МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ РАДИО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ РАДИО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ

ИЗДАНИЕ
В ПЯТИ
ТОМАХ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1985

ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ РАДИО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3

УДК 519.95 : 518.0

Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 3. Основы теории математического моделирования сложных радиотехнических систем / Белов Ю. А., Козлов Н. Н., Ляшко И. И., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е.— Киев : Наук. думка, 1985.— 272 с.

В книге рассматриваются некоторые направления теории математического моделирования сложных систем, основанные на использовании вычислительного эксперимента. Излагаемые методы предназначены прежде всего для применения при проектировании, исследовании и использовании радиотехнических систем (РТС) и измерительно-вычислительных комплексов (ИВК). Рассматриваются общие вопросы методологии математических моделей (ММ) и работы с ними, решения задачи автоматизации построения моделирующих комплексов программ. Описываются методы построения ММ внешней среды, управления структурой ИВК и прогноза состояния динамических систем в условиях неопределенности, а также элементы теории векторной оптимизации в бесконечномерных пространствах и ее применения. Многие результаты приводятся в монографической литературе впервые.

Для специалистов в области теоретической и прикладной кибернетики, радиотехники, вычислительной техники, экспериментальной физики и всех, интересующихся вопросами использования математики при анализе и синтезе сложных систем.

Ил. 16. Табл. 3. Библиогр.: с. 263—270 (202 назв.).

Авторы
Ю. А. БЕЛОВ, Н. Н. КОЗЛОВ, И. И. ЛЯШКО,
В. Л. МАКАРОВ, О. Е. ЦИТРИЦКИЙ

Рецензенты *Н. Ф. Кириченко, Б. П. Креденцер*

Под общей редакцией акад. АН УССР *И. И. Ляшко*

Редакция физико-математической литературы

М $\frac{1502000000-455}{M221\,(04)-85}$ подписное

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие ЭВМ привело к тому, что математические методы исследования стали интенсивно и широко применяться как в традиционных областях науки (физика, механика, химия и др.) и техники, так и в нетрадиционных (технология, экология, экономика, биология, социология и др.). Причина этому — с одной стороны, быстрое развитие методов вычислительной математики и, в частности численных методов оптимизации, с другой стороны, создание новых эффективных методов хранения, переработки и представления информации на основе ЭВМ (включая мини- и микро-ЭВМ микропроцессорной техники).

В настоящее время стало возможным эффективно использовать математическое моделирование и вычислительный эксперимент для решения задач анализа и синтеза сложных технических и технико-экономических, биологических и управляемых систем с участием людей и др.

Математическое моделирование и вычислительный эксперимент становятся одним из основных инструментов исследования явлений и процессов реального мира. Продолжает расширяться спектр конкретных дисциплин, развитие которых в настоящее время немыслимо без серьезного вычислительного эксперимента, базирующегося на ММ изучаемых явлений и процессов. Понятие математического моделирования и вычислительного эксперимента приобрело новое содержание в связи с работами В. М. Глушкова, А. А. Самарского, Г. И. Марчука, Н. Н. Моисеева, П. С. Краснощекова, А. А. Петрова и др.

Большой интерес к этому подходу обусловлен его уникальными свойствами (математическое моделирование дает более подробную информацию, подготовка и проведение математического моделирования и вычислительного эксперимента занимает значительно меньше времени, чем проведение соответствующего натурного эксперимента, вычислительный эксперимент дешевле, доступнее и т. д.), и появление этого метода привело, вообще говоря, к новой философской проблеме — необходимости переосмысления не только предмета математики, но и методов математического исследования.

Как отмечается в [132], «...формирование модели для вычислительного эксперимента не умозрительный акт, совершаемый на «пустом месте». Оно основано на всех имеющихся экспериментальных сведениях и теоретических представлениях, на всем приобретенном ранее опыте. Кроме того, этапы его проведения предусматривают «внутренний контроль», гарантирующий непротиворечивость выбранной модели, достаточную «разрешающую способность» алгоритма, правильность работы программы и т. д. Наконец, непреложным условием является сравнение получаемых результатов с практикой и уточнение модели».

Важность развития этого подхода очевидна. Однако уже ясно, что методы переработки информации на ЭВМ и методы решения экстремальных задач детальнее разработаны, чем методы математического описания явлений и процессов. В новых областях, к сожалению, пока нет надежных принципов описания явлений и процессов, подобных принципам, разработанным в физике, механике и других классических науках. Поэтому в новых областях мало хороших, или, как еще говорят, адекватных ММ, а это очень часто сводит на нет эффективность методов переработки информации и методов оптимизации.

Из сказанного следует, что важной проблемой, стоящей перед современной прикладной математикой, является выделение из конкретных областей общих приемов и методов создания и исследования ММ, т. е. развитие общей теории математического моделирования — чрезвычайно разноплановой области науки. Поэтому мы не ставим перед собой цели рассмотреть все имеющиеся подходы и возможности, это и невозможно, учитывая огромный, постоянно растущий поток научных публикаций и идей по моделированию. Нашей задачей является изложение лишь нескольких направлений теоретических исследований, имеющих приложение в конкретной области — РТС, ИВК, и их использование в летных экспериментах.

В первой главе рассмотрены некоторые общие вопросы методологии математического моделирования на основе вычислительного эксперимента, принципы построения ММ и работы с системой моделей.

Вторая глава посвящена вопросам технологии создания надежных алгоритмов, обеспечивающих автоматизацию построения ММ и имитационных алгоритмов для широкого класса дискретных и дискретно-непрерывных РТС, и разработки методов проверки правильности ММ и программных моделей сложных РТС. В этой главе разрабатываются формализмы, алгоритмы и программные средства, ориентированные на решение задач автоматизации проектирования сложных РТС и ИВК. Развивается метод верификации моделей, позволяющий во многих практически важных случаях выяснить неадекватность моделей концептуальным положениям и, следовательно, он способствует формированию множества эффективных вариантов конструкции.

В третьей главе описаны подходы к решению задач управления ИВК, получению оценок состояний динамических систем в условиях неопределенности, базирующихся на новых в этой области математических методах. Приводится обзор основных свойств псевдообратных матриц и операторов в гильбертовых пространствах. Показана применимость этого аппарата к новым задачам управления измерениями и отсеивания помех большой интенсивности.

Четвертая глава представляет собой введение в теорию оптимизации с критерием качества, принимающим значения в бесконечномерном частично упорядоченном пространстве, и показаны некоторые их применения к задачам, возникающим в рамках теории ИВК. Вычислительные аспекты векторной оптимизации будут изложены в четвертом томе.

В заключение выражаем искреннюю благодарность рецензентам Н. Ф. Кириченко и Б. П. Креденцеру за полезные замечания, В. Г. Шелепову и В. Г. Сердюку за помощь при оформлении рукописи.

ГЛАВА I

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Вопросы создания, исследования и преобразования ММ сложных объектов занимают особое место в прикладной математике прежде всего в силу своей комплексности. С одной стороны, общие методологические проблемы моделирования и использования ЭВМ во многом еще недостаточно развиты и к их решению необходимо подходить с философских позиций с разумным привлечением математического аппарата.

Возможность получения субъективных выводов, излишняя формализация или расплывчатость рассуждений, одинаково затрудняющих извлечение практически полезных рекомендаций,— это лишь некоторые из трудностей, возникающих на этом пути. С другой стороны, конкретные ограничения, накладываемые на модели, требуют использования различных математических методов, иногда никак не связанных ранее разделов математики (см., например, [34]).

В этой главе рассмотрены некоторые общие вопросы математического моделирования (в рамках сложных РТС), ориентированные на машинные методы. В § 1 предпринята попытка изложения ряда методологических положений, лежащих, с нашей точки зрения, в основе математического моделирования сложных объектов. В § 2 описаны основные направления, развиваемые в настоящее время в теории моделирования, которые естественно использовать в рассматриваемой предметной области — сложные РТС и ИВК. В § 3 изложен ряд свойств систем ММ одного и того же объекта.

§ 1. Моделирование и вычислительный эксперимент

Общие вопросы моделирования, а также цели и задачи моделирования РТС обсуждались в [89, гл. I, § 2, 3]. Под ММ обычно понимается знаковая модель, построенная с использованием математических средств. Ее построение требует глубокого знания конкретных фактов и взаимосвязей изучаемых объектов, причем построение ММ связано в основном с формализацией качественных представлений исследователя. Как отмечалось ранее, в рамках РТС под ММ объекта O

можно понимать бинарное отношение $S \subset E \times F$, где E — пространство входов, а F — пространство выходов объекта O. В частности, S может быть оператором, действующим из E в F. На следующем этапе изучается ММ S, т. е. получение выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего сопоставления их с результатами наблюдений (или с целевыми установками в случае проектирования). Здесь важен используемый математический аппарат и в особенности вычислительная техника — мощное средство получения количественной выходной информации как результата решения сложных математических задач [143]. Если указанное сопоставление не удовлетворяет исследователя, то приходится изменять ММ (или ее часть). В этой связи возникает по крайней мере два вопроса: как строить ММ, исходя из априорной информации об объекте O, и как совершать переход от одной ММ к другой. Остановимся на них позже. Сейчас более подробно рассмотрим вопросы применения вычислительной техники к математическому моделированию.

Хорошо известно, что появление и быстрое распространение ЭВМ дало громадный толчок развитию всей математики в целом и новой в частности. Более того, развитие ЭВМ породило принципиально новый метод научного познания — вычислительный (или, как еще говорят, математический) эксперимент. Содержательное понятие вычислительный эксперимент и его обоснование для задач математической физики было впервые введено в практику А. А. Самарским.

Появление этого метода привело, вообще говоря, к новой философской проблеме — необходимости переосмысления не только предмета математики, но и методов математического исследования [130—132]. В чем же заключается основная идея метода вычислительного эксперимента? Сущность метода состоит в том, что на основе ММ имитируется («проигрывается») поведение объекта O в различных условиях на ЭВМ, находятся оптимальные параметры и режимы. Эти эксперименты проводятся на ЭВМ, поскольку они требуют столь значительного числа вычислительных или логических операций, что их практически нельзя выполнить вручную. При этом возможно проведение большого количества вычислительных экспериментов в ограниченное время, а это дает возможность статистической обработки полученных результатов, выяснения вероятностных закономерностей и т. п.

Остановимся на содержании понятия вычислительный эксперимент на этапе анализа ММ, следуя [130]. Вначале происходит построение и обоснование дискретной модели, т. е. разработка численного метода и вычислительного алгоритма решения задачи. Затем реализуется алгоритм в виде программной модели, которая может быть пакетом программ или любым другим программным средством. Далее приступают к проведению расчетов с последующей обработкой, анализом и интерпретацией результатов расчетов в терминах исследуемого объекта.

Математическое моделирование, проводимое на основе вычислительных экспериментов, резко сокращает сроки научных и конструкторских разработок, например, при исследовании задач аэрокосмического профиля [5]—[10], [48, 74, 75, 83, 141, 168, 172, 177, 201]; некоторые из них будут рассмотрены в четвертом томе. При этом по сравнению с натурным вычислительный эксперимент, проводимый на ЭВМ, экономически существенно дешевле, а иногда (в случае трудной осуществимости натурного эксперимента) является единственным инструментом исследователя.

Отметим, что наибольшие перспективы у комплексного подхода, объединяющего возможности аналитического метода, вычислительного и натурного экспериментов. Реализация этого подхода ставит проблему выработки новой методологии исследований, способной увязать воедино физико-техническую сущность изучаемого объекта, математическую постановку задачи и численные методы ее решения, учитывающие особенности используемой ЭВМ. Поэтому возникает необходимость осмысления некоторых философских понятий с точки зрения современного математического моделирования. В частности, важно установить взаимосвязь математики с качественными особенностями окружающего мира.

По старой традиции многие ученые математику понимают как науку о количественных отношениях. Математизация научного знания в этом случае представляется уходом от качества к одностороннему количественному описанию действительности, этот уход воспринимается часто как ее ограниченность, порождает недоверие к ее методам исследования, особенно в таких новых для математики областях, как гуманитарные и биологические науки. Ряд исследователей в настоящее время утверждают, что математика в процессе своего развития способна участвовать в познании качества изучаемых явлений действительного мира. Если внимательно разобрать выдвигаемые аргументы, то оказывается, что противоположные выводы получаются прежде всего из-за различного толкования философских категорий «количество» и «качество». Причем трудности здесь являются отнюдь не терминологическими. Достаточно профессионально эти вопросы можно анализировать лишь глубоко понимая как философию, так и математику. В связи с этим полезно привести высказывание выдающегося математика XX в. Куранта: «...никто не может оценить эти виды искусства — музыку и живопись, не понимая, что такое ритм, гармония и строй в музыке или форма, цвет и композиция в живописи. Для понимания же сути математики еще в большей степени необходимо подлинное проникновение в составляющие ее элементы» [84, с. 15]. С не меньшим основанием подобное можно сказать о диалектическом материализме. Поэтому для выяснения вопроса — возможно ли изучать качественные особенности сложных объектов действительности математическими методами уточним прежде всего, в каком смысле мы будем понимать в дальнейшем содержание понятий «качество — количество».

Для определения категорий «качество» и «количество» рассмотрим, следуя [142], простейшую познавательную ситуацию и определим в ней систему понятий «предмет — качество — определенность», соблюдая при этом соответствие определений основным положениям материалистического принципа отражения.

Сделаем одно терминологическое замечание. В научном языке наряду с терминами предмет, свойство и отношение употребляется более общий термин признак. Понятие существенных свойств или отношений заменяют понятием существенных признаков. Это неслучайно. Рассмотрение специфического свойства предмета (вместо самого предмета) дает возможность сократить количество терминов и говорить не о предметах и свойствах, а только о свойствах, что позволяет более глубоко провести необходимое исследование. Кроме того, для науки существенным в предмете бывает не только то, какими свойствами или отношениями он обладает, но также и то, чем он не обладает. Однако последнее не является свойствами предмета, и чтобы говорить о свойствах, которыми предмет не обладает, вводится понятие признака этого предмета. По определению, признак предмета — это наличие или отсутствие определенных свойств или отношений у этого предмета.

В конкретном научном познании переход от незнания чего-либо к знанию выступает как некий переход от неопределенности к определенности. «Неопределенность — определенность» рассматриваются в гносеологическом аспекте, ибо трудно дать определение этим категориям в онтологическом плане, преодолев их многозначность. Относительность различения неопределенность — определенность видна из того, что до некоторого уровня уже познанный предмет за этим пределом переходит в неопределенность.

Преодоление неопределенности, выделение предмета и установление качественной определенности его суть стороны единого познавательного процесса. Установление качественной определенности предшествует всем другим и является изначальным моментом познания в том смысле, что без знания качественной определенности нельзя выделить предмет познания, а на более высоких уровнях и определить его. Как говорил В. И. Ленин, «Сначала *мелькают* впечатления, затем выделяется *нечто,*— потом развивается понятие *качества* (определения вещи или явления) и *количества*»[1].

Итак, качественная определенность выясняется в процессе отождествления и различия предметов, познания их признаков, что и составляет сравнение, осуществляющееся по-разному на различных уровнях познания. Целостность рассмотрения признаков есть одна из важнейших сторон качественного сравнения. Поэтому в первом приближении можно записать следующее определение: «качество (в методологическом плане) есть определенность предмета познания, устанавливаемая в отношениях тождества и различия с другими предметами, при целостном рассмотрении признаков» [142, с. 18].

В основе количественного подхода к предмету познания лежит абстракция, противоположная абстракции «качество». Абстракция «количество» есть мысленное отвлечение от качественной целостности предмета познания и сосредоточение внимания на интенсивности или степени проявленности изучаемых признаков.

Таким образом, количество (в методологическом плане) есть определенность однокачественных предметов, устанавливаемая при рассмотрении признаков со стороны интенсивности или степени их проявления [142]. Ясно, что в познании любой признак исследуемого предмета

---

[1] *Ленин В. И.* План диалектики (логики) Гегеля.— Полн. собр. соч., т. 29, с. 297—302.

имеет качественную и количественную определенность, и в итоге важно установить определенность обеих сторон. Такой подход хорошо согласуется с требованиями, приведенными выше. Итак, если отношение между качествами двух предметов обозначает общие признаки в их противоположности, то в количественных отношениях характеристика общего признака одна и та же, только степени выражения их различны. Риман еще в середине XIX в. высказывал подобные соображения.

Имеются и другие трактовки категорий «качество» и «количество» (см. [49]). Основная трудность, по-видимому, состоит в том, что, с одной стороны, из атрибутивности категорий «качество» и «количество» следует, что они не должны зависеть от отношений, в которые ставится предмет, а с другой стороны, они не могут быть поняты и определены без учета отношений данного предмета к другим. Это одна из основных причин, в силу которых идут споры вокруг различных определений. При этом создается впечатление, что некоторые авторы не учитывают простой факт: мы познаем предмет, перемещаясь с одного уровня познания (рассмотрения) на другой. На каждом уровне перед началом изучения предмета каким-либо способом, мы фиксируем качество, качественно определяем предмет познания на данном уровне, в целом рассматривая ряд его признаков, причем для более глубокого познания указанных признаков необходимо перейти на другой уровень.

Из единства категорий «качество — количество» следует, что принципиально не может быть ограничена свобода субъекта смещать фиксации качества (а тем самым и весь метод различия «качество — количество») на другие уровни, ибо, в соответствии с основным принципом марксистской диалектики, нельзя установить принципиальную границу познания. Поэтому то, что рассматривалось при одних абстракциях как качество, на следующем уровне и при других абстракциях может рассматриваться как количество, сместив соответственно и фиксацию качества.

Таким образом, категории «качество — количество» относительны; поэтому говорить об онтологическом определении качества, как показывают многочисленные неудачные попытки, не имеет смысла. По-видимому, «качество» и «количество» — это прежде всего методологические категории. Все другие функции им можно приписать, но методологическая функция остается главной. Утверждение типа одни свойства предмета определяют его «качество», другие «количество» — бессмысленно, если его рассматривать независимо, в отрыве от уровня познания, на котором находится исследователь. В противном случае мы оказываемся на позициях метафизики, абсолютизируя данную фиксацию «качество — количество».

Представляется странным понимание качества предмета как чего-то застывшего, связанного лишь с одним уровнем познания (например, чувственным).

Отметим также, что при определении понятия «качество» мы фактически оперируем не единичными эмпиричными объектами, а классами объектов-предметов познания. Возникает вопрос — что в этом нового. Ведь аналогичные мысли излагал еще Аристотель в «Метафизике».

На современном языке его определение звучит так: качество — это определенность, которая присуща всем объектам данного класса и не присуща ни одному объекту других классов. Или, иными словами, если у нас есть класс каких-то предметов и мы разбили его на непересекающиеся подклассы, то под «качеством» следует понимать то общее, что характеризует только объекты данного подкласса. Действительно, приведенное выше определение «качества» фактически совпадает с аристотелевским с той лишь оговоркой, что оно рассматривается на данном уровне познания.

Ясно, что при таком подходе приходится отказываться от чувственно-интуитивной интерпретации качества. При переходе с одного уровня познания на другой классы (и подклассы) объектов расширяются, и мы в результате переходим ко все более фундаментальным качественным характеристикам, которые требуют для своего выявления и изучения все более высокой степени абстракции.

Но здесь возникает одна трудность. Приведенное определение, к сожалению, не решает проблемы существования качества как некоего атрибута материальных объектов, которые мы рассматриваем на данном уровне познания. Непонятно, почему достаточно произвольный (как видно из определения) выбор класса и подклассов предметов познания обеспечивает существование качества как чего-то существенного, характеризующего только объекты данного класса. Вообще говоря, такого свойства может не существовать.

Один из способов преодоления этой трудности в философии состоит в том, чтобы обращаться к сложившимся в конкретных науках эмпирическим правилам классификации. Но этого явно недостаточно. Более того, такой подход еще раз подтверждает, что система «качество — количество» — относительная категория.

Для того чтобы избежать противоречий и трудностей, возникающих при попытках дать строгое определение понятию «качество», попробуем применить его сначала к классам геометрических объектов и лишь затем попытаемся сопоставить его с реальным миром в результате содержательной интерпретации соответствующих структур. Если мы правильно определим общефилософское понятие «качество», то его проекция на математику должна соответствовать чему-то и в математике. По-видимому, понятие «качества» (в геометрии) можно связать со множеством топологических свойств геометрических объектов. В этом случае исходный класс — это все топологические пространства, разбитые на множество подклассов топологически-эквивалентных (т. е. гомеоморфных) топологических пространств. Основанием для такого подхода служит то, что топологические свойства — это свойства геометрического объекта в целом, обладающие чрезвычайно фундаментальным характером. По сравнению с метрическими, аффинными и проективными свойствами топологические свойства инвариантны по отношению к более широкому классу преобразований — классу гомеоморфизмов. Как показано в ряде работ [99 и др.], берущих начало еще с исследований Грассмана середины XIX в., топология геометрического объекта тесно связана с присущими ему свойствами порядка, промежуточности, не зависящими непосредственно от количественного, метрического аспекта. Если эти соображения принять, то поставленная проблема выбора качественных классов в геометрии может считаться решенной. Учитывая это, можно сказать, что в философии категория «качество» — это такая определенность предмета познания, которая инвариантна по отношению к определенному типу преобразований, а именно к преобразованиям, не выводящим преобразуемый объект за пределы данного подкласса.

Однако зададим вопрос: можно ли математическими методами исследовать качественные особенности явлений мира. С этой целью постараемся вначале отделить предмет математики от ее объекта. Современная математика непосредственно занимается изучением любых «возможных чистых структур», «возможных» — в смысле логически мыслимых, и «чистых» в том смысле, что их элементы и отношения не содержат ничего, кроме данного в самом определении этих структур» [1]. Математическая структура учитывает лишь отношения, а элементы в ней выступают абстрактными понятиями (без учета специфики их природы). При этом синтез аксиоматического метода и методов теории множеств в итоге определил теоретико-множественную концепцию строения современной математики. Учитывая, что новая математика является методом научного познания, «идеальной техникой», по А. Д. Александрову [1], естественно под предметом математики понимать именно абстрактные, «чистые» структуры (если в слово предмет вкладывать следующий смысл: «то, чем непосредственно занимается данная наука»).

Естественно поставить вопрос: а чему же в реальном мире соответствуют математические структуры. Что является объектом математики?! Еще Ф. Энгельс попытался ответить на этот вопрос: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» [2].

В понимании предмета математики существенных расхождений нет (в указанном смысле слова предмет), а вот объект математики многие трактуют по-разному. Исходят из понимания количества в математике, предложенного в [163]. Под количеством (в математике), писала С. Яновская, можно понимать сейчас «не только числа и величины, но и отношения, отвлеченные от содержания и рассматриваемые с точностью до изоморфизма».

Отметим вначале, что в современной математике нет понятия количества как такового (есть понятия множества, функции, числа и т. д., но не количества). При более глубоком анализе можно отметить, что под количеством в математике понимается такая сторона абстрактных предметов, которая позволяет оценивать результат сопоставления в понятиях больше, меньше и только. Иными словами, количество в математике на самом деле задается одной из трех фундаментальных структур, а именно порядковой структурой. (Как известно, вслед за Бурбаки, современную математику представляют построенной на трех «материнских» структурах — алгебраической, порядковой и тополо-

---

[2] *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг. Диалектика природы.— Соч. 2-е изд., т. 20, с. 5—626.

гической.) Такое понимание количества четко согласуется с более общим (и качественно отличным) философским понятием «количество», описанным выше. Отметим, кстати, что общефилософское понятие «количество» — это единство числа и величины, и количество в принципе всегда можно выразить числом или величиной (т. е., более точно, элементами некоторой порядковой структуры).

Содержание величины в философии характеризуется, по крайней мере, тремя свойствами: 1) существованием различия, которое реализуется в отношениях равенства и неравенства; 2) наличием особого типа структурности, который проявляется в аддитивности; 3) наличием взаимосвязанных непрерывности, изменчивости, бесконечности.

Взаимосвязь числа и величины как моментов количества выражается в том, что число есть внешний момент количества — отношение величин, а величина — внутренний момент количества [49, с. 60].

Итак, мы видим, что определение количества в математике, по С. Яновской, является неудовлетворительным (слишком широким), поскольку под количеством в математике наиболее естественно понимать лишь отношения между сторонами абстрактных объектов, задаваемые порядковыми структурами.

Вернемся к обсуждению «объекта» математики в реальном мире. Как было отмечено, многие авторы исходят из некорректного определения количества в математике по С. Яновской. Тогда «пространственные формы» в определении Энгельса превращаются в количественные отношения, и любое применение математики в действительном мире принимается как количественный подход. Любопытно, что во всех встретившихся нам случаях такой подход оправдывается также ссылкой на историю математики, явно или неявно авторы отождествляют пространственные формы с «метрическими отношениями» типа геометрических.

Сейчас, как отмечали выше, топология является одной из трех порождающих современную математику структур. Топологические свойства математических объектов являются наиболее фундаментальными, и в этом смысле топология называется еще качественной геометрией.

Нам могут возразить, что в этом факте нет ничего нового — многие авторы согласны с тем, что внутри математики применяется качественный метод исследования. Так, например, об этом пишет Г. И. Рузавин: «Иногда приходится читать и слышать, что современная математика достигла сейчас уровня, позволяющего исследовать качественные особенности предметов и явлений. Нам кажется, что такое утверждение основано на недоразумении. Верно, что в математике часто говорят о качественных методах решения проблем, качественно различных ее понятиях, и поэтому легко может возникнуть иллюзия, что она имеет дело с исследованием качественных особенностей самой действительности. На самом деле в точном смысле здесь идет речь о качественно различных этапах, моментах и особенностях исследования самих количественных отношений» [127, с. 80]. В другом месте статьи [127] прямо заявляется, что ссылка на возможность широкой экстраполяции и «экспансии» геометрического языка на изучение еще непознанного не достигает своей цели.

Постараемся разобраться, действительно ли это так. Тем более это представляется интересным, ибо, во-первых, Г. И. Рузавин опирается на некорректное определение количества С. Яновской, и, во-вторых, ни Г. И. Рузавин, ни кто-либо другой, поддерживающий аналогичную точку зрения, вразумительного обоснования своей позиции почему-то не приводят (точнее говоря, пытаются это сделать в двух направлениях: или приводят примеры качественного подхода в познании на таком уровне, где действительно трудно (или просто не нужно) применять математику, или показывают, что в математике происходят качественные сдвиги, но в заключение просто постулируют, что все это происходит в рамках количества). Слабость подобной аргументации и заставила нас более подробно рассмотреть этот вопрос.

Если качество предмета понимать как нечто застывшее, нечто связанное с одним уровнем познания (например, чувственным), то все рассуждения Г. И. Рузавина становятся понятными, однако указанное понимание качества никак не вяжется с диалектическим материализмом, что мы уже отмечали.

Из приведенного анализа категории «качество» следует, что качество предмета познается на различных уровнях познания. Поэтому естественно признать существование таких уровней познания, на которых нет необходимости применять математические методы (например, во многих случаях чувственно-эмпирического познания качества: кстати, все встречавшиеся нам «контрпримеры» с этого уровня познания). Поэтому приведение «контрпримеров» лишь подтверждает, что действенно математика «в точном смысле» слова может применяться на достаточно высоких уровнях познания.

Далее, вся история человеческого познания и математики показывает, что одно из самых существенных различий философии и математики состоит в следующем: если философия изучает мир в единстве его противоположных сторон, рассматривает их взаимные переходы и изменения в совокупности возможных отношений, то математика абсолютизирует свои абстракции, и лишь затем старается получить все возможные логические следствия из этих абсолютизаций, т. е. изучает (абстрактно) стороны возможного постоянства (относительного) явления, в разрыве их взаимоисключающих отношений. Наиболее явно это сформулировано А. Д. Александровым [1]. Ф. Энгельс писал: «...математика: диалектические вспомогательные формы и отношения». А отсюда никак не следует, что любое применение математики в научной практике автоматически означает применение количественного метода исследования. Современная наука убедительно показывает, что математические приемы с пользой для дела используются и при других методах исследования, которые отнюдь не являются количественными (например, в математической лингвистике, при изучении процессов управления в природе с помощью теории автоматов и г. д.).

Однако вернемся к затронутому вопросу: может ли математика применяться при познании качества. (Качество предмета познания в объективном мире, а не качество внутри математики). Во-первых, как отмечалось в философской литературе, качество может познаваться и количественными методами на определенных уровнях познания. А любое количество, как писали выше, принципиально может быть познано числом или величиной. На этом можно было бы и остановиться, т. е. качество может познаваться с помощью математики на определенных уровнях познания. Однако мы хотим пойти дальше и показать, что в определении Энгельса объекта математики неразумно (в методологическом плане) отбрасывать слова «пространственные формы». Именно познавая пространственные формы объектов реального мира (с помощью математики), мы можем познать наиболее фундаментальные характеристики объектов в целом, т. е. познать качество объектов (в определенном аспекте рассмотрения).

Объекты мира существуют в таком порядке, в каком воспринимаются нами. Но этот порядок многообразно существующего мира не существует вне его процессов, как нечто им противостоящее, не связанное с ними. С другой стороны, он не составляет признака, различающего процессы. Их мы воспринимаем в совокупности, внутри которой может меняться взаимное расположение объектов, но не меняются признаки в целом, характеризующие сами процессы. Следовательно, указанный порядок — это форма бытия.

По отношению к нашему наблюдению объекты реального мира можно разбить на две группы: это вещи, устойчивые, сохраняющиеся, т. е. слабо изменяющиеся на данном уровне рассмотрения, и процессы, в которых ничто не находится в состоянии неизменчивости на данном уровне (хотя бы с внешней стороны). Тогда порядок вещей — это отношения между сосуществующими вещами. В этом порядке вещи рассматриваются в своем качественном различии сразу, все. Нет необходимости в исчезновении одной вещи для познания другой вещи как сущего. Эта форма бытия и есть пространство. Процессы взаимосвязанно размещаются в последовательном порядке, когда каждый из них может рассматриваться вслед за другим, после другого. Эта форма бытия составляет время. Так как деление на две указанные группы относительно, а связь между объектами абсолютна, то и пространство и время взаимосвязаны, относительны и абсолютны.

Исторически сложилось так, что концепция пространства и времени в том виде, в каком она существует в большинстве физических теорий, создалась под воздействием макроскопических представлений. Ряд ведущих физиков считают, что эта концепция и приспособлена для адекватного описания лишь макроявлений (см., например, [43]). Реальное пространство — время, как известно, имеет два класса свойств: метрические и топологические. «Топологические свойства выражают пространственный и временной порядок, качественный аспект пространства и времени; метрические свойства выражают пространственную и временную протяженность, количественный аспект» [99]. Хотя дан глубокий философский анализ пространству и времени как всеобщим формам существования материи, в настоящее время явно или неявно предполагается, на основании данных конкретных наук, что имеется единственная пространственно-временная форма существования материи (а отсюда следует существование единой топологии, пригодной для описания топологических свойств пространства — времени, причем она является метрической топологией, т. е. познается количественно).

Проблема специфической топологии пространства и времени в настоящее время была выдвинута в космологии, ибо согласно общей теории относительности в гравитационных полях определенного рода может возникнуть необычная топология пространства — времени в больших масштабах (см., например, работы А. З. Петрова). На возможность изменения топологии в малом указывает специфика так называемых каузальных связей микромира, проявляющаяся в их существенно вероятностном характере (см. [145], где описана возможность введения особой пространственной связности для микроявлений). Это лишь несколько примеров, подтверждающих, что, «выходя за пределы обыденного опыта, человек сталкивается с такими явлениями, которые не могут быть описаны с помощью обыденных пространственно-временных представлений» [99]. Несмотря на то, что пространство и время обладают моментом всеобщности, универсальности по отношению к единичным микрообъектам, получается, что их неверно представлять в виде единственной пространственно-временной формы с простыми универсальными свойствами. Отметим, что это предполагал еще Кант.

А. М. Мостепаненко [99] выдвинул гипотезу, что в природе существует множество пространственно-временных форм (существования движущейся материи), с разными метрическими и топологическими свойствами и привел убедительные обоснования этого тезиса.

Можно дополнительно обосновать тезис о существовании в мире различных уровней, т. е. наибольших классов материальных объектов, к которым еще применимы обычные понятия количественного и качественного изменений, причем один уровень отличается от другого характером и типом изменения.

Каждую пространственно-временную форму естественно рассматривать «как необходимое условие существования всего обширного класса материальных явлений, принадлежащих к определенному уровню материи», и вместе с тем как «форму существования другого, более фундаментального уровня материи» [99, с. 179].

Если теперь вернуться к изложенному выше пониманию основного содержания категории «качество», то легко понять, что объекты, локализованные в разных пространственно-временных формах, обладают различными качествами (причем фундаментальными, связанными с топологическими свойствами пространственно-временной формы и общими для всех объектов данного уровня материи).

Таким образом, математическое выражение качества изучаемых явлений можно получить, исследуя топологический аспект соответствующей пространственно-временной формы, причем на этом пути мы изучим наиболее фундаментальные стороны объектов, принадлежащих данному уровню материи (или уровню познания).

Именно поэтому неразумно отбрасывать в определении Энгельса объекта математики слова «пространственные формы», сводя это понятие к количественным отношениям.

Итак, в реальном мире объектом математики являются количественные отношения и пространственно-временные формы существования объектов, рассматриваемые с точностью до изоморфизма и познаваемые на достаточно высоких уровнях познания. Из сказанного можно вывести такое важное методологическое следствие. Для выражения качества предмета познания, трудно поддающегося качественному анализу в традиционном смысле на данном уровне исследования, следует проанализировать топологические особенности концептуальных математических структур, способных дать их адекватное описание. Причем наиболее фундаментальные стороны качественной специфики изучаемых явлений могут быть обнаружены лишь на уровне пространственно-временных отношений.

Если принять высказанные выше соображения, то при фиксированном уровне различения «качество — количество» изменение количества (количественных характеристик) за некоторый предел всегда приводит к изменению качества. Интересно заметить в связи с этим законом перехода количественных изменений в качественные следующее. Поскольку категории «качество — количество» относительны, то и сам закон перехода количественных изменений в качественные также относителен. В самом деле, пусть на одном уровне познания мы наблюдаем скачок, т. е. фазу, в которой происходят изменения качественного состояния. Желая выяснить причину скачка, мы вынуждены перейти на более глубокий уровень познания, на котором сам скачок уже может быть представлен как некие количественные изменения, вообще говоря, новых признаков, которые ранее, слитые воедино, определяли качество предмета на старом уровне познания.

В связи с этим законом возникает естественный вопрос: существуют ли некие общие закономерности, характеризующие скачок, т. е. переход к новому качеству. Методы моделирования таких скачков и нахождения соответствующих им критических уровней или рубежей, исследование общих свойств процессов развития, отделяющих количественные накопления от коренных качественных изменений, представляются одной из центральных проблем современной науки.

Оказывается, можно предложить достаточно общую процедуру прогнозирования качественного скачка, опираясь на специальный анализ количественных изменений. Учитывая приведенный выше анализ категории качества, кажется естественным использовать для математического описания этого понятия язык и аппарат теории категорий (см., например, [190]). Дадим соответствующие определения и сформулируем основные факты.

Категория K задается классом некоторых объектов A, B, C, ...; для любых объектов A и B имеется множество $K(A, B)$, называемое множеством K-морфизмов из A и B (иногда $K(A, B)$ может быть пустым, если $A \neq B$). Для объектов A, B, C существует отображение композиции

$$K(A; B) \times K(B, C) \to K(A, C), \quad (A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C) \Rightarrow A \xrightarrow{gf} C.$$

Существует единичный элемент id_A, принадлежащий классу $K(A, A)$, т. е. $K(A, A) \neq \varnothing$. Причем справедливы следующие аксиомы:

$$(fg)h = f(gh) \text{ для всех } A \xrightarrow{h} B, \quad B \xrightarrow{g} C, \quad C \xrightarrow{f} D,$$

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\mathrm{id}_B} B.$$

Два объекта называются изоморфными в категории K, $A \cong B$, если существует изоморфизм $A \xrightarrow{f} B$, т. е. f — такой морфизм, что существует морфизм $B \xrightarrow{g} A$, для которого $fg = \mathrm{id}_B$ и $gf = \mathrm{id}_A$.

Пусть K — класс всех топологических пространств, $K(A, B)$ — совокупность всех непрерывных отображений из A в B, $A \cong B$ тогда и только тогда, когда A и B — гомеоморфны.

Если в определении качества под классом понимать некоторую категорию K, а разбиение на однокачественные подклассы провести выделением изоморфных между собой множеств, то получим формализацию общефилософской категории качества. Таким образом, фиксируя качество на некотором уровне познания, мы фактически выбираем некоторую категорию. Одна из этих категорий, призванная для описания наиболее фундаментальных свойств пространства — времени, как видели, есть категория топологических пространств. Смещая уровень познания, выбираем другую категорию. Но каким образом описать качественный скачок в этих терминах? В соответствии с законом перехода количественных изменений в качественные необходимо научиться определять или оценивать критические значения количества.

Таким образом, рассмотрим существенные методы определения количества. Как отмечалось выше, количество всегда может быть познано числом и величиной. Хорошо известно, что в теории множеств количественные оценки множества осуществляются с помощью обобщения понятия числа, так называемых кардинальных и ординальных чисел Кантора, выполняющих существенно различные функции. В области конечных множеств такого различия нет в силу исторической традиции: еще в древности было сделано допущение об эквивалентности порядка и количества на основании представления об очень медленно меняющемся мире, когда можно пренебречь изменением объектов счета в процессе перечисления.

Прежде всего отметим, что любое вещественное число имеет двойственную природу порядка и количества: если x — число, то точка на числовой оси, соответствующая x, задает порядок, а отрезок $[0, x]$ этой же оси определяет количественную величину x. Начиная выполнять операцию счета, мы, по сути, совершаем последовательно три процедуры: 1) выбор единицы отсчета; 2) сам счет; 3) соотнесение полученного результата с реальностью. Выбирая единицу отсчета, мы фактически «замораживаем» качество, автоматически перенося его на другие объекты счета. Ясно, что правомерность такого переноса уменьшается с увеличением множества пересчитываемых объектов, поскольку с объектами счета могут происходить качественные изменения пока выполняются процедуры 2 и 3. При этом сама по себе процедура счета дает порядковую величину (порядковое число), определяет так называемый порядковый ряд. Итак, порядковое число фиксирует регулярность и однородность. Назовем количество, определяемое порядковым рядом, экстенсивным количеством и обозначим его переменной x [72].

Предмет познания, если он достаточно сложен, всегда представляет собой совокупность иррегулярных и неоднородных элементов и определяется системой условий, обстоятельств, трудно или вообще не поддающихся учету во всем своем объеме. Назовем (в основном, ради удобства) это истинное внутреннее количество предмета познания интенсивным количеством и будем в дальнейшем обозначать через y. Итак, счет приводит нас, по выражению Гегеля, к «дурной бесконечности», порождаемой «дурной» однородностью, выражаемой экстенсивным количеством. На самом же деле мы всегда имеем дело с «разумной» тотальностью, представляющей собой интенсивное количество.

Но как же все-таки оценивать количество, две стороны которого: экстенсивную и интенсивную, мы ввели в рассмотрение? Вернемся к операции счета. Как видно, основная трудность состоит в выборе единицы отсчета, поскольку в достаточно сложных, быстро развивающихся системах множество элементов в любой момент качественно неоднородно. Отсюда следует необходимость какой-либо формы осреднения отдельных качеств, т. е. для определения единичного элемента нужна некоторая форма соотнесения между собой элементов системы.

Таким образом, даже если совершать процедуру самого счета сколь угодно быстро, все равно нам необходим некий аппарат осреднения качественных свойств. Во всех современных приложениях математики, где достигнут более или менее значительный прогресс, такой аппарат осреднения (чаще всего интуитивного) обязательно присутствует. Данный подход удовлетворителен, когда предмет познания развивается достаточно медленно. Но имеется много областей человеческой деятельности, где процесс развития происходит очень быстро по сравнению со счетом и (или) не представляется возможным более или менее разумным способом «осреднить» качественные свойства (например, происходит постоянно массовое рождение и гибель элементов исследуемой системы). В этих случаях происходит своего рода расщепление экстенсивного и интенсивного количества. Такую закономерность отметил еще К. Маркс: «...по мере развития крупной промышленности созидание действительного богатства становится менее зависимым от рабочего времени и количества затраченного труда...» [3]. Здесь реальное богатство — это интенсивное количество, а рабочее время и затраченный труд — экстенсивное количество. Еще один пример дает результативность научного труда. Экстенсивное количество — число публикаций — не определяет реальной ценности труда (интенсивного количества) данного научного работника. Последняя обнаруживается лишь при анализе материала, опубликованного в этой области. А «рынок научных идей» очень динамичен, его развитие и управление трудно предсказуемы. Можно привести много аналогичных примеров, в особенности из области биологических и гуманитарных наук (физика также имеет подобные примеры). Существует гипотеза, что все материальное не может характеризоваться числом, превышающим 10^{100}. Здесь имеется в виду явно интенсивное количество. Вспомним ограничения вида

$$v < c, \quad \frac{1}{\Delta p \Delta x} < \frac{1}{h}$$

и т. д. Таким образом, можно сделать вывод, что интенсивная компо-

[3] *Маркс К.* Из рукописи «Критика политической экономии».— Воп. философии, 1967, № 7, с. 106—125.

нента количества отстает от экстенсивной и обычно ограничена некоторой предельной величиной (типа 10^{100}, c, $\frac{1}{h}$ и т. д.) [72].

Отметим еще одну трудность, связанную с третьей процедурой счета. Даже объективно полученное количество (интенсивное) выражается обычно порядковыми рядами. Считая мы как-бы «омертвляем» качество и при определении количества вынуждены анализировать «прошлые» качества, принципиально отставая от реального состояния предмета познания. Итак, количественная мера настоящего основана на оценке и обобщении прошлого «порядкового» опыта, имеющего всегда конечный и статистический характер. В этом состоит противоречие экстенсивного и интенсивного количеств как философских понятий. В то же время они едины, поскольку связаны с одной и той же категорией диалектического материализма — категорией «количество» — и служат для определения ее. Поскольку любое измерение осуществляется порядково и результат выражается экстенсивным количеством, нужно различать системы, в которых ставится задача на измерение (определение интенсивного количества) и производится измерение.

Пусть X — множество, элементы которого представляют собой однокачественные объекты (на данном уровне познания), т. е. $X \in K$. Зададим в X полугруппу преобразований (вообще говоря, необратимых) $Q = \{Q_\tau : \tau \in (T, \leqslant)\}$, где $(T, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество индексов, т. е. отношение $\leqslant$ на T, по определению, обладает свойствами:

1) $\tau \leqslant \tau$;

2) $\tau \leqslant \sigma,\ \sigma \leqslant \tau \Rightarrow \tau = \sigma$;

3) $\tau \leqslant \sigma,\ \sigma \leqslant \eta \Rightarrow \tau \leqslant \eta$ для любых τ, σ, $\eta \in T$.

Это множество $(T, \leqslant)$ будет играть роль такого свойства «очередности» объектов, которое называют временем. Поэтому полугруппу Q можно назвать полугруппой временных преобразований, по определению, $Q_{\tau\nu} = Q_\tau Q_\nu$. Эта полугруппа не предполагается коммутативной, поскольку таково свойство обычного времени. В множестве X выделим некоторую систему $\mathcal{F}$ подмножеств. Элементы $\mathcal{F}$ образованы из представителей X, характеризующихся одинаковой интенсивностью свойств, определяющих множество X, схожестью связей между ними и т. д. Не ограничивая существенно общности, предположим, что $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, т. е. счетные объединения элементов $\mathcal{F}$ и их дополнения также содержатся в $\mathcal{F}$. Пусть полугруппа Q инвариантна относительно $\mathcal{F}$, т. е. $Q_\tau(A) \in \mathcal{F}$, для любых $A \in \mathcal{F}$ и $\tau \in T$. Это естественное требование, поскольку оно означает сохранение структурных свойств исследуемых объектов за время T.

Итак, задано измеримое пространство $(X, \mathcal{F})$ с полугруппой $Q = \{Q_\tau : \tau \in (T, \leqslant)\}$ преобразований. Заметим, что элементы $\mathcal{F}$ определяются совокупностью, системой условий, обстоятельств. Поэтому они определяют ту сторону количества предмета познания, которая названа выше интенсивным количеством y. Познавать это интенсивное количество можно через порядковое количество x, которое, как отмечено, обладает свойством аддитивности. На языке математики это означает, что значения порядковых количеств являются элементами некоторого частично упорядоченного множества $(L, \leqslant)$. Учитывая аддитивную природу порядкового количества, естественно на L наложить ограничение типа линейности. Поэтому считаем, что L-линейное пространство над полем вещественных чисел, причем нормированное и полное, т. е. банахово. Структура частичного порядка согласована с L следующим образом: конус $L_{+} = \{y \in L : y \geqslant 0\}$ положительных элементов замкнут в L, причем если $x_1 \leqslant x_2$, то $z + x_1 \leqslant z + x_2$, для любого $z \in L$, $\alpha x_1 \leqslant \alpha x_2$, для любого числа $\alpha \geqslant 0$. Лишь в частном случае можно считать, что $L = R_1$ — множество вещественных чисел. Отметим, что не всякое количество можно познать числом, как утверждается в некоторых трудах по философии. Так, в современной теории оптимального управления большое значение приобретают многокритериальные задачи, когда критерий качества J принимает значения в $(L, \leqslant)$, где $L \neq R_1$. Известны конкретные задачи (из теории оценивания, например), в которых J не может быть принципиально сведен к скалярному критерию. А это и означает, что не всякая величина познается только числом.

Порядковое количество определим с помощью задания некоторой счетно-аддитивной L-значной меры $\mu_0 = \mu_{\tau_0}$, определенной на σ-алгебре $\mathcal{F}$. По определению, счетная аддитивность означает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad A_n \in \mathcal{F}, \quad A_n \cap A_k = \varnothing \quad (n \neq h).$$

Сумма ряда понимается в смысле нормы в L. Естественно предположить также монотонность меры, т. е. если $A \subseteq B$, то $\mu_0(A) \leqslant \mu_0(B)$. Векторная мера μ_0 может рассматриваться как наше априорное представление о предмете познания. Изменение наших априорных знаний происходит в результате накопления информации об объекте. Как известно, в широком смысле информация — это свойство процесса, противопоставляемое его энергетическим и массовым явлениям [161]. В этом смысле информация близка по своему содержанию к понятию «количество».

Причем сам процесс познания состоит в изменении наших представлений о мире в результате получения информации. В данных терминах это изменение меры μ_0 с течением времени. Оно осуществляется на основании анализа наблюдений над объектом познания — это и есть получение информации. Поэтому введем в рассмотрение множество Z — «пространство наблюдений». Между Z и X должна быть связь, которая через наблюдение $r \in Z$ позволяет уточнить наше знание об X. Эту связь зададим как L-значную переходную меру $P = \{P(r, A)\}$ относительно $(Z, \mathcal{R})$ и $(X, \mathcal{F})$, где $\mathcal{R}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств Z, построенная по принципу, аналогичному методу образования $\mathcal{F}$. По определению, $P(r, A)$ обладает свойствами:

а) для любого $r \in Z$ функция $P(r, \cdot)$ есть L-значная мера на $(X, \mathcal{F})$;

б) для любого $A \in \mathcal{F}$ функция $P(\cdot, A)$ есть измеримое отображение $(Z, \mathcal{R})$ в $(L, \leqslant)$, т. е. прообраз любого открытого в L множества принадлежит σ-алгебре $\mathcal{R}$. Переходная мера $P(r, A)$ фактически управляет нашим знанием о предмете познания, когда r является значением наблюдения, изменяя априорное знание, определяемое мерой μ_{τ_0}. Причем ценность информации, полученной в результате наблюдения

r, можно определять, измеряя расстояние между $\mu_{\tau_0}(\cdot)$ и $P(r, \cdot)$ в пространстве $\mathfrak{M}$ всех L-значных мер на $(X, \mathcal{F})$ в той или иной метрике. С вероятностной точки зрения естественной представляется обобщенная метрика Прохорова

$$\rho(\mu, \nu) = \inf \{\varepsilon > 0 : \varepsilon \in E\},$$

где $E = \{\varepsilon > 0 : \mu(A) \leqslant \nu(A^{\varepsilon}) + \varepsilon l, \nu(A) \leqslant \mu(A^{\varepsilon}) + \varepsilon l$ для любых $A \in \mathcal{F}, l \in L_+\}$,

$$A^{\varepsilon} = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}, \quad d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

где d — некоторая метрика в X. Относительно этой метрики временные отображения Q_τ предполагаются непрерывными, (если время не может быть разрывным). Мера $P(r, A)$ может определяться на основании знания μ_{τ_0} и r методами типа байесовских.

Пусть наблюдения осуществляются в моменты $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из T (или непрерывно по T). Тогда имеем совокупность мер μ_{τ_0}, $\mu_{\tau_1} = P(r_1, \cdot)$, ..., $\mu_{\tau_n} = Pr_n, \cdot)$. Одновременно изменяется интенсивное количество элементов σ-алгебры $\mathcal{F}$ с помощью Q, т. е. имеем

$$\mathcal{F}_{\tau_i} = \{A_{\tau_i} = Q_{\tau_i}(A), A \in \mathcal{F}\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Когда же приближается момент скачка, т. е. перехода на другой уровень познания? Видимо, тогда, когда рассогласование между порядковыми (экстенсивными) параметрами и интенсивными резко увеличивается. Это, в частности, выражается в нарастании противоречий между имеющимися представлениями об объекте и проводимыми наблюдениями. Результатом являются сильные изменения, отличия апостериорной меры $\mu_{\tau_{i+1}}$ по сравнению с μ_{τ_i}. Если такие «рывки» в представлениях не убывают, что эта ситуация как раз и указывает на возможность «скачка», т. е. перехода на другой уровень (познания). Следовательно, нужно оценить производную по τ из T изменения меры μ_τ. Ее большие значения как раз и свидетельствуют о приближении качественного скачка. Более точно,

$$I_\tau(A) = \frac{d\mu_\tau(Q_\tau(A))}{d\tau} \gg 1,$$

для многих $A \in \mathcal{F}$.

Наряду с этим на приближение качественного скачка может указывать также резкое ухудшение гладкости функции $I_\tau(A) : T \to R_1$.

Рассмотренная конструкция не претендует на всеобщность. Как отмечалось выше, она может служить одним из подходов при разработке методологии вычислительного эксперимента при моделировании сложных технических систем.

В основе построения любой ММ лежит гипотетико-дедуктивный метод. Причем, как известно, он состоит из двух частей: 1) исходных неформализованных положений, часто выражаемых в виде неких принципов; 2) логико-математического аппарата. Эвристическую нагрузку несут принципы, их поиски и формулировка. В принципах осуществляется обобщение данных экспериментальных исследований, пожеланий конструктора, выдвигаемых на основе его опыта. При этом следует подчеркнуть, что принципы не являются простым эквивалентом исходных данных, поскольку они экстраполируют опытные данные на более широкий класс явлений. Интересно отметить, что создателем логико-дедуктивного метода (метода принципов) является Ньютон [28].

Переход от фактов к принципам не однозначен, он опирается на интуицию ученого, объединяет логические и нелогические средства. Указанные принципы, лежащие в основе создания ММ объекта, естественно назвать принципами-конструкторами [44]. В дальнейшем с помощью логико-математических средств формализуется информация, содержащаяся в выдвинутых принципах.

При построении системы ММ сложного объекта O, о чем будет говориться в § 3 этой главы, важную роль играют принципы причинности, дополнительности, инвариантности, берущие начало из физики. Остановимся здесь на принципе дополнительности. Как известно из физики, реально существуют объекты, обладающие двумя дополняющими и не исключающими друг друга свойствами: корпускулярными и волновыми. В соответствии с реальными свойствами этих объектов существуют и различные способы их описания. Философское содержание принципа дополнительности означает, что для более полного описания сложного объекта возможно построение множества $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ математических моделей, основанных на противоположных принципах-конструкторах.

При оценке данной ММ наряду с критериями, выдвинутыми на основе целей моделирования, естественно использовать общие принципы оценки: соответствия, логической непротиворечивости, полноты и простоты ММ, а также красоты и изящества. Обозначим совокупность целей J_1 и принципов оценки J_2. Очевидно, J_1 и J_2 носят элемент субъективности, что резко отличает рассматриваемую ситуацию (моделирование сложных РТС и вычислительный эксперимент) от естественно-научных теорий.

Учитывая сказанное о построении модели, можно утверждать, что ММ — это гомоморфный образ, причем не самого реально существующего или проектируемого объекта, а представлений (описаний) (П) о нем. Поэтому и возникает необходимость проведения в дальнейшем проверки ММ на адекватность реальному объекту (в том или ином смысле), т. е. фактически П (см. [89, гл. III]). Построение модели представляет собой сложный иерархический процесс. Это объясняется тем, что если первый вариант ММ разрабатывается на основе априорных знаний об объекте, то затем по результатам моделирования, полученным на основе вычислительного эксперимента, выделяют в изучаемом объекте свойства и отношения, которые могут использоваться для совершенствования ММ. Такое движение от объекта к модели и обратно присутствует почти на всех этапах моделирования.

Переход от реального объекта O к его П (в терминах какого-либо языка) изучается многими разделами современной прикладной математики и техники и является, как отмечалось, трудно формализуемым разделом теории моделирования. Здесь существенно используются опыт и знание данной конкретной области техники, понимание хотя бы исходных предпосылок математических теорий, в терминах которых описывается объект O. Когда получено П объекта O, т. е. задана связь $O \to П$, и с использованием тех либо иных принципов введена система математических моделей $\mathfrak{M}$ (связь $П \to \mathfrak{M}$), то возникает проблема изучения $(П, J_1, J_2, \mathfrak{M})$.

Таким образом, в теории моделирования, объектом которой является процесс моделирования — переход от реального объекта O (существующего или проектируемого) к совокупности $\mathfrak{M}$ ММ, можно выделить по крайней мере три раздела: изучение связей $O \to П$, $П \to \mathfrak{M}$ и четверки $(П, J_1, J_2, \mathfrak{M})$. При выработке общих предложений теории, в особенности касающихся разделов $O \to П$ и $П \to \mathfrak{M}$, приходится «синтезировать» опыт моделирования в различных конкретных областях [116].

§ 2. Вопросы построения математической модели сложного объекта

Рассмотрим связь $П \to \mathfrak{M}$ между представлением (описанием) реального объекта (РО) O и математической моделью (или системой ММ) $\mathfrak{M}$. В общем случае переход $П \to \mathfrak{M}$ основан на эвристических процедурах, и, по-видимому, трудно дать какое-либо полное формализованное описание этого процесса. Тем не менее во многих конкретных ситуациях при построении «хороших» ММ исследователи используют (вольно или нет) те либо иные правила моделирования, во многом интуитивные. Учитывая данную предметную область (сложные ИВК и их использование в экспериментах), естественно сузить множество допустимых представлений и принципов оценки J_1, J_2 для того, чтобы попытаться явно указать наиболее употребительные методы получения «хороших» ММ.

Модели из $\mathfrak{M}$ будем представлять состоящими из некоторых элементарных звеньев (элементов), комбинируя которые определенным образом можно получить различные ММ $M_i \in \mathfrak{M}$. Выскажем некоторые общие ограничения, связанные с этим существенным предположением [115]. Из элементарных звеньев составляются блоки ММ. Разделение модели на блоки, конечно, неоднозначно и зависит от многих факторов, включая априорные знания об O, принципы оценки J_1 и J_2 и т. д. При разбиении ММ на блоки следует учитывать возможность единообразного аналитического или программного описания блока, удобство его автономного моделирования. При этом желательно, чтобы обмен информацией между блоками был минимальным. Под этим понимается, что потоки вспомогательных данных внутри ММ должны быть в основном сосредоточены в блоках. В противном случае блочная структура ММ может быть чрезвычайно запутанной и не позволит изолированно изучать блоки и системы блоков, упрощать их и т. д.

Не все блоки в ММ M_i равноценны, потому важно выделить те из них, которые приводят к малой чувствительности критерия качества J_1 при вариациях входных и выходных данных модели (блока). Такие блоки, называемые J_1-несущественными, могут быть удалены из структуры M_l или заменены более простыми с целью глобального упрощения всей модели M_l. При этом нужно различать, как J_1-несущественный блок B_k расположен в структуре данной ММ. Если B_k осуществляет внешнее воздействие на изучаемую часть ММ (группу блоков), то в общем случае его можно заменить совокупностью не зависимых от исследуемой группы упрощенных блоков $\{C_j\}_{j \in J}$. Каждый C_j формирует одно из возможных воздействий (в пределах заданных ограничений). После этого при моделировании осуществляется перебор возможных вариантов включения различных воздействий. Здесь возможен статистический подход — включение C_j случайным образом. Статистические характеристики устанавливаются априорно или в результате частичного моделирования блока B_k. Для изучения критических режимов включают «наихудшие» варианты воздействий. Допустимо также непосредственное упрощение замкнутого контура «$B_k \leftrightarrow$ исследуемая группа блоков» без разрыва обратной связи. Если ММ предназначена для работы в интерактивном режиме и B_k моделирует взаимосвязь человек — объект O, то при упрощении B_k следует «заботиться» о тех элементах B_k, которые моделируют человека-оператора (в том смысле, чтобы не выйти за пределы человеческих возможностей по восприятию информации, скорости реакции и т. д.). (О формализованном описании возможностей человека-оператора см., например, [135].)

С чувствительностью (точнее, J_1-чувствительностью) тесно связаны точностные характеристики как всей ММ в целом, так и отдельных блоков в частности. При построении ММ неточности в описании П, неполнота П, а также сознательные огрубления исходных данных с целью получения «удобной» ММ приводят к погрешностям в задании ММ, которые называются наследственными или систематическими. Изучение и оценка соответствующих погрешностей влияет на проверку адекватности ММ — РО (см. [89, гл. III]). При этом следует добиваться баланса точностей, что означает: 1) соразмерность систематических погрешностей моделирования (отклонение ММ от представления П) и описания (неопределенность в задании П); 2) соответствие систематической погрешности моделирования и случайных погрешностей при оценке модели по J_1, J_2 и интерпретации результатов моделирования; 3) соответствие точностей отдельных блоков ММ.

Для оценки точности ММ (или отдельного блока) можно попытаться составить уравнение погрешности ММ (блока ММ). Пусть $q_1, \ldots, q_m$ — параметры, характеризующие объект O и используемые в ММ; $z_1, \ldots, z_k$ — внешние параметры, при которых работает ММ. Внешние параметры определяются численным методом, которым ведется исследование ММ. Тогда расчетная величина выхода модели $y_{\text{расч}} = F(q_1, \ldots, q_m; z_1, \ldots, z_k)$, где F задается при построении ММ. Если бы ММ идеально описывала РО, то абсолютно точное значение имело вид $y_0 = F_0(q_{10}, \ldots, q_{m0}; z_{10}, \ldots, z_{k0})$, где $q_{10}, \ldots, z_{k0}$ — номинальные значения параметров. В силу описания ММ $\leftrightarrow$ РО имеем погрешность

$$\Delta y_{\text{прибл}} \equiv y_{\text{расч.номин}} - y_0 = F(q_{10}, \ldots, q_{m0}; z_{10}, \ldots, z_{k0}) - F_0(q_{10}, \ldots, q_{m0}; z_{10}, \ldots, z_{k0}). \quad (2.1)$$

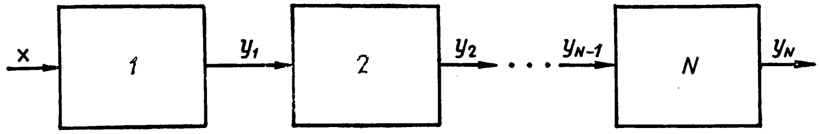


Рис. 2.1

Но значение параметров $q_1, \ldots, q_m, z_1, \ldots, z_k$ могут отличаться от номинальных. Поэтому введем функциональную погрешность

$$\Delta y_{\text{ф}} \equiv y_{\text{расч}} - y_{\text{расч.номин}}. \tag{2.2}$$

Ограничиваясь первыми членами в разложении в ряд Тейлора (2.2), получаем

$$\Delta y_{\text{ф}} \cong \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)_0 \Delta q_i, \tag{2.3}$$

где $\Delta q_i = q_i - q_{i0}$. Частная производная вычисляется для номинального значения параметра. Суммируя (2.3) с (2.1), получаем полное уравнение погрешности ММ (или блока ММ):

$$\Delta y = F(q_{10}, \ldots, q_{m0}; z_{10}, \ldots, z_{k0}) - F_0(q_{10}, \ldots, z_{k0}) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)_0 \Delta q_i. \tag{2.4}$$

Далее уравнение (2.4) приводится к безразмерной форме. На заключительном этапе составляется схема структурно-логических связей блоков в ММ.

Пусть блоки в ММ связаны, как показано на рис. 2.1. Общая погрешность имеет вид

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial y_i}\right)_0 \Delta y_i. \tag{2.5}$$

Величина $\left(\frac{\partial y}{\partial y_i}\right)_0$ называется коэффициентом влияния i-го блока на общую погрешность. Уравнение (2.5) приведем к безразмерной форме

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial y_i}\right)_0 \frac{y_i}{y} \frac{\Delta y_i}{y_i}, \tag{2.6}$$

где $\frac{\Delta y_i}{y_i}$ — относительная погрешность i-го блока ММ; $\frac{\Delta y}{y}$ — относительная погрешность ММ.

Уравнение (2.6) перепишем так:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \frac{\Delta y_i}{y_i},$$

где ψ_i — безразмерный коэффициент влияния i-го блока ММ. Последний находится в результате анализа структурной схемы ММ. Так, для схемы рис. 2.1 имеем

$$\psi_i = \frac{\partial s}{\partial s_i} \frac{s_i}{s},$$

где s_i — чувствительность i-го блока; s — чувствительность всей ММ.

Что же такое (в данном контексте) чувствительность? Чувствительность s — это реакция ММ на изменение значений входных величин x, т. е.

$$s \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

ММ может иметь разную чувствительность к вводимым в модель величинам. В частности, для ММ, описываемой рис. 2.1, имеем

$$s = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dy_1} \cdots \frac{dy_N}{dy_{N-1}},$$

т. е. $s = s_1 s_2 \ldots s_N$. В более общем случае, который упоминался выше, под чувствительностью ММ M_i (относительно критерия оценки J_1) понимают величину

$$s(J_1) = \lim_{z_1 \to z_2} \frac{\| J_1 (M_i |_{z=z_1, y=y_1}) - J_1 (M_i |_{z=z_2; y=y_2}) \|}{\rho (z_1, z_2)},$$

где z_1, z_2 — векторы входных воздействий; y_1, y_2 — выходные векторы модели M_i; ρ — метрика в пространстве входов, $\| \cdot \|$ — норма в частично-упорядоченном линейном нормированном пространстве значений критерия J_1 (о точности подробнее см. в [18]).

Среди общих требований, предъявляемых к ММ, укажем еще на устойчивость ММ. Значение этого свойства для классической математики и теории управления очевидно и описано в ряде работ (см., например, [37, 47]). Приведем здесь одно из возможных достаточно общих понятий устойчивости [152].

Пусть X — некоторое множество, $G(X)$ — множество всех непустых подмножеств множества X. Рассмотрим множество F всех отображений $f: X \to G(X)$.

Определение 2.1. Назовем множество $\mathfrak{E}$ (соответственно $\mathfrak{H}$) любых непустых подмножеств из X (из F) квазифильтром на X (на F).

Если к тому же пересечение двух произвольных элементов множества $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{H}$) содержит некоторый элемент из $\mathfrak{E}$ (из $\mathfrak{H}$), то множество $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{H}$) называется базисом фильтра на X (на F) [26].

Если $\mathfrak{H} = \{H\}$ — базис фильтра на F, а $\mathfrak{E} = \{E\}$ — базис фильтра на X, то определим базис фильтра $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$ на X следующим образом:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{E}) = \{H(E) : H(E) = \bigcup_{h \in H, x \in E} h(x)\}. \tag{2.7}$$

Определение 2.2. Если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X, то $\mathfrak{E}_1$ слабее, чем $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$, если для произвольного $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ найдется $E_2 \in \mathfrak{E}_2$ такое, что $E_2 \subseteq E_1$.

Если одновременно $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_1$, то базисы фильтров $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ называются эквивалентными.

Как видно из определения, отношение ($<$) является транзитивным, т. е. если $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_3$, то и $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_3$.

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{H}$ — базис фильтра на F, а $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X. Пара $(X, \mathfrak{H})$ называется $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивой, если $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{H}(\mathfrak{E}_2)$.

Пример 2.1. Пусть на множестве M евклидова пространства R^n задано дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$. Предположим, что выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения уравнения и $f(0) = 0$.

Как известно, решение $x = 0$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{x}(t)$ выполняется $\|\tilde{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, лишь только

$$\|\tilde{x}(0)\| < \delta(\varepsilon) \text{ и } \|\dot{\tilde{x}}(t) - f(\tilde{x}(t))\| < \eta(\varepsilon).$$

В данном случае $X = M$, и если базис фильтра $\mathfrak{H} = \{H_\eta\}$ на F состоит из отображений вида

$$H_\eta = \{\tilde{x}(0) \to L_{\tilde{x}(0)} : \|\dot{\tilde{x}}(t) - f(\tilde{x}(t))\| < \eta\}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

где $L_{\tilde{x}(0)}$ — положительная полутраектория движения $\tilde{x}(t)$, проходящего при $t = 0$ через $\tilde{x}(0)$, а $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ являются базисами фильтров окрестностей точки $x = 0$ в $M \subset R^n$, то определение 2.3 приводит к определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Пример 2.2. Инвариантное множество $Y \subseteq X$ непрерывной группы преобразований (X, T, h) называется устойчивым относительно множества $Z \subseteq X$, если для произвольной окрестности V множества Y существует окрестность W множества Y такая, что образцы точек из $W \cap Z$ при всех преобразованиях группы h лежат в V.

Здесь в качестве базиса фильтра $\mathfrak{E}_1$ можно принять базис фильтров окрестностей множества Y, в качестве $\mathfrak{E}_2$ — базис фильтра, индуцированный в Z базисом $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{H} = \{h\}$.

Пример 2.3. Пусть процесс описывается функцией $x(p, t)$, $p \in M \subset R^n$, $t \in [0, +\infty)$, удовлетворяющей соотношению $\frac{\partial x}{\partial t} = F[x]$ и заданным начальным и граничным условиям. Здесь F — некоторый оператор, причем $F[0] = 0$. Рассмотрим вещественный функционал $\rho[x(p, t)]$, определенный для каждого фиксированного момента времени $t \geqslant 0$ на множестве функций $X = \{x(p)\}$, удовлетворяющий условиям:

а) $\rho[x(p, t)] \geqslant 0$;

б) $\rho[0] = 0$;

в) для любого $x(p, t)$ вещественная функция $\rho[x(p, t)]$ от аргумента t непрерывна по t.

Процесс $x(p, t)$ называется равномерно устойчивым по мерам ρ_1 и ρ_2, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\rho_2[x(p, 0)] < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_1[x(p, t)] < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$.

