Мы приведём два доказательства теоремы Бретшнейдера.

Первое доказательство основано на нетривиальном дополнительном построении (см. рис. 4). А именно, построим на сторонах CD и BC четырёхугольника $ABCD$ треугольники CDE и CBF, подобные треугольникам ACB и ACD соответственно (напомним, что соответствующие друг другу вершины подобных треугольников мы записываем на соответствующих друг другу местах). Найдём длины отрезков DE, CE, BF и CF:

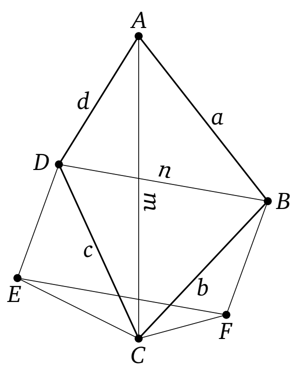

Рис. 4

$$\frac{DE}{CB} = \frac{CD}{AC}, \quad \text{следовательно,} \quad DE = \frac{bc}{m}.$$

Аналогично

$$CE = \frac{bd}{m}, \quad BF = \frac{bc}{m}, \quad CF = \frac{ac}{m}.$$

Отметим, что $BF = DE$. Кроме того, несложно показать, что отрезки BF и DE параллельны. В самом деле, для этого достаточно проверить, что сумма углов EDB и DBF равна 180°. Вычислим:

$$\begin{aligned}\angle EDB + \angle DBF &= \angle EDC + \angle CDB + \angle DBC + \angle CBF = \\ &= \angle ACB + \angle CDB + \angle DBC + \angle ACD = \\ &= \angle CDB + \angle DBC + \angle BCD = 180^\circ,\end{aligned}$$

так как сумма углов треугольника BCD равна 180°. Из сделанных замечаний следует, что четырёхугольник $BFED$ — параллелограмм, и, следовательно, $EF = BD = n$. Запишем теперь теорему косинусов для треугольника ECF:

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \cdot CF \cos\varphi.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned}\angle ECF &= \angle ECD + \angle CBD + \angle BCF = \\ &= \angle CAB + \angle CBD + \angle DAC = \angle DAB + \angle CBD = \varphi.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$n^2 = \frac{b^2d^2}{m^2} + \frac{a^2c^2}{m^2} - 2\frac{abcd}{m^2}\cos\varphi. \qquad \square$$

Первое доказательство закончено. Несомненно, оно многим понравится за своё изящество и простоту рассуждений. Однако применённое нами дополнительное построение отличается от всего, к чему мы привыкли на уроках геометрии. Поэтому приведём второе рассуждение, несколько более громоздкое, зато основанное на более-менее стандартном подходе, аналогичном тому, который помог нам ранее доказать теорему Птолемея.

Второе доказательство. Итак, опустим из точки A перпендикуляры AK, AL и AM на прямые CD, BD и BC соответственно (см. рис. 5). Как мы уже знаем (см. доказательство теоремы Птолемея), отрезки KL, LM и KM равны

$$KL = \frac{bd}{2R}, \quad LM = \frac{ac}{2R}, \quad KM = \frac{mn}{2R},$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника BCD. Кроме того, мы можем найти угол KLM (мы пользуемся тем, что четырёхугольники $AKDL$, $AKCM$ и $ALBM$ можно вписать в окружность, равенством углов, опирающихся на одну дугу, а также тем,

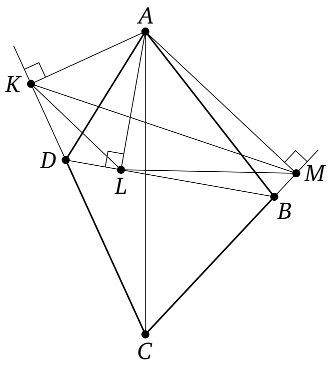

Рис. 5

что треугольники AKD и AMB прямоугольные):

$$\begin{aligned}\angle KLM &= 180^\circ - \angle DLK - \angle BLM = 180^\circ - \angle DAK - \angle BAM = \\ &= (90^\circ - \angle DAK) + (90^\circ - \angle BAM) = \angle ADK + \angle ABM = \\ &= (180^\circ - \angle ADC) + (180^\circ - \angle ABC) = \angle DAB + \angle BCD = \varphi.\end{aligned}$$

Нам осталось записать теорему косинусов для треугольника KLM:

$$\frac{m^2n^2}{4R^2} = \frac{a^2c^2}{4R^2} + \frac{b^2d^2}{4R^2} + \frac{abcd}{4R^2}\cos\varphi. \qquad \square$$

Итак, теорема доказана. Её можно рассматривать как обобщение теоремы Птолемея, которая теперь получается как простое следствие доказанного утверждения. В самом деле, преобразуем уравнение (1):

$$\begin{aligned}m^2n^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi = \\ &= (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) - 2abcd(1+\cos\varphi) = \\ &= (ac+bd)^2 - 2abcd(1+cos\varphi).\end{aligned}$$

Так как $\cos\varphi \geqslant -1$ при всех φ, второе слагаемое в правой части всегда неположительно. Следовательно, получаем, что $mn \leqslant ac+bd$, причём равенство достигается, если и только если $\cos\varphi = -1$, т. е. если $\varphi = 180^\circ$, что эквивалентно существованию у четырёхугольника $ABCD$ описанной окружности.

Теорема Бретшнейдера является, несомненно, красивым геометрическим фактом, однако её потенциальную ценность для решения школьных задач по геометрии не стоит преувеличивать:

в тех редких случаях, когда нам известны стороны и диагонали четырёхугольника, часто проще оказывается найти его углы или их сумму непосредственно, чем с помощью получающегося из теоремы Бретшнейдера уравнения. То же самое справедливо и в обратном случае, когда по заданным углам четырёхугольника требуется отыскать стороны. Также и прямую Симсона следует прежде всего рассматривать как красивый пример геометрического рассуждения. Интересно, что прямую Симсона можно определить не только для треугольника, но и для четырёх-, пяти- и вообще любого многоугольника, который можно вписать в окружность. А именно, справедливо следующее индуктивное утверждение-определение.

Теорема 4. *Предположим, что понятие* ***прямой Симсона вписанного k-угольника*** *(относительно некоторой точки на его описанной окружности) определено для всех $k \leqslant n-1$. Рассмотрим вписанный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть M — произвольная точка на его описанной окружности. Рассмотрим прямые Симсона $(n-1)$-угольников $A_1A_2\ldots A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$, $A_1A_2\ldots A_{n-3}A_{n-2}A_n$ и т. д. до $A_2A_3\ldots \ldots A_{n-1}A_n$ относительно точки M. Опустим из M перпендикуляры на эти прямые. Тогда основания этих перпендикуляров лежат на*

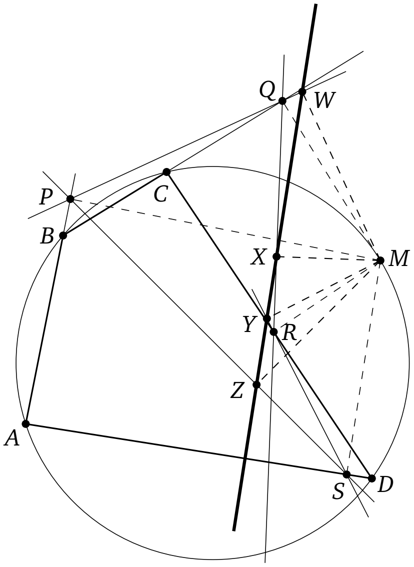

Рис. 6

одной прямой. Эта прямая называется ***прямой Симсона многоугольника*** $\boldsymbol{A_1A_2\ldots A_n}$ *относительно точки* M.

На рис. 6 изображена прямая Симсона четырёхугольника $ABCD$ относительно точки M: точки P, Q, R и S — основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые AB, BC, CD и DA соответственно; прямая PQ тогда является прямой Симсона треугольника ABC относительно точки M; аналогично прямые QR, RS и SP являются прямыми Симсона треугольников BCD, CDA и DAB; наконец, точки W, X, Y и Z — основания перпендикуляров опущенных из M на прямые PQ, QR, RS и SP.

Доказательство. Мы ограничимся рассмотрением случая $n=4$. В случае многоугольника с бóльшим числом сторон утверждение можно доказать по индукции аналогичным способом. Идея доказательства довольно простая: мы «выкидываем» один из $(n-1)$-угольников $A_1A_2\ldots A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$, $A_1A_2\ldots A_{n-3}A_{n-2}A_n$, …, $A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$, а для оставшихся сводим задачу к аналогичному (и по индукции уже доказанному) утверждению для многоугольника с на единицу меньшим числом сторон. Таким образом, мы получаем, что $n-1$ из n оснований перпендикуляров лежат на одной прямой. После этого мы выкидываем другой многоугольник из списка и получаем, что на одной прямой лежат другие $n-1$ основания перпендикуляров. Очевидно, что из рассмотренных в первом и втором случае точек $n-2$ точки совпадают. Так как прямая определяется любыми двумя своими точками, а мы можем предположить, что $n \geqslant 4$, теорема доказана. Посмотрим, как этот метод сработает в случае четырёхугольника.

Итак, «выкинем» треугольник ABC. Нам надо доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые Симсона треугольников BCD, CDA и DAB, лежат на одной прямой. Опустим из M перпендикуляры MR, MS и MT на стороны CD и DA и на диагональ BD четырёхугольника (см. рис. 7), тогда прямые RT, ST и RS являются прямыми Симсона треугольников BCD, CDA и DAB соответственно (в этом месте мы пользуемся теоремой о прямой Симсона для треугольника — нам всё равно, какие из оснований перпендикуляров брать в определении этой прямой). Но так как $\angle MRD$, $\angle MTD$ и $\angle MSD$ прямые, точки M, R, T, S и D лежат на одной окружности. Следовательно, по теореме о прямой Симсона треугольника основания перпендикуляров, опущенных из точки M

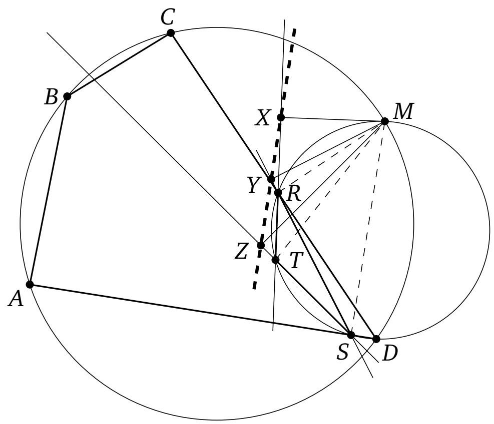

Рис. 7

на стороны треугольника RST (или их продолжения), точки X, Y и Z, лежат на одной прямой. □

В заключение приведём ещё один пример использования признака вписанного четырёхугольника. Докажем следующее утверждение:

Утверждение 1. *Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырёхугольник. Пусть K (соответственно L) — точка пересечения продолжений его сторон AD и BC (соответственно AB и CD). Тогда окружности, описанные около треугольников ABK, CDK, BCL и ADL, пересекаются в одной точке, которую называют* ***точкой Микеля*** *четырёхугольника $ABCD$.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что окружность, описанная около треугольника ABK, проходит через точку M пересечения окружностей, описанных около треугольников CDK и ADL (см. рис. 8), далее аналогичным образом можно будет проверить, что окружность, описанная около треугольника BCL, тоже пройдёт через эту же точку.

Согласно критерию существования описанной окружности четырехугольника (см. прошлую лекцию), для того чтобы точки A, B, K и M лежали на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы угол AMK был равен углу ABK. Кроме того, угол AMK равен разности углов DMK и DMA, первый из которых равен $\angle DCK$, так как они

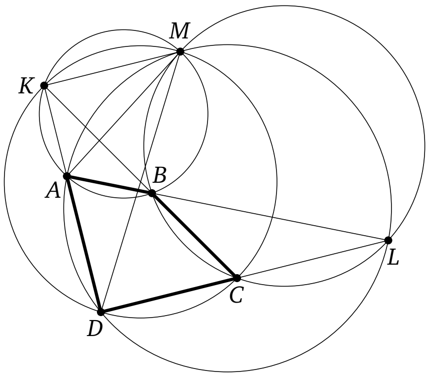

Рис. 8

опираются на одну дугу в окружности, описанной около треугольника DCK, а второй по той же причине равен $\angle DLA$. Но угол DCK является внешним углом при вершине C треугольника BCL, следовательно,

$$\angle DCK = \angle CLB + \angle CBL = \angle DLA + \angle ABK.$$

Таким образом, получаем

$$\angle AMK = \angle DMK - \angle DMA = \angle DCK - \angle DLA = \angle ABK. \qquad \square$$

Отметим, что, так же как и теорему о прямой Симсона, это утверждение можно обобщить на многоугольники с произвольным числом сторон. Точнее говоря, его можно сформулировать для любого числа *прямых, находящихся в общем положении*, т. е. для прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три из которых не проходят через одну точку. А именно, можно доказать следующее индуктивное утверждение.

Теорема 5. *Пусть $n = 3$. Назовём окружностью Микеля трёх прямых в общем положении окружность, описанную около треугольника, образованного этими прямыми. Тогда для любых четырёх прямых в общем положении у нас будет определено четыре окружности Микеля. Согласно вышедоказанному, эти окружности пересекаются в одной точке — точке Микеля четырёхугольника, определённого этими прямыми. Предположим теперь, что для всех нечётных $k \leqslant 2n-1$ мы определили окружность Микеля, а для всех чётных $k \leqslant 2n$ — точку Микеля любых k прямых в общем положении. Рассмотрим произвольный набор из $2n+1$ прямых в общем*

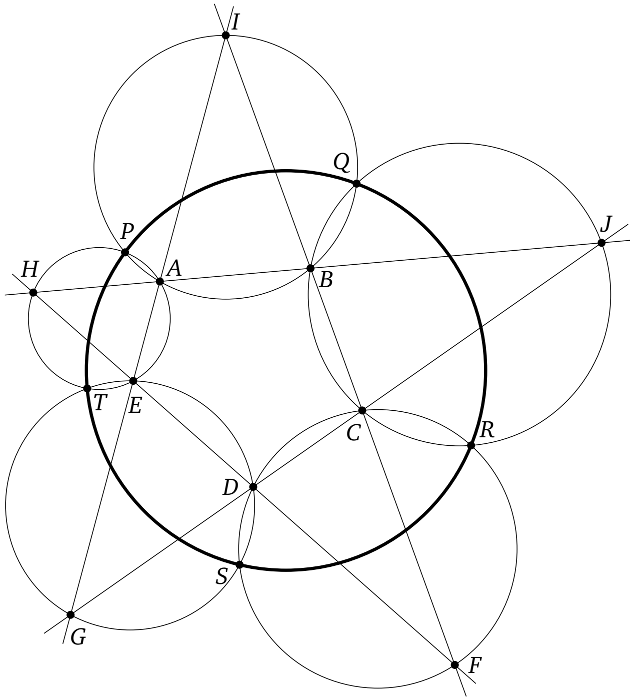

Рис. 9

положении. Выкидывая произвольную прямую из этого набора, мы получаем набор из $2n$ *прямых, для которого определена точка Микеля. Тогда все полученные таким образом точки Микеля лежат на одной окружности, называемой* ***окружностью Микеля данных*** $\boldsymbol{2n+1}$ ***прямых****. Аналогичным образом, выкидывая по одной прямой из произвольного набора, состоящего из* $2n+2$ *прямой, мы получаем* $2n+2$ *окружности Микеля. Тогда все эти окружности пересекаются в одной точке, называемой* ***точкой Микеля данных*** $\boldsymbol{2n+2}$ ***прямых****.*

На рис. 9 изображена окружность Микеля прямых AB, BC, CD, DE и EA. Она содержит точки Микеля P, Q, R, S и T четырёхугольников $ABFE$, $ABCG$, $BCDH$, $CDEI$ и $DEAJ$ соответственно. К сожалению, автору неизвестно вполне элементарного доказательства этого факта. Желающие могут найти доказательство, основанное на использовании комплексных чисел, в книге И. М. Яглома «Комплексные числа и их применение в геометрии» (М.: Учпедгиз, 1964).

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите следующий признак вписанного четырёхугольника: выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке E, можно вписать в окружность, если и только если выполняется равенство $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

2. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если и только если $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

3. Найдите углы треугольника ABC, если вершины A, C этого треугольника лежат на окружности, проходящей через основания биссектрис углов A и C этого треугольника и через а) центр его описанной окружности; б) его ортоцентр.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус AO перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую AD, равен 9; BC в два раза меньше AD. Найдите площадь треугольника AOB.

5. Пусть точки M и N лежат на окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что угол между прямыми Симсона треугольника ABC относительно точек M и N равен половине дуги MN описанной окружности.

6. Четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Точка S лежит на дуге AD этой окружности, не содержащей точек B и C. Опустим перпендикуляры из S на стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника (или их продолжения). Пусть K, L, M и N — соответственно основания этих перпендикуляров. Известно, что $SN = d$, а отношение площади треугольника LMS к площади треугольника KNS равно m. Найдите SM.

7. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны этого треугольника, лежит на окружности, описанной около треугольника.

8. Докажите, что ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот исходного треугольника. Во что превращается это утверждение для тупоугольного треугольника?

9. Докажите, что точка Микеля четырёхугольника $ABCD$, продолжения сторон которого пересекаются в точках P и Q, попадает на отрезок PQ, если и только если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.

10. В окружность вписан четырёхугольник $MNPQ$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке F. Прямая, проходящая через F и середину стороны MN, пересекает сторону PQ в точке H. Докажите, что отрезок FH является высотой треугольника PFQ, и найдите его длину, если $MN = 4$, $MQ = 7$ и $\angle MPQ = \alpha$.

Лекция 7

Вписанные четырёхугольники

В прошлый раз мы начали рассматривать некоторые следствия из свойств вписанных углов. Оказалось, что с их помощью можно доказать много красивых фактов. В частности, мы выяснили, что четырёхугольники, которые можно вписать в окружность, удовлетворяют такому необычному равенству, как *теорема Птолемея*. Оказывается, это далеко не единственное из их замечательных свойств. Поэтому такие четырёхугольники часто рассматривают отдельно. Их называют *вписанными* или *циклическими четырёхугольниками*. В этой лекции мы продолжим знакомиться с удивительными свойствами таких четырёхугольников.

Для начала докажем следующую формулу для нахождения площади вписанного четырёхугольника, обобщающую хорошо известную школьникам формулу Герона для треугольников.

Утверждение 1 (формула Брахмагупты). *Если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то его площадь можно найти по формуле*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c и d — стороны четырёхугольника $ABCD$, а

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

— его полупериметр.

Доказательство. Нам неизвестно, каким образом доказывал это утверждение индийский математик X века Брахмагупта. Доказательство, приведённое здесь, основано на преобразованиях алгебраических выражений и, следовательно, конечно, не может совпасть с оригинальным. Итак, рассмотрим рис. 1. Так как $ABCD$ вписан в окружность, сумма углов φ и ψ равна 180°. Поэтому $\cos\varphi = -\cos\psi$, $\sin\varphi = \sin\psi$. Тогда по теореме косинусов

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$

$$m^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\varphi,$$

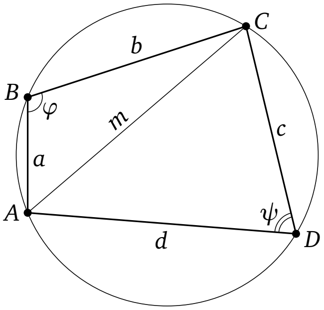

Рис. 1

откуда получаем уравнение

$$2(ab+cd)\cos\varphi = a^2+b^2-c^2-d^2. \tag{1}$$

С другой стороны, площадь четырёхугольника можно вычислить следующим образом:

$$S = S_{ABC}+S_{CDA} = \frac{1}{2}ab\sin\varphi+\frac{1}{2}cd\sin\psi = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\varphi.$$

Поэтому $2(ab+cd)\sin\varphi = 4S$. Возводя это выражение и уравнение (1) в квадрат и складывая их друг с другом, получаем:

$$4(ab+cd)^2 = 16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

Мы воспользовались равенством $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$. Перенося

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \quad \text{и} \quad 4(ab+cd)^2$$

в одну часть, получаем

$$\begin{aligned}16S^2 &= (2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2) = \\ &= \big((a+b)^2-(c-d)^2\big)\big(-(a-b)^2+(c+d)^2\big) = \\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) = \\ &= 16(p-d)(p-c)(p-b)(p-a),\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Как и в случае с теоремой Птолемея, эта формула — частный случай общего утверждения, справедливого для любого четырёхугольника. А именно, независимо от того, каковы углы φ и ψ четырёхугольника $ABCD$, мы можем записать теоремы косинусов для треугольников ABC и CDA. Тогда формула (1) превращается в следующее равенство:

$$2ab\cos\varphi - 2cd\cos\psi = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

а площадь четырёхугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}cd\sin\psi.$$

Умножая это равенство на 4, возводя в квадрат его и предыдущее тождество и складывая, получаем

$$4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) = \\ = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2.$$

Перенесём S^2 налево и воспользуемся известными тригонометрическими формулами:

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x + y), \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Мы получим:

$$16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\varphi + \psi) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\left(2\cos^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) - 1\right) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) =$$
$$= 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) =$$
$$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right).$$

Иными словами, квадрат площади любого четырёхугольника отличается от выражения $(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$ на величину $abcd\cos^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)$. В случае, когда четырёхугольник вписанный, сумма углов $\varphi + \psi$ равна 180°, поэтому добавка равна нулю. Очевидно, верно и обратное. Таким образом, мы доказали следующий критерий вписанности четырёхугольника: *выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, если и только если его площадь может быть вычислена через его стороны по формуле*

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Нельзя сказать, что этот критерий часто оказывается полезен при решении задач, но само по себе это утверждение, несомненно, изящное.

Только что доказанный нами признак вписанного четырёхугольника — лишь одно из великого множества замечательных свойств вписанных фигур. Некоторые из них, как и раньше, могут быть частными случаями общих утверждений, прочие — нет. Мы вряд ли сможем здесь разобрать все такие примеры, ограничимся лишь самыми известными или теми, которые нам кажутся более элегантными.

Начнём со следующей теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Рассмотрим точки I_A, I_B, I_C и I_D — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Тогда четырёхугольник $I_AI_BI_CI_D$ является прямоугольником* (см. рис. 2, на котором одинаковыми дужками отмечены равные углы).

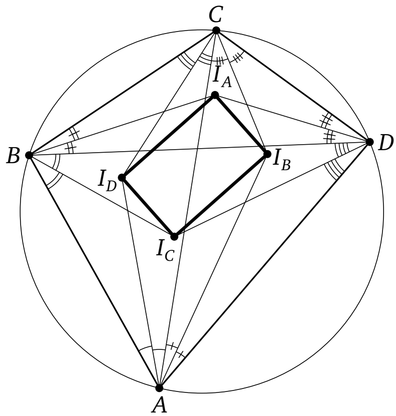

Рис. 2

Доказательство. Нам потребуется следующее важное вспомогательное утверждение: *пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC; тогда величина угла BIC равна* $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, *где α — величина угла BAC треугольника* (см. рис. 3). Чтобы установить этот факт (совсем простой, но почему-то нечасто встречающийся в учебниках), достаточно вычислить величину угла BIC, пользуясь тем,

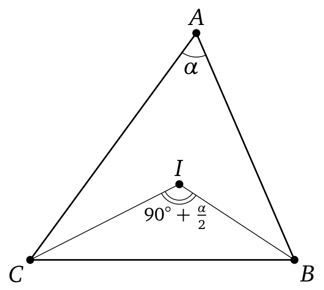

Рис. 3

что I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, и тем, что сумма углов любого треугольника равна 180°:

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = (\angle A + \angle B + \angle C) - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \\ = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

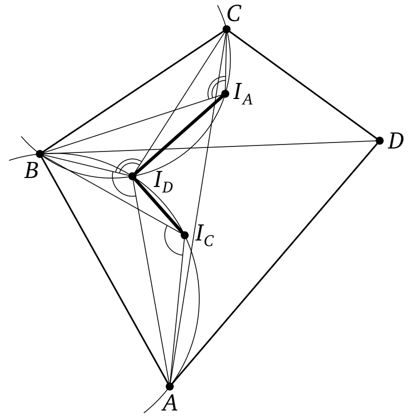

Рис. 4

Рассмотрим теперь рис. 4; нам достаточно доказать, что угол $I_AI_DI_C$ прямой. Как мы знаем, вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Поэтому $\angle BCA = \angle BDA$; но тогда из только что доказанного соотношения следует, что $\angle BI_DA = \angle BI_CA$, следовательно, по признаку вписанного четырёхугольника (см. теорему 4 в лекции 5) точки A, B, I_C и I_D лежат на одной окружности (дуга этой окружности изображена на рис. 4). Поэтому имеем равенство $\angle I_C I_D A = \angle I_C BA = \dfrac{\angle ABD}{2}$ (последнее равенство следует из того, что I_C — центр окружности, вписанной в треугольник BDA). Аналогично из существования окружности, на которой лежат точки B, C, I_A и I_D, следует равенство углов $\angle I_A I_D C = \angle I_A BC = \dfrac{\angle DBC}{2}$. Поэтому

$$\angle I_A I_D I_C = 360^\circ - \angle I_A I_D C - \angle C I_D B - \angle B I_D A - \angle A I_D I_C =$$
$$= 360^\circ - \frac{\angle DBC}{2} - \left(90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}\right) - \left(90^\circ + \frac{\angle BCA}{2}\right) - \frac{\angle DBA}{2}.$$

Здесь мы воспользовались полученными выше выражениями для углов $\angle BI_D A = \angle BI_C A$ и $\angle BI_D C = \angle BI_A C$. Получаем

$$\angle I_A I_D I_C = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle DBA + \angle BAC + \angle BCA) =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad \square$$

Из доказанного можно вывести одно неожиданное утверждение про вписанные многоугольники. А именно, начнём со следующего рассмотрения: пусть четырёхугольник $ABCD$ вписанный, а точки I_A, I_B, I_C и I_D те же, что и прежде. Опустим из точек I_A и I_C перпендикуляры $I_A K$, $I_C L$ на отрезок BD, продолжим первый из этих перпендикуляров за точку K и опустим на него перпендикуляр $I_C P$ из точки I_C (см. рис. 5). Как легко видеть, $I_C P = KL$, при этом K и L — точки касания отрезка BD с окружностями, вписанными в треугольники BCD и ABD соответственно.

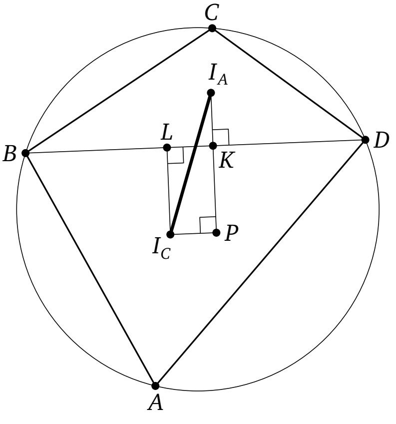

Рис. 5

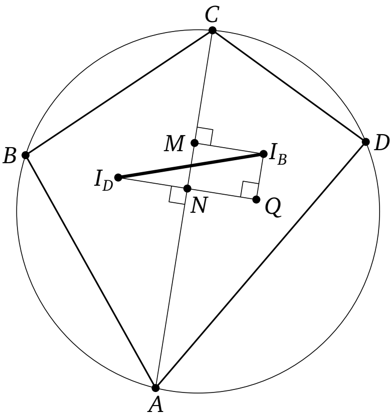

Рис. 6

Поэтому длину I_CP можно выразить через стороны этих треугольников:

$$I_CP = KL = |BK - BL| = \left|\frac{1}{2}(BC+BD-CD) - \frac{1}{2}(BA+BD-AD)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|BC+BD-CD-AB-BD+AD| = \frac{1}{2}|AB+CD-BC-AD|.$$

Здесь мы воспользовались известными нам и много раз уже встречавшимися формулами, выражающими расстояние между вершиной треугольника и точкой касания его стороны со вписанной окружностью через длины сторон треугольника. Кроме того, очевидно, что $I_AP = I_AK + I_CL = r_A + r_C$, где r_A, r_C — соответствующие радиусы вписанных окружностей. Если теперь точно такое же построение провести для центров I_B, I_D и диагонали AC, то длина стороны I_BQ получившегося прямоугольного треугольника I_BI_DQ будет выражаться такой же формулой:

$$I_BQ = \frac{1}{2}|AB+CD-BC-AD| = I_CP,$$

а длина I_DQ равна $r_B + r_D$. С другой стороны, отрезки I_AI_C и I_BI_D равны между собой как диагонали прямоугольника, следовательно, прямоугольные треугольники I_AI_CP и I_DI_BQ равны. Итак, мы получили равенство:

$$r_A + r_C = I_AP = I_DQ = r_B + r_D.$$

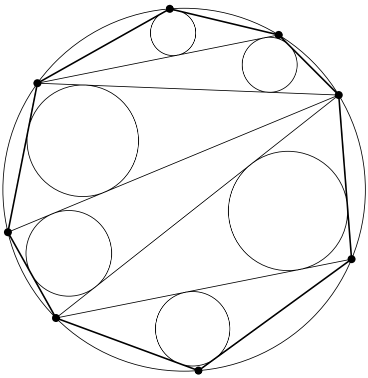

Рис. 7

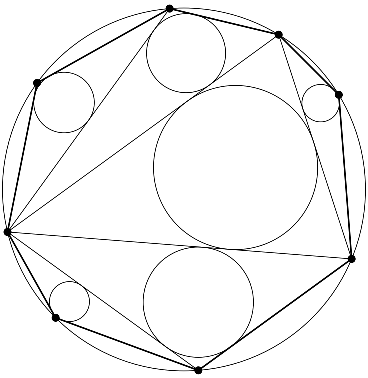

Рис. 8

Иными словами, если мы разобьём вписанный в окружность четырёхугольник диагональю на два треугольника, сумма радиусов окружностей, вписанных в получившиеся треугольники, не будет зависеть от того, какую именно диагональ мы проведём. Но тогда, как легко понять, то же самое будет справедливо и для произвольного вписанного в окружность многоугольника: достаточно заметить, что любые два разбиения на треугольники можно получить друг из друга, последовательно меняя положение одной диагонали за другой так, что каждый раз будет применимо соответствующее утверждение для четырёхугольника! Иными словами, получаем следующее свойство *вписанных многоугольников*.

Утверждение 2. *Если вписанный в окружность многоугольник проведёнными диагоналями разбит на треугольники, то сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, не зависит от того, какие диагонали мы проведём.*

Пример того, радиусы каких окружностей имеются в виду, представлен на рис. 7 и 8.

Доказательство. Как мы уже заметили, это утверждение легко вывести из только что доказанного свойства вписанных четырёхугольников. В самом деле, для этого надо лишь доказать, что любые два разбиения на треугольники можно связать последовательностью преобразований, состоящих в замене одной диагонали во вписанном четырёхугольнике на другую. Это можно сделать индукцией по числу сторон многоугольника, но получающееся доказательство будет достаточно громоздким, тогда как проверить верность результата в каждом конкретном случае совсем несложно. Чтобы не запутывать читателя (особенно читателя, незнакомого с индукцией), мы приведём здесь другое решение. Для этого мы докажем полезное вспомогательное свойство треугольника. А именно, *в треугольнике ABC со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ обозначим расстояния от центра описанной окружности до сторон d_a, d_b, d_c соответственно, тогда выполняется равенство*

$$R+r=d_a+d_b+d_c$$

для остроугольного треугольника или

$$R+r=-d_a+d_b+d_c$$

для тупоугольного. В самом деле, пусть наш треугольник остроугольный, рассмотрим четырёхугольник, образованный, например, отрезками d_a, d_b и соответствующими сторонами треугольника. Противоположные углы этого четырёхугольника равны по $90°$, следовательно, его можно вписать в окружность. Тогда, по теореме Птолемея получаем соотношение $\frac{b}{2}d_a+\frac{a}{2}d_b=R\frac{c}{2}$ (мы воспользовались тем, что диагонали этого четырёхугольника равны R и $\frac{c}{2}$ — средней линии треугольника). Аналогичные равенства можно получить для четырёхугольников, образованных другими перпендикулярами к сторонам. Складывая полученные равенства, получаем

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)d_c+\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)d_b+\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)d_a=\frac{1}{2}(a+b+c)R=pR,$$

где p — полупериметр треугольника. Это уравнение преобразуется к виду

$$p(d_a+d_b+d_c)=pR+\frac{1}{2}(ad_a+bd_b+cd_c).$$

Но

$$\frac{1}{2}(ad_a+bd_b+cd_c)=S=pr,$$

откуда, сокращая на p, получаем требуемое равенство. Для тупоугольного треугольника рассуждения аналогичны.

Теперь мы в состоянии не только доказать утверждение теоремы, но и точно указать, чему равна сумма радиусов маленьких окружностей. В самом деле, рассмотрим любые два треугольника с общей стороной, вписанные в одну окружность. Заметим, что в одном из этих треугольников угол, опирающийся на общую сторону, непременно острый, а в другом — тупой (в крайнем случае, оба они прямые). Тогда согласно только что доказанному утверждению выполняется равенство

$$2R + r_1 + r_2 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

или

$$2R + r_1 + r_2 = d_1 + d_2 + d_3 - d_4,$$

где R — радиус общей описанной окружности, r_i — радиусы вписанных окружностей, а $d_1, \ldots, d_4$ — расстояния от центра описанной окружности до «внешних» сторон треугольников (d_4 — наибольшая из них, причём последнее равенство соответствует случаю, когда центр описанной окружности лежит вне образованного треугольниками вписанного четырёхугольника). Продолжая рассуждать подобным образом, получим, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники, на которые разбивается диагоналями вписанный n-угольник, равна $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i - (n-2)R$, если центр окружности лежит внутри многоугольника, или $\sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i - d_n - (n-2)R$ в противном случае, где d_n — расстояние от центра до наибольшей стороны многоугольника. □

Итак, если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA и DAB удовлетворяют некоторым неожиданным условиям. Оказывается, не только центры вписанных окружностей этих треугольников, но и их ортоцентры тоже обладают замечательными свойствами.

Утверждение 3. *Ортоцентры H_A, H_B, H_C, H_D треугольников BCD, CDA, DAB, ABC, ассоциированных с вписанным четырёхугольником $ABCD$, являются вершинами четырёхугольника, равного $ABCD$.*

Доказательство. Мы будем использовать следующий простой, но полезный факт: расстояние от вершины A треугольника до ортоцентра равно $a|\operatorname{ctg}\alpha|$, где a — длина противоположной стороны, а α — величина соответствующего угла треугольника (модуль нужен для того, чтобы формула оставалась справедливой и для тупоугольного треугольника). Дока-

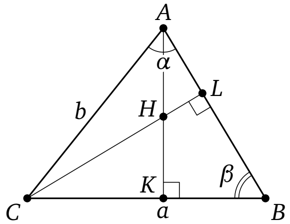

Рис. 9

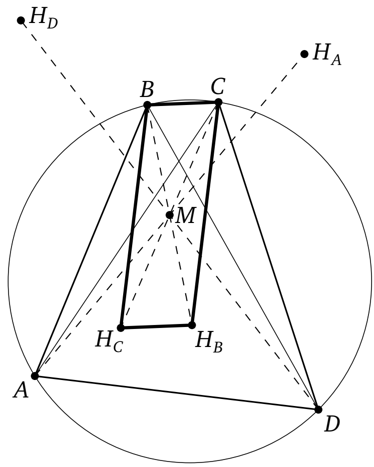

Рис. 10

зательство его можно получить, рассмотрев прямоугольные треугольники BAL и ALH, см. рис. 9. Из первого получаем $AL = b\cos\alpha$, а из второго —

$$AH = \frac{AL}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta}\cos\alpha = a\operatorname{ctg}\alpha$$

(мы воспользовались равенством углов ABC и AHL, а также теоремой синусов). Для тупоугольного треугольника рассуждения аналогичны.