Приняв за базисы фильтров

$$\mathfrak{H}_1 = \{E_{1,\varepsilon}\}, \quad \text{где} \quad E_{1,\varepsilon} = \{x(p) : \rho_1[x(p)] < \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon < \infty,$$

$$\mathfrak{H}_2 = \{E_{2,\delta}\}, \quad \text{где} \quad E_{2,\delta} = \{x(p) : \rho_2[x(p)] < \delta\}, \quad 0 < \delta < \infty,$$

а в качестве $\mathfrak{H} = \{H\}$ отображение

$$H = \{x(p, 0) \to L_{x(p,0)} : \frac{\partial x(p, t)}{\partial t} = F[x(p, t)]\},$$

удовлетворяющее краевым условиям, где $L_{x(p,0)}$ — множество функций $x(p)$ вида $x(p, t)$ при каждом фиксированном $0 < t < \infty$, получим определение устойчивости по двум мерам.

Отметим, что в примерах 2.1 и 2.3 рассматривалась устойчивость, равномерная по времени. Если исследовать неравномерную устойчивость, то для применения определения 2.3 следует перейти к расширенному множеству $M_1 = M \times [0, +\infty)$ и рассматривать базисы фильтров $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ в M_1.

Можно привести еще ряд определений устойчивости, которые при надлежащем выборе множества X и базисов фильтров $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{H}$ сводятся к определению 2.3.

Пусть Ω — некоторое частично упорядоченное множество с отношением порядка $(\leqslant)$.

Определение 2.4. Пусть $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X, $\mathfrak{H}$ — базис фильтра на F. Отображение $v : X \to (\Omega, \leqslant)$ называется абстрактной функцией Ляпунова для четверки $(X, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, если существуют подмножества I и J множества $(\Omega, \leqslant)$ такие, что множества

$$S_I = \{S_v^\alpha : \alpha \in I\}, \quad S_J = \{S_v^\alpha : \alpha \in J\},$$

где $S_v^\alpha = \{x \in X : v(x) \leqslant \alpha\}$ — базисы фильтров и для них выполнены условия

$$\mathfrak{E}_1 < S_I, \quad S_1 < \mathfrak{E}_2; \tag{2.8}$$

$$S_I < \mathfrak{H}(S_J). \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. *Для того чтобы пара $(X, \mathfrak{H})$ была $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для $(X, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ существовала абстрактная функция Ляпунова.*

Доказательство. *Необходимость.* В качестве $(\Omega, \leqslant)$ рассмотрим множество $G(X)$, упорядоченное по включению. Определим отображение $v : X \to G(X)$ следующим образом:

$$v(x) = \bigcap \{\alpha : x \in \alpha, \alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2\}. \tag{2.10}$$

Если нет таких $\alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2$, что $x \in \alpha$, то положим $v(x) = \sup G(X) = X$. Рассмотрим систему подмножеств

$$S_v^\alpha = \{x \in X : v(x) \subseteq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2.$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2$ в силу определения $v(x)$ и S_v^α справедливо соотношение

$$S_v^\alpha = \alpha. \tag{2.11}$$

Если положим $I = \mathfrak{E}_1$, $J = \mathfrak{E}_2$, то получим, что S_I и S_J — базисы фильтров, для которых выполнено (2.8). Используя $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивость пары $(X, \mathfrak{H})$, из (2.11) получаем соотношение (2.9).

Достаточность следует из транзитивности $(<)$ и соотношений (2.8), (2.9).

Как видно из доказательства, при выводе необходимых условий теоремы 2.1 в качестве $(\Omega, \leqslant)$ использовалось $G(X)$, упорядоченное по включению. Учитывая, что в приложениях множество $(\Omega, \leqslant)$ выбирается заранее, в частности $\Omega = [0, +\infty)$, естественно возникает вопрос: при каких условиях из $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивости пары $(X, \mathfrak{H})$ следует существование абстрактной функции Ляпунова $V(x)$ для наперед заданного множества $(\Omega, \leqslant)$?

Определение 2.5. Скажем, что квазифильтр $\tilde{\mathfrak{E}} = \{\tilde{E}_\alpha : \alpha \in N \subseteq \Omega\}$ имеет тип Ω, если:

1) $\tilde{E}_{\alpha_1} \subseteq \tilde{E}_{\alpha_2}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$;

2) для всякого непустого $\bigcap \{\tilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$ найдется $\alpha_0 \in N$, что $\tilde{E}_{\alpha_0} = \bigcap \{\tilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$.

Всякое частично упорядоченное множество $(\Omega, \leqslant)$ может быть погружено в полную решетку с сохранением граней, т. е. всякое непустое подмножество множества $(\Omega, \leqslant)$ имеет наибольший и наименьший элементы. Поэтому в дальнейшем для удобства будем считать, что $(\Omega, \leqslant)$ — фиксированная полная решетка.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ *— базисы фильтров на* X, $\mathfrak{H}$ *— базис фильтра на* F *и* $(\Omega, \leqslant)$ *— заданное частично упорядоченное множество. Для существования абстрактной функции Ляпунова* $V : X \to (\Omega, \leqslant)$ *необходимо и достаточно, чтобы на* X *существовал квазифильтр* $\tilde{\mathfrak{E}}$ *типа* Ω *и два базиса фильтра* $\tilde{\mathfrak{E}}_1 = \{\tilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$ *и* $\tilde{\mathfrak{E}}_2 = \{\tilde{E}_\alpha : \alpha \in N_2 \subseteq N\}$, *причем* $\tilde{\mathfrak{E}}_1 \subseteq \tilde{\mathfrak{E}}$, $\tilde{\mathfrak{E}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{E}}$ *такие, что:*

а) $\mathfrak{E}_1 < \tilde{\mathfrak{E}}_1$, $\tilde{\mathfrak{E}}_2 < \mathfrak{E}_2$;

б) пара $(X, \mathfrak{H})$ *являлась* $(\tilde{\mathfrak{E}}_1, \tilde{\mathfrak{E}}_2)$*-устойчивой.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим базисы фильтров S_I и S_J и образуем множество, состоящее из всевозможных непустых пересечений элементов S_v^α из S_I и S_J. Каждому $\tilde{E} = \bigcap \{S_v^\alpha : \alpha \in N \subseteq I \cup J\}$ поставим в соответствие индекс $\alpha_0 = \inf \{\alpha \in \tilde{N}\}$, где $\tilde{N}$ — множество индексов всех $\tilde{S}_v^\alpha$ таких, что $\tilde{E} \subseteq S_v^\alpha$. Тогда семейство $\tilde{\mathfrak{E}} = \{\tilde{E}_{\alpha_0}\}$ — квазифильтр типа Ω. Если положить $\tilde{\mathfrak{E}}_1 = S_I$, $\tilde{\mathfrak{E}}_2 = S_J$, то условия «а» и «б» теоремы 2.2 будут следовать из соотношений (2.8), (2.9).

Достаточность. Как следует из теоремы 2.1, для $(X, \mathfrak{H}, \tilde{\mathfrak{E}}_1, \tilde{\mathfrak{E}}_2)$ существует функция Ляпунова $v(x) = \bigcap \{\tilde{E}_\alpha : x \in \tilde{E}_\alpha, \alpha \in N_1 \cup N_2 \subseteq \Omega\}$. Поскольку $\tilde{\mathfrak{E}}$ имеет тип Ω, то $v : x \to \tilde{E}_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in \Omega$. Определим отображение $V : X \to (\Omega, \leqslant)$ следующим образом:

$$V(x) = \gamma(v(x)) = \gamma(\tilde{E}_{\alpha_0}) \equiv \alpha_0.$$

Отсюда $S_v^\alpha = \tilde{E}_\alpha$, $\alpha \in N_1 \cup N_2$. Если положить $I = N_1$, $J = N_2$, то из условий «а» и «б» получим соотношения (2.7) и (2.8).

Мы ограничились базисами фильтров, поскольку значительная часть определений устойчивости укладывается в определение 2.3, использующее понятие только базисов фильтров. Вместе с тем существуют определения устойчивости, которые не укладываются в это определение.

Если в приведенных теоремах понятия базисов фильтров заменить квазифильтрами, то, как нетрудно видеть, можно получить результаты, обобщающие теоремы 2.1, 2.2.

Характерной чертой проблемы математического моделирования рассматриваемого класса сложных систем является многообразие различных вариантов моделей. Это приводит к понятиям сложности и информативности ММ. Критерий сложности ММ — один из основных при анализе многообразия ММ. Его трактовке и изучению посвящены многочисленные работы (см., например, [104, 139]). Здесь отметим только, что если сложность ММ определена как некий скалярный критерий $j(M)$ на $\mathfrak{M}$, то ставится задача оптимизации

$$j(M) \to \min$$

при условии, чтобы $M \in \mathfrak{M}(\varepsilon_0)$, где $\mathfrak{M}(\varepsilon_0)$ — подмножество ММ с общей погрешностью $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Другими словами, необходимо соблюдать компромисс между сложностью и точностью [116].

Остановимся на информационных характеристиках ММ. Как известно, имеются различные подходы к определению меры информации ([59, 105 и др.]). Наиболее распространенным является подход Шеннона, основанный на задании априорного распределения вероятностей на множестве возможных сигналов. В дискретном случае пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество состояний входного сигнала ММ S, а $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество выходных состояний, $\{P(x_i)\}_{i=1}^{n}$ — априорная функция распределения вероятностей, т. е. $P(x_i) > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$. Какое количество информации $I(Y, X)$ содержится в сведениях Y относительно множества X? (Заметим, что X может представлять и параметры изучаемого объекта O.) Эту информацию (по Шеннону) определяют как уменьшение энтропии множества X в результате получения сведений Y. Пусть y_j $(j = \overline{1, m})$ задан. Обозначим $I(X; y_j)$ частную информацию о X, содержащуюся в y_j; $P(x_i, y_j)$ — условная вероятность наличия информации о свойстве x_i в результате знания y_j.

Тогда исходная энтропия (неопределенность) состояния $x_i \in X$ определяется выражением

$$H(x_i) = -\log_2 P(x_i),$$

где логарифм выбран с целью получения удобных свойств энтропии. Уменьшение энтропии состояния x_i в результате получения y_j находим из соотношения

$$I(x_i;\ y_j) = H(x_i) - H(x_i;\ y_j) = \log_2 \frac{P(x_i;\ y_j)}{P(x_i)} \geqslant 0.$$

Здесь $H(x_i;\ y_j) = -\log_2 P(x_i;\ y_j)$ — неопределенность состояния x_i, оставшаяся после получения сведений y_j, а $I(x_i;\ y_j)$ — частная информация об x_i, полученная из y_j. Отсюда, усредняя $I(x_i; y_j)$ по условной вероятности $P(x_i; y_j)$, получаем

$$I(X;\ y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i;\ y_j) \log_2 \frac{P(x_i;\ y_j)}{P(x_i)}. \tag{2.12}$$

Полная информация $I(X; Y)$ об X в результате знания Y находится из (2.12):

$$I(X; Y) = \sum_{j=1}^{m} r_j I(X;\ y_j),$$

где r_j — некоторые нормирующие множители.

В более общем случае пусть $(Y, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство (выходных сигналов) с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, X — множество входных сигналов, $Z \subset X$ — фиксированное подмножество (возможных сигналов) с некоторой σ-алгеброй $\mathfrak{N}$ подмножеств, $P_x(\cdot)$, $x \in X$, — семейство вероятностных мер на $(Y, \mathfrak{B})$, которое задается ММ S. Задано априорное распределение вероятностей μ_0 на Z, т. е. μ_0 — мера на σ-алгебре $\mathfrak{N}$ подмножеств Z, $\mu_0(Z) = 1$, причем $P_x(\cdot)$ по $x \in Z\mathfrak{N}$-измерима.

Тогда количество информации $I(Z; Y)$, содержащейся в Y относительно Z, вычисляется по формуле, аналогичной (2.12):

$$I(Z;\ Y) = \sup \sum_{i,k} P(E_i;\ \Delta_k) \log_2 \frac{P(E_i;\ \Delta_k)}{P(E_i;\ Z)\,\mu_0(\Delta_k)}, \tag{2.13}$$

где

$$P(E;\ \Delta) = \int_{\Delta} P_x(E)\, d\mu_0(x),$$

$$\Delta \in \mathfrak{N}, \quad E \in \mathfrak{B},$$

и верхняя грань берется по всем конечным измеримым разбиениям $\{E_i\}_{i\in I}$ и $\{\Delta_k\}_{k\in K}$ пространств Y и Z. Можно ввести понятие информационной емкости $M(Z)$ множества Z относительно ММ S, определяемой переходной вероятностью $P_x(E)$:

$$M(Z) = \sup_{I} \sum_{i\in I} \sup_{x\in Z} P_x(E_i), \tag{2.14}$$

где $\{E_i\}_{i\in I}$ — произвольное конечное разбиение пространства выходов Y [60]. Функция множеств $M(Z)$ — неубывающая и полуаддитивная. Выполняется информационное неравенство

$$2^{I(Z;Y)} \leqslant M(Z), \tag{2.15}$$

характеризующее пропускную способность ММ S со входным алфавитом из множества Z.

Остановимся на вопросе, как выбрать информацию $Z \subset X$, вводимую в ММ S, чтобы информация, получаемая из ММ S (т. е. информативность S) была максимальной.

Рассмотрим дискретный случай. Пусть $Z = \{x_i\}_{i=1}^{l} \subset X$. Тогда информационная характеристика с учетом (2.12) записывается в виде

$$I(Z;\ Y) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} P(x_i)\, P(y_j \mid x_i) \log_2 \frac{P(x_i \mid y_j)}{P(x_i)}. \tag{2.16}$$

Возникает задача: необходимо определить распределение вероятностей P на Z, обращающее функцию $I(Z; Y)$ в максимум [134].

Комплексность сложных систем предполагает изучение их не только по отдельным характеристикам, но и по совокупности последних. Теоретико-информационный подход позволяет выполнять такое исследование. Выдвигаются три требования к модели проектируемого (или изучаемого) объекта: 1) согласование информационных характеристик всех блоков и трактов модели; 2) оптимизация по информационному критерию помехоустойчивости; 3) оптимизация на основе потенциально-тактической помехоустойчивости [59].

В первом случае операции кодирования и декодирования должны быть взаимно-однозначны; а количество информации, выработанное в каком-либо блоке, не меньше, чем количество информации в передаваемом сообщении; пропускная способность канала должна быть не меньше скорости поступления информации от передающего блока. Второй и третий случаи основываются на следующих соображениях.

Пусть параметры, характеризующие состояние системы, принадлежат некоторой допустимой области Ω_0 в конечномерном фазовом пространстве. Предположим, что в результате деятельности системы пределы изменения параметров должны быть ограничены областью Ω_k. Например, в радиолокации задачу определения местонахождения летательного аппарата (ЛА) можно представить как выбор области в трехмерном пространстве, где находится ЛА, из априорно известной значительно большей области этого же пространства. Тогда минимальное количество информации I_{min}, наличие которой обеспечит решение данной задачи, равно уменьшению энтропии исходной неопределенности

$$I_{min} = \log_2 \frac{|\Omega_0|}{|\Omega_k|}, \tag{2.17}$$

где $|\cdot|$ — объем соответствующей области. (Формула (2.17) верна при равновероятном распределении вероятностей, что предполагается для простоты.) Если для решения задачи количество информации, равное I_{min}, должно быть переработано за время $t_k > 0$, то минимальная скорость получения и переработки информации

$$V_{min} = \frac{I_{min}}{t_k} = \frac{1}{t_k} \log_2 \frac{|\Omega_0|}{|\Omega_k|}. \tag{2.18}$$

При этом работоспособность системы не нарушится, если скорость V_{min} переработки информации удовлетворяет неравенству

$$V_{min} < C. \tag{2.19}$$

Здесь C — информационная пропускная способность системы находится из формулы Шеннона

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_с}{P_{ш.о} + P_{ш.в}}\right), \tag{2.20}$$

где W — полоса частот; $P_с$ — мощность сигнала; $P_{ш.о}$ и $P_{ш.в}$ — мощности внутренних и внешних шумов системы. На основании (2.19) вводится понятие избыточности

$$\delta = \frac{C - V_{\min}}{V_{\min}} > 0. \qquad (2.21)$$

Из (2.18) и (2.21) находим

$$\delta = \frac{Ct_k}{\log_2 |\Omega_0|/|\Omega_k|} - 1 = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} - 1, \qquad (2.22)$$

где $I_{\max} = Ct_k$ — максимально возможное количество информации, которое система может переработать за время t_k. Величина $|\Omega_0|$ обычно связывается со сложностью задачи, $|\Omega_k|$ — с точностью решения, предлагаемого системой, время t_k — с быстродействием. На основании этих понятий вводится эффективность системы (модели): чем она быстрее и точнее, тем более эффективна. Отсюда и из (2.22) следует, что избыточность — это информационное представление эффективности системы (модели).

Введем понятие помехоустойчивости системы. Для этого заметим, что на основании (2.20) информационная пропускная способность C уменьшается при возрастании $P_{\text{ш.в}}$. Обозначим $C_{\max}$ пропускную способность при $P_{\text{ш.в}} = 0$, $P_{\text{ш.в}}^{\max}$ — максимальное значение внешнего шума, при котором нарушается условие (2.19), т. е. когда $\delta = 0$. Тогда из (2.20) и (2.21) следует

$$P_{\text{ш.в}}^{\max} = \frac{P_{\text{с}}}{2^{C_{\max}/W(1+\delta_{\max})} - 1} - P_{\text{ш.о}}, \qquad (2.23)$$

где $\delta_{\max} = \dfrac{C_{\max} - V_{\min}}{V_{\min}}$. Формула (2.23) и определяет информационное представление помехоустойчивости системы — максимальный порог внешних помех, перейдя который система становится неработоспособной.

Из (2.20) следует, что для увеличения количества перерабатываемой информации нужно увеличивать пропускную способность системы. Но из (2.20) получаем, что этого можно добиться в основном за счет расширения полосы частот W, поскольку мощность $P_{\text{с}}$ обычно ограничена, а рост времени t_k ухудшит быстродействие, т. е. в итоге снизится эффективность системы. Перепишем (2.20) в виде

$$C = W \log_2 (1 + P_{\text{с}}/\beta_{\text{ш}} W), \qquad (2.24)$$

где $\beta_{\text{ш}}$ — спектральная плотность шумов. Тогда

$$C_\infty = \lim_{W \to \infty} C = \frac{P_{\text{с}}}{\beta_{\text{ш}} \ln 2}.$$

Поэтому система физически реализуема, если минимальная необходимая информационная пропускная способность $C_{\min} < C_\infty$. Минимальная полоса частот $W_{\min}$ находится из уравнения

$$C_{\min} = W_{\min} \log_2 (1 + P_{\text{с}}/\beta_{\text{ш}_{\min}} W_{\min}).$$

При $W > W_{\min}$ система имеет избыточную пропускную способность $C_{\text{и}}^{!}$, обеспечивающую ее помехоустойчивость: возможна обработка информации со скоростью $V_{\min}$ при некотором увеличении спектральной плотности шумов $\beta_{ш} > \beta_{ш_{\min}}$. Отношение $\gamma = \frac{\beta_{ш}}{\beta_{ш_{\min}}}$ характеризует помехоустойчивость системы. Величина $\beta_{ш}$ находится из уравнения

$$C_{\min} = W \log_2 (1 + P_c/\beta_{ш} W) \tag{2.25}$$

при заданной полосе частот W. Из (2.25)

$$\beta_{ш_\infty} = \lim_{W \to \infty} \frac{P_c}{C_{\min} \ln 2}.$$

Отсюда

$$\gamma_\infty = \frac{\beta_{ш_\infty}}{\beta_{ш_{\min}}} = \frac{C_\infty}{C_{\min}}. \tag{2.26}$$

Выражение (2.26) рассматривается как информационный критерий помехоустойчивости системы.

Таким образом, (2.22), (2.23) и (2.26), являясь информационными представлениями эффективности и помехоустойчивости, позволяют рассматривать задачу оптимизации системы (модели) по этим критериям как проблему векторной оптимизации. Заметим, что из (2.22) и (2.23) следует зависимость эффективности и помехоустойчивости от избыточности δ.

Если ввести спектральную плотность внешнего шума $\beta_{ш.в} = P_{ш.в}/W$, то из (2.23) для максимальной спектральной плотности внешнего шума имеем

$$\beta_{ш.в}^{\max} \cong \frac{P_c}{W\left(2^{C_{\max}/W(1+\delta_{\max})} - 1\right)},$$

или

$$\beta_{ш.в}^{\max} \cong \frac{P_c}{W\left[\left(\frac{|\Omega_0|}{|\Omega_k|}\right)^{\frac{1}{Wt_k}} - 1\right]}. \tag{2.27}$$

Поскольку $\beta_{ш.в}^{\max}$ зависит от быстродействия t_k и точности, определяемой $|\Omega_k|$, то $\beta_{ш.в}^{\max}$ есть функция эффективности. Поэтому $\beta_{ш.в}^{\max}$ называется показателем потенциально-тактической помехоустойчивости системы (модели). Приведенные соотношения показывают, в каких границах можно изменять характеристики эффективности и помехоустойчивости, чтобы сохранилась работоспособность системы (модели). В силу взаимно противоречивого характера этих показателей их согласованный выбор наилучшим (или, по крайней мере, «рациональным») способом можно сделать в рамках теории многокритериальной (векторной) оптимизации.

В основе предыдущих рассуждений по информационным характеристикам ММ лежал шенноновский подход. В рамках этого подхода количество информации можно измерять единой числовой характеристикой, несмотря на разнородный характер информации в различных конкретных ситуациях. Поэтому возникает вопрос: как ввести меру ценности, которую может принести фиксированное количество информации? Очевидно, что ценность информации не находится в прямой зависимости от количества информации (согласно Шеннону). Во всех известных подходах ценность информации связывается с целью, для достижения которой эта информация получается. Поэтому, грубо говоря, ценность информации тем выше, чем полнее она отражает задачу, решаемую с помощью данной ММ. Все разнообразные подходы группируются в три направления: учитывающее субъективный фактор — ценность информации для данного исследователя; связанное с минимизацией потерь (по аналогии с теорией статистических решений); с максимизацией выигрыша (см. подробней в [59, 111, 112, 161]).

Как известно, один из путей создания адекватных ММ достаточно сложных объектов, какими являются ИВК, состоит в получении математических описаний с большим количеством соотношений и переменных. Однако существуют объективные трудности в использовании таких многоразмерных моделей: из-за громоздкости такой ММ ее аналитическое исследование становится неприемлемым; затруднена проверка на адекватность известными методами (см., например [89, гл. III]); усложняется задача идентификации параметров ММ; вопросы информационного обеспечения становятся трудноразрешимыми: любые «переделки» такой ММ требуют обычно громадных затрат труда и времени разработчиков.

Поэтому в этой ситуации естественным представляется переход от одномодельного описания к системе ММ, с более полным учетом структурных особенностей изучаемого объекта. Здесь частные ММ (подмодели) описывают отдельные элементы объекта. Причем все они связаны между собой общими переменными, которые, являясь выходами одной подмодели (или же нескольких), служат входами для других подмоделей системы. Важный вопрос, касающийся функционирования всей системы ММ как единого целого,— это проблема согласования системы ММ.

Согласование системы ММ — формальное описание связей между переменными, входящими в разные подмодели, а затем определение общего согласованного решения, если оно существует [42]. Пусть имеется n различных подмоделей $\{M_i\}_{i=1}^n$. Каждая M_i может быть представлена, например, в виде системы дифференциальных, интегральных, алгебраических уравнений или неравенств и т. п. Однако при переходе к вычислительному эксперименту, как отмечалось в § 1, обычно такие непрерывные ММ заменяют конечно-разностными или дискретными аналогами. Поэтому далее под $\{M_i\}_{i=1}^n$ будем понимать именно такие подмодели.

Все переменные, входящие в M_i, разобьем на две группы: x_i — вектор, составленный из тех переменных, которые вычисляются в M_i, и y_i — вектор из переменных, задаваемых вне M_i. Например, если подмодель M_i описывает задачу оптимизации, то фазовые и управляющие переменные составляют вектор x_i. Если же управляющие переменные заданы извне M_i как функции дискретного временного аргумента, то их естественно причислить к вектору y_i. Пусть x_i, y_i — конечномерные векторы, а все M_i — операторы, отображающие входные переменные в выходные.

Эти операторы можно классифицировать [42].

Изохронный оператор имеет вид

$$x_i(\tau) = M_i y_i(\tau), \tag{2.28}$$

где $\tau = 0, 1, \ldots, t < +\infty$ — дискретные моменты времени;

динамический оператор —

$$x_i(\tau + 1) = M_i[x_i(\tau), y_i(\tau)], \tag{2.29}$$

где $\tau = 0, 1, \ldots, t - 1$;

изохронно-динамический оператор —

$$x_i(\tau + 1) = M_i[x_i(\tau), x_i(\tau - 1), \ldots, x_i(\tau - \tau_{ix}), \tag{2.30}$$
$$y_i(\tau + \tau_{iy}^{+}), \ldots, y_i(\tau - 1), \ldots, y_i(\tau - \tau_{iy}^{-})],$$

где τ_{ix}, τ_{iy}^{+}, τ_{iy}^{-} — заданные неотрицательные целые числа. Пусть $D_i \subset R_{k_i}$ — область определения оператора M_i. Заметим, что в общем случае $D_i = D_i(\tau)$ (это возможно, когда структура оператора M_i зависит от конкретных значений переменных $y_i(\tau)$).

Учитывая, что подмодели заданы в виде операторных уравнений вида (2.28) — (2.30), согласование системы ММ $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ естественно понимать как согласование и объединение соответствующих операторных уравнений.

Пусть все n подмоделей описываются изохронными операторами вида (2.28), $y_i \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем выполняются условия:

1) координаты расширенного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ независимы в том смысле, что между ними отсутствуют связи, не являющиеся следствием системы

$$x_i(\tau) = M_i y_i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{2.31}$$

2) между координатами расширенных векторов x и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ существуют связи, отличные от связей, определяемых системой (2.31).

Тогда система подмоделей $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i=1}^{n}$ согласована с помощью изохронного оператора, если:

1) существует изохронный оператор согласования M_0, связывающий $x(\tau)$ и $y(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = M_0 x(\tau), \quad \tau = 0, 1, \ldots, t; \tag{2.32}$$

2) существует решение $(y_0(\tau), x_0(\tau))$ объединенной системы (2.31), (2.32), которое называется согласованным.

Оператор M_0 определяется на основе связей из исходного условия 2. Переписывая (2.31) в операторном виде

$$x(\tau) = My(\tau) \tag{2.33}$$

и предполагая совместность (2.31), (2.32), получаем $x(\tau) = MM_0x(\tau)$ или $y(\tau) = M_0My(\tau)$. Значит, проблема существования согласованного решения $(x_0(\tau), y_0(\tau))$ сводится к проблеме существования неподвижной точки у операторов MM_0 и M_0M.

Пример 2.4. Пусть задана замкнутая последовательность блоков $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i=1}^n$, где $x_i = M_i y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем вектор x_i является входом для M_{i+1}, а x_n — входом M_1. Тогда оператор согласования M_0 задается системой уравнений $y_1 = x_n$, $y_{i+1} = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Если в приведенной выше системе условий оператор согласования является динамическим, т. е.

$$y(\tau) = M_0 x(\tau - 1), \quad \tau = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.34}$$

то после подстановки (2.34) в (2.33) получаем

$$x(\tau) = M M_0 x(\tau - 1). \tag{2.35}$$

Задавая начальное значение вектора $x(0) = x_0$, из (2.35) находим согласованное решение системы (2.31), (2.34).

Пусть теперь все n подмоделей M_i описываются динамическими операторами вида (2.29), $\tau = 0, 1, \ldots, t$, причем:

1) координаты расширенного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ независимы в том смысле, что отсутствуют между ними изохронные и динамические связи, не следующие из системы

$$x_i(\tau + 1) = M_i[x_i(\tau);\ y_i(\tau)], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.36}$$

2) между векторами x и $y = y(y_1, \ldots, y_n)$ существуют связи, отличные от связей, определяемых системой (2.36);

3) известны начальные условия $x_i(0) = \overset{0}{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

В этом случае система подмоделей $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i=1}^n$ согласована при $\tau = 0, 1, \ldots, t$, если:

1) существует оператор согласования M_0 такой, что

$$y(\tau) = M_0 x(\tau), \quad \tau = 0, 1, \ldots, t; \tag{2.37}$$

2) существует вектор-функция $(y_0(\tau), x_0(\tau))$, удовлетворяющая системе (2.36), (2.37). Запишем (2.36) в виде

$$x(\tau + 1) = M[(x(\tau), y(\tau)]. \tag{2.38}$$

Из (2.38) в случае совместности (2.36), (2.37) находим

$$x(\tau + 1) = M[x(\tau), M_0 x(\tau)]. \tag{2.39}$$

Если оператор M_0 не выводит вектор $y(\tau)$ за пределы допустимой области значений, то искомое согласованное решение находится из (2.39) последовательными вычислениями.

Рассмотрим случай, когда между координатами расширенного вектора x имеются дополнительные связи, не учитывающиеся системой уравнений (2.31) или (2.36). Тогда имеет место следующая система уравнений

$$x = My, \quad y = M_0 x, \quad F(x) = 0, \tag{2.40}$$

где F — оператор, определяемый дополнительными связями. Часто система (2.40) может быть заменена системой

$$x = My, \quad y = M_0 x_\varepsilon, \quad \|F(x_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon, \tag{2.41}$$

где $\varepsilon > 0$ — априорно выбираемое рассогласование системы.

В случае поиска ММ в функционально-параметрическом виде, что на практике встречается довольно часто, задача выбора адекватной ММ сводится к нелинейной задаче математического программирования. Пусть вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ характеризует те параметры моделируемого объекта O, которые могут войти в ММ (или какой-либо блок ММ). В результате анализа ММ получим ряд величин $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$. Причем допустимые значения $f_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $i = \overline{1, m}$, $x_j \in [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, $j = \overline{1, n}$. Предположим, что погрешность φ_i i-й величины f_i ограничена сверху числом γ_i. Пусть известен также критерий адекватности $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$ — математическая модель — реальный объект (ММ — РО) (некоторые виды функции Ψ описаны в [89, гл. III]). Тогда задача выбора параметров, служащих для построения ММ, представляет собой экстремальную задачу вида

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \tag{2.42}$$

при условиях

$$\begin{gathered} \alpha_i \leqslant f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \beta_i, \\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \underline{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{x}_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Для решения (2.42) — (2.43) нужно воспользоваться методами математического программирования.

Если РО может находиться в нескольких состояниях, то пусть известны вероятности P_k того, что РО находится в k-м состоянии, а также $\Psi_k(x)$ — критерии адекватности ММ — РО, $k = 1, 2, \ldots, q$. Аналогично введем величины $f_{ik}(x)$ и $\varphi_{ik}(x)$. Задача выбора параметров в условиях неизвестного состояния РО сводится в этом случае к задаче стохастического программирования вида

$$M\Psi \equiv \sum_{k=1}^{q} P_k \Psi_k(x_1, \ldots, x_n) \to \max, \tag{2.44}$$

при условиях

$$\begin{gathered} \alpha_i \leqslant Mf_i = \sum_{k=1}^{q} P_k f_{ik}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \beta_i, \\ M\varphi_i = \sum_{k=1}^{q} P_k \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \gamma_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \underline{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{x}_j. \end{gathered} \tag{2.45}$$

Для проверки степени адекватности ММ — РО в случае, когда известны предсказания, сделанные с помощью ММ, в виде набора скалярных детерминированных величин $y_1, y_2, \ldots, y_p$ и точные наблюдения $z_1, z_2, \ldots, z_p$ за аналогичными реакциями РО, предлагается использовать индекс реалистичности ММ (ИРММ) [189]. Для построения ИРММ используем геометрическое представление точек $A_j = (y_j, z_j)$ в виде вектора в плоскости YOZ, отклоняющейся от прямой $z = y$, которая соответствует идеальному случаю совпадения предсказания и наблюдения. Оценка угла отклонения α_j вектора OA_j от прямой $z = y$ имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \frac{1 - \frac{z_j}{y_j}}{1 + \frac{z_j}{y_j}},$$

а в качестве ИРММ принимается величина

$$\mathcal{R} = \frac{1 + \sqrt{1/p \sum_{j=1}^{p} \operatorname{tg}^2 \alpha_j}}{1 - \sqrt{1/p \sum_{j=1}^{p} \operatorname{tg}^2 \alpha_j}}, \qquad (2.46)$$

показывающая, что теоретические предсказания с помощью данной ММ отличаются от наблюдений не более чем в $\mathcal{R}$ раз.

Вернемся к первоначальному предположению о структуре рассматриваемых моделей, образованной из элементарных звеньев. Изучение подобной атомической структуры позволяет довольно далеко продвинуться, в особенности в направлении алгебраическо-топологических свойств ММ [34].

Итак, пусть задан набор наиболее элементарных объектов (называемых далее просто элементами), из которых конструируются модели интересующего нас РО. Обозначим этот набор $X = \{x\}$. Каждый элемент $x \in X$ описывается с помощью ряда свойств (признаков). Обозначим вектор свойств $\gamma = \gamma(x)$. Для успешного различения элементов из X необходимо потребовать, если $x_1 \neq x_2$, то $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$. Иными словами, вектор-функция $\gamma(x)$ должна разделять точки множества элементарных объектов X. Введем также на X множество преобразований $G = \{g\}$. Будем говорить, что два элемента x_1 и x_2 G-подобны, если найдется такое преобразование $g \in G$, что $x_2 = g(x_1)$. В дальнейшем считаем, что G является группой. Поэтому множество X можно разбить на классы эквивалентности G-подобных элементов.

Кроме указанного разбиения X на непересекающиеся классы, введем еще одно разбиение, в общем случае отличающееся от предыдущего. Одна из компонент вектора $\gamma = \gamma(x)$ должна указать на некое наиболее фундаментальное свойство элемента x (например, x — конденсатор или резистор и т. п.). Обозначим эту компоненту $k = k(x)$, очевидно, она указывает на «качество» элемента x (ср. с § 1). Разбиение X на классы с одинаковыми k назовем разбиением на классы «однокачественных» элементов $X(k) = \{x \in X : k(x) = k\} \subset X$.

Элементы x из X для построения моделей РО следует соединять тем либо иным способом между собой. Поэтому среди свойств $\gamma(x)$ нужно указывать возможные входы и выходы элемента x. Общее количество входов и выходов обозначим $\omega(x)$, при этом число входов — $\omega_{\text{вх}}(x)$, а число выходов — $\omega_{\text{вых}}(x)$, $\omega(x) = \omega_{\text{вх}}(x) + \omega_{\text{вых}}(x)$. Входы метятся $\{x_i : i = \{1, \ldots, \omega_{\text{вх}}(x)\}\}$, а выходы — $\{x^j : j = \{1, \ldots, \omega_{\text{вых}}(x)\}\}$.

Оба эти множества образуют структуру связей элемента x — $S(x)$. Поскольку не все элементы из X можно соединять между собой, то введем функцию $q : \{x_i\} \cup \{x^j\} \to Q$ — некоторое пространство, определяемое в конкретных примерах.

Для получения какой-либо модели необходимо соединить между собой элементы из X. Для выяснения вопроса, можно ли соединить выход x^j элемента x с входом z_i элемента z, введем функцию сочленяемости

$$\rho(q(x^j);\ q(z_i)) = \begin{cases} 1, & \text{если связь } x^j \text{ с } z_i \text{ возможна,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Потребуем, чтобы

$$\rho(q(x^j), q(z_i)) = \rho(q(g(x)^j), q(g(z)_i)), \quad \forall g \in G. \tag{2.47}$$

Это означает, что при G-подобии элементы существенным образом не могут изменяться. Если мы строим модели одного и того же РО, то естественно ожидать, что способы соединения элементов из X будут однотипными (в определенном смысле). Иными словами, существует система Σ запретов на общую конфигурацию соединений элементов из X. Обозначим $\mathcal{M}$ совокупность всех допустимых моделей M, т. е. таких моделей, соединения элементов которых удовлетворяют (2.47) с $\rho = 1$ и фиксированному Σ, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Sigma, \rho, X)$ (в [34] $\mathcal{M}$ называется множеством регулярных структур, $M \in \mathcal{M}$ — регулярной конфигурацией).

Важно отметить, что модель $M \in \mathcal{M}$ не является просто объединением каких-то элементов из X, поскольку, в дополнение к сумме элементов, информацию несут способы соединений элементов (внутренняя топология) и несоединенные связи (внешняя топология). Так что и здесь срабатывает известный философский принцип, что целое — нечто большее, чем сумма его частей.

Следующее предположение при рассматриваемом подходе — существование «идеального» наблюдателя. Он, наблюдая, сам теряет часть информации и может лишь принять решение о принадлежности модели M какому-либо классу из $\mathcal{M}$. Формально это означает, что существует на $\mathcal{M}$ некоторое отношение эквивалентности R (правило идентификации), такое, что модели M_1 и M_2 воспринимаются наблюдателем как идентичные, тогда и только тогда, когда $M_1 R M_2$. Классы эквивалентности, индуцированные на $\mathcal{M}$ отношением R, называются изображениями. Если под ММ и $\mathcal{M}$ можно понимать формулу, систему уравнений, алгоритм, машинную программу (о чем говорилось в § 2 первого тома), то под изображением естественно понимать функцию, областью определения которой являются входные связи ММ, а областью значений — выходные связи. Это дает возможность комбинировать изображения, соединяя входные и выходные связи по правилам (Σ, ρ). Заметим, что выбор правила идентификации R должен быть согласован с преобразованиями подобия G и с правилами (Σ, ρ), чтобы множество всех изображений $Y = \mathcal{M}/R$ можно было наделить некоторой алгебраической структурой. В общем случае в Y (как и в $\mathcal{M}$) можно ввести алгебраические операции, определенные не для всех значений аргументов, а только частично. Поэтому Y и $\mathcal{M}$ представляют собой, вообще говоря, частичные универсальные алгебры. Так, в $\mathcal{M}$ вводятся соединители $\{\sigma_n\}$, $n = 2, \ldots$ Для простоты, при $n = 2$ σ_2 отображает некоторое подмножество $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ так, что если M_1 и M_2 состоят из элементов $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $\{x_1', x_2', \ldots\}$ и имеют структуры связей $S(M_1)$ и $S(M_2)$, $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2$, то: 1) $M_1\sigma_2M_2 \in \mathcal{M}$ и состоит из элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots\}$; 2) $S(M_1 \times \sigma_2M_2) = S(M_1) \cup S(M_2)$. Заметим, что σ_2 сохраняет старые соединения в M_1 и M_2, но, вообще говоря, вводит новые, которые определяются структурами связей $S(M_1)$ и $S(M_2)$. Ясно, что в общем случае σ_2 не определена на всем $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, так как может получиться модель, нарушающая правила (Σ, ρ). Топологию в $\mathcal{M}$ Гренандер [34] вводит следующим образом. Пусть X, G — хаусдорфовы пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, причем G — топологическая группа такая, что gx непрерывна относительно топологии произведения. Пусть $\mathcal{M}_n$ — подмножество $\mathcal{M}$, состоящее из моделей, образованных n элементами из X, $n = 1, 2, \ldots$ Введем в $\mathcal{M}_n$ систему открытых окрестностей, полученных из топологии произведения $X \times X \times \ldots \times X$ (n раз) с фиксированным, но произвольным, соединителем σ:

$$N(M_0) = \{M = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in N_i(x_i^0),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Здесь $N_i(x_i^0)$ — произвольные окрестности точки x_i^0 в X, $M_0 = \sigma(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in M_n$. В результате $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n \in I} \mathcal{M}_n$, где I — конечное или бесконечное множество индексов, наделяется топологией классов $\mathcal{M}_n$ как топологическая сумма. Тогда gM оказывается непрерывным по совокупности $M \in \mathcal{M}$, $g \in G$. Топология в пространстве изображений Y вводится как фактор-топология.

Подробное изучение этих объектов с позиций алгебры, топологии и теории вероятностей предпринято в [34, т. 3], где получены некоторые общие структурные результаты и дан ряд приложений. В следующем параграфе мы, в частности, рассмотрим системы моделей, наделенные алгебраической операцией, определенной для всех пар моделей и с отношением частичного порядка, который интерпретируется как «упрощение» или «усложнение» моделей.

В заключение параграфа рассмотрим один способ аналитического задания ММ, интенсивно изучаемый в настоящее время многими авторами. Дело в том, что математическое представление динамической системы в виде уравнения (алгебраического, дифференциального и т. п.) не всегда соответствует как физическому смыслу задачи, так и априорным знаниям о РО. В такой ситуации имеет смысл от уравнений перейти к неравенствам и, в более общем случае, к операторным включениям вида

$$f(x, u) \in W, \tag{2.48}$$

где $x \in X$, $u \in U$; $X \subseteq E_1$, $U \subset E_2$, $W \subset E_3$, E_i, $i = 1, 2, 3$ — вещественные банаховы пространства, $f : X \times U \to E_3$ — заданное отображение. Множества X и U допускают различные интерпретации (например, U — множество допустимых управлений, X — множество допустимых траекторий системы; или X — возможные априорные состояния, а U — допустимые управления, и т. п.).

К виду (2.48) могут быть сведены многие случаи математического моделирования в условиях неопределенности (см. также § 3 этой главы).

При изучении (2.48) прежде всего возникает проблема разрешимости данного включения. Известно, что при отсутствии решения у ММ, заданной аналитически, численные алгоритмы приближенного решения не приводят, вообще говоря, к построению аппроксимирующей последовательности допустимых элементов. Не всегда обоснована также попытка делать вывод о существовании решения, исходя из физических соображений. ММ — лишь гомоморфный образ РО, что обсуждалось ранее, и из существования РО не следует автоматически существование решения в заданных допустимых множествах для ММ. В то же время существование решения у аналитической ММ является первым признаком того, что ММ адекватно отражает РО.

Пусть E_3^* — сильное сопряженное к E_3 пространство, $\langle y, y^*\rangle \equiv y^*(y)$ — значение линейного непрерывного функционала $y^* \in E_3$ на векторе $y \in E_3$, $B^* = \{y^* \in E_3^*: \|y^*\|_{E_3^*} \leqslant 1\}$.

Пусть подмножество

$$F_x = \{y \in E_3 : y = y(x) = f(x, u),\ u \in U\} \tag{2.49}$$

при данном $x \in X$ является замкнутым и выпуклым в E_3.

Предложение 2.1. Для того чтобы (2.48) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$H_x \cap W \neq \varnothing, \tag{2.50}$$

где

$$H_x = \{y \in E_3 : \langle y, y^*\rangle \leqslant \sup_{u \in U} \langle f(x, u), y^*\rangle,\ \forall\, y^* \in B^*\},$$

при некотором $x \in X$.

Доказательство. Ясно, что $F_x \subseteq H_x$. Пусть обратное включение неверно, т. е. найдется вектор $y \in H_x \setminus F_x$. Тогда, учитывая условие (2.49), существует такой линейный непрерывный функционал $y_0^* \in B^*$ и число γ, что

$$\langle f(x, u), y_0^*\rangle \leqslant \gamma < \langle y, y_0^*\rangle, \quad \forall u \in U, \tag{2.51}$$

в силу теоремы отделимости выпуклых множеств Хана — Банаха [129]. Но (2.51) противоречит тому, что $y \in H_x$, т. е. $H_x = F_x$, откуда следует (2.50).

Пример 2.5. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, A — линейный непрерывный оператор в H с сопряженным A^*, U — замкнутое выпуклое множество в H, $x \in H$, $W \subset H$. Тогда для разрешимости включения

$$Au - x \in W, \quad u \in U, \tag{2.52}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал хотя бы один элемент $y \in W$ такой, что $(y + x, h)_H \leqslant \sup_{u \in U} (u, A^*h)_H$, $\forall\, h \in H$, $\|h\|_H \leqslant 1$.

Пример 2.6. Пусть $X \subseteq E_1$, $U \subseteq E_2$, как и в (2.48), Y — некоторое множество. Заданы отображения $Q: X \times U \to Y$, $D: X \times U \times Y \to E_3$. Множество $W \subset E_3$ называется вполне управляемым (относительно D, Q), если для любого $u \in U$ найдется $x \in X$ такой, что $D(x, u, Q(x, u)) \in W$ [94]. Поэтому (2.50) указывает необходимые и достаточные условия полной управляемости при выполнении предположения (2.49).

В этом примере Q представляет ММ, а отображение D — критерий качества.

Условие (2.49) выглядит довольно ограничительным. Если оно не выполняется, то можно в результате «рандомизации» параметра $u \in U$ свести задачу разрешимости (2.48) к случаю, аналогичному (2.49). Выделим в U σ-алгебру подмножеств $\mathcal{F}$ и введем вероятностную меру μ на $\mathcal{F}$, причем неатомическую, т. е. $\mu(U) = 1$, $\mu(C) \geqslant 0$, $C \in \mathcal{F}$ и не существует $B \in \mathcal{F}$ такого, что $\mu(B) > 0$, но для любого $C \subset B$, $C \in \mathcal{F}$, следовало бы: $\mu(C) = 0$ или $\mu(C) = \mu(B)$ (такие меры называются также непрерывными). Для каждого $C \in \mathcal{F}$ положим

$$m(C, x) = \int_C f(x, u)\, d\mu(u), \quad \mathcal{F}_x = \{m(C, x) : C \in \mathcal{F}\}.$$

Функция множеств $m(C, x)$ по $C \in \mathcal{F}$—счетно-аддитивна (т. е. является векторной мерой [170]) и обладает конечной вариацией, т. е.

$$|m|(U, x) = \sup_I \sum_{i \in I} \|m(C_i, x)\|_{E_3} < +\infty,$$

где I — любое конечное множество индексов: $\{C_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ — разбиение множества U. Причем $m(\cdot, x)$ — неатомическая векторная мера в силу неатомичности μ. Воспользуемся следующей обобщенной теоремой А. А. Ляпунова для векторных мер [200].

Теорема 2.3. *Пусть E_3 — рефлексивно или сепарабельно и сопряжено некоторому линейному нормированному пространству (свойство А), $m: \mathcal{F} \to E_3$ — векторная мера с конечной вариацией и неатомическая. Тогда замыкание* $\mathrm{cl}\, m(U)$ *множества*

$$m(U) = \{m(C) : C \in \mathcal{F}\}$$

(по норме E_3) выпукло и компактно.

Из этой теоремы следует, что замыкание $\mathrm{cl}\, \mathcal{F}_x$ множества $\mathcal{F}_x$ в E_3 выпукло и компактно, а значит, ограничено и замкнуто. Введем множество

$$\mathcal{H}_x = \{y \in E_3 : \langle y, y^* \rangle \leqslant \sup_{C \in \mathcal{F}} \langle m(C, x), y^* \rangle, \ \forall y^* \in B^*\}.$$

Оно выпукло, ограничено и замкнуто в E_3. Поэтому $\mathcal{H}_x = \mathrm{cl}\, \mathcal{F}_x$ и справедлива.

Теорема 2.4. *Пусть выполняется свойство А и задана вероятностная неатомическая мера μ на $(U, \mathcal{F})$. Тогда условие*

$$\mathcal{H}_x \cap W \neq \varnothing \tag{2.53}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ такая, что

$$m(C_n, x) \to w \in W, \quad n \to \infty \tag{2.54}$$

(сходимость по норме E_3).

Свойство (2.54) естественно назвать обобщенной разрешимостью операторного включения (2.48). Некоторые методы приближенного решения включений вида (2.48) планируется изложить в четвертом томе этой серии.

§ 3. Системы математических моделей

Как отмечалось ранее, весьма плодотворным является описание одного и того же РО с помощью различных ММ. В этом случае представляется возможность более полно изучить моделируемый объект, опираясь на различные математические аппараты, участвующие в построении тех или иных моделей. Так называемый синергизм ММ позволяет увеличить объем полученной полезной информации о РО.

Пусть $\mathfrak{P} = \{P_i : i \in I\}$ — совокупность параметров, характеризующих изучаемый РО, $\mathfrak{M} = \{M_j : j \in J\}$ — множество математических моделей, описывающих РО. Рассмотрим вначале случай, когда множества индексов I и J конечны и содержат соответственно n и m элементов. Составим матрицу A_0, только из единиц и нулей, порядка $(n + m) \times N$, где $N \leqslant 2^{n+m}$. В каждом столбце k в первых m строчках ставим единицу, если используем модель M_j, и ставим нуль, если модель M_j в данном случае не привлекаем; в последних n строчках в k-м столбце ставим единицу, если параметр P_j описывается отмеченной выше в столбце k комбинацией моделей, и ставим нуль в противном случае.

Выбор такой матрицы может быть осуществлен следующим образом. Вначале записываем расширенную матрицу A_p, в столбцах которой произвольным образом расположены единицы и нули. Общее число таких столбцов равно 2^{m+n}. Матрица A_0 получается из A_p в результате вычеркивания из A_p столбцов с невозможными комбинациями единиц и нулей.

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$, модель M_1 описывает параметры P_1, P_3, M_2 — параметры P_1, P_2, а M_3 — параметры P_2, P_3. Опираясь на эту априорную информацию, запишем ряд утверждений (в терминах математической логики):

1) $M_1\overline{M}_2\overline{M}_3 \to \overline{P}_2$; 4) $M_1 [M_2 + M_3] \to P_1P_3$;

2) $M_1M_2\overline{M}_3 \to P_1$; 5) $\overline{M}_1\overline{M}_2 \to \overline{P}_1$;

3) $\overline{M}_1\overline{M}_3 \to \overline{P}_3$; 6) $[P_1 + P_2 + P_3] [M_1 + M_2 + M_3] =$ и.

Логическое произведение этих утверждений является булевой функцией $E = E (P_1, P_2, P_3; M_1, M_2, M_3)$.

Поэтому в общем случае всегда можно записать

$$E = E(P_1, P_2, \ldots, P_n; M_1, M_2, \ldots, M_m).$$

Затем из столбцов матрицы A_p вычеркиваем те, для которых ложно хотя бы одно из утверждений, входящих в E, и в результате получаем матрицу A_0.

Пусть параметры $\mathfrak{P}$ определяются экспериментально. Поставим задачу: найти такой набор моделей из $\mathfrak{M}$, который лучше всех других соответствует экспериментальным данным $\mathfrak{P}$ по моделируемому процессу. Иными словами, нужно по заданному $\mathfrak{P}$ найти $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ такое, чтобы в A_0 выполнялась импликация $\mathfrak{P} \to \mathfrak{N}$. Для численного решения этой задачи применим метод Лэдли [68].

Рассмотрим общий случай: заданы множества параметров $\mathfrak{P}$ и математических моделей $\mathfrak{M}$ произвольной мощности. Отметим, что случай больших n и m можно свести к данному. Пусть $X = G(\mathfrak{M})$, $Y = G(\mathfrak{P})$ — множества всех непустых подмножеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Поскольку элемент $x \in X$ представляет собой набор (конечный или бесконечный) моделей из $\mathfrak{M}$, то этому набору соответствует какой-то набор $y \in Y$ свойств из $\mathfrak{P}$, которые моделируются моделями из x. Значит, существует отображение $\Phi : X \to Y$, осуществляющее указанное соответствие (в рассмотренном выше конечном случае Φ задается столбцами матрицы A_0). Введем критерий оценки сложности Ψ наборов ММ из X, принимающий значения в частично упорядоченном банаховом пространстве (Z, C), где C — конус неотрицательных векторов в Z.

Поставим задачу: найти условия, обеспечивающие существование лучшего (в смысле критерия Ψ) набора ММ из $\mathfrak{M}$, моделирующего заданный набор свойств из $\mathfrak{P}$. Эта задача допускает несколько формализаций. (Ниже используются понятия из гл. IV.)

I. Заданы $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$. Нужно найти $x_1 \in X_1 \subseteq X$ такой, что

$$\begin{cases} \Phi(x_1) = y_0, \\ \Psi(x_1) = z_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

II. Задан $y_0 \in Y$. Требуется найти $x_2 \in X$ такой, что

$$\Psi(x_2) = w - \min W \subset Z, \tag{3.2}$$

где

$$W = \{z \in Z : z = \Psi(x),\ \Phi(x) = y_0\}. \tag{3.3}$$

III. Заданы $y_0 \in Y$ и множество W из (3.3). Нужно найти $x_3 \in X$ такой, что

$$\Psi(x_3) = s - \min W. \tag{3.4}$$

Задача I означает, что фиксирован не только набор свойств $y_0 \in Y$, но и ожидаемый уровень сложности $z_0 \in Z$ набора моделей. Для задач II, III при ряде ограничений на исходные данные могут быть записаны необходимые условия существования слабого и сильного минимумов. Это сделано в § 2 гл. IV. Здесь рассмотрим задачу I.

Пусть множество Y взаимно-однозначно вкладывается в некоторое банахово пространство L, $E = L \times Z$ — банахово пространство с нормой $\| e \|_E^2 = \| l \|_L^2 + \| z \|_Z^2$, где $e = (l, z) \in E$,

$$f(x) = (\Phi(x),\ \Psi(x)) \in E,\ x \in X_1,\quad w_0 = (y_0,\ z_0) \in E.$$

Тогда (3.1) принимает вид

$$f(x_1) = w_0. \tag{3.5}$$

Если множество

$$f(X_1) = \{e \in E : e = f(x),\ x \in X_1\} \tag{3.6}$$

выпукло и замкнуто в E, то (3.5) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\langle w,\ e^*\rangle \leqslant \sup_{x \in X_1} \langle f(x),\ e^*\rangle,\ \forall e^* \in E^*,\quad \|e^*\|_{E^*} \leqslant 1,$$

в силу предложения 2.1 или

$$\langle y_0,\ l^*\rangle + \langle z_0,\ z^*\rangle \leqslant \sup_{x \in X_1} \{\langle \Phi(x),\ l^*\rangle + \langle \Psi(x),\ z^*\rangle\} \equiv \Theta(l^*,\ z^*), \tag{3.7}$$

для любых $l^* \in L^*$, $z^* \in Z^*$ таких, что $\| l^* \|^2_{L^*} + \| z^* \|^2_{Z^*} \leqslant 1$. Условие (3.1) можно ослабить, потребовав, чтобы

$$\begin{cases} \Phi(x_1) \in U_0, \\ \Psi(x_1) \in V_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

где U_0 и V_0 — фиксированные подмножества из Y и Z, причем $y_0 \in U_0$, $z_0 \in V_0$. Вводя множество

$$H = \{(l,\ z) \in E : \langle l,\ l^*\rangle + \langle z,\ z^*\rangle \leqslant \Theta(l^*,\ z^*),\ \| l^* \|^2_{L^*} + \| z^* \|^2_{Z^*} \leqslant 1\}$$

в E, получаем критерий разрешимости ослабленной задачи I:

$$H \cap (U_0 \times V_0) \neq \varnothing \tag{3.9}$$

при выполнении ограничения (3.6).

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть имеется ММ $S : X \to Y$ сложной структуры (в смысле имеющегося критерия сложности), где X — пространство входов; Y — пространство выходов модели. Задан набор ММ более простой структуры $Q(\cdot,\ \alpha) : X \to Y$, $\alpha \in A$ — множество индексов, которые аппроксимируют S (в некотором смысле). Спрашивается: можно ли с помощью набора $\{Q(\cdot,\ \alpha) : \alpha \in A\}$ получить точное представление ММ S. На этот вопрос, сформулированный несколько расплывчато (требует уточнения понятие — точное представление, что сделаем позже), один из ответов может быть получен следующим образом.

Пусть Y — рефлексивное или сепарабельное и сопряженное банахово пространство, A — вполне регулярное отделимое топологическое пространство, $Q(x,\ \alpha) : A \to Y$ — непрерывное (по α) и ограниченное отображение, при каждом $x \in X$. На σ-алгебре $\mathfrak{B}(A)$ борелевых подмножеств A (наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые в A подмножества) пусть задана априорная вероятностная мера μ_0, обладающая свойством регулярности (на компактах), т. е. для любых $B \in \mathfrak{B}(A)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся компакт $K \subseteq B$ и открытое множество $U \supseteq B$ такие, что $\mu_0(U \setminus K) \leqslant \varepsilon$. При этом пусть выполняется свойство

$$\int_A \| Q(x,\ \alpha) \|_Y \, d\mu_0(\alpha) = \gamma(x) > 0,$$

для любого входного сигнала $x \in X$. Введем линейное пространство $C(A,\ Y)$ всех непрерывных ограниченных отображений $f : A \to Y$

и наделим его топологией локально выпуклого векторного пространства (л. в. п.) ξ. По определению, ξ порождается семейством полунорм вида

$$C(A, Y) \ni f \to \int_A \| f(\alpha) \|_Y d\mu(\alpha) \equiv p_\mu(f),$$

где $\mu \in M^+(A)$ — конус положительных конечных регулярных борелевых счетно-аддитивных мер на A [155а].

Определим линейный функционал φ на подпространстве $L = \text{Lin}\{Q(x, \alpha)\}$ в л. в. п. $(C(A, Y), \xi)$ по формуле $\varphi(\eta Q) = \eta\gamma(x)$ для каждого $\eta \in R_1$. Функционал φ непрерывен в топологии ξ, поскольку

$$|\varphi(\eta Q)| = |\eta| \int_A \| Q(x, \alpha) \|_Y d\mu_0(\alpha) = p_{\mu_0}(\eta Q).$$

Поэтому по теореме Хана — Банаха для л. в. п. [159] расширим φ на все $(C(A, Y), \xi)$ по непрерывности и введем линейный ξ-непрерывный оператор $D : C(A, Y) \to Y$ вида $D(f) = S(x)\varphi(f)/\gamma(x)$, где $x \in X$ — фиксированный входной сигнал. Непрерывность в топологии ξ следует из выражения

$$\| D(f) \|_Y = \frac{\| S(x) \|_Y}{\gamma(x)} |\varphi(f)| \leqslant \int_A \| f(\alpha) \|_Y d\nu_x(\alpha) = p_{\nu_x}(f),$$

где мера $\nu_x = \| S(x) \|_Y \mu_0/\gamma(x)$. Значит, существует единственная векторная мера $m = m(x, \cdot)$, определенная на $\mathfrak{B}(A)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{L}(Y)$ всех линейных непрерывных операторов в Y, счетно-аддитивная, регулярная (на компактах) и имеющая конечную вариацию $|m(x, A)| < +\infty$ (определение $|m|$ см. в конце предыдущего параграфа, а регулярность m понимается, как и μ_0 при замене μ_0 на $|m|$ в приведенном выше определении) такая, что справедливо интегральное представление

$$D(f) = \int_A f(\alpha)\, dm(x, \alpha), \quad \forall f \in C(A, Y),$$

в силу [155а, теорема 1]. Полагая в этом равенстве $f(\alpha) = Q(x, \alpha)$, получаем

$$D(Q) = S(x)\varphi(Q)/\gamma(x) = \int_A Q(x, \alpha)\, dm(\alpha).$$

Причем вариация векторной меры m абсолютно непрерывна относительно меры ν_x, поскольку ν_x — мажорирующая $m(x, \cdot)$ скалярная мера (см. свойства векторных мер в [170]). Но тогда, учитывая ограничения на банахово пространство Y, векторная мера $m(x, \cdot)$ дифференцируема (в смысле Радона — Никодима) по мере μ_0, т. е. существует интегрируемая (по Бохнеру) измеримая функция $H : (A, \mathfrak{B}(A)) \to \mathcal{L}(Y)$ такая, что

$$m(x, B) = \int_B H(x, \alpha)\, d\mu_0(\alpha), \quad \forall B \in \mathfrak{B}(A)$$

(см. [39, гл. VI]).

Таким образом, выполняется следующее точное представление ММ S через модели $Q(\cdot, \alpha)$:

$$S(x) = \int_A H(x, \alpha)\, Q(x, \alpha)\, d\mu_0(\alpha)$$

для любого входного сигнала $x \in X$. В этом интегральном представлении оператор-функцию $H(x, \alpha)$ естественно назвать апостериорным (поскольку она зависит от x) семейством подстраивающих операторов. Оказывается, что в ряде частных случаев $H(x, \alpha)$ восстанавливается в явном виде в результате использования дополнительной информации о моделях S и $Q(\cdot, \alpha)$ (см., например, [89, формула (5.36)]).

Рассмотрим вопрос выбора модели из заданного класса моделей X_α, $\alpha \in A$. На классе X_α часто можно ввести некоторую ассоциативную алгебраическую операцию $*$ (некоммутативную). В результате $X_\alpha = (X_\alpha, *)$ становится полугруппой. В качестве примеров рассмотрим такие случаи.

1) Модель $a*b = c$ обладает одновременно свойствами моделей a и b. В конкретной ситуации построение модели c является решением некоторой обратной задачи, постановка которой должна быть такой, чтобы задача имела единственное решение. Требование единственности накладывается для того, чтобы введенное понятие было алгебраической операцией.

2) Пусть X представляет собой конечное множество конструктивных параметров системы, которое запишем как: n-мерный вектор из R^n с неотрицательными координатами. Тогда множество технически реализуемых систем есть область в R^n. Операцию сложения можно ввести так: если $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то а) $c = a * b = \{\max(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ или б) $c = a * b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$. На содержательном уровне «а» означает, что проект c обладает наилучшими конструктивными параметрами проектов a и b, а в «б» c рассматривается как суммарная модель моделей a и b (ср. со случаем 1). В обоих случаях $(X_\alpha, *)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$, причем при «а» для любого $a \in X_\alpha$ справедливо $a * a = a$, т. е. a — идемпотент [58], $(X_\alpha, *)$ — коммутативная связка. В случае «б» под na будем понимать модель, составленную из n копий модели a. Это важно, например, при рассмотрении вопросов распараллеливания вычислительных алгоритмов.

3) Пусть модели из X_α конструируются из элементов некоторого множества X элементарных блоков (звеньев). Тогда $\forall\, a \in X_\alpha$ представимо как некоторая последовательность элементов X, $a = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k)$ и $a * b = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$, если $b = (y_1, \ldots, y_m)$. Класс $(X_\alpha, *)$ в этом случае является свободной полугруппой над X.

4) Пусть X_α представимо как подмножество идемпотентных матриц порядка n, операция $*$ — обычное умножение матриц. Тогда $(X_\alpha, *)$ — некоммутативная связка.

5) Если X — множество входов некоторой динамической системы, Y — множество выходов, то под $a = (x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ понимается модель, переводящая x в y. Операцию $*$ введем по формуле $(x_1, y_1) *$

$*(x_2, y_2) = (x_1, y_2)$. Тогда $(X_\alpha, *)$ некоммутативная связка. Причем из $a * b = b * a$ следует $a = b$.

Отметим, что введение операций $*$ в конкретном случае носит субъективный характер. Поэтому естественно рассматривать семейство (X_{α_i}), $i \in I$, полугрупп, элементы которых суть точки множества X_α, I — множество индексов, соответствующих различным операциям, введенным в X_α (в дальнейшем индекс α будем опускать). Наделим полугруппу X_i отношением порядка $\geqslant$. По определению 1) $a \geqslant a$; 2) $a \geqslant b \wedge b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c$; 3) $a \geqslant b \wedge b \geqslant a \Leftrightarrow a = b$; 4) если $a \geqslant b$, то $a * c \geqslant b * c$, $c * a \geqslant c * b$, $\forall\, c \in X_i$. Это отношение может интерпретироваться: 1) как уточнение (или агрегирование) модели b с помощью модели a; 2) если a, b — математические конструкции (например, a — система дифференциальных уравнений, b — система интегральных уравнений), то $a \geqslant b$ означает, что a получена из b в результате последовательности некоторых корректных (правильных) математических преобразований. Очевидно, что операция уточнения (агрегирования) так же, как и операция $*$, носит субъективный характер. Так, при решении задач математического моделирования сложных технических систем (СТС) возможны, по крайней мере, два способа уточнения параметров: модели или структуры. Поэтому на множестве X_i естественно рассмотреть J различных частичных порядков. Итак, получаем семейство частично упорядоченных полугрупп $\{X_{ij}\}_{i \in I,\, i \in J}$. Причем на содержательном уровне аксиома 4 означает, что внесение в две согласованные (определенным образом) модели a и b свойств любой модели $c \in X_i$ не нарушает их согласованности. Учитывая приведенные выше интерпретации порядкового отношения, естественно ввести еще две аксиомы: 5) каждый $a \in X_{ij}$ является положительным, т. е. для любого $x \in X_{ij}$, $a * x \geqslant x$ и $x * a \geqslant x$; 6) если $a < b$, то существуют два элемента $x, y \in X_{ij}$ такие, что $ax = ya = b$. Пусть также каждая полугруппа $\{X_{ij}\}_{i \in I}$ удовлетворяет закону сокращения: $ab_1 = ab_2 \Rightarrow b_1 = b_2$, $b_1 a = b_2 a \Rightarrow b_1 = b_2$ и имеет нейтральный элемент e_i, т. е. $a * e_i = e_i * a = a$ для любого $a \in X_{ij}$. Эти предположения не противоречат случаям 1—5. Тогда справедливы соотношения:

а) если для любых $a, b \in X_{ij}$, $ab = e_i$, то $a = b = e_i$;

б) $X_{ij} * a = a * X_{ij}$ для всех $a \in X_{ij}$.

Воспользуемся конструкцией Бикгорфа [148] вложения частично упорядоченной полугруппы X_{ij} в частично упорядоченную группу G_{ij} в качестве положительного конуса. Далее вместо $x * y$ будем писать xy. Если $a, x \in X_{ij}$, то в силу свойства «б» и закона сокращения существует ровно один элемент $x_a \in X_{ij}$, что $xa = ax_a$. Фиксируя $a \in X_{ij}$, получаем взаимно-однозначное соответствие $x \to x_a$, удовлетворяющее условиям:

$$a_a = a; \quad (xy)_a = x_a y_a; \quad (x_a)_b = x_{ab}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим декартово произведение $X_{ij} \times X_{ij}$ и введем в нем бинарное отношение «$\sim$»:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad_b = cb.$$

Свойства «$\sim$»: 1) рефлексивность; 2) симметричность; 3) транзитивность.

Докажем 2 и 3. Из $ad_b = cb$ следует $ad_b\, d = cbd$. Далее, $d_b d = dd_{bd}$, $bd = (bd)_{bd} = b_{bd}d_{bd} = b_d d_{bd}$ в силу (3.10). Откуда, сокращая на d_{bd}, получаем $ad = cb_d$, т. е. $(c, d) \sim (a, b)$. Если $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (g, h)$, то $ad = cb_d$, $ch_d = gd$. Отсюда

$$ch_d b_d = gdb_d, \tag{3.11}$$

причем $ch_d b_d = c\,(hb)_d = c\ (bh_b)_d = cb_d h_{bd} = adh_{bd} = ah_b d$ в силу (3.11) и условия. Аналогично $gdb_d = gbd$. Поэтому из (3.11) имеем $ah_b d = gbd$ или, сокращая на d, $(a, b) \sim (g, h)$. Итак, отношение «$\sim$» является эквивалентностью. Обозначим G_{ij} — множество классов $\{A\}$ эквивалентных пар из $X_{ij} \times X_{ij}$. Если (a, b), $(c, d) \in A$, то будем писать $(a, b) = (c, d)$. Введем в G_{ij} операцию умножения по правилу:

$$(a,\ b)(c,\ d) = (ac_b,\ db), \tag{3.12}$$

где пары (a, b), (c, d) являются представителями выбранных для умножения классов эквивалентности. Определение (3.12) корректно. Действительно, если $(a, b) = (c, d)$, то $ad_b = cb$. Отсюда для любой пары (g, h) $ad_b g_{db} h_b = cbg_{db}h_b$, или

$$ag_b\,(hd)_{hb} = cg_d hb. \tag{3.13}$$

Но из (3.12) следует

$$(a,\ b)(g,\ h) = (ag_b,\ hb),\ (c,\ d)(g,\ h) = (cg_d,\ hd). \tag{3.14}$$

Сравнивая (3.13) с (3.14), получаем $(a, b)\,(g, h) = (c, d)\,(g, h)$. Поскольку справедливо $g\,(ad_b)_h h_{bh} = g\,(cb)_h h_{bh}$ или $ga_h\,(dh)_{bh} = gc_h bh$, то аналогично предыдущему $(g, h)\,(a, b) = (g, h)\,(c, d)$. Таким образом, для перемножения двух классов эквивалентности по (3.12) достаточно рассмотреть два произвольных представителя из каждого класса, что и будем делать в дальнейшем. Ассоциативность умножения (3.12) следует из двух последних равенств (3.13), (3.14). Любая пара (a, a), $a \in X_{ij}$ определяет класс эквивалентности E_i, являющийся нейтральным элементом относительно умножения (3.12). Действительно, $ae_{i_a} = e_i a$, т. е. $(a,\ a) = (e_i,\ e_i)$. Но $(e_i,\ e_i)\,(g,\ h) = (e_i g_{e_i},\ he_i) = (g,\ h) = (g, h)\,(e_i, e_i)$. Если $(a, b) \in A$, то $(b, a) \in A^{-1}$, так как $(a, b)\,(b, a) = (ab, ab) \in E_i$. Итак, G_{ij} — группа, в которую отображение $a \to (a, e_i)$ изоморфно вкладывает полугруппу X_{ij}. Обозначим этот образ P_{ij}. Заметим, что P_{ij} — конус в группе G_{ij}, поскольку $P_{ij} \cap P_{ij}^{-1} = E_i$, $P_{ij}P_{ij} \subseteq P_{ij}$ и $XP_{ij}X^{-1} \subseteq P_{ij}$, для любого $X \in G_{ij}$. Поэтому в G_{ij} можно задать отношение частично порядка $\geqslant$ следующим образом: если $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d) \in G_{ij}$, то $\alpha \geqslant \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta^{-1} \in P_{ij}$. Последнее означает, что $a * d_b \geqslant c * b$ в X_{ij}. С содержательной точки зрения это означает, что переход от модели b к более сложной модели a длиннее, чем от модели d к модели c. Заметим, что на основании аксиомы 6 и правила 4 любая усложняющаяся пара $\alpha = (a, b)$ (т. е. $a \geqslant b$ в X_{ij}) может быть в X_{ij} отождествлена с парой (y, e), т. е. $yb = a$. Поэтому P_{ij} можно называть множеством усложняющихся пар моделей, а P_{ij}^{-1} — множеством упрощающихся пар моделей. $S_{ij} = P_{ij} \cup P_{ij}^{-1}$ — семейство согласованных пар моделей.

Для решения задач автоматизации проектирования обязательным этапом является формирование совокупности критериев качества, которые позволяют оценивать с различных позиций ту или иную модель. Пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность аддитивных функционалов на X_{ij}, т. е. $D(a * b) = D(a) + D(b)$, $D \in \mathfrak{H}$, a, $b \in X_{ij}$. Функционал $D_s \in \mathfrak{H}$ назовем функционалом сложности, если $D_s(a) \geqslant D_s(b)$ при $a \geqslant b$. Каждый $D \in \mathfrak{H}$ порождает аддитивный функционал F на G_{ij} по формуле $F((a, b)) = D(a) - D(b)$. Интересно отметить, что ядро ker F не определяет F однозначно, как это имеет место для линейных форм на векторных пространствах. Действительно, если G — группа всех многочленов от вещественной переменной с рациональными коэффициентами (относительно операции сложения), то пусть x_0, x_1 — два различных трансцендентных числа. Рассмотрим аддитивные функционалы $F_1(f) = f(x_0)$, $F_2(f) = f(x_1)$. Тогда F_1 и F_2 имеют одинаковые ядра ($f \equiv 0$), хотя $F_1 \neq \lambda F_2$ ни для какого $\lambda \in R^1$. Однако каждый аддитивный функционал F на G_{ij} описывается полугруппой $S_F = \{x \in G_{ij} : F(x) \geqslant 0\}$ с точностью до положительного множителя. Далее это представление рассмотрим подробнее. А сейчас исследуем, как описать близость моделей друг к другу, т. е. как ввести топологию в X_{ij}? В настоящее время имеются различные подходы к этому вопросу (см., например, топологию Гренандера в § 2 этой главы).

Для всех известных подходов существуют общие требования: алгебраические операции над моделями должны быть непрерывными на вводимых топологиях. Поэтому предположим, что в X_{ij} введена хаусдорфова топология τ_{ij}, превращающая X_{ij} в топологическую полугруппу. Это означает, по определению, что отображение $(x, y) \to x * y$ декартова произведения $X_{ij} \times X_{ij}$ в X_{ij} непрерывно.

Введем в $X_{ij} \times X_{ij}$ топологию произведения. Базой в этой топологии являются множества вида $W = U \times V$, U, $V \in \tau_{ij}$. Поскольку G_{ij} является фактор-множеством $X_{ij} \times X_{ij}/\sim$, то введем в G_{ij} фактор-топологию ν_{ij}, объявив открытыми подмножества, прообразы которых при фактор-отображении $\varphi : X_{ij} \times X_{ij} \to X_{ij} \times X_{ij}/\sim$ — открытые подмножества в (X_{ij}, τ_{ij}). (Отображение φ переводит две эквивалентные пары моделей в один и тот же класс эквивалентности.) Пусть отображение $(x, a) \to x_a$, задаваемое введенным выше соответствием $x \to x_a$, $x \in X_{ij}$, $a \in X_{ij}$, непрерывно. Тогда группа G_{ij} в фактор-топологии ν_{ij} является топологической, т. е. непрерывны отображения $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$ и $\alpha \to \alpha^{-1}$ соответственно $G_{ij} \times G_{ij}$ в G_{ij} и G_{ij} в G_{ij}. При этом все классы эквивалентности замкнуты в $X_{ij} \times X_{ij}$, а множество $R = \{((a, b), (c, d)) : a, b, c, d \in X_{ij}, (a, b) = (c, d)\}$ замкнуто в $X_{ij} \times X_{ij} \times X_{ij} \times X_{ij}$.

Можно показать, что при сделанных предположениях φ — открытое отображение и поэтому G_{ij} — хаусдорфова топологическая группа. (Но φ не является замкнутым отображением.)

Наконец, конус P_{ij} (усложняющихся пар моделей) является замкнутым в ν_{ij} множеством, поскольку $X_{ij} \times \{e_i\}$ — замкнутое множество в $X_{ij} \times X_{ij}$.

Таким образом, $((G_{ij}, \nu_{ij}), P_{ij})$ — топологическая хаусдорфова группа с частичным порядком, заданным замкнутым конусом положительных элементов P_{ij}. Заметим, что если (X_{ij}, τ_{ij}) — компактная полугруппа, то при сделанных выше предположениях относительно X_{ij} (выполнимость законов сокращения) (X_{ij}, τ_{ij}) является топологической группой [153, гл. 2, теорема (9.16)].

Вернемся к критериям качества, определенным на полугруппе X_{ij}. Более подробно рассмотрим случай аддитивных функционалов F на G_{ij} как наиболее простых из возможных критериев качества. Поскольку (G_{ij}, ν_{ij}) — топологическая группа, то естественно потребовать от F непрерывности. Непрерывный аддитивный функционал на (G_{ij}, ν_{ij}) называется действительным характером. (При ближайших рассмотрениях индексы (ij) опускаем, так как рассматриваем только одну топологическую группу.) Введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть S — полугруппа группы G. Она называется инвариантной, если $xS = Sx$ (для любого $x \in G$). Если из $x^n \in S$ при некотором натуральном n и $x \in G$ следует, что $x \in S$, то подполугруппа S называется изолированной. Пусть G — группа, G^+ — инвариантная в G подполугруппа с единицей $e \in G^+$. Тогда пара $\{G, G^+\}$ называется предупорядоченной группой относительно предпорядка, определяемого следующим образом: пишем $x \geqslant y$ в том и только в том случае, когда $xy^{-1} \in G^+$ (при $x, y \in G$). Если $G^+ \cup (G^+)^{-1} = G$, то $\{G, G^+\}$ называется линейно предупорядоченной группой. Если $G^+ \cap (G^+)^{-1} = \{e\}$, то $\{G, G^+\}$ называется упорядоченной группой. Две предупорядоченные группы $\{G, G^+\}$, $\{H, H^+\}$ считаются изоморфными с сохранением предпорядка (y-изоморфными), если существует изоморфизм $i: G \to H$, причем $i(G^+) = H^+$.

Подполугруппа S называется максимально собственной в группе G, если для любого $x \overline{\in} S$ полугруппа, порожденная элементом x и подполугруппой S, совпадает с группой G. Запишем это так: $\text{Sg}\{x, S\} = G$.

Предложение 3.1. *Если S — максимально собственная подполугруппа в группе G, то единица группы $e \in S$.*

Предложение 3.2 *Пусть S — инвариантная максимально собственная подполугруппа в группе G. Тогда S — изолированная подполугруппа в том и только в том случае, когда*

$$G = S \cup S^{-1}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть S изолирована, $x_0 \overline{\in} S$. Тогда $\text{Sg}\{x_0, S\} = G$, и поэтому $x_0^{-1} = x_0^n s$, при некотором целом $n \geqslant 0$ и $s \in S$. Отсюда $(x_0^{-1})^{n+1} \in S$, и поэтому $x_0 \in S^{-1}$. Наоборот, пусть существует $x_0 \overline{\in} S$, хотя $x_0^n \in S$. Но из (3.15) следует, что $x_0^{-1} \in S$. Поэтому $x_0 = x_0^n (x_0^{-1})^{n-1} \in S$, что невозможно.

Предложение 3.3. Пусть S — замкнутая инвариантная подполугруппа топологической группы G, $N = S \cap S^{-1} \neq \varnothing$. Тогда G/N — упорядоченная топологическая отделимая группа, если в качестве множества положительных элементов в G/N взять замкнутую инвариантную подполугруппу $P = \varphi(S)$, где φ — естественный гомоморфизм (фактор-отображение) G на фактор-группу G/N.

Доказательство. Легко видеть, что G/N — топологическая отделимая группа, ибо N — замкнутый нормальный делитель.

Фактор-группа G/N упорядочена, ибо $P \cap P^{-1} = \{\tilde{e}\}$ — единица группы G/N, причем $\varphi^{-1}(P) = SN = S$ — замкнутое в G множество, поэтому P замкнуто в G/N. Инвариантность P в G/N следует из инвариантности S в G.

Теперь можно установить связь между действительными характерами на G и подмножествами G, определяющими их.

Теорема 3.1. *Пусть G — топологическая группа. Тогда*

1) *если α — нетривиальный действительный характер на G, то множество*

$$S(\alpha) = \{x \in G : \alpha(x) \geqslant 0\}$$

есть замкнутая инвариантная изолированная максимально собственная подполугруппа в группе G;

2) *если S — замкнутая инвариантная изолированная максимально собственная подполугруппа в топологической группе G, то существует нетривиальный действительный характер α на группе G, для которого $S(\alpha) = S$;*

3) *если α, β — нетривиальные действительные характеры на G, то $S(\alpha) = S(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = t\beta$ при некотором вещественном $t > 0$.*

Доказательство.

1) Легко видеть, что $S(\alpha)$ — изолированная инвариантная подполугруппа. Если $x \bar{\in} S(\alpha)$, $x, y \in G$, то при достаточно большом натуральном n $\alpha(yx^{-n}) = \alpha(y) - n\alpha(x) > 0$. Поэтому $y = (yx^{-n})x^n$, причем $yx^{-n} \in S(\alpha)$. А это означает, что подполугруппа S — максимально собственная. Замкнутость S следует из непрерывности действительного характера α.

2) Рассмотрим фактор-группу G/N, где $N = S \cap S^{-1} \neq \varnothing$. По предложению 3.3 G/N — упорядоченная топологическая отделимая группа с замкнутым множеством P положительных элементов. G/N линейно упорядочена. Действительно, если $\tilde{x} \bar{\in} P = \varphi(S)$ (где φ — естественный гомоморфизм G на G/N), то $S \cap \varphi^{-1}(\tilde{x}) = xN \cap S = \varnothing$. Поэтому в силу предложения 3.2 $x \in S^{-1}$, т. е. $\varphi(x) = \tilde{x} \in \varphi(S^{-1}) = P^{-1}$, G/N архимедово упорядочена. В самом деле, если $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in P$, $\tilde{x} > \tilde{e}$, то $\varphi^{-1}(\tilde{x}) = xN \neq N$, поэтому $xS \neq S$. Рассмотрим $z \in S \setminus xS$. В силу максимальности S получаем, что $\mathrm{Sg}\{x^{-1}z, S\} = G$, так как $x^{-1}z \bar{\in} S$. Но тогда при $y \in \varphi^{-1}(\tilde{y})$ $y^{-1} = (x^{-1}z)^{n_0} s$ и некотором целом $n_0 \geqslant 0$ и $s \in S$. Из инвариантности S получаем, что $y^{-1} \in x^{-n_0} S$, т. е. $[\varphi^{-1}(\tilde{y})]^{-1} \subset x^{-n_0} S$. Значит, $\tilde{y}^{-1} \in \tilde{x}^{-n_0} P$, т. е. $\tilde{y}^{-1} = \tilde{x}^{-n_0}\tilde{p} \geqslant \tilde{x}^{-n_0}$, ибо $\tilde{p} \geqslant \tilde{e}$. Поэтому $\tilde{x}^{n_0} \geqslant y$.

Теперь по теореме Гельдера [61] имеем, что G/N y-изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы R всех вещественных чисел. Пусть $i : G/N \to R$ — этот изоморфизм. Тогда i непрерывен, так как любой интервал в G/N открыт. Действительно, если $I(\tilde{a}, \tilde{b}) = \{\tilde{x} \in G/N : \tilde{a} <$

$< \tilde{x} < \tilde{b}\}$, то $G/N \setminus I\,(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{a}P^{-1} \cup bP$ — замкнутое множество в топологической группе G/N. Если положить $\alpha = i\varphi$, то α — искомый действительный характер на группе G, так как $S(\alpha) = S$.

3) Доказательство этого пункта совпадает с дискретным случаем [175]. Приведем его.

Пусть $\alpha \neq t\beta$ при любом $t > 0$. Тогда либо $\alpha = r\beta$ при $r \leqslant 0$, откуда $S(\alpha) = -S(\beta) \neq S(\beta)$, либо α и β линейно независимы, т. е. существуют такие $x, y \in G$, что

$$\begin{vmatrix} \alpha(x) & \alpha(y) \\ \beta(x) & \beta(y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому найдутся такие числа $c, d \in R$, для которых

$$c\alpha(x) + d\alpha(y) = 1, \quad c\beta(x) + d\beta(y) = -1.$$

Затем выбирая рациональные числа $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$ так, чтобы $\frac{m_1}{n} \times \alpha(x) + \frac{m_2}{n}\alpha(y) > 0$ и $\frac{m_1}{n}\beta(x) + \frac{m_2}{n}\beta(y) < 0$, получаем $x^{m_1}y^{m_2} \in S(\alpha) \setminus S(\beta)$.

Теорема 3.1 доказана.

Назовем подполугруппу S архимедовой, если для любого $x \in S$ справедливо $\mathrm{Sg}\,\{x^{-1}; S\} = G$. (Такие подполугруппы в дискретном случае [174] названы открытыми).

Теорема 3.2. *Пусть G — топологическая группа. Тогда*

1) если α — нетривиальный действительный характер на G, то

$$S_0(\alpha) = \{x \in G : \alpha(x) > 0\}$$

есть подполугруппа со свойствами: а — инвариантная; б — открытая; в — без единицы; г — архимедова; д — максимальная по свойствам «в» — «г»;

2) если подполугруппа S удовлетворяет свойствам «а» — «д» предыдущего пункта, то существует нетривиальный действительный характер α на G, для которого $S_0(\alpha) = S$;

3) если α, β — нетривиальные действительные характеры на G, то $S_0(\alpha) = S_0(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = t\beta$ при некотором вещественном $t > 0$.

Доказательство.

1) Легко видеть, что $S_0(\alpha)$ — подполугруппа со свойствами «а» — «г». Докажем «д». Пусть архимедова подполугруппа $F \supset S_0(\alpha)$, $F \neq S_0(\alpha)$. Тогда $F \cap (S(\alpha))' \neq \varnothing$. В противном случае $F = S_0(\alpha) \cup F_1$, где $F_1 = F \cap (S \cap S^{-1}) \neq \varnothing$. Если $x \in F_1$, то $G = \mathrm{Sg}\{x^{-1}, F\} = \mathrm{Sg}\{x^{-1}, F_1 \cup S_0(\alpha)\} = \mathrm{Sg}\{x^{-1}, F_1\} \cup \mathrm{Sg}\,\{x^{-1}; S_0(\alpha)\} \subseteq S(\alpha) \neq G$. Поэтому единица группы $e \in F$.

2) Положим $T = \{x \in G : xS \subseteq S\}$. Тогда T — инвариантная подполугруппа, ибо S такова.

Докажем следующий вспомогательный факт: если $x \bar{\in} T$, то существует такое натуральное m, что

$$x^{-m} \in S. \tag{3.16}$$

Рассмотрим множество $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} x^k S$. Из инвариантности S следует, что A — подполугруппа, причем $S \subset A$. Если $a = x^k s = \bar{s} x^k \in A$, $g \in G$, то существует такое натуральное $n = 2p$, что

$$a^n g = x^{2pk} (\bar{s}s)^p g = x^{2pk} s_1,$$

где $s_1 = (\bar{s}s)^p g \in S$. Значит, подполугруппа A архимедова. Поэтому либо $S = A$, либо единица группы $e \in A$. Но первое невозможно, ибо $x \bar{\in} T$.

Пусть теперь m — наименьшее натуральное, для которого выполняется (3.16). Положим $B = \bigcup_{k=0}^{m-1} x^k S^{-1}$. Как и выше, из инвариантности и архимедовости S^{-1} получаем, что B — архимедова подполугруппа. Единица $e \bar{\in} B$, ибо иначе $x^{-k_0} \in S^{-1}$ при некотором натуральном k_0, $1 \leqslant k_0 \leqslant m - 1$, откуда следовало бы, что $x^{-m} x^{k_0} = x^{-(m-k_0)} \in S$. Поэтому в силу максимальности S получаем, что $S^{-1} = B$. Значит, $xS^{-1} \subseteq S^{-1}$, т. е. $x \in T^{-1}$. Этим доказано соотношение

$$G = T \cup T^{-1}. \tag{3.17}$$

Далее, если $x \bar{\in} T$, то в силу (3.16) получаем, что

$$\mathrm{Sg}\,\{x, T\} \supset \mathrm{Sg}\,\{x^m, S\} = G.$$

Значит, T — максимально собственная подполугруппа. Но любая максимально собственная подполугруппа или замкнута, или всюду плотна в топологической группе G. Поэтому, так как $T \cap S^{-1} = \varnothing$ и S^{-1} открыта, получаем, что T замкнута. Теперь, применяя предложение 3.2 и условие 2 теоремы 3.1, видим, что существует нетривиальный действительный характер α на G, причем $S(\alpha) = T$. Ясно, что $S_0(\alpha) = S$.

3) Это доказательство аналогично доказательству условия 3 теоремы 3.1.

Назовем слабо выпуклыми множествами в топологической группе G элементы класса $\mathfrak{P}$ подмножеств группы G вида $M = \bigcap x_\lambda S_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$ — некоторое множество индексов, $S\lambda$ при любом λ из Λ — изолированная замкнутая инвариантная максимально собственная подполугруппа в G, $x_\lambda \in G$.

Отметим, что в локально выпуклых топологических векторных пространствах (т. в. п.) слабо выпуклые множества и выпуклые в линейном смысле замкнутые множества совпадают, как видно из следствия 1 к теореме 9.2 [159, гл. II].

Назовем топологическую группу G слабо локально выпуклой группой (с. л. в. г.), если для любой окрестности единицы U группы G существует окрестность единицы $V \subseteq U$, что замыкание $\bar{V} \in \mathfrak{P}$. Оказывается, что любая отделимая с. л. в. г.— коммутативная.

Предложение 3.4. Если G — отделимая с. л. в. г., то для любого $x \in G$ $(x \neq e)$ существует действительный характер α на G, что $\alpha(x) \neq 0$. (Иными словами, на группе G существует достаточно много действительных характеров.)

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in G$ $(x \neq e)$ и для любого $\alpha \in G'$ (где G' — множество всех действительных характеров на G) имеем $\alpha(x) = 0$. В силу теоремы 3.1 $x \in S(\alpha)$, поэтому $\Psi = \bigcap_{\alpha \in G'} S(\alpha) \neq \neq \{e\}$. С другой стороны, в любой окрестности единицы U существует окрестность V такая, что $\overline{V} \subseteq U$, $\overline{V} \in \mathfrak{P}$.

Пусть $\overline{V} = \bigcap_{\Lambda} x_\lambda S_\lambda$ (Λ — некоторое множество индексов). Тогда единица группы $e \in x_\lambda S_\lambda$ (для любого $\lambda \in \Lambda$), поэтому $x_\lambda^{-1} \in S_\lambda$. Если также $x_\lambda \in S_\lambda$, то $x_\lambda S_\lambda = S_\lambda$, а если $x_\lambda \overline{\in} S_\lambda$, то $S_\lambda \subseteq x_\lambda S_\lambda$. Поэтому $\Psi \subseteq \bigcap_{\Lambda} S_\lambda \subseteq \bigcap_{\Lambda} x_\lambda S_\lambda = \overline{V}$. Но $\bigcap \overline{V} \subseteq \bigcap U = \{e\}$, т. е. $\Psi = = \{e\}$.

Следствие. Если G — отделимая с. л. в. г., то в G нет компактных элементов.

Введем теперь отображение φ топологической группы G в топологическое декартово произведение $\overline{\Pi}\{R_\alpha : \alpha \in G'\}$ (где R_α — аддитивная группа всех вещественных чисел в метрической топологии; G' — семейство всех действительных характеров на G) следующим образом: $\varphi(x) = \{\alpha(x), \ \forall \alpha \in G'\}$.

Свойства отображения φ:

1) если G — отделимая с. л. в. г., то φ — непрерывный изоморфизм группы G на некоторую подгруппу R_∞ группы $\overline{\Pi}\{R_\alpha : \alpha \in G'\}$ (R_∞ рассматривается в индуцированной тихоновской топологии).

Действительно, если $x \neq y$, то по предложению 3.4 существует $\alpha \in G'$ такой, что $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. Непрерывность φ следует из непрерывности каждого $\alpha \in G'$.

Напомним, что проективной топологией σ на группе G относительно данного семейства гомоморфизмов G' группы G в топологические группы R_α $(\alpha \in G')$ называется слабейшая на группе G топология, в которой все $\alpha \in G'$ непрерывны. Топология σ порождается окрестностями вида $\bigcap \{\alpha^{-1}(U_\alpha)\ \alpha \in H\}$, где H — конечное подмножество в G', U_α — окрестности нуля в R_α.

2) Пусть (G, u) — отделимая с. л. в. г., σ — проективная топология на G относительно семейства G' действительных характеров на группе (G, u). Тогда (G, σ) — топологическая отделимая группа, причем $\varphi : (G, \sigma) \to R_\infty$ — топологический изоморфизм.

Легко видеть, что (G, σ) — топологическая отделимая группа, так как семейство G' разделяет точки из G.

Докажем непрерывность $\varphi^{-1} : R_\infty \to (G, \sigma)$. Если U — произвольная окрестность единицы в (G, σ), то найдется конечное $H \subset G'$, и окрестности нуля U_α в R_α $(\alpha \in H)$ такие, что $\bigcap\{\alpha^{-1}(U_\alpha), \alpha \in H\} \subset U$.

Пусть сеть $\nu_i = \{\alpha(x_i), \alpha \in G'\}$ (где $i \in I$ — направленное множество индексов) сходится к нулю в R_∞. Тогда существует $i_0 = = \max\{i_\alpha, \alpha \in H\}$, что при $i \geqslant i_0$ будет $\alpha(x_i) \in U_\alpha$ (для любого $\alpha \in \in H$). Поэтому $x_i \in \bigcap \{\alpha^{-1}(U_\alpha), \alpha \in H\}$ (при любом $i \geqslant i_0$). Это означает, что сеть x_i сходится к единице e в группе (G, σ).

Теорема 3.3. *Эквивалентны следующие условия.*

1) (G, u) — связная отделимая с. л. в. г., полная в проективной *топологии σ на G относительно семейства G′ действительных характеров на (G, u);*

2) (G, u) — слабо полное отделимое локально выпуклое т. в. п.

Доказательство. Понятно, что (G, σ) — связная отделимая полная группа. В силу свойства 2 группа (G, σ) топологически изоморфна подгруппе R_∞ группы $\overline{\Pi}\,\{R_\alpha : \alpha \in G'\}$. Поэтому R_∞ — полная связная подгруппа. Известно, что $\overline{\Pi}\,\{R_\alpha : \alpha \in G'\} = \underleftarrow{\lim}\, g_{H,\Lambda}\, G_\Lambda$ — проективный предел конечномерных векторных групп $G_\Lambda = \Pi\,\{R_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, где $\{\Lambda\}$ — семейство всех непустых конечных подмножеств G', упорядоченное по включению, $g_{H,\Lambda}$ — проекция G_Λ на G_H, если $H \subset \Lambda$. Учитывая следствие к предложению 9 [26, гл. I, § 4], получаем, что

$$R_\infty = \overline{R}_\infty = \underleftarrow{\lim}\, \overline{\rho_\Lambda (R_\infty)},$$

где ρ_Λ — проекция $\overline{\Pi}\,\{R_\alpha : \alpha \in G'\}$ на G_Λ. Но $\overline{\rho_\Lambda (R_\infty)}$ — связная замкнутая подгруппа в G_Λ, поэтому $\overline{\rho_\Lambda (R_\infty)} = R^p$, где $p \leqslant \dim G_\Lambda$. Значит, в силу теоремы 5.3 [159, гл. II] $R_\infty \simeq (G, \sigma)$ — полное локальное выпуклое т. в. п. Поэтому если $\{U : U = \bigcap (x_i + S_i),\ i \in I = I(U)\}$ — базис фильтра слабо выпуклых симметрических окрестностей нуля в (G, u), то каждое S_i есть линейное полупространство в векторном пространстве (G, u). Отсюда каждое U — линейно выпуклое закругленное множество, причем радиальное в силу связности (G, u). Поэтому (G, u) — локальное выпуклое т. в. п. (см. [159, § 1.2]).

Д. А. Райков [121] ввел понятие топологической векторной группы, т. е. т. в. п. над полем P вещественных или комплексных чисел, причем P наделено дискретной топологией. Топологическая векторная группа, обладающая базисом окрестностей нуля, состоящим из выпуклых множеств, называется локально выпуклой группой (л. в. г.). Любая топология л. в. г. в векторном пространстве E порождается базисом окрестностей нуля $\mathfrak{U} = \{U\}$ со свойствами: 1) каждое $U \in \mathfrak{U}$ — выпуклое закругленное множество; 2) для любого $U \in \mathfrak{U}$ и каждого $\lambda \in P$ существует множество $V \in \mathfrak{U}$ такое, что $\lambda V \subseteq U$ [56]; для л. в. г. в [56] построена теория двойственности, аналогичная соответствующей теории для локально выпуклых т. в. п.

В связи с этим возникает вопрос о возможности распространения результатов этой теории на более широкие классы топологических групп. Здесь для класса с. л. в. г. получен аналог теоремы двойственности Макки — Аренса и приводятся некоторые следствия. В качестве примеров рассмотрим следующее.

1) Если с. л. в. г. (G, τ) локально компактна, то $(G, \tau) \cong R^n \times D$, где D — абелева группа без кручения в дискретной топологии. Это следует из предыдущих утверждений и работы [153, теорема 24.36].

2) Каждая л. в. г. Д. А. Райкова является с. л. в. г., потому что в любой л. в. г. существует базис окрестностей нуля, состоящий из слабо замкнутых закругленных подмножеств, согласно [56, предложение 4]

3) Пусть G — абелева группа без кручения, F — семейство гомоморфизмов G в R, разделяющее точки G, $\sigma(G, F)$ — слабая топология в G, порожденная семейством F, т. е. слабейшая в G топология, в которой все $f \in F$ непрерывны. Тогда $(G, \sigma(G, F))$ — с. л. в. г.

4) Среди незамкнутых связных подгрупп в R^n существует плотная в R^n нелокально компактная с. л. в. г., что следует из работы [26, гл. IV, § 1].

Если (G, τ) — с. л. в. г. и $F = (G, \tau)'$, то в силу сказанного выше можно рассматривать инъективный гомоморфизм $i : G \to F^*$, где F^* — векторное пространство всех линейных отображений векторного пространства F в R следующего вида: $i(g)(f) = f(g) = \langle g, f \rangle$ для любых $f \in F$, $g \in G$. Далее отождествим G и $i(G)$.

Рассмотрим вопрос: как описать все с. л. в. г. топологии τ на группе G такие, что векторное пространство $(G, \tau)'$ всех τ-непрерывных гомоморфизмов G в R отождествимо (алгебраически) с F. В отличие от случаев л. в. п. и л. в. г. одна из трудностей, здесь возникающих, состоит в том, что с. л. в. г. не обладают свойством Хана — Банаха, т. е. не всякий непрерывный гомоморфизм некоторой подгруппы с. л. в. г. (G, τ) (в индуцированной топологии) в R можно продолжить до τ-непрерывного гомоморфизма (G, τ) в R. Отметим одно вспомогательное утверждение.

Предложение 3.5. Для того чтобы нетривиальный гомоморфизм топологической группы (G, τ) в R был τ-непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы существовало τ — открытое множество T в G такое, чтобы f был ограничен на T сверху.

Действительно, пусть $T = T^{-1}$ и $|f(T)| \leqslant 1$ (это не ограничивает общности). Тогда для любого натурального n существует τ-окрестность единицы V такая, что $V^n \subseteq T$. Поэтому $|f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ для любого $x \in V$.

Теорема 3.4. *Для того чтобы $(G, \tau)' = F$, где τ — топология с. л. в. г. в G, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) существовал в (G, τ) базис симметрических окрестностей нуля $\mathfrak{U} = \{U\}$ такой, что поляры окрестностей $U_F^0 = \{y \in F : \langle g, y \rangle < 1$ при $g \in U\}$ образуют семейство $\sigma(F, G)$-полных выпуклых закругленных подмножеств, покрывающее векторное пространство F (здесь $\sigma(F, G)$ — слабая в F топология, порожденная семейством $G \subset F^*$);

2) пусть M — изолированная максимально собственная подполугруппа в G; если τ — замыкание $\mathrm{Cl}_\tau M \neq G$, то поляра подполугруппы $M_F^0 \neq \{\Theta\}$ (Θ — нуль векторного пространства F).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U} = \{U\}$ — некоторый базис симметрических τ-окрестностей нуля и $\{f_i, i \in I\}$ — произвольная $\sigma(F, G)$-сеть Коши элементов из поляры U_F^0, $U \in \mathfrak{U}$. Это означает по определению топологии $\sigma(F, G)$, что для любого $x \in G$ существует вещественное число $p(x) = \lim\limits_i \langle x, f_i \rangle$. Но $p(x)$ — гомоморфизм G в R, причем $p(x) \leqslant 1$ при $x \in U$. Поэтому $p \in U_F^0 \subset (G, \tau)'$ по предложению 3.5. Докажем необходимость условия 2. Заметим, что любая максимально собственная подполугруппа топологической группы или замкнута, или всюду плотна. Поэтому если M удовлетворяет предположениям условия 2, то M — τ-замкнута, и тогда существует нетривиальный τ-непрерывный гомоморфизм $f:(G, \tau) \to R$, причем $M = \{x \in G : \langle x, f \rangle \leqslant 0\}$ по теореме 3.1. Отсюда, так как $f \in F = (G, \tau)'$, получаем, что $M_F^0 = \{y \in F : \langle x, y \rangle \leqslant 1, x \in M\} \neq \{\Theta\}$.

Обратно, пусть $f \in (G, \tau)'$. Рассмотрим τ-замкнутую изолированную максимально собственную подполугруппу $M = \{x \in G : f(x) \leqslant 0\}$. Возьмем $y \in M_F^0$, $y \neq \Theta$, используя условие 2. Тогда подполугруппа $S(y) = \{x \in G : \langle x, y \rangle \leqslant 0\} = M$. А это означает, что $y = \alpha f$ при некотором вещественном $\alpha > 0$ по теореме 3.1. Поэтому $f \in F$, т. е. $(G, \tau)' \subset F$. Обратное включение вытекает из условия 1 и предложения 3.5.

Теорема 3.5. *Эквивалентны следующие условия.*

1) (G, τ) *— связная с. л. в. г., причем если* $F = (G, \tau)'$ и H *— линейная оболочка* G *в* F^*, *то* G *— замкнутое в слабой топологии* $\sigma(H, F)$ *подмножество* H;

2) (G, τ) *— локально выпуклое т. в. п.*

Доказательство. Докажем лишь $1 \Rightarrow 2$. Для этого достаточно убедиться, что G — $\sigma(H, F)$ — плотно в векторном пространстве H. Это означает, что для любого $y \in H$ и любой $\sigma(H, F)$-окрестности нуля

$$U = U(\varepsilon, f_1, \ldots, f_n) = \{x \in H : |\langle x, f_i \rangle| \leqslant \varepsilon, f_i \in F\}$$

справедливо равенство

$$(y + U) \cap G \neq \varnothing. \tag{3.18}$$

Рассмотрим непрерывный гомоморфизм $\varphi : (H, \tau(H, F)) \to R^n$ вида: $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

Пусть вектор $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \varphi(H)$ таков, что скалярное произведение

$$(P, \varphi(g))_{R^n} = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(g)$$

принимает целые значения при любом $g \in G$. Но тогда $(P, \varphi(g))_{R^n} = 0$ в силу связности (G, τ) и непрерывности линейной формы (P, Q) по $Q \in R^n$. Поэтому если $\varphi(y) = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t \varphi(g_t)$ для некоторых $\lambda_t \in R$ и $g_t \in G$, то получаем

$$(P, \varphi(y))_{R^n} = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(g_t) = 0.$$

Отсюда точка $\varphi(y)$ является точкой прикосновения подгруппы $\varphi(G)$ группы R^n, что следует из [26, гл. VII, § 1, предложение 6], а это эквивалентно (3.18). Значит $G = H$. Далее, как и в теореме 3.3, убеждаемся, что (G, τ) — л. в. п.

Если E — л. в. п., то, как известно, для более полного изучения векторной двойственности $\langle E, E' \rangle$ используются как топологии, согласованные с данной двойственностью, так и система так называемых ограниченных подмножеств пространства E. Поэтому при построении аналога теории двойственности для класса топологических групп естественно ввести в рассмотрение в группе понятие ограниченного множества, не зависящее от топологизации группы.

Воспользуемся для этой цели некоторыми результатами Н. Я. Виленкина [30]. Система подмножеств $\mathfrak{U} = \{A\}$ задает ограниченность в топологической группе (G, τ), если справедливо следующее: 1) $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow A^{-1} \in \mathfrak{U}$ $(A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\})$; 2) $A \in \mathfrak{U}$, $B \subset A \Rightarrow B \in \mathfrak{U}$; 3) $A, B \in \mathfrak{U} \Rightarrow A \cup B, AB \in \mathfrak{U}$; 4) для любого $g \in G$ $\{g\} \in \mathfrak{U}$. Каждое $A \in \mathfrak{U}$ называется ограниченным подмножеством в группе (G, τ). Если (G, τ) — с. л. в. г., то ограниченность $\mathfrak{U}$ назовем слабо выпуклой, если для любого $A \in \mathfrak{U}$ существует слабо выпуклое подмножество $B \in \mathfrak{U}$ такое, что $A \subseteq B$. В этом случае введем в векторном пространстве $F = (G, \tau)'$ топологию α, порождаемую полярами A_F^0 подмножеств системы $\mathfrak{U}$. Тогда (F, α) — отделимая локально выпуклая группа Д. А. Райкова. Рассмотрим векторное пространство E всех α-непрерывных линейных форм на F. Если E отождествимо (алгебраически) с $i(G)$, то назовем (G, τ) $\mathfrak{U}$-полурефлексивной с. л. в. г.

Заметим, что в векторном пространстве топология с. л. в. г. может не быть топологией л. в. г. Д. А. Райкова, потому что не каждый гомоморфизм векторного пространства в R является линейной формой. Однако $\mathfrak{U}$-полурефлексивная с. л. в. г. есть л. в. г. Д. А. Райкова, и для любого $A \in \mathfrak{U}$ выпуклая оболочка A (в линейном смысле) принадлежит $\mathfrak{U}$.

Теорема 3.6. *Пусть (G, τ) — с. л. в. г. со слабо выпуклой ограниченностью $\mathfrak{U}$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) (G, τ) — связная, причем каждое ограниченное слабо выпуклое в (G, τ) подмножество полно в слабой топологии $\sigma(G, F)$ и слабо выпукло в пополнении $\mathfrak{G}$ группы G в топологии $\sigma(G, F)$;

2) (G, τ) — $\mathfrak{U}$-полурефлексивное л. в. п.

Доказательство. Докажем $1 \Rightarrow 2$. Каждое $f \in F$ допускает однозначное продолжение до непрерывного гомоморфизма $f : \mathfrak{G} \to R$ [159, гл. III, § 3, предложение 8]. Поэтому можно отождествить F и векторное пространство $\mathfrak{G}'$ всех непрерывных гомоморфизмов $\mathfrak{G}$ в R. Пусть H — линейная оболочка G в F^* и $h \in H$. Убедимся, что для всех $f \in F$ будет выполняться $\langle h, f\rangle = \langle g, f\rangle$ при некотором $g \in G$. Если это не так, то существует $h_0 \in H \setminus G$, причем h_0 — α-непрерывный линейный функционал на F. Поэтому существует α-окрестность нуля $S = A^0$ в (F, α) (для некоторого $A \in \mathfrak{U}$) такая, что $\langle h_0, S\rangle \leqslant 1$. Поэтому для любого $f \in F$ такого, что $\langle A, f\rangle \leqslant 1$, справедливо следующее:

$$\langle h_0, f\rangle \leqslant 1. \tag{3.19}$$

Из доказательства теоремы 3.5 видно, что G — $\sigma(H, F)$-плотно в H, поэтому h_0 можно рассматривать как элемент группы $\mathfrak{G}$. Пусть $A \subseteq B$, $B \in \mathfrak{U}$, где подмножество B — слабо выпуклое в (G, τ), а поэтому и в $\mathfrak{G}$. Если $B = \{g \in G\colon f(g) \leqslant \alpha_f,\ f \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}',\ -\infty < \alpha_f \leqslant +\infty\}$, то найдется такой $f_0 \in \mathfrak{B}$, что $f_0(h_0) > 1$, хотя $f_0(B) \leqslant 1$. Тем более $f_0(A) \leqslant$

$\leqslant 1$. Это, однако, противоречит (3.19). Значит $G = H$. Из связности (G, τ), как и в теореме 3.3, получаем, что (G, τ) — л. в. п.

Пусть $y \in E = (F, \alpha)'$. Тогда поляра $\{y\}_F^0 = V$ — α-окрестность нуля в (F, α). Поэтому существует слабо выпуклое подмножество $C \in \mathfrak{U}$ такое, что $C_F^0 \subset V$ и C содержит нуль G. Заметим, что C — линейно выпуклое (τ-замкнутое) подмножество, так как (G, τ) — л. в. п. Отсюда, если W — биполяра подмножества C (относительно двойственности $\langle E, F\rangle$), то $y \in W$ и W — $\sigma(E, F)$ — замыкание C в силу теоремы о биполяре. Однако C — $\sigma(G, F)$ — полное по условию, поэтому $W = C$. Значит $G = E$.

Докажем $2 \Rightarrow 1$. По условию $G = (F, \alpha)'$, т. е. топология α согласована с векторной двойственностью $\langle F, G\rangle$. Поэтому α — топология равномерной сходимости на некотором семействе $\sigma(G, F)$-полных выпуклых закругленных подмножеств, покрывающем G, в соответствии с [56, теорема 4]. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Приведенные результаты, полученные в [154, 155, 175], показывают, что при изучении групп G_{ij} пар математических моделей, если они являются топологическими (не локально компактными) абелевыми с достаточной системой действительных характеров G'_{ij} (в которую могут быть включены критерии качества рассматриваемых моделей), можно использовать методы, близкие к применяемым в теории топологических векторных пространств [159]. Понятия слабо выпуклого множества, системы ограниченных множеств в группе допускают естественную интерпретацию в рамках теории математического моделирования. Топология в группе G_{ij} гарантирует близость моделей по основным (с точки зрения исследователя) характеристикам моделей; в то же время слабая выпуклость и ограниченность обеспечивают близость по критериям качества и ограничениям на структурные свойства моделей.

При решении задачи выбора оптимальной ММ часто можно ограничиться допустимой областью вида

$$W = \bigcap \{S_F : F \in X \subset G'_{ij}\}.$$

Фиксируя некоторый функционал сложности D_s, приходим к задаче математического программирования $\min \{F_s(g) : g \in W\}$, где $F_s((a, b)) = D_s(a) - D_s(b)$, на группе G_{ij}. В частности, если группа G_{ij} изоморфно вкладывается в евклидово пространство R^n, то получаем обычную задачу дискретного программирования (см., например, [151]).

Вернемся к ситуации, рассмотренной в примере 3, когда X_α есть свободная полугруппа на множестве X. Процесс образования модели $a = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ можно представить как путь между двумя фиксированными вершинами на некотором графе G. При этом дуги графа G соответствуют элементам множества X, а вершины — соединению элементов между собой. Каждому пути на G соответствует определенная последовательность элементарных блоков из X, которые определяют модель из X_α. Пусть задан связный, ориентированный граф G, соответствующий в указанном смысле полугруппе X_α. Вершины графа G пометим числами от 1 до n. Пусть заданы N критериев качества $K_1, K_2, \ldots, K_N$. Решение, минимизирующее критерий

K_1, может иметь «плохие» значения по другим критериям, т. е. очень большие. Для улучшения «плохих» значений следует сделать уступку по критерию K_1. Если полученное решение снова неудовлетворительно, то нужно опять сделать уступку и т. д. В итоге приходим к процедуре перебора путей на G, имеющих неубывающую последовательность значений по K_1, и выбору из них наиболее предпочтительного. Эту задачу можно свести к задаче поиска k — кратчайших путей на графе G. Пусть все пути на графе G от вершин 1 до n записаны в порядке неубывания одного из критериев. Если удалить из этого списка все кратчайшие пути, то кратчайший из оставшихся путей называется 2-кратчайшим. Аналогично определяется k-кратчайший путь. Определим K_1 как функционал сложности вида

$$K_1(a) = \sum_a \alpha_i, \text{ где } \alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } i \in a, \text{ т. е. блок } x_i \in a, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Этот критерий означает, что сложность модели возрастает при увеличении количества звеньев, из которых состоит модель $a = (x_1, \ldots, x_p)$. Итак, мы подошли к задаче поиска k-кратчайшего пути на графе G, когда дуги нулевой или единичной длины. Различные алгоритмы поиска кратчайших путей рассмотрены в [41, 151 и др.].

Здесь рассмотрим один из простых алгоритмов [41], позволяющий существенно сократить вычисления за счет особенностей данной задачи.

Опишем граф G с помощью матрицы смежности вершин $A = \| a_{ij} \|$ порядка $n \times n$. Элемент a_{ij} матрицы A определяет длину дуги, которая начинается в вершине i и заканчивается в вершине j. У нас $a_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$; $j = i + 1, \ldots, n$. Если дуга между вершинами i и j отсутствует, то считаем $a_{ij} = +\infty$. Если p_k — некоторая дуга, то обозначим $q(p_k)$ — вершину, в которой эта дуга начинается, а $r(p_k)$ — вершина, в которой дуга оканчивается. Предположим, что граф G не имеет петель и контуров, что вполне согласуется с рассматриваемой задачей оптимизации. Длины дуг равны единице или нулю, что отмечалось выше. В этом случае k-кратчайший путь можно найти следующим образом. Назовем вершину 1 вершиной нулевого уровня. Все вершины, соединенные одной дугой с вершиной 1, называются вершинами первого уровня. Вершины l-го уровня — это вершины, соединенные одной дугой с вершинами $(l - 1)$-го уровня. Образуем множество A_i всех концов дуг, выходящих из вершин, принадлежащих множеству A_{i-1}, i — номер уровня. Для нахождения k-кратчайшего пути необходимо прекратить процесс заполнения уровней после того, как вершина n появится на некоторых уровнях $l_1, l_2, \ldots, l_k$, где числа $l_1, l_2, \ldots, l_k$ указывают длины кратчайшего, 2-кратчайшего, ..., k-кратчайшего путей соответственно. Обозначим D_0 подмножество множества A_i, состоящее из вершин, принадлежащих k-кратчайшему пути и лежащих на i-м уровне, а E_i — подмножество дуг, принадлежащих k-кратчайшему пути и приводящих к вершинам подмножества D_i, т. е. $r(s) \in B_i$ при $s \in E_i$. Ясно, что $D_i \subseteq A_i$. Поскольку вершина n появляется на уровне l_k в случае k-кратчайшего пути, положим $D_{l_k} = \{n\}$. Для построения D_l и E_l поступим рекуррентно. Если подмножество D_l уже построено, то E_i состоит из таких дуг s, что $q(s) \in A_{l-1}$ и $r(s) \in D_l$, а D_{l-1} содержит вершины $q(s)$ для всех $s \in E_l$. В конце процедуры получаем $D_0 = \{1\}$. Для получения k-кратчайшего пути от вершины 1 до вершины n выберем последовательно дуги $s_{l_k} \in E_k$ такие, что

$$q(s_{l_k}) \in D_{l_{k-1}}, \quad r(s_{l_k}) \in D_{l_k}, \quad r(s_{l_k}) = q(s_{l_{k+1}}).$$

Тогда $r(s_{l_k}) = n$, $q(s_{i_1}) = 1$, и этот путь является k-кратчайшим, поскольку длина пути от вершины 1 до любой точки подмножества D_l равна i, т. е. номеру уровня, а вершина n появляется k-й раз на уровне l_k. Для нахождения всех k-кратчайших путей необходимо для всех вершин из D_i рассмотреть все входящие и исходящие из них дуги. Приведенные соображения в алгоритмической форме можно записать так.

Заполнение уровней следует производить по следующему правилу. 1) Вершину 1 поместим на уровень 0. 2) Положим $i = 0$. 3) Для любой вершины p уровня i рассмотрим все исходящие из нее дуги. Если длина дуги s, исходящей из вершины p, равна 0, то вершину конца этой дуги поместим на уровень i. В противном случае эту вершину следует поместить на уровень $i + 1$. Если на уровне i находятся несколько одинаковых вершин, то оставляем только одну из них. Когда все вершины i (включая вновь добавленные) просмотрены, переходим к этапу 4. В противном случае продолжаем заполнение. 4) Если на всех заполненных уровнях вершина n встречается ровно k раз, переходим к этапу 5. Если вершина n встретилась меньшее число раз, положим $i = i + 1$. Если множество A_l не пусто, то перейдем к этапу 3. В противном случае k-кратчайших путей не существует. 5) Строим k-кратчайший путь по правилу: а) полагаем $p = n$, $l = 1$; б) вводим множество Q_p^0, состоящее из дуг нулевой длины, входящих в p, и множество Q_p^1, состоящее из дуг единичной длины, входящих в вершину p; в) выбираем произвольную вершину $m \in (Q_p^0 \cap A_i) \cup (Q_p^1 \cap A_{l-1})$. Запоминаем дугу $s(l)$ такую, что $q(s) = m$, $r(s) = p$. Если $m = 1$, то дуги $s(1), s(2), \ldots$ $\ldots, s(l)$ образуют k-кратчайший путь от 1 до n. Если $m \neq 1$, полагаем $p = m$, $l = l + 1$. Если точка $m \in A_l$, переходим к этапу 2.

Можно показать [41], что количество операций R, необходимых для заполнения i уровней, имеет в данном случае оценку сверху вида

$$R \leqslant \frac{n(i+1)}{2}(n - i - 1) + \frac{i^3}{3} + \frac{i^2}{2} + \frac{i}{3}.$$

ГЛАВА II

СХЕМЫ МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Процесс создания сложной технической системы — многоэтапный. При этом достаточно трудоемки и длительны этапы проектирования и испытания. Как известно, современные технические системы достигли такого уровня сложности, что практически невозможно рассчитывать на получение всех исходных характеристик в ходе натурного эксперимента. Это связано как с возникающими чрезмерными материальными затратами, так и с невозможностью зачастую провести необходимый натурный эксперимент.

Существует несколько подходов к сокращению сроков и стоимости затрат на проектирование, испытание и модернизацию сложных объектов новой техники. Один из них — это широкое привлечение вычислительного эксперимента для исследования этих объектов (или отдельных их подсистем) на всех этапах их разработки [21, 24, 97, 130, 132].

Сокращение сроков и затрат на проектирование возможно сегодня только путем создания систем автоматизации проектирования (САПР) сложных технических систем, в частности сложных радиотехнических систем (РТС). САПР, как известно, должны содержать широкий спектр математических и программных средств, необходимых инженеру-исследователю.

Важно подчеркнуть, что проблема автоматизации проектирования сложных технических систем, кроме задач традиционного математического и технического обеспечения вычислительных комплексов, выдвинула также вопросы методологического характера, связанные с формализацией ряда этапов, в частности процесса проектирования. Так, например, в работах [65, 66] предлагается оригинальный декомпозиционный подход к задачам проектирования сложных технических систем, описываемых в терминах векторов конструктивных параметров. В этих работах весь процесс проектирования как процесс принятия решения разбивается на три этапа: «внешнее» проектирование, «формирование облика» технической системы и «внутреннее» проектирование.

Процедура взаимодействия этапов внешнего и внутреннего проектирования через этап формирования облика в случае проектирования достаточно сложных систем включает [64]: формирование концепции проектируемого объекта, описание возможных вариантов у будущей конструкции, определение множества эффективных вариантов конструкции, решение задачи оптимального проектирования, формирование технического задания для этапа внутреннего проектирования и т. д.

Важно подчеркнуть, что в процессе выполнения каждого из этих пунктов возникают свои специфические трудные математические задачи. Среди них одной из главных является проблема разработки для конструктора такого специализированного языка, средствами которого удобно и с требуемой степенью подробности возможно описывать как конкретную конструкцию системы, так и множество реализуемых ее вариантов. Язык должен быть ориентирован на решение задач автоматизации проектирования и, следовательно, содержать такие средства, которые бы позволяли представителям «внешнего» проектирования легко имитировать функционирование объекта, привлекать экспертизы и другие процедуры, требующиеся для данного этапа, и решать задачу оптимального проектирования.

Следует отметить, что в настоящее время значительное внимание уделяется разработке формализмов для описания структуры и функционирования сложных динамических систем [22, 23, 25, 38, 69, 76, 176, 180—183]. Так, например, в работах Якубовского предлагается формализм так называемых расширенных функциональных графов (*ef*-графов), позволяющих описывать динамические системы в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с тем что в технике в настоящее время все больше акцентируется внимание на расширении области применения дискретных элементов, подход Якубовского необходимо сочетать со средствами, позволяющими удобно и просто представлять функционирование соответствующих дискретных элементов (алгоритмы функционирования дискретных спецвычислителей, функциональные линии задержки информации, различные типы дискриминаторов и т. п.). Кроме того, эти формализмы не могут быть достаточно эффективно применены к решению задач автоматизации проектирования сложных РТС.

Следует отметить отсутствие разработанных средств, позволяющих пользователю по описанию соответствующей системы судить о правильности записи своих представлений об исследуемой системе в распространенных языках моделирования [33, 51, 80, 81, 160, 166, 178, 179, 196, 199]. Другими словами, возникает необходимость разработки подходов к проверке правильности (верификации) конструируемых моделей [3].

В настоящей главе предлагается один из возможных подходов к решению задачи автоматизации построения моделирующих комплексов программ, имитирующих функционирование сложных РТС, с попыткой устранения упомянутых выше ограничений на соответствующие формализмы. Этот подход базируется на принципах композиционного программирования, разрабатываемого В. Н. Редько [123, 125]. Кроме того, в данной работе для изучаемого класса объектов решается задача автоматизации построения математических моделей в терминах нелинейных систем конечно-разностных уравнений [4].

---

[4] Следует отметить, что в настоящее время появился ряд оригинальных работ [38, 91], ориентированных на решение задачи автоматизации построения математических моделей для других предметных областей.

В данной главе рассматриваются вопросы технологии создания надежных алгоритмов и программных средств, обеспечивающих автоматизацию построения математических моделей и имитационных алгоритмов для широкого класса дискретных и дискретно-непрерывных радиотехнических систем, а также разрабатываются методы проверки правильности математических и программных моделей сложных РТС. Здесь конструируются формализмы, алгоритмы и программные средства, ориентированные на решение задач автоматизации проектирования сложных РТС и измерительно-вычислительных комплексов (ИВК).

Предлагаемые формализмы в терминах схем моделей ориентированы на описание структуры и функционирования широкого класса сложных РТС и ИВК и основаны на концепции системы вложенных моделей [4]. Развивается метод верификации моделей, который позволяет во многих практически важных случаях выяснять неадекватность моделей концептуальным положениям и, следовательно, способствовать формированию множества эффективных вариантов конструкции. Созданы эффективные процедуры для автоматизации построения математических моделей (в терминах систем нелинейных разностных уравнений) и имитационных алгоритмов исследуемого класса объектов.

С помощью предлагаемого формального аппарата выполнено математическое моделирование конкретной подсистемы измерительно-вычислительного комплекса. Для обоснования результатов вычислительных экспериментов и доказательства правильности функционирования моделирующих алгоритмов реальных объектов был разработан диалоговый комплекс программ статистической проверки адекватности, краткое описание которого приведено в конце данной главы. Этот комплекс программ использовался для решения вопроса о степени соответствия программных моделей конкретным подсистемам ИВК.

Широкое применение разработанной методики и программного обеспечения позволяет сократить сроки проектирования, испытания и модернизации объектов новой техники, получить новые важные практические результаты и интенсифицировать научные исследования.

На основе разработанных алгоритмов выполнено математическое моделирование некоторых классов задач, относящихся к радиолокации и радионавигации и представляющих значительный интерес на современном этапе развития науки и новой техники. Результаты численных экспериментов были использованы как для проверки правильности принципов построения новых проектируемых объектов, так и для интерпретации соответствующих натурных экспериментов.

Кратко остановимся на перечислении основных результатов.

В § 1 изложены неоднократно используемые основные понятия, среди которых центральное место занимает понятие схемы моделей РТС. Свойства этих вводимых понятий используются в дальнейшем для построения эффективной процедуры генерации моделирующих алгоритмов, имитирующих функционирование сложных РТС.

Вводятся следующие основные формализмы: множества термальных соотношений, отображения специального вида множеств термальных соотношений, свертка множеств термальных соотношений. Устанавливается ряд свойств, необходимых для корректного определения схем моделей сложных РТС и операций над ними. Так, например, леммами 1.1, 1.5 и 1.6 устанавливаются необходимые и достаточные условия выполнения таких соотношений, которые используются при доказательстве теоремы 1.1 и для корректного задания оператора агрегирования схем моделей.

Приводится формальное описание изменений интерпретации множеств термальных соотношений при выполнении введенных преобразований над ними. Достаточные условия инвариантности интерпретации относительно операции свертки множеств термальных соотношений устанавливает теорема 1.1.

Дается определение основного понятия — схемы моделей, базирующегося на понятии сети с отметками в виде множеств термальных соотношений. Условия, которым должны удовлетворять вершины сети (в дальнейшем именуемые блоками) и их отметки, являются естественной формализацией структуры и функционирования исследуемого класса объектов — сложных РТС.

Вводится понятие оператора агрегирования схем моделей, которое на неформальном уровне означает следующее: пара блоков преобразования схемы моделей заменяется одним блоком с отметкой в виде свертки отметок исходных блоков, причем связи агрегируемого фрагмента схемы моделей с окружающим его контекстом не нарушаются. Устанавливается инвариантность упомянутых выше условий относительно оператора агрегирования, что доказывает корректность его определения.

Вопросы сведения моделей к каноническому виду, построения математических моделей исследуемых объектов в терминах систем разностных уравнений, генерации моделирующих алгоритмов, имитирующих функционирование РТС, рассматриваются в § 2. Предлагаемая процедура генерации моделирующих алгоритмов применяется для построения имитационной модели (и ее программной реализации) конкретной РТС: угломерного канала моноимпульсной суммарно-разностной радиолокационной станции.

Дается определение модели РТС как схемы модели с заданной интерпретацией. В этом же параграфе приводится описание класса стандартных моделей, что позволяет исключить из рассмотрения модели, содержащие блоки задержки с бесконечной памятью.

Поскольку оператор агрегирования схем моделей индуцирует соответствующий оператор для моделей, то представляет интерес теорема 2.1, устанавливающая функциональную эквивалентность произвольной модели и ее агрегата. При доказательстве этого результата существенно используется то, что достаточные условия, устанавливаемые теоремой 1.1, выполняются для отметок произвольной пары блоков модели.

Для произвольной модели канонического вида теоремой 2.2 указывается простой способ построения таких правых частей системы разностных уравнений, что ее решение содержит функции, представимые моделью. Для случая стандартных моделей порядок системы разностных уравнений определяется максимальным временем задержки информации для всех блоков задержки исходной модели.

Применением техники верификации программ, а именно метода индуктивных утверждений Флойда устанавливается корректность предлагаемой процедуры построения алгоритмов, имитирующих функционирование исследуемых РТС. Для класса стандартных моделей строится единая схема программ, интерпретация которой индуцируется исходной интерпретацией соответствующей схемы моделей, причем полученная программа корректна в случае определенности правых частей системы уравнений ММ РТС (теорема 2.3).

Таким образом, полученные в § 2 результаты дают необходимые основания для использования в качестве алгоритма генерации программ, имитирующих функционирование исследуемых систем, следующую процедуру.

1. Применением ограниченного числа раз оператора агрегирования исходная модель приводится к каноническому виду.

2. Полученная модель канонического вида позволяет эффективно построить математическую модель объекта исследований в терминах систем разностных уравнений.

3. Вид математической модели определяет интерпретацию общей схемы программ, моделирующих поведение исследуемого объекта. Указанная процедура генерации моделирующих алгоритмов применяется для построения имитационной модели (и ее программной реализации) угломерного канала моноимпульсной суммарно-разностной радиолокационной станции, предназначенной для измерения с высокой точностью угловых координат скоростных маневренных ЛО, в режиме параметрического автосопровождения. Целью построения математической и имитационной моделей являлось проведение вычислительных экспериментов для исследования качественных и количественных характеристик функционирования угломерного канала в штатных и экстремальных условиях. Основными критериями качества работы системы выбирались точность измерения координат ЛО и ошибка его сопровождения.

С помощью предложенной процедуры были получены моделирующий алгоритм и ММ в виде системы конечно-разностных уравнений, что позволило провести также аналитические исследования при упрощающих предположениях. Точные решения использовались в качестве тестов при отладке имитационной модели. Проведенные вычислительные эксперименты позволили решить конкретные практические задачи анализа и синтеза характеристик угломерного канала исследуемого ИВК.

В § 3 рассмотрены вопросы соответствия разработанных математических и программных моделей физическому описанию проектируемой РТС.

Трудности выяснения вопроса о степени соответствия моделей реальным или проектируемым РТС, а также необходимость разработки надежных моделей, алгоритмов и программ заставляют рассматривать следующую важную задачу: проверить, отображает ли данная модель данные из области допустимых входных значений в данные области допустимых выходных значений. Для решения близкой задачи в программировании разработан ряд хорошо обоснованных методов проверки правильности программ, которые естественно попытаться распространить для сформулированной выше задачи. Как показывает опыт, именно отказ от формального доказательства правильности как программ, так и моделей сопряжен с риском сохранить те ошибки, которые могли быть выявлены при проведении доказательства.

В § 3 развивается метод индуктивных утверждений Флойда проверки правильности программ с трансформацией предикатов в прямом и обратном направлениях для нового класса математических объектов — моделей.

Верификацию моделей предлагается проводить следующим образом:

1) информационным связям модели (дугам сети), соответствующим входным предметным переменным, приписывают входной предикат, а соответствующим выходным предметным переменным информационным связям — выходной предикат, предварительно убедившись в истинности входного предиката для произвольного момента времени (инвариантность по времени);

2) в каждой обратной связи модели (цикле сети) выделяется информационная связь, которой приписывается индуктивный предикат, задающий зависимость значений соответствующих предметных переменных от времени, причем один индуктивный предикат может соответствовать нескольким обратным связям модели;

3) в предположении истинности входного предиката доказывается инвариантность по времени всех индуктивных предикатов трансформацией предикатов в прямом или обратном направлении;

4) в предположении истинности индуктивных предикатов доказывается истинность выходного предиката выбранным способом трансформации предикатов по всем путям, ведущим от соответствующих индуктивным предикатам мест модели до блоков выхода.

Описанная выше методика используется для построения правильных моделей конкретных технических дискретных и дискретно-непрерывных систем. Проведенные на моделях вычислительные эксперименты подтвердили правильность основных инженерных решений и показали хорошее качественное совпадение с результатами натурных экспериментов. При сопоставлении результатов вычислительных и натурных экспериментов существенно использовался разработанный автором комплекс программ.

В § 3 обсуждаются вопросы статистической проверки адекватности ММ—РО. Постановка и решение этой задачи вызваны необходимостью повышения степени доверия к результатам вычислительного эксперимента. Следует отметить, что ни в одном из существующих пакетов прикладных программ, обеспечивающих нужды первичной обработки экспериментальной статистической информации, задача об адекватности ММ—РО не рассматривается в качестве самостоятельной задачи. Это обстоятельство приводит к большому объему дополнительных затрат при решении вопроса об адекватности, а иногда и к отказу от решения этого вопроса, что в ряде практически важных случаев недопустимо.

Предлагаемый вариант диалоговой системы статистической проверки адекватности (ССПА) представляет собой комплекс программ, ориентированных на решение задач, связанных с выяснением вопроса об адекватности ММ—РО и предназначен для восполнения пробела в указанной области. В настоящем параграфе описывается архитектура ССПА, приводятся общие ее характеристики, возможности и предоставляемые пользователю сервисные функции.

§ 1. Основные формализмы, используемые для описания структуры функционирования изучаемых объектов

В настоящем параграфе приводятся определения основных понятий (множества термальных соотношений, некоторые отображения множеств термальных соотношений, свертка множеств термальных соотношений) и устанавливается ряд свойств, необходимых для корректного определения схем моделей сложных РТС и операций над ними.

Обозначим N — множество натуральных чисел, $N_k \overset{df}{=} \{0, 1, \ldots, k\} \subset N$; $n \dot{-} m$ — усеченная разность натуральных чисел n и m; rest (n, m) — остаток от деления натуральных чисел n и m; $\# A$ — мощность множества A; A^n — декартова степень множества A; $a \mid I$ — проекция вектора a на I, т. е. $a \mid I = \langle a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\rangle \Leftrightarrow a = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \;\&\; I = \{j_1, \ldots, j_m / 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n\}$; $A \mid I \overset{df}{=} \{a \mid I / a \in A\}$ — проекция множества векторов A на I; $\mathfrak{L}(A)$ — булеан множества A; $\mathfrak{T}(X, F, E)$ — множество термов, где X — алфавит предметных переменных, F — алфавит функциональных символов (верхний индекс символа означает местность функционального символа) и E — множество разделителей, причем предполагается, что множество X линейно упорядочено (P — отношение порядка); $\pi_0(\mathrm{t}_1, x, \mathrm{t}_2)$ — терм, полученный из терма t_1 заменой всех вхождений предметной переменной x на терм t_2; $X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})$ — множество предметных переменных, встречающихся в записи терма t; $X_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{T}') \overset{df}{=} \bigcup_{\mathrm{t} \in \mathfrak{T}'} X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})$ — множество предметных переменных, встречающихся в записях термов из $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}$; var (Y) — упорядоченный набор предметных переменных из $Y \in \mathfrak{L}(X)$, т. е. var $(Y) = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Leftrightarrow Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \;\&, (\forall\, i = \overline{1, n-1})\, y_i P y_{i+1}$; pos (y, Y) — количество предметных переменных из $Y \in \mathfrak{L}(X)$, не превосходящих $y \in Y$, т. е. pos $(y, Y) = \# \{z \in Y / z P y\}$; pos $(Y', Y) \overset{df}{=} \{\text{pos}\,(y, Y) / y \in Y'\}$.

Определение 1.1. Элементы $\mathfrak{L}(\mathfrak{T}^2)$ будем именовать множествами термальных соотношений (м. т. с.).

Для произвольного м. т. с. S множества $S \mid 1$ и $S \mid 2$ соответственно определяют множества термов — левых и правых частей термальных соотношений из S.

В дальнейшем нас будут интересовать такие множества термальных соотношений, которые принадлежат определенному классу

$$S_{\mathfrak{T}} \overset{df}{=} \{S / S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{T}^2) \;\&\; S \mid 1 \subseteq X \;\&\; S \mid 1 \cap X_{\mathfrak{T}}(S \mid 2) = \varnothing \;\&$$
$$(\forall\, x \in S \mid 1)\,(\exists!\, \mathrm{t} \in S \mid 2)\,\langle x, \mathrm{t}\rangle \in S\}.$$

Для любой пары м. т. с. S_1, $S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$ обозначим через $XI(S_1, S_2)$, $XN(S_1, S_2)$ и $XO(S_1, S_2)$ множества $X_{\mathfrak{T}}(S_1 \mid 2) \setminus S_2 \mid 1 \cup X_{\mathfrak{T}}(S_2 \mid 2) \setminus S_1 \mid 1$, $X_{\mathfrak{T}}(S_1 \mid 2) \cap S_2 \mid 1 \cup X_{\mathfrak{T}}(S_2 \mid 2) \cap S_1 \mid 1$ и $S_1 \mid 1 \setminus X_{\mathfrak{T}}(S_2 \mid 2) \cup S_2 \mid 1 \setminus X_{\mathfrak{T}}(S_1 \mid 2)$ соответственно.