Теперь утверждение можно доказать следующим образом: из только что найденной формулы следует, что отрезки BH_C и CH_B равны и параллельны (ведь углы ABD и ACD равны как опирающиеся на одну дугу). Значит, четырёхугольник BH_CH_BC (см. рис. 10) — параллелограмм, и, следовательно, отрезки BH_B и CH_C пересекаются в своих серединах. Но точно так же можно показать, что отрезки AH_A и BH_B, или DH_D и CH_C тоже пересекаются в своих серединах — в частности, проходят через ту же самую точку M. Таким образом, получаем, что четырёхугольник $H_AH_BH_CH_D$ не просто равен, но центрально симметричен $ABCD$. □

Как ни странно, это утверждение тоже является уточнением для циклического четырёхугольника некоторого общего свойства всех четырёхугольников. А именно, хотя, конечно, в общем случае четырёхугольник $ABCD$ не равен $H_AH_BH_CH_D$, тем не менее можно

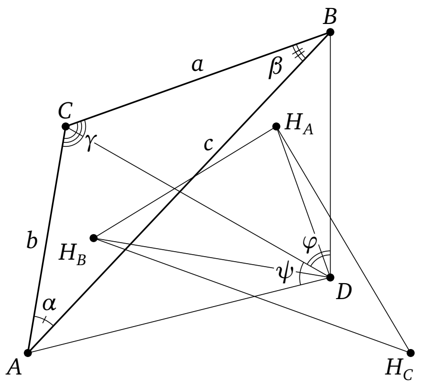

Рис. 11

доказать, что *они имеют равные площади*! Наметим вкратце путь доказательства.

Во-первых, достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение: для любого треугольника ABC и точки D на плоскости площадь треугольника $H_AH_BH_C$ (где H_A — ортоцентр треугольника BCD и аналогично для точек H_B, H_C) равна площади треугольника ABC. Этот факт проще всего доказать прямым вычислением: на рис. 11 изображена ситуация, в которой точка D лежит вне треугольника ABC, обозначения ясны из рисунка. Чтобы найти площадь треугольника $H_AH_BH_C$, заметим, что он состоит из трёх треугольников H_ADH_B, H_BDH_C, H_CDH_A, площади которых легко отыскать:

$$\begin{aligned} S_{H_ADH_B} &= \frac{1}{2}H_AD \cdot H_BD \sin\angle H_ADH_B = \\ &= \frac{1}{2}ab \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi \sin\gamma = S_{ABC} \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi, \end{aligned}$$

при этом мы воспользовались доказанной выше формулой для длин отрезков H_AD и H_BD, тем, что $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$, и формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Аналогично находим

$$S_{H_BDH_C} = -S_{ABC} \operatorname{ctg}\psi \operatorname{ctg}(\varphi+\psi),$$
$$S_{H_CDH_A} = -S_{ABC} \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}(\varphi+\psi)$$

(знак «$-$» тут необходим, так как угол $\varphi+\psi$ тупой). Таким образом, задача сводится к доказательству следующего тригонометрического тождества:

$$\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\psi-\operatorname{ctg}\psi\operatorname{ctg}(\varphi+\psi)-\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}(\varphi+\psi)=1.$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно проделать выкладки, а также и разобраться с другими случаями взаимного расположения точек A, B, C и D.

Докажем в заключение лекции ещё один забавный факт про вписанные четырёхугольники: на этот раз он связан с центрами описанных окружностей (правда, других треугольников).

Утверждение 4. *Пусть E — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника $ABCD$, O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE, BCE, CDE и DAE соответственно, O — центр окружности, описанной около $ABCD$. Тогда отрезки O_1O_3, O_2O_4 и OE пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ (см. рис. 12). Он является параллелограммом. В самом деле, так как O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к BE, отрезок O_1O_2 перпендикулярен BD. Аналогично $O_3O_4\perp BD$, значит, отрезки O_1O_2 и O_3O_4 параллельны. Точно так же $O_2O_3\parallel O_4O_1$. Следовательно, отрезки O_1O_3 и O_2O_4 пересекаются в своих серединах. Если теперь мы докажем, что и четырёхугольник O_1EO_3O тоже параллелограмм, то отрезки OE и O_1O_3 тоже пересекутся в своих серединах, а значит, точки пересечения всех трёх отрезков совпадут. Но по тем же причинам, что и прежде, $OO_1\perp AB$. С другой стороны, если обозначить

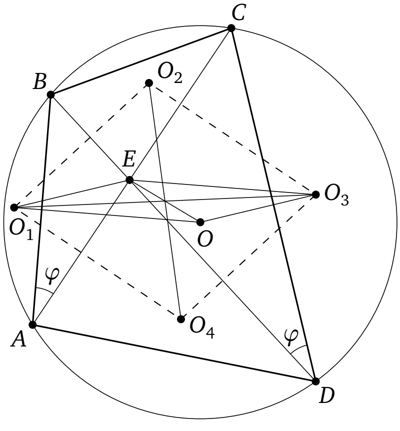

Рис. 12

буквой φ углы $\angle BAC = \angle BDC$, то $\angle O_3EC = 90^\circ - \varphi$. В самом деле, центральный угол EO_3C, соответствующий BDC, равен 2φ, поэтому требуемое равенство получается из рассмотрения равнобедренного треугольника EO_3C. Теперь очевидно, что прямая EO_3 перпендикулярна AB. □

Задачи для самостоятельного решения

1. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная, A, B — точки касания. Докажите, что $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

2. На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Проведены их общие внешние и внутренние касательные. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности.

3. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D. Докажите, что $AD = BD$.

4. Докажите *обобщённую теорему Птолемея*: пусть четыре окружности α, β, γ и δ касаются пятой внешним образом; пусть $t_{\alpha\beta}$, $t_{\beta\gamma}$ и т. д. — длины общих внешних касательных окружностей α и β, соответственно β и γ и т. д. Докажите, что выполняется равенство

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\alpha\delta}t_{\beta\gamma} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}.$$

Каким образом надо изменить эту теорему, чтобы утверждение выполнялось для окружностей, касающихся друг друга внутренним образом?

5. В треугольнике ABC проведена высота AH; O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

6. Докажите одну из теорем Архимеда: точка B лежит на дуге AC, точка M — середина этой дуги; из M опущен перпендикуляр на ближайшее к этой точке звено ломаной ABC; докажите, что этот перпендикуляр делит длину ломаной ABC пополам.

7. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и CDE (точка E общая, см. рис. 13), касаются, если и только если $\angle BAC + \angle CED = \angle BCD$.

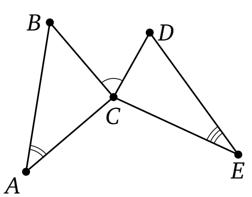

Рис. 13

8. В окружности проведена хорда AB, касательные, проведённые к окружности в точках A и B, пересекаются в точке K, M — середина AB, P — произвольная точка на (меньшей) дуге AB. Докажите, что углы KPA и BPM равны.

9. Докажите, что четыре точки пересечения окружностей, построенных на сторонах данного четырёхугольника как на хордах, отличные от вершин четырёхугольника, лежат на одной окружности.

10. На дуге окружности, стягиваемой хордой AD, взяты точки B и C. При этом биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке E, лежащей на хорде AD. Известно, что $\frac{AD}{CD}=k$. Найдите 1) отношение расстояний от E до прямых AB и CD; 2) отношение $\frac{AB}{CD}$.

Лекция 8

Теорема Понселе I: треугольники и четырёхугольники

В этой лекции мы продолжим наше знакомство с увлекательным миром многоугольников, вписанных в окружность. А именно, в ней и в следующей лекции мы докажем знаменитую *теорему Понселе*.

Теорема 1. *Пусть на плоскости нам даны две такие непересекающиеся окружности Ω, ω, что ω лежит внутри Ω. Предположим, что существует хотя бы одна такая замкнутая n-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ (мы считаем, что A_n соединено звеном с A_1), что все точки A_1, A_2, …, A_n лежат на окружности Ω и все звенья A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 касаются окружности ω. Тогда таких n-звенных ломаных бесконечно много. На самом деле в качестве первой вершины такой ломаной можно взять любую точку на окружности Ω.*

Более общим образом, окружности Ω и ω могут пересекаться, или лежать одна вне другой, тогда то же самое утверждение будет справедливо со следующими поправками: точки A_1, …, A_n лежат на окружности Ω, и ***прямые*** *A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 касаются окружности ω*[1].

Первый нетривиальный случай этого утверждения получаем уже при $n=3$. В этом случае замкнутая ломаная становится треугольником, а теорема Понселе превращается в следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если Ω и ω — соответственно описанная и вписанная окружности некоторого треугольника ABC, то у любого вписанного в Ω треугольника $A'B'C'$, стороны которого $A'B'$ и $A'C'$ касаются ω, сторона $B'C'$ тоже касается ω* (см. рис. 1). *То же самое выполняется, если вместо вписанной окружности ω рассмотреть вневписанную окружность ω_a* (см. рис. 2).

Доказательство. Случай вписанной окружности можно получить как простое следствие формулы Эйлера, связывающей рассто-

[1] Существуют и другие обобщения теоремы Понселе. Некоторые из них мы опишем в конце следующей лекции.

яние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника и радиусы этих окружностей. Напомним эту формулу (см. лекцию 5): если d — расстояние между центрами, а R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно, то $d^2 = R^2 - 2Rr$.

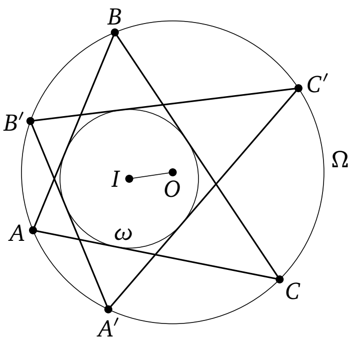

Рис. 1

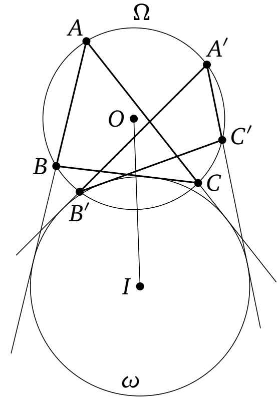

Рис. 2

Теперь, чтобы доказать первую часть утверждения, заметим, что из формулы Эйлера следует, что по любым двум из параметров R, r и d третий восстанавливается однозначно. В частности, если даны R и d, то величина радиуса вписанной окружности задана единственным образом. Построим теперь для произвольной точки A' на окружности Ω, описанной около треугольника ABC, хорды $A'B'$ и $A'C'$, касающиеся вписанной в ABC окружности ω.

Допустим, что отрезок $B'C'$ не касается ω. Тогда мы можем уменьшить или увеличить радиус ω (изменив при этом положение точек B' и C', но не меняя центр самой окружности ω, а также окружность Ω и точку A') таким образом, что прямая $B'C'$ станет касательной к ω. В самом деле, если радиус ω стремится к нулю, то прямая $B'C'$ не имеет общих точек с ω, а когда r делается достаточно большим, окружность пересекает прямую $B'C'$. Значит, в некоторый момент прямая и окружность касаются друг друга. Но в таком случае мы получим треугольник $A'B'C'$, вписанный в ту же окружность Ω, что и треугольник ABC, и описанный около окружности ω', центр которой совпадает с центром окружности ω, а радиус другой. Это противоречит ранее сделанному наблюдению.

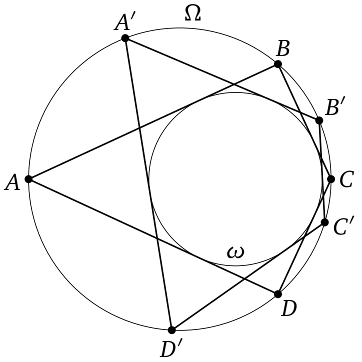

Рис. 3

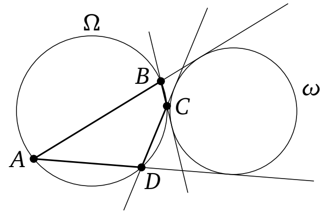

Рис. 4

Случай вневписанной окружности ничем не отличается от только что рассмотренного, правда, вместо формулы Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружности надо использовать её аналог для расстояния между центрами описанной и вневписанной окружности. Мы предлагаем читателю доказать его самостоятельно (соответствующие указания будут даны в задачах для самостоятельного решения в конце лекции). □

Прежде чем переходить к доказательству теоремы Понселе в общем случае (для произвольного n), рассмотрим ещё один важный частный случай — случай $n=4$. Иными словами, мы изучим четырёхугольники, около которых можно описать окружность и при этом одновременно в них можно вписать некоторую окружность. Если мы хотим для них доказывать теорему Понселе в самой общей ситуации, следует допустить невыпуклые и даже самопересекающиеся четырёхугольники, все вершины которых лежат на одной окружности, а все стороны или их продолжения касаются другой окружности. Вариантов расположения окружностей и видов касания при этом получается довольно много. Два примера возможного расположения окружностей приведены на рис. 3 и 4. Поэтому, чтобы не загромождать изложение излишними подробностями, мы ограничимся только самым наглядным случаем — тем, что соответствует рис. 3. Даже в этом случае совсем не просто найти пример такого вписанно-описанного четырёхугольника, отличного от тривиального — квадрата. Поэтому первое, что надо сделать, — попытаться описать достаточно широкий класс четырёхугольников, удовлетворяющих требуемому свойству. Этим мы сейчас и займёмся. Начнём с доказательства следующего простого утверждения.

Утверждение 2. *Пусть $ABCD$ — произвольный вписанный четырехугольник. Пусть E — точка пересечения его диагоналей. Опустим из E перпендикуляры на стороны четырёхугольника (или их продолжения), и пусть K, L, M и N — основания этих перпендикуляров. Тогда в четырёхугольник $KLMN$ можно вписать окружность с центром в точке E.*

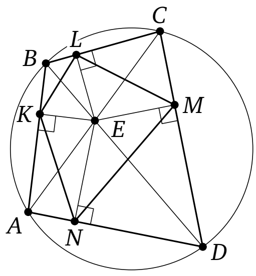

Рис. 5

Доказательство. Рассмотрим рис. 5. Так как EK и EN перпендикулярны отрезкам AB и AD соответственно, четырёхугольник $EKAN$ можно вписать в окружность (сумма противоположных углов этого четырёхугольника равна $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). Поэтому углы KNE и KAE равны как опирающиеся на одну дугу. Аналогично из рассмотрения четырёхугольника $ENDM$ получаем $\angle ENM = \angle EDM$. Но так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, имеем

$$\angle EAK = \angle CAB = \angle CDB = \angle EDM.$$

Значит, $\angle KNE = \angle ENM$, т. е. EN — биссектриса угла KNM. Аналогично все остальные отрезки EK, EL и EM тоже являются биссектрисами соответствующих углов четырехугольника $KLMN$. Так как биссектрисы углов этого четырёхугольника пересекаются в одной точке (точке E), в этот четырёхугольник можно вписать окружность. □

Ценность утверждения 12 в том, что оно даёт нам удобный способ построения описанных четырёхугольников[1]. Было бы замечательно, если бы четырёхугольник $KLMN$ из этого утверждения был бы ещё и вписанным в какую-нибудь окружность. В общем случае, однако, это не так, как несложно убедиться экспериментально. Но справедливо следующее предложение, которое является ключевым в представленном здесь доказательстве теоремы Понселе для четырёхугольников.

Утверждение 3. *Пусть четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ такие же, как и в предыдущем утверждении. Предположим дополнительно, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Тогда четырёхугольник $KLMN$ можно вписать в окружность.*

[1] То есть четырёхугольников, имеющих *вписанную* окружность.

Для **доказательства** этой леммы нам потребуется, во-первых, свойство параллелограмма (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, см. лекцию 2, сразу после теоремы косинусов), а во-вторых, следующее утверждение, которое мы предлагаем читателю доказать самостоятельно (это задача для самостоятельного решения номер 7 из лекции 5). *Пусть хорды* AB *и* CD *некоторой окружности пересекаются под прямым углом, причём* $BD=a$, $AC=b$ (*см. рис.* 6)*. Тогда радиус этой окружности равен* $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

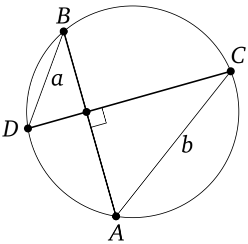

Рис. 6

С помощью этих утверждений мы не только докажем, что K, L, M и N лежат на одной окружности, но и найдём центр и радиус этой окружности. Рассмотрим рис. 7. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, P и Q — середины сторон AB и CD соответственно, а K и M — основания перпендикуляров, опущенных из E на эти стороны. Заметим, что перпендикуляры, восставленные к AB и CD в точках P и Q, пересекаются в центре окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. С другой стороны, рассмотрим $\angle PEB$: так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, а треугольник ABE прямоугольный и, следовательно, P — центр его описанной окружности, мы имеем следующие равенства:

$$\angle PEB = \angle PBE = \angle ABD = \angle ACD = \angle AEM$$

(последнее равенство следует из перпендикулярности EM и CD). Следовательно, точки P, E и M лежат на одной прямой — перпендикуляре к CD. А так как OQ — серединный перпендикуляр к CD, получаем, что отрезок PE параллелен OQ. Аналогично рассматривая углы QEC и KEA, можно доказать, что отрезок OP параллелен отрезку QE. Таким образом, получаем, что четырёхугольник $OPEQ$ — параллелограмм. Следовательно, отрезки OE и PQ пересекаются в своих серединах, т. е. (см. рис. 7) $QS=PS=\frac{1}{2}PQ$. С другой стороны, из рассмотрения трапеции $KEOP$, в которой $\angle EKP = \angle KPO = 90°$, следует, что $SP=SK$. Точно так же $SQ=SM$. Получаем, что точка S равноудалена от K и M. Заметим кстати, что S — середина отрезка, соединяющего центр окружности, описанной около $ABCD$, и точку пересечения диагоналей $ABCD$, а значит, её положение не зависит от точек K и M. В частности, из этого следует, что точка S равно-

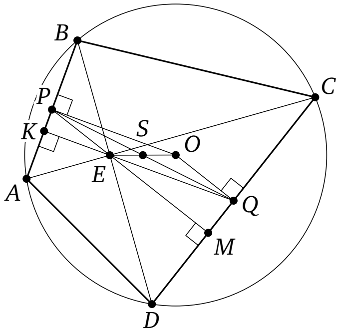

Рис. 7

удалена и от точек L и N (не изображённых на рис. 7). Если мы докажем, что расстояние от S до точек L и N равно расстоянию от S до K и M, то тем самым получим, что S — центр окружности, описанной около $KLMN$.

Для доказательства нам достаточно выразить расстояние между S и M через радиус окружности, описанной около $ABCD$, и длину отрезка EO. Используя свойство параллелограмма, мы вычисляем

$$SM^2 = SQ^2 = \frac{1}{4}PQ^2 = \frac{1}{2}(EP^2 + EQ^2) - \frac{1}{4}EO^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}CD^2\right) - \frac{1}{4}EO^2 = \frac{1}{8}(AB^2 + CD^2) - \frac{1}{4}EO^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(2\rho^2 - EO^2).$$

В этом вычислении мы воспользовались тем, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром его описанной окружности. Кроме того, в последнем равенстве мы применили упомянутое выше утверждение из задачи для самостоятельного решения (ρ — радиус окружности, описанной около $ABCD$). Точно таким же образом получаем, что

$$SL^2 = SN^2 = \frac{1}{4}(2\rho^2 - EO^2).$$

Так как эти выражения совпадают, получаем требуемый результат.

Итак, из утверждений 2 и 3 следует, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный и его диагонали перпендикулярны друг другу, то четырёхугольник $KLMN$, вершины которого являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей $ABCD$ на его стороны, будет одновременно вписанным и описанным! Заметим, что попутно мы получили следующую формулу, связывающую между собой радиус R окружности, описанной около $KLMN$, расстояние d между центром S этой окружности и точкой E, которая (см. утверждение 2) является центром окружности, вписанной в $KLMN$, и радиусом ρ окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$:

$$R^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 - 2d^2)$$

Оставив на время вопрос о том, исчерпываются ли все вписанно-описанные четырёхугольники рассматриваемыми примерами, докажем для четырёхугольника $KLMN$ аналог использованной нами ранее формулы Эйлера для треугольника. Для этого достаточно выразить через те же параметры ρ и d радиус окружности, вписанной в $KLMN$. Рассмотрим рис. 8.

Обозначим угол DAE через α, а угол BAE — через β. Четырёхугольник $ENAK$ можно вписать в окружность (см. доказательство утверждения 2), следовательно,

$$\angle EKN = \angle DAE = \alpha, \quad \angle ENK = \angle BAE = \beta.$$

Так как точка E пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ служит центром окружности, вписанной в $KLMN$, то радиус r этой окружности равен расстоянию от E до прямой KN, т. е. $r = EK\sin\alpha$. Теперь, пользуясь тем, что треугольники BEA и DEA прямоугольные, и применяя свойство хорд окружности, теорему синусов, а также известные формулы для площади треугольника, получаем

$$\begin{aligned} r &= EK\sin\alpha = AE\sin\beta\sin\alpha = AE\frac{BE}{AB}\frac{ED}{AD} = \\ &= \frac{BE\cdot ED}{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{2}AE\cdot BD\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{BD} = \\ &= \frac{\rho^2 - OE^2}{S_{ABD}}\cdot S_{ABD}\cdot\frac{1}{2\rho} = \frac{\rho^2-4d^2}{2\rho}. \end{aligned}$$

Чтобы получить связь между r, R и d, выразим ρ из обеих полученных формул и приравняем. Вместо того чтобы утомлять читателя выкладками, предлагаем самостоятельно доказать следующую формулу (см. задачи для самостоятельного решения):

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}. \tag{1}$$

Итак, если вершины вписанно-описанного четырёхугольника $KLMN$ являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки пе-

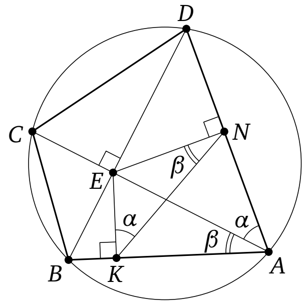

Рис. 8

ресечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ на его стороны (причем четырёхугольник $ABCD$ вписанный и с перпендикулярными диагоналями), то для такого четырёхугольника $KLMN$ выполняется уравнение (1)[1]. Заметим теперь, что для четырёхугольника $KLMN$, построенного указанным образом, выполняется и утверждение теоремы Понселе, а именно — существует бесконечно много четырёхугольников, вписанных и описанных около тех же самых окружностей. В самом деле, начнём вращать диагонали четырёхугольника $ABCD$ вокруг точки E (точка E при этом должна оставаться неподвижной) таким образом, чтобы они продолжали быть перпендикулярными, а $ABCD$ оставался вписанным в одну и ту же окружность. Тогда четырёхугольник $KLMN$ тоже начинает двигаться, оставаясь вписанным и описанным четырёхугольником. Но положение центров его вписанной и описанной окружностей и их радиусы зависят лишь от положения точек E и O и от радиуса ρ окружности, описанной около $ABCD$, поэтому эти окружности одни и те же для всех четырёхугольников $KLMN$ из рассматриваемого семейства. Так как при этом, очевидно, точка K может занять любое положение на описанной окружности $KLMN$, утверждение теоремы Понселе для $KLMN$ выполняется.

Теперь нам осталось только объяснить, как связан рассмотренный частный случай с общим. А именно, докажем, что других вписанно-описанных четырёхугольников не бывает!

Утверждение 4. *Для любого вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ существует такой вписанный четырехугольник $PQRS$ с*

[1] На самом деле эту формулу можно использовать для доказательства теоремы Понселе по аналогии со случаем треугольника.

перпендикулярными диагоналями, что $ABCD$ совпадает с четырехугольником с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей $PQRS$ на его стороны. При этом точка пересечения диагоналей $PQRS$ совпадет с центром вписанной окружности $ABCD$.

Доказательство. Пусть I — центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$. Проведём через вершины этого четырёхугольника прямые, перпендикулярные соответственно отрезкам IA, IB, IC и ID. Пусть $PQRS$ — образовавшийся четырёхугольник (см. рис. 9). Мы должны доказать, во-первых, что $PQRS$ можно вписать в окружность, а во-вторых, что I — точка пересечения его диагоналей, причём $PR \perp QS$. Первое утверждение — лёгкое следствие того факта, что каждый из образовавшихся четырёхугольников $IAPD$, $IBQA$, $ICRB$, $IDSC$ можно вписать в окружность (так как противоположные углы всех этих четырёхугольников прямые). Следовательно, у нас возникает большое количество равных углов (см. рис. 9; мы учли, что каждый из отрезков IA, IB, IC и ID является биссектрисой соответствующего угла), и мы получаем

$$\angle SPQ + \angle SRQ = \alpha + \delta + \beta + \gamma = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

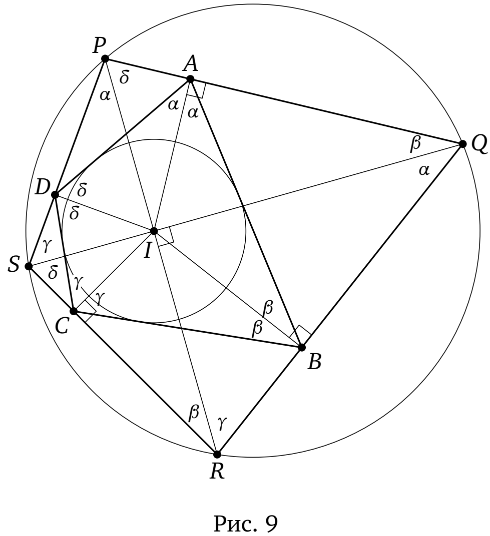

Рис. 9

Следовательно, $PQRS$ можно вписать в окружность. Чтобы доказать второе утверждение, найдём угол $\angle PIQ$:

$$\angle PIQ = \angle PIA + \angle AIQ = \angle PDA + \angle ABQ = (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \beta) = 90^\circ.$$

Мы учли, что $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, следовательно, $\alpha + \gamma = 90^\circ = \beta + \delta$. Точно так же можно доказать, что углы $\angle QIR$, $\angle RIS$, $\angle SIP$ тоже прямые, откуда следует требуемый результат. $\square$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите теорему Понселе для вневписанной окружности треугольника. Для этого следующим образом обобщите формулу Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей: *пусть r_a — радиус вневписанной окружности треугольника ABC, вписанной в угол A, I_a — её центр; O — центр описанной окружности ABC, R — её радиус; положим $d_a = OI_a$, тогда выполняется равенство $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.*

2. Докажите, что радиус описанной окружности любого треугольника не менее чем в два раза больше радиуса его вписанной окружности, причём равенство достигается для правильного треугольника и только для него.

3. В треугольнике ABC опущены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки C_1 на прямые AC, AA_1, BB_1 и BC, лежат на одной прямой.

4. Докажите теорему Понселе для $n = 4$ в случае окружностей, изображённых на рис. 4. Для этого докажите следующие три утверждения, аналогичные утверждениям 2—4 из лекции.

а) Если $ABCD$ — самопересекающийся четырёхугольник, вписанный в окружность (см. рис. 10), E — точка пересечения его «диагоналей» AC и BD, то в четырёхугольник $KLMN$ с вершинами в основаниях перпендикуляров,

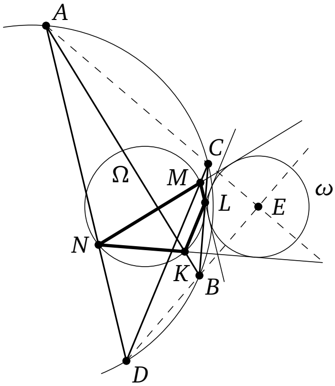

Рис. 10

опущенных из E на стороны четырёхугольника $ABCD$ (или их продолжения), можно вписать окружность с центром в точке E. Найдите радиус этой окружности, если известны радиус окружности, описанной около $ABCD$, и расстояние от её центра до E.

б) Если дополнительно диагонали четырёхугольника $ABCD$ из предыдущего пункта перпендикулярны, то около него можно описать окружность. Найдите центр и радиус этой окружности, если известны радиус окружности, описанной около $ABCD$, и расстояние от её центра до E.

в) Докажите, что любой четырёхугольник, аналогичный $KLMN$, может быть получен из некоторого самопересекающегося четырёхугольника $ABCD$. Выясните, для каких точек на окружности Ω соответствующий четырёхугольник $KLMN$ будет иметь самопересечения, быть невыпуклым и т. д.

5. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух оставшихся треугольников.

6. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что четыре прямые, каждая из которых соединяет одну из вершин четырёхугольника и центр окружности, проходящей через эту вершину и две смежные с ней вершины четырёхугольника, пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что центры четырёх окружностей, описанных около четырёх треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости, лежат на одной окружности.

8. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон вписанно-описанного четырёхугольника с вписанной в него окружностью, перпендикулярны (постарайтесь не использовать описание таких четырёхугольников, данное на лекции).

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Найдите угол между диагоналями четырёхугольника.

10. Основание каждой высоты треугольника проецируется на две другие стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

Лекция 9

Теорема Понселе II: общий случай

В этой лекции мы дадим, наконец, доказательство теоремы Понселе для произвольного n. Заранее предупреждаем читателя, что мы разберём лишь простейший случай взаимного расположения окружностей ω и Ω, а именно, когда одна из них (ω) целиком лежит внутри другой. Мы будем следовать изложению, принятому в книге И. Ф. Шарыгина «Геометрия, планиметрия. Задачник для 9—11 классов» (М.: Дрофа, 2001). Желающие могут попытаться проверить, какая часть из наших рассуждений может быть приспособлена к случаю общего расположения окружностей. В конце лекции мы дадим небольшой набросок доказательства теоремы Понселе в максимально широкой формулировке (однако, не выходящей за рамки евклидовой геометрии).

Для начала напомним формулировку теоремы.

Теорема 1. *Пусть на плоскости даны две такие непересекающиеся окружности Ω, ω, что ω лежит внутри Ω. Предположим, что существует хотя бы одна такая замкнутая n-звенная ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ (мы считаем, что A_n соединено звеном с A_1), что все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на окружности Ω и все звенья $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ касаются окружности ω. Тогда таких n-звенных ломаных бесконечно много. На самом деле в качестве первой вершины такой ломаной можно взять любую точку на окружности Ω.*

Наивно было бы рассчитывать, что нам удастся доказать это утверждение совсем элементарными средствами, с помощью равенств треугольников, вписанных углов, подобий и т. п. Тем не менее, мы ограничимся если и не стопроцентно классическими, то всё же вполне школьными методами. А именно, нам придётся привлечь некоторые соображения из аналитической (декартовой) геометрии на плоскости. Мы докажем с их помощью следующую лемму.

Утверждение 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — фиксированные точки на плоскости, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — данные числа. Тогда геометрическим местом таких точек M, что сумма $k_1A_1M^2 + k_2A_2M^2 + \ldots + k_nA_nM^2$*

постоянна, будет а) *окружность, точка или пустое множество, если* $k_1+k_2+\ldots+k_n\neq 0$; б) *прямая, пустое множество или вся плоскость, если* $k_1+k_2+\ldots+k_n=0$. *В частном случае, когда* $n=2$, $k_1+k_2\neq 0$, *центр соответствующей окружности будет лежать на прямой* A_1A_2.

Доказательство. Введём на плоскости декартову систему координат. Пусть координаты точки A_i равны $(x_i; y_i)$. Тогда искомое геометрическое место точек будет задаваться следующим уравнением:

$$k_1\big((x-x_1)^2+(y-y_1^2)\big)+\ldots+k_n\big((x-x_n)^2+(y-y_n^2)\big)=C.$$

Здесь $(x; y)$ — координаты точки M, а C фиксированное нами значение суммы $k_1A_1M^2+k_2A_2M^2+\ldots+k_nA_nM^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем

$$Kx^2+Ky^2-2Lx-2My+N=0,$$

где

$$\begin{aligned}
K&=k_1+\ldots+k_n,\\
L&=k_1x_1+\ldots+k_nx_n,\\
M&=k_1y_1+\ldots+k_ny_n,\\
N&=k_1(x_1^2+y_1^2)+\ldots+k_n(x_n^2+y_n^2)-C.
\end{aligned}$$

Если теперь $K\neq 0$, то полученное уравнение задаёт окружность, точку или пустое множество в зависимости от того, меньше нуля, равно нулю или больше нуля выражение $\frac{N}{K}-\frac{L^2}{K^2}-\frac{M^2}{K^2}$ (чтобы это доказать, достаточно выделить полные квадраты). Если же $K=0$, наше уравнение задаёт прямую, пустое множество или всю плоскость в зависимости от того, какие из коэффициентов L, M и N равны нулю (например, пустое множество соответствует случаю, когда $L=M=0$, $N\neq 0$).

Наконец, в интересующем нас частном случае центр окружности будет иметь координаты

$$\Big(\frac{k_1x_1+k_2x_2}{k_1+k_2}; \frac{k_1y_1+k_2y_2}{k_1+k_2}\Big),$$

а уравнение прямой A_1A_2 выглядит как $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Легко проверить, что эта прямая содержит точку с указанными координатами. □

Наше доказательство теоремы Понселе будет основываться на следующих двух утверждениях, второе из которых основывается на первом, а первое — на только что доказанной лемме. Вот эти утверждения.

Утверждение 2. *Пусть прямая пересекает одну из двух данных окружностей в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Проведём касательные к каждой из окружностей в точках её пересечения с данной прямой. Пусть касательные, проведённые к первой из них, пересекают касательные, проведённые ко второй окружности, в точках K, L, M и N. Тогда точки K, L, M и N лежат на одной окружности, центр которой лежит на прямой, соединяющей центры данных окружностей.*

Утверждение 3. *Пусть окружность ω содержится внутри окружности Ω. Предположим, что точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ таковы, что прямые A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$ все касаются ω и то же самое верно для прямых B_1B_2, $B_2B_3, \ldots$ Тогда все прямые A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ касаются одной и той же окружности α, центр которой лежит на прямой, соединяющей центры окружностей Ω и ω.*

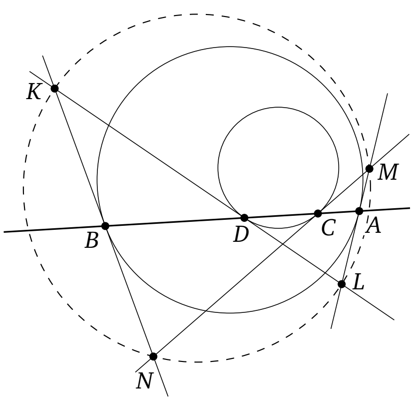

Рис. 1

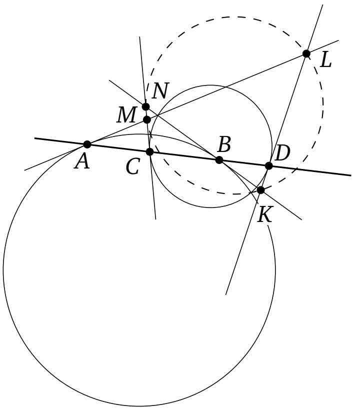

Рис. 2

Отметим, что на самом деле утверждения 2 и 3 справедливы при любом взаимном расположении данных окружностей и прямой: на рис. 1 и 2 приведены примеры, иллюстрирующие первое утверждение. В первом случае одна из окружностей содержит другую внутри себя, а во втором — окружности пересекаются. Точно так же на

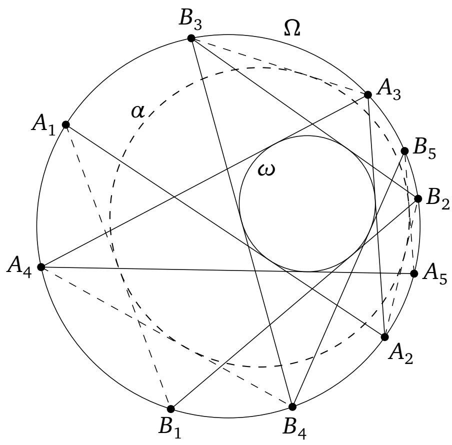

Рис. 3

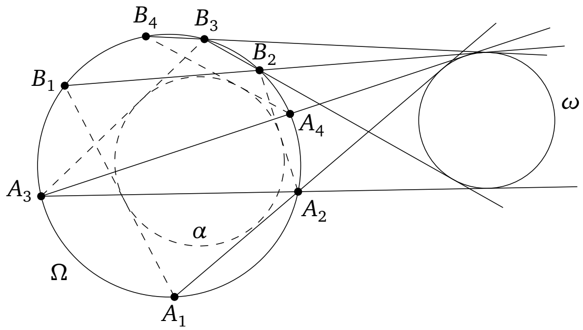

Рис. 4

рис. 3 и 4 приведены примеры взаимного расположения окружностей Ω и ω, фигурирующих в утверждении 3. Как видно, окружность α существует вне зависимости от того, содержит ли окружность Ω внутри себя ω или нет. Правда, метод, которым мы докажем утверждение 3, существенным образом опирается на свойства чертежа. Чтобы не загружать текст разбором различных вариантов, мы ограничимся только доказательством того случая, который явно сформулирован. Разбор остальных вариантов мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Доказательство утверждения 2. Чтобы показать, что точки K, L, M и N попадают на одну окружность, достаточно применить к четырёхугольнику $KLMN$ критерий вписанности для четырёхугольников. Например, на рис. 1 имеем

$$\angle KNM = \angle BNC = \pi - \angle CBN - \angle BCN = \pi - \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD),$$

$$\angle KLM = \angle DLA = \pi - \angle DAL - \angle ADL = \pi - \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD),$$

где $\smile AB$, $\smile CD$ — дуги, высекаемые из данных окружностей прямой. Мы воспользовались тем, что угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине соответствующей дуги.