Иногда возникает необходимость указать предметные переменные, используемые в записи терма t. Условимся обозначать это следующим образом: $\mathrm{t} = \mathrm{t}(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathrm{var}(X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Укажем теперь необходимые нам отображения, определенные на множестве термов $\mathfrak{T}$ и классе множеств термальных соотношений $S_{\mathfrak{T}}$. Отображения

$$\mathrm{term}: X \times S_{\mathfrak{T}} \to \mathfrak{T},$$
$$\pi: \mathfrak{T} \times S_{\mathfrak{T}} \to \mathfrak{T},$$
$$\Pi_0: \mathfrak{T} \times S_{\mathfrak{T}} \times S_{\mathfrak{T}} \times N \to \mathfrak{T},$$
$$\Pi: \mathfrak{T} \times S_{\mathfrak{T}} \times S_{\mathfrak{T}} \to \mathfrak{T}$$

определим следующим образом. Пусть $x \in X$, $\mathrm{t} \in \mathfrak{T}$, S, S_1, $S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$ и $n \in N$. Тогда

$$\mathrm{term}(x, S) = \begin{cases} \mathrm{t}, \text{ если } (\exists \mathrm{t} \in \mathfrak{T}) \ \langle x, \mathrm{t} \rangle \in S, \\ \text{не определенно, иначе,} \end{cases}$$

$$\pi(\mathrm{t}, \varnothing) = \mathrm{t},$$

$$\pi(\mathrm{t}, S) = \pi_0(\pi(\mathrm{t}, S \setminus \{s\}), s \mid 1, s \mid 2) \text{ для произвольного } s \in S,$$

$$\Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, n) = \begin{cases} \mathrm{t}, \text{ если } n = 0, \\ \underbrace{\pi(\ldots(\pi(\pi}_{n}(\mathrm{t}, S_1), S_2) \ldots, S_{2-\mathrm{rest}(n,2)}), \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\Pi(\mathrm{t}, S_1, S_2) = \Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, \# XN(S_1, S_2)),$$

причем корректность определений следует из определений операции Π_0 и класса $S_{\mathfrak{T}}$.

Определение 1.2. Сверткой множеств термальных соотношений S_1 и S_2 (S_1, $S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$) будем называть м. т. с. $S_1 * S_2 \overset{df}{=} \{\langle x, \mathrm{t} \rangle / x \in S_1 \mid 1 \setminus X_{\mathfrak{T}}(S_2 \mid 2) \ \& \ \mathrm{t} = \Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1) \vee x \in S_2 \mid 1 \setminus X_{\mathfrak{T}}(S_1 \mid 2) \ \& \ \mathrm{t} = \Pi(\mathrm{term}(x, S_2), S_1, S_2)\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих замечаний.

Замечание 1.1. Для любых $Y \in \mathfrak{L}(X)$, $i \in N_{\#Y} \setminus \{0\}$, $y \in Y$ выполняется $\mathrm{pos}(\mathrm{var}(Y) \mid i, Y) = i$ и $\mathrm{var}(Y) \mid \mathrm{pos}(y, Y) = y$.

Замечание 1.2. Множества $XI(S_1, S_2)$, $XN(S_1, S_2)$ и $XO(S_1, S_2)$ попарно не пересекаются, и их объединение равно $X_{\mathfrak{T}}((S_1 \cup S_2) \mid 2) \cup (S_1 \cup S_2) \mid 1$.

Пусть x_1, $x_2 \in X$, t, t_1, $\mathrm{t}_2 \in \mathfrak{T}$ и S, S_1, $S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$.

Замечание 1.3. Для любого набора термальных соотношений $s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2$ ($n > 1$), удовлетворяющего условию $(\forall i = \overline{2, n})$ $s_i \mid 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s_{i-1} \mid 2)$, справедливо либо $(\forall i = \overline{1, n})$ $s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1}$, либо $(\forall i = \overline{1, n})$ $s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)}$.

Замечание 1.4. Для любого набора термальных соотношений $s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2$ ($n > 1$) из того, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_i \mid 1 \in X\mathfrak{T}(s_{n(2-i)+i-1} \mid 2)$, следует, что n — четное число и $(\forall\, i = \overline{1, n})\ s_i \mid 1 \in XN(S_1, S_2)$.

Замечание 1.5. $x_1 \in X\mathfrak{T}(\pi_0(\mathrm{t}_1, x_2, \mathrm{t}_2))$ тогда и только тогда, когда справедливо $x_1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1)\ \&\ x_2 \bar{\in} X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1) \vee x_1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1)\ \&x_1 = x_2\ \&\ x_1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_2) \vee x_1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1) \&\ x_1 \neq x_2\ \&\ x_2 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1) \vee x_1 \bar{\in} X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1)\ \&\ x_2 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_1)\ \&\ x_1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_2)$.

Замечание 1.6. $S * \varnothing = S$.

Замечание 1.7. Для любого подмножества S' м. т. с. S такого, что $S' \mid 1 \cap X\mathfrak{T}(\mathrm{t}) = \varnothing$, выполняется $\pi(\mathrm{t}, S) = \pi(\mathrm{t}, S \setminus S')$.

Замечание 1.8. $\pi(\pi(\mathrm{t}, S), S) = \pi(\mathrm{t}, S)$.

Замечание 1.9. $\pi(\pi(\mathrm{t}, S_1), S_2) = \pi(\pi(\mathrm{t}, S_2), S_1) = \pi(\mathrm{t}, S_1 \cup S_2)$, если только $S_1 \cup S_2 \in S\mathfrak{T}$.

Замечание 1.10. Если выполняется $S_2 \mid 1 \cap X\mathfrak{T}(S_1 \mid 2) = \varnothing$, то справедливо $\pi(\pi(\pi(\mathrm{t}, S_1), S_2), S_1) = \pi(\pi(\mathrm{t}, S_2), S_1)$.

Замечание 1.11. Для того чтобы $x \in X\mathfrak{T}(\pi(\mathrm{t}, S))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $x \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&\ x \bar{\in} S \mid 1 \vee (\exists s \in S)\ s \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&\ x \in X\mathfrak{T}(s \mid 2)$.

Пусть теперь $x \in X$, $\mathrm{t} \in \mathfrak{T}$, $m \in N$, $S_1, S_2 \in S\mathfrak{T}$.

Лемма 1.1. $x \in X\mathfrak{T}(\Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, m))$ *тогда и только тогда, когда выполняется*

$$\begin{gathered}
x \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&\ (m = 0 \vee m = 1\ \&\ x \bar{\in} S_1 \mid 1 \vee x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1) \vee \\
\vee (\exists\, s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)(1 \leqslant n \leqslant m)((\forall\, i = \overline{1, n})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \vee \\
\vee (\forall\, i = \overline{1, n})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)})\ \&\ s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \& \\
(\forall\, i = \overline{2, n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{T}(s_{i-1} \mid 2)\ \&\ x \in X\mathfrak{T}(s_n \mid 2)\ \& \\
((n < m - 1 \vee n = m - 1\ \&\ s_1 \in S_1) \rightarrow x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1)\ \& \\
(s_1 \in S_2 \rightarrow s_1 \mid 1 \bar{\in} S_1 \mid 1)\ \&\ (n = m \rightarrow s_1 \in S_1). \qquad (1.1)
\end{gathered}$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если $m = 0$ или $m = 1$. Предположим его справедливость для всех $m < k$ ($k > 1$). Пусть теперь $m = k$.

Согласно замечанию 1.11, учитывая индуктивное предположение, получаем

$$\begin{gathered}
x \in X\mathfrak{T}(\Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, k)) \Leftrightarrow x \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&\ k = 0 \vee k \geqslant 1\ \& \\
x \in X\mathfrak{T}(\Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, k-1))\ \&\ x \bar{\in} S_{2-\mathrm{rest}(k,2)} \mid 1 \vee (\exists\, s \in S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}) \\
s \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\Pi_0(\mathrm{t}, S_1, S_2, k-1))\ \&\ x \in X\mathfrak{T}(s \mid 2)\ \&\ k \geqslant 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4,
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
P_1 = x \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&\ (k = 0 \vee (k = 1 \vee k = 2\ \&\ x \bar{\in} S_1 \mid 1 \vee \\
\vee x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1)\ \&\ x \bar{\in} S_{2-\mathrm{rest}(k,2)} \mid 1, \\
P_2 = (\exists\, s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)(1 \leqslant n \leqslant k - 1)((\forall\, i = \overline{1, n})\, s_i \in \\
\in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \vee (\forall\, i = \overline{1, n})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)})\ \&\ s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t})\ \&
\end{gathered}$$

$$(\forall i=\overline{2,\ n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s_n \mid 2) \,\&$$
$$((n < k-2 \vee n = k-2 \,\&\, s_1 \in S_1) \to x \,\bar{\in}\, (S_1 \cup S_2) \mid 1) \,\&$$
$$(s_1 \in S_2 \to s_1 \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1) \,\&\, (n = k-1 \to s_1 \in S_1) \,\&\, x \,\bar{\in}\, S_{2-\mathrm{rest}(k,2)} \mid 1,$$
$$P_3 = (\exists s \in S_{2-\mathrm{rest}(k,2)})\, s \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (k = 1 \vee k = 2 \,\&$$
$$s \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s \mid 2),$$
$$P_4 = (\exists s \in S_{2-\mathrm{rest}(k,2)})\, (\exists s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)\, (1 \leqslant n \leqslant k-1)$$
$$((\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \vee (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)}) \,\&$$
$$s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (\forall i = \overline{2,\ n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&$$
$$s \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_n \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s \mid 2) \,\&\, (n = k-1 \vee n \geqslant k-2 \,\&\, s_1 \,\bar{\in}\, S_1) \,\&$$
$$(s_1 \in S_2 \to s_1 \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1) \,\&\, (n = k-1 \to s_1 \in S_1.$$

Поскольку

$$P_1 \equiv x \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (k = 0 \vee k = 1 \,\&\, x \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1 \vee x \,\bar{\in}\, (S_1 \cup S_2) \mid 1),$$
$$P_2 \equiv (\exists s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)\, (1 \leqslant n \leqslant k-1)\, ((\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in$$
$$\in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)} \vee (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1}) \,\&\, s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&$$
$$(\forall i = \overline{2,\ n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s_n \mid 2) \,\&$$
$$((n < k-1 \vee n = k-1 \,\&\, s_1 \in S_1) \to x \,\bar{\in}\, (S_1 \cup S_2) \mid 1) \,\&$$
$$(s_1 \in S_2 \to s_1 \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1),$$
$$P_3 \equiv (\exists s \in S_1)\, s \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s \mid 2) \,\&\, k = 1 \vee$$
$$(\exists s \in S_2)\, s \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s \mid 2) \,\&\, k = 2 \,\&$$
$$s \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1 = P_5 \vee P_6,$$
$$P_4 \equiv (\exists s_1, \ldots, s_k \in S_1 \cup S_2)\, (k \geqslant 2)\, (\forall i = \overline{1,\ k})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)} \,\&$$
$$s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (\forall i = \overline{2,\ k})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s_k \mid 2) \vee$$
$$(\exists s_1, \ldots, s_{k-1} \in S_1 \cup S_2)\, (k \geqslant 3)\, (\forall i = \overline{1, k-1})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \,\&$$
$$s_1 \mid \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (\forall i = \overline{2,\ k-1})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&$$
$$x \in X\mathfrak{x}(s_{k-1} \mid 2) \,\&\, s_1 \mid 1 \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1 = P_7 \vee P_8,$$
$$P_6 \Rightarrow P_2,$$
$$P_8 \Rightarrow P_2,$$

то $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4 \Leftrightarrow (1.1)$, так как $m = k$.

Следствие 1.1. $x \in X\mathfrak{x}(\Pi(\mathrm{t}, S_1, S_2))$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$x \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (\# XN(S_1, S_2) = 0 \vee \# XN(S_1, S_2) = 1 \,\&\, x \,\bar{\in}\, S_1 \mid 1 \vee$$
$$x \,\bar{\in}\, (S_1 \cup S_2) \mid 1) \vee (\exists s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)\, (1 \leqslant n \leqslant \# XN(S_1, S_2))$$
$$((\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \vee (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)}) \,\&$$
$$s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{x}(\mathrm{t}) \,\&\, (\forall i = \overline{2,\ n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{x}(s_{i-1} \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{x}(s_n \mid 2) \,\&$$

$$((n < \# XN(S_1, S_2) - 1 \vee n = \# XN(S_1, S_2) - 1 \,\&\, s_1 \in S_1) \to$$
$$\to x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) | 1) \,\&$$
$$(s_1 \in S_2 \to s_1 | 1 \bar{\in} S_1 | 1) \,\&\, (n = \# XN(S_1, S_2) \to s_1 \in S_1).$$

Лемма 1.2. *Для любых м. т. с.* $S_1, S_2 \in S\mathfrak{X}$, *любого термального соотношения* $s \in S_2$, *произвольных множеств термальных соотношений* S_1', S_2' ($S_1' \subseteq S_1$, $S_2' \subseteq S_2$) *таких, что* $S_1' | 1 \cap X\mathfrak{X}(S_2 | 2) = \varnothing$, $S_2' | 1 \cap X\mathfrak{X}(S_1 | 2) = \varnothing$, *и произвольного натурального числа* m *выполняется*

$$\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, m) = \Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', m).$$

Доказательство. Если $m = 0$ или $m = 1$, то утверждение леммы очевидно. Предположим его справедливость для всех $m < k$ ($k > 1$). Пусть теперь $m = k$.

Тогда выполняется $\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, k) = \pi(\Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k - 1), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)})$, учитывая индуктивное предположение. Согласно лемме 1.1 имеем $S_1' | 1 \cap X\mathfrak{X}(\Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k - 1)) = \varnothing$, $S_2' | 1 \cap X\mathfrak{X}(\Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k - 1)) = \varnothing$. Отсюда, учитывая замечание 1.7, получаем $\pi(\Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k - 1), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}) = \pi({}_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k - 1), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)} \setminus S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}')$. Следовательно, $\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, k) = \Pi_0(s | 2, S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2', k)$, что доказывает лемму.

Пусть $S_1, S_2 \in S\mathfrak{X}$ такие множества термальных соотношений, для которых выполняются следующие два условия:

$$1)\ S_1 | 1 \cap S_2 | 1 = \varnothing; \tag{1.2}$$

$$2)\ (\forall s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)(n > 1)(\exists i)(1 \leqslant i \leqslant n)\, s_i | 1 \bar{\in} X\mathfrak{X}(s_{n(2 \dot{-} i) + i - 1} | 2). \tag{1.3}$$

Лемма 1.3. *Для любого термального соотношения* $s \in S_2$ *и произвольного натурального числа* $m \geqslant \# XN(S_1, S_2)$ *справедливо*

$$\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, m) = \Pi(s | 2, S_1, S_2).$$

Доказательство. Если $m = \# XN(S_1, S_2)$, то утверждение леммы очевидно. Предположим его справедливость для всех m таких, что $\# XN(S_1, S_2) \leqslant m < k$. Пусть теперь $m = k$ и s — произвольное, но фиксированное термальное соотношение из S_2.

Тогда, учитывая индуктивное предположение, получаем $\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, k) = \pi(\Pi(s | 2, S_1, S_2), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)})$. Согласно следствию 1.1, учитывая (1.2) и (1.3), выполняется $S_{2-\mathrm{rest}(k,2)} | 1 \cap X\mathfrak{X}(\Pi(s | 2, S_1, S_2)) = \varnothing$. Отсюда, принимая во внимание замечание 1.7, следует: $\pi(\Pi(s | 2, S_1, S_2), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}) = \Pi(s | 2, S_1, S_2)$.

Таким образом, $\Pi_0(s | 2, S_1, S_2, k) = \Pi(s | 2, S_1, S_2)$, что и требовалось показать.

Следствие 1.2. Для любых м. т. с. S_1' и S_2' ($S_1' \subseteq S_1$, $S_2' \subseteq S_2$) таких, что $S_1' | 1 \cap X\mathfrak{X}(S_2 | 2) = \varnothing$ и $S_2' | 1 \cap X\mathfrak{X}(S_1 | 2) = \varnothing$, и произвольного термального соотношения $S \in S_2$ выполняется $\Pi(s | 2, S_1, S_2) = \Pi(s | 2,$

$S_1 \setminus S_1', S_2 \setminus S_2')$, если $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$ такие множества термальных соотношений, для которых выполняются условия (1.2) и (1.3).

Лемма 1.4. *Для любого термального соотношения* $s \in S_2$ *справедливо* $\Pi(s|2, S_1, S_2) = \pi(s|2, S(S_1, S_2))$, *где* $S(S_1, S_2) = \{\langle x, \mathrm{t}\rangle / x \in S_1|1 \,\&\, \mathrm{t} = \Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1)\}$, *если* $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$ *такие м. т. с., для которых выполняются условия (1.2) и (1.3).*

Доказательство. Пусть s — произвольное, но фиксированное термальное соотношение, принадлежащее S_2. Если $XN(S_1, S_2) = \varnothing$ или $\# XN(S_1, S_2) = 1$, то утверждение леммы очевидно. Предположим его справедливость для всех $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$ таких, что $\# XN(S_1, S_2) < k$ $(k > 1)$. Пусть теперь $\# XN(S_1, S_2) = k$.

Из условий (1.2) и (1.3) следует, что существует такое термальное соотношение $s_0 \in S_1 \cup S_2$, для которого выполняется $X_{\mathfrak{X}}(s_0 | 2) \subseteq XI(S_1, S_2)$. Положим для определенности, что $s_0 \in S_1$.

Учитывая замечания 1.9 и 1.10, получаем $\Pi(s|2, S_1, S_2) = \pi(\pi(\Pi(s|2, S_1 \setminus \{s_0\}, S_2), S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}), s_0)$. Отсюда, принимая во внимание замечание 1.7, следует справедливость $\Pi(s|2, S_1, S_2) = \pi(\Pi(s|2, S_1 \setminus \{s_0\}, S_2), s_0)$, так как согласно следствию 1.1 выполняется $S_{2-\mathrm{rest}(k,2)}|1 \cap X_{\mathfrak{X}}(\Pi(s|2, S_1 \setminus \{s_0\}, S_2)) = \varnothing$. Поскольку $\# XN(S_1 \setminus \{s_0\}, S_2) = k - 1$, то, учитывая индуктивное предположение, получаем

$$\Pi(s|2, S_1, S_2) = \pi(\pi(s|2, S(S_1 \setminus \{s_0\}, S_2)), s_0). \tag{1.4}$$

Так как $S(S_1, S_2) = \{s_0\} \cup S$, где $S = \{\langle x, \mathrm{t}\rangle / x \in S(S_1 \setminus \{s_0\}, S_2) | 1 \,\&\, \mathrm{t} = \pi(\mathrm{term}(x, S(S_1 \setminus \{s_0\}, S_2)), s_0)\}$ и $S, S(S_1, S_2) \in S_{\mathfrak{X}}$, то, принимая во внимание замечание 1.9, выполняется $\pi(s|2, S(S_1, S_2)) = \pi(\pi(s|2, S), s_0)$. Следовательно, учитывая замечание 1.8, получаем $\pi(s|2, S(S_1, S_2)) = \pi(\pi(s|2, S(S_1 \setminus \{s_0\}, S_2)), s_0)$. Отсюда, учитывая (1.4), вытекает справедливость $\Pi(s|2, S_1, S_2) = \pi(s|2, S(S_1, S_2))$, что и требовалось доказать.

Так как класс множеств термальных соотношений $S_{\mathfrak{X}}$ не замкнут относительно операции свертки, то представляют интерес необходимые и достаточные условия того, что свертка двух м. т. с. из $S_{\mathfrak{X}}$ принадлежит классу $S_{\mathfrak{X}}$.

Лемма 1.5. *Свертка* $S_1 * S_2$ *двух м. т. с.* $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$ *принадлежит классу* $S_{\mathfrak{X}}$ *тогда и только тогда, когда для любого* x, *принадлежащего* $S_1 | 1 \cap S_2 | 1$, *выполняется*

$$\Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1) = \Pi(\mathrm{term}(x, S_2), S_1, S_2). \tag{1.5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in S_1 | 1 \cap S_2 | 1$. Тогда $x \notin X_{\mathfrak{X}}((S_1 \cup S_2) | 2)$, так как $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $x \in S_1 | 1 \setminus X_{\mathfrak{X}}(S_2 | 2)$, $x \in S_2 | 1 \setminus X_{\mathfrak{X}}(S_1 | 2)$, $\Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1)$, $\Pi(\mathrm{term}(x, S_2), S_1, S_2) \in (S_1 * S_2) | 2$. Поскольку $S_1 * S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$, то $\Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1) = \Pi(\mathrm{term}(x, S_2), S_1, S_2)$.

Достаточность. Так как $(S_1 * S_2) | 1 = XO(S_1, S_2)$, $(S_1 * S_2) | 1 \cap X_{\mathfrak{X}}((S_1 \cup S_2) | 2) = \varnothing$ и $X_{\mathfrak{X}}((S_1 * S_2) | 2) \subseteq X_{\mathfrak{X}}((S_1 \cup S_2) | 2)$, то

$$(S_1 * S_2) | 1 \cap X_{\mathfrak{X}}((S_1 * S_2) | 2) = \varnothing. \tag{1.6}$$

Поскольку $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$, то, учитывая (1.5), получаем $(\forall x \in (S_1 * S_2) | 1)$ $(\exists!\ \mathfrak{t} \in \mathfrak{T})\ \langle x,\ \mathfrak{t}\rangle \in S_1 * S_2$. Отсюда, принимая во внимание (1.6), следует $S_1 * S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$.

Необходимые и достаточные условия инвариантности отображения $XI : S^2_{\mathfrak{T}} \to X$ относительно операции свертки устанавливает

Лемма 1.6. *Для произвольных м. т. с.* S_1, $S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$ *выполняется* $XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing) = XI\ (S_1,\ S_2)$ *тогда и только тогда, когда справедливо*

$$S_1 = \varnothing \,\&\, S_2 = \varnothing \vee S_1 \neq \varnothing \,\&\, S_2 \neq \varnothing \,\&\, X_{\mathfrak{T}}(S_2 | 2) = S_1 | 1 \,\&$$
$$X_{\mathfrak{T}}(S_1 | 2) = S_2 | 1 \vee S_1 * S_2 \neq \varnothing \,\&\, (\forall s_1,\ \ldots,\ s_n \in S_1 \cup S_2)$$
$$((\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i | 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s_{n(2 \dot{-} i)+i-1} | 2) \to$$
$$(\forall i = \overline{1,\ n})\, (\forall s \in S_1 * S_2)\, s_i | 1 \bar{\in} X_{\mathfrak{T}}(s | 2) \,\& \tag{1.7}$$
$$X_{\mathfrak{T}}(\Pi(s_i | 2,\ S_1,\ S_2)) \subseteq X_{\mathfrak{T}}((S_1 * S_2) | 2) \cup XN(S_1,\ S_2).$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что условие (1.7) нарушается, т. е. выполняется

$$S_1 \neq \varnothing \,\&\, S_2 \neq \varnothing \,\&\, (X_{\mathfrak{T}}(S_2 | 2) \neq S_1 | 1 \vee X_{\mathfrak{T}}(S_1 | 2) \neq S_2 | 1) \,\&$$
$$(S_1 * S_2 = \varnothing \vee (\exists\, s_1,\ \ldots,\ s_n \in S_1 \cup S_2)\, (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i | 1 \in$$
$$\in X_{\mathfrak{T}}(s_{n(2 \dot{-} i)+i-1} | 2) \,\&$$
$$(\exists\, i_0)\, (1 \leqslant i_0 \leqslant n)\, ((s \in S_1 * S_2)\, s_{i_0} | 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s | 2) \vee$$
$$X_{\mathfrak{T}}(\Pi(s_{i_0} | 2,\ S_1,\ S_2)) \not\subseteq X_{\mathfrak{T}}((S_1 * S_2) | 2) \cup XN(S_1,\ S_2))).$$

Тогда возможны три случая.

1) $S_1 \neq \varnothing \,\&\, S_2 \neq \varnothing \,\&\, (X_{\mathfrak{T}}\ (S_2 | 2) \neq S_1 | 1 \vee X_{\mathfrak{T}}\ (S_1 | 2) \neq S_2 | 1) \,\&$ $S_1 * S_2 = \varnothing$. Пусть для определенности выполняется $X_{\mathfrak{T}}\ (S_2 | 2) \neq$ $\neq S_1 | 1$. Так как $S_1 * S_2 = \varnothing$, то $S_1 | 1 \subseteq X_{\mathfrak{T}}\ (S_2 | 2)$. Следовательно, существует такая предметная переменная, которая принадлежит $X_{\mathfrak{T}}\ (S_2 | 2) \setminus S_1 | 1 \subseteq XI\ (S_1, S_2)$. С другой стороны, $XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing) =$ $= \varnothing$, что противоречит $XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing) = XI\ (S_1,\ S_2)$.

2) $$S_1 \neq \varnothing \,\&\, S_2 \neq \varnothing \,\&\, (X_{\mathfrak{T}}(S_2 | 2) \neq S_1 | 1 \vee X_{\mathfrak{T}}(S_1 | 2) \neq S_2 | 1) \,\&$$
$$(\exists\, s_1,\ \ldots,\ s_n \in S_1 \cup S_2)\, (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i | 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s_{n(2 \dot{-} i)+i-1} | 2) \,\&$$
$$(\exists\, s \in S_1 * S_2)\, (\exists\, i_0)\, (1 \leqslant i_0 \leqslant n)\, s_{i_0} | 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s | 2).$$

Из замечаний 1.2 и 1.4 следует, что $s_{i_0} | 1 \in XN\ (S_1,\ S_2)$ и $s_{i_0} | 1 \bar{\in}$ $\bar{\in} XI\ (S_1, S_2)$. С другой стороны, $s_{i_0} | 1 \in XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing)$, что противоречит $XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing) = XI\ (S_1,\ S_2)$.

3) $$S_1 \neq \varnothing \,\&\, S_2 \neq \varnothing \,\&\, (X_{\mathfrak{T}}(S_2 | 2) \neq S_1 | 1 \vee X_{\mathfrak{T}}(S_1 | 2) \neq S_2 | 1) \,\&$$
$$(\exists\, s_1,\ \ldots,\ s_n \in S_1 \cup S_2)\, (\forall i = \overline{1,\ n})\, s_i | 1 \in X_{\mathfrak{T}}(s_{n(2 \dot{-} i)+i-1} | 2) \,\&$$
$$(\exists\, i_0)\, (1 \leqslant i_0 \leqslant n)\, X_{\mathfrak{T}}(\Pi(s_{i_0} | 2,\ S_1,\ S_2) \not\subseteq X_{\mathfrak{T}}(S_1 * S_2 | 2) \cup$$
$$\cup\, XN\ (S_1,\ S_2).$$

В этом случае существует такая предметная переменная x, принадлежащая $X_{\mathfrak{T}}\ (\Pi\ (s_{i_0} | 2,\ S_1,\ S_2))$, что выполняется $x \bar{\in} X_{\mathfrak{T}}\ ((S_1 * S_2) | 2) \cup$ $\cup\ XN\ (S_1,\ S_2)$. Согласно следствию 1.1 $x \in X_{\mathfrak{T}}\ ((S_1 \cup S_2) | 2)$. Поскольку $x \bar{\in} XN(S_1, S_2)$, то $x \in XI(S_1, S_2)$. С другой стороны, $x \bar{\in} XI(S_1 * S_2, \varnothing)$, что противоречит $XI(S_1 * S_2, \varnothing) = XI(S_1, S_2)$.

Достаточность. Пусть $x \in XI(S_1 * S_2, \varnothing)$, т. е. $x \in X\mathfrak{T}(s \mid 2)$ для некоторого $s \in S_1 * S_2$. Предположим для определенности, что $s \mid 1 \in S_2 \mid 1 \setminus X\mathfrak{T}(S_1 \mid 2)$. Тогда $s \mid 2 = \Pi(\mathrm{t}, S_1, S_2)$, где $\mathrm{t} = \mathrm{term}(s \mid 1, S_2)$. Согласно следствию 1.1 выполняется $P_1 \vee P_2$, где

$$P_1 = x \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}) \,\&\, (n_0 = 0 \vee n_0 = 1 \,\&\, x \bar{\in} S_1 \mid 1 \vee x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1),$$

$$\begin{aligned}P_2 = {} & (\exists s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_2)(1 \leqslant n \leqslant n_0)((\forall i = \overline{1, n})\, s_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1} \vee \\ & (\forall i = \overline{1, n})\, s_i \in S_{2-\mathrm{rest}(i,2)}) \,\&\, s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}) \,\&\, \\ & (\forall i = \overline{2, n})\, s_i \mid 1 \in X\mathfrak{T}(s_{i-1} \mid 2) \,\&\, x \in X\mathfrak{T}(s_n \mid 2) \,\&\, \\ & ((n < n_0 - 1 \vee n = n_0 - 1 \,\&\, s_1 \in S_1) \rightarrow x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1) \,\&\, \\ & (s_1 \in S_2 \rightarrow s_1 \mid 1 \bar{\in} S_1 \mid 1) \,\&\, (n = n_0 \rightarrow s_1 \in S_1) \quad \text{и} \\ & n_0 = \# XN(S_1, S_2).\end{aligned}$$

Если имеет место P_1, то $x \in X\mathfrak{T}(S_2 \mid 2) \setminus S_1 \mid 1 \subseteq XI(S_1, S_2)$.

Предположим, выполняется P_2. Тогда, если $n < n_0 - 1 \vee n = n_0 - 1 \,\&\, s_1 \in S_1$, то из P_2 вытекает, что $x \bar{\in} (S_1 \cup S_2) \mid 1$ и $x \in X\mathfrak{T}((S_1 \cup S_2) \mid 2)$. Следовательно, $x \in XI(S_1, S_2)$.

Случай, когда $n = n_0 - 1$ и $s_1 \bar{\in} S_1$, не возможен, поскольку из P_2 вытекает $s_1 \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}) \subseteq X\mathfrak{T}(S_2 \mid 2)$ и, следовательно, $s_1 \in S_1$.

Рассмотрим случай, когда $n = n_0$. Тогда из P_2 следует, что $s_1 \in S_1$. Поэтому выполняется $(\forall i = \overline{1, n_0})\ s_i \bar{\in} S_{2-\mathrm{rest}(i,2)}$, и, следовательно,

$$x \in X\mathfrak{T}(S_{2-\mathrm{rest}(n_0,2)} \mid 2). \tag{1.8}$$

Покажем, что $x \bar{\in} S_{2-\mathrm{rest}(n_0+1,2)} \mid 1$. Предположив противное, получим, что $x = s_{n_0+1} \mid 1$ для некоторого $s_{n_0+1} \in S_{2-\mathrm{rest}(n_0+1,2)}$. В этом случае имеет место $(\forall i = \overline{1, n_0 + 1})\, s_i \mid 1 \in XN(S_1, S_2)$. Отсюда следует $(\exists i_0, j_0)(1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n_0 + 1)\ s_{i_0} \mid 1 = s_{j_0} \mid 1$, так как $\# XN(S_1, S_2) = n_0$. Тогда для последовательности термальных соотношений s_{i_0}, $s_{i_0+1}, \ldots, s_{j_0+1}$ из условия (1.7) вытекает справедливость

$$(\forall i = \overline{i_0, j_0 - 1})\, s_i \mid 1 \bar{\in} X\mathfrak{T}(s \mid 2). \tag{1.9}$$

Определим последовательность термальных соотношений $r_1, \ldots, r_{n_0}$ следующим образом:

$$r_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant i_0, \\ s_{\mathrm{rest}(i - i_0,\ j_0 - i_0) + i_0}, & \text{если } i_0 < i \leqslant n_0 \end{cases} \quad (1 \leqslant i \leqslant n_0).$$

Тогда согласно следствию 1.1. выполняется

$$s_{\mathrm{rest}(n_0+1-i_0,\, j_0-i_0)+i_0} \mid 1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}),$$

что противоречит (1.9). Следовательно, $x \bar{\in} S_{2-\mathrm{rest}(n_0+1,2)} \mid 1$. Учитывая (1.8), имеем $x \in XI(S_1, S_2)$. Отсюда, $XI(S_1 * S_2, \varnothing) \subseteq XI(S_1, S_2)$, так как случай, когда $s \mid 1 \in S_1 \mid 1 \setminus X\mathfrak{T}(S_2 \mid 2)$, рассматривается аналогично.

Пусть теперь $x \in XI\ (S_1,\ S_2)$. Предположим для определенности, что $x \in X\mathfrak{T}\ (S_2 \mid 2) \setminus S_1 \mid 1$. Таким образом, $x \in X\mathfrak{T}\ (s \mid 2)$ для некоторого $s \in S_2$.

В случае, когда $n_0 = \# XN\ (S_1,\ S_2) = 0$, то $s \mid 1 \in XO\ (S_1,\ S_2)$ и $x \in XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing)$, так как $\Pi\ (s \mid 2,\ S_1,\ S_2) = s \mid 2$.

Рассмотрим случай, когда $n_0 \geqslant 1$. Построим последовательность термальных соотношений $r_1, \ldots, r_n \in S_1 \cup S_2$, $1 \leqslant n \leqslant n_0 + 1$ такую, что выполняется

1) $x \in X\mathfrak{T}(r_1 \mid 2)$,

2) $(\forall i = \overline{1,\ n-1})\, r_i \mid 1 \in X\mathfrak{T}(r_{i+1} \mid 2)$,

3) $r_n \mid 1 \in XO(S_1,\ S_2)\ \&\ n \leqslant n_0 + 1 \vee r_n \mid 1 \in XN(S_1,\ S_2)\ \&\ n = n_0 + 1$

следующим образом.

В качестве r_1 следует рассмотреть s.

Если определена последовательность термальных соотношений $r_1, \ldots, r_i$, то построение завершаем, когда $r_i \mid 1 \in XO\ (S_1,\ S_2)$. В противном случае, т. е. когда $r_i \mid 1 \in XN\ (S_1,\ S_2)$, в зависимости от того, достигло ли i значения $n_0 + 1$ или нет, прекращаем построение, или в качестве r_{i+1} выбираем такое термальное соотношение r, для которого справедливо $r_i \mid 1 \in X\mathfrak{T}\ (r \mid 2)$, и повторяем построение.

Из замечания 1.3 следует $(\forall\ i = \overline{1,\ n})\ r_i \in S_{\mathrm{rest}(i,2)+1}$, так как $r_1 \in S_2$.

Если $r_n \mid 1 \in XO\,(S_1,\ S_2)$, то согласно следствию 1.1 получим $x \in X\mathfrak{T}\,(\Pi\,(r_n \mid 2,\ S_{2-\mathrm{rest}(n,2)},\ S_{\mathrm{rest}(n,2)+1}))$, когда определим $s_i = r_{n-i}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Следовательно, $x \in XI\,(S_1 * S_2,\ \varnothing)$.

Рассмотрим случай, когда $r_n \mid 1 \in XN\ (S_1,\ S_2)$ и $n = n_0 + 1$. Поскольку $(\forall\ i = \overline{1,\ n})\ r_i \mid 1 \in XN\ (S_1,\ S_2)$, то выполняется $(\exists\ i_0,\ j_0)\ (1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n_0 + 1)\ r_{i_0} \mid 1 = r_{j_0} \mid 1$. Тогда для последовательности термальных соотношений $r_{j_0}, r_{j_0-1}, \ldots, r_{i_0+1}$ из условия (1.7) вытекает справедливость

$$(\forall\ i = \overline{i_0 + 1,\ j_0})\ X\mathfrak{T}\,(\Pi\,(r_i \mid 2,\ S_1,\ S_2)) \subseteq X\mathfrak{T}\,((S_1 * S_2) \mid 2) \cup XN\,(S_1, S_2). \tag{1.10}$$

Согласно следствию 1.1 получим $x \in X\mathfrak{T}\,(\Pi\,(r_{i_0+1} \mid 2,\ S_1,\ S_2))$, определив $s_i = r_{i_0+1-i}$, $1 \leqslant i \leqslant i_0$. Поскольку $x \bar{\in} XN\,(S_1,\ S_2)$, то из (1.10) следует $x \in XI\ (S_1 * S_2,\ \varnothing)$, что и требовалось показать.

Далее формально описывается изменения интерпретации множеств термальных соотношений при выполнении определенных выше преобразований м. т. с. В частности, указываются достаточные условия инвариантности интерпретации относительно операции свертки м. т. с.

Пусть $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\ (X,\ F,\ E)$ — множество термов, Ω — некоторое непустое множество, называемое основным множеством, и Φ — множество операций, определенных на основном множестве Ω. Множество n-местных операций из Φ условимся обозначать Φ^n.

Определение 1.3. Однозначное отображение $I : X \cup F \to \Omega \cup \Phi$ назовем интерпретацией, если для любого $x \in X$ $I\ (x) \in \Omega$ и для любого $f^n \in F$ $I\,(f^n) \in \Phi^n$.

Все дальнейшие рассуждения справедливы для произвольной, но фиксированной интерпретации.

По заданной интерпретации I значения термов определяются как обычно [79]:

а) значение терма единичной длины суть значение составляющего этот терм предметного символа;

б) если значения термов длины, меньшей m ($m > 1$), определены, то значением терма $f(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ длины m будет $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где $I(f) = \varphi$, а t_i и ω_i, $i = \overline{1, n}$,— суть термы длины, меньшей m, и их значения соответственно.

Нетрудно видеть, что для любого терма t каждой последовательности элементов $\omega_1, \ldots, \omega_m$, $m = \# X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})$, множества Ω соответствует определенное или неопределенное (в случае частичной определенности операций из Φ) значение терма t, и, следовательно, тем самым терм t представляет некоторую m-местную операцию на Ω. Будем говорить, что эта операция изображается термом t, и обозначать I_{t}^m или I_{t}, если m подразумевается.

Легко убедиться в справедливости следующего замечания.

Пусть $\mathrm{t}_1(x_1^1, \ldots, x_n^1) \in \mathfrak{T}$, $\mathrm{t}_2(x_1^2, \ldots, x_m^2) \in \mathfrak{T}$, $x \in X$ и $\pi_0(\mathrm{t}_1, x, \mathrm{t}_2) = \mathrm{t}(x_1^0, \ldots, x_l^0)$.

Замечание 1.12. Для любого набора $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega$, $k = \# X_0$, $X_0 = X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t}_1) \setminus \{x\} \cup X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t}_2)$ существует элемент $\omega_0 \in \Omega$ такой, что выполняется $\omega_0 = I_{\mathrm{t}_2}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^2, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_m^2, X_0)})$ и $I_{\mathrm{t}}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^0, X_0)}, \ldots$ $\ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_l^0, X_0)}) = I_{\mathrm{t}_1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где

$$\xi_i = \begin{cases} \omega_0, & \text{если } x_i^1 = x, \\ \omega_{\mathrm{pos}(x_i^1, X_0)}, & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Следующие утверждения определяют зависимость значений образов отображений π и Π от интерпретации исходных м. т. с.

Пусть $\mathrm{t}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{T}$, $S = \{s_1, \ldots, s_m\} \in S_{\mathfrak{T}}$, $\pi(\mathrm{t}, S) = \mathrm{t}_0(x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_l^0)$ и $s_i | 2 = \mathrm{t}_i(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лемма 1.7. *Для любого набора* $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega$, $k = \# X_0$, $X_0 = X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t}) \setminus S | 1 \cup X_{\mathfrak{T}}(S | 2)$ *существует такой набор* $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \Omega$, *что выполняется*

$$(\forall i = \overline{1, m})\, \nu_{\mathrm{pos}(s_i|1, S|1)} = I_{\mathrm{t}_i}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^i, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_{n_i}^i, X_1)}), \quad (1.11)$$

$$I_{\mathrm{t}_0}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^0, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_l^0, X_0)}) = I_{\mathrm{t}}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad (1.12)$$

причем

$$\xi_i = \begin{cases} \nu_{\mathrm{pos}(x_i, S|1)}, & \textit{если } x_i \in S | 1, \\ \omega_{\mathrm{pos}(x_i, X_0)}, & \textit{иначе}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Доказательство. Если $S = \varnothing$ или $\# S = 1$, то утверждение леммы с очевидностью следует из замечания 1.12. Предположим его справедливость для всех $S \in S_{\mathfrak{X}}$ таких, что $\# S < m$ $(m > 1)$. Пусть теперь $\# S = m$ и $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — произвольный, но фиксированный набор элементов Ω.

Согласно замечанию 1.12 для любого набора $\mu_1, \ldots, \mu_{k_1} \in \Omega$, $k_1 = \# X_1$, $X_1 = X_{\mathfrak{X}}(\pi(t, S\setminus\{s_m\}))\setminus s_m \mid 1 \cup X_{\mathfrak{X}}(s_m \mid 2)$ существует элемент $\zeta_0 \in \Omega$ такой, что выполняется

$$\zeta_0 = I_{t_m}(\mu_{\mathrm{pos}(x_1^m, X_1)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(x_{n_m}^m, X_1)}),$$

$$I_{t_0}(\mu_{\mathrm{pos}(x_1^0, X_1)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(x_l^0, X_1)}) = I_{t'}(\xi_1', \ldots, \xi_q'),$$

причем $\pi(t, S\setminus\{s_m\}) = t'(x_1', \ldots, x_q')$ и

$$\xi_i' = \begin{cases} \zeta_0, & \text{если } x_i' = s_m \mid 1, \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_i', X_1)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant i \leqslant q. \end{cases}$$

В частности, принимая во внимание замечания 1.1, для $\mu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(X_1)|i, X_0)}$, $1 \leqslant i \leqslant k_1$, справедливо

$$\zeta_0 = I_{t_m}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^m, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_{n_m}^m, X_0)}), \tag{1.13}$$

$$I_{t_0}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^0, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_l^0, X_0)}) = I_{t'}(\xi_1', \ldots, \xi_q'), \tag{1.14}$$

где

$$\xi_i' = \begin{cases} \zeta_0, & \text{если } x_i' = s_m \mid 1, \\ \omega_{\mathrm{pos}(x_i', X_0)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant i \leqslant q. \end{cases}$$

Учитывая индуктивное предположение для любого набора $\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_{k_2} \in \Omega$, $k_2 = \# X_2$, $X_2 = X_{\mathfrak{X}}(t)\setminus(S\setminus\{s_m\}) \mid 1 \cup X_{\mathfrak{X}}((S \setminus \{s_m\}) \mid 2)$, существует такой набор $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1} \in \Omega$, что выполняется

$$(\forall i = \overline{1, m-1})\, \zeta_{\mathrm{pos}(s_i|1, (S\setminus s_m\})|1)} = I_{t_i}(\mu_{\mathrm{pos}(x_1^i, X_2)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(x_{n_i}^i, X_2)}), \tag{1.15}$$

$$I_{t'}(\mu_{\mathrm{pos}(x_1', X_2)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(x_q', X_2)}) = I_t(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{1.16}$$

причем

$$\xi_i = \begin{cases} \zeta_{\mathrm{pos}(x_i, (S\setminus\{s_m\})|1)}, & \text{если } x_i \in (S \setminus \{s_m\}) \mid 1, \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_i, X_2)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

В случае, когда $s_m \mid 1 \bar{\in} X_{\mathfrak{X}}(t)$, из замечания 1.11 вытекает, что $s_m \mid 1 \bar{\in}$ $\bar{\in} X_{\mathfrak{X}}(t')$, и, следовательно, $\xi_i' = \omega_{\mathrm{pos}(x_i', X_0)}$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Поскольку для $\mu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(X_2)|i, X_0)}$, $1 \leqslant i \leqslant k_2$, из (1.15) и (1.16) следует, что

$$\zeta_{\mathrm{pos}(s_i|1, (S\setminus\{s_m\})|1)} = I_{t_i}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1^i, X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_{n_i}^i, X_0)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $I_{t'}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1',X_0)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_q',X_0)}) = I_t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где

$$\xi_i = \begin{cases} \zeta_{\mathrm{pos}(x_i,(S\setminus\{s_m\})|1)}, & \text{если} \quad x_i \in (S \setminus \{s_m\}) \mid 1, \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_i,X_2)}, & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

то отсюда, учитывая (1.13) и (1.14), получаем (1.11) и (1.12), если определить

$$(\forall i = \overline{1,\ m})\quad \nu_i = \begin{cases} \zeta_i, & \text{если} \quad i < \mathrm{pos}(s_m \mid 1,\ S \mid 1), \\ \zeta_0, & \text{если} \quad i = \mathrm{pos}(s_m \mid 1,\ S \mid 1), \\ \zeta_{i-1}, & \text{если} \quad i > \mathrm{pos}(s_m \mid 1,\ S \mid 1). \end{cases} \tag{1.17}$$

Если $s_m \mid 1 \in X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})$, то согласно замечанию 1.11 $s_m \mid 1 \in X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t}')$. Поскольку для

$$\mu_i = \begin{cases} \zeta_0, & \text{если} \quad i = \mathrm{pos}(s_m \mid 1,\ X_2), \\ \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(X_2)|i,X_0)}, & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q, \end{cases}$$

из (1.4) вытекает, что $\xi_i' = \mu_{\mathrm{pos}(x_i',X_2)}$, $1 \leqslant i \leqslant q$, то отсюда, учитывая (1.13) — (1.16), следует (1.11) и (1.12), если определить ν_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, согласно (1.17).

В дальнейшем для пары м. т. с. S_1 и S_2 будем предполагать, что $S_1 = \{s_1, \ldots, s_{l_1}\} \in S_{\mathfrak{T}}$, $S_2 = \{s_{l_1+1}, \ldots, s_{l_1+l_2}\} \in S_{\mathfrak{T}}$ — такие множества термальных соотношений, которые удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3), а также $s_i \mid 2 = \mathrm{t}_i(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i)$, $1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1.8. *Для любого набора* $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega$, $k = \# XI(S_1,\ S_2)$, *существует такой набор* $\nu_1, \ldots, \nu_{l_1+l_2} \in \Omega$, *что для любого* i, $1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2$, *выполняется*

$$\nu_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2)|1)} = I_{t_i}(\zeta_1^i, \ldots, \zeta_{n_i}^i), \tag{1.18}$$

$$\zeta_j^i = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^i,XI(S_1,S_2))}, & \textit{если} \quad x_j^i \in XI(S_1,\ S_2), \\ \nu_{\mathrm{pos}(x_j^i,(S_1\cup S_2)|1)}, & \textit{иначе}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i, \end{cases}$$

$$I_{\mathrm{t}_i^0}(\omega_{\mathrm{pos}(y_1^i,XI(S_1,S_2))}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(y_{k_i}^i,XI(S_1,S_2))}) = \nu_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2)|1)}, \tag{1.19}$$

где

$$\mathrm{t}_i^{\mathrm{c}}(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i) = \begin{cases} \Pi(\mathrm{t}_i,\ S_2,\ S_1), & \textit{если} \quad 1 \leqslant i \leqslant l_1, \\ \Pi(\mathrm{t}_i,\ S_1,\ S_2), & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Доказательство. Если $S_1 \cup S_2 = \varnothing$ или $l_1 + l_2 = 1$, то утверждение леммы с очевидностью следует из замечания 1.12 или леммы 1.7. Предположим его справедливость для всех $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$ — таких, что $l_1 + l_2 < m$ $(m > 1)$. Пусть теперь $l_1 + l_2 = m$ и $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — произвольный, но фиксированный набор элементов Ω.

Из условия (1.3) следует, что существует такое термальное соотношение $s \in S_1 \cup S_2$, для которого выполняется $s \mid 1 \overline{\in} X_{\mathfrak{T}}((S_1 \cup S_2) \mid 2)$.

Положим для определенности, что $s = s_{l_1+l_2}$. Учитывая индуктивное предположение, для любого набора $\mu_1, \ldots, \mu_{q_1} \in \Omega$, $q_1 = \# XI(S_1, S_2\setminus\{s\})$, существует такой набор $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1} \in \Omega$, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, выполняется

$$\eta_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)} = I_{t_i}(\zeta_1^i, \ldots, \zeta_{n_i}^i), \tag{1.20}$$

$$\zeta_j^i = \begin{cases} \mu_{\mathrm{pos}(x_j^i, XI(S_1,S_2\setminus\{s\}))}, & \text{если } x_j^i \in XI(S_1, S_2)\setminus\{s\}), \\ \eta_{\mathrm{pos}(x_j^i,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)}, & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i, \end{cases}$$

$$I_{t_i^0}(\mu_{\mathrm{pos}(y_1^i, XI(S_1,S_2\setminus\{s\}))}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(y_{k_i}^i, XI(S_1,S_2\setminus\{s\}))}) = \eta_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)}, \tag{1.21}$$

где

$$t_i^0(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i) = \begin{cases} \Pi(t_i, S_2\setminus\{s\}, S_1), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant l_1, \\ \Pi(t_i, S_1, S_2\setminus\{s\}), & \text{иначе}. \end{cases}$$

Заметим, что согласно следствию 1.2 выполняется

$$t_i^0 = \begin{cases} \Pi(t_i, S_2, S_1), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant l_1, \\ \Pi(t_i, S_1, S_2), & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1. \end{cases} \tag{1.22}$$

Теперь определим η_0 следующим образом: $\eta_0 = I_{t_m}(\zeta_1^m, \ldots, \zeta_{n_m}^m)$, причем

$$\zeta_j^m = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^m, XI(S_1,S_2))}, & \text{если } x_j^m \in XI(S_1, S_2), \\ \eta_{\mathrm{pos}(x_j^m,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1))}), & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_m. \end{cases}$$

Так как справедливо $(\forall\, i = \overline{1, m})$ $(\forall_j = \overline{1, n_i})$ $x_j^i \in XI(S_1, S_2) \cup (S_1 \cup S_2 \setminus \{s\}) \mid 1$, то определение η_0 корректно.

Таким образом, для $\mu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(XI(S_1,S_2\setminus\{s\}))|i, XI(S_1,S_2))}$, $1 \leqslant i \leqslant q_1$, учитывая то, что $XI(S_1, S_2\setminus\{s\}) \subseteq XI(S_1, S_2)$ и $(\forall\, i = \overline{1, m-1})$ $(\forall\, j = \overline{1, n_i})$ $x_j^i \in XI(S_1, S_2) \to x_j^i \in XI(S_1, S_2\setminus\{s\})$, из (1.20)—(1.22) получаем

$$(\forall\, i = \overline{1, m})\, I_{t_i}(\zeta_1^i, \ldots, \zeta_{n_i}^i) = \begin{cases} \eta_0, & \text{если } i = m, \\ \eta_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)}, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\zeta_j^i = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^i, XI(S_1,S_2))}, & \text{если } x_j^i \in XI(S_1, S_2), \\ \eta_{\mathrm{pos}(x_j^i,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)}, & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i, \end{cases}$$

$$(\forall\, i = \overline{1, m-1})\, I_{t_i^0}(\omega_{\mathrm{pos}(y_1^i, XI(S_1,S_2))}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(y_{k_i}^i, XI(S_1,S_2))}) = \eta_{\mathrm{pos}(s_i|1,(S_1\cup S_2\setminus\{s\})|1)}, \tag{1.24}$$

где

$$t_i^0(y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i) = \begin{cases} \Pi(t_i, S_2, S_1), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant l_1, \\ \Pi(t_i, S_1, S_2), & \text{иначе}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь $\Pi(\mathrm{t}_m, S_1, S_2)$. Согласно лемме 1.4

$$\Pi(\mathrm{t}_m, S_1, S_2) = \pi(\mathrm{t}_m, S), \qquad (1.25)$$

где $S = \{\langle x, \mathrm{t}\rangle / x \in S_1 \mid 1 \; \& \; \mathrm{t} = \Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1)\}$.

Из леммы 1.7, учитывая (1.25), следует, что для любого набора $\mu_1, \ldots, \mu_{q_2} \in \Omega$, $q_2 = \# X_0$, $X_0 = X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t}_m) \setminus S_1 \mid 1 \cup X_{\mathfrak{T}}(S \mid 2)$ существует такой набор $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_{l_1} \in \Omega$, что выполняется

$$(\forall i = \overline{1, l_1})\, \upsilon_{\mathrm{pos}(s_i|1, S_1|1)} = I_{\mathrm{t}_i^0}(\mu_{\mathrm{pos}(y_1^i, X_0)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(y_{k_i}^i, X_0)}), \qquad (1.26)$$

$$I_{\mathrm{t}_m^0}(\mu_{\mathrm{pos}(y_1^m, X_0)}, \ldots, \mu_{\mathrm{pos}(y_{k_m}^m, X_0)}) = I_{\mathrm{t}_m}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_m}), \qquad (1.27)$$

причем

$$\xi_i = \begin{cases} \upsilon_{\mathrm{pos}(x_i^m, S_1|1)}, & \text{если } x_i^m \in S_1 \mid 1, \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_i^m, X_0)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant i \leqslant n_m. \end{cases}$$

Согласно следствию 1.1 $X_0 \subseteq XI(S_1, S_2)$. Тогда для $\mu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(X_0)|i, XI(S_1,S_2))}$, $1 \leqslant i \leqslant q_2$, из (1.23), (1.26) и (1.27) получим $\upsilon_{\mathrm{pos}(s_i|1, S_1|1)} = \eta_{\mathrm{pos}(s_i|1, (S_1 \cup S_2 \setminus \{s\})|1)}, 1 \leqslant i \leqslant l_1$, и $\eta_0 = I_{\mathrm{t}_m^0}(\omega_{\mathrm{pos}(y_1^m, XI(S_1,S_2))}, \ldots$
$\ldots, \omega_{\mathrm{pos}(y_{k_m}^m, XI(S_1,S_2))})$, принимая во внимание то, что $(\forall i = \overline{1, n_m})\, x_i^m \in$
$\in (S_1 \cup S_2 \setminus \{s\}) \mid 1 \to x_i^m \in S_1 \mid 1$. Отсюда, учитывая (1.23) и (1.24), следует (1.18) и (1.19), если определить ν_i, $1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2$, так:

$$\nu_i = \begin{cases} \eta_i, & \text{если } i < \mathrm{pos}(s \mid 1, (S_1 \cup S_2) \mid 1), \\ \eta_0, & \text{если } i = \mathrm{pos}(s \mid 1, (S_1 \cup S_2) \mid 1), \\ \eta_{i-1}, & \text{если } i > \mathrm{pos}(s \mid 1, (S_1 \cup S_2) \mid 1). \end{cases}$$

Определение 1.4. Будем говорить, что по заданному (входному) набору $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$, $n = \# XI(S_1, S_2)$, множества термальных соотношений S_1 и S_2 определяют (выходной) набор $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \Omega$, $m = \# XO(S_1, S_2)$, если существует такой набор $\mu_1, \ldots, \mu_{l_1+l_2} \in \Omega$, что выполняется $(\forall i = \overline{1, l_1 + l_2})\, \mu_{\mathrm{pos}(s_i|1, (S_1 \cup S_2)|1)} = I_{\mathrm{t}_i}(\xi_1^i, \ldots, \xi_{n_i}^i)$, причем

$$\xi_j^i = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^i, XI(S_1,S_2))}, & \text{если } x_j^i \in XI(S_1, S_2), \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_j^i, (S_1 \cup S_2)|1)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant j \leqslant n_i, \end{cases}$$

$\langle \nu_1, \ldots, \nu_m \rangle = \langle \mu_1, \ldots, \mu_{l_1+l_2} \rangle \mid \mathrm{pos}(XO(S_1, S_2), (S_1 \cup S_2) \mid 1)$, и обозначать $\langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle \mid\!\xrightarrow{S_1 S_2} \langle \nu_1, \ldots, \nu_m \rangle$.

Определение 1.5. Набор операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi^m$ определяется парой множеств термальных соотношений $S_1, S_2 \in S_{\mathfrak{T}}$ (обозначение: $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle = A_I(S_1, S_2)$), если выполняется $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m \rangle \mid\!\xrightarrow{S_1, S_2} \langle \varphi_1(\omega_1, \ldots$
$\ldots, \omega_m), \ldots, \varphi_n(\omega_1, \ldots, \omega_m) \rangle$ для любого набора $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Omega$.

Инвариантность интерпретации относительно операции свертки м. т. с. устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.1. $A_I(S_1 * S_2, \varnothing) = A_I(S_1, S_2)$.

Доказательство. Отметим, что согласно лемме 1.5 $S_1 * S_2 \in S_{\mathfrak{X}}$.

Пусть $A_I(S_1, S_2) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, $A_I(S_1 * S_2, \varnothing) = \langle g_1, \dots, g_{m'} \rangle$, $f_i \in \Phi^n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $g_j \in \Phi^{n'}$, $1 \leqslant j \leqslant m'$. Так как $(S_1 * S_2) \mid 1 = XO(S_1, S_2)$, то $m = m'$. Из условия (1.3) согласно лемме 1.6 следует, что $XI(S_1 * S_2, \varnothing) = XI(S_1, S_2)$, т. е. $n = n'$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — произвольный, но фиксированный набор элементов Ω. Покажем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, справедливо $f_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = g_i(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Положим для определенности $x = \mathrm{var}(XO(S_1, S_2)) \mid i \in S_1 \mid 1$.

Так как $\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle \left|\frac{S_1 * S_2, \varnothing}{}\right. \langle g_1(\omega_1, \dots, \omega_n), \dots, g_m(\omega_1, \dots, \omega_n) \rangle$, то, $g_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = I_{\mathfrak{t}}(\omega_{\mathrm{pos}(x_1, XI(S_1, S_2))}, \dots, \omega_{\mathrm{pos}(x_k, XI(S_1, S_2))})$, причем $\Pi(\mathrm{term}(x, S_1), S_2, S_1) = \mathfrak{t}(x_1, \dots, x_k)$. Из леммы 1.8 следует, что существует такой набор $\nu_1, \dots, \nu_{l_1 + l_2} \in \Omega$, что выполняется $(\forall p = \overline{1, l_1 + l_2})\ \nu_{\mathrm{pos}(s_p \mid 1, (S_1 \cup S_2) \mid 1)} = I_{\mathfrak{t}_p}(\zeta_1^p, \dots, \xi_{n_p}^p)$, причем

$$\zeta_j^p = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^p, XI(S_1, S_2))}, & \text{если } x_j^p \in XI(S_1, S_2), \\ \nu_{\mathrm{pos}(x_j^p, (S_1 \cup S_2) \mid 1)}, & \text{иначе, } 1 \leqslant j \leqslant n_p, \end{cases}$$

и $g_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \nu_{\mathrm{pos}(x, (S_1 \cup S_2) \mid 1)}$.

Отсюда согласно определению 1.4 вытекает $g_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \nu_{q_i}$ и $\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle \left|\frac{S_1, S_2}{}\right. \langle \nu_{q_1}, \dots, \nu_{q_m} \rangle$, где $q_j = \mathrm{pos}(\mathrm{var}(XO(S_1, S_2)) \mid j, (S_1 \cup S_2) \mid 1)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Следовательно, $g_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = f_i(\omega_1, \dots, \omega_n)$, так как $\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle \left|\frac{S_1, S_2}{}\right. \langle f_1(\omega_1, \dots, \omega_n), \dots, f_m(\omega_1, \dots, \omega_n) \rangle$, что и требовалось доказать.

Таким образом, условия (1.2) и (1.3) являются достаточными для инвариантности интерпретации относительно операции свертки м. т. с.

Сложные РТС предлагается описывать в терминах схем моделей, строгое определение которых приводится ниже. Для построения эффективной процедуры генерации ММ и моделирующих алгоритмов, имитирующих функционирование РТС, необходимым является понятие агрегирования схем моделей корректность которого будет показана.

Для определения схем моделей и оператора их агрегирования понадобятся некоторые понятия теории графов [107].

Определение 1.6. $G(V, g)$ назовем ориентированным графом; если $G(V, g) = \{\langle v, w, i \rangle / v, w \in V \ \&\ 0 < i \leqslant g(v, w)\}$, где V — конечное множество вершин; $g: V^2 \to N$ — функция кратности дуг графа.

Дуга $\langle v, w, i \rangle$ считается положительно инцидентной вершине w и отрицательно инцидентной вершине v. Путем длины n из вершины v в вершину w является последовательность неповторяющихся дуг $e_1, \dots, e_n$ $(e_j = \langle v_j, w_j, i_j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n)$ таких, что выполняется $v_1 = v$, $(\forall j = \overline{1, n-1})\ w_j = v_{j+1}$, $w_n = w$. Произвольный путь из v в w называется контуром или циклом, если $v = w$. Ориентированный граф называют связным, если для каждой пары различных вершин v и w существует путь из v в w или из w в v. Дугу вида $\langle v, v, i\rangle$ будем называть петлей. Связный ориентированный граф без петель называется сетью.

Пусть $G = G(V, g)$ — сеть, $W \subset V$ и $v, w \in V$. Условимся обозначать $V_G^+(W)$, $V_G^-(W)$, $E_G(v, w)$, $E_G^-(W)$ и $E_G^+(W)$ — соответственно множество вершин, непосредственно достижимых из W, множество вершин, непосредственно предшествующих W, множество дуг, ведущих из v в w, множество дуг, исходящих из W, и множество дуг, входящих в W,

$$V_G^+(W) \overset{df}{=} \{v \in V \setminus W / (\exists w \in W)\, g(w, v) > 0\},$$

$$V_G^-(W) \overset{df}{=} \{v \in V \setminus W / (\exists w \in W)\, g(v, w) > 0\},$$

$$E_G(v, w) \overset{df}{=} \{\langle v, w, i\rangle / 0 < i \leqslant g(v, w)\},$$

$$E_G^-(W) \overset{df}{=} \{\langle w, v, i\rangle / w \in W \,\&\, v \in V_G^+(W) \,\&\, 0 < i \leqslant g(w, v)\},$$

$$E_G^+(W) \overset{df}{=} \{\langle v, w, i\rangle / w \in W \,\&\, v \in V_G^-(W) \,\&\, 0 < i \leqslant g(v, w)\}.$$

Если $G = G(V, g)$ — сеть и δ — взаимно-однозначное отображение G на некоторое множество X, то условимся также обозначать через δ_G^+ и δ_G^- однозначные отображения X на множество вершин V, определяемые следующим образом:

$$\delta_G^+(x) = v \Leftrightarrow \delta^{-1}(x) \in E_G^+(v),$$

$$\delta_G^-(x) = v \Leftrightarrow \delta^{-1}(x) \in E_G^-(v).$$

Теперь представляется возможным ввести основное понятие — схемы моделей.

Определение 1.7. Схемой моделей называется упорядоченный набор $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W\rangle$, где $G = G(V, g)$ — сеть; $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(X, F, E)$ — множество термов; $x_0 \in X$ — выделенная предметная переменная; $\delta : G \underset{1:1}{\rightarrow} X \setminus \{x_0\}$ — функция отметок дуг сети; $\lambda : V \rightarrow S_{\mathfrak{T}}$ — функция отметок вершин сети; $W \subset V$ — собственное подмножество вершин сети, причем выполняются следующие условия:

(i) $(\exists v \in V)\, E_G^-(v) = \varnothing$;

(ii) $(\forall v \in V)\, E_G^-(v) = \varnothing \rightarrow \lambda(v) = \varnothing$;

(iii) $(\forall v \in W)\, \# E_G^-(v) = \# E_G^+(v) = 1$;

(iv) $(\forall v, w \in W)\, g(v, w) = 0$;

(v) $(\forall v \in V)\, \lambda(v) \neq \varnothing \rightarrow \lambda(v) \mid 1 = \delta(E_G^-(v))\, \&$

$$X_{\mathfrak{T}}(\lambda(v) \mid 2) \setminus \{x_0\} = \delta(E_G^+(v));$$

(vi) $(\forall x_1, \ldots, x_n \in \delta(G))(n > 1)\, ((\forall i = \overline{1, n})\, \delta_G^+(x_i) = \delta_G^-(x_{\mathrm{rest}(i,n)+1})) \rightarrow$

$$(\exists_j)(1 \leqslant j \leqslant n)\, x_j \,\bar{\in}\, X_{\mathfrak{T}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{term}(x_i, \lambda(\delta_G^-(x_i)))\right) \vee \delta_G^-(x_j) \in W.$$

Пусть $DB_\Sigma \overset{df}{=} W$, $PB_\Sigma \overset{df}{=} \{v \in V \setminus W / \lambda(v) \neq \varnothing\}$ и $OB_\Sigma \overset{df}{=} \{v \in V \setminus W / \lambda(v) = \varnothing\}$ — попарно непересекающиеся множества вершин сети, объединение которых равно V. Элементы этих множеств будем называть блоками задержки, преобразования и выхода соответственно.

Отметим, что для любой схемы моделей

а) существует по крайней мере один блок выхода, и все блоки выхода не имеют отметок и отрицательно инцидентных дуг (условия (i), (ii) и (v));

б) множество отметок отрицательно инцидентных блоку преобразования дуг совпадает со множеством предметных переменных, используемых в левых частях термальных соотношений, составляющих отметку блока (условие (v));

в) множество отметок положительно инцидентных блоку преобразования дуг совпадает с точностью до выделенной предметной переменной x_0 со множеством предметных переменных, используемых в правых частях термальных соотношений, составляющих отметку этого блока, и, следовательно, правые части термальных соотношений, соответствующих блоку преобразования без положительно инцидентных дуг, суть термы, содержащие лишь выделенную предметную переменную x_0 (условие (v));

г) для любого блока задержки количество как положительно, так и отрицательно инцидентных ему дуг равно единице (условие (iii));

д) длина пути от одного блока задержки к другому больше единицы (условие (iv));

е) произвольный контур или проходит по крайней мере через один блок задержки, или существует такая предметная переменная из множества отметок дуг контура, которая не принадлежит множеству предметных переменных, используемых в правых частях соответствующих отметкам дуг контура термальных соотношений (условие (vi)).

Определение 1.8. Говорят, что схема моделей имеет канонический вид, если она содержит не больше одного блока преобразования.

Определим теперь оператор агрегирования схем моделей следующим образом.

Определение 1.9. Будем говорить, что схема моделей Σ' получена из схемы моделей $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W\rangle$ применением оператора агрегирования к блокам v_1 и v_2, и обозначать $\operatorname{agg}(\Sigma, v_1, v_2) = \Sigma'$, если $\Sigma' = \langle G', \mathfrak{T}, x_0, \delta', \lambda', W\rangle$, где $G' = G(V', g')$,

$$\delta'(\langle v', v'', i\rangle) =$$

$$= \begin{cases} \delta(\langle v', v_2, i - g(v', v_1)\rangle), & \text{если} \quad v' \in V' \,\&\, v'' = v_1 \,\&\, i > g(v', v_1), \\ \delta(\langle v_2, v'', i - g(v_1, v'')\rangle), & \text{если} \quad v' = v_1 \,\&\, v'' \in V' \,\&\, i > g(v_1, v''), \\ \delta(\langle v', v'', i\rangle), & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\lambda'(v) = \begin{cases} \lambda(v_1) * \lambda(v_2), & \text{если} \quad v = v_1, \\ \lambda(v), & \text{иначе}, \end{cases}$$

причем $V' = V \setminus \{v_2\}$ и $v, v', v'' \in V'$,

$$g'(v', v'') = \begin{cases} g(v_1, v'') + g(v_2, v''), & \text{если} \quad v' = v_1 \,\&\, v'' \neq v_1, \\ g(v', v_1) + g(v', v_2), & \text{если} \quad v' \neq v_1 \,\&\, v'' = v_1, \\ g(v', v''), & \text{иначе}, \end{cases}$$

в том случае, когда $v_1, v_2 \in PB_\Sigma$ и $v_1 \neq v_2$, и $\Sigma' = \Sigma$ — в противном случае.

Для того чтобы убедиться в корректности определения 1.9, покажем, что условие (vi) определения схемы моделей инвариантно относительно оператора агрегирования. Инвариантность условий (i) — (v) можно показать аналогично.