Таким образом, $\angle KNM = \angle KLM$, и, значит, точки лежат на одной окружности. Однако этот результат не говорит ничего о том, где расположен центр этой окружности. Чтобы это установить, нам потребуется поработать чуть-чуть побольше. Для этого найдём отношение $\frac{BK}{KD}$: по теореме синусов имеем

$$\frac{BK}{KD} = \frac{\sin\angle KDB}{\sin\angle KBD} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\smile CD\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\smile AB\right)}.$$

Точно так же получаем, что отношения $\frac{AL}{LD}$, $\frac{AM}{MC}$, $\frac{NB}{NC}$ равны той же величине. Обозначим эту величину буквой $\varkappa$. Пусть O_1, O_2 — центры данных окружностей, R_1, R_2 — их радиусы. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$\varkappa^2 = \frac{BK^2}{KD^2} = \frac{O_1K^2 - R_1^2}{O_2K^2 - R_2^2},$$

откуда следует, что $O_1K^2 - \varkappa^2 O_2K^2 = R_1^2 - \varkappa^2 R_2^2$. То же самое соотношение выполняется для остальных точек L, M и N. Таким образом, все они принадлежат геометрическому месту точек X, для которых выполняется соотношение $O_1X^2 - \varkappa^2 O_2X^2 = \mathrm{const}$. Согласно утверждению 1 это множество — окружность с центром на прямой O_1O_2. Случай, изображённый на рис. 2, так же как все остальные возможные случаи взаимного расположения данных окружностей, ничем не отличается от рассмотренного. □

В дальнейшем нам понадобится одно важное, хотя и простое следствие из утверждения 2: *любая из окружностей, фигурирующих в ней, однозначно определяется двумя другими и данной в условии прямой* (*прямой AB*). А именно, очевидно, что положение окружности, существование которой мы доказывали (назовём её γ), определяется этими данными, но верно также и то, что положение любой из двух данных окружностей тоже определяется прямой AB, второй данной окружностью и окружностью γ. В самом деле, проведём касательные к данной окружности в точках её пересечения с прямой AB и найдём точки K, L, M и N как точки пересечения проведённых касательных с γ. В этих же точках γ должна пересекаться с касательными, проведёнными ко второй окружности в точках её пересечения с данной прямой. Следовательно, эти касательные совпадают с прямыми KL и MN (на самом деле это зависит ещё от взаимного расположения этих точек — см. рис. 1 и 2), а точки их касания с искомой окружностью — с точками пересечения KL и MN с прямой AB. Кроме того, центры всех этих окружностей лежат на одной прямой — иными словами, можно утверждать и то, что центр искомой (только что восстановленной) окружности лежит на прямой, соединяющей центр окружности γ с центром второй данной окружности.

Доказательство утверждения 3. Ситуация, которую мы будем рассматривать, изображена на рис. 3. Мы предлагаем читателю самостоятельно изучить случай, изображённый на рис. 4, и прочие возможные случаи взаимного расположения окружностей Ω и ω.

Итак, пусть C_1, C_2 — точки касания ω с отрезками A_1A_2 и A_2A_3 соответственно; аналогично пусть D_1, D_2 — точки касания ω с B_1B_2 и B_2B_3 (см. рис. 5). Пусть P — точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2, K и L — точки пересечения прямой C_1D_1 с прямыми A_1B_1 и A_2B_2 соответственно.

Для начала заметим, что $\angle A_2A_1B_1 = \angle A_2B_2B_1$ как опирающиеся на одну дугу. С другой стороны,

$$\angle LD_1B_2 = \angle B_1D_1K = \frac{1}{2} \smile C_1D_1 = \angle A_2C_1L = \angle KC_1A_1.$$

Таким образом, два из трёх углов в треугольниках KC_1A_1 и LD_1B_2 равны, следовательно, равны и углы $\angle D_1LB_2$ и $\angle C_1KA_1$. Поэтому треугольник KPL равнобедренный, $KP = PL$. Из этого следует, что существует окружность, касающаяся прямой A_1B_1 в точке K и прямой A_2B_2 в точке L. С другой стороны, мы находимся в ситуации, обсуждённой после доказательства утверждения 2: окружность ω — одна из данных окружностей, C_1D_1 — данная прямая, а Ω играет роль окружности γ. Следовательно, окружность, касающаяся A_1B_1 в точке K и A_2B_2 в точке L, играет роль второй данной окружности из условия утверждения 2. В частности, её центр лежит на прямой, проходящей через центры Ω и ω. Заметим, что это условие позволяет определить окружность только по одной из двух точек K и L.

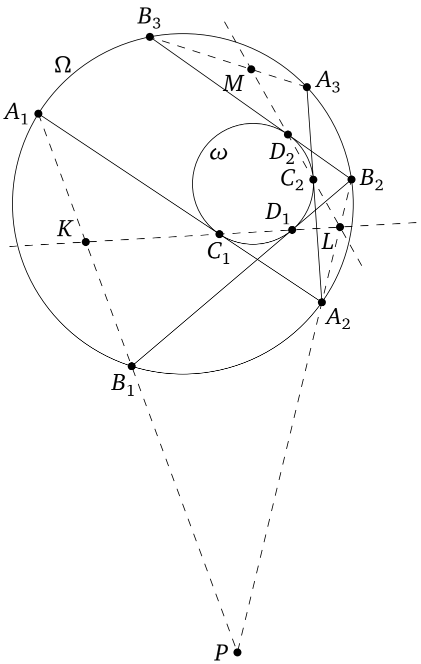

Рис. 5

Чтобы теперь доказать утверждение 3 целиком, достаточно показать, что точка L' пересечения A_2B_2 и C_2D_2 совпадает с L. В самом деле, рассуждая точно так же, как и прежде, мы покажем, что существует окружность, касающаяся A_2B_2 в точке L' и A_3B_3 в точке M, причём центр этой окружности лежит на прямой, соединяющей центры окружностей Ω и ω. Следовательно, если $L=L'$, то эта окружность совпадает с предыдущей. Для доказательства найдём отношение $\frac{A_2L}{LB_2}$:

$$\frac{A_2L}{LB_2}=\frac{h}{h'}=\frac{S_{A_2C_1D_1}}{S_{B_2C_1D_1}}=\frac{\frac{1}{2}C_1A_2\cdot C_1D_1\sin(\angle A_2C_1D_1)}{\frac{1}{2}D_1B_2\cdot C_1D_1\sin(\angle C_1D_1B_2)}=\frac{C_1A_2}{D_1B_2}.$$

Здесь h, h' — перпендикуляры, опущенные из точек A_2 и B_2 на C_1D_1, и мы воспользовались тем, что

$$\angle A_2C_1D_1=\frac{1}{2}\smile C_1D_1,\quad \angle C_1D_1B_2=\pi-\frac{1}{2}\smile C_1D_1.$$

Но точно так же можно получить равенство

$$\frac{A_2L'}{L'B_2}=\frac{C_2A_2}{D_2B_2}=\frac{C_1A_2}{D_1B_2},$$

где мы на последнем этапе воспользовались равенством касательных, проведённых к одной и той же окружности из одной точки. □

Заметим, что по ходу дела мы доказали ещё одно важное свойство рассматриваемой конфигурации: *точки касания прямых A_iB_i с окружностью α лежат между точками A_i и B_i*. Теперь осталось только применить полученные результаты, для того чтобы доказать основную теорему.

Доказательство теоремы Понселе. Пусть окружность ω лежит целиком внутри окружности Ω, и пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — замкнутая n-звенная ломаная, все вершины которой лежат на Ω и все рёбра которой касаются окружности ω. Пусть $B_1B_2\ldots B_nB_{n+1}$ — другая n-звенная ломаная, все вершины которой лежат на Ω, а все рёбра касаются ω. Предположим, что вторая ломаная не замкнута, т. е. $B_{n+1}\neq B_1$. Без ограничения общности можно считать, что точка B_1 лежит на той из дуг A_1A_2 окружности Ω, для которой соответствующий сегмент не содержит окружности ω, и что направления обхода окружности Ω, задаваемые точками $A_1, A_2, \ldots$ и точками $B_1, B_2, \ldots$, совпадают. Тогда точка B_2 должна попасть на дугу A_2A_3, точка B_3 — на дугу A_3A_4 и т. д., так что точка B_{n+1} опять попадает на дугу A_1A_2. Согласно утверждению 3 отрезки A_iB_i касаются некоторой окружности α для всех $i=1, 2, \ldots, n$. Более того, так как $A_{n+1}=A_1$, отрезок A_1B_{n+1} тоже касается окружности α. С другой стороны, отрезок A_1A_2 обязан пересекать окружность α (ведь на ней есть точки, лежащие по обе стороны от A_1A_2, — точки её касания с отрезками A_iB_i). Таким образом, получилось, что из точки A_1 можно провести две касательные к одной окружности, лежащие по одну сторону от одной и той же секущей. Это невозможно, значит, $B_{n+1}=B_1$. □

Завершим лекцию обсуждением возможных обобщений и уточнений доказанной теоремы. Прежде всего заметим, что понятия вписанности и касания сохраняются при большинстве геометрических преобразований. Например, если мы перенесём всю конфигурацию параллельно на тот или иной вектор или повернём вокруг некоторого центра на некоторый угол, то ничего не изменится. Правда, ничего нового мы при этом не получим — окружности перейдут в окружности, прямые — в прямые, так что этот способ обобщения ни к чему не приводит. То же самое произойдёт, если мы будем использовать гомотетию.

Однако не всё так плохо. Ведь есть ещё и иные преобразования плоскости. Например — инверсия! Во второй части книги мы планируем подробно обсудить её свойства, а сейчас не будем на них останавливаться (желающие могут изучить их самостоятельно по книжке И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (Т. 2. М.: ГИНТЛ, 1956), или по задачнику И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия» (М.: Наука, 1980), или подождать второй части наших лекций), скажем только, что окружности она обычно переводит в окружности, а прямые — тоже в окружности, но проходящие через выделенную точку — центр инверсии. И наоборот: окружности, проходящие через центр инверсии, при инверсии переходят в прямые. Таким образом, мы без особых усилий получили следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть даны две окружности Ω и ω и точка M. Рассмотрим точку A_1 на окружности Ω и проведём через неё и через точку M окружность, касающуюся ω. Пусть A_2 — вторая точка пересечения Ω и проведённой окружности. Повторим эту процедуру для A_2, получим A_3 и т. д. Предположим, что на каком-то этапе процесс зациклиться, т. е. $A_{n+1} = A_1$ (см. рис. 6, на котором $n = 4$). Тогда для любой другой точки B_1 на Ω этот процесс тоже зациклится на n-м шаге.*

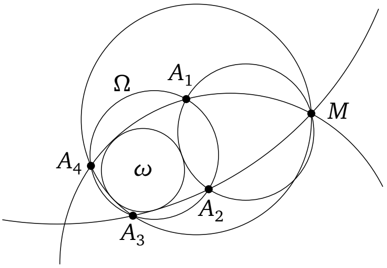

Рис. 6

Как и теорема Понселе, это утверждение справедливо при любом взаимном расположении окружностей Ω и ω. Надо только иметь в виду, что некоторые из построенных нами окружностей могут выродиться в окружности бесконечного радиуса, т. е. в прямые.

Другой важный класс преобразований плоскости, к сожалению, выходящий далеко за рамки школьной программы, составляют так называемые аффинные и проективные преобразования (читатель, желающий поскорее познакомиться с ними, может заглянуть в уже упомянутую выше книгу Яглома). В отличие от движений и инверсии, эти преобразования, переводящие прямые на плоскости снова в прямые, переводят окружности не в окружности или прямые (знакомые нам по школьному курсу геометрии объекты), а в более широкий класс кривых. А именно, можно доказать, что подходящим проективным преобразованием окружность можно перевести в любую *конику*, или, говоря подробнее, *коническое сечение*.

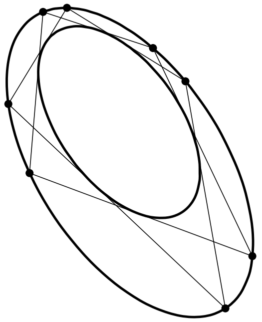

Рис. 7

Как известно, существует три основных типа конических сечений: *эллипс* (частным случаем которого является окружность), *парабола* и *гипербола*. Все эти кривые (и только они, если не учитывать вырожденные случаи) задаются на декартовой плоскости уравнениями степени 2 от x, y, поэтому их часто называют также *кривыми второго порядка* или *квадриками*. Мы не будем здесь подробно описывать эти кривые и их многочисленные красивые свойства. Желающим можно порекомендовать превосходную книгу А. В. Акопяна и А. А. Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» (М.: МЦНМО, 2007).

Результаты применения проективных преобразований к конфигурации, фигурирующей в теореме Понселе, изображены на рис. 7 и 8. В обоих случаях мы получили пару конических сечений и ломаную, каждое звено (точнее, каждая прямая, содержащая звено) которой касается одной из кривых, а каждая вершина – лежит на

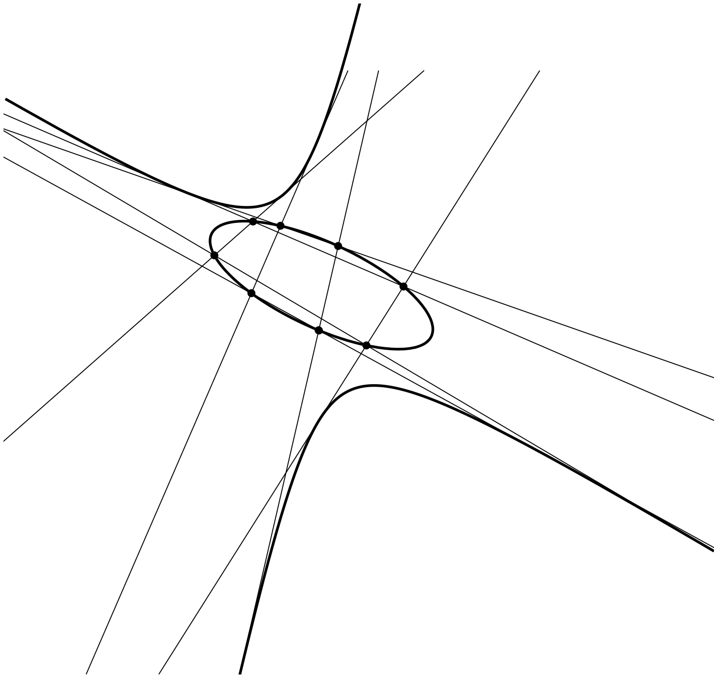

Рис. 8

второй кривой. С другой стороны, несложно проверить (решая соответствующую систему, составленную из уравнения прямой и уравнения кривой второго порядка), что любая прямая, пересекающая такую кривую, но не касающаяся её, имеет с ней ровно две общие точки. Кроме того, если через точку вне коники к ней можно провести касательную, то таких касательных ровно две. Поэтому можно задать вопрос: предположим, что нам даны две кривые второго порядка и мы, начиная с точки A_1 на одной из них, строим касательную к другой, берём в качестве точки A_2 вторую точку пересечения проведённой прямой с первой из данных коник и т. д., и в результате получаем точки $A_3, A_4, \ldots$ (эту процедуру мы будем называть *процессом Понселе*); пусть для некоторого n мы получим, что $A_{n+1} = A_1$, верно ли, что то же самое будет выполняться и для любой другой точки B_1 на первой кривой?

Оказывается, да! На самом деле справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть даны две невырожденные и не касающиеся друг друга коники. Если для какой-то точки A_1 на одной из них процесс Понселе замыкается на n-м шаге (т. е. $A_{n+1} = A_1$), то он замкнётся на том же шаге для любой другой точки B_1 на этой конике.*

К сожалению, применением проективного преобразования этот факт доказывать нельзя — далеко не любую пару коник можно получить таким преобразованием из пары окружностей. В этом несложно убедиться, рассмотрев пару эллипсов, пересекающихся в четырёх различных точках. Поэтому доказательство этой обобщённой теоремы Понселе проводят исключительно алгебраическими методами. В общем и целом возможную идею доказательства можно описать так: на любом коническом сечении можно ввести координату t, аналогичную величине центрального угла, задающего положение точки на окружности. С помощью введённого параметра можно записывать уравнения касательных и находить точки их пересечения. Оказывается, все точки пересечения касательных, получающихся применением процесса Понселе, будут лежать на кривой, уравнение которой в координатах, связанных с параметром t, будет иметь степень, меньшую, чем число этих точек. Значит, это уравнение выполняется тождественно, а следовательно, не зависит от выбора первой точки. Подробности заинтересованный читатель может почерпнуть, например, из статьи В. В. Прасолова «Доказательство теоремы Понселе по Дарбу» (Математическое просвещение. 2001. Сер. 3, вып. 5. С. 140—144).

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверьте, что утверждение 2 будет выполняться в случае, когда окружность ω лежит вне окружности Ω (см. рис. 4).

2. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

3. Касательные к окружности, описанной около треугольника ABC, проведённые в точках A и B пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PC пересекает сторону AB в точке K, делящей её в отношении $AC^2 : BC^2$.

4. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

5. Две окружности радиусов 5 и 4 касаются внешним образом. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A, пересекает бóльшую окружность в точках B и C так, что $AB = BC$. Найдите AC.

6. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что прямые, содержащие общие хорды каждой пары этих окружностей, пересекаются в одной точке.

7. На плоскости даны четыре прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две из которых не параллельны. Докажите, что центры окружностей, описанных около четырёх образованных этими прямыми треугольников, лежат на одной окружности.

8. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

9. Докажите, что четыре прямые, каждая из которых проходит через основания перпендикуляров, опущенных из вершины вписанного четырёхугольника на стороны, не содержащие этой вершины, пересекаются в одной точке.

10. Докажите, что точки, симметричные центрам вневписанных окружностей произвольного треугольника относительно центра его же описанной окружности, лежат на окружности, концентрической вписанной окружности этого треугольника, с радиусом, равным диаметру описанной окружности.

Лекция 10

Окружности и касательные: признаки описанных четырёхугольников

На предыдущих лекциях мы изучали свойства и признаки вписанных четырёхугольников, а также простейшие (и не столь уж простейшие) следствия из них. Теперь настала пора познакомиться с аналогичными утверждениями для четырёхугольников, обладающих свойством, в некотором смысле «двойственным» к вписанности. А именно, мы будем обсуждать *описанные* четырёхугольники:

> *мы будем говорить, что четырехугольник — **описанный**, если существует окружность, касающаяся всех четырёх его сторон.*

Как мы видим, определение описанного четырёхугольника получается из определения вписанного заменой слова «вершина» на слово «сторона». Даже глагол менять не обязательно — ведь можно считать, что окружность, проходящая через точку, касается этой точки. Можно предположить, что и свойства описанных четырёхугольников могут быть получены как переформулировка свойств описанных четырёхугольников. Это наблюдение во многом верно, но в ещё большей степени — нет. На самом деле отличия появляются гораздо раньше, чем можно было бы предположить. В самом деле, в данном определении мы говорим о касании окружности с отрезками. Однако это понятие не очень хорошо определено — например, что делать, если окружность проходит через конец отрезка? Можно ли считать, что она всегда в таком случае будет касаться отрезка, если, конечно, у них нет больше общих точек? Это вопрос договорённостей, а не математики. С точки зрения математики гораздо естественнее говорить о касании окружностей с *прямыми*, а не с отрезками. Дадим поэтому более точное и, кажется, более полезное определение.

> *Предположим, что никакие три точки из точек A, B, C и D не лежат на одной прямой. Будем говорить, что $ABCD$ — описанный*

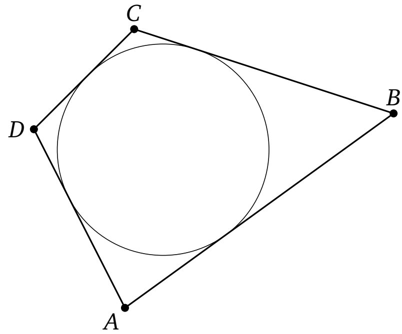

Рис. 1

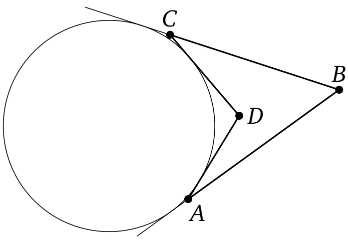

Рис. 2

санный четырёхсторонник, если существует окружность, касающаяся каждой из прямых AB, BC, CD и DA.

Вот тут-то и начинаются первые трудности: из определения следует, что окружность может касаться как сторон четырёхугольника, так и их продолжений, т. е. возможны как ситуация, изображённая на рис. 1, так и ситуация с рис. 2! Оба изображённых на них четырёхсторонника описанные. Поэтому все дальнейшие наши теоремы обычно будут иметь как минимум два варианта — для случая, изображённого на рис. 1, и для рис. 2 (мы советуем читателю обдумать, какие ещё варианты взаимного расположения окружности и четырёхугольника $ABCD$ существуют; полезно будет также самостоятельно сформулировать и доказать все утверждения настоящей лекции для этих случаев). Начнём же своё знакомство со свойствами описанных четырёхсторонников мы, как и ранее, с их признаков. Как и в случае вписанного четырёхугольника, эти признаки могут быть использованы не только в евклидовой плоскости, но и на сфере, и на плоскости Лобачевского. Поэтому, как и прежде, мы приведём два доказательства: одно более школьное, а другое — похожее на «абсолютное» доказательство признака вписанного четырёхугольников.

Теорема 1. *Пусть A, B, C и D — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тогда четырёхсторонник $ABCD$ является описанным, если и только если выполняется одно из следующих равенств*:

$$AB+CD=BC+DA, \tag{1}$$

$$DA+AB=BC+CD. \tag{2}$$

При этом в первом случае реализуется ситуация, изображённая на рис. 1 (*т. е. окружность лежит внутри четырёхугольника*), *а во втором — ситуация, изображённая на рис.* 2. (*Отметим, что на самом деле вариантов расположения окружности относительно четырёхугольника ABCD больше, чем представлено здесь, однако остальные признаки получаются из уже разобранных изменением обозначений — см. задачи для самостоятельно решения.*)

Доказательство. Показать, что оба условия необходимы, необычайно просто. Посмотрите на рис. 3 и 4. Отрезки, обозначенные на них одинаковыми буквами (x, y, z или w), равны, как отрезки касательных, проведённых из одной точки к некоторой окружности. Поэтому в первом случае мы будем иметь

$$AB+CD=(x+y)+(z+w)=(x+w)+(y+z)=BC+DA,$$

а во втором —

$$DA+AB=(y+x)+(w-x)=y+w=(w-z)+(y+z)=BC+CD.$$

Для доказательства обратного утверждения предположим, что равенство (1) выполняется, но окружности, касающейся всех данных прямых, не существует. Проведём тогда окружность, касающуюся трёх из четырёх прямых, например AB, BC и AD (такая окружность существует по тривиальным причинам). Проведём теперь через вершину C прямую CD' (точка D' лежит на прямой AD), касающуюся окружности (см. рис. 5).

Тогда четырёхсторонник $ABCD'$ описанный (причём окружность лежит внутри $ABCD'$), следовательно, для него выполняется равен-

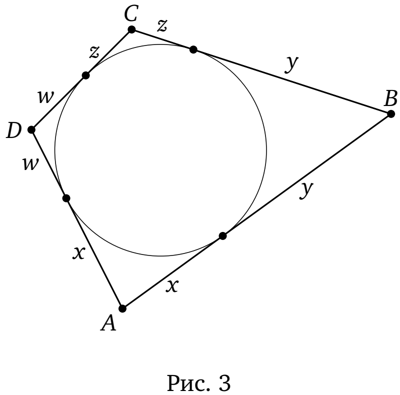

Рис. 3

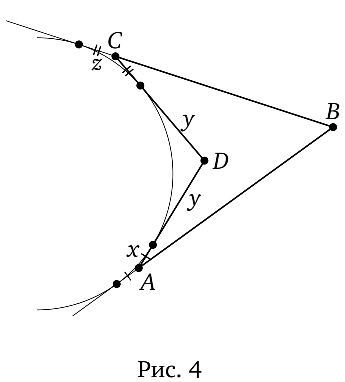

Рис. 4

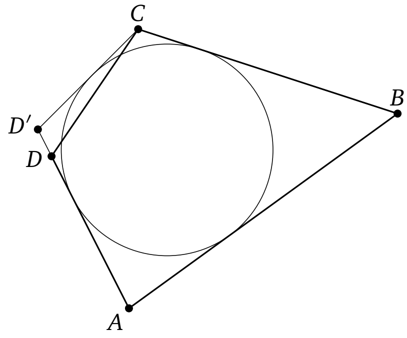

Рис. 5

ство (1), т. е.

$$AB + CD' = BC + AD'.$$

Но по условию $AB + CD = BC + AD$. Вычитая эти равенства почленно друг из друга, получаем

$$CD' - CD = DD', \quad \text{или} \quad CD' = CD + DD',$$

что противоречит неравенству треугольника (для $\triangle CDD'$).

Точно так же можно было бы доказать и существование окружности в случае, когда вместо равенства (1) выполняется равенство (2). Однако мы предпочтём воспользоваться другим рассуждением, во многом аналогичным второму доказательству признака вписанного четырёхугольника.

Итак, предположим, что равенство (2) выполнено для некоторого четырёхсторонника $ABCD$. Перепишем это равенство в виде

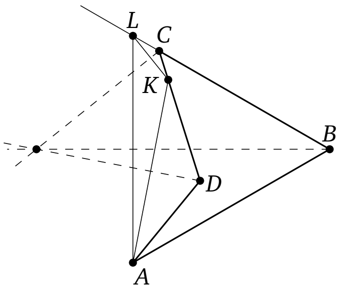

Рис. 6

$AB - BC = CD - DA$. Без ограничения общности можно считать, что величина, стоящая в обеих частях полученного уравнения, неотрицательная. Воспользуемся этим и проведём следующие дополнительные построения (см. рис. 6): отложим от точки B на луче BC отрезок BL, равный AB, а от точки D на луче DC — отрезок $DK = AD$.

У нас образовалось три равнобедренных треугольника: ABL ($AB = BL$), ADK ($AD = DK$ по построению) и CKL, в котором

$$CK = CD - DA = AB - BC = CL.$$

Проведём биссектрисы углов при вершинах этих равнобедренных треугольников. Как известно, они совпадут с высотами и медианами, проведёнными в этих треугольниках к основанию, и, таким образом, с серединными перпендикулярами, проведёнными к отрезкам AL, AK и KL соответственно. Но эти серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника AKL! Так как эта точка лежит на биссектрисах углов, она равноудалена от прямых AB и BC, DA и CD, а также BC и CD, т. е. она равноудалена от всех четырёх прямых, составляющих четырёхсторонник $ABCD$. А следовательно, существует окружность с центром в этой точке, касающаяся всех четырёх прямых. □

Как и в случае вписанного четырёхугольника, приведённый нами признак — далеко не единственный. Приведём ещё несколько признаков, которые могут оказаться важными при решении задач.

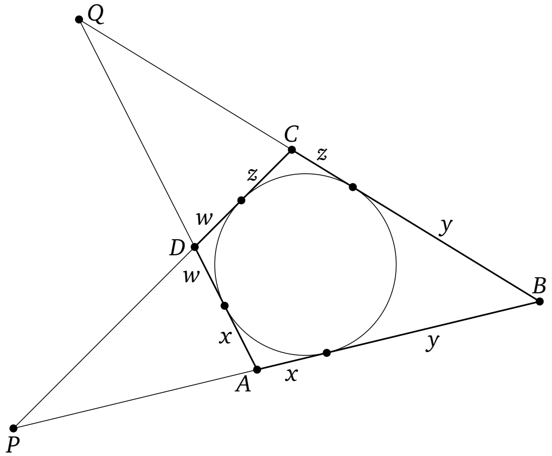

Рис. 7

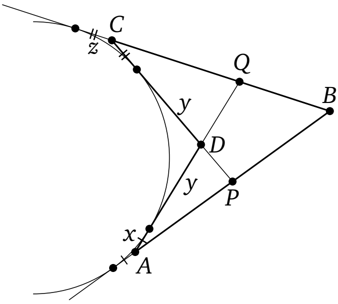

Рис. 8

Для этого посмотрим на рис. 7 и 8: продолжим противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ до пересечения (точки пересечения обозначены P и Q соответственно). Обозначим, как и прежде, равные отрезки касательных одинаковыми буквами. Получим (см. рис. 7)

$$\begin{aligned} QC+PC &= (s-z)+(t+z) = s+t = \\ &= (s+x)+(t-x) = QA+PA \end{aligned} \tag{3}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} PB+QD &= (t+y)+(s-w) = \\ &= (s+y)+(t-w) = QB+PD. \end{aligned} \tag{4}$$

Точно так же из рис. 8 получаем

$$\begin{aligned} QC+CP &= (z-u)+(u+y) = z+y = \\ &= (z+w)+(y-w) = QA+AP \end{aligned} \tag{5}$$

и, наконец,

$$QD+QB = (z-v)+(x-z) = x-v = (y-v)+(x-y) = PD+PB. \tag{6}$$

Несложно проверить (любым из приведённых выше способов, см. задачи для самостоятельного решения), что приведённые равенства не только необходимы, но и достаточны для существования окружностей, касающихся всех сторон четырёхсторонника $ABCD$ (в случае равенств (3) и (4) окружность будет расположена внутри, а в случае (5) и (6) — снаружи четырёхугольника $ABCD$).

Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть A, B, C и D — точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Предположим, что прямые AB и CD не параллельны, так же как и прямые AD и BC. Обозначим через P точку пересечения прямых AB и CD, а через Q — точку пересечения AD и BC так, что D лежит между C и P, а также между A и Q. Тогда следующие три равенства эквивалентны между собой и эквивалентны существованию окружности, лежащей внутри $ABCD$ и касающейся его сторон*:

$$AB + CD = BC + DA,$$
$$QC + PC = QA + PA,$$
$$QB + PD = QD + PB.$$

Точно так же следующие три равенства эквивалентны между собой и эквивалентны существованию окружности, касающейся сторон AD и CD, а также продолжений сторон AB и BC четырёхугольника $ABCD$:

$$DA + AB = BC + CD,$$
$$QC + CP = QA + AP,$$
$$QD + QB = PB + PD.$$

Остальные случаи взаимного расположения окружности и четырёхугольника $ABCD$ мы предлагаем изучить самостоятельно (*см. задачи для самостоятельного решения*).

Приведённые в теореме 2 равенства иногда оказываются весьма полезными при решении задач. Проиллюстрируем это на примере задачи одной из международных олимпиад (вызвавшей заметные трудности у участников).

Задача 10. Пусть точки A, B, C, D, E, F, G, H, I, X и Y расположены на 6 прямых, как изображено на рис. 9. Предположим, что существуют окружности, вписанные в четырёхугольники $ABED$ и $EFIH$ (соответственно левая верхняя и нижняя правая окружности на рис. 9). Докажите, что тогда существует и окружность, вписанная в четырёхугольник $ACIG$ (пунктирная окружность на рисунке). И наоборот, если существуют пунктирная окружность и одна из окружностей, вписанных в «угловые» четырёхугольники, то существует и другая «угловая» окружность.

Решение. Доказательство утверждения сводится к применению равенства (4), точнее — эквивалентного ему равенства $QB - PB = QD - PD$, которое в силу сказанного равносильно существова-

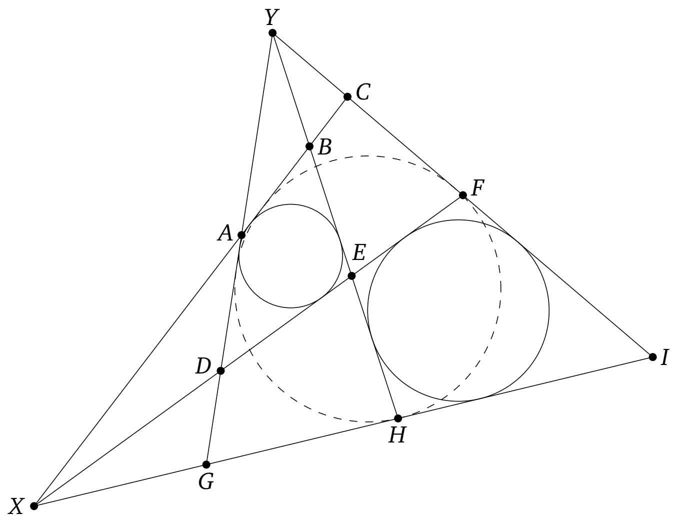

Рис. 9

нию окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$. В рассматриваемом случае существование этой окружности эквивалентно равенству $XA - AY = XE - EY$, существование окружности, вписанной в $EFIH$ — равенству $XE - EY = XI - IY$, наконец, существование пунктирной вписанной окружности равносильно равенству $XA - AY = XI - IY$. Видно, что из выполнения любых двух из приведённых равенств следует выполнение оставшегося. $\square$

Покончим на этом с обсуждением признаков описанного четырёхугольника, или, более общим образом, четырёхсторонника, и перейдём к изучению его свойств. Начнём, как и прежде, с обсуждения формул, выражающих площадь четырёхугольника через его стороны и углы. Оказывается, как и в случае вписанного четырёхугольника, для описанного четырёхугольника эту формулу тоже можно привести к довольно изящной форме.

Утверждение 1. *Пусть a, b, c и d — длины сторон описанного четырёхугольника $ABCD$ в порядке обхода, а $\varphi + \psi$ — сумма величин противоположных углов этого четырёхугольника. Тогда площадь четырёхугольника можно найти по формуле*

$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Доказательство. Конечно, как и формулу Брахмагупты (лекция 7), эту формулу можно легко вывести из общего утверждения: площадь любого четырёхугольника может быть найдена по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}, \tag{7}$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. В самом деле, если четырёхугольник описанный, то выполняется равенство $a+c=b+d$, поэтому для описанных четырёхугольников имеем

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d) = p = a+c = b+d,$$

и, значит,

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = abcd.$$

Осталось воспользоваться тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Можно, однако, доказать утверждение и более прямым методом: пусть углы четырёхугольника равны (в порядке обхода) 2α, 2β, 2γ и 2δ соответственно, а радиус вписанной окружности равен r. Тогда заметим, что, площадь четырёхугольника можно найти по формуле

$$S = r^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta). \tag{8}$$

В самом деле, $S = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CID} + S_{DIA}$ (см. рис. 10), причём площадь, например, треугольника AIB можно найти следующим образом (мы воспользовались тем, что радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, а также определением тангенса угла):

$$S_{AIB} = \frac{1}{2}rAB = \frac{1}{2}r(r\operatorname{tg}\alpha + r\operatorname{tg}\beta) = \frac{1}{2}r^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

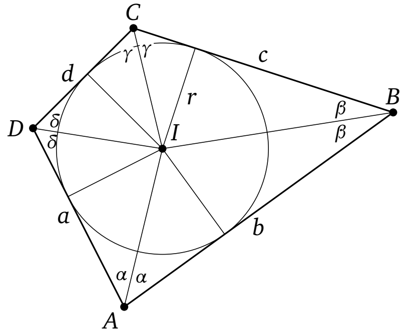

Рис. 10

С другой стороны, из тех же соображений имеем

$$a = r(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta) = r\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cos\delta}.$$

Аналогично

$$b = r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad c = r\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} \quad \text{и} \quad d = r\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos\gamma\cos\delta},$$

а значит,

$$\sqrt{abcd} = r^2\frac{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\delta)\sin(\alpha+\delta)}}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta},$$

откуда, учитывая, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, а следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\delta), \quad \sin(\alpha+\delta) = \sin(\beta+\gamma),$$

получаем

$$\sqrt{abcd} = r^2\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}.$$

Кроме того, $\dfrac{\varphi+\psi}{2}=\alpha+\gamma$, откуда получаем

$$\sqrt{abcd}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = r^2\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}.$$

Несложно убедиться, что полученное выражение совпадает, после тригонометрических преобразований, с выражением (8). □

Сделаем два важных замечания. Во-первых, доказанная формула справедлива не только для четырёхугольника, в который можно вписать окружность, но, более общим образом для произвольного описанного четырёхсторонника, в том числе и для случая, изображённого на рис. 2. В самом деле, формула (7) справедлива и для невыпуклых четырёхугольников, ведь при её доказательстве (см. лекцию 7) мы пользовались только тригонометрическими формулами, справедливыми для всех углов. При этом в случае, изображённом на рис. 2, выполняется равенство $a+b=c+d$, и поэтому

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d) = p = a+b = c+d,$$

откуда, как и прежде, получаем

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = abcd.$$

То же самое рассуждение работает во всех остальных случаях.

Во-вторых, отметим, что, в отличие от формулы Брахмагупты, полученное равенство вряд ли может быть использовано в качестве критерия описанного четырёхсторонника. В самом деле, сравнивая эту формулу с (7), замечаем, что её выполнение равносильно равенству

$$abcd = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

которое, несомненно, выполнено для описанного четырёхугольника, но не только для него. Например, если $ABCD$ — параллелограмм, то $p = x + y$, где x, y — стороны параллелограмма, и, значит,

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = x^2y^2 = abcd,$$

хотя, очевидно, в параллелограмм, отличный от ромба, вписать окружность невозможно (ни в смысле рис. 1, ни в смысле рис. 2, ни в каком-либо ещё известном автору смысле).

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите достаточность выполнения равенств (1) и (2) для существования окружности, вписанной в четырёхсторонник, способом, отличным от использованного в лекции, т. е. при помощи дополнительного построения в первом случае, и «от противного» во втором.

2. Докажите достаточность выполнения равенств (3)— (6) для существования окружности, вписанной в четырёхсторонник. Используйте (соответствующим образом подправив) любой из известных вам способов. Все ли случаи взаимного расположения окружностей и прямых, составляющих четырёхсторонник, охватывают эти формулы?

3. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке M. Известно, что в четырёхугольник CA_1MB_1 можно вписать окружность. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке касательной, заключённом между точками касания, как на диаметре, построена окружность. Докажите, что она касается линии центров исходных окружностей.

5. Докажите, что если существуют окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырёхугольника, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

6. Пусть точки A, B, C, D, E, F, G, H, I, X и Y расположены на шести прямых, как показано на рис. 11. Докажите, что если существуют правая верхняя и нижняя левая окружности, вписанные в четырёхугольники $DEHG$ и $BCFE$ соответственно, то существует и пунктирная окружность,

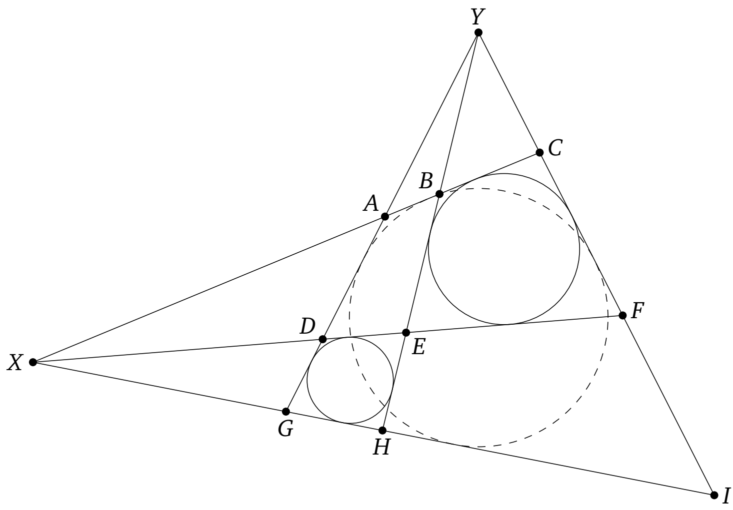

Рис. 11

вписанная в четырёхугольник $ACIG$. И наоборот, если существуют одна из «угловых» окружностей и пунктирная окружность, то существует и вторая «угловая» вписанная окружность.

7. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Отрезок секущей между параллельными прямыми делится точкой касания в отношении $1:3$. Под каким углом секущая пересекает каждую из параллельных прямых?

8. Пусть CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC-BC=2$.

9. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами длины a, b, c, d и e (в порядке обхода). Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону длины a.

10. В четырёхугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP, PQ, а другая — сторон MN, MQ, PQ. Точки A и B лежат соответственно на сторонах PQ и MN, причём отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ, если $NP=b$ и периметр четырёхугольника $BAQM$ больше периметра четырёхугольника $ABNP$ на величину $2p$.

Лекция 11

Свойства описанных четырёхугольников

На этой лекции мы продолжим знакомство со свойствами описанных четырёхугольников (или, более общим образом, четырёхсторонников). Для начала докажем одну теорему, авторство которой приписывают сэру Исааку Ньютону.

Теорема 1. *Пусть $ABCD$ — описанный четырёхугольник, K и L — середины диагоналей AC и BD этого четырёхугольника. Тогда прямая KL проходит через центр I вписанной окружности $ABCD$. То же самое справедливо для произвольного описанного четырёхсторонника* (*см. рис.* 1—3).

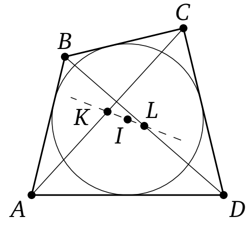

Рис. 1

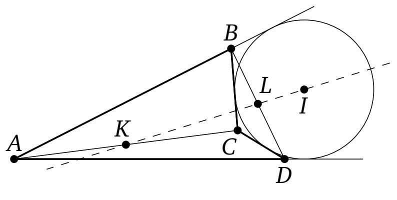

Рис. 2

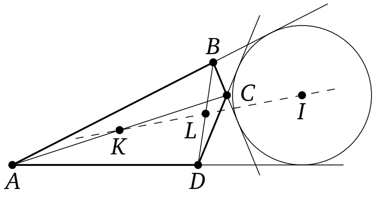

Рис. 3

Доказательство. Рассмотрим для начала случай, когда окружность расположена внутри четырёхугольника (см. рис. 1). Для доказательства теоремы нам понадобится важное вспомогательное утверждение, которое можно рассматривать как критерий *коллинеарности* точек (т. е. того, что некие три или более точек попадают на одну прямую).

Лемма 1. *Пусть A, B, C и D — четыре точки на плоскости, а S — некоторое данное число. Тогда геометрическим местом точек M, для которых выполняется равенство*

$$S = S_{AMB} + S_{CMD},$$

является отрезок прямой линии (или точка, или пустое множество, или вся плоскость).

Более общим образом: условимся считать для произвольного треугольника XYZ его ***ориентированную площадь*** $\widetilde{S}_{XYZ}$ *положительной величиной, равной его площади, если порядок обхода его границы, задаваемый последовательностью точек X—Y—Z, положительный, т. е. против часовой стрелки. В противном случае мы будем считать $\widetilde{S}_{XYZ}$ отрицательной величиной, равной по модулю площади треугольника. Тогда геометрическим местом точек M, для которых выполняется равенство*

$$S = \widetilde{S}_{AMB} + \widetilde{S}_{AMC},$$

является прямая линия, пустое множество или вся плоскость.

Доказательство леммы 1. Будем считать, что множество точек, удовлетворяющих требуемым условиям, непусто (иначе рассуждения не нужны), и пусть M — одна из таких точек. Проведём прямые AB и CD. Предположим, что они пересекутся в точке X (мы предлагаем читателю подумать, как изменится рассуждение, если прямые окажутся параллельными). Отложим от X на прямых AB и CD отрезки $XP = AB$ и $XQ = CD$ соответственно (см. рис. 4). Тогда, очевидно,

$$S_{AMB} = S_{PMX}, \quad S_{CMD} = S_{XMQ},$$

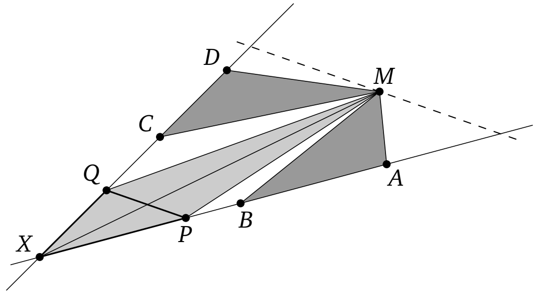

Рис. 4

так как у этих треугольников общие высоты и равные основания. Следовательно, пока точка M лежит между прямыми AB и CD, выполняется равенство

$$S_{AMB}+S_{CMD}=S_{PMX}+S_{XMQ}=S_{XPQ}+S_{PMQ}.$$

Но S_{XPQ} — постоянная величина, никак не зависящая от выбора точки M. Следовательно, искомое геометрическое место совпадает с множеством точек M, для которых площадь S_{PMQ} совпадает с некоторой фиксированной величиной. При этом точки P и Q фиксированы. Это множество — прямая линия, параллельная PQ и проходящая через уже найденную точку, точнее — отрезок этой прямой, попадающий между AB и CD[1].

В общем случае, когда вместо обычной площади используется ориентированная, рассуждения аналогичные. При этом никаких ограничений на положение точки M не остаётся. В самом деле (см. рис. 5, на котором, правда, мы не изобразили точек A, B, C и D), когда точка M' лежит вне угла, образованного прямыми AB и CD, ориентированные площади треугольников $AM'B$ и $PM'X$ равны и отрицательны, а ориентированные площади $CM'D$ и $XM'Q$ равны и положительны, кроме того, ориентированная площадь $PM'X$ тоже отрицательна, следовательно, как и прежде,

$$\widetilde{S}_{AM'B}+\widetilde{S}_{CM'D}=\widetilde{S}_{PM'X}+\widetilde{S}_{XM'Q}=\widetilde{S}_{XPQ}+\widetilde{S}_{PM'Q}.$$

Окончание рассуждения остаётся без изменений. □

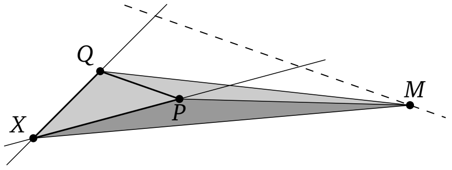

Рис. 5

Мы рекомендуем читателю самостоятельно разобраться со всеми случаями возможного расположения точек A, B, C и D, в частности, привести примеры, когда множество точек M, удовлетворяющих условию леммы, пусто или совпадает со всей плоскостью. Продолжим теперь доказательство теоремы Ньютона. В силу леммы достаточно убедиться, что выполняется равенство

$$S_{AKB}+S_{CKD}=S_{ALB}+S_{CLD}=S_{AIB}+S_{CID}.$$

[1] В рассмотренном случае, очевидно, вся плоскость в ответе получиться не может.

Но $S_{AKB}=\frac{1}{2}S_{ACB}$, так как KB — медиана треугольника ACB, проведённая к стороне AC. Аналогично $S_{CKD}=\frac{1}{2}S_{CBD}$, $S_{ALB}=\frac{1}{2}S_{ADB}$, $S_{CLD}=\frac{1}{2}S_{CBD}$. Следовательно,

$$S_{AKB}+S_{CKD}=\frac{1}{2}(S_{ACB}+S_{CBD})=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\\=\frac{1}{2}(S_{ADB}+S_{CBD})=S_{ALB}+S_{CLD}.$$

С другой стороны, в случае, изображённом на рис. 1, имеем

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+DA)=\frac{1}{2}r(2AB+2CD)=\\=2\left(\frac{1}{2}rAB+\frac{1}{2}rCD\right)=2(S_{AIB}+S_{CID}).$$

Здесь r — радиус вписанного круга. Во втором равенстве мы воспользовались тем, что у описанного четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны. Точно так же в случае, изображённом на рис. 2, имеем

$$\widetilde{S}_{AKB}+\widetilde{S}_{CKD}=S_{AKB}+S_{CKD}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$
$$\widetilde{S}_{ALB}+\widetilde{S}_{CLD}=S_{ALB}-S_{CLD}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

в то время как

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}r(AB-BC-CD+DA)=\frac{1}{2}r(2AB-2CD)=\\=2(S_{AIB}-S_{CID})=2(\widetilde{S}_{AIB}+\widetilde{S}_{CID}).$$

Здесь мы воспользовались равенством $AB+BC=CD+DA$, или, что эквивалентно, $AB-CD=DA-BC$, выполняющимся для конфигурации на рис. 2, см. предыдущую лекцию. Мы предлагаем читателю самостоятельно разобраться с оставшимися случаями взаимного расположения четырёхугольника и окружности. □

Доказанный нами критерий коллинеарности точек (см. лемму 1) может оказаться весьма полезным в самых разных ситуациях. Рассмотрим, например, произвольный четырёхугольник $ABCD$ с непараллельными противоположными сторонами. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений его противоположных сторон. Тогда справедливо следующее утверждение.

Середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой (*см. рис.* 6). *Эту прямую в русскоязычной литературе часто называют* ***прямой Гаусса***, *тогда как в англоговорящем мире она часто фигурирует под названием* ***прямой Ньютона***.

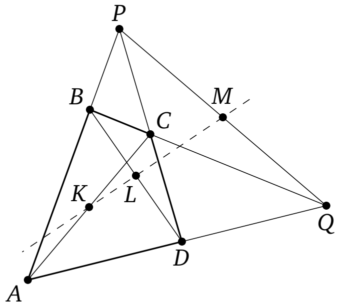

Рис. 6

Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться критерием, приведённым в лемме. В самом деле, как и прежде,

$$\widetilde{S}_{AKB}+\widetilde{S}_{CKD}=S_{AKB}+S_{CKD}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$
$$\widetilde{S}_{ALB}+\widetilde{S}_{CLD}=S_{ALB}+S_{CLD}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

и аналогично

$$\widetilde{S}_{AMB}+\widetilde{S}_{CMD}=\frac{1}{2}S_{AQB}-\frac{1}{2}S_{CQD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Мы воспользовались тем, что высоты, опущенные из точки M на AB и CD, в два раза меньше высот, опущенных на эти прямые из точки Q.

На самом деле есть и другой способ доказать только что разобранную теорему Ньютона. Например, рассмотрим рис. 7.

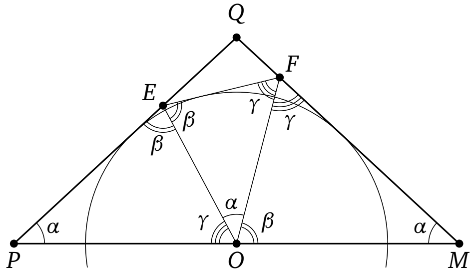

Рис. 7

Лемма 2. *Пусть PQM — равнобедренный треугольник, $PQ=QM$, окружность с центром O, лежащим на PM, касается боковых сто-*

рон треугольника, EF — касательная к окружности (E, F — точки на боковых сторонах треугольника). Тогда $PE \cdot MF = \frac{1}{4}PM^2$.

Для **доказательства** проведём отрезки EO и FO — они являются биссектрисами соответственно углов PEF и EFM, обозначим углы $\angle EPO = \angle FMO = \alpha$, $\angle PEO = \angle FEO = \beta$, $\angle MFO = \angle EFO = \gamma$. Тогда сумма углов α, β, γ равна $180°$ (в самом деле, из четырёхугольника $PEFM$ получаем $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$). Следовательно, $\angle POE = \gamma$, $\angle EOF = \alpha$, $\angle FOM = \beta$, и треугольники POE и MFO подобны. Следовательно, $\frac{PO}{PE} = \frac{MF}{MO}$, или

$$PE \cdot MF = PO \cdot MO = \frac{1}{4}PM^2.$$

Отметим, что точки E и F могут лежать не только на сторонах треугольника, но и на их продолжениях — ни формулировка, ни используемые нами рассуждения при этом не изменятся.

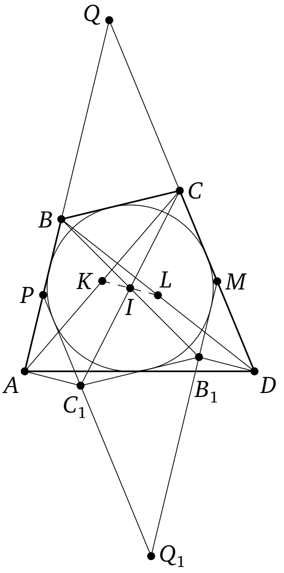

Рис. 8

Чтобы теперь **доказать** теорему Ньютона, сделаем следующие вспомогательные построения (см. рис. 8). Обозначим через B_1 и C_1 точки, симметричные соответственно B и C относительно центра I окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$. Так как $KI \parallel AC_1$ и $IL \parallel B_1D$ (как средние линии в треугольниках ACC_1 и B_1BD соответственно), для доказательства теоремы достаточно показать, что $AC_1 \parallel B_1D$. Проведём через точки B_1 и C_1 касательные C_1P и B_1M к вписанной окружности (точки P и M лежат на прямых AB и CD соответственно). Тогда $C_1P \parallel CD$ и $B_1M \parallel AB$ в силу центральной симметричности нашей конструкции. Обозначим через Q (соответственно Q_1) точку пересечения прямых AB и CD (соответственно C_1P и B_1M). Тогда Q_1PQM — параллелограмм, описанный около окружности, а следовательно, он является ромбом (примените критерий существования вписанной окружности). Применив только что доказанное утверждение к равнобедренным треугольникам PQM и PQ_1M, получим

$$AP \cdot MD = \frac{1}{4}PM^2, \quad PC_1 \cdot MB_1 = \frac{1}{4}PM^2.$$

В первом случае мы применили утверждение к касательной AD (точки A и D лежат на продолжениях сторон соответствующего треугольника), а во втором — к касательной B_1C_1 (которая касается вписанной окружности как прямая, симметричная касательной BC относительно центра окружности). Таким образом, получаем $AP \cdot MD = PC_1 \cdot MB_1$, или, что эквивалентно, $\frac{AP}{PC_1} = \frac{MB_1}{MD}$.

Рассмотрим треугольники APC_1 и B_1MD. У них $\angle APB_1 = \angle B_1MD$ как углы между параллельными прямыми, следовательно, в силу доказанного равенства эти треугольники подобны (первый признак подобия треугольников). Из того, что две их стороны попарно параллельны, мы делаем вывод, что и третья пара их сторон параллельна между собой, т. е. $AC_1 \parallel B_1D$, что и требовалось доказать. □

Докажем теперь ещё несколько свойств описанных четырёхугольников. Начнём со следующего несложного факта.

Утверждение 1. *Пусть в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Проведём произвольную диагональ этого четырёхугольника. Тогда окружности, вписанные в треугольники, на которые проведённый отрезок делит четырёхугольник $ABCD$, касаются друг друга. Более того, точки касания этих окружностей со сторонами четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности, концентрической вписанной окружности четырёхугольника* (*см. рис.* 9).

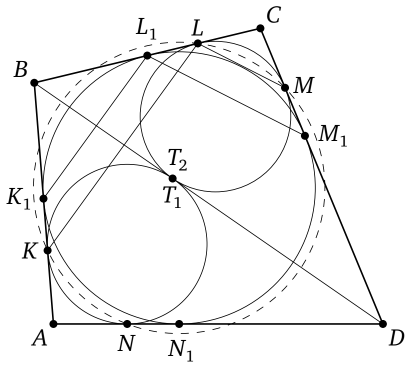

Рис. 9

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABD и BCD. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что расстояния от точки B до точки касания диагонали BD с окружностями, вписанными в эти треугольники, равны между собой. Воспользуемся формулой, выражающей эти расстояния через стороны треугольников: для треугольника ABD имеем

$$BT_1 = \frac{1}{2}(BD + AB - DA),$$

а для треугольника BCD —

$$BT_2 = \frac{1}{2}(BD + BC - CD).$$

Но в силу того что у $ABCD$ есть вписанная окружность, имеем $AB+CD=BC+DA$, или $AB-DA=BC-CD$. Следовательно, $BT_1=BT_2$.

Чтобы теперь доказать, что четырёхугольник $KLMN$, составленный из точек касания рассмотренных окружностей со сторонами четырёхугольника $ABCD$, вписанный (см. рис. 9), заметим, что стороны KL и LM этого четырёхугольника параллельны соответственно отрезкам K_1L_1 и L_1M_1, соединяющим точки касания соответствующих сторон четырёхугольника со вписанной в него окружностью. В самом деле, согласно доказанному $BK = BT_1 = BT_2 = BL$ (крайние равенства следуют из равенств отрезков касательных), а с другой стороны, $BK_1 = BL_1$, следовательно, по теореме Фалеса (точнее, обратной к ней) имеем $KL \parallel K_1L_1$. Кроме того, $CL = CM$, $CL_1 = CM_1$, и по той же причине $LM \parallel L_1M_1$. Значит, $\angle KLM = \angle K_1L_1M_1$. Точно так же доказывается, что вообще все углы четырёхугольника $KLMN$ равны соответствующим углам четырёхугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами четырёхугольника $ABCD$. Но этот последний четырёхугольник, очевидно, вписан в окружность (вписанную в $ABCD$), поэтому, сумма его противоположных углов равна $180°$. Значит, то же самое верно и для $KLMN$, следовательно, $KLMN$ — вписанный четырёхугольник. Тот факт, что окружность, описанная около $KLMN$, концентрична вписанной в $ABCD$, можно доказать, например, так. Треугольники KBL и LCM равнобедренные, значит, серединные перпендикуляры к KL и LM совпадают с биссектрисами углов ABC и BCD соответственно. ☐

Наконец, под занавес лекции, докажем ещё одно красивое свойство описанного четырёхугольника.

Утверждение 2. *Пусть продолжения сторон AB и CD описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S, а продолжения его сторон AD и BC пересекаются в точке T. Пусть E, F и G — точки пересечения прямых AC, BD и ST* (см. рис. 10). *Тогда центр*

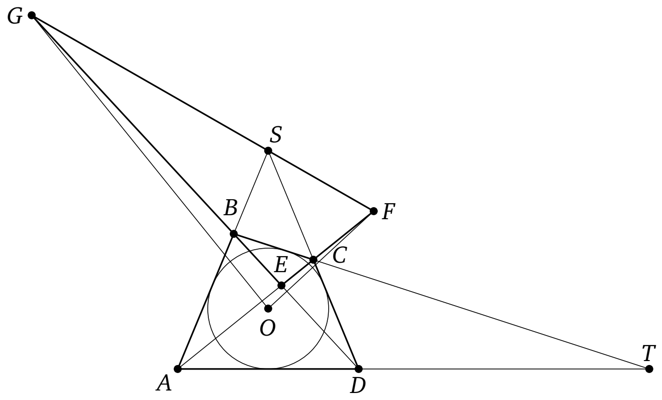

Рис. 10

O окружности, вписанной в ABCD, совпадает с точкой пересечения высот треугольника EFG.

Доказательство. Нам потребуются два вспомогательных утверждения, которые и сами по себе достаточно красивы, чтобы привлечь внимание читателя. Мы оформим их в виде лемм.

Лемма 3. *Пусть ABCD — описанный четырёхугольник, K, L, M и N — точки касания его сторон с вписанной окружностью. Тогда отрезки AC, BD, KM и LN пересекаются в одной точке* (*см. рис.* 11).

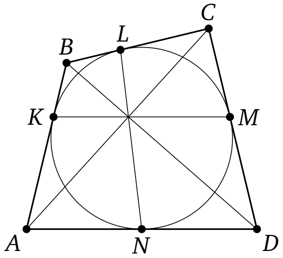

Рис. 11

Доказательство. Достаточно показать, что отрезки KM и LN делят AC в одинаковом отношении, а следовательно, пересекаются в одной точке (потом мы сможем доказать аналогичное утверждение про отрезки KM, LN и BD). Пусть $AK=AN=a$ и $CL=CM=b$, и пусть E — точка пересечения AC и KM. Тогда

$$\frac{AE}{EC} = \frac{S_{AKM}}{S_{KMC}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot KM \sin\varphi}{\frac{1}{2}KM \cdot MC \sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{AK}{MC} = \frac{a}{b}.$$

Здесь φ обозначает угол AKM, который равен углу DMK, так как это углы между касательными к одной окружности и хордой, соединяющей точки касания. Точно так же мы можем показать, что отрезок LN делит AC в отношении $\frac{a}{b}$, а значит, AC, KM и LN пересекаются в одной точке. Таким же образом можно показать, что отрезки BD, KM и LN тоже проходят через одну точку, которая, следовательно, совпадёт с E. □

По аналогии с уже доказанным утверждением можно доказать, что в одной точке пересекаются прямые KL, MN, AC и ST (где S и T — точки пересечения продолжений сторон четырёхугольника $ABCD$, см. рис. 12), а также прямые KN, LM, BD и ST. Тем самым, доказываемое нами утверждение сводится к следующему.

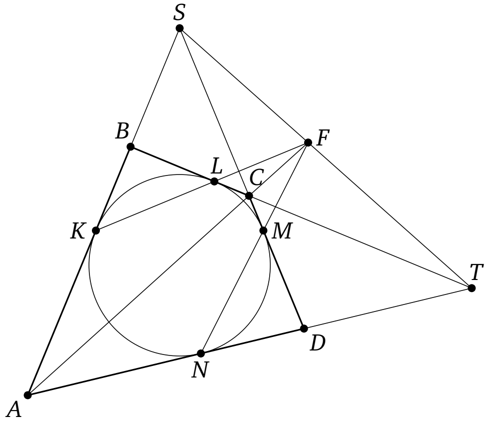

Рис. 12

Лемма 4. *Пусть $KLMN$ — вписанный четырёхугольник, E — точка пересечения его диагоналей, F и G — точки пересечения продолжений его сторон. Тогда ортоцентр треугольника EFG совпадает с центром окружности, описанной около $KLMN$.*

В самом деле, если K, L, M и N — точки касания сторон четырёхугольника $ABCD$ с вписанной в него окружностью, то четырёх-

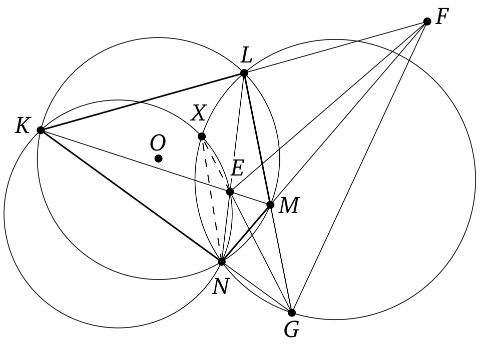

Рис. 13

угольник $KLMN$ вписан в эту окружность, причём продолжения его сторон пересекаются, согласно доказанному утверждению в точках F и G, а диагонали — в точке E.

Доказательство. Достаточно показать, что прямые EF и GO (соответственно FG и EO, GE и FO) перпендикулярны. Воспользуемся для этого известным нам со второй лекции критерием перпендикулярности: прямые XY и VW перпендикулярны, если и только если выполняется равенство

$$XV^2 - YV^2 = XW^2 - YW^2.$$

Чтобы применить этот критерий к нашей задаче, найдём длины отрезков EG и GF при условии, что известны длины отрезков $EO = a$, $FO = b$ и $GO = c$, а также длина радиуса окружности, описанной около $KLMN$, R. Найдём, например, GE. Проведём для этого окружность, описанную около треугольника GLN, и пусть X — точка её пересечения с прямой EG (отличная от G), см. рис. 13. Тогда $\angle NXG = \angle NLG = \angle NKM$ как опирающиеся на одинаковые дуги в соответствующих окружностях. Следовательно, точки E, N, K и X лежат на одной окружности (левая пунктирная окружность на рис. 13). Поэтому, с одной стороны, так как GX и NL — хорды окружности, описанной около GNL, $GE \cdot EX = NE \cdot EL = R^2 - a^2$, а с другой стороны, так как GX и GK — секущие окружности, описанной около ENK, $GE \cdot GX = GN \cdot GK = c^2 - R^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} GE^2 &= GE(GX - EX) = GE \cdot GX - GE \cdot EX = \\ &= (c^2 - R^2) - (R^2 - a^2) = a^2 + c^2 - 2R^2. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать, что $FE^2 = a^2 + b^2 - 2R^2$. Наконец, чтобы найти длину отрезка FG, надо заметить, что точка Микеля вписанного четырёхугольника $KLMN$ попадает на отрезок FG (см. задачу 9 из лекции 6). Рассуждая аналогичным образом, тогда получим равенство $FG^2 = b^2 + c^2 - 2R^2$.

Осталось подставить полученные выражения в критерий перпендикулярности:

$$EG^2 - FG^2 = (a^2 + c^2 - 2R^2) - (b^2 + c^2 - 2R^2) = a^2 - b^2 = EO^2 - FO^2,$$

и соответственно

$$FE^2 - GE^2 = (a^2 + b^2 - 2R^2) - (a^2 + c^2 - 2R^2) = b^2 - c^2 = FO^2 - GO^2,$$

$$GF^2 - EF^2 = (b^2 + c^2 - 2R^2) - (a^2 + b^2 - 2R^2) = c^2 - a^2 = GO^2 - EO^2.$$

Таким образом, критерий перпендикулярности выполнен, что нам и требовалось доказать. □

□

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны две концентрические окружности радиусов R и r $(R > r)$ с общим центром O. Третья окружность касается их обеих. Найдите тангенс угла между касательными к третьей окружности, выходящими из точки O.

2. Докажите, что утверждение теоремы Ньютона выполняется в более широком классе примеров: если $ABCD$ — замкнутая, может быть самопересекающаяся, ломаная, все звенья которой (или их продолжения) касаются одной окружности, то центр этой окружности лежит на прямой, соединяющей середины отрезков AC и BD.

3. Докажите, что если в четырёхугольник со сторонами a, b, c и d можно вписать и около него можно описать окружность, то его площадь может быть вычислена по формуле $S = \sqrt{abcd}$.

4. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Докажите, что если расстояния от точки C, лежащей на окружности, до касательных равны a и b, то расстояние от точки C до прямой AB (A и B — точки касания) равно $\sqrt{ab}$.

5. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Докажите, что тогда расстояние от точки M до прямой AB равно $\sqrt{ab}$.

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или её продолжения). Докажите, что $\angle BPC = 90°$.

7. На диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диаго-

нали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

8. Из точки A проведены к окружности две касательные AP и AQ (P и Q — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках K и L (точка K лежит между A и L). Пусть M — середина отрезка KL. Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

9. Сторона BC треугольника ABC равна a, радиус вписанного круга равен r. Найдите площадь треугольника, если вписанный круг касается окружности, построенной на BC как на диаметре.

10. В полукруге из концов диаметра проведены две пересекающиеся хорды. Докажите, что сумма произведений отрезка каждой хорды, примыкающего к диаметру, на всю хорду равна квадрату диаметра.

Лекция 12

Лемма Архимеда и следствия из неё

Окружность и её свойства — тема, по большому счёту, неисчерпаемая. Мы и не ставим своей целью доказать или хотя бы перечислить все известные теоремы элементарной геометрии, так или иначе связанные с окружностью. Однако прежде чем перейти к обсуждению различных геометрических методов и теорем, не связанных напрямую с этой замечательной кривой (т. е. утверждений, в которых окружность может появляться скорее как вспомогательное средство, чем как центральный объект наших обсуждений), опишем ещё один круг идей, связанных с ней.

Прежде всего докажем несложную (но имеющую, как водится, многочисленные неожиданные следствия) лемму, приписываемую Архимеду.

Теорема 1 (лемма Архимеда). *В окружности с центром в точке O проведена хорда AB. В образовавшийся сегмент вписана окружность, касающаяся дуги AB* (*ограничивающей сегмент*) *в точке X, а отрезка AB в точке Y. Тогда прямая XY пересекает данную окружность второй раз в точке Z, являющейся серединой дуги, дополнительной к AB* (*см. рис.* 1). *Более того, то же самое утверждение остаётся справедливым и для окружностей, касающихся внешним образом* (*см. рис.* 2, *точка Z — середина соответствующей дуги AB*).

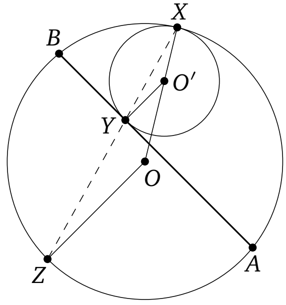

Рис. 1

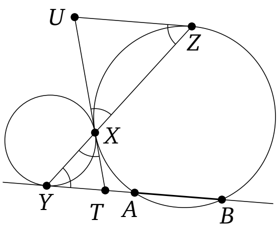

Рис. 2

Ради полноты изложения приведём два доказательства этого замечательного факта, одно для случая внутреннего касания, другое — для внешнего. Рекомендуем читателю перенести рассуждения из первого доказательства на второй случай и наоборот.

Первое доказательство. Пусть O' — центр маленькой окружности, а Z — вторая точка пересечения прямой XY с окружностью. Проведём отрезки $O'X$, $O'Y$, OO' и OZ (см. рис. 1). В силу того что рассматриваемые окружности касаются между собой, точки O, O' и X лежат на одной прямой. А так как оба треугольника $XO'Y$ и XOZ равнобедренные и у них имеется общий угол при вершине X, эти треугольники подобны. Следовательно, отрезки $O'Y$ и OZ параллельны. Но отрезок $O'Y$ перпендикулярен AB как отрезок, проведённый в точку касания, следовательно, прямая OZ тоже перпендикулярна AB. Осталось заметить, что перпендикуляр, проведённый к хорде через центр окружности, делит обе дуги, на которые хорда делит окружность, пополам. □

Второе доказательство. Проведём через точку X общую касательную двух окружностей (см. рис. 2), а через точку Z проведём касательную к дуге AB. Пусть T — точка пересечения первой проведённой касательной с прямой AB, а U — точка пересечения проведённых касательных. Тогда углы TYX, YXT, ZXU и UZX равны между собой ($\angle YXT$ и $\angle ZXU$ вертикальные, а остальные равны им как углы между касательными и хордой). Следовательно, прямые AB и ZU параллельны (так как они образуют равные накрест лежащие углы при секущей YZ), и поэтому Z — середина AB. □

Как видите, доказать это утверждение совсем несложно. Тем удивительнее, какие богатые следствия можно из него вывести. Докажем для начала такое красивое утверждение (мы ограничимся лишь случаем внутреннего касания двух окружностей; настоятельно рекомендуем читателю самостоятельно сформулировать и доказать аналогичные свойства окружностей, касающихся внешним образом).