Пусть $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W\rangle$ — схема моделей, $v_1, v_2 \in PB_\Sigma$, $v_1 \neq v_2$ и $\mathrm{agg}(\Sigma, v_1, v_2) = \Sigma'$, причем $\Sigma' = \langle G', \mathfrak{T}, x_0, \gamma, \lambda', W\rangle$. Пусть также $x_1, \ldots, x_n \in \gamma(G')$ — последовательность предметных переменных, для которой выполняется

$$\gamma^+_{G'}(x_i) = \gamma^-_{G'}(x_{\mathrm{rest}(i,n)+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.28}$$

Обозначим $\gamma^-_{G'}(x_i) = w_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если $w_i \in W$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то это означает справедливость условия (vi) для Σ'.

Предположим теперь, что выполняется $w_i \in V' \setminus W$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Заметим также, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо

$$w_i \neq v_1 \rightarrow \gamma^-_{G'}(x_i) = \delta^-_G(x_i) \,\&\, \gamma^+_{G'}(x_{n(2-i)+i-1}) = \delta^+_G(x_{n(2-i)+i-1}). \tag{1.29}$$

Рассмотрим тот случай, когда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $w_i \neq v_1$. Тогда из (1.28) и (1.29) следует $(\forall\, i = \overline{1, n})\, \delta^+_G(x_i) = \delta^-_G(x_{\mathrm{rest}(i,n)+1})$, и поэтому выполнение условия (vi) для Σ означает его выполнение для Σ', так как $\lambda'(v) = \lambda(v)$, если только $v \neq v_1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $(\exists k_1, \ldots, k_p)\,(1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p \leqslant n)$ $(p \geqslant 1)$ $(\forall i = \overline{1, p})\; w_{k_i} = v_1$.

Будем считать, что $k_1 > 1$, тем самым не ограничивая общности рассуждений. Предположим, что в этом случае тем не менее выполняется

$$(\forall\, i = \overline{1, n})\;\; x_i \in X_{\mathfrak{T}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{term}(x_i, \lambda'(w_i))\right). \tag{1.30}$$

Обозначим

$$I_i = \{k_i, k_i + 1, \ldots, k_{i+1} - 1\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p - 1,$$
$$I_p = \{k_p, \ldots, n, 1, \ldots, k_1 - 1\},$$
$$I_0 = \{k_1, k_2, \ldots, k_p\},$$
$$X_i = X_{\mathfrak{T}}\Big(\bigcup_{j \in I_i \setminus I_0} \mathrm{term}(x_j, \lambda(\delta^-_G(x_j)))\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$
$$X_0 = X_{\mathfrak{T}}\Big(\bigcup_{j \in I_0} \mathrm{term}(x_j, \lambda(v_1) * \lambda(v_2))\Big).$$

Тогда из (1.30) вытекает, что $(\forall j = \overline{1, n})\;\; x_j \in \bigcup_{i=0}^{p} X_i$.

Если для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, такого, что $(\forall i = 1, p)\ j \neq k_i - 1$, выполняется $x_j \in X_0$, то согласно следствию 1.1 $x_j \in X\mathfrak{T}(\lambda(v_1)\,|\,2)$ или $x_j \in X\mathfrak{T}(\lambda(v_2)\,|\,2)$, и, следовательно, $\delta_G^+(x_j) = v_1$, или $\delta_G^+(x_j) = v_2$. С другой стороны, из (1.29) вытекает, что $\delta_G^+(x_j) = w_{\mathrm{rest}(j,n)+1}$. А так как $w_{\mathrm{rest}(j,n)+1} \neq v_1$, $w_{\mathrm{rest}(j,n)+1} \neq v_2$, если $j \neq k_i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant p$, то полученное противоречие показывает $x_j \bar{\in} X_0$, и, следовательно,

$$(\forall j = \overline{1, n})(\forall i = \overline{1, p})\ j \neq k_i - 1 \rightarrow x_j \in \bigcup_{q=1}^{p} X_q. \tag{1.31}$$

Если $x_{k_i-1} \in \bigcup_{j=1}^{p} X_j$, $1 \leqslant i \leqslant p$, то это означает

$$(\exists k)(1 \leqslant k \leqslant n)(\forall j = \overline{1, p})\ k \neq k_j \,\&\, x_{k_i-1} \in X\mathfrak{T}(\mathrm{term}(x_k, \lambda(w_k))).$$

Из условия (v) для Σ вытекает $\delta_G^+(x_{k_i-1}) = w_k$. С другой стороны, из (1.28) и (1.29) следует

$$\delta_G^+(x_{k_i-1}) = w_{k_i}. \tag{1.32}$$

Полученнсе противоречие показывает

$$(\forall i = \overline{1, p})\ x_{k_i-1} \in X_0. \tag{1.33}$$

Учитывая, что $v_1 \neq v_2$ согласно следствию 1.1 из (1.32) и (1.33) вытекает существование последовательностей термальных соотношений $\{s_j^i\}_{j=1}^{m_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant m_i \leqslant \# XN(\lambda(v_1), \lambda(v_2))$ и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, выполняется

$$\begin{gathered}((\forall j = \overline{1, m_i})\, s_j^i \in \lambda(v_{\mathrm{rest}(j,2)+1}) \vee (\forall j = \overline{1, m_i})\, s_j^i \in \lambda(v_{2-\mathrm{rest}(j,2)}))\ \& \\ s_1^i\,|\,1 \in X\mathfrak{T}(\mathrm{t}_i)\,\&\,(\forall j = \overline{2, m_i})\, s_j^i\,|\,1 \in X\mathfrak{T}(s_{j-1}^i\,|\,2)\ \& \\ x_{k_i-1} \in X\mathfrak{T}(s_{m_i}^i\,|\,2),\end{gathered} \tag{1.34}$$

где

$$\mathrm{t}_i = \begin{cases} \mathrm{term}(x_{k_i}, \lambda(v_1)), \text{ если } x_{k_i} \in \lambda(v_1)\,|\,1 \setminus X\mathfrak{T}(\lambda(v_2)\,|\,2), \\ \mathrm{term}(x_{k_i}, \lambda(v_2)), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда для последовательности $y_1, \ldots, y_{n+m} \in \delta(G)$, $m = \sum_{i=1}^{p} m_i$, такой, что

$$(\forall j = \overline{1, n+m})\quad y_j = \begin{cases} x_{j-l(i-1)}, \text{ если } (\exists i)(1 \leqslant i \leqslant p)\, k_{i-1} + l(i-1) \leqslant \\ \qquad \leqslant j < k_i + l(i-1), \\ s_{k_i+l(i)-j}^i\,|\,1, \text{ если } (\exists i)(1 \leqslant i \leqslant p)\, k_i + l(i-1) \leqslant \\ \qquad \leqslant j < k_i + l(i), \\ x_{j-m}, \text{ иначе,} \end{cases}$$

где $k_0 = 1$, $l(0) = 0$ и $(\forall i = \overline{1, p})\ l(i) = \sum_{q=1}^{i} m_q$ выполняется $(\forall i = \overline{1, n+m})\ \delta_G^+(y_i) = \delta_G^-(y_{\text{rest}(i, n+m)+1})$ и из условия (vi) для Σ следует

$$(\exists r)(1 \leqslant r \leqslant n+m)(\forall i = \overline{1, n+m})\ y_r \bar{\in} X_{\mathfrak{T}}(\text{term}(y_i, \lambda(\delta_G^-(y_i)))). \tag{1.35}$$

Так как из (1.34) вытекает $(\forall i = \overline{1, p})$ $(\forall j = \overline{1, m_i})$ $y_r \neq s_j^i \mid 1$ & $y_r \neq x_{k_i - 1}$, то, учитывая (1.31), получаем $y_r \in \bigcup_{q=1}^{p} X_q$, что противоречит (1.35). Следовательно, условие (vi) выполняется для Σ'.

Из определений схем моделей и оператора их агрегирования следует замечание.

Замечание 1.13. Для любых схем моделей Σ и Σ' таких, что $\Sigma' = \text{agg}(\Sigma, v_1, v_2)$, выполняется $\delta'(G') = \delta(G) \setminus \delta(E_G(v_1, v_2) \cup E_G(v_2, v_1))$, где $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$, $\Sigma' = \langle G', \mathfrak{T}, x_0\ \delta', \lambda', W \rangle$ и $v_1, v_2 \in PB_\Sigma$.

§ 2. Об автоматизации построения математических моделей и имитационных алгоритмов

Пусть Ω — основное множество ($N \subseteq \Omega$), Φ — множество операций, определенных на Ω, $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$ — схема моделей и I — интерпретация.

Определение 2.1. Под моделью будем понимать четверку $\langle \Sigma, \Omega, \Phi, I \rangle$, если $I(x_0) = 0$ и для любого $w \in W$ $I_{\lambda(w)|2}$ — функция, принимающая положительные натуральные значения, причем будем считать, что модель имеет канонический вид, если соответствующая схема имеет подобный вид.

Следует заметить, интерпретация I задает начальные значения предметных переменных и значения функциональных символов. Отметим также, что выделенная предметная переменная x_0 интерпретируется как дискретное время функционирования модели, рассматриваемое на некотором множестве N_k моментов времени, и значения функций $I_{\lambda(v)|2}$ $(v \in DB_\Sigma)$ интерпретируются как время задержки соответствующих блоков.

Пусть $X_0 = \delta(G) \cup \{x_0\}$, $\text{var}(X_0) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Определение 2.2. Состояние $SP_{\mathfrak{M}}(k)$ модели $\mathfrak{M}$ в момент времени k $(k \in N)$ как упорядоченный набор значений отметок дуг сети G определим следующим образом:

а) состояние модели $\mathfrak{M}$ в начальный момент времени $SP_{\mathfrak{M}}(0) = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle$, причем

$$(\forall i = \overline{1, n})\ \omega_i = \begin{cases} I(x_i), & \text{если } x_i = x_0 \vee \delta_G^+(x_i) \in OB_\Sigma \vee \delta_G^-(x_i) \in DB_\Sigma, \\ \text{не определено, иначе;} \end{cases}$$

б) если для любого момента времени, меньшего k, состояние модели определено, то $SP_{\mathfrak{M}}(k) = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle$, причем для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\omega_i = \begin{cases} k, \text{ если } x_i = x_0, \\ I_{t_i}(p(i, 1), \ldots, p(i, m_i)), \text{ если } \delta_G^-(x_i) \in V \setminus W \ \& \ (\forall j = \overline{1, m_i}), \\ \qquad p(i,j) \text{ определены}, \\ SP_{\mathfrak{M}}(k \dot{-} I_{t_i}(q(i, 1), \ldots, q(i, m_i))) \mid \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_i))), X_0), \\ \quad \text{если } \delta_G^-(x_i) \in DB_\Sigma \ \& \ (\forall j = \overline{1, m_i}), \ q(i, j) \text{ определены } \& \\ \qquad I_{t_i}(q(i, 1), \ldots, q(i, m_i)) \text{ определено}, \\ \text{не определено, иначе}, \end{cases}$$

где $\mathrm{term}(x_i, \lambda(\delta_G^-(x_i))) = t_i(x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i)$, $q(i, j) = SP_{\mathfrak{M}}(k - 1) \mid \mathrm{pos}(x_j^i, X_0)$ и $p(i, j) = \omega_{\mathrm{pos}(x_j^i, X_0)}$.

Нетрудно видеть, что оператор агрегирования схем моделей индуцирует соответствующий оператор для моделей.

Определение 2.3. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}_1 = \langle \Sigma_1, \Omega, \Phi, I \rangle$ получена из модели $\mathfrak{M}_2 = \langle \Sigma_2, \Omega, \Phi, I \rangle$ применением оператора агрегирования к блокам v_1 и v_2 схемы моделей Σ_2, если $\Sigma_1 = \mathrm{agg}(\Sigma_2, v_1, v_2)$, и обозначать так: $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{agg}(\mathfrak{M}_2, v_1, v_2)$.

Понятие эквивалентности моделей введем следующим образом.

Определение 2.4. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M} = \langle \Sigma, \Omega, \Phi, I \rangle$ представляет набор, вообще говоря, частичных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Phi^1$ если для любого $n \in N$ выполняется

$$\langle \varphi_1(n), \ldots, (\varphi_m(n)) \rangle = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(OB_\Sigma)), \delta(G) \cup \{x_0\}),$$

где $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$, и обозначать $\mathrm{fun}(\mathfrak{M}) = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$.

Определение 2.5. Модели $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ эквивалентны ($\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$), если $\mathrm{fun}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{fun}(\mathfrak{M}_2)$.

В дальнейшем построение процедуры генерации моделирующих алгоритмов функционирования РТС будет ориентировано на определенный класс моделей, а именно на класс стандартных моделей. Указанное ограничение является необходимым, так как позволяет исключить из рассмотрения модели, содержащие блоки задержки с бесконечной памятью.

Определение 2.6. Модель $\mathfrak{M}$ будем называть стандартной, если существует такое натуральное число n_0, что для любого блока задержки $w \in W$ выполняется

$$(\forall n \in N)(\forall \omega \in \Omega) \, I_{\lambda(w)|2}(n, \omega) \leqslant n_0,$$

если только значение $I_{\lambda(w)|2}(n, \omega)$ определено.

Зависимость состояний модели и ее агрегата устанавливает.

Лемма 2.1. *Для любой модели $\mathfrak{M}$ и произвольной пары ее блоков v_1 и v_2 выполняется*

$$(\forall k \in N) \, SP_{\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2)}(k) = SP_{\mathfrak{M}}(k) \mid \mathrm{pos}(X_2, X_1),$$

где $\mathfrak{M} = \langle \Sigma, \Omega, \Phi, I \rangle$, $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$, $X_1 = \delta(G) \cup \{x_0\}$, $X_2 = X_1 \setminus \delta(E_G(v_1, v_2) \cup E_G(v_2, v_1))$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2) = \langle \Sigma', \Omega, \Phi, I \rangle$, $\Sigma' = \langle G', \mathfrak{T}, x_0, \gamma, \lambda', W \rangle$ и $G' = G(V', g')$. Рассмотрим нетривиальный случай, когда $v_1, v_2 \in PB_\Sigma$ и $v_1 \neq v_2$.

Если $k = 0$, то утверждение леммы с очевидностью следует из замечания 1.13. Предположим его справедливость для всех моментов времени, меньших $k\,(k > 0)$. Пусть теперь $SP_{\mathfrak{M}}(k) = \langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle$ $(n = \# X_1)$, $SP_{\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2)}(k) = \langle \omega'_1, \ldots, \omega'_m \rangle$ $(m = \# (\gamma\ (G') \cup \{x_0\}))$. Так как $\Sigma' = \mathrm{agg}(\Sigma, v_1, v_2)$, то из замечания 1.13 вытекает, что $X_2 = \gamma\,(G') \cup \{x_0\}$.

Предположим, что тем не менее существует такая предметная переменная $x' \in X_2$, для которой выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(x', X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(x', X_1)}$. Отсюда следует, что $x' \neq x_0$.

Построим последовательность предметных переменных $y_1, \ldots, y_l \in X_2 \setminus \{x_0\}$, $1 \leqslant l \leqslant m$, такую, что справедливо

$$(\forall\, i = \overline{1, l})\ \omega'_{\mathrm{pos}(y_i, X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(y_i, X_1)}, \tag{2.1}$$

$$(\forall\, i = \overline{2, l})\ \gamma^-_{G'}(y_{i-1}) = \gamma^+_{G'}(y_i)\ \&\ y_i \in X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{term}\,(y_{i-1}, \lambda'(\gamma^-_{G'}(y_{i-1})))) \tag{2.2}$$

следующим образом, предполагая здесь и далее, что $\omega'_\alpha = \omega_\beta$ и в том случае, когда значения ω'_α и ω_β не определены.

В качестве y_1 следует принять x'.

Если определена последовательность предметных переменных $y_1, \ldots, y_i$, то построение завершается, если выполняется $X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{term}\ (y_i, \lambda'\ (\gamma^-_{G'}\ (y_i)))) = \{x_0\} \vee \gamma^-_{G'}(y_i) \in W \vee i = m$. В противном случае, в качестве y_{i+1} выбираем такую предметную переменную $x \in X_{\mathfrak{T}}$ $(\mathrm{term}\ (y_i, \lambda'(\gamma^-_{G'}(y_i))))$, что выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(x, X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(x, X_1)}$, и повторяем процесс построения.

Существование предметной переменной x, упомянутой в приведенной процедуре, можно обосновать следующим образом.

Пусть для некоторой предметной переменной $y \in X_2 \setminus \{x_0\}$ выполняется $v \in PB_{\Sigma'}$, $X_{\mathfrak{T}}$ $(\mathrm{term}\ (y, \lambda'\ (v))) \neq \{x_0\}$ и

$$\omega'_{\mathrm{pos}(y, X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(y, X_1)}, \tag{2.3}$$

где $v = \gamma^-_{G'}\ (y)$.

В случае, когда $v \in V' \setminus \{v_1\}$, справедливо $\delta^-_G\ (y) = v$ и $\mathrm{term}\,(y, \lambda'(v)) = \mathrm{term}\,(y, \lambda(v)) = \mathrm{t}\,(x_1, \ldots, x_l)$ $(l > 1)$, так как $\lambda'(v) = \lambda(v) \neq \varnothing$. Поскольку $\omega'_{\mathrm{pos}(y, X_2)} = I_{\mathrm{t}}\,(\omega'_{\mathrm{pos}(x_1, X_2)}, \ldots, \omega'_{\mathrm{pos}(x_l, X_2)})$ и $\omega_{\mathrm{pos}(y, X_1)} = I_{\mathrm{t}}\ (\omega_{\mathrm{pos}(x_1, X_1)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(x_l, X_1)})$, то из (2.3) следует, что существует такая предметная переменная $x \in X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{t})$, для которой выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(x, X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(x, X_1)}$.

В случае, когда $v = v_1$, $\lambda'(v) = \lambda(v_1) * \lambda(v_2)$ и $y \in XO\,(\lambda(v_1), \lambda(v_2))$. Следовательно, $(\exists p)\,(1 \leqslant p \leqslant l)\ y = s'_p | 1\ \&\ \mathrm{term}\ (y, \lambda'(v)) = \mathrm{t}'_p$, где $\lambda'(v) = \{s'_1, \ldots, s'_l\}$ и $(\forall\, i = \overline{1, l})\ s'_i | 2 = \mathrm{t}'_i\,(y^i_1, \ldots, y^i_{n_i})$, причем $n_p > 1$.

Обозначим $\lambda(v_1) = \{s_1, \ldots, s_{l_1}\}$, $\lambda(v_2) = \{s_{l_1+1}, \ldots, s_{l_1+l_2}\}$ и $(\forall i = \overline{1, l_1 + l_2})\, s_i \mid 2 = \mathrm{t}_i(x_1^i, \ldots, x_{k_i}^i)$.

Так как из условий (v) и (vi) определения 1.7 схемы моделей Σ вытекает справедливость условий (1.2) и (1.3) для множеств термальных соотношений $\lambda(v_1)$ и $\lambda(v_2)$, то из теоремы 1.1 следует, что для любого набора $\nu_1, \ldots, \nu_{l_3}$, $l_3 = \# XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2))$, существует такой набор $\mu_1, \ldots, \mu_{l_1+l_2}$, что выполняется

$$\forall i = (\overline{1, l_1 + l_2})\, \mu_{\mathrm{pos}(s_i|1, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)} = I_{\mathrm{t}_i}(\xi_1^i, \ldots, \xi_{k_i}^i) \text{ и}$$

$$(\forall i = \overline{1, l})\, \mu_{\mathrm{pos}(s_i'|1, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)} = I_{t_i'}(\nu_{\mathrm{pos}(y_1^i, XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)))}, \ldots, \nu_{\mathrm{pos}(y_{n_i}^i, XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)))}),$$

где

$$\xi_j^i = \begin{cases} \nu_{\mathrm{pos}(x_j^i, XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)))}, & \text{если } x_j^i \in XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)), \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_j^i, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)}, & \text{иначе}, \ 1 \leqslant j \leqslant k_i. \end{cases}$$

В частности, для $\nu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}(XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)))|i, X_1)}$, $1 \leqslant i \leqslant l_3$, справедливо

$$(\forall i = \overline{1, l_1 + l_2})\, \mu_{\mathrm{pos}(s_i|1, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)} = I_{\mathrm{t}_i}(\xi_1^i, \ldots, \xi_{k_i}^i) \tag{2.4}$$

и

$$(\forall i = \overline{1, l})\, \mu_{\mathrm{pos}(s_i'|1, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)} = I_{t_i'}(\omega_{\mathrm{pos}(y_1^i, X_1)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(y_{n_i}^i, X_1)}), \tag{2.5}$$

где

$$\xi_j^i = \begin{cases} \omega_{\mathrm{pos}(x_j^i, X_1)}, & \text{если } x_j^i \in XI(\lambda(v_1), \lambda(v_2)), \\ \mu_{\mathrm{pos}(x_j^i, (\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)}, & \text{иначе}, \ 1 \leqslant j \leqslant k_i. \end{cases}$$

Так как из (2.4) вытекает, что $\mu_i = \omega_{\mathrm{pos}(\mathrm{var}((\lambda(v_1) \cup \lambda(v_2))|1)|i, X_1)}$, $1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2$, то (2.5) влечет $(\forall i = \overline{1, l})\, \omega_{\mathrm{pos}(s_i'|1, X_1)} = I_{t_i'}(\omega_{\mathrm{pos}(y_1^i, X_1)}, \ldots, \omega_{\mathrm{pos}(y_{n_i}^i, X_1)})$. Отсюда следует $\omega'_{\mathrm{pos}(y, X_2)} = \omega_{\mathrm{pos}(y, X_1)}$ если выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(y_j^p, X_2)} = \omega_{\mathrm{pos}(y_j^p, X_1)}$, $1 \leqslant j \leqslant n_p$, так как $\omega'_{\mathrm{pos}(y, X_2)} = I_{t_p'}(\omega'_{\mathrm{pos}(y_1^p, X_2)}, \ldots, \omega'_{\mathrm{pos}(y_{n_p}^p, X_2)})$, что противоречит (2.3). Следовательно, существует такая предметная переменная $x \in X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{term}(y, \lambda'(v)))$, для которой выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(x, X_2)} \neq \omega_{\mathrm{pos}(x, X_1)}$, тем самым показывая корректность приведенной выше процедуры.

Пусть теперь $y_1, \ldots, y_l \in X_2 \setminus \{x_0\}$ — построенная последовательность предметных переменных $(1 \leqslant l \leqslant m)$. Тогда выполняется по крайней мере одно из трех возможных условий:

1) $X_{\mathfrak{T}}(\mathrm{term}(y_l, \lambda'(\gamma_{\overline{G'}}(y_l)))) = \{x_0\}$;

2) $\gamma^{-}_{G'}(y_l) \in W$;

3) $l = m$.

В первом случае так как $\omega'_{\mathrm{pos}(x_0, X_2)} = \omega_{\mathrm{pos}(x_0, X_1)} = k$, то $\omega'_{\mathrm{pos}(y_l, X_2)} = \omega_{\mathrm{pos}(y_l, X_1)}$, что противоречит (2.1).

Во втором случае выполняется $\omega'_{\mathrm{pos}(y_l, X_2)} = SP_{\mathfrak{M}'}(k \dot{-} m_0) \mid \mathrm{pos}(x, X_2)$ и $\omega_{\mathrm{pos}(y_l, X_1)} = SP_{\mathfrak{M}}(k \dot{-} n_0) \mid \mathrm{pos}(x, X_1)$, где $x = \gamma(E^{+}_{G'}(v))$, $v = \gamma^{-}_{G'}(y_l)$, $m_0 = l_{\mathrm{t}}(SP_{\mathfrak{M}'}(k-1) \mid \mathrm{pos}(z_1, X_2), \ldots, SP_{\mathfrak{M}'}(k-1) \mid \mathrm{pos}(z_q, X_2))$, $n_0 = l_{\mathrm{t}}(SP_{\mathfrak{M}}(k-1) \mid \mathrm{pos}(z_1, X_1), \ldots, SP_{\mathfrak{M}}(k-1) \mid \mathrm{pos}(z_q, X_1))$ и $\mathrm{t}(z_1, \ldots, z_q) = \mathrm{term}(y_l, \lambda'(v))$, так как $v \neq v_1$, $\delta^{-}_{G}(y_l) = v$, $\delta(E^{+}_{G}(v)) = x$ и $\lambda'(v) = \lambda(v)$. Отсюда, учитывая индуктивное предположение, следует, что $\omega'_{\mathrm{pos}(y_l, X_2)} = \omega_{\mathrm{pos}(y_l, X_1)}$, так как $m_0 = n_0 > 0$, что противоречит (2.1).

В третьем случае выполняется: $(\exists\, i_0, j_0)\ (1 \leqslant i_0 \leqslant j_0 \leqslant m)\ y_{i_0} = y_{j_0}$. Тогда, принимая во внимание (2.2), для последовательности $y_{j_0}, y_{j_0-1}, \ldots, y_{i_0+1}$ из условия (vi) определения 1.7 схемы моделей Σ' следует существование такой предметной переменной y_q, $i_0 + 1 \leqslant q \leqslant j_0$, что $\gamma^{-}_{G}(y_q) \in W$. Следовательно, третий случай приводит к противоречию, аналогичному второму.

Таким образом, справедливо $SP_{\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2)}(k) = SP_{\mathfrak{M}}(k)/\mathrm{pos}(X_2, X_1)$, что и требовалось показать.

Инвариантность отношения эквивалентности относительно оператора агрегирования моделей устанавливает

Теорема 2.1. *Произвольная модель $\mathfrak{M}$ эквивалентна модели, получаемой из $\mathfrak{M}$ применением оператора агрегирования.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle \Sigma, \Omega, \Phi, I \rangle$ и $\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2) = \langle \Sigma', \Omega, \Phi, I \rangle$, где $\Sigma = \langle G, \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$ и $\Sigma' = \langle G', \mathfrak{T}, x_0, \gamma, \lambda', W \rangle$. Пусть также $X_0 = \delta(G) \cup \{x_0\}$, $X_1 = \delta(E^{+}_{G}(OB_{\Sigma}))$, $X'_0 = \gamma(G') \cup \{x_0\}$ и $X'_1 = \gamma(E^{+}_{G'}(OB_{\Sigma'}))$.

Рассмотрим нетривиальный случай, когда $v_1, v_2 \in PB_{\Sigma}$ и $v_1 \neq v_2$. Так как $\Sigma' = \mathrm{agg}(\Sigma, v_1, v_2)$, то $X'_0 = X_0 \setminus \delta(E_G(v_1, v_2) \cup E_G(v_2, v_1))$, $OB_{\Sigma'} = OB_{\Sigma}$ и $X'_1 = X_1$. Согласно лемме 2.1 для любого натурального n выполняется $SP_{\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2)}(n) = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(X'_0, X_0)$. Отсюда вытекает, что $SP_{\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1 v_2)}(n) \mid \mathrm{pos}(X'_1, X'_0) = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(X'_0, X_0) \mid \mathrm{pos}(X'_1, X'_0) = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(X_1, X_0)$. Таким образом, $\mathrm{agg}(\mathfrak{M}, v_1, v_2) \sim \mathfrak{M}$, что и требовалось показать.

Следствие 2.1. Любую модель $\mathfrak{M}$ можно привести к эквивалентному каноническому виду применением конечного числа раз оператора агрегирования моделей.

Среди проблем, возникающих при разработке технологии математического моделирования и оптимизации сложных технических систем, а также при разработке систем автоматизации проектирования ИВК и технологических процессов, в качестве одной из основных выделена задача автоматизации процесса конструирования ММ (дифференциальные уравнения, конечно-разностные уравнения и т. п.) по заданной структурной схеме объекта исследований.

В нашем случае для рассматриваемого класса моделей указанная задача решается в терминах систем нелинейных разностных уравнений или совместной рекурсии функций [15, 15а, 78].

Для формирования соотношений, связывающих время функционирования модели и значения функций, представимых моделью, приведем общее определение понятия системы разностных уравнений.

Определение 2.7. Набор функций $\varphi_1(\overline{\omega}, t), \ldots, \varphi_m(\overline{\omega}, t)$ от натурального аргумента t и некоторого набора параметров $\overline{\omega}$ считается заданным системой (нелинейных) разностных уравнений, если определен набор (возможно, пустой) функций $\vartheta_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, натурального аргумента и для всех $\varphi_i(\overline{\omega}, t)$ определен набор функций $\psi_i(\overline{\omega})$, $\eta_i(\overline{\omega}, t, u_1, \ldots, u_{n+m})$, $\chi_{i1}(\overline{\omega}, t, u), \ldots, \chi_{im}(\overline{\omega}, t, u)$, таких, что

$$\begin{gathered}(\forall\overline{\omega})(\forall t)(\forall u)(\forall i = \overline{1, m})((\forall j = \overline{1, m})\,\chi_{ij}(\overline{\omega}, t, u) \leqslant t + 1\ \& \\ \&\ (\forall j = \overline{i, m})\,\chi_{ij}(\overline{\omega}, t, u) \leqslant t), \\ \varphi_i(\overline{\omega}, 0) = \psi_i(\overline{\omega}), \\ \varphi_i(\overline{\omega}, t+1) = \eta_i(\overline{\omega}, t, \vartheta_1(t+1), \ldots, \vartheta_n(t+ \\ +1), \varphi_1(\overline{\omega}, \chi_{i1}(\overline{\omega}, t, \varphi_1(\overline{\omega}, t))), \ldots, \varphi_m(\overline{\omega}, \chi_{im}(\overline{\omega}, t, \varphi_m(\overline{\omega}, t)))),\end{gathered} \tag{2.6}$$

где χ_{ij} — функции, принимающие натуральные значения. Если обозначить

$$\Psi = \langle\psi_1, \ldots, \psi_m\rangle,\ \mathrm{H} = \langle\eta_1, \ldots, \eta_m\rangle,$$

$$\mathrm{X} = \langle\chi_{11}, \ldots, \chi_{1m}, \ldots, \chi_{m1}, \ldots, \chi_{mm}\rangle,\ \Theta = \langle\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\rangle,$$

то соотношения (2.6) можно записать в операторном виде:

$$R(\Psi, \mathrm{H}, \mathrm{K}, \Theta) = \langle\varphi_1, \ldots, \varphi_m\rangle.$$

Будем говорить, что система разностных уравнений имеет k-й порядок, если дополнительно к (2.6) выполняется $(\exists\, k \in N)$ $(\forall\overline{\omega})$ $(\forall t)$ $(\forall u)$ $(\forall i = \overline{1, m})$ $(\forall j = \overline{1, m})$ $(t+1) \dot{-} k \leqslant \chi_{ij}(\overline{\omega}, t, u)$. Считаем, что система является простой, если имеет место равенство.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle\Sigma, \Omega, \Phi, I\rangle$ — модель, схема $\Sigma = \langle G(V, g), \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W\rangle$, которой имеет канонический вид (т. е. $\exists\,!\, v_0 \in PB_\Sigma$). Пусть также

$$\begin{gathered}W = \{v_1, \ldots, v_{l_1}\}; \\ \lambda(v_i) = s_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l_1; \\ \lambda(v_0) = \{s_{l_1+1}, \ldots, s_{l_1+l_2}\}; \\ s_i|2 = \mathfrak{t}_i(x_1^i, \ldots, x_{k_i}^i), \quad 1 \leqslant i \leqslant l_1 + l_2; \\ V_0 = \{v \in W / E_G(v_0, v) \neq \varnothing\ \&\ E_G(v, v_0) \neq \varnothing\}; \\ V_1 = \{v \in W / E_G(v_0, v) \neq \varnothing\ \&\ E_G(v, v_0) = \varnothing\}; \\ X_0 = \lambda(v_0)|1 \cup \delta(E_G^-(V_1)); \\ \mathrm{var}(X_0) = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle.\end{gathered}$$

Определим наборы функций $\Psi_{\mathfrak{M}} = \langle \psi_1, \ldots, \psi_m \rangle$, $H_{\mathfrak{M}} = \langle \eta_1, \ldots, \eta_m \rangle$, $X_{\mathfrak{M}} = \langle \chi_{11}, \ldots, \chi_{1m}, \ldots, \chi_{m1}, \ldots, \chi_{mm} \rangle$ следующим образом:

$$\psi_i = I(x_i),$$

$$\eta_i(t, u_1, \ldots, u_m) = \begin{cases} I_{\mathrm{t}_p}(\xi_1^p, \ldots, \xi_{k_p}^p), & \text{если } \langle x_i, \mathrm{t}_p \rangle \in \lambda(v_0), \\ u_{\mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_i))), X_0)}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\chi_{ij}(t, u) = \begin{cases} (t+1) \dot{-} I_{\mathrm{t}_q}(\zeta_1^q, \ldots, \zeta_{k_q}^q), \text{ если } x_i \in \lambda(v_0) \mid 1 \mathbin{\&} \delta_G^+(x_j) \in \\ \in V_0 \vee x_i \in \delta(E_G^-(V_1)) \mathbin{\&} j = \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_i))), X_0), \\ t, \text{ иначе, } 1 \leqslant i, \ j \leqslant m, \end{cases}$$

где

$$\xi_l^p = \begin{cases} t+1, & \text{если } x_l^p = x_0, \\ u_{\mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_l^p))), X_0)}, & \text{иначе,} \quad 1 \leqslant l \leqslant k_p, \end{cases}$$

$$\mathrm{t}_q = \lambda(\delta_G^+(x_j)) \mid 2,$$

$$\zeta_l^q = \begin{cases} t, & \text{если } x_l^q = x_0, \\ u, & \text{иначе,} \quad 1 \leqslant l \leqslant k_q. \end{cases}$$

Следующая теорема устанавливает связь между функциями, представимыми моделью, и функциями, заданными системой разностных уравнений.

Теорема 2.2. $\mathrm{fun}(\mathfrak{M}) = R(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, X_{\mathfrak{M}}, \varnothing) \mid \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(OB_\Sigma)), X_0)$.

Доказательство. Пусть $R(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, X_{\mathfrak{M}}, \varnothing) = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$. Покажем, что для любого натурального n выполняется

$$\langle \varphi_1(n), \ldots, \varphi_m(n) \rangle = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(X_0, \delta(G) \cup \{x_0\}). \qquad (2.7)$$

Если $n = 0$, то справедливость соотношения (2.7) очевидна. Предположим, что оно выполняется для всех моментов времени, меньших n $(n > 0)$. Рассмотрим теперь произвольное значение $\varphi_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Возможны два случая.

Случай 1: $\delta_G^-(x_i) = v_0$.

Тогда по определению $R(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, X_{\mathfrak{M}}, \varnothing)$ выполняется $\varphi_i(n) = I_{\mathrm{t}_p}(\xi_1^p, \ldots, \xi_{k_p}^p)$ для некоторого p, $l_1 + 1 \leqslant p \leqslant l_1 + l_2$, где

$$\mathrm{t}_p = \mathrm{term}(x_i, \lambda(v_0)),$$

$$\xi_j^p = \begin{cases} n, & \text{если } x_j^p = x_0, \\ \varphi_{r(p,j)}(n \dot{-} I_{\mathrm{t}_q}(\zeta_1^q, \ldots, \zeta_{k_q}^q)), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$1 \leqslant j \leqslant k_p$, $r(p, j) = \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_j^p))), X_0)$, $\mathrm{t}_q = \lambda(\delta_G^+(x_{r(p,j)})) \mid 2$ для некоторого q, $1 \leqslant q \leqslant l_1$,

$$\zeta_l^q = \begin{cases} n-1, & \text{если } x_l^q = x_0, \\ \varphi_{r(p,j)}(n-1), & \text{иначе,} \quad 1 \leqslant l \leqslant k_q. \end{cases}$$

Принимая во внимание индуктивное предположение, получаем

$$\zeta_l^q = SP_{\mathfrak{M}}(n-1) \mid \mathrm{pos}(x_l^q, \delta(G) \cup \{x_0\}), \quad 1 \leqslant l \leqslant k_q,$$

$$\xi_j^p = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(x_j^p, \delta(G) \cup \{x_0\}), \quad 1 \leqslant j \leqslant k_p,$$

так как $\delta_G^-(x_j^p) = \delta_G^+(x_{r(p,j)})$ и $x_l^q \in \{x_0, x_{r(p,j)}\}$, и, следовательно, $\varphi_i(n) = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(x_i, \delta(G) \cup \{x_0\})$.

Случай 2: $\delta_G^-(x_i) \in V_1$.

Тогда выполняется $\varphi_i(n) = \varphi_j(n \dot{-} I_{t_q}(\zeta_1^q, \ldots, \zeta_{k_q}^q))$, где $j = \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(\delta_G^-(x_i))), X_0)$, $t_q = \lambda(\delta_G^-(x_i)) \mid 2$ для некоторого q, $1 \leqslant q \leqslant l_1$,

$$\zeta_l^q = \begin{cases} n-1, \text{ если } x_l^q = x_0, \\ \varphi_j(n-1), \text{ иначе}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k_q. \end{cases}$$

Учитывая индуктивное предположение, получаем

$$\zeta_l^q = SP_{\mathfrak{M}}(n-1) \mid \mathrm{pos}(x_l^q, \delta(G) \cup \{x_0\}), \quad 1 \leqslant l \leqslant k_q,$$

$$\varphi_i(n) = SP_{\mathfrak{M}}(n \dot{-} I_{t_q}(SP_{\mathfrak{M}}(n-1) \mid \mathrm{pos}(x_1^q, \delta(G) \cup \{x_0\}), \ldots$$
$$\ldots, SP_{\mathfrak{M}}(n-1) \mid \mathrm{pos}(x_{k_q}^q, \delta(G) \cup \{x_0\}))) \mid \mathrm{pos}(x_j, \delta(G) \cup \{x_0\}),$$

так как $\delta_G^-(x_i) = \delta_G^+(x_j)$ и $x_l^q \in \{x_0, x_j\}$. Отсюда $\varphi_i(n) = SP_{\mathfrak{M}}(n) \mid \mathrm{pos}(x_i, \delta(G) \cup \{x_0\})$.

Таким образом, выполняется (2.7) во всех случаях, и, следовательно, $\mathrm{fun}(\mathfrak{M}) = R(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, \chi_{\mathfrak{M}}, \varnothing) \mid \mathrm{pos}(\delta(E_G^+(OB_\Sigma)), X_0)$, поскольку $\delta(E_G^+(OB_\Sigma)) \subseteq X_0$, что и требовалось показать.

Следует отметить, что в том случае, когда $\mathfrak{M}$ — стандартная модель, $R(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, \chi_{\mathfrak{M}}, \varnothing)$ определяет систему разностных уравнений порядка n_0, где n_0 — максимальное время задержки информации для всех блоков задержки исходной модели.

Решение задачи автоматизации процесса конструирования адекватных моделирующих алгоритмов по заданным структурным схемам (моделям) из данного класса следует считать завершенным в случае эффективного построения единой схемы программ, интерпретация которой, во-первых, индуцировалась бы интерпретацией исходной схемы модели, и, во-вторых, определяла бы программу вычисления значений представимых моделью функций или моделирующий алгоритм.

Класс схем программ, который нас будет интересовать, не прибегая к громоздкому определению, как это делалось для схем моделей, опишем следующим образом.

Используя четыре типа блоков (начальный, присваивания, условия и конечный) под схемой программ будем понимать произвольную сеть, построенную из этих блоков и содержащую единственный начальный блок, причем блоки присваивания отмечаются термальными соотношениями, в которых роль предметных переменных играют элементы данных (переменные, элементы массивов), с тем лишь отличием от термальных соотношений, используемых выше, что допускается пересечение множеств предметных переменных, встречающихся в левой и правой частях термальных соотношений, а блоки условия отмечены термами.

Схему программ с заданной интерпретацией функциональных символов будем называть программой, если отметки блоков условия суть предикаты.

Для каждой программы $\mathfrak{P}$ будем различать следующие типы предметных переменных:

1) входной вектор $\bar{x}$ предметных переменных, значения которых определены к началу вычислений $\mathfrak{P}$;

2) вектор $\bar{y}$ внутренних предметных переменных;

3) выходной вектор $\bar{z}$ предметных переменных, значения которых суть результатов вычислений $\mathfrak{P}$.

Всюду определенные предикаты $P(\bar{x}) \subseteq \Omega^n$ и $Q(\bar{x}, \bar{z}) \subseteq \Omega^{n+m}$ назовем входным и выходным соответственно.

Определение 2.8 [192]. Говорят, что программа является частично корректной относительно входного и выходного предикатов, если из справедливости входного предиката и условия, что программа останавливается, следует справедливость выходного предиката.

Определение 2.9 [192]. Будем говорить, что программа полностью корректна относительно входного и выходного предикатов, если она частично корректна и останавливается во всех случаях выполнимости входного предиката.

Под верификацией программы будем понимать доказательство частичной корректности программы, использующее трансформацию предикатов двух типов: трансформацию в прямом и обратном направлениях [57].

Как известно [192], верификация программ методом индуктивных утверждений проводится следующим образом:

1) в каждом цикле программы выделяется функциональная связь (дуга), которой приписывается индуктивный предикат, задающий зависимость значений некоторых предметных переменных, причем один индуктивный предикат может соответствовать нескольким циклам;

2) трансформация каждого индуктивного предиката в прямом или обратном направлении доказывается инвариантностью всех индуктивных предикатов относительно исполнения программы по соответствующему циклу или циклам;

3) в предположении истинности входного предиката доказывается истинность всех индуктивных предикатов выбранным способом трансформации по пути от начального блока до соответствующих мест программы;

4) в предположении истинности индуктивных предикатов доказывается истинность выходного предиката выбранным способом трансформации по всем путям, ведущим от соответствующих индуктивным предикатам мест программы до конечных блоков.

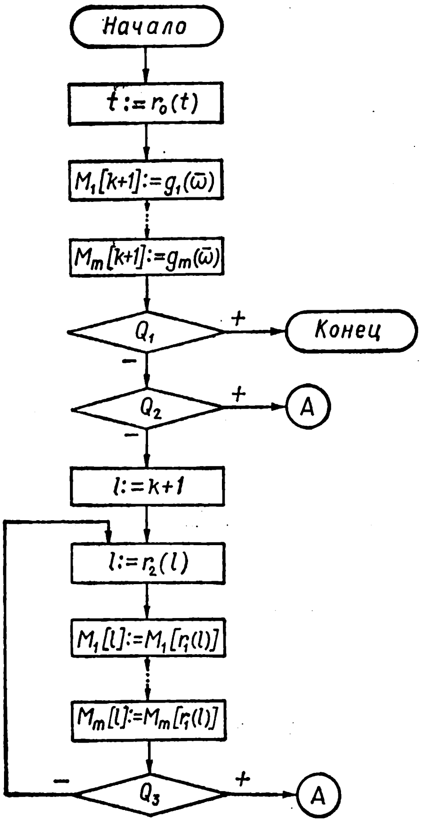


Рис. 2.1

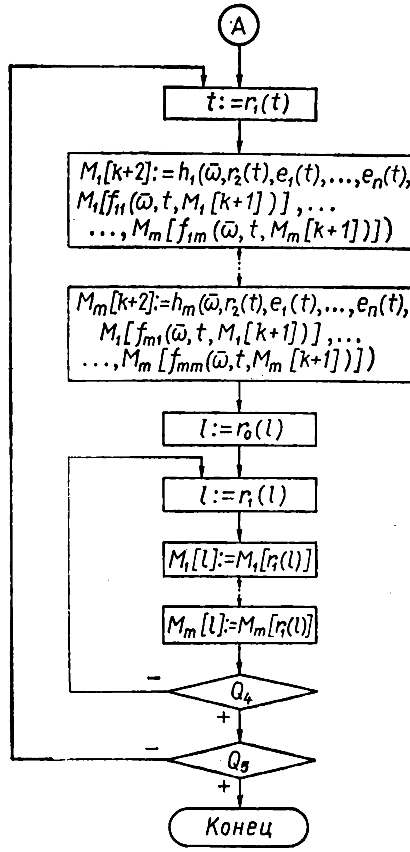


Рис. 2.2

Пусть $\varphi_1(\overline{\omega}, t), \ldots, \varphi_m(\overline{\omega}, t)$ — набор функций, заданных системой разностных уравнений k-го порядка $R(\Psi, \mathrm{H}, \mathrm{X}, \Theta)$.

Рассмотрим схему программ, представленную на рис. 2.1 и 2.2. Условимся обозначать элемент массива с именем M, индекс которого определяется значением соответствующего терма, как $M[\cdot]$. Задав интерпретацию $r_0(x)=0$; $r_1(x)=x+1$; $r_2(x)=x-1$; $g_i=\psi_i$; $h_i=\eta_i$; $l_q=\vartheta_q$; $f_{ij}(\overline{\omega}, t, M_j[k+1]) = k + \chi_{ij}(\overline{\omega}, t-1, M[k+1]) + 2 - t$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant m$; $1 \leqslant q \leqslant n$; $Q_1 : T = 0$; $Q_2 : k = 0$; $Q_3 : l = 1$; $Q_4 : l = k+1$; $Q_5 : t = T$, получим программу $\mathfrak{P}$, представленную на рис. 2.3 и 2.4. Для указанной программы множества

$$\{\overline{\omega}, T\},$$
$$\{t, l, M_i[j]/1 \leqslant i \leqslant m \,\&\, 1 \leqslant j \leqslant k+2 \,\&\, j \neq k+1\},$$
$$\{M_i[k+1]/1 \leqslant i \leqslant m\}$$

суть множества входных, внутренних и выходных предметных переменных соответственно, где m, n и k — фиксированные натуральные числа.

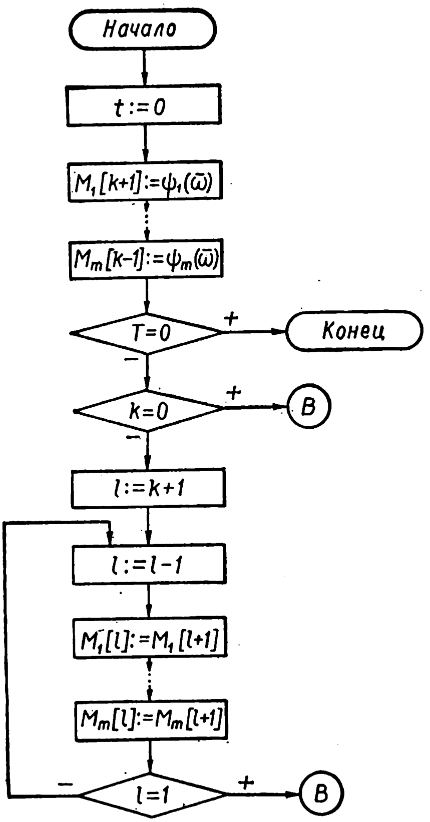


Рис. 2.3

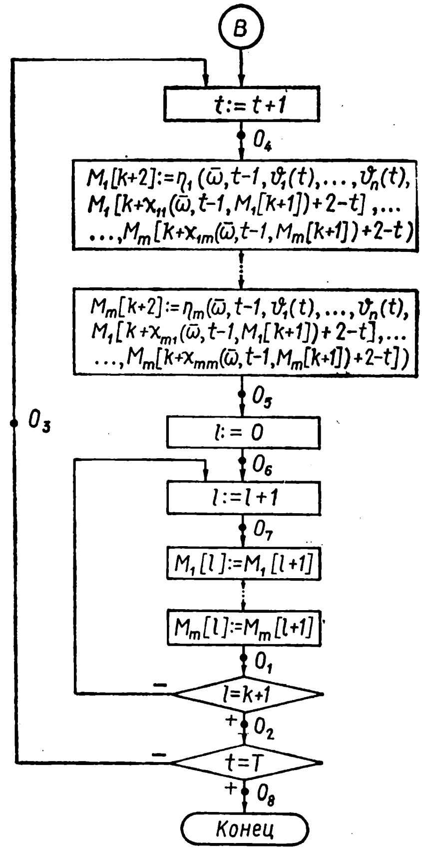


Рис. 2.4

Согласно методу индуктивных утверждение для того, чтобы определить соотношения, связывающие значения выходных предметных переменных со входными, необходимо в некоторых точках программы описать динамику изменения внутренних и, возможно, выходных предметных переменных. Эти точки следует выбирать таким образом, чтобы любое исполнение программы согласно заданной схеме проходило по крайней мере через одну из выбранных точек. Для рассматриваемой программы $\mathfrak{P}$ этому условию удовлетворяют точки O_1 и O_9. Исходя из определения системы конечно-разностных уравнений и структуры программы поведение предметных переменных в точке O_1 опишем следующим образом:

$$P_0: \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=l+1}^{k+2} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j-1) \dot{-} (k+1)) \;\&$$

$$\& \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{l} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j) \dot{-} (k+1)) \;\&$$

$$\& \, l \leqslant k+1 \,\&\, l \geqslant 1 \,\&\, t \leqslant T \,\&\, t \geqslant 1,$$

Придерживаясь метода верификации программ с трансформацией предикатов в прямом направлении, покажем, например, инвариантность индуктивного предиката P_0 относительно исполнения программы по циклическому пути $O_1 - O_7 - O_1$. Получаемые верификационные условия в точке O_i будем обозначать P_i.

Тогда, принимая во внимание, что для всех $i, j, 1 \leqslant i, j \leqslant m, 1 \leqslant \leqslant k + \chi_{ij}(\bar{\omega}, t-1, u) + 2 - t \leqslant k + 2$ и если $i \leqslant j$, то $k + \chi_{ij}(\bar{\omega}, t-1, u) + 2 - t \leqslant k + 1$, получим:

$$P_0,$$

$$P_2 : \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k+1} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j) \dot{-} (k+1)) \,\&\, t \leqslant T \,\&\, t \geqslant 1,$$

$$P_3 : P_2 \,\&\, t < T,$$

$$P_4 : \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k+1} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j-1) \dot{-} (k+1)) \,\&\, t \leqslant T \,\&\, t \geqslant 1,$$

$$P_5 : P_4 \,\&\, \bigwedge_{i=1}^{m} M_i[k+2] = \eta_i(\bar{\omega}, t-1, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_n(t),$$

$$M_1[k + \chi_{i1}(\bar{\omega}, t-1, M_1[k+1]) + 2 - t], \ldots$$

$$\ldots, M_m[k + \chi_{i_m}(\bar{\omega}, t-1, M_m[k+1]) + 2 - t]) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k+2} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j-1) \dot{-} (k+1)) \,\&\, t \leqslant T \,\&\, t \geqslant 1$$

$$P_6 : P_5 \,\&\, l = 0,$$

$$P_7 : P_5 \,\&\, l = 1,$$

$$P_1 : \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=l+1}^{k+2} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j-1) \dot{-} (k+1)) \,\&$$

$$\& \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{l} M_i[j] = \varphi_i(\bar{\omega}, (t+j) \dot{-} (k+1)) \,\&$$

$$\& \, l = 1 \,\&\, t \leqslant T \,\&\, t \geqslant 1,$$

$$P_0.$$

Аналогично рассматриваются и другие пути. Таким образом, справедлива

Теорема 2.3. *Программа* $\mathfrak{P}$ *частично корректна относительно входного предиката* $P(\bar{\omega}, T) : T \geqslant 0$ *и выходного предиката* $Q(\bar{\omega}, T, M_1[k+1], \ldots, M_m[k+1]) : T \geqslant 0 \,\&\, \bigwedge_{i=1}^{m} M_i[k+1] = \varphi_i(\bar{\omega}, T)$, *причем программа* $\mathfrak{P}$ *полностью корректна относительно указанных предикатов в случае всюду определенности функций из* Ψ, H, X *и* Θ.

В последнем случае ограниченность времени вычислений очевидна, а удовлетворение выходному предикату вытекает из истинности предиката P_8, получаемого трансформацией индуктивного предиката P_0, по пути $O_1 - O_2 - O_8$.

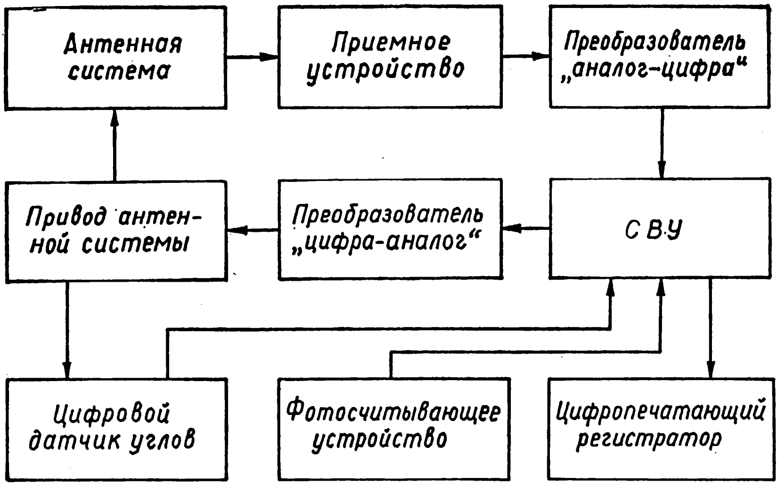


Рис. 2.5

Таким образом, следствие 2.1 и теоремы 2.2 и 2.3 дают необходимые основания для использования в качестве алгоритма генерации программ, имитирующих функционирование исследуемых систем, следующую процедуру.

1. Применением ограниченного числа раз оператора агрегирования исходная модель приводится к каноническому виду.

2. Полученная модель канонического вида позволяет эффективно построить ММ объекта исследований в терминах систем разностных уравнений.

3. Вид ММ определяет интерпретацию общей схемы программ, моделирующих поведение исследуемого объекта.

Приведенная процедура генерации моделирующих алгоритмов позволяет уменьшить объем работ по созданию адекватных имитационных моделей дискретных и дискретно-непрерывных систем сложных измерительно-вычислительных комплексов, что приводит к сокращению сроков проектирования, испытания и модернизации объектов новой техники.

Описанный алгоритм построения программы, имитирующей изучаемый процесс, продемонстрируем на примере угломера моноимпульсной амплитудной суммарно-разностной радиолокационной станции (РЛС), предназначенной для сопровождения и измерения с высокой точностью угловых координат скоростных маневренных ЛА [17].

Структурная схема угломера моноимпульсной амплитудной суммарно-разностной РЛС представлена на рис. 2.5.

Элементами этой схемы являются:

приемное устройство, предназначенное для селективного усиления ответного (ретранслированного или отраженного) сигнала, обеспечивающего работу системы точного наведения по угловым координатам. Выбранный суммарно-разностный метод пеленгации реализуется в

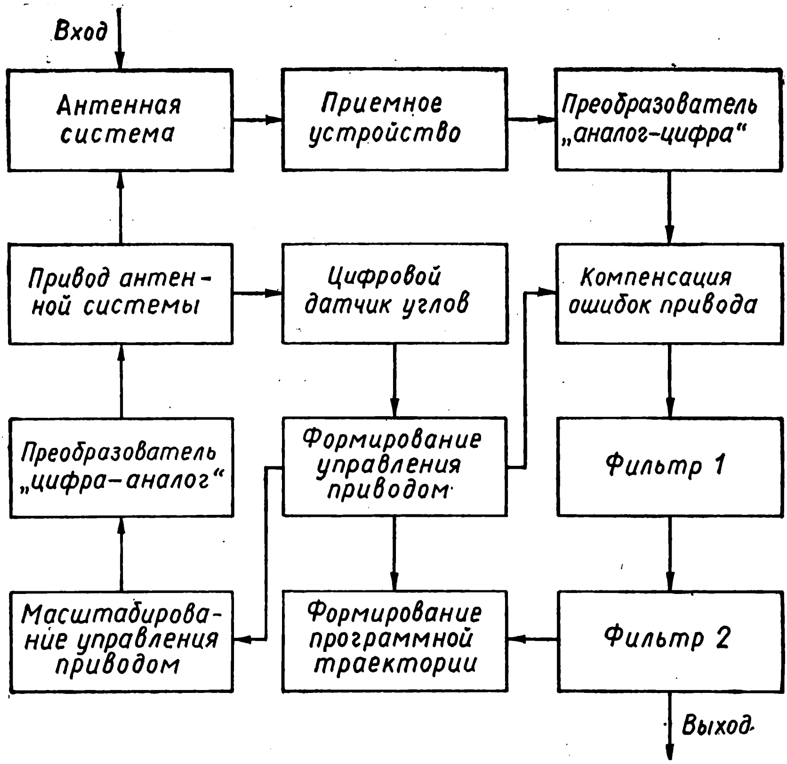


Рис. 2.6

виде усиления по трем каналам с нормировкой сигналов напряжением системы автоматической регулировки усиления (АРУ);

специализированное вычислительное устройство (СВУ), осуществляющее все математические преобразования, связанные с функциональным сглаживанием, введением различных поправок, определением коэффициентов программной траектории, формированием выходных результатов. Особенностью устройства является наличие разветвленной системы внутренних логических переходов, необходимых для проведения анализа в процессе установки требуемого режима работы, в процессе отбраковки входной информации и т. п. СВУ выполнено в виде специализированной цифровой вычислительной машины, работающей в реальном масштабе времени;

привод антенной системы, представляющий собой высокоточное исполнительное устройство, динамические характеристики которого выбираются из условия получения минимальных ошибок слежения при заданных скоростях и ускорениях движения антенной системы;

быстродействующие преобразователи «аналог — цифра» и «цифра — аналог», предназначенные для сопряжения СВУ с аналоговой аппаратурой угломера (приемным устройством и приводом антенной системы) цифровой датчик углов, предназначен для цифрового кодирования углового положения антенной системы;

фотосчитывающее устройство, использующееся для ввода начальных целеуказаний;

цифропечатающий регистратор, применяемый для документирования и повышения оперативности контроля основных характеристик процессов, протекающих в угломере.

Входным сигналом угломера является последовательность импульсных кодовых пачек с расстановкой импульсов в пачке по коду [27]: момент времени поступления j-го импульса i-й пачки на m-м интервале T определяется следующим образом: $t = (m-1)T + (i-1)T_п + jT_и(j)$, где $1 \leqslant m \leqslant m_0$, $1 \leqslant j \leqslant j_0$, $1 \leqslant i \leqslant i_0$. Здесь T означает период следования отметок системы единого времени, а $T_п$ — период следования пачек импульсов, $T_и(\cdot)$ — закон распределения импульсов в пачке.

Рассмотрение функционирования угломера во времени позволяет выделить три характерных периода:

1) наведение антенной системы в заданную точку пространства по данным начального целеуказания;

2) автоматическое сопровождение цели при одновременном измерении ее угловых координат;

3) наведение антенной системы при временном прерыве связи с целью по данным внешних целеуказаний или при их отсутствии — по экстраполированным данным.

Каждый из периодов характеризуется специфичными логикой и режимом работы. Реализация того или иного режима определяется условиями работы угломера и наличием априорной и апостериорной информаций.

Без ограничения общности проиллюстрируем построение программы для основного, наиболее сложного по реализации режима функционирования угломера — параметрического автосопровождения в одной пеленгационной плоскости. Структурная схема угломера в этом режиме функционирования приведена на рис. 2.6, причем предполагаем, что информация поступает в систему в моменты времени $t = (m-1)T + (i-1)T_п$, что не является существенным ограничением в связи с усреднением сигналов ошибки сопровождения на интервалах времени $T_п$.

Разработанная согласно определению схема моделей угломера на основании его структурной схемы (рис. 2.6) приведена на рис. 2.7. В указанной схеме моделей блоки задержки введены для учета инерционности соответствующих блоков структурной схемы угломера.

Интерпретация I приведенной схемы моделей строится на основании анализа функционирования устройства угломера на выделенном уровне их детализации [15, 86]:

$I_{f_1}(\cdot)$ — формирование значений угловой координаты цели; $I_{f_2}(u_1, u_2) = u_1 - u_2$ — формирование ошибки сопровождения антенной системой, формирование управления приводом и компенсация ошибок привода;

$I_{f_3}(u_1, u_2) = c_1(u_2)\sin c_2 u_1 + c_3(u_2)$ — дискретный нелинейный статистический эквивалент приемного устройства, где $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$ и $c_3(\cdot)$ определяются значениями параметров приемного устройства;

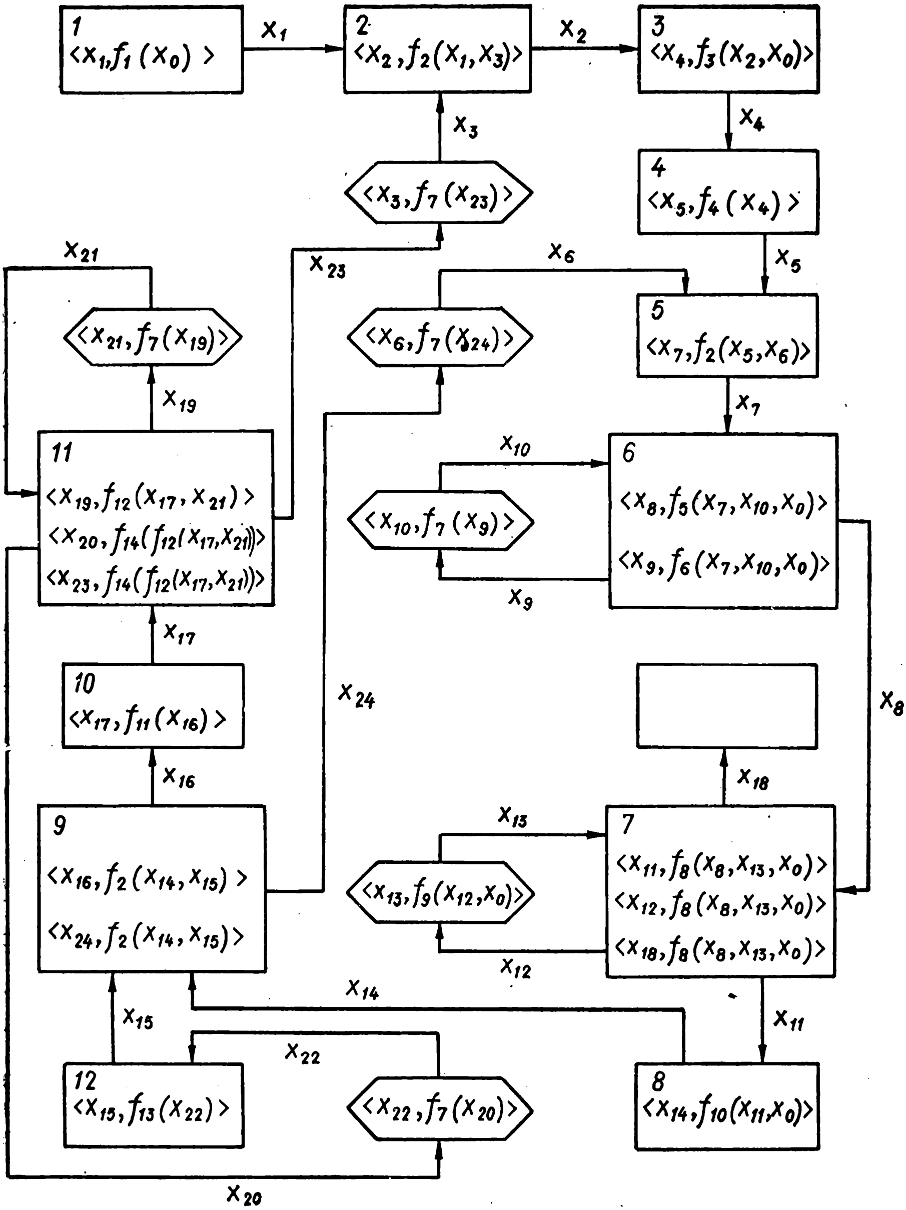

1
⟨x1,f1(x0)⟩
2
⟨x2,f2(x1,x3)⟩
3
⟨x4,f3(x2,x0)⟩
4
⟨x5,f4(x4)⟩
5
⟨x7,f2(x5,x6)⟩
6
⟨x8,f5(x7,x10,x0)⟩
⟨x9,f6(x7,x10,x0)⟩
7
⟨x11,f8(x8,x13,x0)⟩
⟨x12,f8(x8,x13,x0)⟩
⟨x18,f8(x8,x13,x0)⟩
8
⟨x14,f10(x11,x0)⟩
9
⟨x16,f2(x14,x15)⟩
⟨x24,f2(x14,x15)⟩
10
⟨x17,f11(x16)⟩
11
⟨x19,f12(x17,x21)⟩
⟨x20,f14(f12(x17,x21))⟩
⟨x23,f14(f12(x17,x21))⟩
12
⟨x15,f13(x22)⟩
⟨x3,f7(x23)⟩
⟨x6,f7(x24)⟩
⟨x10,f7(x9)⟩
⟨x13,f9(x12,x0)⟩
⟨x21,f7(x19)⟩
⟨x22,f7(x20)⟩
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8
x9
x10
x11
x12
x13
x14
x15
x16
x17
x18
x19
x20
x21
x22
x23
x24

Рис. 2.7

$I_{f_4}(u) = [u/\Delta_1]\,\Delta_1$ — характеристика преобразователя «аналог—цифра», где Δ_1 — шаг квантования;

$$I_{f_5}(u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_3 \neq i_0\,[u_3/i_0], \\ u_1 + u_2, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$I_{f_6}(u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} u_1 + u_2, & \text{если } u_3 \neq i_0\,[u_3/i_0], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

фильтрация сигналов ошибки сопровождения с компенсированными ошибками привода на интервале T (фильтр *1*);

$I_{f_7}(\cdot) = 1$ — учет инерционности фильтра *1*, привода антенной системы и экстраполяции управления приводом;

$$I_{f_8}(u_1, \bar{u}_2, u_3) = \begin{cases} \bar{u}_2, & \text{если } u_3 \neq i_0\,[u_3/i_0], \\ A\bar{u}_2 + \bar{\rho}u_1/i_0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

формирование измеренных значений угловой координаты, причем элементы матрицы A и вектора $\bar{\rho}$ определяются параметрами фильтра *2*;

$I_{f_9}(u_1, u_2) = \mathrm{rest}\,(u_2, i_0) + 1$ — учет инерционности фильтра *2*;

$I_{f_{10}}(\bar{u}_1, u_2) = \bar{B}(\mathrm{rest}\,(u_2, i_0) + 1 + [i_0/2])\,\bar{u}_1$ — формирование программной траектории, где $\bar{B}(i) = \langle 1, iT_n, iT_n(iT_n + 1)/2, iT_n(iT_n + 1)(iT_n + 2)/6\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant i_0$;

$I_{f_{11}}(u) = u\Delta_2$ — характеристика преобразователя «цифра — аналог» с учетом масштабирования управления приводом, где Δ_2 — результирующий коэффициент усиления;

$I_{f_{12}}(u_1, \bar{u}_2) = R\bar{u}_2 + \bar{M}u_1$ — описание динамики привода антенной системы, причем элементы матрицы R и вектора $\bar{M}$ определяются параметрами привода;

$I_{f_{13}}(u) = [u/\Delta_3]\ \Delta_3$ — характеристика цифрового датчика углов, где Δ_3 — шаг квантования;

$I_{f_{14}}(u) = \bar{L}\bar{u}$ — формирование значений угловой координаты оси антенной системы, где $\bar{L} = \langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$;

$I(x_i) = \omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant 24$ — начальные значения переменных состояния угломера.