Утверждение 1. *В условиях предыдущей леммы (леммы Архимеда) рассмотрим*

1) *всевозможные пары касающихся окружностей, вписанных в сегмент, определённый хордой AB;*

2) *всевозможные пары пересекающихся окружностей, вписанных в тот же сегмент.*

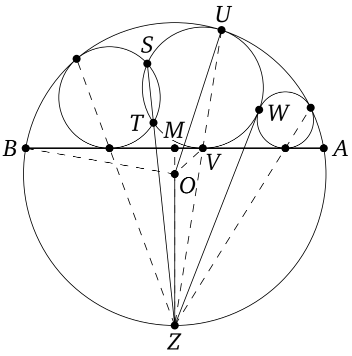

Рис. 3

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *геометрическим местом точек касания этих окружностей является дуга окружности с центром в точке Z — середине дополнительной дуги — и радиусом ZA*;

2) *точка Z лежит на прямой, проходящей через точки пересечения рассматриваемых окружностей* (*см. рис.* 3).

Доказательство. Рассмотрим окружность, касающуюся дуги AB в точке U и отрезка AB в точке V. Проведём к ней касательную ZW из точки Z. Чтобы доказать утверждение, нам потребуется найти длину этой касательной. Но, согласно свойству касательной и секущей, применённому к касательной ZW и секущей ZU (здесь мы воспользовались утверждением 4, доказанным на лекции 5), выполняется равенство

$$ZW^2 = ZV \cdot ZU = ZV(ZV + VU) = ZV^2 + ZV \cdot VU.$$

С другой стороны, по свойству хорды (утверждение 3, лекция 5), применённому к ZU, имеем

$$ZV \cdot VU = R^2 - OV^2 = R^2 - (OM^2 + MV^2),$$

где R — радиус исходной окружности, O — её центр, а M — проекция центра на отрезок AB (середина AB). Кроме того, по теореме Пифагора получаем

$$ZV^2 = ZM^2 + MV^2 = (R + OM)^2 + MV^2.$$

Подставляя все эти выражения в выражение для ZW^2, находим

$$ZW^2 = (R + OM)^2 + MV^2 + (R^2 - (OM^2 + MV^2)) = 2R^2 + 2R \cdot OM.$$

Но по теореме Пифагора $R^2=BM^2+OM^2$, следовательно,

$$ZW^2 = BM^2+OM^2+R^2+2R\cdot OM = \\ = BM^2+(OM+R)^2 = BM^2+MZ^2 = ZB^2 = ZA^2.$$

Таким образом, длина касательной, проведённой к рассматриваемой окружности из точки Z, постоянна (и равна ZA).

Рассмотрим теперь две касающиеся окружности, вписанные в сегмент. Если их общая касательная не проходит через точку Z, то, следовательно, через Z к этим окружностям можно провести четыре разные касательные. Рассмотрим концы этих отрезков на окружности с центром в Z и радиусом ZA. Будем называть концы касательных к первой окружности I_1, I_2, а ко второй — J_1, J_2. Тогда если точки идут в порядке I_1, I_2, J_1, J_2, то рассматриваемые окружности не могут иметь общих точек, а если они идут в порядке I_1, J_1, I_2, J_2, то на первой окружности есть точки, лежащие внутри второй, и наоборот, т. е. окружности пересекаются. Это противоречит условию утверждения. Следовательно, общая касательная окружностей проходит через Z.

Наконец, если две окружности пересекаются в точках S и T, то проведём прямую ZT. По свойству касательных и секущих мы заключаем, что эта прямая будет второй раз пересекать обе окружности в одной и той же точке (так как в обоих случаях расстояние от точки T до второй точки пересечения прямой и окружности будет равно $\frac{ZA^2}{ZT}$). ☐

Вот пример сложной задачи (ещё одной задачи международной математической олимпиады), которая неожиданно просто решается с помощью указанных соображений.

Задача 11. Окружности α и β касаются изнутри окружности ω в точках S и T соответственно, причём центр O окружности β лежит на окружности α. Через точки P и Q пересечения окружностей α и β проведена прямая, пересекающая окружность ω в точках U и V. Пусть X и Y — точки пересечения окружности α с прямыми SU и SV соответственно (отличные от S). Тогда прямая XY касается окружности β.

Решение. Ситуация, о которой говорится в задаче, изображена на рис. 3. Чтобы доказать требуемое утверждение, проведём общие касательные AB и CD к окружностям α и β (точки A, B, C и D лежат на ω, см. рис. 5). Тогда согласно утверждению 1 точки U и V

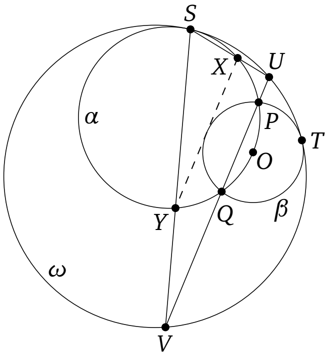

Рис. 4

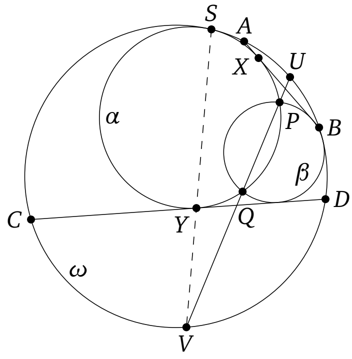

Рис. 5

будут серединами дуг AB и CD соответственно, а поэтому согласно лемме Архимеда, точки X и Y будут точками касания окружности α с прямыми AB и CD соответственно!

Теперь доказываемое свойство следует из такого простого факта.

Утверждение 2. *В равнобедренном треугольнике центры вписанной и вневписанной окружностей, касающейся основания треугольника, лежат на окружности, касающейся боковых сторон этого треугольника в концах его основания* (см. рис. 6).

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AB = AC$, и пусть I и J — центры вписанной и вневписанной окруж-

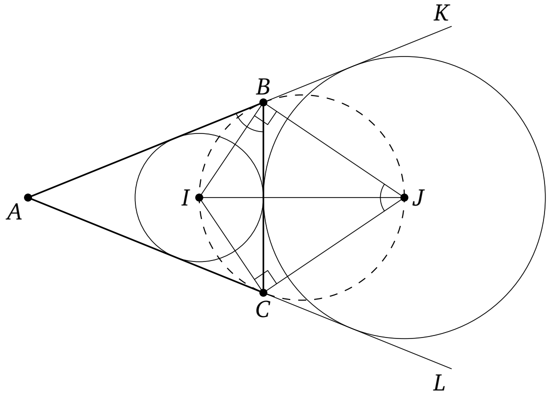

Рис. 6

ности, касающейся основания этого треугольника (см. рис. 5). Рассмотрим четырёхугольник $IBJC$. Угол IBJ равен 90°. В самом деле,

$$\angle IBJ = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle CBK = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ.$$

Точно таким же образом заключаем, что угол ICJ тоже прямой. Следовательно, четырёхугольник $IBJC$ вписанный. Осталось доказать, что прямые AB и AC касаются его описанной окружности. Сравним для этого углы ABC и BJC. Если $\angle ABC = \varphi$, то

$$\angle KBC = \angle LCB = 180^\circ - \varphi.$$

Следовательно,

$$\angle BJC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle KBC - \frac{1}{2}\angle LCB = 180^\circ - 2\frac{1}{2}(180^\circ - \varphi) = \varphi,$$

т. е. рассматриваемые углы равны. Но, как известно (см. лекцию 5), угол, опирающийся на хорду некоторой окружности, равен углу между этой хордой и касательной, проходящей через конец хорды. Следовательно, прямая AB касается окружности, описанной около четырёхугольника $IBJC$. Точно так же доказывается, что AC тоже касается этой окружности. ☐

Для завершения доказательства утверждения задачи достаточно теперь переформулировать только что доказанный факт следующим образом: *если окружность α вписана в некоторый угол, а центр окружности β, тоже вписанной в этот угол, лежит на окружности α, то β касается прямой, проходящей через точки касания окружности α со сторонами угла.* В самом деле, если окружность β вписана в тот же угол, что и α, то её центр лежит на пересечении α с биссектрисой этого угла, а следовательно, совпадает с центром вписанной или вневписанной окружности равнобедренного треугольника, получающегося, если провести отрезок, соединяющий точки касания сторон угла с окружностью α. ☐

Прежде чем мы пойдём дальше, докажем ещё один простой вспомогательный факт, который можно рассматривать как предельный случай леммы Архимеда для двух касающихся внешним образом окружностей.

Утверждение 3. *Если две окружности касаются между собой (внешним образом) в точке T и касаются одной прямой в точках A и B соответственно, то прямые AT и BT пересекают второй раз соответствующие окружности в точках, диаметрально противоположных точкам A и B* (см. рис. 7).

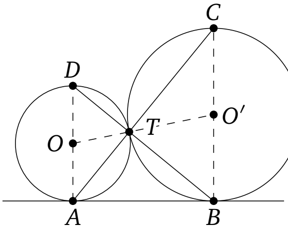

Рис. 7

Доказательство. Как и при доказательстве леммы Архимеда, рассмотрим треугольники AOT и $TO'C$, где C — точка пересечения AT со второй окружностью. Эти треугольники подобны, следовательно, $O'C \parallel AO$, и поэтому $O'C \perp AB$. □

Отметим кстати, что прямые AC и BD на самом деле перпендикулярны (так как соответствующие углы опираются на диаметры наших окружностей). Правда, это утверждение нам ниже не понадобится.

Теперь мы можем привести оригинальное, принадлежащее самому Архимеду, доказательство теоремы об арбелосе. Напомним, что на первой лекции мы уже доказывали эту теорему с помощью теоремы Пифагора и алгебраических преобразований. Однако современная алгебраическая техника была совершенно неизвестна древнегреческим математикам. Приведённое ниже рассуждение более-менее соответствует тому, которое использовалось Архимедом.

Итак, напомним условия задачи: *арбелосом* называют фигуру, составленную из трёх полуокружностей, построенных на отрезках AB, BC и CD как на диаметрах (точка B при этом лежит на отрезке AC) и лежащих по одну сторону от прямой AC. Проведём через B прямую BD, перпендикулярную AC. Нам надо доказать следующую теорему: *радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники, на которые арбелос делит прямая BD, равны.*

На рис. 8 изображён арбелос, образованный полуокружностями радиусов R и r (с центрами в точках O_1 и O_2) и большой полуокружностью радиуса $R+r$. В самом конце первой лекции мы показали, что радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ABD и BCD, равны $\frac{Rr}{R+r}$. Сейчас мы получим тот же самый результат, пользуясь вместо алгебраических преобразований геометрическими утверждениями, прежде всего — леммой Архимеда.

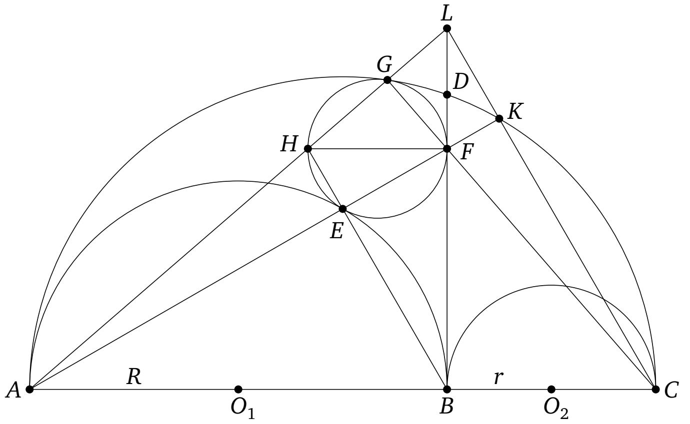

Рис. 8

Рассмотрим окружность, вписанную в криволинейный треугольник ABD, и пусть E, F и G — точки касания этой окружности с его сторонами AB, BD и AD соответственно, а точка H диаметрально противоположна точке F (см. рис. 8). Заметим, что согласно леммы Архимеда точки G, F и C лежат на одной прямой, а согласно утверждению 3 на одну прямую попадают также тройки точек B, E, H и A, E, F. Кроме того, так как точка H является точкой касания маленькой окружности с хордой, параллельной BD (пунктирная линия на рис. 8), по лемме Архимеда точки A, H и G тоже лежат на одной прямой.

Пусть L — точка пересечения прямых AG и BD. Рассмотрим треугольник ALC. Отрезки LB и CG — его высоты (соответствующие углы опираются на диаметры), следовательно, точка F — его ортоцентр. Поэтому прямая AF перпендикулярна LC, и, значит, точка K пересечения этих прямых должна лежать на полуокружности с диаметром AC.

Заметим, что $FH \parallel AC$ (обе эти прямые перпендикулярны BD). Следовательно, треугольник HLF подобен треугольнику ALB, откуда получаем

$$\frac{HF}{AB} = \frac{HL}{AL}$$

Наконец, $BH \perp AE$, следовательно, $BH \parallel CL$. Поэтому по теореме Фалеса

$$\frac{HL}{AL} = \frac{BC}{AC}.$$

Отсюда получаем
$$HF = AB\frac{HL}{AL} = \frac{AB \cdot BC}{AC},$$
а так как HF — диаметр вписанной окружности, для радиуса этой окружности мы получили то же самое выражение, что и раньше, на первой лекции. Точно так же можно найти радиус второй окружности.

Как видно, это рассуждение не лишено изящества, хотя и трудно не согласиться с тем, что его гораздо сложнее найти, чем приведённое в первой лекции вычисление, основанное на алгебраических преобразованиях.

В заключение лекции заметим, что изложенный материал, так же как многие другие факты, рассказанные нами, тесно связан с такими понятиями, как степень точки относительно окружности, радикальная ось двух окружностей, инверсия, полярное преобразование и т. п. Все эти темы чрезвычайно красивы, важны и заслуживают по крайней мере отдельной лекции каждая. Мы рассчитываем вкратце рассказать о них в следующих частях нашего курса.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из точки D окружности ω опущен перпендикуляр DC на диаметр AB. Другая окружность касается отрезка CA в точке E, а также отрезка CD и окружности ω. Докажите, что DE — биссектриса треугольника ADC.

2. Окружность, касающаяся сторон AC и BC треугольника ABC в точках M и N, касается также его описанной окружности (внутренним образом). Докажите, что середина отрезка MN совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

3. Найдите геометрическое место точек *центров* окружностей, вписанных в сегмент (в том числе «внешним» образом, см. рис. 2). **Указание.** Эту задачу удобно (но не обязательно) решать с помощью координатного метода.

4. В полукруге из концов диаметра проведены две пересекающиеся хорды. Докажите, что сумма произведений отрезка каждой хорды, примыкающего к диаметру, на всю хорду равна квадрату диаметра.

5. Пусть a, b, c и d — длины сторон вписанного четырёхугольника (a и c — противоположные стороны), h_a, h_b, h_c и h_d — расстояния от центра описанного круга до соответствующих сторон. Докажите, что если центр круга лежит внутри четырёхугольника, то $ah_c + ch_a = bh_d + dh_b$.

6. Даны две концентрические окружности радиусов r и R ($r < R$). Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, пересекающая бо́льшую окружность в точках B и C. Перпендикуляр к BC в точке Pпересекает меньшую окружность в точке A. Найдите $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

7. Около прямоугольного треугольника ABC ($C=90^\circ$) описана окружность. Пусть CD — высота треугольника. Окружность с центром в D проходит через середину дуги $\breve{AB}$ и пересекает AB в точке M. Найдите CM, если $AB=c$.

8. На диаметре AB окружности S взята точка K, и из неё восставлен перпендикуляр, пересекающий S в точке L. Окружности S_a и S_b касаются окружности S, отрезка LK и диаметра AB, а именно, S_a касается отрезка AK в точке A_1, S_b касается отрезка BK в точке B_1. Докажите, что $\angle A_1LB_1=45^\circ$.

9. Две окружности α и β пересекаются с прямой l. Точки пересечения l с окружностью α — A_1 и A_2, а с окружностью β — B_1 и B_2. Известно, что прямая, касающаяся окружности α в точке A_1, параллельна прямой, касающейся окружности β в точке B_1. Докажите, что тогда прямая, касательная к α в точке A_2, параллельна прямой, касающейся β в точке B_2.

10. Дана окружность радиуса R с центром O. Две другие окружности касаются данной изнутри и пересекаются в точках A и B. Найдите сумму радиусов двух последних окружностей, если известно, что $\angle OAB=90^\circ$.

Лекция 13

Теорема Фейербаха

В предыдущих лекциях мы рассказали о некоторых общих идеях и методах, применяемых в элементарной геометрии. Конечно, то, что мы здесь рассказали, далеко не исчерпывает существующие приёмы и идеи. Существует огромное количество методов, которые оказались целиком или почти целиком за рамками изложенного материала. Однако мы не будем сейчас о них говорить: с одной стороны, некоторые из этих идей слишком общие, их трудно сформулировать в виде более-менее конкретного рецепта (как, например, идея подобия, или идея площадей, хотя иногда и говорят о «методе площадей»). С другой стороны, многие методы, такие как векторные, координатные методы, комплексные числа и барицентрические координаты, использование движений, гомотетий или инверсии, а также методы решения геометрических неравенств и экстремальных геометрических задач, заслуживают достаточно подробного изложения, и мы предпочтём посвятить им отдельный цикл лекций, чем рассказывать всё это второпях сейчас. Вместо этого мы посвятим оставшиеся несколько лекций отдельным красивым геометрическим теоремам, таким как теоремы Морлея, Виктора Тебо и т. п.

Начнём мы наш рассказ со знаменитой теоремы Карла Вильгельма Фейербаха (его не следует путать с известным философом Людвигом Фейербахом, доводившимся Карлу родным братом). Итак, эта теорема звучит следующим образом.

Теорема 1 (теорема Фейербаха). *Окружность Эйлера любого треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.*

Прежде чем мы докажем это утверждение, надо напомнить слушателям, что такое окружность Эйлера: *окружностью Эйлера треугольника ABC называется окружность, описанная около его серединного треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. около треугольника, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC.* На рис. 1 изображена как раз такая окружность Эйлера треугольника ABC.

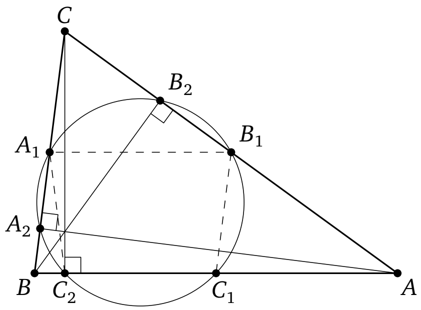

Рис. 1

У окружности Эйлера треугольника имеется великое множество замечательных свойств. Нам в наших рассуждениях потребуется одно из них, которое мы сейчас и докажем.

Утверждение 1. *Основания высот треугольника ABC лежат на окружности Эйлера этого треугольника.*

Доказательство. Рассмотрим рис. 1 (случай тупоугольного треугольника можно разобрать аналогичным образом): нам надо доказать, что четырёхугольник $A_1B_1C_1C_2$, где C_2 — основание высоты CC_2, можно вписать в окружность (тогда эта окружность автоматически совпадёт с окружностью Эйлера). Мы воспользуемся признаком вписанного четырёхугольника (см. лекцию 5): докажем, что выполняется равенство

$$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_2C_1 = 180^\circ.$$

Так как A_1B_1 и B_1C_1 — средние линии треугольника, угол $A_1B_1C_1$ равен углу B исходного треугольника. С другой стороны,

$$\angle A_1C_2C_1 = \angle A_1C_2C + 90^\circ = \angle BCC_2 + 90^\circ = (90^\circ - \angle B) + 90^\circ,$$

так как A_1C_2 — медиана, проведённая к гипотенузе, в прямоугольном треугольнике BCC_2. Складывая эти равенства, получаем требуемое утверждение. То, что точки A_2 и B_2 тоже попадают на окружность Эйлера, доказываем аналогично. ☐

Нам надо доказать, что окружность Эйлера касается вписанной и вневписанных окружностей (т. е., например, что точка F на рис. 2 — в самом деле точка касания). Существует множество способов это сделать. Некоторые из них вполне элементарны, некоторые

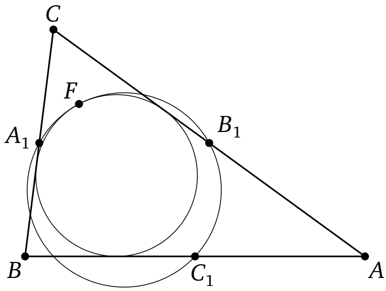

Рис. 2

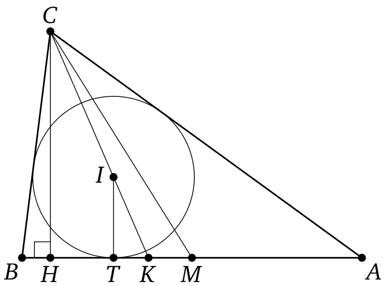

Рис. 3

требуют дополнительных знаний. Мы здесь приведём два способа: один простой, доступный любому школьнику, другой — основанный на использовании весьма красивой и сложной геометрической теоремы, так называемой *теоремы Кези*, или *обобщённой теоремы Птолемея* (которую мы приведём без доказательства, точнее — с частичным доказательством). Начнём с простого способа. Мы приведём только рассуждение, относящееся к вписанной окружности, остальные случаи мы рекомендуем читателю разобрать самостоятельно.

Для доказательства нам потребуются несколько простых вспомогательных утверждений. Чтобы их проще сформулировать, введём следующие обозначения (см. рис. 3): в треугольнике ABC мы проведём высоту CH, биссектрису CK и медиану CM, а также отметим точку T касания стороны AB с вписанной окружностью. Кроме того, мы будем пользоваться стандартными обозначениями для длин сторон и величин углов треугольника: $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$; $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Первое, что нам теперь понадобится, — это следующий результат.

Утверждение 2. *Выполняется равенство* $MT^2=MK\cdot MH$.

Доказательство. Самый простой способ доказать это утверждение — вычислить длины всех входящих в равенство отрезков через стороны треугольника. Это мы и сделаем.

Начнём с MK:

$$MK=|AK-AM|=\left|\frac{bc}{a+b}-\frac{c}{2}\right|=\frac{c|b-a|}{2(a+b)}.$$

Мы воспользовались тем, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению сторон, между которыми проходит, т. е. $\frac{AK}{KC} = \frac{c}{a}$. Точно так же, так как мы знаем, чему равны отрезки сторон, на которые последние делятся точками касания с вписанной окружностью, мы получаем

$$MT = |AT - AM| = \left|\frac{-a+b+c}{2} - \frac{c}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}.$$

Наконец, из теоремы косинусов получаем

$$AH = |b\cos\alpha| = \frac{|a^2-b^2-c^2|}{2c},$$

откуда следует, что $MH = \frac{|a^2-b^2|}{2c}$. Поэтому

$$MK \cdot MH = \frac{c|b-a|}{2(a+b)} \cdot \frac{|a^2-b^2|}{2c} = \frac{c|b-a||(b-a)(a+b)|}{4(a+b)c} = \frac{(a-b)^2}{4} = MT^2. \quad \square$$

Утверждение 3. *Касательная, проведённая к вписанной окружности треугольника через точку K, отличная от стороны треугольника, параллельна касательной, проведённой к окружности Эйлера через точку M.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что углы, которые эти касательные образуют со стороной AB, равны между собой. Для этого мы выразим величину этих углов через углы треугольника ABC.

Начнём с первого случая (см. рис. 4). Пусть L — точка, в которой касательная, проведённая через точку K к вписанной окружности, пересекает сторону AC. Тогда угол CKL равен углу CKB (так как окружность оказывается вписанной в $\angle LKB$), который можно найти из треугольника BKC:

$$\angle CKB = \pi - \angle KBC - \angle KCB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}.$$

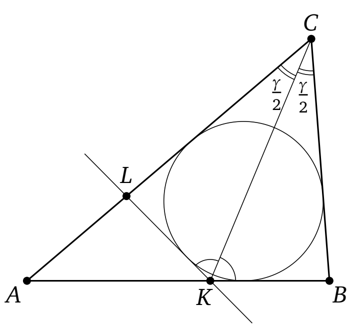

Рис. 4

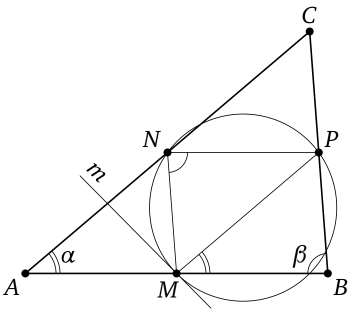

Рис. 5

Поэтому

$$\angle LKA = |\pi - 2\angle CKB| = |\pi - (2\pi - 2\beta - \gamma)| =$$
$$= |2\beta + \gamma - \pi| = |2\beta + \gamma - (\alpha + \beta + \gamma)| = |\beta - \alpha|.$$

Во втором случае обозначим касательную к окружности Эйлера, проходящую через точку M, буквой m (см. рис. 5). Тогда угол между ней и AB равен модулю разности угла между ней и отрезком MP и угла PMB (точка P — середина BC). Но последний угол равен углу A треугольника ABC, так как MP — средняя линия, а угол между m и MP, как угол между касательной и хордой, равен углу MNP (N — середина AC), который, в свою очередь, равен β, т. е. искомый угол опять равен $|\beta - \alpha|$. Заметим кстати, что мы, по существу, показали, что вписанный в окружность Эйлера угол, опирающийся на дугу HM (H — основание высоты, опущенной из точки C), равен $|\beta - \alpha|$. Ниже нам понадобится это наблюдение. □

Последнее вспомогательное утверждение, которое нам понадобится для доказательства теоремы — следующее.

Утверждение 4. *Если две окружности пересекаются с одной и той же прямой в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно, причём касательная, проведённая к первой окружности в точке A_1, параллельна касательной, проведённой ко второй окружности в точке B_1, то и касательная, проведённая к первой окружности в точке A_2, параллельна касательной, проведённой ко второй окружности в точке B_2 (см. рис.* 6).

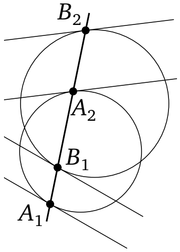

Рис. 6

Доказательство. Утверждение совсем простое и предлагается читателю в качестве упражнения (см. задачу 9 для самостоятельного решения из предыдущей лекции). □

Теперь мы можем доказать основное утверждение. Напомним его.

Теорема (теорема Фейербаха). *Окружность Эйлера произвольного треугольника касается вписанной окружности того же самого треугольника* (*а также всех трёх его вневписанных окружностей*).

Доказательство. Пусть Q — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, с прямой, проходящей через точку K. Проведём прямую MQ, и пусть F — вторая точка её пересечения с вписанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 7). Тогда, по теореме о касательной и секущей (см. лекцию 5, утверждение 4), имеем

$$MT^2 = MQ \cdot MF.$$

Но, согласно утверждению 2 имеем $MT^2 = MK \cdot MH$, откуда следует, что

$$\frac{MQ}{MK} = \frac{MH}{MF}.$$

У треугольников MQK и MHF есть общий угол M, а их стороны, прилегающие к этому углу, соответственно пропорциональны, следовательно, эти треугольники подобны (выполняется признак подобия треугольников). Значит,

$$\angle MFH = \angle MKQ = |\beta - \alpha| = \angle MNH,$$

где N — середина стороны AC (мы воспользовались результатами вычислений, произведённых при доказательстве утверждения 3,

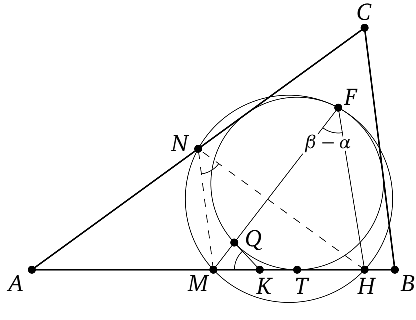

Рис. 7

а также замечанием, сделанным в конце этого утверждения). Таким образом, углы MNH и MFH, опирающиеся на один и тот же отрезок MH, равны, и, следовательно, точки M, N, H и F лежат на одной окружности. Но из утверждения 1 следует, что эта окружность — окружность Эйлера.

Итак, точка F лежит на окружности Эйлера. Осталось воспользоваться утверждением 4: для двух окружностей (вписанной окружности треугольника ABC и его же окружности Эйлера) мы рассмотрим общую секущую MF. Согласно утверждению 3 касательные к этим окружностям, проходящие соответственно через Q и M, параллельны. Следовательно, и касательные к этим окружностям, проведённые через точку F (общую для секущей и обеих окружностей), тоже должны быть параллельны. Следовательно, эти касательные совпадают. Значит, окружности касаются в точке F. □

Второе доказательство, которое мы собираемся привести, основано, как мы уже упоминали, на использовании важной и красивой теоремы, называемой *теоремой Кези* или *обобщённой теоремой Птолемея*. Сформулируем эту теорему.

Теорема 2. *Пусть α, β, γ и δ — четыре произвольные окружности. Обозначим символом $t_{\alpha\beta}$ (соответственно $t_{\beta\gamma}$, $t_{\gamma\delta}$ и т. д.) длину общей внешней касательной, проведённой к окружностям α и β (соответственно β и γ, γ и δ и т. д.). Тогда равенство*

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta}+t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha}=t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \tag{1}$$

выполняется, если и только если существует окружность ω, касающаяся всех четырёх данных окружностей внешним образом (*см. рис.* 8).

Думается, нет необходимости объяснять, почему это утверждение называют обобщённой теоремой Птолемея. Отметим только, что существуют и варианты этой теоремы, гарантирующие существование окружности, которой данные окружности касаются изнутри или часть из них касается изнутри, часть — снаружи. Нам потребуется только знать, что в случае, когда все четыре окружности касаются искомой изнутри, формулировка теоремы изменится следующим образом: вместо знака «+» в левой части появится знак «−», причём приравниваться будут модули выражений.

Мы не будем доказывать теорему Кези целиком — известные нам рассуждения весьма сложны и часто используют сведения

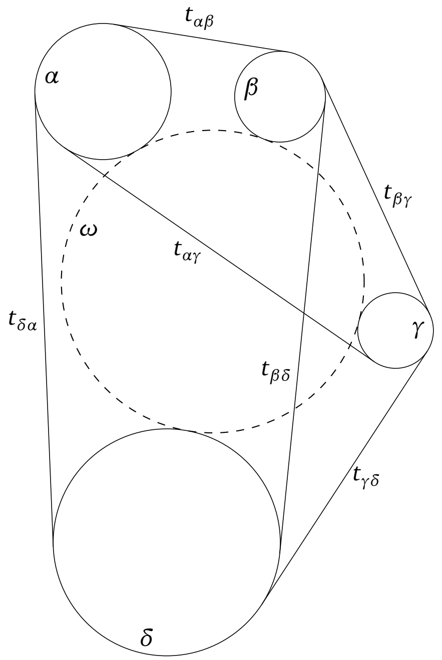

Рис. 8

и методы, лежащие за рамками этого курса, по крайней мере его первой части. Мы лишь покажем, что утверждение теоремы выполняется в одну сторону[1]: *если окружности α, β, γ и δ касаются некоторой общей окружности ω, то выполняется равенство* $t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta}+t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha}=t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$ (см. дополнительную задачу 4, лекция 7).

Доказательство. Мы просто выразим длину касательных через следующие величины: радиус R окружности ω, радиусы r_α, r_β, r_γ, r_δ окружностей α, β, γ, δ и расстояния между точками A, B, C и D — точками касания этих окружностей с окружностью ω.

Посмотрим на рис. 9: пусть $\angle AOB=\varphi$ (здесь O — центр окружности ω). Тогда по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{2R^2-AB^2}{2R^2}$$

[1] Желающие побыстрее узнать, как доказать теорему в полном объёме, могут обратиться к книгам И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия. 7—9 классы» (М.: Дрофа, 2000), или И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (М.: ГИТТЛ, 1956).

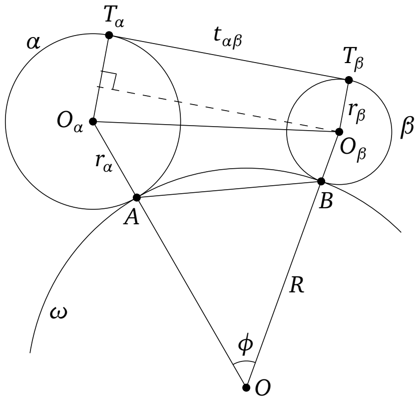

Рис. 9

(это как раз тот редкий случай, когда выгодно применить теорему косинусов к равнобедренному треугольнику), откуда получаем

$$O_\alpha O_\beta^2 = (R+r_\alpha)^2 + (R+r_\beta)^2 - 2(R+r_\alpha)(R+r_\beta)\cos\varphi =$$
$$= (r_\alpha - r_\beta)^2 + (R+r_\alpha)(R+r_\beta)\frac{AB^2}{R^2}.$$

Здесь O_α, O_β — центры окружностей α и β соответственно. Наконец, проведя через O_β прямую, параллельную общей касательной этих окружностей и применяя теорему Пифагора к образовавшемуся прямоугольному треугольнику, находим

$$t_{\alpha\beta} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_\alpha)(R+r_\beta)}.$$

Точно так же получается, что

$$t_{\beta\gamma} = \frac{BC}{R}\sqrt{(R+r_\beta)(R+r_\gamma)},$$
$$t_{\gamma\delta} = \frac{CD}{R}\sqrt{(R+r_\gamma)(R+r_\delta)},$$
$$t_{\delta\alpha} = \frac{DA}{R}\sqrt{(R+r_\delta)(R+r_\alpha)},$$
$$t_{\alpha\gamma} = \frac{AC}{R}\sqrt{(R+r_\alpha)(R+r_\gamma)},$$
$$t_{\beta\delta} = \frac{BD}{R}\sqrt{(R+r_\beta)(R+r_\delta)}.$$

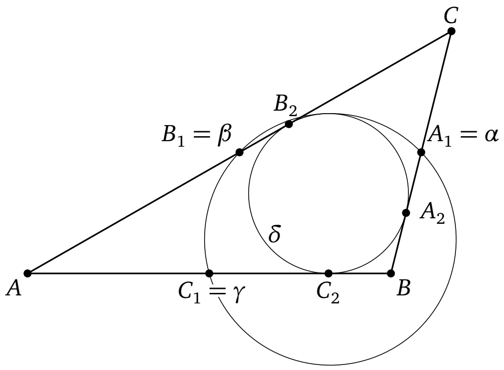

Рис. 10

Теперь легко убедиться в том, что равенство (1) превращается в соотношение

$$\frac{\sqrt{(R+r_\alpha)(R+r_\beta)(R+r_\gamma)(R+r_\delta)}}{R^2}(AB\cdot CD+BC\cdot DA)=$$
$$=\frac{\sqrt{(R+r_\alpha)(R+r_\beta)(R+r_\gamma)(R+r_\delta)}}{R^2}AC\cdot BD,$$

эквивалентное равенству $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$, т. е. теореме Птолемея для вписанного четырёхугольника $ABCD$. □

Применим теперь обобщенную теорему Птолемея для **доказательства** теоремы Фейербаха: будем рассматривать точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC — как окружности α, β и γ соответственно (окружности нулевого радиуса). Пусть δ — вписанная окружность треугольника. Применим к четвёрке α, β, γ, δ теорему Кези. Для этого выразим отрезки $t_{\alpha\beta}$, $t_{\beta\gamma}$ и т. д. через стороны треугольника ABC (мы используем те же стандартные обозначения, что и прежде), заметив, что прямая или окружность касается точки, если и только если она через неё проходит:

$$t_{\alpha\beta}=A_1B_1=\frac{c}{2},$$
$$t_{\beta\gamma}=B_1C_1=\frac{a}{2},$$
$$t_{\alpha\gamma}=A_1C_1=\frac{b}{2},$$

так как эти отрезки — средние линии треугольника ABC. Далее,

$$t_{\delta\alpha}=A_1A_2=|BA_1-BA_2|=\left|\frac{a}{2}-\frac{a-b+c}{2}\right|=\frac{|b-c|}{2}.$$

Здесь A_2 — точка касания стороны BC со вписанной окружностью (мы воспользовались известными формулами для длины отрезков касательных). Точно так же

$$t_{\beta\delta} = B_1B_2 = \frac{|a-c|}{2},$$
$$t_{\gamma\delta} = C_1C_2 = \frac{|a-b|}{2}.$$

Осталось проверить выполнение условий теоремы Кези (случай, когда все окружности касаются ω изнутри): пусть (как на рис. 10) $b > c > a$, тогда

$$|t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha}| = \left|\frac{c}{2}\cdot\frac{|a-b|}{2} - \frac{a}{2}\cdot\frac{|b-c|}{2}\right| =$$
$$= \frac{1}{4}|bc - ac - ab + ac| = \frac{b}{2}\cdot\frac{|c-a|}{2} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}.$$

Следовательно, существует окружность, касающаяся всех четырёх данных. Но α, β и γ — окружности нулевого радиуса, значит, окружность, которая их касается, совпадает с окружностью Эйлера треугольника ABC. □

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой пересечения его высот, тоже лежат на окружности Эйлера (отсюда её второе название — *окружность девяти точек*).