Применяя последовательно оператор агрегирования к блокам преобразования с отметками 1—6 и 8—12 приведенной модели $\mathfrak{M}$, получаем эквивалентную (согласно следствию 2.1) ей модель, схема которой представлена на рис. 2.8, где

$$\begin{aligned}
t_0 &= f_2(f_4(f_3(f_2(f_1(x_0), x_3), x_0)), x_6),\\
t_1 &= f_5(t_0, x_{10}, x_0),\\
t_2 &= f_6(t_0, x_{10}, x_0),\\
t_3 &= f_8(x_8, x_{13}, x_0),\\
t_4 &= f_2(f_{10}(x_{11}, x_0), f_{13}(x_{22})),\\
t_5 &= f_{12}(f_{11}(t_4), x_{21}).
\end{aligned}$$

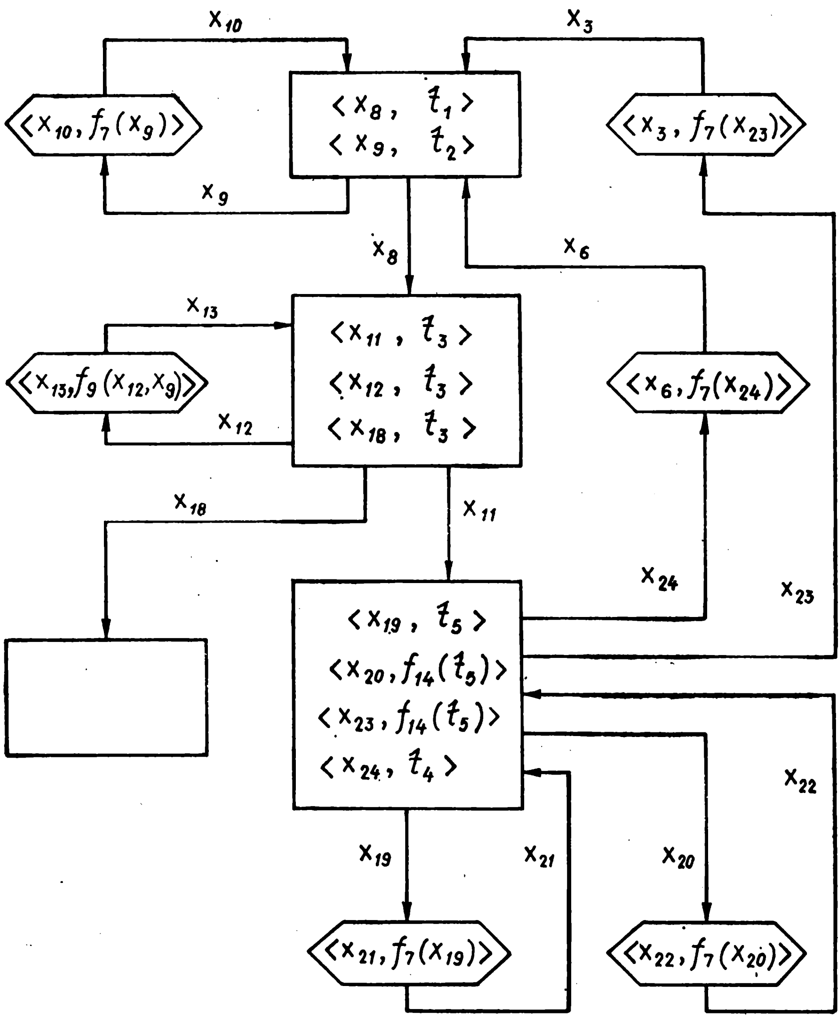


Рис. 2.8

Таким образом, агрегирование блоков преобразования приводит к модели канонического вида, эквивалентной исходной модели $\mathfrak{M}$, схема которой приведена на рис. 2.9, где

$$t_6 = f_8(t_1, x_{13}, x_0),$$
$$t_7 = f_2(f_{10}(t_6, x_0), f_{13}(x_{22})),$$
$$t_8 = f_{12}(f_{11}(t_7), x_{21}).$$

Пусть

$$g_0(u_1, u_2, u_3) = I_{f_2}(I_{f_4}(I_{f_3}(I_{f_2}(I_{f_1}(u_1 + 1), u_2), u_1 + 1)), u_3),$$
$$g_1(u_1, \ldots, u_5) = I_{f_6}(I_{f_5}(g_0(u_1, u_4, u_5), u_2, u_1 + 1), \quad u_3, u_1 + 1),$$

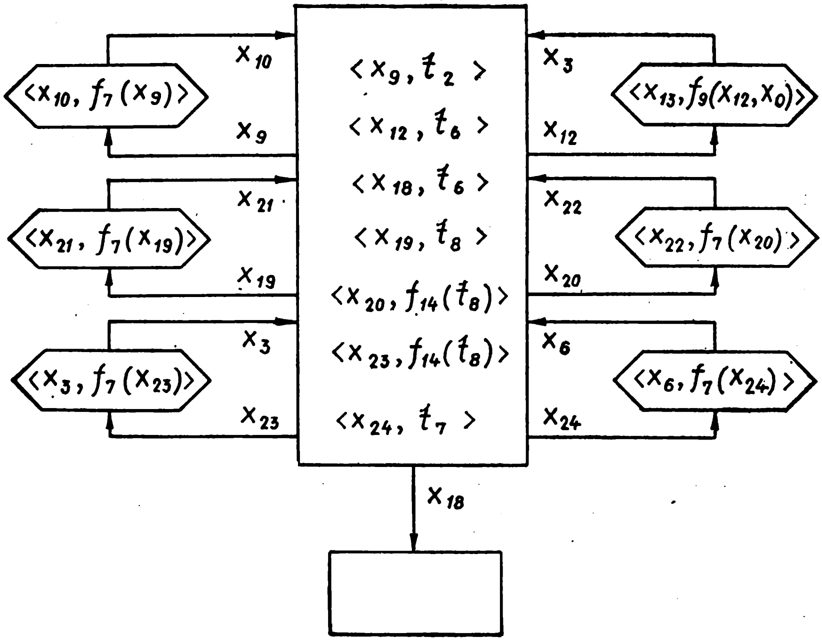


Рис. 2.9

$$g_2(u_1, \ldots, u_6) = I_{f_2}(I_{f_{10}}(g_1(u_1 u_2, u_3, u_5, u_6), u_1 + 1), I_{f_{13}}(u_4)),$$
$$g_3(u_1, \ldots, u_7) = I_{f_{12}}(I_{f_{11}}(g_2(u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7)), u_4).$$

Тогда согласно теореме 2.2 функции, представимые исходной моделью $\mathfrak{M}$, задаются системой конечно-разностных уравнений R $(\Psi_{\mathfrak{M}}, H_{\mathfrak{M}}, X_{\mathfrak{M}}, \otimes)$, где

$$\Psi_{\mathfrak{M}}: \psi_1 = \omega_9,\ \psi_2 = \omega_{12},\ \psi_3 = \omega_{18},\ \psi_4 = \omega_{19},$$
$$\psi_5 = \omega_{20},\ \psi_6 = \omega_{23},\ \psi_7 = \omega_{24},$$
$$H_{\mathfrak{M}}: \eta_1(t, u_1, \ldots, u_7) = I_{f_6}(g_0(t, u_6, u_7), u_1, t + 1),$$
$$\eta_2(t, u_1, \ldots, u_7) = g_1(t, u_1, u_2, u_6, u_7),$$
$$\eta_3(t, u_1, \ldots, u_7) = g_1(t, u_1, u_2, u_6, u_7),$$
$$\eta_4(t, u_1, \ldots, u_7) = g_3(t, u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7),$$
$$\eta_5(t, u_1, \ldots, u_7) = I_{f_{14}}(g_3(t, u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7)),$$
$$\eta_6(t, u_1, \ldots, u_7) = I_{f_{14}}(g_3(t, u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7)),$$
$$\eta_7(t, u_1, \ldots, u_7) = g_2(t, u_1, u_2, u_5, u_6, u_7);$$
$$X_{\mathfrak{M}}: \chi_{ij}(t, u) = \begin{cases} t, & \text{если } j \neq 2, \\ t \dot{-} \operatorname{rest}(t, i_0), & \text{иначе}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 7. \end{cases}$$

Таким образом, принимая во внимание теорему 2.3, применение предложенной процедуры генерации моделирующих алгоритмов позволило создать программную модель (см. рис. 2.3 и 2.4) угломера в режиме параметрического автосопровождения. Созданная модель реализована в виде пакета программ на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV ОС ЕС ЭВМ [86]. С целью обеспечения достоверности результатов вычислительных экспериментов была проведена экспериментальная проверка адекватности программной модели реальному объекту по данным натурных испытаний, а также ее калибровка.

С использованием созданного пакета программ, имитирующего функционирование угломерного канала, решался широкий круг конкретных практических задач анализа и синтеза угломера на этапах создания и проведения испытаний опытного образца. Проведенные вычислительные эксперименты позволили:

исследовать характер функционирования угломерного канала в штатных и экстремальных условиях, практически не реализуемых при натурном эксперименте;

определить предельные значения скоростей, устойчиво сопровождаемых ЛА, движущихся по заданным траекториям, а также определить значения параметров, обеспечивающих предельно возможные значения показателей качества угломера, и тем самым выявить потенциальные возможности угломерного канала;

исследовать точностные характеристики в разных тактических ситуациях при различных уровнях и характеристиках помех и траекториях ЛА;

оценить влияние различных источников погрешностей измерений на точностные характеристики угломера;

исследовать возможность адаптации характеристик угломерного канала к характеру входного воздействия и т. д.

Проведенные исследования подтвердили правильность и эффективность предложенной процедуры генерации программных моделей. имитирующих функционирование РТС, и позволили получить важные научные и практические результаты, разработать конкретные предложения по модернизации угломерного канала исследуемой РЛС.

§ 3. Адекватность и верификация моделей [5]

Если при сопутствующем моделировании относительно простых проектируемых РТС невысокая сложность создаваемых моделей позволяла удовлетвориться их выборочным тестированием, то с быстрым ростом сложности проектируемых систем даже высокая интенсивность тестирования не позволяет поручиться за правильность модели. Этим во многом объясняется стремление разработчиков и проектантов искать пути и методы формального доказательства правильности моделей, а не ссылаться только на выполненное тестирование. Для решения близкой задачи в программировании разработан ряд хорошо обоснованных методов проверки правильности программ: метод индуктивных утверждений Флойда [192], метод структурной индукции [193], метод Хоара [176] и др.

---

[5] Изложенные ниже вопросы адекватности и верификации моделей частично рассматривались в [89].

В настоящем параграфе развивается метод индуктивных утверждений Флойда проверки правильности программ для нового, важного в практическом отношении класса математических объектов — моделей.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \Sigma, \Omega, \Phi, I \rangle$ — модель, где $\Sigma = \langle G(V, g), \mathfrak{T}, x_0, \delta, \lambda, W \rangle$ и $N \subset \Omega$.

Для каждой схемы моделей Σ будем различать два набора предметных переменных:

1) входной вектор $\bar{x} \overset{df}{=} \mathrm{var}\,(\delta\,(E_G^- \,(V_0)) \cup \{x_0\})$ предметных переменных, где $V_0 = \{v \in V / E_G^+ (v) = \varnothing\}$;

2) выходной вектор $\bar{z} \overset{df}{=} \mathrm{var}\,(\delta\,(E_G^+ \,(OB_\Sigma)) \cup \{x_0\})$ предметных переменных.

Пусть $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_m \rangle$.

Введем следующие определения, аналогично тому, как это делалось в [15].

Определение 3.1. Произвольный предикат $P\,(\bar{x}) \subseteq \Omega^n$ назовем входным, если существует такой набор функций $\varphi_i \in \Phi^1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что для любого момента времени t $P\,(\varphi_1\,(t), \ldots, \varphi_n\,(t))$ истинно.

Определение 3.2. Произвольный предикат $Q\,(\bar{z}) \subseteq \Omega^m$ назовем выходным, если существует такой набор функций $\psi_i \in \Phi^1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, что для любого момента времени t $Q\,(\psi_1\,(t), .., \psi_m\,(t))$ истинно.

Определение 3.3. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ корректна относительно входного предиката P и выходного предиката Q, если для любого момента времени t как

$$P\,(SP_{\mathfrak{M}}(t)\,|\mathrm{pos}\,(x_1, \delta\,(G) \cup \{x_0\}), \ldots, SP_{\mathfrak{M}}(t)\,|\,\mathrm{pos}\,(x_n, \delta\,(G) \cup \{x_0\})), \quad (3.1)$$

так и

$$Q\,(SP_{\mathfrak{M}}(t)\,|\,\mathrm{pos}\,(z_1, \delta\,(G) \cup \{x_0\}), \ldots, SP_{\mathfrak{M}}(t)\,|\,\mathrm{pos}\,(z_m, \delta\,(G) \cup \{x_0\}))$$

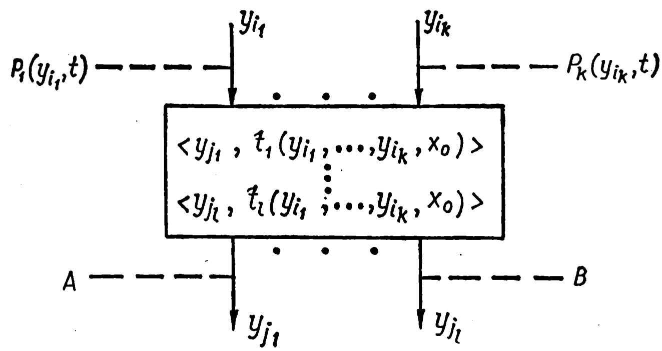
истинно.

Заметим, что во многих случаях входной предикат P задают следующим образом: $P : \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \varphi_i\,(x_0)$, где $\varphi_i = I_{\mathrm{term}(x_i, \lambda(\delta G(x_i)))}$, если $x_i \neq x_0$, и $(\forall \omega \in \Omega)\ \varphi_i\,(\omega) = \omega$ — в противном случае. Тогда выполнение (3.1) очевидно.

Под верификацией моделей для данных входного P и выходного Q предикатов будем понимать доказательство корректности модели относительно указанных предикатов, использующее трансформацию предикатов двух типов: трансформацию в прямом и обратном направлениях.

Пусть t — произвольный, но фиксированный момент времени ($t > 0$).

Трансформация предикатов в прямом направлении для блоков преобразования модели представлена на рис. 3.1. Это означает следующее: из предположения, что значения предметных переменных y_{t_n}, $n = \overline{1, k}$, удовлетворяют предикатам P_n, следует, что значения предмет-



$$A\colon\ (\exists u_1,\dots,u_k)\ \bigwedge_{i=1}^{k} P_i(y_i,t)\ \&\ y_{j_1} = I_{t_1}(u_1,\dots,u_k,t)$$

$$B\colon\ (\exists u_1,\dots,u_k)\ \bigwedge_{i=1}^{k} P_i(u_i,t)\ \&\ y_{j_l} = I_{t_l}(u_1,\dots,u_k,t)$$

Рис. 3.1

ных переменных y_{j_m}, $m = \overline{1, l}$, удовлетворяют предикатам

$$(\exists u_1, \dots, u_k) \bigwedge_{i=1}^{k} P_i(u_i, t) \,\&\, y_{jm} = I_{t_m}(u_1, \dots, u_k, t). \tag{3.2}$$

Отметим, что в том случае, когда предикаты P_n задаются графиками функций $f_n : N \to \Omega$ соответственно (т. е. $P_n : y_{t_n} = f_n(t)$), то предикаты (3.2) приводятся к следующему виду: $y_{j_m} = I_{t_m}(f_1(t), \dots, f_k(t), t)$, т. е. задаются графиками функций $h_m : N \to \Omega$, причем функции h_m суть суперпозиции функций I_{t_m} блока преобразования модели и функций f_n.

Для блоков задержки трансформация предикатов в прямом направлении представлена на рис. 3.2 и означает: из предположения, что значение предметной переменной x удовлетворяет предикату $P(x, t)$, следует, что значение предметной переменной y удовлетворяет предикату

$$(\exists u)\, P(y, t \dot{-} I_t(u, t-1)) \,\&\, P(u, t-1). \tag{3.3}$$

Отметим, что в случае, когда предикат P задается графиком функции $f : N \to \Omega$, предикат (3.3) приводится к виду $y = f(t \dot{-} I_t(f(t-1), t-1))$, т. е. задается подобным графиком.

Трансформация предикатов в обратном направлении для блоков преобразования представлена на рис. 3.3, что означает: из предположения, что значения предметных переменных y_{j_m}, $m = \overline{1, l}$, удовлетворяют соответственно предикатам P_m, вытекает, что значения предмет-

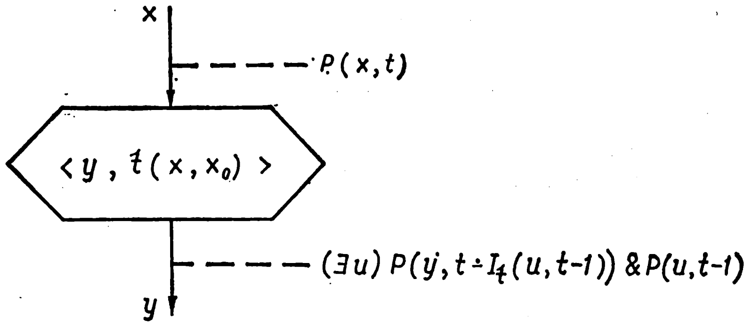


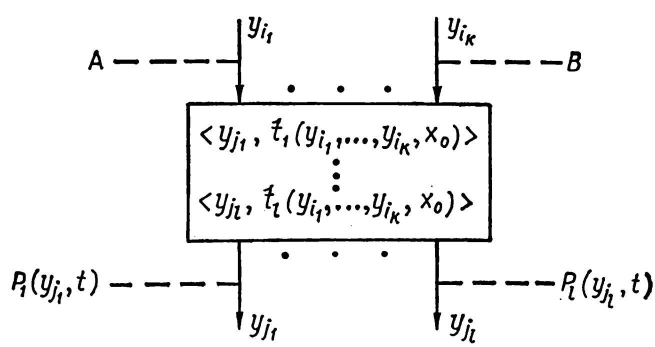
Рис. 3.2

ных переменных y_{i_n}, $n=\overline{1,\ k}$, удовлетворяют

$$(\exists u_1, \ldots, u_{n-1}, u_{n+1}, \ldots, u_k) \bigwedge_{i=1}^{l} P_i(I_{t_i}(u_1, \ldots, u_{n-1}, y_{i_n}, u_{n+1}, \ldots \\ \ldots, u_k, t), t). \qquad (3.4)$$

Следует отметить, что если предикаты P_m задаются графиками функций $f_m : N \to \Omega$, то предикаты (3.4), вообще говоря, нельзя привести к такому же виду. Под влиянием этого обстоятельства обычно выбирают трансформацию предикатов в прямом направлении.

Для блоков задержки трансформация предикатов в обратном направлении представлена на рис. 3.4 и означает: из предположения, что значение предметной переменной y удовлетворяет предикату P (y,



$$A: \ (\exists u_2, \ldots, u_k) \bigwedge_{i=1}^{l} P_i(I_{t_i}(y_{i_1}, u_2, \ldots, u_k, t), t)$$

$$B: \ (\exists u_1, \ldots, u_{k-1}) \bigwedge_{i=1}^{l} P_i(I_{t_i}(u_1, \ldots, u_{k-1}, y_{i_k}, t), t)$$

Рис. 3.3

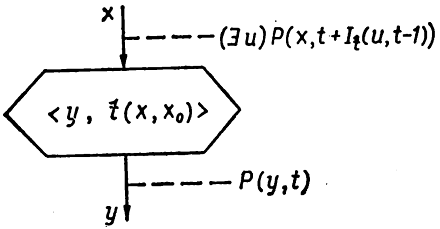


Рис. 3.4

t), следует значение предметной переменной удовлетворяет предикату $(\exists u)\ P\ (x,\ t+I_t\ (u,\ t-$ $-1))$.

Предлагается [15] верификацию моделей проводить следующим образом:

1) информационным связям модели (дугам сети), соответствующим входным предметным переменным, приписывается входной предикат, а информационным связям, соответствующим выходным предметным переменным — выходной предикат, предварительно убедившись в истинности входного предиката для произвольного момента времени (инвариантность по времени);

2) в каждой обратной связи модели (цикле сети) выделяется информационная связь, которой приписывается индуктивный предикат, задающий зависимость значений соответствующих предметных переменных от времени, причем один индуктивный предикат может соответствовать нескольким обратным связям модели;

3) в предположении истинности входного предиката доказывается инвариантность по времени всех индуктивных предикатов трансформацией предикатов в прямом или обратном направлении;

4) в предположении истинности индуктивных предикатов доказывается истинность выходного предиката выбранным способом трансформации предикатов по всем путям, ведущим от соответствующих индуктивным предикатам мест модели до блоков выхода.

Проведение верификации моделей проиллюстрируем на конкретном примере, позволяющем доказать утверждение, обратное теореме 2.2.

Пусть $\varphi_1\ (\bar{\omega},\ t),\ \ldots,\ \varphi_m\ (\bar{\omega},\ t)$ — набор функций, заданных системой разностных уравнений $R\ (\Psi,\ \mathrm{H},\ \mathrm{X},\ \Theta)$.

Построим модель, представляющую собой указанный набор функций, причем интерпретация функциональных символов осуществляется функциями из $\Psi \cup \mathrm{H} \cup \mathrm{X} \cup \Theta$ и некоторыми простыми арифметическими операциями.

Пусть $m=2$ и $\bar{\omega}$ — произвольные, но фиксированные значения некоторых параметров. Рассмотрим схему моделей, представленную на рис. 3.5. Заметим, что для случая, когда $m>2$, схема моделей строится подобно приведенной. Интерпретацию зададим следующим образом:

$$(\forall x \in \{x_1,\ x_1',\ y_1,\ x_{11},\ x_{11}',\ x_{21},\ x_{21}'\})\quad I(x)=\psi_1(\bar{\omega}),$$
$$(\forall x \in \{x_2,\ x_{12},\ x_{12}',\ x_{22},\ x_{22}'\})\quad I(x)=\psi_2(\bar{\omega}),$$
$$I(y)=I(y')=\chi_{21}(0,\ \psi_1\ (\bar{\omega})),$$
$$I(f_1)=\eta_1(\bar{\omega},\ u_1-1,\ \vartheta_1(u_1),\ \ldots,\ \vartheta_n(u_1),\ u_2,\ u_3),$$
$$I(f_2)=\eta_2(\bar{\omega},\ u_1-1,\ \vartheta_1(u_1),\ \ldots,\ \vartheta_n(u_1),\ u_2,\ u_3),$$
$$I(f)=\begin{cases} u_2, & \text{если } u_4=u_1 \\ u_3, & \text{иначе,} \end{cases}$$

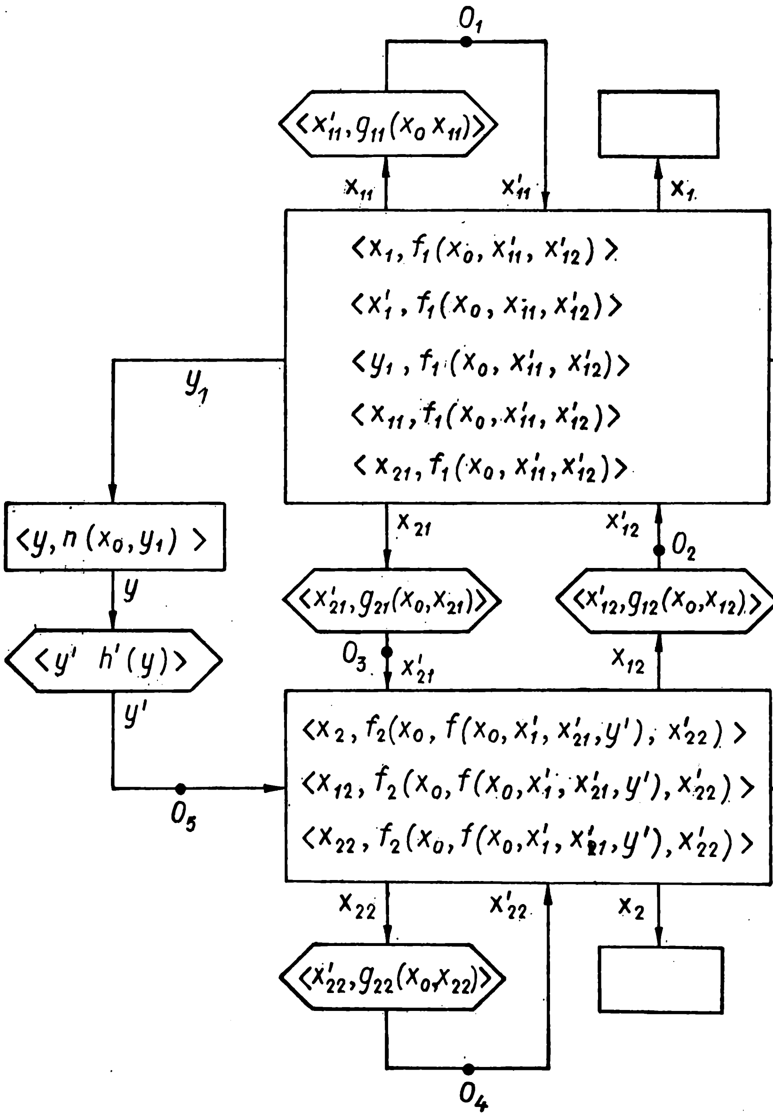

O1
<x'11, g11(x0 x11)>
x11
x'11
x1
<x1, f1(x0, x'11, x'12)>
<x'1, f1(x0, x11, x'12)>
<y1, f1(x0, x'11, x'12)>
<x11, f1(x0, x'11, x'12)>
<x21, f1(x0, x'11, x'12)>
y1
x'1
<y, n(x0, y1)>
y
<y' h'(y)>
y'
x21
x'12
O2
<x'21, g21(x0, x21)>
<x'12, g12(x0, x12)>
O6
O3
x'21
x12
<x2, f2(x0, f(x0, x'1, x'21, y'), x'22)>
<x12, f2(x0, f(x0, x'1, x'21, y'), x'22)>
<x22, f2(x0, f(x0, x'1, x'21, y'), x'22)>
O5
x22
x'22
x2
<x'22, g22(x0 x22)>
O4

Рис. 3.5

$$I(h) = \chi_{21}(\bar{\omega}, u_1, u_2),$$
$$I(h') = 1,$$
$$I(g_{11}) = u_1 + 1 - \chi_{11}(\bar{\omega}, u_1, u_2),$$
$$I(g_{12}) = u_1 + 1 - \chi_{12}(\bar{\omega}, u_1, u_2),$$
$$I(g_{21}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \chi_{21}(\bar{\omega}, u_1, u_2) = u_1 + 1, \\ u_1 + 1 - \chi_{21}(\bar{\omega}, u_1, u_2), \text{ иначе,} \end{cases}$$
$$I(g_{22}) = u_1 + 1 - \chi_{22}(\bar{\omega}, u_1, u_2).$$

Пусть $t > 0$ — произвольный, но фиксированный момент времени. Информационным связям с отметкой $x \in \{x_1, y_1, x_{11}, x_{21}\}$ припишем индуктивный предикат $P_1(x, t) : x = \varphi_1(\bar{\omega}, t)$, а информационным связям с отметкой $x \in \{x_2, x_{12}, x_{22}\}$ — $P_2(x, t) : x = \varphi_2(\bar{\omega}, t)$. Техника верификации моделей с трансформацией предикатов в прямом направлении позволяет получить в точке O_1 — O_6 предикаты

$$x'_{11} = \varphi_1(\bar{\omega}, \chi_{11}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_1(\bar{\omega}, t-1))),$$
$$x'_{12} = \varphi_2(\bar{\omega}, \chi_{12}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_2(\bar{\omega}, t-1))),$$
$$x'_{21} = \varphi_1(\bar{\omega}, t-1) \,\&\, \chi_{21}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_1(\bar{\omega}, t-1)) = t \vee$$
$$\vee\, x'_{21} = \varphi_1(\bar{\omega}, \chi_{21}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_1(\bar{\omega}, t-1))) \,\&$$
$$\&\, \chi_{21}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_1(\bar{\omega}, t-1)) \neq t,$$
$$x'_{22} = \varphi_2(\bar{\omega}, \chi_{22}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_2(\bar{\omega}, t-1))),$$
$$y' = \chi_{21}(\bar{\omega}, t-1, \varphi_1(\bar{\omega}, t-1)),$$
$$x'_1 = \varphi_1(\bar{\omega}, t)$$

соответственно. Отсюда вытекает инвариантность по времени индуктивных предикатов, и, следовательно, справедлива: построенная модель $\mathfrak{M}$, корректная соотносительно входного предиката $P : x_0 \geqslant 0$ и выходного предиката $Q : x_1 = \varphi_1(\bar{\omega}, x_0) \,\&\, x_2 = \varphi_2(\bar{\omega}, x_0)$, что фактически означает $\mathrm{fun}(\mathfrak{M}) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

Таким образом, справедлива теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Для любого набора функций, заданных системой разностных уравнений, существует представляющая его модель, стандартная в том случае, когда система разностных уравнений имеет конечный порядок.*

Как отмечалось, необходимым этапом организации технологического цикла вычислительного эксперимента является проверка адекватности разрабатываемых программ, имитирующих функционирование сложных РТС, моделируемым объектам. Во всех случаях, когда предпринимается попытка формализованного описания РО, возникает вопрос сравнения функционирования РО и его функционирования в рамках выбранного формализованного описания — ММ. Эта задача выяснения степени соответствия РО и ММ называется задачей об адекватности ММ—РО.

Так как информация, относящаяся к описанию объекта, связана с многократным воспроизведением одного и того же комплекса условий, т. е. носит статистический характер, то и обработка соответствующей информации по необходимости должна основываться на теоретико-вероятностных методах. Отсюда решение вопроса об адекватности ММ—РО, как правило, ищется на пути применения статистических методов.

В настоящее время существуют различные пакеты прикладных программ (ППП) [38, 137], обеспечивающие нужды первичной обработки экспериментальной статистической информации. С их помощью вычисляются простейшие статистика и характеристика для свойств, не зависящих и зависящих от времени.

Ни в одном из них задача об адекватности ММ—РО не рассматривается в качестве самостоятельной. Следствием этого является то, что исследователь вынужден, используя результаты обработки данных пакетом, подчас вручную организовывать дальнейшую их обработку с целью решения вопроса об адекватности.

Предлагаемый вариант диалоговой системы статистической проверки адекватности (ССПА) представляет собой комплекс программ, ориентированных на решение задач, связанных с выяснением вопроса об адекватности, и предназначен для восполнения пробела в указанной области.

Одним из основных условий сопоставимости информации об ММ и РО является представление ее стандартным, общим для ММ и РО, образом. Это означает, что при наличии числовой информации она должна быть приведена к единому началу отсчета и единому масштабу.

Информация об объекте может носить как числовой (числа, числовые векторы), так и нечисловой характер. Если информация первого рода— это результат текущих измерений какого-либо параметра (или их набора) исследуемого объекта, то при сопоставлении информации второго рода (по своей природе нечисловой) мы вынуждены так или иначе «представлять» ее в числовом виде, т. е. имеем дело с некоторыми статистическими характеристиками наблюдаемого явления (например, частотами градаций контролируемого признака), а не непосредственно с результатами наблюдений. В этом случае говорят о качественных измерениях исследуемого объекта. Таким образом, в итоге сравнение ММ и РО проводят на основании сопоставления числовой информации об этих объектах.

При обработке информации первого рода изменения исследуемого объекта во времени или пространстве приводят к необходимости использовать ту часть математической статистики, которая называется статистикой случайных процессов. В том случае сопоставляются две функции (выборки, реализации, траектории), описывающие поведение ММ и РО на некотором дискретном параметрическом множестве. Следует отметить, что случай, когда параметрическое множество суть интервал, приходится сводить к дискретному случаю.

Следует также отметить, что, когда статистические характеристики изучаемого объекта не меняются во времени и измеренные значения в предшествующие моменты времени не влияют на текущие измерения, говорят о выборках из генеральных совокупностей с соответствующими распределениями или о реализациях значений случайных величин.

В соответствии с типом обрабатываемой информации ССПА в настоящем варианте предусматривает четыре режима работы:

I — проверка адекватности ММ—РО, когда выходные данные представляют собой выборки из генеральных совокупностей;

II — проверка адекватности ММ—РО, когда выходные данные представляют собой качественные измерения;

III — проверка адекватности ММ—РО, когда выходные данные представляют собой реализации стационарных случайных процессов;

IV — проверка адекватности ММ—РО, когда выходные данные представляют собой реализации нестационарных случайных процессов типа $f(t) + \xi(t)$, где $f(t)$ — детерминированная функция и $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс.

Модульное построение ССПА позволяет сравнительно просто осуществлять пополнение ССПА программами, реализующими те или иные статистические критерии, модифицировать программы генерации тестовых примеров, используя дополнительные генераторы псевдослучайных чисел с требуемыми законами распределения, изменять форму печати итогового документа в соответствии с пожеланиями пользователей и вносить соответствующие изменения в набор данных диалоговых тем ССПА.

В дальнейшем реализации случайных процессов и их объемы будем именовать ф - п а р а м е т р а м и, а прочие характеристики (доверительная вероятность, относительная точность вычисления вероятностных интегралов и др.) — п - п а р а м е т р а м и ССПА. Отметим, что при обработке качественных измерений ф-параметрами ССПА являются серии группированных выборок и их длины.

Архитектура ССПА. Комплекс программ ССПА, структурная схема которой представлена на рис. 3.6, включает в себя следующие программы проблемного и служебного характера.

1. Программа проверки адекватности ММ—РО для выбранного режима работы ССПА осуществляет собственно решение вопроса об адекватности ММ и РО по гибкой схеме, структура которой изменяется значениями соответствующих п-параметров ССПА. Алгоритмы ее функционирования, касающиеся используемых режимов работы ССПА, достаточно подробно описаны в [89].

2. Программы генерации тестовых примеров предназначены для построения контрольных заданий с требуемыми статистическими характеристиками ф-параметров для всех режимов работы ССПА. Потребность во включении в ССПА подобных программ диктовалась необходимостью проведения дополнительных исследований по уточнению области эффективной применимости используемых статистических критериев и возможного изменения структурно-логической схемы алгоритмов проверки адекватности ММ—РО.

3. Сервисные программы обеспечивают возможность контроля за работой программ генерации контрольных тестов, распечатки и обновления текущего состояния используемых наборов данных.

4. Программа ДИСПЕТЧЕР управляет работой всех программ

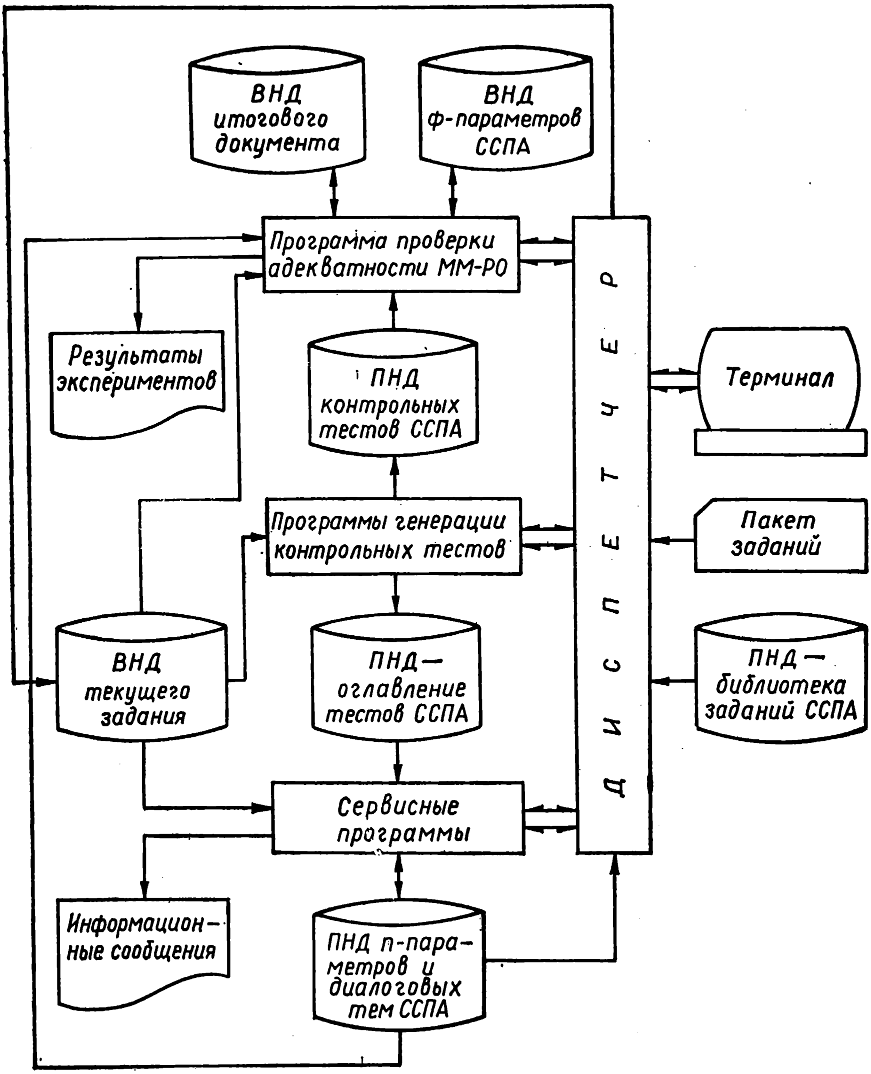


Рис. 3.6

ССПА на этапе выполнения заданий. На этапе подготовки информации диалоговый монитор ДИСПЕТЧЕРА организует в интерактивном режиме формирование необходимых для тех или иных проблемных или сервисных программ заданий в соответствии с выбранной темой проведения диалогового сеанса.

Комплекс программ ССПА использует семь наборов данных (НД), временных (ВНД) и постоянных (ПНД), размещаемых на пакетах магнитных дисков ЕС ЭВМ.

1. ПНД п-параметров и диалоговых тем ССПА предназначен для долговременного хранения значений по умолчанию п-параметров ССПА и массива диалоговых тем, используемых программой проверки адекватности ММ—РО и ДИСПЕТЧЕРОМ ССПА.

2. Задания ССПА, построенные программами генерации контрольных тестов, заносятся в ПНД контрольных тестов ССПА для последующей их обработки программой проверки адекватности ММ—РО.

3. С целью контроля за выполнением программ генерации контрольных тестов информация, относящаяся к результатам их работы, запоминается в ПНД — оглавление тестов ССПА.

4. Задания ССПА могут быть предварительно помещены в ПНД — библиотеку заданий ССПА.

5. Осуществив выборку очередного задания, ДИСПЕТЧЕР помещает его в ВНД текущего задания, управляя его дальнейшей обработкой программами комплекса.

6. Используемый программой проверки адекватности ММ—РО ВНД ф-параметров ССПА предназначен для временного хранения данных, касающихся определяемой текущим заданием серии экспериментов.

7. По завершении очередного эксперимента результаты его обработки заносятся в ВНД итогового документа. Затем, по окончании выполнения текущего задания, информация из ВНД ф-параметров ССПА и ВНД итогового документа распечатывается после соответствующей редакции.

Общие характеристики ССПА. Программные модули, написанные на ФОРТРАНе или АССЕМБЛЕРе, содержатся в двух наборах данных — библиотеках текстовых и загрузочных модулей, причем в библиотеку текстовых модулей не включены исходные тексты подпрограмм, заимствованных из [87, 88].

Общий объем памяти, занимаемой постоянными наборами данных ССПА на пакетах магнитных дисков ЕС5061, не превышает 25 цилиндров (ц). Предварительное распределение памяти для всех временных наборов данных ССПА — 3 ц, дополнительное приращение — 3 ц.

Комплекс программ ССПА может иметь как простую, так и двухобластную оверлейную структуру. Соответствующие общие загрузочные модули длиной 625К и 125К помещены в разделы *SSPA* и *SSPAOVLY* библиотеки загрузочных модулей ССПА, а соответствующие управляющие предложения редактора ОС ЕС ЭВМ находятся в разделах *OV*2 и *OV*1 ПНД-библиотеки заданий ССПА. Там же помещены используемые процедуры ОС ЕС ЭВМ и типовые примеры заданий.

Предельный объем обрабатываемых программой проверки адекватности ММ—РО реализаций случайных процессов составляет 500 значений, а в случае качественных измерений предельная длина серий группированных выборок не превышает 100 при количестве градаций контролируемого признака не более 10.

Максимальное количество тестовых примеров, создаваемых программами генерации контрольных тестов, равно 98, причем предельные длины реализаций для первого, третьего и четвертого режимов работы ССПА составляют соответственно 438, 433 и 411 значений. В случае качественных измерений предельные длины серий группированных вы-

Таблица 3.1

Номер записи	Длина, байт	Значение опции
1	1	Номер N запрашиваемой функции ССПА 0 — проверка адекватности ММ — РО 1 — генерация тестов для первого режима ССПА 2 — генерация тестов для второго режима ССПА 3 — генерация тестов для третьего режима ССПА 4 — генерация тестов для четвертого режима ССПА 5 — не используется 6 — окончание работы ССПА 7 — печать оглавления тестов ССПА 8 — печать значений по умолчанию п-параметров ССПА и диалоговых тем ССПА 9 — обновление значений по умолчанию п-параметров и диалоговых тем ССПА
2	1	Если $N = 0$, то значение опции определяется для программы проверки адекватности ММ-РО входной набор данных 0 — ВНД текущего задания 1 — ПНД контрольных тестов ССПА Если $1 \leqslant N \leqslant 4$, то значение опции устанавливает для программ генерации контрольных тестов «диспозицию» выходных наборов данных 0 — сохранить ранее сгенерированные тесты ССПА 1 — уничтожить ранее сгенерированные тесты ССПА

борок не превышают min (100, [438/KG]), где KG — требуемое количество градаций.

Задания ССПА. Диспетчер ССПА организует ввод данных (пакета заданий) со следующих направлений:

с перфокарт или раздела библиотечного НД;

с операторской консоли;

с видеотерминала ЕС7066;

с видеотерминала ЕС7927.

В последних трех случаях диалоговый монитор ДИСПЕТЧЕРА формирует задания на основании информации, полученной во время проведения диалогового сеанса по выбранной теме.

Задание ССПА представляет собой набор записей фиксированной длины 80 байт. Первая запись является управляющей и содержит значения опций (табл. 3.1) программ комплекса, реализующих запрашиваемые функции ССПА. Вторая и последующие записи являются информационными и могут отсутствовать при запросе сервисных функций определения текущего состояния используемых НД. Во всех остальных случаях информационные записи содержат данные списков LPP и LXY, представление которых соответствует синтаксису оператора ввода — вывода списков алгоритмического языка ФОРТРАН-IV ЕС ЭВМ. Порядок следования информационных записей следующий: первыми помещаются записи списка LPP, затем располагаются записи одного или более списков LXY. Подобная структура допускает повторения в чередовании списков LPP и LXY.

Таблица 3.2

Номер режима	Аналитическое выражение $R(\tau)$
1	$\sigma^2 e^{-\omega_* \mid \tau \mid}$
2	$\sigma^2 e^{-\omega_* \mid \tau \mid} \cos \omega_0 \tau$
3	$\sigma^2 e^{-\omega_* \mid \tau \mid} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \omega_0 \mid \tau \mid \right)$
4	$\sigma^2 e^{-\omega_* \mid \tau \mid} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\omega_*}{\omega_0} \sin \omega_0 \mid \tau \mid \right)$
5	$\sigma^2 e^{-\omega_* \mid \tau \mid} (1 + \omega_* \mid \tau \mid)$
6	$\sigma^2 \frac{\sin \omega_* \tau}{\omega_* \tau}$
7	$\sigma^2 e^{-\omega_*^2 \tau^2}$
8	$\frac{\sigma^2}{1 + \omega_*^2 \tau^2}$
9	$\begin{cases} \sigma^2 (1 - \omega_* \mid \tau \mid), & \mid \tau \mid \leqslant 1/\omega_* \\ 0, & \mid \tau \mid > 1/\omega_* \end{cases}$

Таблица 3.3

Номер режима	Аналитическое выражение $T(t)$
1	$a_4 \ln (a_2 t + a_1) + a_3$
2	$a_4 \sin (a_2 t + a_1) + a_3$
3	$a_4 t^3 + a_3 t^2 + a_2 t + a_1$
4	$a_2 \mathrm{rest}\, (t, [a_{i0}]) + a_1$

Относящиеся к одной серии экспериментов данные списка *LPP* — это значения п-параметров ССПА, определяющие режим работы ССПА и количество экспериментов в серии, уточняющие структуру схемы проверки адекватности ММ—РО изменением значений соответствующих пороговых параметров используемых статистических критериев, а в случае генерации контрольных тестов — задающие их закон распределения, кратность генерации и некоторые другие характеристики.

Данные списка *LXY* — это значения ф-параметров ССПА, относящиеся к данному эксперименту. Они определяют реализации случайных процессов или серии группированных выборок в случае качественных измерений, вид автокорреляционной функции (табл. 3.2) и тренда математического ожидания (табл. 3.3). В случае генерации контрольных тестов для третьего или четвертого режимов работы ССПА используются алгоритмы, разработанные в [27].

Итоговый документ ССПА. По окончании обработки текущего задания осуществляется печать результатов серии экспериментов. С этой целью используется информация из ПНД п-параметров и диалоговых тем ССПА, ВНД итогового документа и ВНД ф-параметров ССПА. Итоговый документ включает:

наименование выбранного режима работы ССПА;

фактические значения по умолчанию используемых п-параметров ССПА;

для каждого эксперимента в случае обработки качественных измерений выводятся на печать серии векторов относительных частот, в противном случае — исходные реализации случайных процессов, их совместный график, таблицы значений и графики выделенных трендов математического ожидания, а также автокорреляционных функций стационарных составляющих обрабатываемых реализаций случайных процессов;

наименования и результаты применения используемых статистических критериев.

Печать большинства разделов итогового документа может быть отменена значениями соответствующих п-параметров ССПА.

Следует отметить, что в диалоговом режиме функционирования ССПА организует ведение протокола диалогового сеанса.

ГЛАВА III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АВТОМАТИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Возрастание сложности изучаемых объектов и стремительное развитие вычислительной техники требуют пересмотра сложившихся положений теории и практики обработки данных измерений о состоянии объекта с целью получения информации для управления им, в том числе и в процессе эксперимента. На первый план выдвигаются вопросы моделирования, проблема полного и рационального использования измерений при ограниченном количестве натурных экспериментов, оптимального планирования и выбора условий эксперимента. Решение всего комплекса вопросов предполагает высокую степень автоматизации вычислительного процесса. Задачи оценивания, возникающие здесь, становятся, по существу, многокритериальными. К методам оценивания помимо традиционного требования высокой точности предъявляются требования устойчивости, стабильности и т. д.

В [89] подробно рассматриваются устойчивые адаптивные методы оценивания, основанные на использовании техники оснащенных гильбертовых пространств и регуляризации. В [100, 147, 148] дан глубокий сравнительный анализ и изложение некоторых других подходов.

В этой главе конкретизируются некоторые проблемы автоматизированной обработки экспериментальных данных, подробно излагаются вопросы псевдообращения линейных операторов в гильбертовых пространствах, построенные на базе этого устойчивые методы оценивания и управления структурой измерительным комплексом при существенной неопределенности характера входных сигналов, методы устойчивого оценивания состояния динамических систем при сильно зашумленных наблюдениях.

§ 1. Автоматизированная обработка экспериментальных данных на основе современных методов оценивания

В процессе испытаний сложных систем, как правило, не удается непосредственно измерить характеристики, по которым можно оценить качество функционирования и технические данные испытуемой системы. Измерительная информация, собранная в процессе эксперимента, должна быть подвергнута существенной переработке для получения искомых характеристик. По существу, возникает проблема определения характеристик интерпретируемых объектов по заданному комплексу измерений в условиях априорной неопределенности, которая во многих случаях может быть значительна. Эффективность таких решений полностью определяется информационной содержательностью данных испытаний, которая ограничена стоимостью и техническими возможностями эксперимента. В связи с этим на первый план выступают поиск оптимальных или близких к оптимальным алгоритмов обработки, управления и принятия решений, реализующих по возможности всю полезную информацию об объекте. В решении этих задач существенную роль играют методы линейной фильтрации и основанные на них способы управления измерительными системами.

Работы А. Н. Колмогорова и Винера по теории линейной фильтрации для стационарных эргодических процессов, выполненные в 40-х годах, явились отправной точкой для создания теории фильтров, однако практическое применение фильтр Винера получил не сразу. Это объяснялось трудностями получения точных уравнений фильтрации, идентификации требуемых спектральных распределений сигналов и помех и моделирования физических систем, многие из которых (представляющие практический интерес) просто не соответствовали предположениям, принятым в теории фильтра Винера.

Многие исследователи обращали внимание на нестационарный случай уравнения Винера — Хопфа. Однако эти исследования, направленные на получение оптимальной весовой функции для нестационарной системы, неизбежно приводили к особым случаям в силу самой природы задачи. Калман преодолел эту трудность и предложил гибкий и эффективный метод применения новой структуры оптимального фильтра как для дискретной, так и для непрерывной системы.

Разработка фильтра Калмана — Бьюси устранила из метода Винера предположения о стационарности системы и о наличии данных на бесконечном интервале времени. Оказалось, что принцип ортогональности, определяющий необходимое и достаточное условие оптимальности линейного фильтра при критерии минимума среднеквадратической ошибки, может быть выражен в виде дифференциальных уравнений, описывающих поведение во времени оценки и матрицы ковариаций погрешностей этой оценки. Методы групповой оценки вектора состояния динамической системы в точностном смысле полностью эквивалентны методам динамической фильтрации, но последние обладают двумя явными преимуществами, состоящими в том, что оценка состояния динамической системы и характеристика ее точности могут быть получены в каждый момент времени, а также возможно значительное сокращение размерности задачи и требований к вычислительным мощностям устройств, реализующих алгоритм фильтрации.

Динамическая фильтрация помогает решать большинство частных задач, составляющих общую проблему автоматизированной обработки измерений и оптимального управления динамическими объектами. К таким задачам относится оценивание объектов, параметров объектов, т. е. идентификация; стохастическое управление объектами; адаптивное управление и т. д. Однако приложение аппарата динамической фильтрации для решения различных задач связано со значительными трудностями, которые вытекают из характера каждой конкретной задачи. Приведем некоторые из таких проблем.

Динамические уравнения, описывающие состояние объекта и процесс измерений, для многих реальных систем либо могут совсем не допускать линеаризацию, либо их линеаризация приведет к значительным погрешностям в описании реального поведения объекта и измерителей и к неадекватности модели реальной системе.

Другие сложности связаны с задачами фильтрации в случае негауссова характера шумов измерений, коррелированности, неизвестной матрицы ковариации шумов и т. д.

Как правило, попытки модифицировать процедуру Калмана — Бьюси соответственно уравнениям конкретной задачи приводят к построению некоторой субоптимальной процедуры фильтрации, результаты которой для идеального линейного гауссова случая в той или иной мере близки к фильтру Калмана — Бьюси.

В соответствии со сказанным выше, рассмотрим три основных класса алгоритмов динамической фильтрации: фильтры Калмана для нелинейных динамических систем, фильтры Калмана для динамических систем с «окрашенными» шумами измерения и фильтры Калмана для систем с высокой степенью неопределенности априорных данных.

Большинство опубликованных работ по нелинейной фильтрации основано либо на методе фильтрации по минимуму дисперсии, либо (в случае дискретных изменений) на методе наименьших квадратов. Последний метод затруднительно использовать в реальном масштабе времени. Метод фильтрации по минимуму дисперсии основан на определении функции условной плотности вероятности состояний при заданных измерениях. Условное среднее значение плотности вероятности представляет собой оценку по минимуму дисперсии. Как показано Р. Л. Стратоновичем [140], задача нелинейного оценивания заключается в определении временной эволюции условной плотности вероятности. Однако, хотя уравнения, описывающие решение задачи фильтрации, получены, требования вычислительного характера для оценки условного среднего значения не выполнены для большинства практических задач. Обычно эти уравнения настолько сложны, что с их помощью не всегда можно получить оптимальное решение, с которым можно было бы сравнить субоптимальное.

Эти трудности привели к многочисленным попыткам построить реализуемые нелинейные фильтры. В некоторых методах линеаризуются уравнения оптимальной фильтрации или опускаются члены, которые слишком усложняют вычисления. В других методах моменты порядка выше второго заменяют функциями условного среднего значения и дисперсией, пытаются использовать разложение в ряд или даже интегрировать формулу Байеса. Остановимся на рассмотрении трех наиболее общих приближенных методов: линеаризованного, расширенного и итерационного расширенного фильтров Калмана.

Преимущество линеаризованного фильтра состоит в том, что коэффициенты усиления не зависят от состояния и могут быть вычислены заранее на основе номинального решения. Однако с течением времени оценка может значительно отличаться от номинальной, и тогда нелинейности станут существенными.

Расширенный фильтр Калмана использует уравнения, линеаризованные относительно последней оценки, чтобы приблизить оценку к фактическому состоянию. В этом случае коэффициенты усиления должны быть вычислены в реальном времени.

Итерационный расширенный фильтр Калмана способствует уменьшению влияния нелинейности в измерениях за счет итерационного уточнения оценки при каждом измерении до тех пор, пока изменение оценки не станет малым. В качестве дополнительного подхода применяется итерационный расширенный фильтр со сглаживанием с целью уменьшения влияния нелинейности системы.

Для учета коррелированности измерений во времени при построении динамических фильтров используют различные способы. Одним из первых является так называемый метод расширения вектора состояния, предложенный Калманом. К уравнениям динамики объекта и процесса измерения добавляется уравнение, описывающее гипотетический формирующий фильтр, входом которого является белый шум, а выходом — шум с заданными корреляционными свойствами. Динамика такого формирующего фильтра включается в динамику объекта, а его состояние оценивается вместе с состоянием объекта.

Другой метод заключается в том, что предыдущий вектор измерений «взвешивается» с использованием матрицы коэффициентов корреляции шума и вычитается из текущего вектора измерений. С помощью такого приема коррелированные компоненты вектора шума измерений взаимно уничтожаются, а результирующий вектор шума процессов измерений содержит белый шум.

Оба метода ведут к увеличению затрат памяти ЭВМ при реализации алгоритмов фильтрации, так как в первом случае возрастает размерность задачи, а во втором необходимо запоминать предшествующий каждому данному моменту времени вектор измерений.

Рядом преимуществ по сравнению с рассмотренными выше методами обладает обобщенный динамический фильтр, учитывающий коррелированность шумов измерений. Уравнения фильтра могут быть получены путем решения матричного уравнения Винера — Хопфа. Полученный фильтр является линейным и оптимальным в смысле дисперсии погрешности оценки.

Для построения фильтра в случае присутствия неопределенных параметров в уравнениях динамики и измерений можно не производить их оценку, а учитывать статистику неопределенностей в уравнениях фильтра.

Значительную роль в построении фильтра для конкретной системы играет правильное задание априорных статистик начального состояния объекта, начальных условий для решения уравнения, описывающего эволюцию матрицы ковариаций погрешности оценки, а также матриц ковариаций шумов и измерений. Одним из методов учета этих статистик при реализации фильтра является их идентификация в процессе оценивания. Другой способ заключается в уменьшении чувствительности фильтра к неверным начальным условиям.

Проблема фильтрации Калмана в некоторых случаях (когда необходимое для определения матрицы коэффициентов усиления фильтра обращение невозможно) относится к классу некорректных проблем по Адамару. В таких случаях возможно применение метода регуляризации решения некорректно поставленных задач, разработанного А. Н. Тихоновым. Метод регуляризации ведет к добавлению положительно определенной матрицы к матрице, которую необходимо обратить. Метод уменьшения чувствительности фильтра к априорным статистикам содержит аналогичную операцию (см. [89, гл. II]).

Рассмотреть все методы и проблемы динамической фильтрации в кратком обзоре не представляется возможным, поэтому обсудим некоторые вопросы практической реализации и перейдем к постановке задачи на разработку других важных алгоритмов фильтрации.

В настоящее время значительный интерес представляют методы оценивания, основанные на декомпозиции уравнений фильтра. Основой такого подхода является разбиение вектора состояния системы на несколько подвекторов. Аналогичная операция может быть проделана и относительно вектора измерений. Такое разбиение векторов соответствует разбиению динамической системы и системы измерений на несколько подсистем, а так как размерность примерно квадратично влияет на число уравнений для вычисления коэффициента усиления фильтра, то декомпозиция должна привести к существенному сокращению объема вычислений при реализации фильтра. Выбор оператора декомпозиции в большой степени определяется интуицией инженера, однако можно предложить следующий формальный подход к разбиению общей системы на подсистемы. Необходимо разбить весь вектор состояния на такие подвекторы, чтобы каждая переменная состояния с помощью оператора декомпозиции была бы отнесена к той подсистеме, где она наиболее сильно связана с измерениями.

Весьма часто вычисления, соответствующие уравнениям калмановского фильтра, не приводят к положительно определенной матрице ковариаций погрешности оценки. Это может быть следствием быстрого убывания матрицы ковариаций за счет высокой точности измерений, либо когда одна из линейных комбинаций составляющих вектора состояния известна с высокой точностью, в то время как другие комбинации ненаблюдаемы. Основой методов фильтрации в условиях ограниченной разрядности ЭВМ, не приводящих к потере положительной полуопределенности, является использование квадратных корней прогнозируемой и скорректированной матриц ковариаций ошибок.

В случае вырожденной матрицы ковариаций прогнозируемого наблюдения разработаны методы псевдообращения матриц такие, что уравнение для вычисления коэффициента усиления сохраняет силу.

Представляют интерес методы, позволяющие устранить расходимость фильтра. Все они, как правило, сводятся к некоторому изменению веса текущих измерений (или, наоборот, прошлых измерений), что приводит к отклонению коэффициента усиления от оптимального. В связи с этим реальный фильтр становится субоптимальным, однако дает устойчивые оценки. Наиболее устойчивые методы увеличения коэффициентов усиления в моменты измерений заключаются в ограничении уменьшения экстраполированной матрицы ковариаций заданным уровнем, увеличении дисперсии шума в системе или непосредственно увеличении матрицы коэффициентов усиления. Все эти подходы приводят к субоптимальным фильтрам и могут потребовать применения алгоритмов адаптивной фильтрации для управления сходимостью.

Главным преимуществом методов динамической фильтрации является то, что они не сложны с точки зрения объема вычислений и реализуемы в реальном времени.

Перейдем к решению задачи построения субоптимальных фильтров для определенного класса динамических систем, используя методы, приведенные в данной главе.

§ 2. Псевдообращение и управление структурой измерительно-вычислительного комплекса

1°. Псевдообратные линейные операторы в гильбертовых пространствах. Как показано в [89, гл. 2], задача линейного оценивания в общем случае сводится к уравнению I рода в гильбертовых пространствах, которые в абстрактной форме можно записать в виде

$$Au = f, \tag{2.1}$$

где u — искомый, f — данный элементы некоторых гильбертовых пространств H и F, A — заданное линейное отображение из H в F. Причем наряду с точными данными задачи $\{A, f\}$ представляет значительный практический интерес случай, когда оператор и правая часть известны лишь приближенно. В абстрактных терминах это означает, что известна пара $\{A_h, f_\delta\}$, аппроксимирующая в выбранной топологии пару $\{A, f\}$, которая не известна априори. При этом часто оператор A в (2.1) необратим (т. е. решение задачи (2.1) неединственно) или (2.1) вообще не имеет точного решения. В этой ситуации можно обобщить понятие решения так, что обобщенное решение определяется однозначно, устойчиво (в определенном смысле) к возмущениям $\{A_h, f_\delta\}$ и совпадает с обычным решением в случае обратимого оператора, причем при достаточно общих предположениях об операторе A. Для отыскания этого обобщенного решения, которое обычно имеет физико-техническую интерпретацию, разработаны достаточно эффективные (с точки зрения численной реализации) регуляризованные методы, в основе которых лежат фундаментальные результаты А. Н. Тихонова и его последователей (см. библиографию в [143, 144]).

На этом пути возникло понятие псевдообратного оператора A^+ к линейному оператору A. Впервые это понятие возникло в связи с попытками нахождения обобщенного решения уравнения (2.1), когда A — матрица, f — конечномерные векторы. Оно было введено в 1920 г. американским математиком Муром, но усиленный интерес к проблеме псевдообращения матриц возник лишь в конце 50-х годов в связи с решением разнообразных задач линейной алгебры и математической статистики (метод наименьших квадратов, получение различных рекуррентных соотношений при оценивании случайных последовательностей и т. п.). В настоящее время имеются аналоги этих матричных результатов для случая линейных операторов в бесконечномерных, в основном гильбертовых, пространствах. Учитывая, что наиболее полного развития теория псевдообращения достигла в случае конечномерных евклидовых пространств и, кроме того, для решения многих практических задач обработки и интерпретации экспериментальных данных в ИВК достаточно именно этой ситуации, рассмотрим случай, когда $H = R_n$, $F = R_m$.

Конечномерный случай. Здесь оператор $A : H \to F$ естественно представить $m \times n$-матрицей. Тогда решение уравнения (2.1) по методу наименьших квадратов означает следующее: найти такой вектор $\hat{u} \in R_n$, который минимизирует выражение

$$\| Au - f \|^2_{R_m} \tag{2.2}$$

среди всех $u \in R_n$ и обладает наименьшей нормой [4, 119]. Справедлива лемма 2.1.

Лемма 2.1. *Существует единственный вектор $\hat{u} \in R_n$ с наименьшей нормой, минимизирующий (2.2), причем $\hat{u}$ является единственным вектором из области значений $\mathcal{R}(A^*)$ оператора $A^* : R_m \to R_n$, сопряженного с A, удовлетворяющим уравнению $Au = f_1$, где f_1 — ортопроекция f на $\mathcal{R}(A)$.*

Доказательство. Согласно теореме об ортогональной проекции в евклидовом пространстве имеет место единственное разложение $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathcal{R}(A)$, а $f_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp} = \operatorname{Ker}(A^*)$ (знак «$\perp$» обозначает ортогональное дополнение, $\operatorname{Ker}(\cdot)$ — ядро оператора $(\cdot)$). Отсюда для любого $u \in R_n$ находим

$$\| f - Au \|^2_{R_m} = \| (f_1 - Au) + f_2 \|^2_{R_m} = \| f_1 - Au \|^2_{R_m} + \| f_2 \|^2_{R_m} \geqslant \| f_2 \|^2_{R_m}. \tag{2.3}$$

Но $f_1 \in \mathcal{R}(A)$, т. е. найдется вектор $u_0 \in R_n$ такой, что $f_1 = Au_0$. Поэтому нижняя грань в (2.3) достигается на этом векторе u_0:

$$\min_{u \in R_n} \| f - Au \|^2_{R_m} = \| f - Au_0 \|^2_{R_m} = \| f_2 \|^2_{R_m}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) следует, минимизирующим может быть лишь тот вектор $u_* \in R_n$, который удовлетворяет уравнению $Au_* = f_1$. Пусть $U_* \subset R_n$ — множество таких векторов. Любой $u_* \in U_*$ имеет вид $u_* = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathcal{R}(A^*)$, $u_2 = \operatorname{Ker} A$. Значит, $Au_* = Au_1$, откуда $\| f - Au_* \|^2_{R_m} = \| f - Au_1 \|^2_{R_m}$ и $\| u_* \|^2_{R_n} = \| u_1 \|^2_{R_n} + \| u_2 \|^2_{R_n} \geqslant \| u_1 \|^2_{R_n}$. Поэтому решение задачи (2.2) с минимальной нормой должно принадлежать $\mathcal{R}(A^*)$. Если бы существовало два таких вектора: u_0 и u_1, то $Au_0 = Au_1 = f_1$, т. е. $u_0 - u_1 \in \operatorname{Ker} A$. В то же время $u_0 - u_1 \in \mathcal{R}(A^*)$. Но $\operatorname{Ker} A \cap \mathcal{R}(A^*) = \{\Theta_{R_n}\}$, т. е. $u_0 = u_1$, что и требовалось.

Учитывая (2.4), получаем, что $u_0 = A^*y$, $y \in R_m$. Поэтому (2.4) можно переписать в виде

$$\min_{u \in R_n} \| f - Au \|^2_{R_m} = \| f - AA^*y \|^2_{R_m}. \tag{2.5}$$

При этом для любого $u_* \in U_*$ справедливо

$$\| u_* \|_{R_n} \geqslant \| A^*y \|_{R_n}. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) является строгим, если $u_* \neq A^*y$, и вектор y удовлетворяет уравнению

$$AA^*y = f_1. \tag{2.7}$$

Нахождение вектора $\hat{u}$ из леммы 2.1 сводится к решению системы уравнений

$$A^*AA^*y_0 = A^*f, \tag{2.8}$$

которые называются нормальными. Тогда вектор $\hat{u} = A^*y_0$, где y_0 — любое решение (2.8).

Отметим вспомогательное утверждение.

Предложение 2.1. а. Выполняется соотношение

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^*A) = \mathcal{R}^{\perp}(A^*A) = \mathcal{R}^{\perp}(A^*), \tag{2.9}$$

б. в R_n и R_m существуют ортонормированные базисы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^m$ такие, что

$$A^*Ae_k = \lambda_k e_k, \quad AA^*f_j = \lambda_j f_j, \tag{2.10}$$

где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_s > 0$, $\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \cdots = \lambda_q = 0$, $q = \max \times$ $\times (n, m)$, $s \leqslant \min(n, m)$, и

$$Ae_k = \begin{cases} \lambda_k^{1/2} f_k, & k = 1, \ldots, s; \\ 0, & k = s+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$A^*f_j = \begin{cases} \lambda_j^{1/2} e_j, & j = 1, \ldots, s \\ 0, & j = s+1, \ldots, m; \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(A) = \operatorname{Lin}\{f_1, \ldots, f_s\}, \quad \mathcal{R}(A^*) = \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_s\}, \tag{2.12}$$

$$\dim \mathcal{R}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = n. \tag{2.13}$$

Доказательство. а. Достаточно проверить включение $\operatorname{Ker} \times$ $\times (A^*A) \subseteq \operatorname{Ker} A$. Действительно, если бы $A^*Ay = \Theta_{R_n}$, $Ay \neq \Theta_{R_m}$, то $Ay \in \mathcal{R}(A)$. Но $\mathcal{R}(A) = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$, т. е. $Ay \notin \operatorname{Ker} A^*$, что невозможно.

б. Пусть для определенности $n \leqslant m$. Оператор $A^*A : R_n \to R_n$ является самосопряженным и положительно определенным. Поэтому существует ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в $\mathcal{R}_n$, состоящий из собственных векторов A^*A, причем $A^*Ae_k = \lambda_k e_k$, где собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ можно расположить по убыванию:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_s > 0, \quad \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Тогда

$$\lambda_k = (A^*Ae_k,\ e_k)_{R_n} = (Ae_k,\ Ae_k)_{R_n} = \mu_k^2 > 0,\quad k = 1,\ \ldots,\ s.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*A \equiv D$ и любой вектор $x \in R_n$ имеет вид $x = x_0 + \sum_{k=1}^{s} (x,\ e_k)\, e_k$, $x_0 \in D$, то

$$A_x = \sum_{k=1}^{s} (x,\ e_k)\, Ae_k = \sum_{k=1}^{s} \mu_k (x,\ e_k)\, f_k, \tag{2.14}$$

где $Ae_k = \mu_k f_k$, $f_k \in R_m$.

Далее, при $k,\ i \leqslant s$

$$(Ae_k,\ Ae_i)_{R_m} = \mu_k\mu_i (f_k,\ f_i)_{R_m} = (A^*Ae_k,\ e_i)\ R_n = \lambda_k (e_k,\ e_i)_{R_n} = \lambda_k\delta_{ki}.$$

Значит, $(f_k,\ f_i)_{R_m} = \delta_{k,i}$, т. е. $\{f_k\}_{k=1}^{s}$ есть ортонормированный набор векторов. Из (2.14) следуют (2.12), (2.13).

Дополним $\{f_k\}_{k=1}^{s}$ до ортонормированного базиса в R_m. При $1 \leqslant k \leqslant s$ имеем, что

$$A^*f_k = \lambda_k^{-1/2} A^*Ae_k = \lambda_k^{1/2} e_k.$$

Отсюда $AA^*f_k = \lambda_k^{1/2} Ae_k = \lambda_k e_k$. Полагая $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_m = 0$, приходим к (2.11) и (2.10), что и требовалось.

Лемма 2.2. *Для любого линейного оператора $A : R_n \to R_m$ существует*

$$A^+ \equiv \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} A^* (AA^* + \alpha I)^{-1}, \tag{2.15}$$

где I — единичный оператор в соответствующем пространстве. Для любого $f \in R_m$ $u = A^+f$ является вектором с минимальной нормой среди всех векторов, минимизирующих $\| f - Au \|_{R_n}^2$. Причем

$$A^+f_l = \begin{cases} \lambda_j^{-1/2} e_j, & \lambda_j > 0,\\ 0, & \lambda_j = 0,\end{cases}\qquad (A^*)^+ e_k = \begin{cases} \lambda_k^{-1/2} f_k, & \lambda_k > 0,\\ 0, & \lambda_k = 0,\end{cases} \tag{2.16}$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ — введенные в предложении 2.1 ортонормированные базисы.

Доказательство. Поскольку матрицы $(A^*A + \alpha I)$ и $(AA^* + \alpha I)$ при $\alpha > 0$ невырождены и

$$(A^*AA^* + \alpha A^*) = A^* (AA^* + \alpha I_{R_m}) = (A^*A + \alpha I)\, A^*,$$

то правые части в (2.15), если существуют, равны между собой. Убедимся в существовании пределов в (2.15). Для любых e_j, f_j, $1 \leqslant j \leqslant$ находим

$$(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*f_j = \lambda_j^{1/2} (A^*A + \alpha I)^{-1} e_j =$$

$$= \lambda_j^{-1/2} (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*Ae_j = \lambda_j^{-1/2} \left(e_j - \frac{\alpha e_j}{\lambda_j + \alpha}\right) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \lambda_j^{-1/2} e_j.$$

Отсюда следует (2.15) и первая из формул (2.16). Вторая доказывается аналогично. Для вектора f из (2.1) имеем $u = A^+f = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^{-1/2} (f, f_j)_{R_m} e_j$, т. е. $u \in \mathcal{R}(A^*)$. Кроме того,

$$A^*Au = \sum_{j=1}^{s} (f, f_j)_{R_m} \lambda_j^{-1/2} A^*Ae_j = \sum_{j=1}^{s} (f, f_j) \lambda_j^{1/2} e_j = A^*f.$$

Учитывая (2.8), завершаем доказательство леммы 2.2.

Оператор A^+, введенный в лемме 2.2, называется *псевдообратным* к оператору $A: R_n \to R_m$. Это название поясняется так. Из (2.11), (2.12) следует, что оператор A взаимно-однозначно отображает подпространство $\mathcal{R}(A^*)$ из R_n на подпространство $\mathcal{R}(A)$ в R_m. А из первой формулы (2.16) находим, что $AA^+f = f$ и $A^+Au = u$ для любых $f \in \mathcal{R}(A)$, $u \in \mathcal{R}(A^*)$. Иными словами, сужение оператора A^+ на $\mathcal{R}(A)$ совпадает с обратным A^{-1} к оператору A, который рассматривается действующим из $\mathcal{R}(A^*)$ на $\mathcal{R}(A)$. Если $g \in \operatorname{Ker} A^*$, то $A^+g = \Theta_{R_n}$ в силу (2.16) и того, что $\mathcal{R}(A) \perp \operatorname{Ker} A^*$, $\mathcal{R}(A) \oplus \operatorname{Ker} A^* = R_m$. Отсюда вытекает и предложение 2.2.

Предложение 2.2. Оператор AA^+ является ортопроектором R_m, на $\mathcal{R}(A)$, оператор $(I - AA^+)$ — ортопроектором R_m на $\operatorname{Ker} A^*$, оператор A^+A — ортопроектором R_n на $\mathcal{R}(A^*)$, а $(I - A^+A)$ — ортопроектором R_n на $\operatorname{Ker} A$.

Опираясь на понятие псевдообратного оператора в евклидовых пространствах, получим теперь характеризацию решений уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Для разрешимости уравнения*

$$Au = f, \quad u \in R_n, \quad f \in R_m \tag{2.1'}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(I - AA^+) f = 0. \tag{2.17}$$

При этом любое решение (2.1′) *представимо в виде*

$$u = A^+f + (I - A^+A) z \tag{2.18}$$

для некоторого $z \in R_n$, а слагаемые A^+f и $(I - A^+A)z$ ортогональны. Для любого $f \in R_m$ справедливо

$$\inf \{\| Au - f \|_{R_m} : u \in R_n\} = \| (I - AA^+) f \|_{R_m}, \tag{2.19}$$

причем точная нижняя грань в (2.19) достигается при любом и вида (2.18).

Доказательство. Если u — решение (2.1′), то $f \in \mathcal{R}(A)$ и $AA^+f = f$, так как AA^+ в силу предложения 2.2 есть ортопроектор R_m на $\mathcal{R}(A)$. Обратно, из (2.17) следует, что $f \in \mathcal{R}(A)$. В случае выполнения (2.17) любой вектор вида (2.18) — решение уравнения (2.1′), поскольку $(I - A^+A) z \in \operatorname{Ker} A$, $AA^+f = f$, по предложению 2.2. Вектор $u_0 = A^+f$ является частным решением (2.17), и для любого решения u уравнения (2.1′) справедливо $u - u_0 \in \operatorname{Ker} A$. Но тогда $u - u_0 = (I - A^+A) z$, при некотором $z \in R_n$. Вектор u_0 ортогонален вектору $(I - A^+A)\,z$, так как $u_0 \in \mathcal{R}(A^*) \perp \operatorname{Ker} A \ni (I - A^+A)\,z$. Наконец, из (2.4) следует, что точная нижняя грань в (2.19) равна $\|f_2\|\ R_m$, где f_2 — ортопроекция f на $\operatorname{Ker} A^*$, т. е. $f_2 = (I - AA^+)\,f$ согласно предложению 2.2. При этом для вектора u вида (2.18) находим $Au = f_1 = AA^+f \in \mathcal{R}(A)$. Поэтому из леммы 2.1 следует, что (2.18) определяет минимум (2.19). Теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим основные свойства псевдообратных операторов. Пусть $A: R_n \to R_m$ — произвольный линейный оператор.

1. $A^+ = (A^*A)^+ A^*$. Действительно, учитывая (2.12) и предложение 2.2, для каждого вектора e_k, $k = 1, \ldots, s$, из базиса, введенного в предложении 2.1, получаем $(A^*A)^+A^*Ae_k = e_k$. Отсюда $\lambda_k^{1/2} (A^*A)^+ \times A^*f_k = \lambda_k^{1/2}\lambda_k^{-1/2}e_k = \lambda_k^{1/2}\ A^+f_j$ в силу (2.16) $\lambda_k > 0$. Поэтому для любого $y \in \mathcal{R}(A)$ находим

$$(A^*A)^+ A^*y = A^+y, \tag{2.20}$$

поскольку $\mathcal{R}(A) = \operatorname{Lin}\{f_1, \ldots, f_s\}$ (см. (2.12)). Если $y \in R_m \ominus \mathcal{R}(A) = \operatorname{Ker} A^*$, то (2.20) очевидно.

2. Если оператор A^*A (или AA^*) невырожден, то $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ (или $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$). Этот факт есть следствие свойства 1 и того, что в случае невырожденности оператора B $B^+ = B^{-1}$.

3. $A^+ = A^*(AA^*)^+$.

4. $(A^*)^+ = (A^+)^*$. Действительно, по второй формуле из (2.16) для любых векторов e_k, f_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, получим $(A^*)^+e_k = \lambda_k^{-1/2} f_k$. С другой стороны, для любого f_j, $j = 1, \ldots, m$,

$$((A^+)^* e_k,\ f_j)_{R_m} = (e_k,\ A^+f_j)_{R_n} = \lambda_j^{-1/2}(e_k,\ e_j)_{R_n} = \lambda_k^{-1/2}\delta_{kj}.$$

Отсюда

$$((A^*)^+ e_k,\ f_j)_{R_m} = \lambda_k^{-\frac{1}{2}} (f_k,\ f_j)_{R_m} = \lambda_k^{-\frac{1}{2}}\delta_{kj} = ((A^+)^* e_k,\ f_j)_{R_m},$$

т. е. $(A^*)^+ e_k = (A^+)^*e_k$, для всех базисных векторов e_k, $k = 1, \ldots, n$, что и требовалось.

5. $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^*)$, $\operatorname{Ker} A^+ = \operatorname{Ker} AA^+ = \operatorname{Ker} A^*$.

6. $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$, $(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+$.

Докажем первое равенство. Учитывая (2.10) и (2.16), получаем для e_k

$$A^+(A^*)^+ e_k = \lambda_k^{-1}e_k = \lambda_k^{-1}(A^*A)^+ A^*Ae_k = (A^*A)^+ e_k, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{2.21}$$

Для $k = s + 1, \ldots, n$ (2.21) очевидно.

7. $A^+AA^+ = A^+$, $A^+AA^* = A^*$ $(AA^+A = A,\ A^*AA^+ = A^*)$.

Это свойство следует из (2.16), (2.11).

8. $(A^+)^+ = A$. Действительно, оператор $A^+ = A^{-1}$ как отображение $\mathcal{R}(A)$ на $\mathcal{R}(A^*)$, и $A^+ = 0$ на $\operatorname{Ker} A^*$. Поэтому $(A^+)^+ = A: \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A)$, $(A^+)^+ = 0$ на $\operatorname{Ker} A$.

9. Если A — самосопряженный неотрицательный оператор в R_n и $\beta > 0$, то $(A^\beta)^+ = (A^+)^\beta$, $A^\beta (A^\beta)^+ = (A^\beta)^+ A^\beta = AA^+$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора A, $A_{x_k} = \eta_k x_k$, $\eta_k \geqslant 0$. Тогда $A^\beta x_k = \eta_k^\beta x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Далее рассуждения аналогичны доказательству свойства 4.

10. Если $A = A^*$, то $AA^+ = A^+A$.

11. Если A, B — операторы из $\mathcal{L}(R_n, R_m)$ и $\mathcal{L}(R_m, R_n)$ соответственно, причем размерности $\dim \mathcal{R}(A)$ и $\dim \mathcal{R}(B)$ подпространств $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$ таковы, что $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(B) = m$, то $(BA)^+ = A^+B^+$.

12. Если линейный оператор C из $\mathcal{L}(R_m, R_m)$ невырожден, то $(CA)^+ CA = A^+A$, для любого оператора A из $\mathcal{L}(R_n, R_m)$. Действительно, в силу предложения 2.2 $(CA)^+ CA$ есть оператор ортогонального проектирования пространства R_n на $\mathcal{R}((CA)^*)$. Однако

$$\mathcal{R}((CA)^*) = \mathcal{R}(A^*C^*) = \mathcal{R}(A^*),$$

откуда следует требуемое равенство. Аналогично устанавливается равенство $AD(AD)^+ = AA^+$ для любого невырожденного оператора $D \in \mathcal{L}(R_n, R_n)$ и $A \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$.

13. Если $A = A^* \geqslant 0$, то $A^+ = (A^+)^* \geqslant 0$. Для $z \in R_m$ пусть $u = A^+z \in R_n$. Тогда

$$0 \leqslant (Au, u) = (AA^+z, A^+z) = (A^+AA^+z, z) = (A^+z, z)$$

в силу свойств 4 и 7, что и требовалось.

14. Если C — самосопряженный невырожденный оператор в R_m, $A \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$, то $(CA)^+ = A^+C^{-1}[I - (PC^{-1})^+ (PC^{-1})]$, где $P = I - AA^+$.

Рассмотрим вопрос решения уравнения (2.1′) при наличии априорной информации о решении. Пусть $u_0 \in R_n$ таков, что

$$Au_0 = f, \quad (Bu_0, u_0)_{R_n} \leqslant 1, \tag{2.22}$$

где $B = B^* \geqslant 0$. На основе информации (2.22) вектор u_0, вообще говоря, найти невозможно. Но возможно определить вектор $u_1 \in R_n$, аппроксимирующий u_0 в минимаксном смысле:

$$\min_x \max_u \{\|u - x\|_{R_n}^2 : Au = f, \quad (u, Bu)_{R_n} \leqslant 1\} \tag{2.23}$$

(см. [4]). Справедлива теорема 2.2.

Теорема 2.2. *Решение u_1 задачи (2.23) имеет вид*

$$u_1 = \{I - [(I - A^+A)] B (I - A^+A)]^+ B (I - A^+A)\} A^+f. \tag{2.24}$$

Доказательство. Все решения уравнения (2.1) имеют вид

$$u = A^+f + Cz, \quad z \in R_n, \quad C \equiv I - A^+A \tag{2.25}$$

в силу (2.18). Подставляя это выражение в (2.23), получаем

$$\min_x \max_z \{\|u - x\|_{R_n}^2 = \| A^+f + Cz - x\|_{R_n}^2 :$$

$$(A^+f + Cz; BA^+f + BCz)_{R_n} \leqslant 1\}.$$

Теперь из геометрических соображений получаем, что вектор $\hat{u}_1$ совпадает с центром n-мерного эллипсоида

$$\{z \in R_n : (A^+f + Cz;\ BA^+f + BCz)_{R_n} = 1\}. \tag{2.26}$$

Отсюда, вычисляя градиент (2.25) и приравнивая его к нулю, находим

$$CBCh = -CBA^+f.$$

Любое решение этого уравнения в силу (2.18) имеет вид

$$h = -(CBC)^+ CBA^+f + [I - (CBC)^+ CBC]\, w, \tag{2.27}$$

где $w \in R_n$ — произвольный вектор. Отмечая, что существует $B^{-1/2}$, находим

$$L \equiv B^{1/2}C\,[I - (CBC)^+ (CBC)] = U^*\,[I - (UU^*)^+ (UU^*)],$$

где $U = CB^{1/2}$. Поэтому

$$L = U^*\,[I - (U^*)^+ U^*] = U^* - U^* (U^*)^+ U^* = U^* - U^* = 0$$

или

$$B^{-1/2}L = C\,[I - (CBC)^+ CBC] = 0. \tag{2.28}$$

Сравнивая (2.28) с (2.25) и (2.27), получаем (2.24). Теорема 2.2 доказана.

В линейном пространстве $\mathcal{L}(R_n, R_m)$ всех линейных отображений R_n в R_m введем скалярное произведение следующим образом. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^n$ и $\{h_j\}_{j=1}^m$ — некоторые ортонормированные базисы в R_n и R_m соответственно, $A, B \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$. Положим, по определению,

$$(A, B) = \sum_{k=1}^{n} (Ag_k, Bg_k)_{R_m} = \text{след}\, B^*A =$$

$$= \sum_{k,j} (Ag_k, h_j)_{R_m} (Bg_k, h_j)_{R_m} = \sum_{j=1}^{m} (A^*h_j, B^*h_j)_{R_n} =$$

$$= \text{след}\, BA^* = (A^*, B^*). \tag{2.29}$$

Норма $\| A \|_2$ оператора A равна $(A, A)^{1/2}$ и называется абсолютной (или гильбертовой). Из (2.29) следует, что (A, B) не зависят от выбора базисов $\{g_k\}_{k=1}^n$, $\{h_i\}_{j=1}^m$. Сравним норму $\| A \|_2$ с обычной операторной нормой $\| A \| = \sup \{\| Ax \|_{R_m} : x \in R_n, \| x \|_{R_n} = 1\}$. Поскольку $\| Ag_1 \|^2 \leqslant \| A \|_2^2$, что видно из (2.29), и в качестве единичного вектора $g_1 \in R_n$ можно взять любой единичный вектор (дополнив его затем до ортонормированного базиса в R_n), то справедливо

$$\| A \| \leqslant \| A \|_2, \quad \forall A \in \mathcal{L}(R_n, R_m). \tag{2.30}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$, $B \in \mathcal{L}(R_n, R_l)$, $C \in \mathcal{L}(R_m, R_l)$. *Тогда матричное уравнение*

$$CA = B \tag{2.31}$$

разрешимо относительно оператора C *тогда и только тогда, когда*

$$B(I - A^+A) = 0$$

Любое решение (2.30) имеет вид

$$C = BA^{+} + Y(I - AA^{+}), \tag{2.32}$$

где $Y \in \mathscr{L}(R_m, R_l)$ — некоторый оператор. Слагаемые в (2.31) ортогональны (относительно скалярного произведения (2.29)), и решение $C_0 = BA^{+}$ имеет минимальную норму $\|\cdot\|_2$.

Доказательство. Перепишем уравнение (2.31) в виде

$$A^*C^*z = B^*z, \quad \forall z \in R_l. \tag{2.33}$$

Это векторное уравнение разрешимо относительно вектора C^*z тогда и только тогда, когда

$$A^*(A^*)^{+} B^*z = B^*z, \quad \forall z \in R_l, \tag{2.34}$$

в силу теоремы 2.1. Но z произвольно, и (2.34) эквивалентно условию

$$A^*(A^*)^{+} B^* = B^*. \tag{2.35}$$

Любое решение (2.33) представимо в виде

$$C^*z = (A^*)^{+} B^*z + (I - (A^*)^{+} A^*)\, y, \quad y \in R_m,$$

в силу (2.18). Отсюда, учитывая произвольность z, полагая $y = Y^*z$, $Y^* \in \mathscr{L}(R_l, R_m)$ и применяя операцию сопряжения, получаем (2.32). При этом

$$(BA^{+},\ Y(I - AA^{+})) = ((A^*)^{+} B^*,\ (I - (A^*)^{+} A^*)\, Y^*) =$$
$$= (B^*,\ A^{+}(I - (A^*)^{+} A^*)\, Y^*) = 0,$$

т. е. BA^{+} ортогонально $Y(I_{R_m} - AA^{+})$ (в смысле 2.29). Поэтому

$$\|C_0\|_2^2 = \|BA^{+}\|_2^2 \leqslant \|BA^{+}\|_2^2 + \|Y(I_{R_m} - AA^{+})\|_2^2 = \|C\|_2^2,$$

где C имеет вид (2.32), что и требовалось.

Следствие. а. Для разрешимости операторного уравнения

$$GDC = A, \quad A \in \mathscr{L}(R_n, R_m), \quad C \in \mathscr{L}(R_n, R_l), \quad G \in \mathscr{L}(R_k, R_m) \tag{2.36}$$

относительно $D \in \mathscr{L}(R_l, R_k)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} A(I - C^{+}C) = 0, & (2.37) \\ (I - GG^{+})\, A = 0. & (2.38) \end{cases}$$

Любое решение (2.36) имеет вид

$$D = G^{+}AC^{+} + G^{+}Y_1(I_{R_l} - CC^{+}) + (I - G^{+}G)\, Y_2, \tag{2.39}$$

где Y_1, Y_2 — произвольные операторы в соответствующих линейных евклидовых пространствах. Причем все слагаемые в (2.39) взаимно ортогональны (в смысле (2.29)).

б. При любом операторе A

$$\inf_D \|GDC - A\|_2 = \|(I - GG^{+})\, A\, (I - C^{+}C) - (I - GG^{+})\, A -$$
$$- A(I - C^{+}C)\|_2,$$

причем нижняя грань достигается на любом операторе D вида (2.39), среди которых $D_0 = G^+AC^+$ имеет наименьшую норму $\| \cdot \|_2$.

Доказательство. а. Из теоремы 2.1 следует, что разрешимость (2.36) относительно GD имеет место лишь в случае, когда $A = (I - C^+C) = 0$. В то же время уравнение

$$GD = AC^+ + Y_1(I_{R_l} - CC^+)) \tag{2.40}$$

разрешимо относительно D лишь тогда, когда

$$Z \equiv (I - GG^+)(AC^+ + Y_1(I - CC^+)) = 0.$$

Положим здесь $Y_1 = AC^+$. Тогда $AC^+ (I_{R_l} - CC^+) = 0$, так как $C^+CC^+ = C^+$ в силу свойства 7 псевдообратных операторов. Поэтому

$$0 = (I - GG^+)AC^+ = (I - GG^+)AC^+C = (I - GG^+)A$$

на основании уже установленного (2.37). Итак, (2.38) доказано. Решение уравнения (2.40) имеет вид

$$D = G^+AC^+ + G^+Y_1(I - CC^+) + (I - G^+G)Y_2,$$

где $Y_2 \in \mathcal{L}(R_l, R_k)$, что эквивалентно (2.39). Причем

$$(G^+AC^+,\ G^+Y_1(I - CC^+)) = (G^+A(C^*C)^+C^*,$$

$$G^+Y_1(I - CC^+)) = (G^+A(C^*C)^+,\ G^+Y_1(C - CC^+C)) = 0.$$

Аналогично показывается взаимная ортогональность других слагаемых в (2.39).

б. Докажем вначале, что уравнение

$$G^*GDCC^* = G^*AC^* \tag{2.41}$$

имеет решение D при любых операторах $A \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$, $C \in \mathcal{L}(R_n, R_l)$, $G \in \mathcal{L}(R_k, R_m)$. Действительно, проверяя (2.37), (2.38), находим

$$G^*AC^*(CC^*)^+CC^* = G^*AC^+CC^*.$$

Но для любого $z \in R_l$ $C^*z \in \mathcal{R}(C^*) \subset R_n$, а оператор C отображает $\mathcal{R}(C^*)$ на $\mathcal{R}(C) \subset R_l$ взаимно-однозначно, т. е. существует $C^{-1}: \mathcal{R}(C) \to \mathcal{R}(C^*)$ и $C^{-1} = C^+$, как показано выше. Значит,

$$G^*AC^*(CC^*)^+CC^* = G^*AC^*.$$

Аналогично проверяется справедливость (2.38) для уравнения (2.41). Далее, $(GDC - GG^+AC^+C;\ GG^+AC^+C - A) = (D - G^+AC^+;\ (G^*G) \times G^+AC^+(CC^*) - G^*AC^*)$. Отсюда, учитывая, что решение (2.41)

$$D = (G^*G)^+ G^*AC^* (CC^*)^+ = G^+AC^+,$$

получаем

$$(GDC - GG^+AC^+C;\ GG^+AC^+C - A) = 0.$$

Поэтому

$$\|GDC - A\|_2^2 = \|GDC - GG^+AC^+C\|_2^2 + \|GG^+AG^+C - A\|_2^2 =$$

$$= \| GDC - GG^+AC^+C \|_2^2 + \| (I - GG^+) A (I - C^+C) -$$
$$- (I - GG^+) A - A (I - C^+C) \|_2^2.$$

Из данного равенства видно, что нижняя грань для $\| GDC - A \|_2$ достигается при $D_0 = G^+AC^+$ и равна второму слагаемому, что и требовалось доказать.

Заметим, что условия (2.37), (2.38) разрешимости (2.36) представимы в виде

$$GG^+AC^+C = A. \tag{2.42}$$

Результат следствия к лемме 2.3 применим, в частности, к восстановлению корреляционных матриц шумов в задаче оценивания [90, с. 207, система (2.25)].

Рассмотрим теперь случай неточного задания $\{A, f\}$ в (2.1′). Нормальное псевдорешение $u = A^+f$, по определению, назовем устойчивым при $A = A_0$, $f = f_0$, если $u = A^+f$ как функция от $A \in \mathscr{L}(R_n, R_m)$, $f \in R_m$, определенная на $\mathscr{L}(R_n, R_m) \otimes R_m$ со значениями в R_n, непрерывна в точке $\{A_0, f_0\}$. Если устойчивости нет, то получаемое нормальное псевдорешение затруднительно использовать на практике, поскольку возможно сильное отклонение от истинного значения. Рассмотрим подход к изучению устойчивости, предложенный в [119].

Если $A = A_0$ фиксировано, то вектор u непрерывно зависит от f. Изучим зависимость вектора u от оператора A. Пусть A и A_0 имеют одни и те же ортонормированные базисы $\{e_k\}$ и $\{f_j\}$, введенные в предложении (2.2), но различные числа $\{\lambda_k^{1/2}\}$ и $\{\lambda_{0k}^{1/2}\}$. Если $\lambda_k > 0$, а $\lambda_{0k} = 0$ при некотором номере k, то по (2.16) при $f = f_k$ имеем $u = A^+f = \lambda_k^{-1/2}e_k$, а $u_0 = A_0^+f = 0$. Заметим, что по условию $\| A - A_0 \| \to 0$. Отсюда $| \lambda_k - \lambda_{0k} | \to 0$, $k = 1, \ldots, m$, и поэтому $\| u - u_0 \|_{R_n} = \lambda_k^{-1/2} \to +\infty$.

Предложение 2.3. Пусть $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}(R_n, R_m)$ — множество невырожденных линейных операторов. Тогда $F(A) = A^{-1}$ — непрерывное отображение $\mathscr{L}_0$ в $\mathscr{L}(R_n, R_m)$.

Доказательство. Пусть $A_0, A_0 \in \mathscr{L}$, $\gamma = \| (A - A_0) A_0^{-1} \| < 1$. Тогда

$$A^{-1} - A_0^{-1} = (A_0 + A - A_0)^{-1} - A_0^{-1} = A_0^{-1} ((I - (A - A_0) A_0^{-1})^{-1} - I) =$$
$$= - A_0^{-1} (A - A_0) A_0^{-1} (I + (A - A_0) A_0^{-1})^{-1} =$$
$$= - A_0^{-1} (A - A_0) A_0^{-1} (I - (A - A_0) A_0^{-1} + ((A - A_0) A_0^{-1})^2 - \cdots).$$

Отсюда

$$\| A^{-1} - A_0^{-1} \| \leqslant \| A_0^{-1} \| \gamma (1 - \gamma) \to 0$$

при $\| A - A_0 \| \to 0$, что и требовалось показать.

Предложение 2.4. При невырожденном операторе A решение $u = A^{-1}f$ уравнения (2.1) является непрерывной функцией от $\{A, f\}$, т. е. устойчиво.

Доказательство. Пусть $u_0 = A_0^{-1} f_0$ точное решение (2.1). Тогда $\| u - u_0 \|_{R_n} \leqslant \| A^{-1} \| \| f - f_0 \|_{R_m} + \| A^{-1} - A_0^{-1} \| \| f_0 \|_{R_m}$ и $\| A^{-1} \| \leqslant \| A^{-1} -$

$-A_0^{-1}\| + \|A_0^{-1}\|$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ пару $\{A, f\}$ можно выбрать так, чтобы

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f_0\|_{R_m}} \text{ и } \|f - f_0\|_{R_m} \leqslant \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\|f_0\|_{R_m}} + 2\|A_0^{-1}\|\right)^{-1}.$$

Отсюда $\|u - u_0\|_{R_m} \leqslant \varepsilon$. Если же $f_0 = 0$, то выбираем $\{A, f\}$ из условия, чтобы $\|A^{-1}\|\|f\|_{R_m} \leqslant \varepsilon$.

В общем случае для нахождения приближенного нормального решения используются методы теории регуляризации (см. [89, гл. II], [143, 144]).

Лемма 2.4. *Пусть* $B \in \mathscr{L}(R_n, R_n)$ — *положительно определенный оператор. Тогда для любого* $\alpha > 0$ *имеем*

$$(B + \alpha I)^{-1} = \alpha^{-1}(I - B^+B) + B^+(I + \alpha B^+)^{-1}. \tag{2.43}$$

Доказательство. В силу положительной определенности B операторы $B + \alpha I$ и $\alpha B^+ + I$ обратимы, так как $B^+ \geqslant 0$. Из самосопряженности оператора B следует $B^+B = BB^+$, откуда получаем тождество

$$I + \alpha B^+ = (\alpha I + B)\alpha^{-1}(I - B^+B)(I + \alpha B^+) + (\alpha I + B)B^+$$

эквивалентное (2.43).

Лемма 2.5. а. *Для любых* $A \in \mathscr{L}(R_n, R_m)$ и $\alpha > 0$ *справедливы неравенства*

$$\|A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}\| \leqslant \|A^+\|, \tag{2.44}$$

$$\|(AA^* + \alpha I)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1}, \quad \|A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1/2}, \tag{2.45}$$

$$\|A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}A\| = \|A^*A(A^*A + \alpha I)^{-1}\| \leqslant 1, \tag{2.46}$$

причем (2.45) и (2.46) выполняются равномерно по A.

б. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant \lambda_p = \min\{\lambda_k(A) > 0\}$. *Тогда*

$$\|A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}\| = \lambda_p^{1/2}(\lambda_p + \alpha)^{-1}. \tag{2.47}$$

Доказательство. а. Пусть $Q \equiv AA^* + \alpha I$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\|Q^{1/2}f\|_{R_m}^2 = (Qf, f)_{R_m} = \|A^*f\|_{R_n}^2 + \alpha\|f\|_{R_m}^2, \quad f \in R_m.$$

Отсюда

$$\|A^*f\|_{R_n} \leqslant \|Q^{1/2}f\|_{R_m}, \quad \|f\|_{R_m} \leqslant \|Q^{1/2}f\|_{R_m}\alpha^{-1/2}.$$

Положив $f = Q^{-1/2}g$, $g \in R_m$, получим

$$\|A^*Q^{-1/2}\| \leqslant 1, \quad \|Q^{-1/2}\| \leqslant \alpha^{-1/2}.$$

Откуда вытекают неравенства (2.45) и (2.46), поскольку

$$\|A^*Q^{-1}\| \leqslant \|A^*Q^{-1/2}\|\|Q^{-1/2}\|, \quad A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}A = $$
$$= A^*Q^{-1/2}(A^*Q^{-1/2})^*, \quad Q^{-1}A = A(A^*A + \alpha I)^{-1}.$$

По лемме 2.4

$$A^*Q^{-1} = A^*(AA^*)^+(I+\alpha(AA^*)^+)^{-1} = A^+(I+\alpha(AA^*)^+)^{-1}.$$

Из (2.45), (2.46) вытекает, что

$$\|(I+\alpha(AA^*)^+)^{-1}\| = \|(I+\alpha(A^+)^*A^+)^{-1}\| \leqslant 1.$$

Отсюда следует (2.44).

б. Введем в R_m ортонормированный базис $\{f_j\}_{j=1}^m$ из предложения 2.1. Если $f = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j$, то, учитывая доказательство леммы 2.2, находим

$$\|A^*Q^{-1}\|^2 = \sup\{\|A^*Q^{-1}f\|^2 : f\in R_m, \|f\|_{R_m'} = 1\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j+\alpha)^2}\eta_j^2 : \sum_{j=1}^{n}\eta_j^2 = 1\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{\lambda_k}{(\lambda_k+\alpha)^2} : \lambda_k > 0\right\} = \frac{\lambda_p}{(\lambda_p+\alpha)^2}.$$

Последнее равенство верно в силу того, что $0<\alpha\leqslant\lambda_p$.

Теорема 2.3. *Пусть $\{A, f\}$ точные данные задачи (2.1′), а $\{A_h, f_\delta\}$ — приближенные, $\alpha = \max(h, \delta) > 0$. Если*

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\|A_\alpha - A\|}{\alpha} + \|f_\alpha - f\|_{R_m}\right) = 0, \tag{2.48}$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^*(A_\alpha A_\alpha^* + \alpha I)^{-1} f_\alpha = A^+f. \tag{2.49}$$

Если $f\in\mathcal{R}(A)$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\|A_\alpha - A\|}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\|A_\alpha - A\|\|f_\alpha - f\|}{\alpha} + \|f_\alpha - f\|\right) = 0,$$

то (2.49) верно для всех $f\in\mathcal{R}(A)$.

Доказательство. Обозначим $Q\equiv AA^*+\alpha I$, $Q_\alpha \doteq A_\alpha A_\alpha^* + \alpha I$, $R\equiv A_\alpha^*Q_\alpha^{-1} - A^*Q^{-1} = (A_\alpha^* - A^*)Q^{-1} + A_\alpha^*(Q_\alpha^{-1} - Q^{-1})$.

Поскольку

$$Q_\alpha^{-1} - Q^{-1} = Q_\alpha^{-1}(Q-Q_\alpha)Q^{-1} = Q_\alpha^{-1}(A_\alpha(A^*-A_\alpha^*) + (A-A_\alpha)A^*)Q^{-1},$$

то

$$\|R\|\leqslant\|Q^{-1}\|\|A_\alpha^* - A^*\| + \|A_\alpha^*Q_\alpha^{-1}A_\alpha\|\|A^* -$$

$$- A_\alpha^*\|\|Q^{-1}\| + \|A_\alpha Q_\alpha^{-1}\|\|A - A_\alpha\|\|A^*Q^{-1}\|,$$

откуда в силу леммы 2.5 следует

$$\|R\|\leqslant(2+\|A^+\|\alpha^{\frac{1}{2}})\|A_\alpha - A\|\alpha^{-1}. \tag{2.50}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|RAA^+\|\leqslant 3\|A^+\|\|A_\alpha - A\|\alpha^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.51}$$

При этом

$$\| A_\alpha^* Q_\alpha^{-1} (f_\alpha - f) \|_{R_n} \leqslant (\| A^+ \| + \| R \|) \| f_\alpha - f \|_{R_m}, \qquad (2.52)$$

так как $A_\alpha^* Q_\alpha^{-1} = R + A^* Q^{-1}$. Поэтому для $f \in R_m$, учитывая (2.50), (2.52) и (2.48), получаем при $\alpha \to 0$

$$\xi_\alpha \equiv \| A_\alpha^* Q_\alpha^{-1} f_\alpha - A^* Q^{-1} f \|_{R_n} = \| (A_\alpha^* Q_\alpha^{-1} - A^* Q^{-1}) f +$$

$$+ A_\alpha^* Q_\alpha^{-1} (f_\alpha - f) \| \leqslant \| R \| \| f \|_{R_m} + (\| A^+ \| + \| R \|) \| f_\alpha - f \|_{R_m} \to 0. \qquad (2.53)$$

Отсюда вытекает (2.49). Если $f \in \mathcal{R}(A)$, то $f = AA^+ f$; откуда на основании (2.51) получаем при $\alpha \to 0$

$$\xi_\alpha \leqslant \| RAA^+ \| \| f \|_{R_m} + (\| R \| + \| A^+ \|) \| f_\alpha - f \|_{R_m} \to 0, \qquad (2.54)$$

что и требовалось.

Доказанная теорема 2.3 лежит в основе построения эффективных методов приближенного нахождения псевдорешений линейных векторных уравнений и экстремальных задач на основе неточных априорных данных [119]. Пусть известно, что $f_0 \in \mathcal{R}(A_0)$, и требуется найти приближение к нормальному решению $x_0 = A_0^+ f_0$ уравнения (2.1′), если заданы приближенные значения f_δ, A_h, $\| f_\delta - f_0 \|_{R_m} \leqslant \delta$, $\| A_h - A_0 \| \leqslant h$. Введем функцию $\alpha = \alpha(h, \delta)$, $h > 0$, $\delta > 0$, так, чтобы

$$\lim_{(\varepsilon, \delta) \to 0} \left(\frac{h}{\sqrt{\alpha(h, \delta)}} + \frac{h\delta}{\alpha(h, \delta)} \right) = 0.$$

Тогда в силу теоремы 2.3 получаем

$$\lim_{(h, \delta) \to 0} A_h^* (A_h A_h^* + \alpha(f, \delta) I)^{-1} f_\delta = A_0^+ f_0.$$

Поэтому вектор $u_{h\delta} = R_{h\delta} f_\delta \equiv A_h^* (A_h A_h^* + \alpha(h, \delta) I)^{-1} f_\delta$ естественно считать приближенным решением задачи (2.1′) при $A = A_0$, $f = f_0$. Согласно теории регуляризации А. Н. Тихонова оператор $R_{h,\delta}$ — регуляризующий для уравнения (2.1′). В случае, когда $f_0 \notin \mathcal{R}(A_0)$, выбирая функцию $\alpha(h, \delta) > 0$ при $h > 0$, $\delta > 0$, так, чтобы

$$\lim_{(h, \delta) \to 0} \frac{h}{\alpha(h, \delta)} = 0,$$

получаем $\lim\limits_{(h, \delta) \to 0} R_{h_\delta} f_\delta = A_0^+ f_0$. Значит, и в этом случае вектор $u_{h\delta}$ есть искомое приближение к u_0.

Рассмотренная методика отыскания приближений к нормальному решению задачи (2.1′) позволяет найти оценку точности полученных приближений. Действительно,

$$\eta \equiv \| A_\alpha^* (A_\alpha A_\alpha^* + \alpha I)^{-1} f_\alpha - A^+ f \| \leqslant \xi_\alpha + \| A^* (AA^* + \alpha I)^{-1} f - A^+ f \|. \qquad (2.55)$$

Поскольку $A^* (I - (AA^*)^+ AA^*) = A^* - A^+ AA^* = A^* - A^* = 0$, то согласно лемме 2.4

$$A^*(AA^*+\alpha I)^{-1}-A^+=A^+[(I+\alpha(AA^*)^+)^{-1}-I]=$$
$$=-\alpha A^+(AA^*)^+(I+\alpha(AA^*)^+)^{-1}.$$

Откуда, учитывая лемму 2.5, получаем

$$\|A^*(AA^*+\alpha I)^{-1}-A^+\|\leqslant\alpha\|A^+(AA^*)^+\|\leqslant\alpha\|A^+\|^3.$$

Поэтому согласно (2.53), (2.50) и (2.55) имеем

$$\eta\leqslant\|R\|(\|f\|_{R_m}+\|f_\alpha-f\|_{R_m})+\|A^+\|\|f_\alpha-f\|_{R_m}+$$
$$+\alpha\|A^+\|^3\|f\|_{R_m}\leqslant\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{M_1}{\sqrt{\alpha}}\right)(M_2+\delta)h+M_1\delta+\alpha M_1^3M_2\equiv\Delta, \tag{2.56}$$

где $\|A^+\|\leqslant M_1$, $\|f\|_{R_m}\leqslant M_2$, $\|f_\alpha-f\|_{R_m}\leqslant\delta$, $\|A_\alpha-A\|\leqslant h$. Функцию $\alpha=\alpha(h,\ \delta,\ M_1,\ M_2)$ можно найти из (2.56), используя дополнительное условие

$$\min\{\Delta:h>0\}=\Delta(\alpha(h,\ \delta,\ M_1,\ M_2),\ h,\ \delta,\ M_1,\ M_2).$$

Если $\delta\ll M_1$, то функцию α можно выбирать не зависящей от δ, h и M_2. Действительно, в этом случае

$$\Delta\cong(h(2+M_1\alpha^{1/2})\alpha^{-1}+\alpha M_1^3)M_2,$$

и поэтому оптимальное значение α находят из условия

$$\min_{\alpha>0}(h(2+M_1\alpha^{1/2})\alpha^{-1}+\alpha M_1^3). \tag{2.57}$$

Если кроме того $hM_1\ll 1$, то

$$\alpha=\alpha(h,\ M_1)\cong\sqrt{\frac{2h}{M_1^3}}. \tag{2.58}$$

При рассмотрении задачи решения матричных уравнений типа (2.31) или (2.36) и неточном задании априорной информации имеет место теорема 2.4.

Теорема 2.4. *Пусть* C_α, $C\in\mathscr{L}(R_n,\ R_l)$, A, $A_\alpha\in\mathscr{L}(R_n,\ R_m)$, G, $G_\alpha\in\mathscr{L}(R_k;\ R_m)$, $D\in\mathscr{L}(R_l,\ R_k)$, $\alpha>0$, $c_\alpha=\|C_\alpha-C\|$, $g_\alpha=\|G_\alpha-G\|$, $a_\alpha=\|A_\alpha-A\|$.

Если

$$\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{a_\alpha}{\alpha}+\frac{c_\alpha}{\alpha^{3/2}}+\frac{g_\alpha}{\alpha}\right)=0, \tag{2.59}$$

то для любого $A\in\mathscr{L}(R_n,\ R_m)$ *справедливо*

$$\lim_{\alpha\to0}G_\alpha^*(G_\alpha G_\alpha^*+\alpha I)^{-1}A_\alpha(C_\alpha^*C_\alpha+\alpha I)^{-1}C_\alpha^*=G^*AC^+. \tag{2.60}$$

Если

$$\lim_{\alpha\to0}\left[\frac{c_\alpha+g_\alpha}{\alpha^{1/2}}+a_\alpha\left(1+\frac{c_\alpha+g_\alpha}{\alpha}+\frac{g_\alpha c_\alpha}{\alpha^2}\right)\right]=0, \tag{2.61}$$

то (2.60) *справедливо для операторов A, удовлетворяющих условиям*

$$(I-GG^+)A=0, \quad A(I-C^+C)=0.$$

Доказательство. Положим $Z_\alpha=G_\alpha G_\alpha^*+\alpha I$, $U_\alpha=C_\alpha^*C_\alpha+$ $+\alpha I$ при $\alpha>0$. Оценим норму разности

$$W_\alpha\equiv G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}A_\alpha U_\alpha^{-1}C_\alpha^*-G^*Z^{-1}AU^{-1}C^*=G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}(A_\alpha-A)U_\alpha^{-1}C_\alpha^*+$$
$$+G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}AU_\alpha^{-1}C_\alpha^*-G^*Z^{-1}AU^{-1}C^*\equiv X+Y-V. \qquad (2.62)$$

С этой целью введем вспомогательные выражения

$$H_\alpha\equiv U_\alpha^{-1}C_\alpha^*-U^{-1}C^*, \quad T_\alpha\equiv G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}-G^*Z^{-1}.$$

Заметим, что

$$H_\alpha=U^{-1}(C_\alpha^*-C^*)+U^{-1}(C^*C+\alpha I)U_\alpha^{-1}C_\alpha^*-$$
$$-U^{-1}(C_\alpha^*C_\alpha+\alpha I)U_\alpha^{-1}C_\alpha^*=U^{-1}(C_\alpha^*-C)+U^{-1}(C^*(C-C_\alpha)+$$
$$+(C^*-C_\alpha^*)C_\alpha)U_\alpha^{-1}C_\alpha^*,$$
$$T_\alpha=(G_\alpha^*-G)Z^{-1}+G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}(G_\alpha(G^*-G_\alpha^*)+(G-G_\alpha)G^*)Z^{-1}.$$

Поэтому справедливы оценки

$$\|H_\alpha\|\leqslant\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\|C^+\|}{\alpha^{1/2}}\right)c_\alpha, \quad \|T_\alpha\|\leqslant\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\|G^+\|}{\alpha^{1/2}}\right)g_\alpha, \qquad (2.63)$$

получаемые аналогично (2.50). Отсюда

$$\|C^+CH_\alpha\|\leqslant(\|C^+\|^2+2\|C^+\|\alpha^{1/2})c_\alpha\alpha^{-1},$$

$$\|T_\alpha GG^+\|\leqslant\frac{3\|G^+\|}{\alpha^{1/2}}g_\alpha.$$

Учитывая (2.45) и (2.63), находим

$$\|Y-V\|=\|T_\alpha AU^{-1}C^*+G_\alpha^*Z_\alpha^{-1}AH_\alpha\|\leqslant$$
$$\leqslant K_1g_\alpha\alpha^{-1}+K_2c_\alpha\alpha^{-3/2}\to 0, \quad \alpha\to 0,$$

где K_1, K_2 — конечные постоянные, $\|X\|=\|(G^*Z^{-1}+T_\alpha)(A_\alpha-A)\times$ $\times(U^{-1}C^*+H_\alpha)\|\leqslant a_\alpha(\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}K_3g_\alpha)(\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}K_4c_\alpha)\to 0$, $\alpha\to 0$. Таким образом, $\|W_\alpha\|\to 0$ при $\alpha\to 0$. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично с использованием неравенства (2.63).

Для вычисления псевдообратных конечномерных операторов удобно применять рекуррентный алгоритм Е. Л. Жуковского, Р. Ш. Липцера [46].

Бесконечномерный случай. Пусть линейный оператор A действует из линейного многообразия $\mathcal{D}(A)\subseteq H$ в F, где H, F — (бесконечномерные) гильбертовы пространства. По аналогии с конечномерным случаем вектор $u\in H$ называется среднеквадратичным решением уравнения (2.1), если

$$\inf\{\|Ax-f\|_F: x\in\mathcal{D}(A)\}=\|Au-f\|_F.$$

Если множество U_f всех среднеквадратичных решений (2.1) при заданном $f \in F$ имеет элемент u_0 с наименьшей нормой, то u_0 называется псевдорешением уравнения (2.1).

Для нахождения среднеквадратичного решения нужно решить экстремальную задачу

$$\inf \{\| y - f \|_F^2 : y \in \mathcal{R}(A)\}, \tag{2.64}$$

где $\mathcal{R}(A)$ — область значений оператора A в гильбертовом пространстве F. Если S — подпространство в гильбертовом пространстве, то обозначим P_S — ортопроектор на S. Пусть $\overline{\mathcal{R}(A)}$ — замыкание линейного многообразия $\mathcal{R}(A)$ в F. Тогда (2.64) имеет решение в том и только в том случае, когда $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} f \in \mathcal{R}(A)$ или, что эквивалентно,

$$f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}, \tag{2.65}$$

где $\mathcal{R}(A)^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{R}(A)$. Действительно, пусть вектор f имеет вид

$$f = f_1 + f_2, \tag{2.66}$$

где $f_1 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, $f_2 \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$. Тогда для любого $y \in \mathcal{R}(A)$ справедливо

$$\| y - f \|_E^2 = \| y - f_1 \|_F^2 + \| f_2 \|_F^2. \tag{2.67}$$

Поэтому точная нижняя грань в (2.64) достигается на элементе $y_0 = f_1$. Пусть теперь задача (2.64) имеет решение в $\mathcal{R}(A)$ (которое в силу строгой выпуклости функционала в (2.64) единственно). Предположим, что в разложении (2.66) вектор f_1 принадлежит $\overline{\mathcal{R}(A)} \setminus \mathcal{R}(A)$. Однако в силу (2.67) для любого $y \in \mathcal{R}(A)$ можно выбрать $g \in \mathcal{R}(A)$ такой, что

$$\| g - f_1 \|_F^2 < \frac{\| y - f_1 \|_F^2}{2}.$$

Поэтому функционал (2.67) не достигает точной нижней грани в $\mathcal{R}(A)$, что противоречит исходному предположению.

Итак, при выполнении условия (2.65) множество U_f не пустое. Заметим, что $U_f = u_0 + \operatorname{Ker} A$, т. е. U_f — линейное многообразие, параллельное ядру $\operatorname{Ker} A = \{x \in H : Ax = 0\}$ оператора A, где $Au_0 = f_1$. Пусть вектор u_0 ортогонален линейному многообразию $\operatorname{Ker} A$, т. е.

$$u_0 \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}. \tag{2.68}$$

Тогда u_0 — псевдорешение уравнения (2.1), поскольку для любого $u \in U_f$

$$\| u_0 \|_H^2 \leqslant \| u \|_H^2 = \| u_0 \|_H^2 + \| h \|_H^2,$$

где $h \in \operatorname{Ker} A$. Обратно, если существует псевдорешение уравнения (2.1), то оно единственно (в силу строгой выпуклости $\| u \|_H^2$) и, кроме того, удовлетворяет (2.68). Действительно, пусть u_0 — псевдорешение, однако существует вектор h из $\operatorname{Ker} A$ такой, что $(u_0, h)_H \neq 0$. Вводя вектор

$$u_1 = u_0 - \frac{(u_0, h)_H}{\|h\|_H^2} h \in U_f,$$

получаем

$$\|u_1\|_H^2 = \|u_0\|_H^2 - \frac{(u_0, h)_H^2}{\|h\|_H^2} < \|u_0\|_H^2.$$

Последнее же противоречит тому, что u_0 — псевдорешение. Таким образом, установлена лемма.

Лемма 2.6. *Пусть A — произвольный линейный оператор, отображающий линейное многообразие $\mathcal{D}(A)$ из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F. Тогда уравнение (2.1) имеет псевдорешение в том и только в том случае, когда*

$$f \in A(\mathcal{D}(A) \cap (\operatorname{Ker} A)^{\perp}) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}. \tag{2.69}$$

Пусть теперь оператор A замкнут и имеет плотную в H область определения $\mathcal{D}(A)$. В частности, A может быть непрерывным оператором. Тогда ядро $\operatorname{Ker} A$ — замкнутое в H подмножество, и поэтому (2.69) сводится к условию

$$f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}. \tag{2.70}$$

Лемма 2.7. *Если оператор A замкнут и имеет плотную в H область определения $\mathcal{D}(A)$, то псевдорешение уравнения (2.1) существует и единственно тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию (2.70). Необходимые и достаточные условия существования псевдорешения могут быть записаны в виде*

$$Au_0 = f, \quad f = f_1 + f_2, \quad A^* f_2 = 0, \quad u_0 = \lim_{n\to\infty} A^* y_n, \tag{2.71}$$

где A^* — сопряженный к A оператор; сходимость $\{A^* y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к u_0 — сильная; f_1, f_2 и y_n — некоторые элементы из F.

Доказательство следует из леммы 2.6 и того факта, что

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}, \quad \overline{\mathcal{R}(A^*)} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}. \tag{2.72}$$

(Напомним, что черта сверху и знак «$\perp$» означают соответственно замыкание множества и ортогональное дополнение.)

Зададим линейное отображение A^+, ставящее каждому f, удовлетворяющему (2.70), псевдорешение уравнения (2.1). Оператор A^+ называется обобщенным обратным или псевдообратным оператором к A.

Теорема 2.5. *Пусть A — замкнутый оператор с плотной в H областью определения. Тогда*

1. Оператор A^+ всегда существует, единственный, имеет область определения $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$ и замыкание образа $\overline{\mathcal{R}(A^+)} = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

2. A^+ — линейный замкнутый оператор с плотной в F областью определения $\mathcal{D}(A^+)$.

3. A^+ — ограниченный оператор тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из леммы 2.7 и второго из соотношений (2.72). Докажем утверждение 2.

Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2.70) и сходится в F к f_0, а $u_n = A^+ f_n$ сходится к u_0 в H. Тогда

$$Au_n = f_n^{(1)}, \quad f_n^{(1)} \in \mathcal{R}(A), \quad f_n - f_n^{(1)} = f_n^{(2)} \in \operatorname{Ker} A^*.$$

Причем последовательность $\{f_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторому вектору f_1 в F. В силу замкнутости A получаем $A\, u_0 = f_1$. Но

$$f_0 - f_1 \in \operatorname{Ker} A^* = \mathcal{R}(A)^{\perp}.$$

Поэтому u_0 — псевдорешение (2.1) для $f \equiv f_0$, т. е. $u_0 = A^+ f_0$. Итак, A^+ — замкнутый оператор. Плотность $\mathcal{D}(A^+)$ в F следует из того, что $F = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$.

Если $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A)$, то $\mathcal{D}(A^+) = F$ в силу приведенной выше формулы. Поэтому A^+ — непрерывен, так как замкнут согласно теореме о замкнутом графике. Утверждение, обратное утверждению 3, получаем, учитывая, что

$$\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp} = F.$$

Теорема 2.5 доказана.

На основании пункта 3 доказанной теоремы можно утверждать, что задача нахождения псевдорешения уравнения (2.1) с замкнутым плотно заданным оператором A корректна по Тихонову в том и только в том случае (относительно пространств H и F), когда область значений $\mathcal{R}(A)$ замкнута в F. В противном случае задача некорректна.

В дальнейшем считаем, что оператор A замкнут и $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

Лемма 2.8. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
&1.\ A^+Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).\\
&2.\ AA^+y = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}y, \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^+).\\
&3.\ \overline{A^+A} = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}.\\
&4.\ \overline{AA^+} = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

(Здесь P_N — ортопроектор на подпространство N, а черта над оператором означает его замыкание.)

Доказательство. Представим

$$\mathcal{D}(A) = X_1 \oplus X_2,$$

где

$$X_1 = \overline{\mathcal{R}(A^*)} \cap \mathcal{D}(A), \quad X_2 = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} \cap \mathcal{D}(A).$$

Пусть $x \in X_1$. Тогда $Ax = y \in \mathcal{R}(A)$, а в (2.71) можно взять $f_2 = 0$ и последовательность y_n такую, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} A^* y_n$. Итак, вектор x есть псевдорешение для уравнения $y = Ax$ и $A^+y = A^+Ax = x$. Тем самым соотношение 1 для $x \in X_1$ выполняется. Теперь пусть $x \in X_2$. Тогда, учитывая соотношения (2.72), имеем $y = Ax = 0$ и из (2.71) следует, что псевдорешение есть $x = 0$. Поэтому $A^+Ax = 0$ для всех $x \in X_2$, что доказывает справедливость соотношения 1.

Докажем справедливость соотношения 2. Воспользуемся тем, что $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, и сначала рассмотрим $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда в (2.71) можно принять $y_1 = 0$, а для $A^+y = x$ в силу первого неравенства в (2.71) должно выполняться $AA^+y = Ax = y$, откуда вытекает соотношение 2. При $y \in \mathcal{R}(A)^\perp$ из (2.71) видно, что $x = A^+y = 0$, значит, $AA^+y = 0$. Так как $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^+)$ всюду плотны в H и F соответственно, а ортопроектор ограничен, то из соотношений 1 и 2 следуют 3 и 4. При этом замыкание операторов A^+A и AA^+ сводится к их продолжению по непрерывности в соответствии с принципом равномерной ограниченности. Лемма 2.8 доказана.

В связи с этой леммой заметим, что при работе с псевдообратными операторами часто возникает ситуация, когда нужно рассмотреть композицию двух операторов A и B, где B не ограничен и плотно задан, но AB — ограничен. Во всех таких случаях предполагаем, что AB уже расширен по непрерывности на замыкание области определения оператора B. Например, рассмотрим AA^+, когда $\mathcal{R}(A)$ — незамкнутое подпространство. Тогда $\mathcal{D}(A^+)$ плотно в F, а AA^+ ограничен и поэтому может быть расширен на $\overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = F$, хотя A^+ может не обладать таким свойством.

Теорема 2.6. *Пусть L — линейное отображение линейного многообразия $\mathcal{D}(L) \subseteq F$ в H. В этом случае $A^+ \equiv L$ тогда и только тогда, когда*

$$1.\ ALy = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}\, y, \quad \forall y \in \mathcal{D}(L).$$

$$2.\ LAx = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}\, x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

где

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp. \tag{2.74}$$

Доказательство. *Необходимость* следует из лемм 2.7 и 2.8.

Достаточность. Предположим, что оператор L удовлетворяет условиям 1 и 2 и имеет область определения (2.74). Обозначим $x_0 = Ly$, где $y \in \mathcal{D}(L)$. Тогда из 1 и 2 следует, что $Ax_0 = ALy = y_2$, где $y_1 + y_2 = y$, $y_1 \in \mathcal{R}(A)^\perp$, $y_2 \in \mathcal{R}(A)$. Таким образом, с учетом (2.72) получаем

$$Ax_0 = y - y_1, \quad A^* y_1 = 0, \quad y \in \mathcal{D}(L). \tag{2.75}$$

Каждый оператор ортогонального проектирования является самосопряженным, и поэтому из условия 2 теоремы вытекает

$$(LA)^* = A^*L^* = P_{\overline{\mathcal{R}(L)}}.$$

Отсюда видно, что

$$\overline{\mathcal{R}(L)} \subset \overline{\mathcal{R}(A^*)}. \tag{2.76}$$

В то же время условие 1 приводит к тому, что

$$\mathcal{R}(L)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} A = \mathcal{R}(A^*)^{\perp}. \tag{2.77}$$

Из (2.76), (2.77) получаем $\overline{\mathcal{R}(L)} = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$, что соответствует

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} A^*y_n, \quad y_n \in \mathcal{D}(A^*). \tag{2.78}$$

Равенства (2.75), (2.78), как следует из леммы 2.15, однозначно определяют псевдорешение $x_0 = A^+y$ для любого вектора $y \in \mathcal{D}(A)^+ = \mathcal{D}(L)$. Значит, $A^+ \equiv L$.

Теорема 2.7. *Необходимые и достаточные условия для псевдообратного оператора $A^+ = L$ задаются равенствами*

1. $ALAx = Ax, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$
2. $LALy = Ly, \quad \forall y \in \mathcal{D}(L).$
3. $(LA)^*x = LAx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$
4. $(AL)^*y = ALy, \quad \forall y \in \mathcal{D}(L),$

где

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}, \quad \mathcal{R}(L) \subset \mathcal{D}(A).$$

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы 2.6, если учесть, что $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*)$. *Достаточность.* Пусть оператор A удовлетворяет условиям 1—4. Умножив левую и правую части равенства 1 на L и A получим соответственно

$$LALAx = LAx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A);$$
$$ALALy = ALy, \quad \forall y \in \mathcal{D}(L).$$

Значит, LA и AL — идемпотентные операторы с плотными областями определения. Кроме того, в силу условий 3 и 4 они самосопряженные. Поэтому эти операторы имеют единственное продолжение по непрерывности до операторов ортогонального проектирования $\overline{LA} = P_{LA}$ и $\overline{AL} = P_{AL}$, определенных соответственно на H и F. Из условия 1 вытекает, что $P_{AL} \supset \mathcal{R}(A)$. Но для любого оператора L справедливо $AL(F) \subset \overline{\mathcal{R}(A)}$. Поэтому

$$P_{AL} = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}. \tag{2.79}$$

Аналогично из условия 2 следует

$$P_{LA} = P_{\overline{\mathcal{R}(L)}} = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}. \tag{2.80}$$

Равенства (2.79) и (2.80) в силу теоремы 2.6 являются необходимыми и достаточными условиями для оператора A^+. Теорема 2.7 доказана.

Теорема 2.8. *Пусть A — плотно заданный замкнутый оператор. Тогда*

1. $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, $\overline{\mathcal{R}(A^+)} = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

$$\operatorname{Ker} A^+ = \operatorname{Ker} A^*, \quad \overline{\mathcal{R}(A^+)} = (\operatorname{Ker} A)^\perp,$$

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = (\operatorname{Ker} A^+)^\perp.$$

2. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

3. $(A^+)^+ = A$.

4. $AA^+Ax = Ax;\quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A);$

$A^+AA^+y = A^+y;\quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A^+)$.

5. $(A^+A)^2 x = A^+Ax;\quad (A^+A)^* x = A^+Ax;$

$$\forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

6. $(AA^+)^2 y = AA^+ y;\quad (AA^+)^* y = AA^+y;$

$$\forall\, y \in \mathcal{D}(A^*).$$

7. $\overline{A^+A} = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}};\quad \overline{AA^+} = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$.

8. $(A^*A)^+x = A^+(A^*)^+x = A^+(A^+)^*x;$

$$\forall\, x \in \mathcal{D}((A^*A)^+).$$

9. $A^+AA^*y = A^*AA^+y = A^*y;$

$$\forall\, y \in \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(A^+).$$

10. $A^+y = (A^*A)^+A^*y = A^*(AA^*)^+y;$

$$\forall\, y \in \mathcal{D}((AA^*)^+) \cap \mathcal{D}(A^*);$$

$$A^+ = \overline{(A^*A)^+}\,\overline{A^*} = \overline{A^*(AA^*)^+}.$$

11. $(\lambda A)^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}A^+, & \text{если } \lambda \text{ — ненулевой скаляр;} \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$

12. *Если A — нормальный оператор, то $A^+A = AA^+$.*

13. *Если U, V — унитарные операторы то $(UAV)^+y = V^*A^+U^*y$ для всех $y \in U^{-1}$ $(\mathcal{D}(A^*))$.*

14. *Если $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — плотно заданные и замкнутые операторы из H в F, и для $i \neq j$ справедливо равенство*

$$A_i P_{\overline{\mathcal{R}(A_j^*)}} = A_i^* P_{\overline{\mathcal{R}(A_j)}} = 0,$$

то

$$A^+ = \sum_{i=1}^{n} A_i^+.$$

15. *Для любого $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$ вектор $A^+ y$ есть единственное решение с минимальной нормой «нормального» уравнения $A^*Ax = A^*y$ при условии, что $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 2.6, 2.7 и леммы 2.7, поэтому мы его опускаем.

Выведем формулу, аналогичную (2.15), для вычисления значений псевдообратного оператора A^+. С этой целью докажем

Предложение 2.5. Пусть G — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в H. Тогда

1. Для любого $h \in \mathcal{D}(G)$ справедливо

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (G+\alpha I_H)^{-1} G^2 h = Gh. \tag{2.81}$$

2. Для любого $g \in H$ справедливо

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} G(G+\alpha I_H)^{-1} g = P_{\overline{\mathcal{R}(G)}} g. \tag{2.82}$$

Доказательство. 1. Пусть $\{E_\lambda : \lambda \in (0, \infty)\}$ — разложение единицы, отвечающее оператору G, т. е.

$$Gh = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda h, \quad \forall h \in \mathcal{D}(G).$$

Тогда имеет место равенство

$$(G+\alpha I_H)^{-1} G^2 h = \int_0^\infty (\lambda+\alpha)^{-1} \lambda^2 dE_\lambda h.$$

Отсюда следует, что

$$\|(G+\alpha I_H)^{-1} Gh - Gh\|_H^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha^2\lambda\mu}{(\lambda+\alpha)(\mu+\alpha)} d_\lambda d_\mu (E_\lambda E_\mu h, h)_H \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^2 \int_0^\infty\int_0^\infty d_\lambda d_\mu \ (E_\lambda h, E_\mu h)_H \leqslant \alpha^2 \|h\|_H^2 \to 0,$$

при $\alpha \to 0$, что и требовалось доказать. Докажем 2. Для любого $\alpha > 0$ оператор $G(G + \alpha I_H)^{-1}$ является ограниченным, причем

$$\|G(G+\alpha I_H)^{-1}\| \leqslant 2. \tag{2.83}$$

Действительно, справедливо тождество

$$I_H - \alpha(G+\alpha I_H)^{-1} = G(G+\alpha I_H)^{-1},$$

и из рассуждений, изложенных в [126, с. 328—329], следует, что

$$\|\alpha(G+\alpha I_H)^{-1}\| = \left\|\left(\frac{G}{\alpha} + I_H\right)^{-1}\right\| \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\|G(G+\alpha I_H)^{-1}\| \leqslant 1 + \|\alpha(G+\alpha I_H)^{-1}\| \leqslant 2.$$

Для всякого вектора $g \in \mathscr{D}(G)$ пусть $g = g_1 + g_2$, где

$$g_1 \in \overline{\mathscr{R}(G)}, \quad g_2 \in \operatorname{Ker} G.$$

Тогда, если $g_1 \in \mathscr{R}(G)$, т. е. $g_1 = Gh_1$, $h_1 \in \mathscr{D}(G)$, то согласно (2.81)

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (G + \alpha I_H)^{-1} Gg_1 = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (G + \alpha I_H)^{-1} G^2 h_1 = Gh_1 = g_1.$$

Таким образом, последовательность ограниченных линейных операторов $\{G(G + \alpha I_H)^{-1}\}_{\alpha>0}$ сходится на всюду плотном в H множестве $\mathscr{R}(G) \oplus \operatorname{Ker} G$, причем нормы операторов в совокупности ограничены в силу (2.83). Значит, на основании теоремы Банаха — Штейнгауза справедливо соотношение (2.82). Предложение 2.5 доказано.

Теорема 2.9. *Пусть B — замкнутый линейный оператор, действующий из H в F со всюду плотной областью определения $\mathscr{D}(B)$. Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} B^* (BB^* + \alpha I_F)^{-1} g = B^+ g \tag{2.84}$$

для любого вектора $g \in \mathscr{D}(B^+) \subset F$.

Доказательство. Отметим, что BB^* и B^*B — самосопряженные неотрицательные операторы с плотными областями определения в F и H соответственно, причем существуют ограниченные обратные операторы $(BB^* + \alpha I_F)^{-1}$ и $(B^*B + \alpha I_H)^{-1}$ для любого $\alpha > 0$. Поскольку

$$(B^*B + \alpha I_H) B^* = B^* (BB^* + \alpha I_F),$$

то

$$B^* (BB^* + \alpha I_F)^{-1} = (B^*B + \alpha I_H)^{-1} B^*. \tag{2.85}$$

справедливы равенства

$$\overline{\mathscr{R}(B)} = \overline{\mathscr{R}(BB^*)}, \quad \overline{\mathscr{R}(B^*)} = \overline{\mathscr{R}(B^*B)}, \tag{2.86}$$

поскольку $\operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ker} BB^*$, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} B^*B$ и

$$\overline{\mathscr{R}(B)} = (\operatorname{Ker} B^*)^{\perp}, \quad \overline{\mathscr{R}(BB^*)} = (\operatorname{Ker} BB^*)^{\perp},$$
$$\overline{\mathscr{R}(B^*)} = (\operatorname{Ker} B)^{\perp}, \quad \overline{\mathscr{R}(B^*B)} = (\operatorname{Ker} B^*B)^{\perp}.$$

Для доказательства (2.84) воспользуемся теоремой 2.6. Нужно установить справедливость соотношений

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} BB^* (BB^* + \alpha I_F)^{-1} g = P_{\overline{\mathscr{R}(B)}} g, \quad \forall g \in \mathscr{D}(B^+), \tag{2.87}$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} B^* (BB^* + \alpha I_F)^{-1} Bh = P_{\overline{\mathscr{R}(B^*)}} h, \quad \forall h \in \mathscr{D}(B). \tag{2.88}$$

Однако (2.87) и (2.88) немедленно следуют из (2.85), (2.86), если учесть предложение 2.5 и (2.82). Теорема 2.6 доказана.

Теорема 2.10. *Пусть A — линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения, действующий из H в F. Тогда*

1. *Для любого $f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp} \subset F$ вектор $A^{+}f$ есть предел при $\alpha \to 0$ решения задачи*

$$\min \{ \| Au - f \|_F^2 + \alpha \| u \|_H^2 : u \in \mathcal{D}(A) \}, \tag{2.89}$$

однозначно разрешимой при любом $f \in F$.

2. *Если $f \notin \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$, то любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ задачи*

$$\inf \{ \| Au - f \|_F : u \in \mathcal{D}(A) \} \tag{2.90}$$

не ограничена в H.