2. Воспользуйтесь первым из предложенных в лекции способов чтобы доказать, что окружность Эйлера касается вневписанных окружностей треугольника (напомним, что *вневписанной* называется окружность, касающаяся одной из сторон и продолжений двух других сторон треугольника.

3. Докажите, что в любом треугольнике ортоцентр, точка пересечения медиан, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой, причём точка пересечения медиан лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр и центр описанной окружности, и делит его в отношении $2:1$, считая от ортоцентра, а центр окружности Эйлера делит тот же самый отрезок пополам.

4. Даны две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой, к которым проведены все возможные общие касательные. Докажите а) что длины внутренних общих касательных равны длинам общих внешних касательных, б) что четыре точки пересечения внутренних и внешних касательных этих окружностей лежат на одной окружности.

5. Про треугольник ABC известно, что $\angle B = 120^\circ$. Проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Найдите угол $A_1B_1C_1$.

6. Две окружности касаются в точке A. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D. Докажите, что $\angle CAD = 90^\circ$.

7. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

8. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причём окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Докажите, что точки касания этих окружностей образуют вписанный четырёхугольник.

9. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A и B, причём одна из точек пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на отрезке AB. Докажите, что сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна радиусу окружности S.

10. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны R и r ($R > r$). Найдите длину касательной, проведённой к окружности S_2 из точки B окружности S_1, если известно, что $AB = a$. (Разберите случаи внутреннего и внешнего касания.)

Лекция 14

Теорема Морлея

Следующая теорема, с которой мы считаем необходимым познакомить читателя, — это не менее знаменитая, чем теорема Фейербаха, *теорема Морлея*.

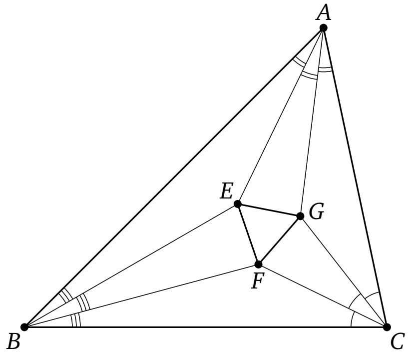

Рис. 1

А именно, рассмотрим произвольный треугольник ABC. Разделим его внутренние углы на три равные части — проведём так называемые *трисектрисы* (внутренних) углов треугольника. Пусть E, F и G — точки пересечения трисектрис, прилегающих к сторонам AB, BC и AC соответственно (см. рис. 1). Тогда утверждение теоремы Морлея состоит в том, что

треугольник EFG равносторонний.

Кажется удивительным, что столь красивый факт (и при этом не слишком сложный в доказательстве) был «пропущен» древнегреческими геометрами — теорема была доказана лишь в самом конце XIX века, в 1899 году, англо-американским математиком Фрэнком Морли[1]. Впрочем, это, наверное объясняется тем, что построение

[1] По-английски его фамилия пишется как Morley, отсюда преобладающее до сих пор в русской литературе название *теорема **Морлея***, которым будем пользоваться и мы.

трисектрис при помощи циркуля и линейки невозможно, а следовательно, такие объекты в древнем мире попросту не изучались. Отметим ещё, что на самом деле вместо внутренних углов треугольника можно делить на три части его внешние углы или даже углы, дополняющие его внутренние углы до 360°. Утверждение теоремы при этом останется верным: *мы каждый раз будем получать равносторонние треугольники.* Более того, можно доказать, что все соответствующие стороны этих равносторонних треугольников будут параллельны между собой! Мы, конечно, не будем доказывать эту теорему в столь большой общности: методы, которые при этом придётся использовать, несколько выходят за рамки программы настоящего курса. Вместо этого в конце лекции мы приведём рисунок, изображающий все эти треугольники (а заодно — и аккуратно сформулируем теорему в максимально общем виде).

Мы приведём три различных доказательства теоремы Морлея, разного уровня сложности и основанных на разных идеях (ещё один способ доказывать теорему Морлея мы вынесли в задачи для самостоятельного решения). Начнём с самого простого, что может прийти в голову: выразим длины сторон треугольника EFG через длины сторон ABC и его углы и сравним между собой. Как и в предыдущих лекциях, мы пользуемся стандартными обозначениями для этих величин: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Прежде чем мы приступим к доказательству, отметим ещё, что треугольник EFG, который фигурирует в утверждении теоремы, часто называют *треугольником Морлея*.

Первое доказательство. Все обозначения были разъяснены выше (см. рис. 1). Применив теорему синусов к треугольнику ABE, получим

$$AE = AB\frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle AEB} = c\frac{\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\left(\pi-\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\beta}{3}\right)} = \frac{c\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{3}\right)}.$$

Точно так же из треугольника AGC находим

$$AG = \frac{b\sin\dfrac{\gamma}{3}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\gamma}{3}\right)}.$$

Прежде чем применить теперь теорему косинусов к треугольнику EAG и получить выражение для квадрата EG, преобразуем полученные выражения с помощью известных школьных тригонометрических тождеств. А именно, выразим синус тройного угла через синус исходного:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\cos^2 x\sin x = \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2(1-\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \\ &= 4\sin x\left(\frac{3}{4} - \sin^2 x\right) = 4\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 x\right).\end{aligned}$$

Заметим теперь, что для любых углов u и v выполняется равенство

$$\begin{aligned}\sin^2 u - \sin^2 v &= \frac{1-\cos 2u}{2} - \frac{1-\cos 2v}{2} = \frac{\cos 2v - \cos 2u}{2} = \\ &= \frac{2\sin\left(\dfrac{2u-2v}{2}\right)\sin\left(\dfrac{2u+2v}{2}\right)}{2} = \sin(u-v)\sin(u+v).\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем продолжить полученное выше равенство:

$$\sin 3x = 4\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2 x\right) = 4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

Вспомним теперь, что по теореме синусов для треугольника ABC имеем

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma,$$

где R — радиус описанной окружности. Следовательно,

$$\begin{aligned}AE &= \frac{c\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{3}\right)} = 2R\frac{\sin\gamma\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{3}\right)} = \\ &= 2R\frac{4\sin\dfrac{\gamma}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\gamma}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\gamma}{3}\right)\sin\dfrac{\beta}{3}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{3}\right)} = \\ &= 8R\sin\frac{\beta}{3}\sin\frac{\gamma}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\gamma}{3}\right),\end{aligned}$$

потому что $\frac{\pi}{3} - \frac{\gamma}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3}$. Точно так же получаем

$$AG = 8R\sin\frac{\beta}{3}\sin\frac{\gamma}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\beta}{3}\right).$$

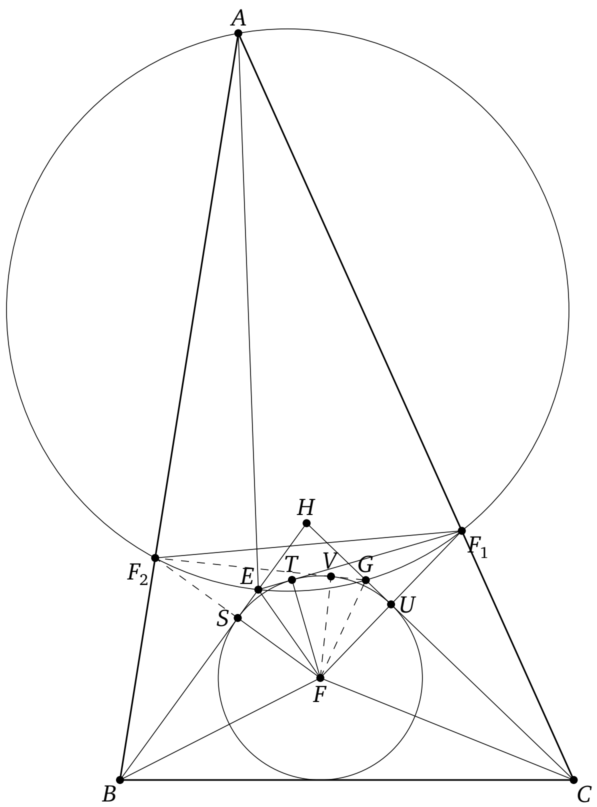

Рис. 2

Подставим, наконец, полученные равенства в теорему косинусов для треугольника EAG:

$$EG^2 = AE^2 + AG^2 - 2AE \cdot AG \cos\frac{\alpha}{3} =$$

$$= 64R^2 \sin^2\frac{\beta}{3} \sin^2\frac{\gamma}{3}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\gamma}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\beta}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\beta}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\gamma}{3}\right)\cos\frac{\alpha}{3}\right)$$

Заметим теперь, что сумма углов $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\beta}{3}$ и $\frac{\pi}{3}+\frac{\gamma}{3}$ равна π (ведь $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}=\frac{\pi}{3}$), следовательно, существует треугольник с такими углами. Из теорем синусов и косинусов для такого треугольника заключаем, что сумма, стоящая в скобках, равна попросту $\sin^2\frac{\alpha}{3}$. В итоге получаем

$$EG = 8R\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\frac{\gamma}{3}.$$

Это выражение симметрично по α, β и γ, так что нет ничего удивительного в том, что точно такие же рассуждения, применённые для вычисления длин отрезков FG и GE, дают тот же результат. □

Это доказательство нельзя назвать в полной мере геометрическим, — оно скорее тригонометрическое, — но оно, наверное, наиболее «честное» из всех, которые можно придумать. Мы не пытаемся угадать ответ, не приводим какие-то неожиданные дополнительные построения, а просто честно преобразуем выражения. Приведём теперь одно из существующих геометрических доказательств. Обратите внимание на несколько неожиданное наблюдение, которое позволяет доказать теорему.

Второе доказательство. Предположим, что A — самый маленький угол треугольника ABC. Пусть тогда H — точка пересечения «вторых» трисектрис углов B и C треугольника. Заметим, что точка F является центром окружности, вписанной в треугольник BCH. Проведём теперь дополнительные построения. Отразим F относительно CH, получим точку F_1 на стороне AC; проведём через точку F_1 касательную F_1T к окружности, вписанной в треугольник BCH (ту из них, которая проходит «сверху» от окружности), и пусть P — точка пересечения этой касательной с прямой BH. Аналогичным образом мы отразим точку F относительно BH и через получившуюся точку F_2 проведём «верхнюю» касательную к той же самой окружности. Обозначим через Q точку пересечения проведённой касательной с лучом CH.

Докажем прежде всего, что треугольник PFQ равносторонний. Для этого нам придётся немного «посчитать углы», т. е. повыражать образовавшиеся углы через углы треугольника ABC. Мы при этом слегка подправим обозначения: будем считать, что α, β и γ обозначают не сами углы $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$, а их трети; в частности, теперь $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$. Это переобозначение немного сбережёт нам силы при вычислениях.

Итак, для начала заметим, что углы треугольника FF_1T равны $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$ соответственно (в указанном порядке); в самом деле, он прямоугольный (FT — радиус, проведённый в точку касания), и его гипотенуза FF_1 по построению в два раза больше катета FT. С другой стороны, если S и U — точки касания окружности, вписанной в треугольник BHC, со сторонами BH и CH соответственно, то мы легко найдём угол SFU:

$$\angle SFU = 2\pi - \angle FSH - \angle FUH - \angle BHC =$$
$$= 2\pi - 2\frac{\pi}{2} - (\pi - 2\beta - 2\gamma) = 2\beta + 2\gamma.$$

Следовательно, угол TFS равен

$$\angle SFU - \angle TFF_1 = (2\beta + 2\gamma) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\alpha,$$

так как $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$. Наконец, в силу того что PT и PS — касательные, а F — центр соответствующей окружности, получаем

$$\angle PFS = \angle PFT = \frac{1}{2}\angle TFS = \frac{\pi}{6} - \alpha.$$

Но все те же самые вычисления можно провести и для угла QFU: угол SFU будет тем же самым, и угол, который от него надо отнять, т. е. SFV, тоже будет равен $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $\angle QFU = \angle PFT$. Но из этого следует, что прямоугольные треугольники QFU и PFT равны между собой (ведь у них уже есть равные катеты $FU = FT$), и, значит, $QF = PF$. Найдём теперь угол PFQ:

$$\angle PFQ = \angle SFU - \angle PFS - \angle QFU = 2\beta + 2\gamma - 2\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) =$$
$$= 2(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},$$

так как $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, треугольник PFQ правильный (он равнобедренный с углом 60°).

Теперь осталось доказать, что точка P совпадает на самом деле с точкой E пересечения трисектрис углов треугольника ABC, прилегающих к стороне AB, а точка Q — с оставшейся вершиной G треугольника Морлея. Мы разберём только доказательство для точки P, второе утверждение доказывается аналогично.

Итак, докажем для начала, что точки A, F_1, F и F_2 лежат на одной окружности. Найдём для этого угол F_2PF_1. Он равен $2\pi - \angle F_2PS - \angle SPF - \angle TPF$. Но $\angle SPF = \angle TPF$ (так как F — центр окружности, вписанной в угол SPT), а с другой стороны, в силу способа построения точки F_2, имеем $\angle F_2PS = \angle FPS$. Поэтому

$$\angle F_2PF_1 = 2\pi - 3\angle SPF = 2\pi - 3\left(\frac{\pi}{2} - \angle PFS\right) =$$
$$= 2\pi - \frac{3\pi}{2} + 3\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \pi - 3\alpha.$$

Так как $\angle A = 3\alpha$, получаем, что $\angle F_2AF_1 + \angle F_2PF_1 = \pi$, т. е. четырёхугольник F_2PF_1A вписанный. Найдём теперь угол PF_2F_1 (слева над окружностью на рис. 2): $\angle PF_2F_1 = \angle FF_2F_1 - \angle PF_2S$, при этом угол FF_2F_1 мы можем найти из равнобедренного треугольника F_2FF_1, угол при вершине F которого мы знаем:

$$\angle FF_2F_1 = \frac{\pi - \angle F_1FF_2}{2} = \frac{\pi - (2\beta + 2\gamma)}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{6} + \alpha.$$

А угол PF_2S, как мы уже замечали, равен углу PFS, а значит,

$$\angle PF_2F_1 = \frac{\pi}{6} + \alpha - \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2\alpha.$$

Следовательно, $\angle PAF_1 = \angle PF_2F_1 = 2\alpha$ (как опирающиеся на одну дугу), и $\angle BAP = \alpha$, т. е. AP — трисектриса угла A треугольника ABC, и точка P совпадает с E. Точно так же мы покажем, что $Q = F$. Таким образом, треугольник EFG совпадает с правильным треугольником PFQ, что и требовалось доказать. □

Нельзя сказать, что это доказательство очень изящно — рассуждения занимают почти две страницы. Нельзя его назвать и совсем честным: совершенно непонятно, каким образом можно догадаться, что точки E и P совпадут. Однако мы получили из этого рассуждения много полезных дополнительных сведений. Например, мы можем найти все углы треугольника EHG: посмотрим на рис. 3. Как мы знаем из только что приведённого доказательства, треугольники SFE, TFE, VFG и UFG все равны между собой, и, следовательно, $SE = ET = VG = GU$. Но $HS = HU$ как отрезки касательных, проведённых к одной и той же окружности из одной точки, поэтому

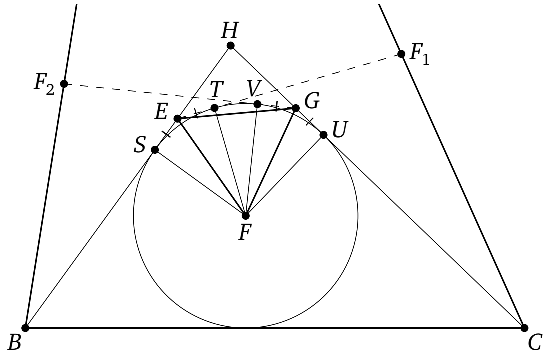

Рис. 3

$HE = HS - SE = HU - UG = HG$, т. е. треугольник FHG равнобедренный с углом при вершине H, равным $\pi - 2\beta - 2\gamma = \frac{\pi}{3} + 2\alpha$ (мы пользуемся теми же обозначениями, что и в приведённом только что доказательстве).

Сделанное только что несложное наблюдение является, в некотором роде, объяснением того третьего доказательства теоремы Морлея, которое мы собираемся дать. Оно самое простое из всех приведённых нами, но при этом и самое «хитрое». Впрочем, судите сами: нам потребуется ещё один простой факт.

Утверждение 1. *Если точка J лежит на биссектрисе угла A треугольника ABC и при этом угол BJC равен $90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, то J является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.*

Доказательство. Утверждение сводится к сделанному нами несколько лекций назад наблюдению, что угол BIC, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC, равен $90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. Поэтому точка J попадает на одну дугу с точкой I (см. рис. 4). Но эта дуга пересекает биссектрису угла A в единственной точке, следовательно, $J = I$. □

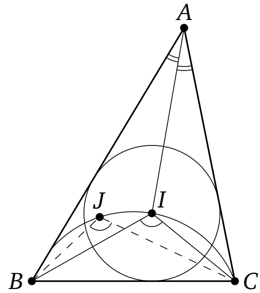

Рис. 4

Третье доказательство. Вместо того чтобы строить треугольник EFG по треугольнику ABC, а потом доказывать, что треугольник EFG правильный, мы восстановим ABC по ***правильному*** треугольнику EFG, причём сделаем это вполне канонически, единственным возможным способом.

Итак, пусть ABC — данный треугольник, углы которого, как и прежде, равны 3α, 3β и 3γ соответственно. Как мы знаем из замечания, сделанного после второго приведённого нами доказательства, треугольники, образованные трисектрисами его углов и сторонами треугольника EFG, равнобедренные с углами при основании, равными $\xi = \beta + \gamma$, $\eta = \gamma + \alpha$ и $\zeta = \alpha + \beta$. Попробуем по этим данным восстановить ABC.

Возьмём произвольный правильный треугольник $E'F'G'$ и построим на его сторонах как на основаниях равнобедренные треугольники $HE'G'$, $IF'E'$ и $JG'F'$ с углами при основании ξ, η и ζ соответственно. Пусть A', B' и C' — точки пересечения лучей IE' и JG', JF' и HE', IF' и HG' соответственно (см. рис. 5). Сейчас мы докажем,

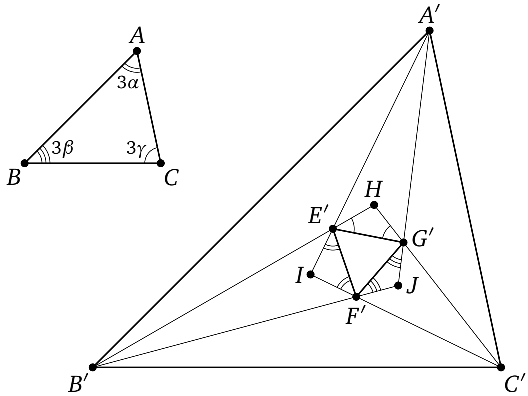

Рис. 5

во-первых, что треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC, а во-вторых, что треугольник $E'F'G'$ получается из треугольника $A'B'C'$ при помощи процедуры, описанной в теореме Морлея.

Для этого найдём угол $B'F'C'$:

$$\begin{aligned}\angle B'F'C' &= 2\pi - \angle B'F'E' - \angle C'F'G' - \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{5\pi}{3} - \left(\pi - \zeta - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\pi - \eta - \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\pi}{3} + \eta + \zeta = \frac{\pi}{3} + (\gamma + \alpha) + (\alpha + \beta) = \\ &= \frac{\pi}{3} + (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha = \frac{2\pi}{3} + \alpha.\end{aligned}$$

С другой стороны, угол $B'HC'$ равен углу при вершине равнобедренного треугольника $E'HG'$ и равен $\pi - 2\xi = \pi - 2\beta - 2\gamma$. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle B'HC' &= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = \\ &= \pi - \beta - \gamma = \frac{2\pi}{3} + \alpha = \angle B'F'C'.\end{aligned}$$

Но так как треугольник $E'HG'$ равнобедренный, а треугольник $E'F'G'$ правильный, луч HF' — биссектриса угла $B'HC'$. Следовательно, согласно доказанному нами вспомогательному утверждению точка F' является центром окружности, вписанной в треугольник $B'HC'$, т. е. $B'F'$ — биссектриса угла $HB'C'$, и, значит, $\angle HB'F' = \angle F'B'C'$. По той же причине $\angle HC'F' = \angle F'C'B'$. Аналогичным образом мы докажем, что точка E' — центр окружности, вписанной в треугольник $A'JB'$ (соответственно G' — центр вписанной окружности треугольника $C'IA'$), и, значит, $\angle JA'E' = \angle E'A'B'$, и, кроме того $\angle JB'E' = \angle E'B'A'$ (соответственно $\angle IC'G' = \angle G'C'A'$, $\angle IA'G' = = \angle G'A'C'$). Но это означает, что

$$\angle B'A'E' = \angle E'A'G' = \angle G'A'C',$$
$$\angle C'B'F' = \angle F'B'E' = \angle E'B'A',$$
$$\angle A'C'G' = \angle G'C'F' = \angle F'C'B',$$

т. е. что точки E', F' и G' получены из треугольника $A'B'C'$ методом, предписываемым теоремой Морлея. Найдём углы этого треугольника. Например, найдём угол $E'A'G'$:

$$\begin{aligned}\angle E'A'G' &= \pi - \angle G'E'A' - \angle E'G'A' = \\ &= \pi - \left(\pi - \frac{\pi}{3} - \eta\right) - \left(\pi - \frac{\pi}{3} - \zeta\right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} + \eta + \zeta = -\frac{\pi}{3} + (\gamma + \alpha) + (\alpha + \beta) = \\ &= -\frac{\pi}{3} + (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, $\angle B'A'C' = 3\angle E'A'G' = 3\alpha$. Точно таким же образом получаем $\angle C'B'A' = 3\beta$, $\angle A'C'B' = 3\gamma$.

Итак, треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC. Сжав или растянув его в несколько раз, его можно наложить на ABC. Треугольник $E'F'G'$ при этом перейдёт в треугольник Морлея ABC. Поэтому треугольник Морлея исходного треугольника тоже правильный. $\square$

Видно, что рассуждение получилось совсем простым. При этом, правда, в нём присутствует нечто загадочное: каким образом мы угадали бы, что треугольники EHG, FIE и GJF равнобедренные, если бы не разобрали до этого подробно второе доказательство? Вообще, существует великое множество различных доказательств теоремы Морлея, основанных на таких разных идеях, как движения, тригонометрические вычисления, применение координат и векторов, комплексных чисел и даже кватернионов. Правда, ни одно из известных мне рассуждений я не могу назвать в полной мере удовлетворительным: все они или опираются на длинные, занудные вычисления, или же в той или иной мере «обманывают» читателя, используя неизвестным образом полученные эвристические сооб-

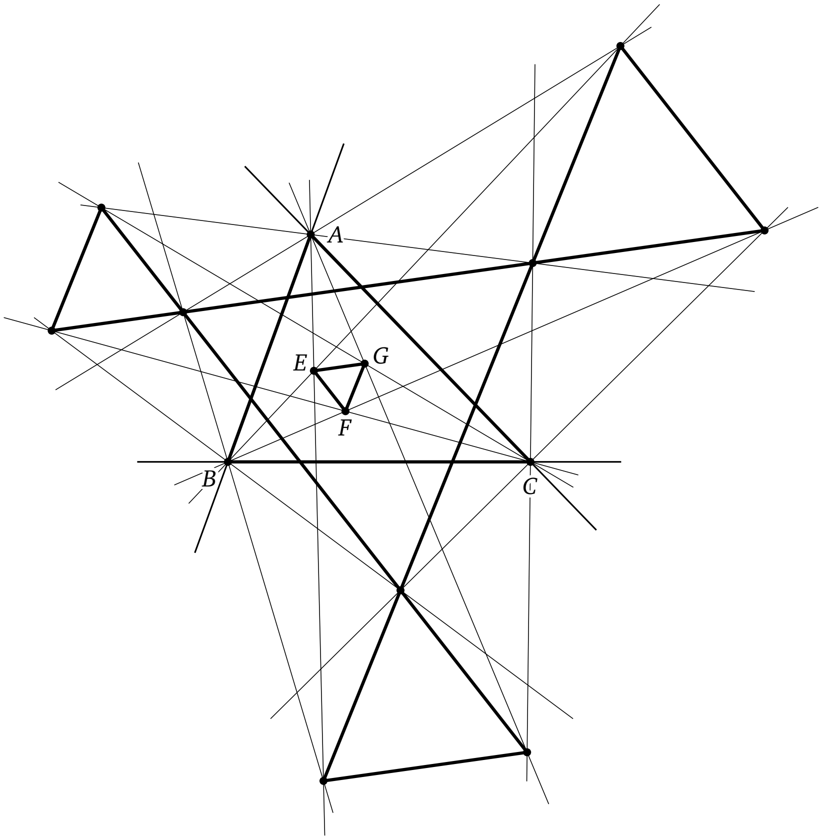

Рис. 6

ражения. Очевидно, дело тут в особой природе трисектрис, плохо поддающейся чисто геометрическому анализу. Недаром задача о трисекции угла не может быть решена геометрически.

Существует также несколько обобщений теоремы Морлея. Во-первых, кроме трисектрис его внутренних углов мы можем рассматривать трисектрисы его внешних углов, т. е. углов, смежных с его внутренними углами. Таких углов у треугольника ABC всего шесть (по два из них примыкают к каждому внутреннему углу), при этом трисектрисы внешних углов, примыкающих к одной и той же вершине треугольника, составляют одну прямую. Мы будем называть такую прямую трисектрисой внешних углов при соответству-

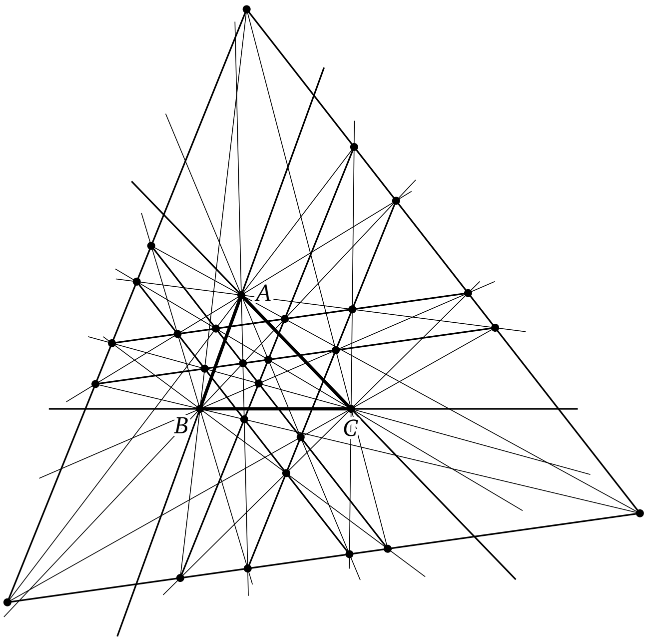

Рис. 7

ющей вершине. Всего у нас будет, таким образом, ровно шесть таких трисектрис-прямых. Пересечём те из них, которые примыкают к одной стороне треугольника ABC. Оказывается, *мы снова получим правильный треугольник*! *Более того, стороны этого треугольника будут параллельны сторонам треугольника Морлея.* Мы можем также пересечь трисектрисы внешних и внутренних углов треугольника ABC, если они примыкают к одной его стороне. Мы получим ещё шесть точек, по одной на каждой трисектрисе внешнего угла. Эти точки естественным образом группируются в пары: пару будут составлять точки, лежащие на трисектрисах внутренних углов, проходящих через общую вершину. Как и следовало ожидать, *полученная таким образом пара точек вместе с примыкающей к противоположной стороне треугольника точкой пересечения трисектрис внешних углов образуют правильный треугольник*! *Причём стороны этого треугольника тоже параллельны сторонам треугольника Морлея.* Таким образом, мы получили четыре новых правильных треугольника, причём вершины этих треугольников лежат на трёх пересекающихся прямых, параллельных сторонам треугольника Морлея, — по 4 штуки на каждой прямой. Рассматриваемая ситуация изображена на рис. 6. На нём изображены проведённые нами трисектрисы внешних углов; «жирные» правильные треугольники — те, что мы только что построили, маленький правильный треугольник внутри ABC — треугольник Морлея.

Оказывается, и это ещё не окончательный вид, который можно придать нашей теореме. А именно, рассмотрим углы, дополняющие внутренние углы треугольника до 2π. Мы можем провести и их трисектрисы. Итого, мы проведём шесть трисектрис внутренних углов, шесть трисектрис внешних углов и шесть трисектрис углов, дополняющих углы треугольника до 2π, — всего 18 прямых. Оказывается, *среди точек пересечения всех этих трисектрис можно выделить* 27 *лежащих по* 6 *штук на девяти прямых, которые разбиваются на группы по* 3 *параллельных прямых, причём углы между прямыми из разных групп составляют* $\frac{\pi}{3}$! Эта ситуация изображена на рис. 7, добавленные (по сравнению с рис. 6) «тонкие» прямые — трисектрисы, проведённые нами в последнюю очередь.

Мы не будем здесь доказывать это общее утверждение. Желающие узнать, как доказывается такая общая теорема могут найти нужные рассуждения в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия. 7—9 классы» (М.: Дрофа, 2000).

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько всего правильных треугольников образовалось на рис. 7?

2. Докажите теорему Морлея для точек пересечения трисектрис внешних углов треугольника (т. е. докажите, что треугольник, образованный точками пересечения трисектрис этих углов, прилегающих к общей стороне треугольника, правильный).

3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что $AM:BM:CM=1:2:3$. Найдите угол AMB.

4. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABP, BCQ и CAR. Докажите, что треугольник с вершинами в центрах построенных правильных треугольников тоже правильный (теорема наполеона).

5. Докажите, что описанная окружность треугольника является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей этого треугольника.

6. Если четыре точки Y', Z, Y, и Z' таковы, что выполняются равенства $Y'Z = ZY = YZ'$ и $\angle YZY' = \angle Z'YZ = 180^\circ - 2\alpha > 60^\circ$, то они лежат на одной

окружности. Более того, если точка A, лежащая по разные стороны от $Y'Z'$ с точкой Y, такова, что $\angle Y'AZ' = 3\alpha$, то эта точка A тоже лежит на этой окружности.

7. Докажите теорему Морлея, используя результат предыдущей задачи.

8. Окружность радиуса u_a вписана в угол A треугольника ABC, окружность радиуса u_b вписана в угол B; эти окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника со сторонами $a_1 = \sqrt{u_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)}$, $b_1 = \sqrt{u_b \operatorname{ctg}(\beta/2)}$ и $c_1 = \sqrt{c}$ равен $\frac{\sqrt{p}}{2}$, где p — полупериметр треугольника ABC. Как и прежде a, b, c — стороны, а α, β, γ — углы треугольника ABC.

9. Используйте результат предыдущей задачи, чтобы доказать следующее утверждение. Окружность S_1 вписана в угол A треугольника ABC; окружность S_2 вписана в угол B и касается S_1 (внешним образом); окружность S_3 вписана в угол C и касается S_2; окружность S_4 вписана в угол A и касается S_3 и т. д. Докажите, что окружность S_7 совпадает с S_1.

10. Докажите, что прямая делит периметр и площадь треугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр его вписанной окружности.

Лекция 15

Теоремы Тебо и Содди

Вот мы и добрались до последней лекции первой части нашего курса. Чтобы читателю не было скучно прощаться с нашими записями, мы в заключительной лекции расскажем о двух интересных и красивых теоремах элементарной геометрии XX века. Следует отметить, что выбрать эти теоремы было не очень просто — как ни странно, XX век оказался ничуть не менее богат на неожиданные геометрические результаты, чем более ранние столетия, несмотря даже на то, что элементарная евклидова геометрия сейчас лежит далеко от того, что можно назвать «мейнстримом» математической науки, и рассматривается многими скорее как род математических развлечений, наподобие разгадывания головоломок. В крайнем случае её признают важным разделом школьной и олимпиадной математики. Тем не менее количество красивых результатов в этой области весьма велико. Среди утверждений, между которыми нам приходилось выбирать, можно упомянуть теорему Дроз-Фарни, некоторые красивые результаты Виктора Тебо (о нём мы напишем ниже), утверждения, доказанные нашими соотечественниками Е. Куланиным, Л. и Т. Емельяновыми, В. Протасовым, и многое другое. К сожалению, многое пришлось отбросить — или по причине отсутствия в настоящий момент у результата доказательства, которое можно было бы счесть вполне элементарным (известного автору) — неэлементарные и не совсем элементарные методы я рассчитываю частично изложить в следующей части курса, или по причине того, что подробное изложение результатов со всеми необходимыми предварительными сведениями заняло бы слишком много места. В итоге я остановил свой выбор на том, что вы увидите ниже, хотя, конечно, назвать его идеальным нельзя.

Первая из выбранных мной для последней лекции теорем принадлежит малоизвестному неспециалистам французскому математику-любителю Виктору Тебо (Victor Thébault). Даже всезнающая Википедия упоминает пока (осень 2009 года) только годы его жизни, 1882—1960. В 30—50-е годы прошлого века его удивительные тео-

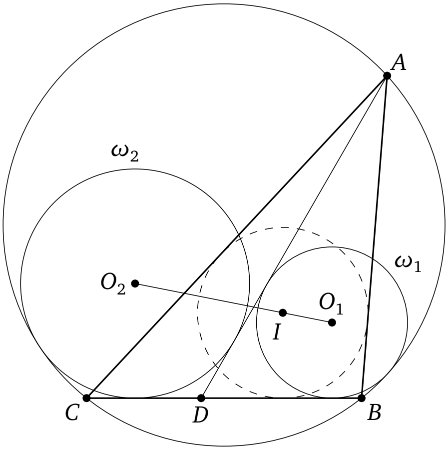

Рис. 1

ремы и задачи появлялись на страницах многих научно-популярных журналов, в одном только *American Mathematical Monthly* он опубликовал более 600 задач! А ведь он не был, что называется, профессиональным математиком. Окончив с отличием в 1902 году учительский колледж в Лавале и проработав в разных учебных заведениях до 1910 года, он вынужден был оставить карьеру преподавателя, так как не мог на своё жалованье содержать свою большую семью (у него было шестеро детей, пять сыновей и одна дочь). С 1910 по 1940 годы он работал то управляющим на фабрике, то старшим страховым инспектором. И несмотря на это, он находил время и силы публиковать огромное количество результатов по элементарной геометрии, теории чисел и другим близким к школе отраслям математики!

В этой лекции мы расскажем про один из наиболее изящных и знаменитых геометрических результатов Виктора Тебо. Итак, сформулируем теорему.

Теорема 1. *В треугольнике ABC взяли произвольную точку D на стороне BC и провели отрезок AD. Рассмотрим окружности ω_1 (соответственно ω_2), касающиеся отрезков AD и BD и дуги AB описанной окружности треугольника ABC (соответственно отрезков AD и CD и дуги AC описанной окружности). Пусть O_1 и O_2 — их центры. Тогда центр I окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на отрезке O_1O_2* (см. рис. 1). *Более того, если θ — величина угла ADB,* *то выполняется равенство*

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

Эта теорема была опубликована в виде задачи в журнале «American Mathematical Monthly» (1938. № 45), и долгое время решение её не было известно. Первое известное решение (в котором используются координатные методы и сложные вычисления) появилось в 1983 году. С тех пор было обнаружено ещё несколько доказательств этой теоремы, основанных на разных идеях, тригонометрии, обобщённой теореме Птолемея (теореме Кези) и т. п. Мы здесь приведём «чисто геометрическое» рассуждение, найденное в 1988 году В. Ю. Протасовым. Итак, для начала мы докажем такое полезное наблюдение, которое в зарубежной литературе называют иногда *леммой Саваямы*.

Утверждение 1 (лемма Саваямы). *Пусть P — точка касания окружности ω_1 с отрезком BD, а Q точка её касания с AD. Тогда прямая PQ проходит через центр I вписанной окружности этого треугольника.*

Доказательство. Пусть T — точка касания ω_1 с окружностью, описанной около треугольника ABC. Пусть Q' — отличная от P точка пересечения прямой PI с окружностью ω_1. Докажем, что точки T, I,

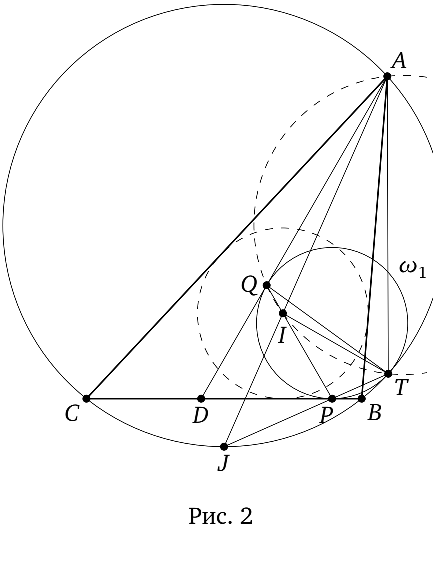

Рис. 2

Q' и A лежат на одной окружности. Заметим для этого, что согласно лемме Архимеда (см. лекцию 13) прямая TP проходит через середину J дуги BC. Но через ту же точку проходит и биссектриса AI угла A треугольника ABC. Проведём теперь отрезки TI и TQ' (см. рис. 2). Тогда, во-первых, угол $PQ'T$ равен углу BPT как угол, опирающийся на хорду, и угол между касательной, проведённой в одном из концов хорды, и этой хордой.

Во-вторых, угол BPT равен полусумме дуг BT и JC (см. лекцию 5, где мы описывали свойства углов, связанных с окружностью). Но дуга JB равна дуге JC, поэтому угол JAT тоже равен углу BPT. Таким образом, $\angle IQ'T = \angle IAT$, и, следовательно, четырёхугольник $IQ'AT$ вписанный. Но из этого следует, что угол $AQ'T$ равен углу AIT. Кроме того, по свойству окружностей, вписанных в сегмент (см. лекцию 13), длины касательных, проведённых к ним из середины противоположной дуги, равны между собой и равны расстоянию от середины этой дуги до конца этой же дуги. Таким образом (применяя это свойство к ω_1 а также пользуясь тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на отрезок до окружности), получаем $JP \cdot JT = JB^2$. Но, как известно (см. доказательство формулы Эйлера расстояния между центрами вписанной и описанной окружности треугольника), $JB = JI$. Следовательно,

$$JP \cdot JT = JI^2, \quad \text{или} \quad \frac{JP}{JI} = \frac{JI}{JT}.$$

Поэтому треугольники JTI и JIP подобны (по углу и пропорциональным сторонам), и, значит, $\angle JIT = \angle JPI$. Переходя к смежным углам, получаем

$$\angle AIT = \angle Q'PT, \quad \text{т.е. } \angle AQ'P = \angle Q'PT,$$

и, следовательно, прямая AQ' касается ω_1 в точке Q' (мы обращаем свойство угла между касательной и хордой). Поэтому прямая AQ' совпадает с прямой AD и, значит, $Q = Q'$. □

Конечно, то же самое утверждение верно и в отношении окружности ω_2. Теперь доказательство теоремы Виктора Тебо сводится к доказательству следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть окружность ω_1 с центром O_1 вписана в угол величины θ, а окружность ω_2 с центром O_2 — в смежный с ним угол. Проведём прямую l_1 (соответственно l_2) через точки касания окружности ω_1 (соответственно ω_2) со сторонами угла (соответственно смежного угла). Тогда точка пересечения прямых*

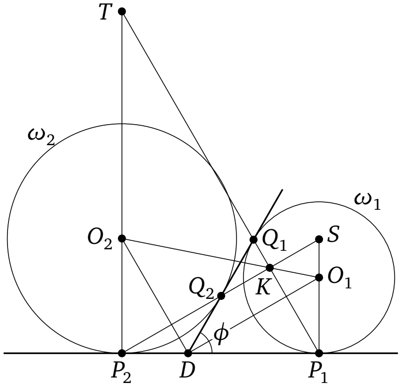

Рис. 3

l_1 и l_2 лежит на линии центров этих окружностей и делит отрезок O_1O_2 в отношении $\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$, *считая от* O_1.

Доказательство. Рассмотрим рис. 3: пусть K — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Нам надо доказать, что точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой. Проведём несложные дополнительные построения: пусть P_1, Q_1 — точки касания ω_1 со сторонами угла, а P_2, Q_2 — точки касания ω_2 со сторонами угла (тогда l_1 — это прямая P_1Q_1, а l_2 — P_2Q_2). Пусть S (соответственно T) — точка пересечения прямых l_2 и P_1O_1 (соответственно l_1 и P_2O_2). Пусть, наконец, D — вершина угла. Проведём отрезки DO_1 и DO_2. Мы докажем, что треугольники TO_2K и P_1O_1K подобны. Отсюда будет следовать, что угол O_2KT равен углу O_1KP_1, а значит, точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой.

Для доказательства заметим, что $\angle O_1P_1K = \angle O_2TK$ и треугольники P_1SK и TP_2K подобны (так как $P_1O_1 \parallel P_2O_2$). Кроме того, заметим, что прямая l_1 параллельна DO_2, а прямая l_2 — DO_1 (так как, очевидно, $l_1 \perp DO_1$ и $DO_1 \perp DO_2$ как биссектрисы смежных углов). Поэтому

$$\frac{TK}{P_1K} = \frac{TP_2}{P_1S} = \frac{TP_2}{P_2P_1} \cdot \frac{P_2P_1}{P_1S} \overset{(*)}{=} \frac{TO_2}{DP_1} \cdot \frac{DP_1}{P_1O_1} = \frac{TO_2}{P_1O_1}.$$

Равенство $(*)$ здесь следует из теоремы Фалеса. Таким образом, $\dfrac{TK}{P_1K} = \dfrac{TO_2}{P_1O_1}$, и треугольник TO_2K подобен P_1O_1K по углу с пропорциональными сторонами.

Из этого же рассуждения мы находим

$$\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{O_1P_1}{O_2T} = \frac{O_1P_1}{P_1D} \cdot \frac{P_1D}{O_2T} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cdot \frac{DP_2}{P_2O_2} = \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}. \qquad \square$$

Эта теорема достаточно красива и сама по себе, но она также позволяет иногда доказывать другие утверждения. Например, мы можем вывести из неё уже известное нам свойство вписанных четырёхугольников (см. лекцию 7, теорема 1).

Утверждение 3. *Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Тогда центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.*

Доказательство получается довольно просто, если рассмотреть окружности, вписанные в соответствующие криволинейные треугольники (см. рис. 4); пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника; рассмотрим для треугольника DAB отрезок AE и построим окружности, касающиеся отрезков AE, EB и дуги AB, а также AE, ED и дуги DA (заштрихованные круги на рис. 4). По теореме Тебо центр окружности, вписанной в треугольник DAB,

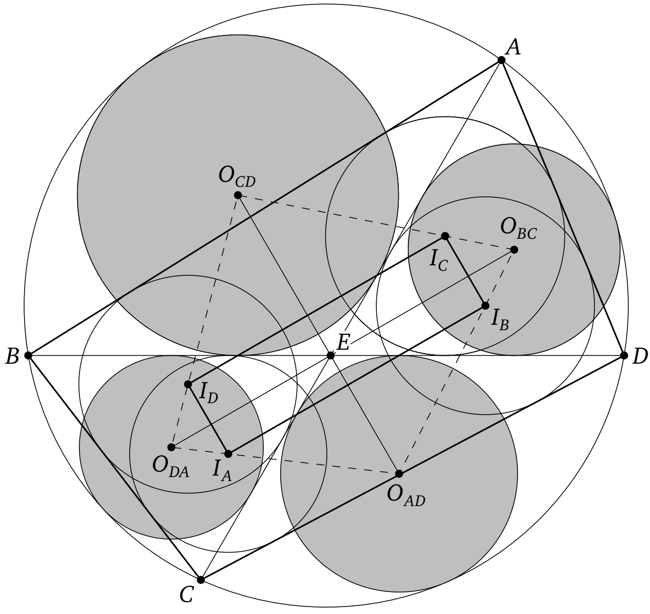

Рис. 4

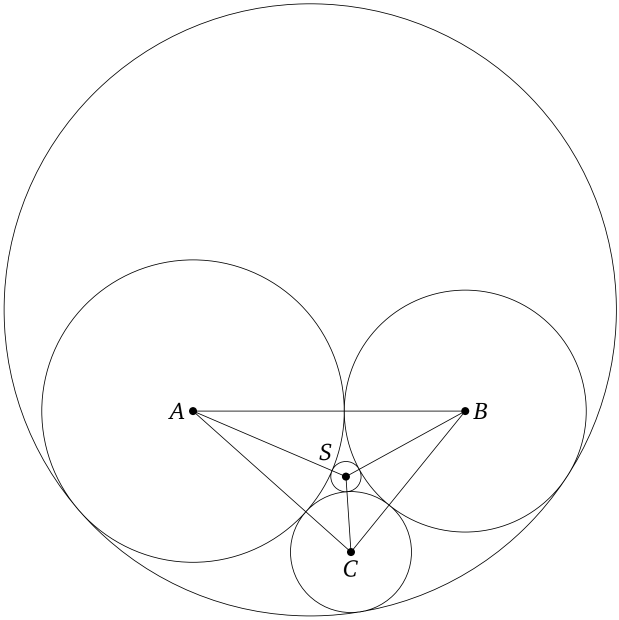

Рис. 5

лежит на отрезке, соединяющем центры этих окружностей, причём делит его в отношении, равном квадрату тангенса угла между диагоналями четырёхугольника. Но то же самое верно для всех остальных заштрихованных окружностей. Если мы теперь рассмотрим четырёхугольник, образованный центрами вспомогательных окружностей, то, во-первых, его диагонали перпендикулярны (как биссектрисы смежных углов), а во-вторых, центры упомянутых в условии вписанных окружностей лежат на его сторонах и делят их в одном и том же отношении, следовательно, стороны четырёхугольника, образованного центрами окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, параллельны диагоналям четырёхугольника, образованного центрами закрашенных кругов, т. е. этот четырёхугольник — прямоугольник. □

Следующая теорема, о которой мы хотели бы рассказать, не совсем, может быть, заслуженно считается доказанной в XX веке. Речь идёт о знаменитой *теореме Содди*. Она была опубликована известным английским физико-химиком, первооткрывателем изотопов, лауреатом Нобелевской премии по химии 1921 года, Фредериком Содди в 1936 году. На самом деле подобное утверждение было известно ещё знаменитому Рене Декарту (он сформулировал его в 1643 году, в письме Богемской принцессе Елизавете). Кроме того, утверждение было повторно открыто в 1842 году английским математиком-любителем Филипом Бикрофтом. Однако с тех пор оно было по существу забыто, и Содди был вполне честен, считая себя первооткрывателем этого замечательного свойства. Звучит это утверждение таким образом:

Теорема 2 (Декарт—Содди)**.** *Пусть три окружности радиусов* r_1, r_2, r_3 *касаются друг друга попарно внешним образом. Рассмотрим четвёртую окружность, касающуюся всех трёх данных внешним или внутренним образом* (*самая большая и самая маленькая окружности на рис.* 5). *Если* r_4 *— её радиус, то выполняется соотношение*:

$$\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

Когда Содди открыл эту удивительную формулу (а он заодно смог обобщить это утверждение на случай касающихся сфер), он настолько обрадовался, что опубликовал её в журнале *Nature* в сопровождении небольшого стихотворения собственного сочинения.

«The kiss precise»

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
This not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.

Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

В переводе это звучит примерно так:

«Точный поцелуй»

Чтобы поцеловать пару губ
Тригонометрии, кажется, не требуется.
Но если целуются четыре окружности,
Дело обстоит уже не так просто.
Нужно, чтобы три окружали четвёртую,
Или чтобы четвёртая — остальные три.
Если три окружают четвёртую,
То она целует их всех снаружи,
А если четвёртая окружает остальные,
То они целуют её изнутри.

Когда четыре окружности целуются,
Самая маленькая больше всего гнётся.
Изгиб — это просто величина,
Обратная длине её радиуса.
Хоть об их интригах молчал Евклид,
Правила буравчика нам не потребуется.
Ведь нулевой изгиб — у скучной прямой,
А у вогнутых фигур изгиб отрицательный,
И потому сумма квадратов всех изгибов
Равна половине квадрата суммы изгибов.

А коль вам в голову взбредёт
Со сферами связаться,
Вам это может очень трудным показаться,
Сферы гораздо хитрее устроены,
Теперь все уже не дважды-два,
Целоваться будет ещё одна, пятая сфера.
И всё же, разобравшись со знаками и нулями,
Как прежде, для каждой из целующихся
Получим, что квадрат суммы пяти изгибов
Втрое больше суммы их квадратов.

После этого теорему Декарта—Содди неоднократно переоткрывали и обобщали — сначала в 1937 году Торольд Госсет обобщил её на случай $N+2$ сфер произвольной размерности N (лежащих в $(N+1)$-мерном евклидовом пространстве) и тоже опубликовал в *Nature* в сопровождении стихов; через некоторое время теорема была обобщена на случай сфер в пространстве Лобачевского (или в сферическом пространстве) произвольной размерности. Кроме того, существуют формулы, связывающие радиусы произвольного количества касающихся определённым образом окружностей и сфер. Все эти утверждения, хотя и заслуживают самого пристального внимания и интереса, не могут быть здесь представлены — прежде всего из-за неэлементарности их доказательств (одно изложение оснований геометрии Лобачевского заняло бы не меньше всех наших лекций), поэтому мы ограничимся только доказательством самого простого случая, представленного на рис. 5. Приведённое ниже доказательство (в чуть изменённом виде) взято из книги Коксетера «Введение в геометрию» (М.: Наука, 1966).

Доказательство теоремы Декарта—Содди. Заметим для начала, что если A, B и C — центры трёх попарно касающихся окружностей радиусов r_1, r_2, r_3 и a, b, c стороны, а p — полупериметр треугольника ABC, то радиусы r_1, r_2 и r_3 равны соответственно $r_1 = p-a$, $r_2 = p-b$, $r_3 = p-c$. Эти формулы можно доказать точно так же, как находят длины отрезков касательных от вершин треугольника до вписанной в него окружности. Выразим теперь площадь треугольника ABC с помощью формулы Герона (её доказательство есть в любом учебнике геометрии, мы приведём одно из них ниже):

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}.$$

Заметим теперь, что если ρ — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, и $\angle A = \alpha$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{p-a}$ (это следует из рассмотрения прямоугольного треугольника, образованного радиусом вписанной окружности, биссектрисой и отрезком стороны треугольника), а так как $S_{ABC} = \rho p$, то $\rho = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

В итоге, учитывая известные тригонометрические формулы

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

получаем

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{r_2 r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{(r_1+r_2+r_3)r_1}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}.$$

Эти рассуждения можно применить к любому из треугольников SAB, SBC, SCA на рис. 5, что даёт нам следующие выражения для синусов половинных углов ASB, BSC, CSA:

$$\sin^2\left(\frac{\angle ASB}{2}\right) = \frac{r_1 r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)},$$

$$\sin^2\left(\frac{\angle BSC}{2}\right) = \frac{r_2 r_3}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)},$$

$$\sin^2\left(\frac{\angle CSA}{2}\right) = \frac{r_1 r_3}{(r_1+r_4)(r_3+r_4)},$$

и аналогично для косинусов. Например, нам понадобится формула

$$\cos^2\left(\frac{\angle ASB}{2}\right) = \frac{(r_1+r_2+r_4)r_4}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)}.$$

Рассмотрим теперь теорему косинусов, записанную в форме

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha = 0,$$

для треугольника с углами $\frac{\angle ASB}{2}$, $\frac{\angle BSC}{2}$, $\frac{\angle CSA}{2}$: в силу теоремы синусов мы можем заменить стороны этого треугольника синусами его углов и таким образом получить уравнение

$$\frac{r_1 r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)} - \frac{r_2 r_3}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)} - \frac{r_1 r_3}{(r_1+r_4)(r_3+r_4)} + {}$$
$$+ 2\sqrt{\frac{r_2 r_3}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)}\,\frac{r_1 r_3}{(r_1+r_4)(r_3+r_4)}\,\frac{(r_1+r_2+r_4)r_4}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)}} = 0.$$

Деля теперь на $r_1r_2r_3$ и умножая на $(r_1+r_4)(r_2+r_4)(r_3+r_4)$, получим

$$\frac{r_3+r_4}{r_3}-\frac{r_1+r_4}{r_1}-\frac{r_2+r_4}{r_2}+2\sqrt{\frac{(r_1+r_2+r_4)r_4}{r_1r_2}}=0,$$

или

$$\frac{r_4}{r_3}-\frac{r_4}{r_1}-\frac{r_4}{r_2}-1+2\sqrt{\frac{r_4}{r_1}+\frac{r_4}{r_2}+\frac{r_4^2}{r_1r_2}}=0.$$

Разделим это выражение на r_4:

$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_4}+2\sqrt{\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_1r_2}}=0.$$

Отсюда уже легко получить требуемое:

$$\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_4}\right)^2=4\left(\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_1r_2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\right)^2=4\left(\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_4}\right),$$

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2-2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right),$$

что нам и требовалось. □

Осталось доказать формулу Герона. Проще всего сделать это с помощью алгебры: найдём косинус угла треугольника из теоремы косинусов:

$$\cos\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc},$$

откуда легко найти синус того же угла:

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}{4b^2c^2}}=\sqrt{\frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}{4b^2c^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}}.$$

Наконец, по формуле $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ получаем

$$S=\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Конечно, существуют и другие способы доказывать формулу Содди, но они требуют от читателя некоторых знаний, выходящих за рамки настоящего курса, и (мы надеемся) будут изложены нами во второй части настоящих лекций.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выразите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник, через длины радиусов окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ADB и ADC (см. рис. 1), и угол θ.

2. Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и CDA, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BCD и DAB.

3. Докажите следующий аналог леммы Саваямы: если окружность ω касается луча AD, продолжения стороны BC (D — точка на BC) и описанной окружности треугольника ABC (*внешним образом*), то прямая, соединяющая точки её касания с AD и BC, проходит через центр вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей стороне BC.

4. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Тебо для окружностей, касающихся описанной окружности треугольника внешним образом, и центра его вневписанной окружности.

5. Проверьте, что рассуждения, с помощью которых мы доказали формулу Содди, работают и окружности, касающейся трех данных внутренним образом (самой большой окружности на рис. 5).

6. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Проведём высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CB_1A_1 проходят через середины отрезков, соединяющих вершины исходного треугольника с ортоцентром.

7. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность девяти точек.

8. В условиях предыдущей задачи докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

9. В условиях предыдущей задачи докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC, HBC, AHC и ABH образуют четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $HABC$.

10. Пусть P — такая точка внутри треугольника ABC, что углы APB, BPC и CPA равны $120°$ (предполагаем, что углы треугольника ABC меньше $120°$). Докажите, что прямые Эйлера треугольников APB, BPC и CPA пересекаются в одной точке.

Литература

Ниже приводится список книг, прежде всего задачников, которые послужили источниками при написании книги и/или могут быть, на взгляд автора, полезными для дальнейшего изучения предмета (как в рамках школьного курса или курса «Элементарной математики» в пединституте, так и самостоятельно). Из некоторых книжек я брал только задачи для самостоятельного решения, приводимые в конце лекций, некоторые другие послужили источниками идей и методов доказательства различных утверждений. Этот список ни в коей мере не претендует на полноту. Его задача — по возможности указать заинтересованному читателю направления для дальнейшего изучения предмета и отдать должное авторам, чьим трудом мне довелось воспользоваться. По мере сил я пытался давать ссылки на их книги в тексте, но это мне далеко не всегда удавалось. Поэтому я решил составить этот список и выразить свою благодарность авторам, «оптом», что я и делаю сейчас. Заранее приношу извинения тем, кого я забыл упомянуть. Надо, однако, помнить, что элементарная геометрия — живая наука, а потому огромное значение для человека, изучающего её, имеет непосредственное, так сказать «бесписьменное» общение. Мне очень повезло, потому что на своей работе и дома мне приходилось сталкиваться с превосходными специалистами, знатоками предмета. Пользуясь случаем, ещё раз хочу выразить всем им свою горячую признательность!

1. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия. Задачник. 9—11 классы. М.: Дрофа, 2001.
2. *Шарыгин И. Ф.*, *Гордин Р. К.* «Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М.: Астрель • АСТ, 2001.
3. *Шарыгин И. Ф.* Решение задач. Учебное пособие для 10 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1994.
4. *Шарыгин И. Ф.*, *Голубев В. И.* Решение задач. Учебное пособие для 11 класса средней школы. М.: Просвещение, 1991.
5. Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7—9 классов средней школы / Сост. И. Л. Никольская. М.: Просвещение, 1991.
6. *Прасолов В. В.* Задачи по геометрии: В 2 т. М.: МЦНМО, 2001.
7. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004.
8. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования: В 2 т. М.: ГИТТЛ, 1955–1956.

9. *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
10. *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

Приложение А

Векторы и координаты

Это приложение посвящено некоторым из разделов курса, не вошедших в основную часть книги. Надо сказать, что в МПГУ курс элементарной геометрии читался (в то время, когда там работал автор) два, а иногда три семестра — один раз на втором курсе, один раз на четвёртом курсе (осенью), а для некоторых групп был ещё предусмотрен курс стереометрии (обычно он приходился на весенний семестр 4-го курса). Основной частью всего предмета был курс, читающийся осенью на четвёртом курсе (по крайней мере, я так привык считать). Как раз эти лекции и лежат в основе книги. Как я уже упоминал в начале, главной целью для меня было продемонстрировать студентам, к четвёртому курсу уже успевшим изрядно познакомиться с теми разделами математики, которые принято называть «высшими», мощь методов, присущих школьному курсу. Этим и объясняется тот факт, что основное предпочтение я отдал этим темам, практически полностью проигнорировав при этом координатные и векторные методы (включая метод масс), а также методы, связанные с использованием геометрических преобразований: движений, гомотетии, аффинных преобразований, инверсии и прочим популярным в «олимпиадных кругах» темам.

В противовес этому, если мне приходилось (впрочем, нечасто) вести занятия на втором курсе, я пытался компенсировать этот недостаток. По моему мнению, младшие курсы — самое удобное время, чтобы усваивать новые идеи, и было бы неправильно не воспользоваться предоставляющейся возможностью. Так что бо́льшая часть из упомянутых мной выше тем (условно их можно было бы назвать «темами элементарной геометрии математического кружка») как раз и попадала в эту часть курса.

Настоящее приложение как раз состоит из части лекций, прочитанных мной для студентов второго курса, дополненных материалами, излагавшимися в СУНЦ МГУ (в курсе геометрии и на кружке). Возможно, со временем это приложение разовьётся до полноценной второй части книги, но пока я ограничился только самыми простыми и/или важными, на мой взгляд, темами из упомянутых (исключая стереометрию, которая, как раз из-за своей важности, заслуживает отдельной книги).

§ 1. Аффинные координаты

Определение вектора знакомо большинству читателей из школьного курса.

Определение 1. *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется отрезок AB, на котором указано направление (например, от A к B). Таким образом, с каждым отрезком связано два вектора — $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. При этом два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, не лежащие на одной прямой, называются *равными*, если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (обратите внимание на порядок вершин). Если же они лежат на одной прямой, достаточно равенства длин и сонаправленности.

Едва ли не самой важной частью этого определения является понятие равенства векторов: по существу, оно означает, что любые два параллельных, равных по длине и сонаправленных вектора — это на самом деле два проявления одного и того же вектора. Такие векторы называются *свободными*.

На самом деле это не единственное возможное определение равенства векторов. Например, в физике часто говорят о равенстве *скользящих* векторов — такие векторы равны если и только если они лежат на одной прямой, равны по длине и сонаправлены. Смысл такого определения в том, что в некоторых задачах механики важно знать не только величину и направление силы, но и точку приложения этой силы. Такие векторы тоже можно складывать, и они могут оказаться полезными для решения задач, но наше внимание будет обращено прежде всего на свободные векторы.

Итак, напомним, что важной особенностью векторов, в отличие от отрезков, является возможность их складывать и умножать на вещественные числа. По определению произведение произвольного вектора $\vec{v}$ на число λ — это вектор $\lambda\vec{v}$, длина которого равна длине исходного вектора, умноженной на $|\lambda|$, а направление совпадает с исходным, если $\lambda > 0$, и противоположно исходному, если $\lambda < 0$ (если $\lambda = 0$, то направление результата — вектора нулевой длины — не играет никакого значения, ведь говорить о направлении точки не очень осмысленно).

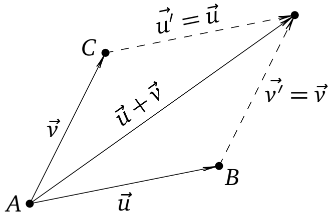

Рис. 1

Что же касается сложения векторов, то оно задаётся знаменитым *правилом параллелограмма* (или, что эквивалентно, — правилом треугольника), см. рис. 1.

Несложно доказать, что эти операции удовлетворяют обычным алгебраическим свойствам: ассоциативности, распределительному закону, коммутативности. Имеется и нулевой элемент — элемент, сумма с которым совпадает с исходным вектором. Это вектор нулевой длины (мы будем обозначать его $\vec{0}$ или просто 0). Таким образом, векторы дают нам мощный способ переводить геометрические задачи на язык алгебры. Правда, чтобы в полной мере им воспользоваться, надо знать ещё одно важное свойство: *если векторы $\vec{v}$ и $\vec{w}$ не параллельны, или, как ещё говорят, неколлинеарны, то любой вектор $\vec{a}$ может* ***единственным образом*** *быть представлен в виде суммы*

$$\vec{a} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w},$$

коэффициенты λ и μ в которой называются ***координатами вектора $\vec{a}$ в базисе*** $(\vec{v}, \vec{w})$. Доказательство этого факта хорошо известно, так что мы не будем на нём останавливаться здесь.

Вместо этого приведём пару примеров.

Задача 1. Докажите, что для любого треугольника ABC справедлива формула

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

где M — точка пересечения медиан треугольника, а O — произвольная точка плоскости.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, тогда

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\big) = \overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

Но из правила параллелограмма и из свойства точки пересечения медиан треугольника делить каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины, получаем равенство

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Отсюда получаем требуемую формулу, так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$. □

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC отложены отрезки $AK = LC$. Докажите, что точка E пересечения прямых AL и CK лежит на биссектрисе угла ADC параллелограмма.

Решение. Рассмотрим два единичных вектора (т. е. вектора единичной длины) $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, параллельные сторонам DA и DC данного параллелограмма (см. рис. 2). Они, очевидно, неколлинеарны, а значит, любой вектор на плоскости имеет единственные координаты относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Найдём такие координаты для искомого вектора $\overrightarrow{DE}$ вектор). Если длины сторон параллелограмма $AB = a$, $BC = b$, а длина отрезков AK и CL равна x, то

$$\overrightarrow{DC} = a\vec{e}_1, \qquad \overrightarrow{DA} = a\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{AK} = x\vec{e}_1, \qquad \overrightarrow{CL} = x\vec{e}_2,$$

откуда получаем

$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AK} = (a - x)\vec{e}_1 - b\vec{e}_2,$$
$$\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CL} = -a\vec{e}_1 + (b - x)\vec{e}_2.$$

Если выбрать параметры λ и μ так, что $\overrightarrow{KE} = \lambda\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{LE} = \mu\overrightarrow{LA}$, то вектор $\overrightarrow{DE}$ может быть выражен двумя разными способами:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KE} = (\lambda a + (1-\lambda)x)\vec{e}_1 + (1-\lambda)b\vec{e}_2$$

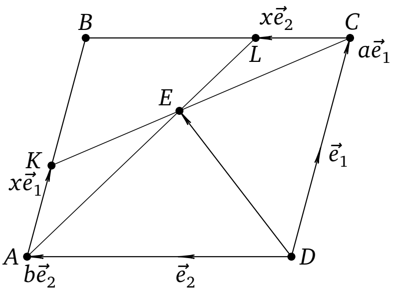

Рис. 2

или

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LE} = (1-\mu)a\vec{e}_1 + (\mu b + (1-\mu)x)\vec{e}_2.$$

Так как, с другой стороны, такое разложение единственно, мы получаем равенства

$$\lambda a + (1-\lambda)x = (1-\mu)a, \quad (1-\lambda)b = \mu b + (1-\mu)x,$$

откуда находим

$$\lambda = \frac{b-x}{a+b-x}, \quad \mu = \frac{a-x}{a+b-x}.$$

Подставляя эти выражения в найденные выше формулы для $\overrightarrow{DE}$, получим

$$\overrightarrow{DE} = \frac{ab}{a+b-x}\vec{e}_1 + \frac{ab}{a+b-x}\vec{e}_2 = \frac{ab}{a+b-x}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Но так как векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ единичны, их сумма будет направлена вдоль биссектрисы угла, на сторонах которого эти векторы лежат (примените правило параллелограмма к равным векторам). □

Эти простые идеи полезно развить до понятия *аффинной системы координат*: если O — произвольная точка на плоскости, а $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ — некоторый базис (пара неколлинеарных векторов), то любой точке A можно сопоставить пару чисел (x, y) — координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно выбранного базиса. Важным частным случаем аффинной системы является *декартова система координат* — её мы получим, если возьмём векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярными и единичной длины.

Очевидно, что таким образом мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками и парами чисел. Отметим, что теперь и с каждым вектором можно взаимно однозначным образом связать пару чисел — его координаты относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, при этом, как и в «школьной» геометрии; координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ могут быть вычислены по стандартной формуле:

$$x = x_B - x_A, \quad y = y_B - y_A,$$

где (x_A, y_A) и (x_B, y_B) — соответственно координаты точек A и B. Из этого, в частности, следует, что координаты суммы векторов равны почленной сумме координат слагаемых, а произведение вектора на число a с точки зрения координат равно поэлементному произведению координат исходного вектора на a.

Важным утверждением, касающимся таких координат, является то, какой вид принимает уравнение прямой в такой системе.

Утверждение 1. *Уравнение любой прямой в аффинной системе координат имеет вид*

$$ax + by + c = 0,$$

где коэффициенты a, b и c определены однозначно с точностью до умножения на один и тот же ненулевой множитель.

Доказательство. Пусть точка A с координатами (x_0, y_0) лежит на прямой l, и пусть ненулевой вектор $\vec{v}$ с координатами (p, q) параллелен этой прямой (достаточно найти ещё одну точку B на этой прямой, тогда нужный вектор — это $\overrightarrow{AB}$). Можно без ограничения общности считать, что $p \neq 0$. Произвольная точка M с координатами (x, y) лежит на прямой l если и только если векторы $\vec{v}$ и $\overrightarrow{AM}$ пропорциональны, т. е. $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{v}$ для некоторого числа $\lambda \neq 0$. Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda p, \\ y - y_0 = \lambda q; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_0}{p}, \\ y - y_0 = \dfrac{q(x - x_0)}{p}; \end{cases} \quad qx - py + (py_0 - qx_0) = 0.$$

Таким образом, мы получим нужное уравнение, положив $a = q$, $b = -p$. Утверждение о единственности коэффициентов уравнения следует из этого же рассмотрения: обращая выкладки, получаем, что вектор с координатами, пропорциональными $(-b; a)$, параллелен прямой $ax + by + c = 0$, а с другой стороны, все такие векторы пропорциональны. □

Один из возможных способов применения таких координат при решении элементарных задач состоит в том, что, введя ту или иную аффинную систему, мы получаем возможность находить координаты точек пересечения прямых чисто алгебраически. При этом у нас больше свободы в выборе системы координат, чем когда мы пользуемся обычными, декартовыми координатами, а следовательно, мы можем получить более простые уравнения. С другой стороны, так же как и ранее, чтобы отыскать коэффициенты a, b и c, достаточно подставить координаты двух точек, лежащих на прямой в общее уравнение.

§ 2. Скалярное произведение

Ещё одна важная концепция, связанная с векторами, — это не только возможность производить с векторами вышеперичисленные алгебраические операции, но и наличие дополнительной операции — скалярного произведения векторов. Проще всего определить скалярное произведение двух векторов при помощи формулы

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}), \tag{1}$$

где $|\vec{v}|$ — длина вектора $\vec{v}$, а $\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}$ — *направленный* угол между векторами, т. е. угол, на который надо повернуть вектор $\vec{v}$, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\vec{w}$.

Это произведение обладает многими важными свойствами, которые, как легко показать, однозначно его определяют. Вот эти свойства:

1) $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$;
2) $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, если и только если $\vec{v}\perp\vec{w}$ (для ненулевых векторов);
3) $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$;
4) $(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})$;
5) $(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\cdot\vec{w}=\vec{v}_1\cdot\vec{w}+\vec{v}_2\cdot\vec{w}$.

Почти все эти свойства вполне очевидны (например, свойство 3 следует из чётности косинуса), кроме последнего. Чтобы его доказать, заметим, что формулу (1) можно интерпретировать так: рассмотрим ось, сонаправленную с вектором $\vec{w}$. Тогда $|\vec{w}|$ — координата вектора $\vec{w}$ относительно этой оси, а $|\vec{v}|\cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$ — координата ортогональной проекции вектора $\vec{v}$ на эту ось (см. рис. 3, на кото-

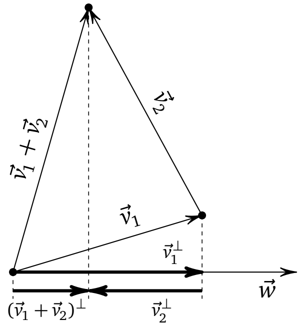

Рис. 3

ром проекции векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ обозначаются соответственно $\vec{v}_1^{\perp}$, $\vec{v}_2^{\perp}$). Но, как известно, проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов (см. рис. 3), а следовательно, выполняется требуемое равенство.

Полезно знать, как выражается скалярное произведение через координаты векторов в том или ином базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Для того чтобы это узнать, запишем векторы $\vec{v}$, $\vec{w}$ через их координаты:

$$\vec{v} = x_v\vec{e}_1 + y_v\vec{e}_2, \quad \vec{w} = x_w\vec{e}_1 + y_w\vec{e}_2,$$

откуда получим

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= (x_v\vec{e}_1+y_v\vec{e}_2)\cdot(x_w\vec{e}_1+y_w\vec{e}_2) = \\ &= x_vx_w(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)+x_vy_w(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+y_vx_w(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)+y_vy_w(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) = \\ &= x_vx_wx_vx_w|\vec{e}_1|^2+(x_vy_w+x_wy_v)(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+y_vy_w|\vec{e}_2|^2.\end{aligned}$$

Коэффициенты $A=|\vec{e}_1|^2$, $B=(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)$, $C=|\vec{e}_2|^2$ этой формулы называются коэффициентами *матрицы Грама* базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, и всю формулу можно переписать в терминах матричного умножения в виде

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (x_v, y_v)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}.$$

В частности, если базис, который мы используем, *ортнормирован* (т. е. векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют единичную длину и перпендикулярны друг другу), получаем известную из школьных учебников формулу:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = x_vx_w + y_vy_w.$$

Приведём несколько примеров использования этого понятия при решении задач.

Задача 3. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполнено равенство

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

где O — центр описанной окружности данного треугольника, а H — его точка пересечения высот.

Решение. Пусть вектор в правой части равенства равен $\overrightarrow{OX}$, где X — некоторая точка плоскости. Мы докажем, что векторы $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{XB}$ и $\overrightarrow{CX}$ перпендикулярны прямым BC, CA и AB соответственно. Для этого достаточно показать, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{BC}$ равно нулю. Но

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB},$$

поэтому

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2 = 0,$$

так как точка O — центр описанной окружности, а значит, она равноудалена от вершин треугольника. □

Отметим, что из полученного результата и из задачи 1 сразу следует утверждение известной теоремы Эйлера.

Теорема 1. *В любом треугольнике точка пересечения медиан лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр и центр описанной окружности этого треугольника, причём делит его в отношении* $1:2$, *считая от центра описанной окружности.* (*Прямая, на которой лежат эти точки, называется* ***прямой Эйлера****.*)

Доказательство. В самом деле, взяв в качестве точки O в задаче 1 центр описанной окружности, мы получим

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH},$$

что и даёт утверждение теоремы.

Задача 4. Найдите точку X в плоскости треугольника ABC, для которой выражение $XA^2+XB^2+XC^2$ принимает наименьшее значение.

Решение. Отметим, прежде всего, что выражение, которое нам надо минимизировать, можно переписать в виде

$$f(X) = |\overrightarrow{AX}|^2+|\overrightarrow{BX}|^2+|\overrightarrow{CX}|^2.$$

То, что точка, минимизирующая данное выражение, существует, следует из теоремы Вейерштрасса (так как понятно, что функция, минимум которой мы ищем, монотонно возрастает вне компактного множества, содержащего данный треугольник). Пусть X_0 — такая точка. Тогда для любой другой точки X имеем

$$\begin{aligned}
0 \leqslant f(X)-f(X_0) &= |\overrightarrow{AX}|^2+|\overrightarrow{BX}|^2+|\overrightarrow{CX}|^2-(|\overrightarrow{AX_0}|^2+|\overrightarrow{BX_0}|^2+|\overrightarrow{CX_0}|^2) = \\
&= (\overrightarrow{AX_0}+\overrightarrow{XX_0})\cdot(\overrightarrow{AX_0}+\overrightarrow{XX_0})+(\overrightarrow{BX_0}+\overrightarrow{XX_0})\cdot(\overrightarrow{BX_0}+\overrightarrow{XX_0})+ \\
&\quad +(\overrightarrow{CX_0}+\overrightarrow{XX_0})\cdot(\overrightarrow{CX_0}+\overrightarrow{XX_0})-\overrightarrow{AX_0}\cdot\overrightarrow{AX_0}-\overrightarrow{BX_0}\cdot\overrightarrow{BX_0}-\overrightarrow{CX_0}\cdot\overrightarrow{CX_0} = \\
&= 3|\overrightarrow{XX_0}|^2-2\overrightarrow{XX_0}\cdot(\overrightarrow{AX_0}+\overrightarrow{BX_0}+\overrightarrow{CX_0}).
\end{aligned}$$

Это неравенство должно выполняться при любом выборе точки X. Но если вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AX_0}+\overrightarrow{BX_0}+\overrightarrow{CX_0}$ не равен нулю, то, выбирая точку X таким образом, чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{XX}_0 = t\vec{v}$, мы получаем, что неравенство

$$|\vec{v}|^2(3t^2 - 2t) \geqslant 0$$

выполняется при любом $t \in \mathbb{R}$, что, очевидно, невозможно. Поэтому $\overrightarrow{AX}_0 + \overrightarrow{BX}_0 + \overrightarrow{CX}_0 = 0$ (мы обозначаем нулевой вектор просто нулём). Так как из задачи 1 мы знаем, что такая сумма всегда равна вектору $3\overrightarrow{MX}_0$ (M — точка пересечения медиан треугольника), мы получаем, что $X_0 = M$. □

Задача 5. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n}$ и $B_1B_2\ldots B_{2n}$ — два правильных $2n$-угольника на плоскости (нумерация вершин в обоих случаях ведётся против часовой стрелки). Докажите, что выполняется равенство

$$A_1B_1^2 + A_3B_3^2 + \ldots + A_{2n-1}B_{2n-1}^2 = A_2B_2^2 + A_4B_4^2 + \ldots + A_{2n}B_{2n}^2.$$

Решение. Нам потребуется вспомогательное наблюдение: *для любого правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ с центром O справедливо равенство*

$$\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_n = \vec{0}.$$

Для доказательства обратимся к рис. 4: каждый каждый вектор $\overrightarrow{OA_i}$ получается из вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ при помощи поворота на угол между стороной правильного многоугольника и радиусом описанной окружности этого многоугольника, проведённым в один из концов этой стороны (этот угол один и тот же для всех пар векторов), и умножением на коэффициент $\frac{R}{a}$, где R — длина радиуса, а a — длина стороны многоугольника.

Следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{OA_i}$ получается тем же преобразованием (поворот и растяжение) из суммы векторов, направленных вдоль сторон многоугольника, которая, очевидно, равна нулю.

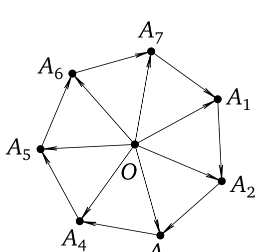

Рис. 4

Теперь обратимся к исходной задаче. Заменим, как и раньше, квадрат длины каждого отрезка A_iB_i на скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{A_iB_i}$. Пусть P — центр первого многоугольника, а Q — центр второго. Тогда выполняется равенство

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB_i}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{A_iB_i}|^2 &= |\overrightarrow{A_iP}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{QB_i}|^2 + 2\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{QB_i}) + 2\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{QB_i} =\\ &= R^2 + r^2 + l^2 + 2\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{A_iP} + \overrightarrow{QB_i}) + 2\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{QB_i}.\end{aligned}$$

Здесь R — радиус описанной окружности первого многоугольника, r — радиус описанной окружности второго многоугольника, а $l = PQ$. Так как эти три слагаемых одни и те же для всех i, равенство, которое нам надо доказать, сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{A_{2i-1}P} + \overrightarrow{QB_{2i-1}}) + 2\overrightarrow{A_{2i-1}P}\cdot\overrightarrow{QB_{2i-1}}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left(2\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{A_{2i}P} + \overrightarrow{QB_{2i}}) + 2\overrightarrow{A_{2i}P}\cdot\overrightarrow{QB_{2i}}\right)$$

Но, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{A_{2i-1}P} = \overrightarrow{PQ}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{2i-1}P}\right) = 0,$$

так как нечётные вершины любого правильного $2n$-угольника образуют правильный n-угольник с тем же центром и, следовательно, к ним применимо сделанное ранее наблюдение. То же самое верно для чётных вершин правильного $2n$-угольника, поэтому нам осталось доказать равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{2i-1}P}\cdot\overrightarrow{QB_{2i-1}} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{2i}P}\cdot\overrightarrow{QB_{2i}}.$$

Но каждое слагаемое в обоих частях этого равенства может быть записано в виде $rR\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\overrightarrow{A_1P}, \overrightarrow{QB_1})$: векторы $\overrightarrow{A_iP}$ и $\overrightarrow{QB_i}$ получаются из векторов $\overrightarrow{A_1P}$ и $\overrightarrow{QB_1}$ соответственно при помощи поворота на один и тот же угол, поэтому $\angle(\overrightarrow{A_iP}, \overrightarrow{QB_i}) = \angle(\overrightarrow{A_1P}, \overrightarrow{QB_1})$ для любого i. □

Закончим параграф следующим замечанием: вместо того, чтобы рассматривать скалярное произведение векторов на плоскости, можно было бы рассмотреть *смешанное произведение*:

$$[\vec{v}, \vec{w}] = |\vec{v}||\vec{w}| \sin(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}).$$

Как несложно проверить, это умножение обладает почти теми же свойствами, что и скалярное, за исключением того, что оно антисимметрично ($[\vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}]$, в силу нечётности синуса) и равно нулю в случае коллинеарных векторов (чтобы проверить линейность этого умножения по одному из аргументов, надо рассмотреть проекцию на ось, получающуюся поворотом второго вектора на угол 90° против часовой стрелки). Так же как и ранее, можно вывести формулу, выражающую $[\vec{v}, \vec{w}]$ в терминах координат этих векторов в том или ином базисе. В частности, если базис ортонормирован, то

$$[\vec{v}, \vec{w}] = x_v y_w - y_v x_w.$$

Отметим, что, в отличие от скалярного произведения, смешанному произведению векторов можно придать весьма чёткий геометрический смысл: модуль $[\vec{v}, \vec{w}]$ всегда равен площади параллелограмма, «натянутого» на эти векторы, причём знак этого числа — «плюс», если вектор $\vec{w}$ получается из $\vec{v}$ поворотом против часовой стрелки (без учёта разницы в длинах), и «минус» в противном случае. Таким образом, получившееся выражение в точности равно *направленной площади* параллелограмма.

Так же как и скалярное произведение, смешанное произведение можно использовать для решения различных задач. Мы ограничимся лишь одним примером: допустим, на плоскости нарисован многоугольник, вершины которого в декартовой системе координат, (т. е. в аффинной системе с ортонормированным базисом) имеют координаты $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$. Тогда подсчитать его площадь легче всего по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}}]\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})\right|,$$

где $O(0;0)$ — начало координат и $A_{n+1} = A_1$. В самом деле, как несложно проверить, обе части этой формулы — аддитивные функции от многоугольника (т. е. в обоих случаях значение функции от целого многоугольника равно сумме её значений на частях, на которые многоугольник разбит), а значит, достаточно доказать её для треугольника. Кроме того, как несложно проверить прямым вычислением, значение правой части не зависит от выбора начала координат. Следовательно, можно считать, что начало координат совпадает с одной из вершин треугольника. В этом случае равенство делается очевидным.

§ 3. Массы и барицентры

Ещё одно важное понятие, связанное с векторами и координатами, — это понятие центра тяжести. Напомним его.

Определение 2 (определение-теорема)**.** Пусть дана система точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, каждой из которых приписано вещественное число $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (может быть, отрицательное), причём $\sum\limits_i m_i \neq 0$. Тогда существует единственная такая точка Z, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{ZA_i} = 0. \tag{2}$$

Эта точка называется *центром масс* (или *барицентром*) *системы материальных точек* $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ (отметим, что положение центра масс на зависит от порядка точек и, кроме того, точки A_i и A_j могут совпадать при разных i и j).

Доказательство. Сначала докажем единственность: пусть O — некоторая начальная точка. Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{ZA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OZ}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OZ},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \tag{3}$$

Если же P — другая начальная точка Z' — точка, которую можно получить из P по формуле (3), то

$$\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{PZ'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{PA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OA_i} - PA_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \overrightarrow{OP}$$

и, следовательно,

$$\overrightarrow{Z'Z} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PZ'} = 0.$$

Таким образом, если точка Z существует, то она единственная. Теперь существование точки Z следует из формулы (3): если определить Z как точку, задаваемую этой формулой, то, разворачивая выкладки в обратную сторону, получим, что Z удовлетворяет условию данного определения. □

Отметим, что если сумма чисел m_i равна нулю, то сумма векторов $\sum\limits_i m_i\overrightarrow{OA_i}$ не зависит от выбора точки O, и, следовательно, центр масс такой системы или вовсе не существует, или же в качестве него можно выбрать любую точку на плоскости (это так, если и только если $m_i = 0$ для всех i). Поэтому если при рассуждении нам удастся найти точку, удовлетворяющую уравнению центра масс, то проверять, что сумма «весов» ненулевая, не нужно, и ниже мы не будем этого делать.

Главным достоинством введённого понятия являются в очередной раз многочисленные дополнительные свойства, позволяющие доказывать утверждения, касающиеся взаимного расположения центров масс различных систем. Перечислим самые важные из них.

1. Центр масс системы из нескольких совпадающих точек совпадает с любой из этих точек.

2. *Правило рычага.* Центр масс Z системы, состоящей из двух точек A и B с «массами» x и y соответственно, лежит на прямой AB, причём выполняется равенство

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{y}{x},$$

где отношение коллинеарных векторов, стоящее в левой части, определено при помощи равенства

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \lambda, \quad \text{если и только если } \overrightarrow{AZ} = \lambda\overrightarrow{ZB}.$$

3. *Правило группировки.* Если данная система точек может быть представлена в виде объединения двух таких подсистем $(A_1, x_1), \ldots$ $\ldots, (A_m, x_m)$ и $(B_1, y_1), \ldots, (B_n, y_n)$, что

$$\sum_i x_i = X \neq 0, \quad \sum_j y_j = Y \neq 0,$$

то центр масс всей системы совпадает с центром масс системы, состоящей из двух материальных точек (S, X), (T, Y), где S и T — центры масс первой и второй подсистем соответственно.

Доказательство этих утверждений совсем не сложно: правило рычага является, по существу, переписыванием определения центра тяжести в случае системы из двух точек, а правило группировки получается непосредственно из формулы (3). Заметим, что, итерируя правило группировки, мы можем разбивать данную систему на любое конечное число подсистем. Кроме того, комбинируя правило группировки с самым первым свойством центра масс, мы получаем возможность «делить» точки, входящие в систему: согласно (итерированному) правилу группировки центры масс систем $(A_1, m_1), \ldots, (A_i, m_i), \ldots, (A_n, m_n)$ и $(A_1, m_1), \ldots, (A_i', m_i')$, $(A_i'', m_i''), \ldots, (A_n, m_n)$ совпадают, если $m_i = m_i' + m_i''$ и A_i — центр масс пары точек (A_i', m_i'), (A_i'', m_i''); но, согласно первому сделанному замечанию мы всегда можем взять точки $A_i' = A_i'' = A_i$, разбив массу, приписываемую A_i, на две ненулевые части.

Применение центра масс может оказаться весьма продуктивным, когда речь идёт о доказательстве конкуррентности прямых или о нахождении отношения, в котором та или иная точка делит отрезок. Вот несколько примеров.

Теорема 2 (теорема Чевы)**.** *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Тогда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, если и только если выполняется соотношение*

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1. \tag{4}$$

Отметим, что обычно в школах изучают упрощённый вариант этого утверждения, предполагающий, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC, при этом отношение коллинеарных векторов $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$ и т. д. заменяют на обыкновенное отношение отрезков (которое при сделанных предположениях, очевидно, ничем не отличается от отношения векторов). Если бы мы захотели поступить так же в более общей ситуации, например в той, что изображена на рис. 5, нам надо было бы аккуратно указать, где именно могут лежать точки, иначе можно прийти к противоречию: дело в том, что таким же образом можно записать критерий коллинеарности трёх точек A_1, B_1, C_1, лежащих на таких же прямых, знаменитую *теорему Менелая* (мы поговорим о ней позже) — разница будет только в том, что для таких точек произведение направленных отношений будет равно -1, а не $+1$, как в теореме Чевы.

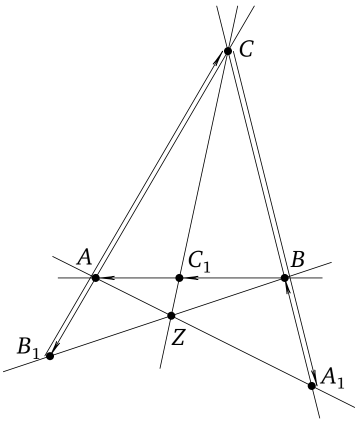

Рис. 5

Доказательство. Предположим, что равенство (4) выполнено. Рассмотрим тогда числа

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}, \quad m_3 = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}.$$

Если поместить «массы» m_1, m_2, m_3 в точках A, B и C соответственно, то центр масс полученной системы можно будет найти согласно правилу группировки, как центр масс системы из двух точек: центра масс X точек (A, m_1), (B, m_2) и точки (C, m_3). Но центр масс первых двух точек лежит на прямой AB, причём выполнено равенство

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} : 1 = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}},$$

откуда следует, что $X = C_1$. Таким образом, центр масс всей системы лежит на прямой CC_1. Точно так же мы докажем, что центр масс всей системы лежит на прямых BB_1 и AA_1 (в последнем равенстве нам надо будет использовать условие теоремы), следовательно, все эти три прямые пересекаются в одной точке.

Обратно, если данные прямые пересекаются в одной точке, то, нагрузив точки A, B и C «массами» $m_1 = 1$, $m_2 = \dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$ и $m_3 = \dfrac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}$

соответственно, получим, что центр масс полученной системы лежит на прямых CC_1 и BB_1, следовательно, он совпадает с их точкой пересечения Z. Но, с другой стороны, если мы разобьём систему на подсистемы $(A, 1)$ и (B, m_2), (C, m_3), то мы получим, что этот центр масс лежит на прямой, соединяющей точку A с такой точкой Y на прямой BC, что

$$\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}} = m_3 : m_2 = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} : \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}.$$

Но мы знаем, что прямая AZ пересекает BC в точке A_1, следовательно, $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}$, что эквивалентно равенству (4). □

Докажем ещё одну полезную теорему.

Теорема 3 (теорема Ван Обеля). *Предположим, что точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 расположены так же, как в условии теоремы Чевы, причём прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке Z. Тогда выполняется равенство*:

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZA_1}} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} + \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}.$$

Доказательство. Выберем, как и при доказательстве теоремы Чевы, в точках A, B и C «массы» $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$ и $m_3 = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}$ соответственно. Тогда, как мы уже знаем, центр масс всей системы попадёт в точку Z. С другой стороны, мы можем найти его, рассмотрев систему из точек (A, m_1) и $(A_1, m_2 + m_3)$ (ведь A_1 — центр масс подсистемы, состоящей из B и C). Тогда по правилу рычага

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZA_1}} = \frac{m_2 + m_3}{m_1} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} + \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}. \qquad \square$$

Как несложно заметить, важным этапом любого доказательства при помощи центра масс является выбор «масс» таким образом, чтобы центр тяжести попадал в искомую точку. В приведённом примере нам удалось подобрать такие массы, что называется «вручную». На самом деле справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Тогда для любой точки X на плоскости существует такая тройка чисел m_1, m_2, m_3 (с ненулевой суммой), что X является центром тяжести системы (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3). При этом* *числа m_1, m_2, m_3 определены единственным образом с точностью до умножения на один и тот же ненулевой общий множитель.*

Доказательство. Введём аффинную систему координат с началом в точке $O = A$ и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Пусть (x, y) — координаты точки Z во введённой системе. Тогда

$$\overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

(ради удобства мы представили векторы в виде столбцов). Запишем теперь уравнение (3) во введённых координатах:

$$\begin{cases} 0 = m_1x + m_2(x-1) + m_3x, \\ 0 = m_1y + m_2y + m_3(y-1). \end{cases}$$

Эта система может быть решена относительно m_1, m_2, m_3 (например, если $y \neq 0$, можно взять $m_1 = \frac{1-x-y}{y}m_3$, $m_2 = \frac{x}{y}m_3$, а m_3 выбрать произвольно). Таким образом, мы доказали существование m_1, m_2 и m_3. Единственность с точностью до пропорциональности можно доказать, например, добавив условие $\sum\limits_i m_i = 1$; как несложно показать, получающаяся система будет иметь единственное решение. □

Числа m_1, m_2, m_3 называются *барицентрическими координатами точки Z относительно точек A, B, C*. Их часто записывают в виде $(m_1 : m_2 : m_3)$.

Многие классические теоремы элементарной геометрии удобно доказывать при помощи именно барицентрических, а не декартовых координат. Особенно полезными они становятся, если рассматривается вопрос о коллинеарности трёх или более точек (т. е. о попадании точек на одну прямую). А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3 (критерий коллинеарности). *Предположим, что барицентрические координаты $(p_x : q_x : r_x)$, $(p_y : q_y : r_y)$ и $(p_z : q_z : r_z)$ точек X, Y, Z относительно вершин треугольника ABC могут быть выбраны так, что $p_x + p_y = p_z$, $q_x + q_y = q_z$, $r_x + r_y = r_z$. Тогда точка Z лежит на прямой XY, причём $\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZY}} = \frac{p_y + q_y + r_y}{p_x + q_x + r_x}$. Обратное утверждение тоже верно.*

Доказательство. Как ни странно, доказательство этого факта совсем просто: рассмотрим систему (A, p_z), (B, q_z), (C, r_z). Согласно условию мы можем разбить её на две подсистемы: (A, p_x), (B, q_x), (C, r_x) и (A, p_y), (B, q_y), (C, r_y) (здесь мы «раздваиваем» точки так, как это было объяснено ранее). Теперь согласно правилу группировки центр тяжести всей системы (точка Z) может быть найден как центр тяжести системы из двух точек — точки X (центр тяжести первой подсистемы) с массой $p_x + q_x + r_x$ и точки Y (центр тяжести второй подсистемы) с массой $p_y + q_y + r_y$. Теперь утверждение следует из правила рычага. Обратное утверждение теперь тоже очевидно. □

Приведём примеры использования только что доказанного критерия. Например, докажем теорему Менелая.

Теорема 4 (теорема Менелая)**.** *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Тогда A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если выполняется соотношение*

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1. \tag{5}$$

Как и в случае теоремы Чевы, школьная версия этой теоремы рассматривает ненаправленные отношения, из-за чего приходится или ограничивать возможности для расположения точек (например, указывая, что две лежат на сторонах треугольника, а третья — на продолжении, что не выполняется, например, на рис. 6), или же перечислять «вручную» всё возможные случаи.

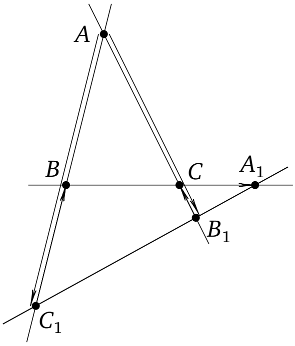

Рис. 6

Доказательство. Рассмотрим точки A_1 и B_1. Как несложно понять (используя правило рычага), в качестве их барицентрических координат можно взять тройки чисел $\left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}:0:1\right)$ и $\left(0:-\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}:-1\right)$. Рассмотрим точку с координатами, равными поэлементной сумме координат этих точек, $(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}:-\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}:0)$. Согласно критерию эта точка лежит на прямой A_1B_1. Кроме того, так как третья координата равна нулю, эта точка лежит на прямой AB. Следовательно, эта точка — точка пересечения этих прямых. Таким образом, если обозначить эту точку C_1, то по правилу рычага C_1 лежит на прямой A_1B_1, если и только если выполняется равенство

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}:\left(-\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\right)=-\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}},$$

эквивалентное равенству (5). □

Кроме приведённого примера, критерий коллинеарности точек удобно использовать, выразив барицентрические координаты той или иной точки через длины сторон треугольника ABC: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Например, как несложно показать, барицентрическими координатами точки M пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 будет тройка равных чисел, например $(1:1:1)$, а координатами центра I вписанной окружности — тройка $(a:b:c)$ (это следует из свойства биссектрис делить противоположную сторону в отношении, равном отношению сторон, между которыми они проходят). Если положить $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, то мы можем рассмотреть ещё точку N с координатами $(p-a:p-b:p-c)$.

Геометрически эту точку можно описать как точку, лежащую на всех трёх отрезках, соединяющих вершины треугольника ABC с такими точками A_2, B_2, C_2 на противоположных сторонах, что периметры получающихся треугольников (например, AA_2B и AA_2C и т. д.) будут равными. Существование такой точки несложно доказать, воспользовавшись теоремой Чевы. Эта точка называется *точкой Нагеля* (см. рис. 7). Заметим, что

$$(p-a)+a=(p-b)+b=(p-c)+c=p,$$

т. е. поэлементная сумма барицентрических координат точек I и N даёт барицентрические координаты точки M (ведь эти координаты можно одновременно умножить на число p). При этом отношение $\frac{\overrightarrow{IM}}{\overrightarrow{MN}}$ можно найти, воспользовавшись критерием коллинеарности:

$$\frac{\overrightarrow{IM}}{\overrightarrow{MN}}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{a+b+c}=\frac{3p-2p}{2p}=\frac{1}{2}.$$

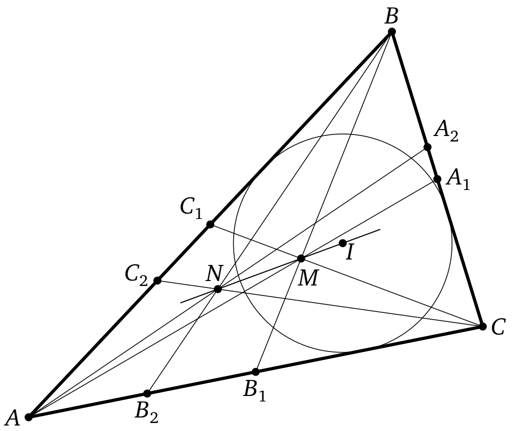

Рис. 7

Таким образом, мы получили *теорему о* ***прямой Нагеля***: *точка пересечения медиан лежит на прямой, соединяющей точку Нагеля с центром вписанной окружности, при этом выполняется соотношение*

$$\frac{\overrightarrow{IM}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{1}{2}.$$

§ 4. Момент инерции

Так же как и обычные (аффинные или декартовы) координаты, барицентрические координаты могут быть использованы для нахождения длины отрезков, написания уравнений прямых, окружностей и т. п. Для этого нам надо переписать определения всех этих объектов, используя барицентрические координаты вместо обычных. Мы не будем подробно разбирать здесь всю эту теорию. Ограничимся лишь наиболее важными примерами. Начнём с уравнения прямой.

Для этого заметим, что критерий коллинеарности точек из предыдущего параграфа может быть истолкован следующим образом: пусть $(p_x : q_x : r_x)$ и $(p_y : q_y : r_y)$ — барицентрические координаты (относительно некоторых точек A, B, C) точек X и Y соответственно. Тогда множество точек с барицентрическими координатами $(\lambda p_x + \mu p_y : \lambda q_x + \mu q_y : \lambda r_x + \mu r_y)$, λ, $\mu \neq 0$, представляет собой в точности прямую XY. В самом деле, все такие точки с одной стороны согласно критерию, лежат на XY (ведь $(\lambda p_x : \lambda q_x : \lambda r_x)$ тоже координаты точки X). С другой стороны, для любой точки Z на прямой несложно подобрать такие числа λ, μ, что

$$\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZY}} = \frac{\mu(p_y + q_y + r_y)}{\lambda(p_x + q_x + r_x)}.$$

Таким образом, точка Z с барицентрическими координатами $(p_z : q_z : r_z)$ лежит на прямой XY, если и только если существует решение (λ, μ) следующей системы:

$$\begin{cases} p_z = \lambda p_x + \mu p_y, \\ q_z = \lambda q_x + \mu q_y, \\ r_z = \lambda r_x + \mu r_y. \end{cases}$$

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем предположить, что (λ, μ) можно отыскать из первых двух уравнений:

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{p_y q_z - q_y p_z}{p_x q_y - q_x p_y}, \\ \mu = \dfrac{p_x q_z - q_x p_z}{p_x q_y - q_x p_y}. \end{cases}$$

Тогда условие совместности системы можно записать в виде

$$r_z = -\frac{p_y q_z - q_y p_z}{p_x q_y - q_x p_y} r_x + \frac{p_x q_z - q_x p_z}{p_x q_y - q_x p_y} r_y.$$

Это и есть уравнение прямой XY в барицентрических координатах. Если заменить переменные $(p_z : q_z : r_z)$ на более привычные $(x : y : z)$ и слегка преобразовать полученное равенство, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} q_x & r_x \\ q_y & r_y \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} r_x & p_x \\ r_y & p_y \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{vmatrix} z = 0,$$

где, как обычно в линейной алгебре, мы используем обозначение $\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = kn - lm$ (эта величина называется *определителем матрицы* $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$). Заменяя эти коэффициенты абстрактными числами a, b, c, получаем следующее утверждение.

Утверждение 4. *Уравнение прямой в барицентрических координатах имеет вид*

$$ax + by + cz = 0, \tag{6}$$

где a, b, c не равны нулю одновременно.

Доказательство. То, что уравнение любой прямой может быть записано в виде (6), мы уже доказали; то, что a, b, c не равны нулю одновременно, следует из того, что точки X и Y различны — ведь, как известно (и несложно доказать), определитель матрицы $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ равен нулю, если и только если её строчки пропорциональны друг другу.

Наоборот, если дано уравнение (6), в котором не все коэффициенты a, b, c нулевые, то несложно найти две непропорциональные тройки чисел $(p_x : q_x : r_x)$ и $(p_y : q_y : r_y)$ (т. е. две точки X и Y на плоскости), удовлетворяющие этому уравнению. Но тогда и любая тройка вида

$$(\lambda p_x + \mu p_y : \lambda q_x + \mu q_y : \lambda r_x + \mu r_y)$$

тоже удовлетворяет уравнению следовательно, уравнению удовлетворяет вся прямая XY. Если же существует точка, не лежащая на этой прямой, но удовлетворяющая уравнению, то несложно показать, что все три коэффициента a, b, c нулевые (например, можно рассматривать тройки чисел как векторы в трёхмерном пространстве, тогда уравнение (6) говорит, что вектор $\overrightarrow{(a, b, c)}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{(x, y, z)}$; но, как известно, все векторы, перпендикулярные данному, компланарны). □

Как видно, уравнение прямой в барицентрических координатах не очень сильно отличается от аналогичного уравнения в аффинных координатах. Вывести уравнение окружности не намного сложнее: рассмотрим формулу (3). Пусть точка X с барицентрическими координатами $(p : q : r)$ — центр нашей окружности, а точка M с координатами $(x : y : z)$ — произвольная точка на окружности. Тогда если O — некоторая начальная точка, то

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} - \frac{p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}}{p+q+r} = \frac{(q+r)\overrightarrow{OA} - q\overrightarrow{OB} - r\overrightarrow{OC}}{p+q+r}.$$

Такие же формулы несложно получить для $\overrightarrow{XB}$ и $\overrightarrow{XC}$. Теперь условие $|\overrightarrow{OM}| = R$ можно записать так:

$$R^2 = |\overrightarrow{XM}|^2 = \frac{(x\overrightarrow{XA} + y\overrightarrow{XB} + z\overrightarrow{XC})^2}{(x+y+z)^2},$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$R^2(x+y+z)^2(p+q+r)^2 = \big((x(q+r)-(y+z)p)\overrightarrow{OA}+ \\ +(y(p+r)-(x+z)q)\overrightarrow{OB}+(z(p+q)-(x+y)r)\overrightarrow{OZ}\big)^2.$$

Как видно, у нас получается квадратное уравнение, однородное степени 2 по x, y, z и аналогично по p, q, r. Если добавить условие $x+y+z=p+q+r=1$, выполнения которого всегда можно добиться умножением на ненулевой общий множитель, получим

$$R^2 = \big((x-p)\overrightarrow{OA}+(y-q)\overrightarrow{OB}+(z-r)\overrightarrow{OC}\big)^2. \qquad (7)$$

Иногда это уравнение можно немного упростить. Например, если $O=X$ — центр окружности, описанной около треугольника ABC (относительно вершин которого мы рассматриваем барицентрические координаты), то условие (7) можно записать так:

$$R^2 = (x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})^2$$

(ведь $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=0$). Тогда $|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2=R^2$ и $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2\cos(2\angle C)=2R^2-c^2$, где $c=AB$. Аналогичные формулы позволяют переписать уравнение в виде

$$xyc^2+yza^2+xzb^2=0.$$

Однако есть более продуктивный подход, связывающий барицентрические координаты и расстояния между точками на плоскости. А именно, рассмотрим следующее определение, пришедшее в геометрию, как несложно понять, из теоретической механики.

Определение 3. Пусть $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ — система материальных точек, $\sum\limits_i m_i \neq 0$, а P — произвольная точка на плоскости. Тогда *моментом инерции данной системы относительно* P называется величина

$$I_P = \sum_{i=1}^{n} m_i PA_i^2.$$

Момент инерции — важная физическая величина, характеризующая динамику данной системы точек. В пределе, когда число точек стремится к бесконечности, получается величина, называющаяся моментом инерции твёрдого тела (точно так же, как при переходе к аналогичному пределу в определении центра масс получаем определение центра тяжести твёрдого тела). Эта величина появляется в описании движения твёрдого тела и является важным инвариантом этого движения. Но нас будут интересовать чисто геометрические свойства и приложения этой величины. Они вытекают из следующих двух простых утверждений.

Утверждение 5. *Пусть Z — центр тяжести системы*

$$(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n), \quad M = \sum_i m_i.$$

Тогда для любой точки P выполняется равенство

$$I_P = M|\overrightarrow{PZ}|^2 + I_Z.$$

Доказательство. По определению $\sum\limits_i m_i\overrightarrow{ZA_i} = 0$, поэтому

$$I_P = \sum_{i=1}^n m_i|\overrightarrow{PA_i}|^2 = \sum_{i=1}^n m_i(\overrightarrow{PZ} + \overrightarrow{ZA_i})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i(\overrightarrow{PZ})^2 + 2\overrightarrow{PZ} \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{ZA_i}\right) + \sum_{i=1}^n m_i(\overrightarrow{ZA_i})^2 = M|\overrightarrow{PZ}|^2 + I_Z. \quad \square$$

Утверждение 6. *Момент инерции системы $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ относительно её центра масс Z может быть найден по формуле*

$$I_Z = \frac{1}{M} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_i m_j A_i A_j^2.$$

Доказательство. Рассмотрим векторные равенства

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{ZA_j} - \overrightarrow{ZA_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Возводя их в квадрат, получаем

$$A_iA_j^2 = ZA_i^2 + ZA_j^2 - 2\overrightarrow{ZA_i} \cdot \overrightarrow{ZA_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Умножим каждое их таких равенств на $m_i m_j$ и просуммируем по всем индексам $i, j = 1, \ldots, n$. В левой части равенства получим сумму

$$\sum_{i,j=1}^n m_i m_j A_i A_j^2 = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_i m_j A_i A_j^2.$$

В правой части будет стоять выражение следующего вида:

$$\sum_{i,j=1}^n m_i m_j (ZA_i^2 + ZA_j^2) - 2 \sum_{i,j=1}^n (m_i\overrightarrow{ZA_i}) \cdot (m_j\overrightarrow{ZA_j}) =$$

$$= 2M \sum_{i=1}^n m_i ZA_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{ZA_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n m_j\overrightarrow{ZA_j}\right) = 2MI_Z,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^n m_i\overrightarrow{ZA_i} = 0$. $\square$

Заметим, что, например, уравнение окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами a, b, c, получается применением этих двух утверждений без всяких вычислений: пусть $(x:y:z)$ — барицентрические координаты точки Z. Найдём момент инерции системы $(A; x)$, $(B; y)$, $(C; z)$ относительно центра O описанной окружности треугольника. Согласно доказанным формулам получаем равенство

$$R^2(x+y+z) = I_O = (x+y+z)OZ^2 + \frac{xyc^2+yza^2+xzb^2}{x+y+z}.$$

Но точка Z лежит на описанной окружности треугольника, если и только если $OZ=R$, откуда получаем требуемое равенство.

Вообще, полученные формулы весьма полезны, когда речь идёт об отыскании расстояний между точками. Например, пусть $Z=I$ — центр вписанной окружности треугольника ABC. Как мы знаем, его барицентрические координаты равны $(a:b:c)$. Найдём момент инерции соответствующей системы относительно центра описанной окружности: с одной стороны, он равен $2R^2p$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, с другой стороны, мы можем воспользоваться доказанными формулами. Получим равенство

$$2R^2p = 2OI^2p + \frac{abc^2+acb^2+bca^2}{2p} = 2OI^2p + abc.$$

Так как площадь треугольника может быть найдена по формулам $S = \frac{abc}{4R}$ и $S = pr$ (r — радиус вписанной окружности), получаем $abc=4Rrp$, и, следовательно, мы получили *формулу Эйлера*:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Содержание