3. *Любая последовательность решений $\{u_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ регуляризованной задачи (2.89) является минимизирующей для задачи (2.90) при $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, причем*

$$\begin{gathered} \tilde{m}(f) \equiv \inf \{ \| Au - f \|_F^2 : u \in \mathcal{D}(A) \} = \\ = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \alpha^2 \| (AA^* + \alpha I_F)^{-1} f \|_F^2 = \| \overline{AA}^{+} f - f \|_F^2. \end{gathered} \tag{2.91}$$

Доказательство. 1. Пусть

$$J_\alpha(u) \equiv \| Au - f \|_F^2 + \alpha \| u \|_H^2, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Положим

$$\begin{gathered} \Delta(h) \equiv J_\alpha(u + h) - J_\alpha(u) = 2(Au - f, Ah)_F + \\ + 2\alpha(u, h)_F + \| Ah \|_F^2 + \alpha \| h \|_H^2, \end{gathered}$$

где $h \in \mathcal{D}(A)$, $f \in F$. Если вектор $u_\alpha = A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f$, то $u \in \mathcal{D}(A)$ и $\Delta(h) = 2(AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f, Ah)_F - 2(f, Ah)_F + 2\alpha(A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f, h)_F + \alpha \| h \|_H^2 + \| Ah \|_F^2 = \alpha \| h \|_H^2 + \| Ah \|_F^2 \geqslant 0$.

Поэтому функционал $J_\alpha(\cdot)$ достигает минимума на векторе

$$u_\alpha = A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f. \tag{2.92}$$

Причем u_α — единственная точка минимума функционала $J_\alpha(\cdot)$, поскольку если

$$\alpha \| h \|_H^2 + \| Ah \|_F^2 = 0,$$

то $h = \Theta_H$.

Если $f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp} \subset F$ и u_0 — любая точка минимума функционала $J_0(u) = \| Au - f \|_F^2$, то $u_0 \in \mathcal{D}_f = A^{+}f \oplus \operatorname{Ker} A$ и

$$\begin{gathered} \| Au_0 - f \|_F^2 \leqslant \| Au_\alpha - f \|_F^2 \leqslant \| Au_\alpha - f \|_F^2 + \\ + \alpha \| u_\alpha \|_H^2 \leqslant \| Au_0 - f \|_F^2 + \alpha \| u_0 \|_H^2. \end{gathered} \tag{2.93}$$

Отсюда

$$\| u_\alpha \|_H^2 \leqslant \| u_0 \|_H^2 + \alpha^{-1} (\| Au_0 - f \|_F^2 - \| Au_\alpha - f \|_F^2 \leqslant \| u_0 \|^2. \tag{2.94}$$

Из (2.93) следует также

$$\| Au_0 - f \|_F = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \| Au_\alpha - f \|_F. \tag{2.95}$$

Из (2.94) и (2.95) получаем, что множества $\{u_\alpha\}$, $\{Au_\alpha\}$, $0 < \alpha < \alpha_0$, ограничены соответственно в H и F. Поэтому найдется такая последовательность $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, что $\{u_{\alpha_n}\}$, $\{Au_{\alpha_n}\}$ слабо сходятся.

Пусть u — слабый предел $\{u_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ в H. Тогда, как известно, Au_{α_n} будет слабо сходиться к Au в F. Итак, $u \in \mathscr{D}(A)$. Кроме того, согласно (2.95) и слабой полунепрерывности снизу нормы в гильбертовом пространстве

$$\|Au_0 - f\|_F \leqslant \|Au - f\|_F \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|Au_{\alpha_n} - f\|_F = \lim_{n\to\infty} \|Au_{\alpha_n} - f\|_E = \\ = \|Au_0 - f\|_F.$$

Из (2.94) следует, что

$$\|u\|_H \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|u_{\alpha_n}\|_H \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|u_{\alpha_n}\|_H \leqslant \|u_0\|_H. \tag{2.96}$$

Но $u_f = A^+ f$ — единственный элемент из $\mathscr{D}_f$ с минимальной нормой. Поэтому полагая $u_0 = u_f$, из (2.96) находим, что $u = u_0 = u_f$, причем $u_f\|_H = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_{\alpha_n}\|_H$. Отсюда и из слабой сходимости $\{u_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ к u_f получаем

$$u_f = \lim_{n\to\infty} u_{\alpha_n} \tag{2.97}$$

в сильном смысле (равенство (2.97) верно для любой слабо сходящейся последовательности из слабо компактного множества $\{u_\alpha\}$, $0 < \alpha < \alpha_0$). Утверждение 1 доказано.

2. Если $f \notin \mathscr{R}(A) \oplus \mathscr{R}(A)^\perp$ и $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(A)$ минимизирует $\|Au - f\|_F^2$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|Au_n - f\|_F^2 = \tilde{m}(f)$, то последовательность $\{Au_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена в F. Предположим от противного, что $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена в H. Тогда можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ и $\{Au_{n_j}\}_{\alpha=1}^\infty$ в силу слабой компактности множеств $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Au_n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ слабо сходится в H к некоторому вектору $u_1 \in H$. Тогда, как и выше, $\{Au_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ слабо сходится в F к Au_1 на основании замкнутости оператора A. Отсюда

$$\|Au_1 - f\|_F^2 \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \|Au_{n_j} - f\|_F^2 = \lim_{j\to\infty} \|Au_{n_j} - f\|_F^2 = \tilde{m}(f),$$

в силу слабой полунепрерывности снизу $\|\cdot\|_F$ [29]. А последнее противоречит тому, что $f \notin \mathscr{D}(A^+) = \mathscr{R}(A) \oplus \mathscr{R}(A)^\perp$.

3. Заметим, что

$$\tilde{m}(f) \leqslant \|Au_\alpha - f\|_F^2 \leqslant \|Au_\alpha - f\|_F^2 + \alpha\|u_\alpha\|_H^2 \leqslant \|Au_n - f\|_F^2 + \alpha\|u_n\|_H^2, \tag{2.98}$$

где $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ — любая минимизирующая последовательность задачи (2.90). Выберем в (2.98) $\alpha = \alpha_n$ так, чтобы $\alpha_n \| u_n \| \to 0$. Тогда из

(2.98) получаем

$$m(f) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|Au_{\alpha_n} - f\|_F^2 \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \|Au_{\alpha_n} - f\|_F^2 \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \|Au_n - f\|_F^2 = \tilde{m}(f). \qquad (2.99)$$

Таким образом, $\{u_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность задачи (2.90).

Поскольку оператор $\overline{AA^+}$ ортогонально проектирует F на подпространство $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и справедливо

$$Au_\alpha - f = AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f - f = -\alpha(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f, \quad \alpha > 0,$$

то отсюда следует равенство (2.91). Теорема 2.10 полностью доказана.

Пусть $h \in \mathcal{D}(A^*)$, тогда

$$A^*h = (A^*A + \alpha I_H) A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} h, \quad \alpha > 0.$$

Отсюда

$$A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} h = (A^*A + \alpha I_H)^{-1} A^*h. \qquad (2.100)$$

Значит, оператор $(A^*A + \alpha I_H)^{-1}A^*$ непрерывен на всюду плотном множестве $\mathcal{D}(A^*)$ в F (см. [126, с. 327]). Расширяя этот оператор по непрерывности на все F, получаем из (2.100):

$$\overline{(A^*A + \alpha I_H)^{-1} A^*} = A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1}. \qquad (2.101)$$

Лемма 2.9. *Пусть оператор A обладает свойствами, указанными выше. Тогда*

$$\overline{(A^*)^+ A^*h} = \overline{AA}^+h = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} h, \quad \forall h \in F, \qquad (2.102)$$

$$\overline{A^*(A^*)^+} x = \overline{A^+A}x = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} A^*A(A^*A + \alpha I_H)^{-1} x, \quad \forall x \in H. \qquad (2.103)$$

Доказательство. Из (2.101) следует

$$AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} h = A(A^*A + \alpha I_H)^{-1} h, \quad \forall h \in \mathcal{D}(A^*).$$

Но $\mathcal{R}(A^*) \subset \mathcal{D}((A^*)^+)$, т. е.

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} h = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} A(A^*A + \alpha I_H)^{-1} A^*h =$$
$$= (A^*)^+ A^*h, \quad \forall h \in \mathcal{D}(A^*). \qquad (2.104)$$

Учитывая, что $\mathcal{D}(A^*)$ плотно в F и

$$\|AA^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1}\| \leqslant 1,$$

из (2.104) получаем (2.102) в силу теоремы Банаха—Штейнгауза. Равенство $\overline{(A^*)^+ A^*} = \overline{AA}^+$ следует из $\overline{AA}^+ = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$, $\overline{(A^*)^+ A^*} = P_{\overline{\mathcal{R}(A^{**})}} = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$.

Аналогично доказывается (2.103).

Лемма 2.10. *Пусть A — самостоятельный неотрицательный линейный оператор в H, $\alpha > 0$. Тогда всюду в H*

$$(A + \alpha I_H)^{-1} = \alpha^{-1}(I_H - \overline{A^+A}) + A^+(I_H + \alpha A^+)^{-1}. \qquad (2.105)$$

Доказательство. Операторы $(A + \alpha I_H)^{-1}$, $(I_H + \alpha A^+)^{-1}$ и $A^+(I_H + \alpha A^+)^{-1}$ определены всюду в H и ограничены на основании предложения 2.5 и того, что $A^+ \geqslant 0$. Поэтому $\mathcal{R}[(I_H + \alpha A^+)^{-1}] = H$, т. е. $h = (I_H + \alpha A^+)x$, $x \in \mathcal{D}(A^+)$ для любого $h \in H$. Значит, достаточно убедиться в справедливости равенства

$$(A + \alpha I_H)^{-1}(I_H + \alpha A^+)x = \alpha^{-1}(I_H - \overline{A^+A})x + A^+x,$$

или, так как $AA^+A = A$,

$$(I_H + \alpha A^+)x = (I_H - \overline{A^+A})x + (A + \alpha I_H)A^+x \qquad (2.106)$$

для любого $x \in \mathcal{D}(A^+)$. Однако $\overline{A^+A} = \overline{AA^+}$, поскольку $A = A^*$. Итак, (2.106) верно, и лемма 2.10 доказана.

Теорема 2.11. *Пусть A — плотно заданный замкнутый оператор из H в F, $\alpha > 0$. Тогда*

1. *Если $\{f_\alpha\}_{\alpha>0} \subset F$, $f \in \mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, причем*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\|f_\alpha - f\|_F}{\alpha^{1/2}} = 0,$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} A^*(AA^* + \alpha I_F)^{-1} f_\alpha = A^+f.$$

2. *Если $f \in \mathcal{R}(A)$, $\{f_\alpha\}_{\alpha>0} \subset F$, $\{A_\alpha\}_{\alpha>0}$ — плотно определенные замкнутые линейные отображения из H в F, $\mathcal{D}(A_\alpha) = \mathcal{D}(A)$ и*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\|A_\alpha - A\| + \|f_\alpha - f\|_F}{\alpha^{1/2}} = 0, \qquad (2.107)$$

то

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} A_\alpha^*(A_\alpha A_\alpha^* + \alpha I_F)^{-1} f_\alpha = A^+f. \qquad (2.108)$$

3. *Если $\{f_\alpha\}_{\alpha>0}$, $\{A_\alpha\}_{\alpha>0}$, как и в п. 2, $\overline{\mathcal{R}(A_\alpha)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ и*

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{\|A_\alpha - A\| + \|f_\alpha - f\|_F}{\alpha} = 0, \qquad (2.109)$$

то (2.108) справедливо для $f \in \mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$.

Доказательство. 1. Обозначим $W \equiv \alpha I_F + AA^*$. Тогда

$$\|Wz\|_F^2 = \|AA^*z\|_F^2 + 2\alpha\|A^*z\|_H^2 + \alpha^2\|z\|_F^2, \quad z \in \mathcal{D}(AA^*).$$

Значит, $2\alpha\|A^*z\|_H^2 \leqslant \|Wz\|_F^2$. Но $z = W^{-1}u$ при некотором $u \in F$.

Поэтому

$$\| A^*W^{-1}u\|_H \leqslant (2\alpha)^{-1/2} \| u\|_F.$$

Таким образом,

$$\| A^*W^{-1}f_\alpha - A^+f\|_H \leqslant \| A^*W^{-1}(f_\alpha - f)\|_H +$$
$$+ \| (A^*W^{-1} - A^+) f\|_H \leqslant (2\alpha)^{-1/2} \| f_\alpha - f\|_F + \| A^*W^{-1}f - A^+f\|_H.$$

Первое слагаемое стремится к нулю по условию данной теоремы, а второе — в силу теоремы 2.9.

2. Как и при доказательстве теоремы 2.10,

$$\| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha\|_F^2 \leqslant \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha\|_F^2 + \alpha \| u_\alpha\|_H^2 \leqslant \| A_\alpha u_1 - f_\alpha\|_F^2 + \alpha \| u_1\|_H^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\| A_\alpha - A\| \| u_1\|_H + \| f_\alpha - f\|_F)^2 + \alpha \| u_1\|_H^2.$$

Здесь u_1 — любое решение уравнения $Au_1 = f$. Отсюда

$$\| u_\alpha\|_H^2 \leqslant \| u_1\|_H^2 + \alpha^{-1} (\| A_\alpha - A\| \| u_1\|_H + \| f_\alpha - f\|_F)^2, \qquad (2.110)$$

причем

$$0 \leqslant \varliminf_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha\|_F^2 \leqslant \varlimsup_{\alpha \to 0} \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha\|_F^2 \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\alpha \to 0} [(\| A_\alpha - A\| \cdot \| u_1\|_H + \| f_\alpha - f\|_F)^2 + \alpha \| u_1\|_H^2] = 0,$$

т. е. $\lim \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha\|_F = 0$. Значит, при $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ множества $\{u_\alpha\}$, $\{A_\alpha u_\alpha\}$ ограничены, т. е. слабо компактны. Пусть $u_{\alpha_n} \to u_0$, $A_{\alpha_n} u_{\alpha_n} \to f_1 \in F$ (слабо в H и F соответственно), $n \to \infty$, $\alpha_n \to 0$. Но

$$0 \leqslant \| (A - A_{\alpha_n}) u_{\alpha_n}\|_F \leqslant \| A_{\alpha_n} - A\| \| u_{\alpha_n}\|_H \to 0$$

при $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$ в силу (2.107), (2.110). Отсюда

$$Au_{\alpha_n} = A_{\alpha_n} u_{\alpha_n} - (A_{\alpha_n} - A) u_{\alpha_n} \to f_1$$

слабо в F. Учитывая замкнутость оператора A, получаем, что $Au_0 = f_1$. Далее,

$$0 \leqslant \| Au_{\alpha_n} - f\|_F \leqslant \| A_{\alpha_n} - A\| \| u_{\alpha_n}\|_H + \| A_{\alpha_n} u_{\alpha_n} - f_{\alpha_n}\|_F +$$
$$+ \| f_{\alpha_n} - f\|_F \to 0, \quad \alpha_n \to 0.$$

Поэтому $0 \leqslant \| Au_0 - f\|_F \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| Au_{\alpha_n} - f\|_F = 0$,

т. е. $f = f_1$. Кроме того,

$$\| u_0\|_H \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| u_{\alpha_n}\|_H \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \| u_{\alpha_n}\|_H \leqslant \| u_1\|_H.$$

Достаточно положить $u_1 = A^+f$, как и в теореме 2.10, т. е. $u_0 = u_1$. Итак, (2.108) верно.

3. Аналогично доказательству теоремы 2.10 получим

$$\| P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f_\alpha - f_\alpha \|_F^2 \leqslant \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F^2 \leqslant \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F^2 + \alpha \| u \|_{\alpha H}^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\| A_\alpha - A \| \| u_2 \|_H + \| A u_2 - f \|_F + \| f_\alpha - f \|_F)^2 + \alpha \| u_2 \|_H^2, \quad (2.111)$$

где $P_{\overline{\mathscr{R}(A)}}$ — ортопроектор F на $\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(A_\alpha)}$ и $\| A u_2 - f \|_F = \min \{ \| A u - f \|_F : u \in \mathcal{D}(A) \}$. Отсюда следует

$$\| u_\alpha \|_H^2 \leqslant \| u_2 \|_H^2 + \alpha^{-1} ((\| A_\alpha - A \| \| u_2 \|_H + \| A u_2 - f \|_F + \| f_\alpha - f \|_F)^2 -$$

$$- \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F^2) \leqslant \| u_2 \|_H^2 + \alpha^{-1} [(\| A_\alpha - A \| \| u_2 \|_H +$$

$$+ \| f_\alpha - f \|_F)^2 + 2 (\| A_\alpha - A \| \| u_2 \|_H + \| f_\alpha - f \|_F) \| A u_2 - f \|_F +$$

$$+ N \| f_\alpha - f \|_F], \quad (2.112)$$

где $N > 0$. В самом деле, нужно лишь оценить разность

$$\| A u_2 - f \|_F^2 - \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F^2 \leqslant \| f - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f \|_F^2 -$$

$$- \| f_\alpha - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f_\alpha \|_F^2 \leqslant \| (f - f_\alpha) - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} (f - f_\alpha) \|_F \times$$

$$\times (\| f - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f \|_F + \| f_\alpha - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f_\alpha \|_F) \leqslant$$

$$\leqslant N \| f - f_\alpha \|_F, \quad 0 < N = \| f \|_F + \sup_{0 < \alpha \leqslant \alpha_0} \| f_\alpha \|_F < +\infty,$$

поскольку $\| I_F - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} \| \leqslant 1$ и множество $\{f_\alpha\}_{\alpha > 0}$ ограничено в F. Итак, в силу (2.112) множество $\{u_\alpha\}_{\alpha > 0}$ ограничено в H. Но

$$\lim_{\alpha \to 0} \| f_\alpha - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f_\alpha \|_F = \| f - P_{\overline{\mathscr{R}(A)}} f \|_F = \| A u_2 - f \|_F.$$

Поэтому согласно (2.111)

$$\| A u_2 - f \|_F^2 \leqslant \varliminf_{\alpha \to 0} \| A u_\alpha - f_\alpha \|_F^2 \leqslant \varlimsup_{\alpha \to 0} \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F^2 \leqslant \| A u_2 - f \|_F^2.$$

Значит,

$$\lim_{\alpha \to 0} \| A_\alpha u_\alpha - f_\alpha \|_F = \| A u_2 - f \|_F,$$

т. е. множество $\{A_\alpha u_\alpha\}_{\alpha > 0}$ ограничено в F и поэтому слабо компактно. Тогда существует $\{u_{\alpha_n}\}_n \to u_3 \in H$, причем $\{A u_{\alpha_n}\} \xrightarrow[n \to \infty]{} A u_3$ (слабо) (как и в п. 2.). Но

$$\| A u_2 - f \|_F \leqslant \| A u_{\alpha_n} - f \|_F \leqslant \| A - A_{\alpha_n} \| \| u_{\alpha_n} \|_H +$$

$$+ \| A_{\alpha_n} u_{\alpha_n} - f_{\alpha_n} \|_F + \| f_{\alpha_n} - f \|_F,$$

откуда

$$\| A u_2 - f \|_F \leqslant \| A u_3 - f \|_F \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| A u_{\alpha_n} - f \|_F \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \| A u_{\alpha_n} - f \|_F \leqslant \lim_{n \to \infty} \| A_{\alpha_n} u_{\alpha_n} - f_{\alpha_n} \|_F = \| A u_2 - f \|_F.$$

Таким образом, $\| Au_3 - f \|_F = \| Au_2 - f \|_F$. При этом

$$\| u_3 \|_H \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| u_{\alpha_n} \|_H \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \| u_{\alpha_n} \|_H \leqslant \| u_2 \|_H.$$

Далее повторяем рассуждения из теоремы 2.10.

В этой теореме предлагается метод устойчивого вычисления значений псевдообратного оператора на основании приближенных априорных данных в задачах (2.1) и (2.64).

Действительно, пусть $f_\delta \in F$, $f \in \mathcal{D}(A^+)$, $\| f - f_\delta \|_F < \delta$, $\delta > 0$. Если функция $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такова, что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{(\alpha(\delta))^{1/2}} = 0,$$

то

$$\lim_{\delta\to 0} A^* (AA^* + \alpha(\delta) I_F)^{-1} f_\delta = A^+ f.$$

Поэтому вектор $u_\delta = A^* (AA^* + \alpha(\delta) I_F)^{-1} f_\delta$ можно принять в качестве приближения к нормальному решению задачи (2.90). Заметим, что точное значение $f \in \mathcal{D}(A^+)$ неизвестно, а априорно заданный (неточно) вектор f_δ может не принадлежать $\mathcal{D}(A^+)$.

При неточном задании оператора A_h в качестве приближения к нормальному решению (2.1) можно рассматривать вектор

$$x_{h,\delta} = A_h^* (A_h A_h^* + \alpha(h, \delta) I_F)^{-1} f_\delta. \qquad (2.113)$$

Здесь точные значения A и $f \in \mathcal{R}(A)$ неизвестны. Приближенные $\{A_h, f_\delta\}$ связаны с точными $\| A_h - A \| \leqslant h$, $\| f_\delta - f \| \leqslant \delta$, причем функция $\alpha(h, \delta)$ такова, что

$$\lim_{(h,\delta)\to 0} \frac{h+\delta}{(\alpha(h, \delta))^{1/2}} = 0.$$

Тогда из теоремы 2.11 следует

$$\lim_{(h,\delta)\to 0} A_h^* (A_h A_h^* + \alpha(h, \delta) I_F)^{-1} f_\delta = A^+ f.$$

Если

$$\lim_{(h,\delta)\to 0} \frac{h+\delta}{\alpha(h, \delta)} = 0,$$

то вектор (2.113) представляет приближение к нормальному решению вариационной задачи (2.90) с неточно заданными A и f [119].

2°. Еще раз о задаче линейного оценивания. В [89, гл. II] уже рассматривалась данная задача в основном в непрерывной постановке. Здесь исследуем конечномерный вариант этой задачи, обратив внимание на неточность задания исходной информации. При этом используем результаты Ю. П. Пытьева [120].

Пусть измерения проводятся по закону

$$r = Cx + v, \qquad (2.114)$$

где $r \in R_m$ — измеряемый вектор; $x \in R_n$ — полезный сигнал; $v = v(\omega) \in R_m$ — шум измерений, представляющий собой гауссову случайную векторную величину с нулевым средним ($M[v] = 0$, M — знак математического ожидания) и корреляцией $V = M[vv^T]$. Как известно, задача линейного оценивания вектора Bx, $B \in \mathscr{L}(R_n, R_k)$ состоит в определении линейного оператора оценки $R \in \mathscr{L}(R_m, R_k)$ такого, что вектор Rr является наиболее близким (в определенном смысле) к вектору Bx (см. подробнее [89, приложение II]). Пару $[C, V]$ будем называть моделью наблюдательной системы (2.114). Критерий качества оценки Rr определим среднеквадратичным, т. е.

$$J(R) = M\|Rr - Bx\|^2_{R_k} \to \min_{R \in \mathscr{L}(R_m, R_k)}. \tag{2.115}$$

Причем наложим условие несмещенности оценки, т. е. условие

$$M[Rr - Bx] = 0. \tag{2.116}$$

Пусть вектор x — детерминированный. Тогда справедлива теорема 2.12.

Теорема 2.12. *Оптимальная оценка (в смысле (2.115), (2.116)) имеет вид*

$$R_0 r = B\hat{x}, \quad \hat{x} = C^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+)r = C^+Cx + \hat{v}, \tag{2.117}$$

$$M\|R_0 r - Bx\|^2_{R_k} = M\|R_0 v\|^2_{R_k} = M\|B\hat{v}\|^2_{R_k} = \|B\hat{v}^{1/2}\|^2_2,$$

где

$$P = I - CC^+, \quad \hat{V}^{1/2} = C^+V^{1/2}(I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}),$$

$$\hat{v} = C^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+)v.$$

Любая оценка вектора Bx, удовлетворяющая (2.115), (2.116), совпадает с (2.117) (с вероятностью 1). Для существования оптимальной оценки $R_0 r$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$B \in \mathscr{D}_C = \{B \in \mathscr{L}(R_n, R_k) : B(I - C^+C) = 0\}. \tag{2.118}$$

Если оператор $CC^* + V$ невырожден, то условие (2.118) необходимо и достаточно для существования единственного оптимального оператора оценки $R_0 = BC^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+)$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормированный базис R_m, состоящий из собственных векторов самосопряженного неотрицательно определенного оператора $V: Ve_i = \lambda_i^2 e_i$, $i = 1, \ldots, m$. Но

$$M[(v, e_i)_{R_m}(v, e_j)_{R_m}] = (e_i, Ve_j)_{R_m} = \lambda_i^2\delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Отсюда

$$M\|Rv\|^2 = M\left\|\sum_{i=1}^k Re_i(v, e_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2(Re_i, Re_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^k (RV^{1/2}e_i; RV^{1/2}e_i) = \|RV^{1/2}\|^2_2. \tag{2.119}$$

Из условия несмещенности (2.116) получаем $M[Rr] = M[RCx + Rv] = RCx = Bx$, т. к. $M[Rv] = RM[v] = 0$. Поэтому

$$RC = B, \qquad (2.120)$$

поскольку $x \in R_n$ может быть любым. Уравнение (2.120) разрешимо относительно оператора R тогда и только тогда, когда выполняется (2.118), а решение (2.120) имеет вид $R = BC^+ + YP$, при некотором $Y \in \mathscr{L}(R_m; R_k)$ на основании леммы 2.3. Тогда $\| Rr - Bx \|^2 = \| RCx - Bx + Rv \|^2 = \| Rv \|^2_{R_k}$, если R удовлетворяет (2.116). Таким образом, задача минимизации (2.115) при ограничении (2.116) сводится к минимизации функционала $M \| Rv \|^2_{R_k}$. Учитывая (2.119), находим

$$\inf \{ M \| Rv \|^2_{R_k} = \| (BC^+ + YP) V^{1/2} \|^2_2 : Y \in \mathscr{L}(R_m, R_k) \}. \qquad (2.121)$$

Уравнение Эйлера для (2.121) имеет вид

$$YPVP + BC^+VP = 0.$$

Его решением является оператор

$$Y = - BC^+VP(PVP)^+ + Y_1(I - PVP(PVP)^+),$$

где $Y_1 \in \mathscr{L}(R_m, R_k)$ — произвольный оператор на основании (2.32). Поскольку $P = I - CC^+$ — ортопроектор в R_m, то

$$P(PVP)^+ = (PVP)^+, \quad \text{а} \quad (PV^{1/2})^*(PV^{1/2}(PV^{1/2})^*)^+ = (PV^{1/2})^+.$$

Поэтому

$$Y = - BC^+V(PVP)^+ + Y_1(I - PV^{1/2}(PV^{1/2})^+).$$

Таким образом, любой оператор вида

$$R_0 = BC^+(I - V(PVP)^+) + Y_1S,$$

где $S = (I - PV^{1/2}(PV^{1/2})^+)P$, является решением (2.115), (2.116). Заметим, что

$$SV^{1/2} = (PV^{1/2} - PV^{1/2}(PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) = 0,$$

$$SC = (I - PV^{1/2}(PV^{1/2})^+)PC = 0, \quad \text{так как } PC = C - CC^+C = 0;$$

$$M \| Sv \|^2_{R_m} = \sum_{i=1}^{m} (SV^{1/2}e_i, SV^{1/2}e_i)_{R_m} = \| SV^{1/2} \|^2_2 = 0.$$

Значит, $Sr = SCx + Sv = 0$ (почти наверное), т. е.

$$R_0r = BC^+(I - V^{1/2}V^{1/2}P(PV^{1/2}(PV^{1/2})^*)^+)r + Y_1Sr =$$
$$= BC^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+)r,$$

и (2.117) доказано (при $B \in \mathscr{D}_C$). Более того, из (2.119) находим

$$M \| R_0v \|^2_{R_k} = \| BC^+(I - V(PVP)^+)V^{1/2} \|^2_2 =$$
$$= \| BC^+V^{1/2}(I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) \|^2_2.$$

Пусть оператор $L = V + CC^*$ невырожден. Тогда

$$S = (I - PVP(PVP)^+)P = (I - PLP(PLP)^+)P =$$
$$= (I - PL^{1/2}(PL^{1/2})^+)P = (I - PP^+)P = 0,$$

поскольку $PCC^*P = 0$, а оператор $PL^{1/2}(PL^{1/2})^+$ есть ортопроектор на $\mathcal{R}(PL^{1/2}) = \mathcal{R}(P)$, т. е. $PL^{1/2}(PL^{1/2})^+ = PP^+$. Откуда следует, что $R_0 = BC^+(I - V(PVP)^+)$ — единственное решение задачи (2.115), (2.116), что и требовалось.

Заметим, что вектор $\hat{x}$ в (2.117) есть оценка вектора C^+Cx.

Лемма 2.11. *Пусть V невырожден. Тогда условие (2.118) необходимо и достаточно, чтобы существовал единственный оператор оценки R_0, удовлетворяющий (2.115), (2.116), причем*

$$R_0r = B\hat{x}, \quad \hat{x} = (C^*V^{-1}C)^+C^*V^{-1}x = (V^{-1/2}C)^+V^{-1/2} = C^+Cx + \hat{v}, \tag{2.122}$$

$M\|R_0v\|^2 = \|B\hat{V}^{1/2}\|_2^2$ — *корреляция векторной случайной величины* $\hat{v} = (V^{1/2}C)^+V^{-1/2}v$, $\hat{V} = (C^*V^{-1}C)^+$.

Доказательство. В евклидовом пространстве R_m введем новое скалярное произведение

$$(u, w)_- = (V^{-1}u, w)_{R_m}. \tag{2.123}$$

В этом случае корреляционный оператор случайной величины v

$$M[(u, v)_-(w, v)_-] = (u, w)_-,$$
$$C_-^* = C^*V^{-1}, \quad C_-^+ = (V^{-1/2}C)^+V^{-1/2},$$

где «—» внизу означает сопряжение и псевдообращение (относительно скалярного произведения (2.123)). Поэтому из доказательства теоремы 2.12 следует, что допустимый оператор

$$R = BC_-^+ + Y(I - CC_-^+), \quad \text{а} \quad M\|Rv\|^2 = \|R\|_2^2 =$$
$$= \|BC_-^+\|_2^2 + \|Y(I - CC_-^+)\|_2^2,$$

поскольку

$$(BC_-^+, Y(I - CC_-^+)) = 0.$$

Значит, $M\|Rv\|_{R_k}^2$ достигает минимума (по R) при

$$R = R_0 = BC_-^+ = B(V^{-1/2}C)^+V^{-1/2}.$$

При этом

$$M\|Rv\|_{R_k}^2 = \|BC_-^+\|_2^2 = \text{след}\, BC_-^+(BC_-^+)_-^* = \text{след}\, B(C_-^*C)_-^+B_-^*,$$
$$B_-^* = B^*, \quad C_-^*C = C^*V^{-1}C, \quad (C_-^*C)_-^+ = (C_-^*C)^+,$$

так как

$$C_-^*C \in \mathcal{L}(R_n, R_n), \quad B \in \mathcal{L}(R_n, R_k).$$

Лемма 2.11 доказана.

Пусть теперь $x = x(\omega) \in R_n$ — случайная гауссова векторная величина с нулевым средним и известным корреляционным оператором $X \in \mathcal{L}(R_n, R_n) : M[(x, u)_{R_n} (x, w)_{R_n}] = (Xu, w)_{R_n}$, $u, w \in R_n$, причем $C = C(\omega) \in \mathcal{L}(R_n, R_m)$ — случайный гауссов оператор, $MC = C_0$, $D \equiv M[(C - C_0) X (C - C_0)^*] \in \mathcal{L}(R_m, R_m)$ и $\{v, x, C\}$ — независимы, $Mv = 0$. Заметим, что случайная величина $y = (C - C_0)x$ имеет корреляцию вида D. Рассмотрим задачу линейного оценивания для модели $[C_0, V, D, X]$ наблюдательной системы (2.114).

Теорема 2.13. *Если оператор $C_0XC_0^* + D + V$ невырожден, то для любого оператора $B \in \mathcal{L}(R_n, R_k)$ существует единственное решение R_0 задачи (2.115). При этом*

$$R_0 = BXC_0^* (C_0XC_0^* + D + V)^{-1}, \tag{2.124}$$

$$m(B) \equiv M \| R_0r - Bx \|_{R_k}^2 = \text{след}\, B (I - XC_0^* (C_0XC_0^* + D + V)^{-1} C_0) XB^*. \tag{2.125}$$

Если операторы $D + V$, X невырождены, то

$$R_0 = B(C_0^* (D + V)^{-1} C_0 + X^{-1})^{-1} C_0^* (D + V)^{-1},$$
$$m(B) = \text{след}\, B (C_0^* (D + V)^{-1} C_0 + X^{-1}) B^*. \tag{2.126}$$

Доказательство. Уравнение Эйлера (2.115) в этом случае имеет вид

$$(RC_0 - B) XC_0^* + RD + RV = 0, \tag{2.127}$$

поскольку

$$M \| Rr - Bx \|_{R_k}^2 = M \| (RC_0 - B) x + R (C - C_0) x + Rv \|_{R_k}^2 =$$
$$= \| (RC_0 - B) X^{1/2} \|_2^2 + \| RD^{1/2} \|_2^2 + \| RV^{1/2} \|_2^2.$$

Из (2.127) следует (2.124), (2.125), причем (2.126) вытекает из (2.124), (2.125), что и требовалось.

Проанализируем содержание теоремы 2.12. Оказывается, не любой вектор Bx можно оценить, имея модель измерений вида (2.114). Так, в случае ортопроектора $B : R_n \to R_n$ оптимальная оценка Rr (2.117) существует лишь тогда, когда выполняется (2.118), т. е. при $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(C^+C)$ (иначе запишем $B \leqslant C^+C$). При этом $B = C^+C$ — максимальный ортопроектор, удовлетворяющий данному условию. Следовательно, вектор C^+Cx — максимальная составляющая x, которую можно оценить (в смысле (2.115), (2.116)) с помощью модели $[C, V]$. Составляющая $x_1 = (I - C^+C)x$ не может быть оценена, ибо наблюдение r не несет никакой информации о векторе x_1. Учитывая сказанное, можно ввести следующую классификацию моделей измерений $[C, V]$.

Модель $[C, V]$ не хуже, чем модель $[C_1, V_1]$ (запишем $[C, V] \prec [C_1, V_1]$), если

$$\begin{cases} C^+C \geqslant C_1^+C_1; \\ C_1^+C_1\hat{V}C_1^+C_1 \leqslant \hat{V}_1. \end{cases} \tag{2.128}$$

Если $C^+C = C_1^+C_1$, $\hat{V} = \hat{V}_1$, то модели считаются эквивалентными $[C, V] \sim [C_1, V_1]$. Данное отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Другими словами, определяет предпорядок на множестве моделей (см. гл. IV).

Заметим, что из $[C, V] \prec [C_1, V_1]$ следует $\mathcal{D}_C \supset \mathcal{D}_{C_1}$, и

$$\|B\hat{V}^{1/2}\|_2 \leqslant \|B\hat{V}_1^{1/2}\|_2, \quad B \in \mathcal{D}_{C_1}. \tag{2.129}$$

Последнее означает, что лучшая модель обладает более широкими возможностями линейного оценивания и имеет меньшую матрицу дисперсий ошибок оценивания. Наилучшей, конечно, является модель $[I, 0]$.

Предложение 2.6. Условия (2.129) эквивалентны предпорядку «$\prec$» на множестве всех моделей измерений

$$\{[C, V];\ C \in \mathcal{L}(R_n, R_m),\ V \in \mathcal{L}(R_m, R_m),\ V = V^* \geqslant 0\}.$$

Доказательство. Включение $\mathcal{D}_C \supset \mathcal{D}_{C_1}$ эквивалентно $\operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ker} C_1$, что означает $C^+C \geqslant C_1^+C_1$. Но $\mathcal{D}_{C_1} = \{B = YC_1^+C_1;\ Y \in \mathcal{L}(R_n, R_k)\}$ в силу свойства 7 псевдообратных операторов из п. 1°. Поэтому из условия $\|B\hat{V}^{1/2}\|_2 \leqslant \|B\hat{V}_1^{1/2}\|_2$, $B \in \mathcal{D}_{C_1}$, следует

$$\|YC_1^+C_1\hat{V}^{1/2}\|_2 \leqslant \|Y\hat{V}_1^{1/2}\|_2, \quad Y \in \mathcal{L}(R_n, R_k).$$

Последнее эквивалентно неравенству

$$\hat{V}_1 \geqslant C_1^+C_1\hat{V}C^+C,$$

что и требовалось.

Возникает естественный вопрос: что будет, если линейно преобразовать наблюдения вида (2.114)? Не улучшится ли, в общем случае, получаемая оценка? Ответ отрицательный.

Предложение 2.7. Для любых операторов $U \in \mathcal{L}(R_m, R_s)$, s — любое натуральное,

$$[C;\ V] \prec [UC;\ UVU^*].$$

Доказательство. Из условия, что $\mathcal{R}(C^*U^*) \subset \mathcal{R}(C^*)$, следует $C^+C \geqslant (UC)^+UC$. При этом

$$\inf\{M\|RUr - Bx\|_{R_k}^2 : R \in \mathcal{L}(R_s, R_x),\ RUC = B\} =$$

$$= \inf\{M\|R_1r - Bx\|_{R_k}^2 : R_1C = B,\ R_1 = RU,\ R \in \mathcal{L}(R_m, R_k)\} =$$

$$= \inf\{M\|R_1r - Bx\|_{R_k}^2 : R_1(I - U^+U) = 0,\ R_1C = B\} \geqslant$$

$$\geqslant \inf\{M\|R_1r - Bx\|_{R_k}^2 : R_1 \in \mathcal{L}(R_m, R_k),\ R_1C = B\},$$

что и требовалось.

Оказывается, в случае простейшей модели наблюдений (2.114) всегда можно ограничиться невырожденным шумом наблюдений, т. е. случаем $V > 0$. Действительно, пусть $Q = Q^*$, $Q^2 = Q$ — ортопроектор в R_m, причем $\mathcal{R}(Q) \supset \mathcal{R}(V)$. Отсюда $I - Q \leqslant I - VV^+$, или $(I - Q) v = 0$ (почти наверное), так как

$$M\|(I-Q)v\|^2 \leqslant M\|(I-VV^+)v\|^2 = \|(I-VV^+)V^{1/2}\|_2^2 = 0.$$

Модель (2.114) эквивалентна

$$\begin{cases} Qr = QCx + v, \\ (I-Q)r = (I-Q)Cx. \end{cases} \tag{2.130}$$

В (2.130) второе соотношение соответствует точным наблюдениям некоторых компонент вектора x (ср. с [89, гл. II, § 2]). Отсюда следует, что (2.130) эквивалентно

$$r_1 = C_1 x_1 + v_1, \tag{2.131}$$

где $r_1 = Qr - QCC_0^+(I-Q)r$, $C_0 = (I-Q)C$, $C_1 = QC(I - C_0^+C_1)$, $v_1 = v$. Оценка Bx имеет вид: $Bx = BC_0^+(I-Q)r + BC_0^+x_1$, где вектор $BC_0^+x_1$ оценивается на основании модели (2.131), а точная составляющая вектора Bx равна $BC_0^+(I-Q)r$.

Если $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(V)$, то (2.131) можно рассматривать как модель наблюдений с измерениями $r_1 \in \mathcal{R}(V)$, причем шум $v_1 \in \mathcal{R}(V)$ имеет уже невырожденный корреляционный оператор. (В случае нестационарной модели наблюдений подобный вопрос с иных позиций рассматривался в [89, гл. II]).

Поскольку точное знание модели $[C, V]$ наблюдательной системы на практике обычно невозможно, то возникает вопрос: как ведут себя оценки при ошибках в априорных данных. Частично этот вопрос рассматривался в [90, гл. III]. Продолжим здесь изучение этой проблемы, опираясь на приведенные выше результаты о псевдообращениях. Начнем со вспомогательного утверждения.

Предложение 2.8. Пусть v, $v_\alpha \in R_m$ — случайные векторы, R, $R_\alpha \in \mathcal{L}(R_m, R_k)$, S, $S_\alpha \in \mathcal{L}(R_m, R_k)$ — случайные операторы, $\alpha > 0$, причем

$$v = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to0} v_\alpha, \quad R = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to0} R_\alpha, \quad S = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to0} S_\alpha$$

$$\text{(т.е. } \lim_{\alpha\to0} M\|v - v_\alpha\|_{R_m}^2 = 0, \quad \lim_{\alpha\to0} M\|R - R_\alpha\|_2^2 = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to0} M\|S - S_\alpha\|_2^2 = 0).$$

Тогда

$$\|v\|_{R_m} = \lim_{\alpha\to0}\|v_\alpha\|, \quad M\|v\|_{R_m}^2 = \lim_{\alpha\to0} M\|v_\alpha\|_{R_m}^2, \quad Mv = \lim_{\alpha\to0} Mv_\alpha, \tag{2.132}$$

$$Rv = \lim_{\alpha\to0} R_\alpha v_\alpha, \quad \lim_{\alpha\to0}\|S_\alpha v_\alpha - Sv\| = 0.$$

Если V_α, V — корреляционные операторы v_α и v соответственно, то $V = \lim_{\alpha\to0} V_\alpha$. В случае независимости S_α, S и v_α, v при $\alpha > 0$ $Sv = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to0} S_\alpha v_\alpha$.

Доказательство. Поскольку $M[\| v_\alpha \|_{R_m} - \| v \|_{R_m}]^2 \leqslant \leqslant M \| v_\alpha - v \|^2_{R_m} \to 0$, $\alpha \to 0$, то отсюда следует первое равенство в (2.132). Аналогично доказываются второе и третье равенства. Четвертое вытекает из неравенства Иенсена (см., например, [89, приложение 2]). Итак,

$$M \| S_\alpha v_\alpha - Sv \|_{R_k} \leqslant M \| (S_\alpha - S) v_\alpha \|_{R_k} + M \| v_\alpha - v \|_{R_k} \leqslant$$

$$\leqslant (M \| Q_\alpha - Q \|_2^2 M \| v_\alpha \|^2)^{1/2} + (M \| S \|_2^2 M \| v_\alpha - v \|^2)^{1/2} \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

В случае независимости S_α, S и v_α, v имеем

$$M \| S_\alpha v_\alpha - Sv \|^2_{R_k} = M \| (S_\alpha - S) v_\alpha + S (v_\alpha - v) \|^2_{R_k} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \| S_\alpha - S \|_2^2 M \| v_\alpha \|^2 + 2M \| S \|_2^2 M \| v_\alpha - v \|^2_{R_m} \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Отсюда следует предложение 2.9.

Предложение 2.9. Пусть S_α, S и v_α, v независимы при $\alpha > 0$, $S = \underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, S_\alpha$, $v = \underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, v_\alpha$,

$$Z_\alpha \equiv M[S_\alpha - M[S_\alpha]] V_\alpha M[S_\alpha - M[S_\alpha]]^*.$$

Тогда

$$Z \equiv M[S - M[S]] VM[S - M[S]]^* = \lim_{\alpha \to \infty} Z_\alpha.$$

Если $R_\alpha r_\alpha$ — оценка вектора Bx в модели $[C_\alpha, V_\alpha]_{\alpha > 0}$, то назовем оценку Rr вектора Bx в модели $[C, v]$ устойчивой, если

$$Rr = \underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, R_\alpha r_\alpha$$

при условии, что

$$v = \underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, v_\alpha, \; C = \underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, C_\alpha.$$

В общем случае может либо не существовать оценка Bx в модели $[C_\alpha, V_\alpha]$, либо оценка Rr не устойчива. Рассмотрим частный случай $C \equiv C_\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, $V > 0$.

Как отмечено выше, к случаю невырожденной помехи v может быть сведена модель вида $[C, V]$ для наблюдательной системы (2.114).

Предложение 2.10. Если $V = V^*$ невырожденный оператор, то

1. Для $\alpha > 0$ имеем

$$(CC^* + \alpha V)^- = V^{-1/2} (\alpha^{-1} (I - U^+ U) + U^+ (I + \alpha U^+)^{-1}) V^{-1/2}, \qquad (2.133)$$

где

$$U = V^{-1/2} CC^* V^{-1/2},$$

$$\lim_{\alpha \to 0} C^* (CC^* + \alpha V)^{-1} = C^* V^{-1/2} U^+ V^{-1/2} = (V^{-1/2} C)^+ V^{-1/2}, \qquad (2.134)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha (CC^* + \alpha V)^{-1} = V^{-1/2} (I - V^{-1/2} C (V^{-1/2} C)^+) V^{-1/2}.$$

2. При $CC^* > 0$ имеем

$$(CC^* + \alpha V)^{-1} = \alpha^{-1} (CC^*)^{-1/2} (\alpha (I - Q^+Q) + \\ + Q^+ (I + \alpha^{-1}Q^+)^{-1}) (CC^*)^{-1/2}, \quad (2.135)$$

где $Q = (CC^*)^{-1/2}\ V\ (CC^*)^{-1/2}$.

3. Для $\alpha > 0$ имеем

$$C^* (CC^* + \alpha V)^{-1} = (I + \alpha V_1)^{-1} C^+ (I - V^{1/2} (PV^{1/2})^+),$$

где $V_1 = C^+ V^{1/2} (I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) V^{1/2} (C^*)^+$. Причем

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} C^* (CC^* + \alpha V)^{-1} = C^+ (I - V^{1/2} (PV^{1/2})^+). \quad (2.136)$$

Доказательство. Очевидно, что из невырожденности оператора V следует невырожденность оператора $CC^* + \alpha V$ при любом $\alpha > 0$, так как $CC^* \geqslant 0$. Поэтому существует $(CC^* + \alpha V)^{-1}$. Для его вычисления заметим, что

$$CC^* + \alpha V = V^{1/2} (V^{-1/2} CC^* V^{-1/2} + \alpha I) V^{1/2}.$$

Отсюда

$$(CC^* + \alpha V)^{-1} = V^{-1/2} (U + \alpha I)^{-1} V^{-1/2}.$$

Применив к оператору $(U + \alpha I)^{-1}$ лемму 2.4, получим

$$(U + \alpha I)^{-1} = \alpha^{-1} (I - U^+U) + U^+ (I + \alpha U^+)^{-1},$$

т. е. (2.133) доказано. Умножим (2.133) слева на C^*. В результате $C^* V^{-1/2} (I - U^+U) = 0$, откуда следует первое равенство в (2.134). Второе автоматически получаем из (2.133) предельным переходом при $\alpha \to 0$. Если CC^* невырожденный оператор, то, меняя в (2.133) местами V и CC^*, приходим к (2.135). При этом нужно учесть, что $(CC^* + \alpha V)^{-1} = \alpha^{-1} (\alpha^{-1} CC^* + V)^{-1}$.

Итак,

$$(I + \alpha V) C^* = C^* + \alpha C^+ V^{1/2} (I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) V^{1/2} (I - P) = \\ = C^* + \alpha C^+ V^{1/2} (I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) V^{1/2} = G,$$

поскольку

$$(I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) V^{1/2} P = V^{1/2} P - V^{1/2} P (V^{1/2} P)^+ (V^{1/2} P) = 0.$$

Кроме того,

$$\alpha C^+ V^{1/2} (I - (PV^{1/2})^+ PV^{1/2}) V^{1/2} = \alpha C^+ (I - V^{1/2} (PV^{1/2})^+) V,$$

$$C^+ (I - V^{1/2} (PV^{1/2})^+) CC^* = C^+ CC^* - C^+ V^{1/2} (PV^{1/2})^+ PCC^* = C^*,$$

так как $PC = 0$ и $C^+CC^* = C^*$. Отсюда

$$(I + \alpha V_1) C^* = G = C^+ (I - V^{1/2} (PV^{1/2})^+) (CC^* + \alpha V).$$

Из этого равенства следует (2.136), что и требовалось.

Из предложения 2.10 вытекает одно из основных утверждений этого пункта.

Лемма 2.12. *Выражение*

$$H(E, F) = E^{1/2}(F^{-1/2}CE^{1/2})^+ F^{-1/2} \in \mathscr{L}(R_m, R_n),$$

где

$$E \in \mathscr{L}(R_n, R_n), \quad F \in \mathscr{L}(R_m, R_m), \quad C \in \mathscr{L}(R_n, R_m),$$

E, F — положительно определены, определяет непрерывную функцию, от двух переменных E, $F > 0$.

Доказательство. Вначале убедимся, что $H(E, F)$ непрерывно по каждому аргументу в отдельности.

Пусть $D = CE^{1/2}$ при некотором $E \in \mathscr{L}(R_n, R_n)$, $E > 0$. Тогда

$$G \equiv DD^* + \alpha F_0 = F_0^{-1/2}(F_0^{-1/2}DD^*F_0^{-1/2} + \alpha I)^{-1} F_0^{-1/2},$$

при $\alpha > 0$ и фиксированном $F_0 \in \mathscr{L}(R_m, R_m)$, $F_0 > 0$. Если выбрать оператор $F \in \mathscr{L}(R_m, R_m)$, $F > 0$, так чтобы $\|F - F_0\| \|F_0^{-1}\| < 1$, и учесть, что для $\alpha > 0$

$$\|\alpha G\| \leqslant \|F_0^{-1/2}\|^2 = \|F_0^{-1}\|,$$

в силу леммы 2.5, (2.4), то $\|\alpha(F - F_0)G\| < 1$. Поэтому существует обратный оператор $(I + \alpha(F - F_0)G)^{-1}$ и имеет место равенство

$$D^*(DD^* + \alpha F)^{-1} = D^*G(I + \alpha(F - F_0)G)^{-1} \tag{2.137}$$

при любом $\alpha > 0$. В силу (2.134) имеем

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} D^*(DD^* + \alpha F)^{-1} = (F^{-1/2}D)^+ F^{-1/2}. \tag{2.138}$$

Правую часть (2.137) преобразуем к виду, учитывая (2.43):

$$D^*G(I + \alpha(F - F_0)G)^{-1} =$$
$$= D^*G[I + (F - F_0)F_0^{-1/2}[(I - F_0^{-1/2}D(F_0^{-1/2}D)^+) +$$
$$+ \alpha(F_0^{-1/2}DD^*F_0^{-1/2})^+(I + \alpha(F_0^{-1/2}DD^*F_0^{-1/2})^+)^{-1}]F_0^{-1/2}]. \tag{2.139}$$

Заметим, что

$$\lim_{\alpha \to 0} D^*G = \lim_{\alpha \to 0}(F_0^{-1/2}D)^*((F_0^{-1/2}D)(F_0^{-1/2}D)^* + \alpha I)^{-1} F_0^{-1/2} =$$
$$= (F_0^{-1/2}D)^+ F_0^{-1/2}$$

в силу (2.134). Поэтому из (2.139) согласно (2.138) получаем

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} D^*G(I + \alpha(F - F_0)G)^{-1} = (F_0^{-1/2}D)^+ F_0^{-1/2}[I + (F - F_0)F_0^{-1/2}(I -$$
$$- F_0^{-1/2}D(F_0^{-1/2}D)^+)F_0^{-1/2})^{-1} = (F^{-1/2}D)^+ F^{-1/2}. \tag{2.140}$$

Отсюда видно, что, выбирая оператор $F > 0$ достаточно близко к F_0 (в метрике $\mathscr{L}(R_n, R_n)$), расстояние между $H(E, F_0)$ и $H(E, F)$ можно сделать сколь угодно малым. Аналогично доказывается непрерывность

$H(E, F)$ по аргументу E, что следует из равенства

$$E^{1/2}(D_1E^{1/2})^+ = [I + E_0^{1/2}(I - (D_1E_0^{1/2})^+ D_1E_0^{1/2}) \times$$
$$\times E_0^{1/2}(E^{-1} - E_0^{-1})]^{-1} E_0^{1/2}(D_1E_0^{1/2})^+, \qquad (2.141)$$

где $D_1 = F^{-1/2}C$ при фиксированном операторе $F \in \mathscr{L}(R_m, R_m)$. Убедимся теперь, что $H(E, F)$ — непрерывная по совокупности аргументов функция. Пусть ΔE, ΔF — независимые приращения аргументов E и F. Тогда

$$\| H(E_0 + \Delta E, F_0 + \Delta F) - H(E_0, F_0) \| \leqslant \| H(E_0 + \Delta E_0, F_0 + \Delta F_0) -$$
$$- H(E_0 + \Delta E, F_0) \| + \| H(E_0 + \Delta E, F_0) - H(E_0, F_0) \|. \qquad (2.142)$$

Положим

$$D_2 \equiv F_0^{-1/2}[I - (F_0^{-1/2}C(E_0 + \Delta E)^{1/2})(F_0^{-1/2}C(E_0 + \Delta E)^{1/2})^+] F_0^{1/2} =$$
$$= F_0^{-1/2}[I - (F_0^{-1/2}C)(F_0^{-1/2}C)^+] F_0^{-1/2},$$

так как оператор $E_0 + \Delta E$ невырожден. Из (2.140) находим при $\Delta F = F - F_0$

$$H(E_0 + \Delta E, F_0 + \Delta F) = H(E_0 + \Delta E, F_0)[I + \Delta F D_2]^{-1} =$$
$$= H(E_0 + \Delta E, F_0)\{(I + \Delta F D_2)(I + \Delta F D_2)^{-1} -$$
$$- \Delta F D_2 (I + \Delta F D_2)^{-1}\} = H(E_0 + \Delta E, F_0) -$$
$$- H(E_0 + \Delta E, F_0)\Delta F D_2 (I + \Delta F D_2)^{-1}.$$

Отсюда

$$\Delta H_1 = H(E_0 + \Delta E, F_0 + \Delta F) - H(E_0 + \Delta E, F_0) =$$
$$= - H(E_0 + \Delta E, F_0)\Delta F D_2 (I + \Delta F D_2)^{-1}. \qquad (2.143)$$

Осталось учесть независимость D_2 от оператора $E_0 + \Delta E$ и непрерывность по E $H(E, F_0)$ в точке E_0. Поэтому $\| H(E, F_0) \| \leqslant K = K(F_0) < + \infty$ для любых $E > 0$ таких, что $\Delta E = E - E_0$ мало. Тогда из (2.143) следует, что

$$\| \Delta H_1 \| \leqslant K(F_0) \| \Delta F \| \| D_2 (I + \Delta F D_2)^{-1} \|,$$

причем эта оценка выполняется равномерно по E, и $\| \Delta H_1 \| \to 0$ при $\| \Delta F \| \to 0$. Аналогично с использованием (2.141) оценивается сверху второе слагаемое в (2.142), стремящееся к нулю при $\| \Delta E \| \to 0$. Лемма 2.12 доказана.

Опираясь на предложение 2.8 и лемму 2.12, можно изучить устойчивость линейной оценки (2.122). Считаем, что $V = V^* > 0$, $C_\alpha \equiv C$ при $\alpha > 0$. Пусть приближенные модели $[C_\alpha, V_\alpha]$ обладают свойством $\underset{\alpha\to 0}{\text{l.i.m.}}\, v_\alpha = v$. Тогда $\lim\limits_{\alpha\to 0} V_\alpha = V$. Но конус положительно определенных операторов имеет непустую внутренность, т. е. при достаточно малых $\alpha > 0$ операторы $V_\alpha = V_\alpha^*$ будут невырожденными. Поэтому

$$R = B(V^{-1/2}C)^+ V^{-1/2} = \lim_{\alpha\to 0} R_\alpha,$$

где $R_\alpha = B(V_\alpha^{-1/2}C)^+ V_\alpha^{-1/2}$, $\alpha > 0$. При этом $r = Cx + v = \lim_{\alpha\to 0} r_\alpha$, $r_\alpha = Cx + v_\alpha$. Итак, согласно предложению 2.8

$$Rr = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to 0} R_\alpha r_\alpha.$$

Рассмотрим более общий случай. Пусть вместо точных значений C и V в модели наблюдательной системы (2.144) известны приближенные значения $[C_h, V_\delta]$, причем $\| C - C_h \| \leqslant h$, а корреляционный оператор V_δ шума v_δ связан с истинным корреляционным оператором V соотношением $M \| v_\delta - v \|^2_{R_m} \leqslant \delta$. Для изучения этой ситуации понадобится вспомогательное утверждение.

Предложение 2.11. Если оператор $W = CC^* + \alpha V$, $\alpha > 0$, невырожден, то справедливы следующие оценки:

$$\| C^*W^{-1/2} \| \leqslant 1,\ \| V^{1/2}W^{-1/2} \| \leqslant \alpha^{-1/2},\ \| C^*W^{-1}C \| \leqslant 1, \tag{2.144}$$

причем равномерно по операторам C и V при $0 < \alpha < \alpha_0$, $W_0 = CC^* + \alpha_0 V$,

$$\begin{gathered} \| W^{-1} \| \leqslant 2\alpha^{-1}\alpha_0 \| W_0^{-1} \|, \\ \| C^*W^{-1} \| \leqslant \alpha_0(\alpha_0 - \alpha)^{-1} \| (W_0^{-1/2}C)^+ \| \| W_0^{-1} \|; \end{gathered} \tag{2.145}$$

для любого $\alpha \in (0, \alpha_1) \subset (0, \alpha_0)$

$$\| C^*W^{-1} \| \leqslant \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_1} \| (W_0^{-1/2}C)^+ \| \| W_0^{-1} \|. \tag{2.146}$$

Доказательство. Заметим, что для любого $z \in R_m$

$$\| W^{1/2}z \|^2 = \| C^*z \|^2 + \alpha \| V^{1/2}z \|^2.$$

Поэтому

$$\| C^*z \| \leqslant \| W^{1/2}z \|,\ \| V^{1/2}z \| \leqslant \alpha^{-1/2} \| W^{1/2}z \|. \tag{2.147}$$

Полагая в (2.147) $z = W^{-1/2}u$, $u \in R_m$, получаем (2.144). Для $0 < \alpha < \alpha_0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} W^{-1} = W_0^{-1/2} \Big[& \frac{\alpha_0}{\alpha} [I - (C^*W_0^{-1/2})^+ C^*W_0^{-1/2}] + \\ & + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha} (W_0^{-1/2}CC^*W_0^{-1/2})^+ \times \\ & \times \left(I + \frac{\alpha}{\alpha_0 - \alpha} (W_0^{-1/2}CC^*W_0^{-1/2})^+ \right)^{-1} \Big] W_0^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.148}$$

получаемое аналогично (2.133). Отсюда

$$\| W^{-1} \| \leqslant \frac{\alpha_0}{\alpha} \| W_0^{-1/2} \|^2 + \frac{\alpha_0}{\alpha} \| W_0^{-1/2} \|^2 = 2\frac{\alpha_0}{\alpha} \| W_0^{-1} \|,$$

поскольку $(I - (C^*W_0^{-1/2})^+ C^*W_0^{-1/2})$ — ортопроектор, а

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha} \left\| (W_0^{-1/2}CC^*W_0^{-1/2})^+ \left[I + \frac{\alpha}{\alpha_0 - \alpha} (W_0^{-1/2}CC^*W_0^{-1/2})^+ \right]^{-1} \right\| \leqslant 1,$$

в силу (2.45) и того, что $(AA^*)^+ = (A^+)^* A^+$. Из (2.148) находим

$$C^* W^{-1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha} (W_0^{-1/2} A)^+ \left[I + \frac{\alpha}{\alpha_0 - \alpha} (W_0^{-1/2} C C^* W_0^{-1/2})^+ \right]^{-1} W_0^{-1/2},$$

учитывая, что

$$C^* W_0^{-1/2} [I - (C^* W_0^{-1/2})^+ C^* W^{-1/2}] = 0,$$

откуда получаем неравенства (2.145), (2.146).

Теорема 2.14. *Пусть заданы последовательности* $\{C_\alpha\}, \{V_\alpha\}, 0 < \alpha < < \alpha_1 < \alpha_0$, *причем все операторы* W, $C_\alpha C_\alpha^* + \alpha V_\alpha$ *положительно определены при* $0 < \alpha < \alpha_1$ *и выполняются условия*

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\| C_\alpha - C \|}{\alpha} = 0, \quad \underset{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}}{\mathrm{l.i.m.}}\, v_\alpha = v. \tag{2.149}$$

Тогда

$$\mathrm{l.i.m.}\, C_\alpha^* (C_\alpha C_\alpha^* + \alpha V_\alpha)^{-1} r_\alpha = (V^{-1/2} C)^+ V^{-1/2} r,$$

где

$$r_\alpha = C_\alpha x + v_\alpha, \quad r = Cx + v.$$

Доказательство. Оценим сначала норму выражения

$$P \equiv C_\alpha^* W_\alpha^{-1} - C^* W^{-1}, \quad \text{где } W_\alpha = C_\alpha C_\alpha^* + \alpha V_\alpha.$$

Для этого, преобразуя P, получаем

$$P = (C_\alpha^* - C^*) W^{-1} + C_\alpha^* W_\alpha^{-1} [C_\alpha (C^* - C_\alpha^*) + (C - C_\alpha) C^* +$$
$$+ \alpha (V - V_\alpha)] W^{-1} = (I - C_\alpha^* W_\alpha^{-1} C_\alpha)(C_\alpha^* - C^*) W^{-1} +$$
$$+ (P + C^* W^{-1}) [(C - C_\alpha) C^* + \alpha (V - V_\alpha)] W^{-1}.$$

Отсюда, учитывая предложение 2.11, находим

$$\| P \| \leqslant \alpha_0 \| W_0^{-1} \| \left\{ \frac{4 \| C_\alpha - C \|}{\alpha} + \right.$$
$$+ \left(\| P \| + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_1} \| (W_0^{-1/2} C)^+ \| \| W_0^{-1} \| \right) \times$$
$$\times \left. \left(\frac{\| (W_0^{-\frac{1}{2}} C)^+ \| \| C_\alpha - C \|}{\alpha_0 - \alpha_1} + 2 \| V - V_\alpha \| \right) \right]. \tag{2.150}$$

Из второго условия (2.149) согласно предложению 2.8 следует, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} \| V - V_\alpha \| = 0$. Поэтому из (2.150) находим $\lim\limits_{\alpha \to 0} \| P \| = 0$, учитывая также первое условие (2.149). Поскольку на основании (2.134)

$$\lim_{\alpha \to 0} C^* W^{-1} = (V^{-1/2} C)^+ V^{-1/2},$$

то достаточно оценить разность

$$M \| C_\alpha^* W_\alpha^{-1} r_\alpha - C^* W^{-1} r \|^2 \leqslant M \| C_\alpha^* W_\alpha^{-1} (r_\alpha - r) + Pr \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2M \| C_\alpha^* W_\alpha^{-1} (r_\alpha - r) \|^2 + 2M \| Pr \|^2. \tag{2.151}$$

Но

$$\|C_\alpha^* W_\alpha^{-1}(r_\alpha - r)\|^2 \leqslant \|P + C^* W^{-1}\|^2 \|(C_\alpha - C)x + v_\alpha - v\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\|P\| + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_1}\|W_0^{-1}\|\|(W_0^{-1}C)^+\|\right)^2 (\|C_\alpha - C\|^2\|x\|^2 + \|v_\alpha - v\|^2),$$

откуда

$$M\|C_\alpha^* W_\alpha^{-1}(r_\alpha - r)\|^2 \leqslant 0, \quad \alpha \to 0. \tag{2.152}$$

Далее,

$$M\|Pr\|^2 \leqslant \|P\|^2 M\|r\|^2 \to 0, \quad \alpha \to 0. \tag{2.153}$$

Из (2.152), (2.153) вытекает сходимость к нулю выражения в (2.151) при $\alpha \to 0$, что и требовалось.

Для устойчивого нахождения приближенных линейных оценок на основании приближенных моделей $[C_h, V_\delta]$ выберем $\alpha = \alpha(h, \delta)$ так, чтобы

$$\lim_{(h,\delta)\to 0} \frac{h}{\alpha(h, \delta)} = 0. \tag{2.154}$$

Тогда оценка

$$R_{h,\delta}r = BC_h^*(C_h C_h^* + \alpha(h, \delta)V_\delta)^{-1} r \tag{2.155}$$

может рассматриваться как аппроксимация точной оптимальной оценки $R_0 r$ из (2.117). Это следует из неравенства $M\|R_0 r - R_{h,\delta}r\|^2 \leqslant \leqslant 2M\|R_0 r - R_{h,\delta}r_{h,\delta}\|^2 + 2M\|R_{h,\delta}(r_{h,\delta} - r)\|^2$, слагаемые с правой части которого стремятся к нулю при $(h, \delta) \to 0$ в силу теоремы 2.14 и предложения 2.8.

Изложенные результаты применимы к изучению ситуации, в которой «полезный» вектор является полностью априори неопределенным (иными словами, неизвестны никакие его вероятностные характеристики). В модели наблюдательной системы (2.114)

$$r = Cx + v$$

точно известны: оператор $C \in \mathscr{L}(R_n, R_m)$, $Mv = 0$ и корреляционный оператор V шума v, $V = V^* \geqslant 0$. Предположим, что имеется последовательность «приближенных» моделей системы (2.114)

$$r_\alpha = C_\alpha x_\alpha + v_\alpha, \quad \alpha > 0, \tag{2.156}$$

где $Mv_\alpha = 0$, $Mx_\alpha = 0$, X_α и V_α — корреляционные операторы соответственно x_α и v_α. При этом

$$\begin{gathered} V = \lim_{\alpha\to 0} V_\alpha, \quad C = MC_\alpha = \underset{\alpha\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, C_\alpha, \\ \lim_{\alpha\to 0} \alpha X_\alpha = I_{R_n}, \quad \lim_{\alpha\to 0} D_\alpha = D, \end{gathered} \tag{2.157}$$

где $D_\alpha = M[(C_\alpha - C)X_\alpha(C_\alpha - C)^*] \in \mathscr{L}(R_m, R_m)$. Из (2.157) следует, что для любого $N > 0$ найдется такое $\alpha_0 > 0$, что $X_\alpha \geqslant NI_{R_n}$ при всех $0 < \alpha < \alpha_0$. В самом деле, для любого $z \in R_n$ имеем

$$(X_\alpha z, z) \geqslant \frac{1}{\alpha}(z, z) - \frac{1}{\alpha}|((\alpha X_\alpha - I) z, z)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha}(1 - \|\alpha X_\alpha - I\|)\|z\|^2 \to \infty, \ \alpha \to 0.$$

Значит, дисперсия случайной векторной величины x_α при уменьшении α возрастает до ∞. Это и означает априорную неопределенность вектора x. Пусть, наконец, оператор $D + V$ положительно определен. Тогда справедлива теорема 2.15.

Теорема 2.15. *Пусть в (2.156), (2.157) существуют пределы*

$$v = \underset{\alpha\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, v_\alpha, \quad g = \underset{\alpha\to 0}{\text{l.i.m.}}\, g_\alpha, \tag{2.158}$$

где $g_\alpha = (C_\alpha - C)\, x_\alpha$ *и оператор* $B \in \mathcal{D}_C$ *из (2.118).*

Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} R_\alpha = R = B\,((D+V)^{-1/2} C)^+ (D+V)^{-1/2}, \tag{2.159}$$

где $R_\alpha = BX_\alpha C^* (CX_\alpha C^* + (D_\alpha + V_\alpha))^{-1}$ *— оператор вида (2.124) оценки вектора* Bx_α. *При этом дисперсия ошибки* α*-модели*

$$m_\alpha(B) = M\|R_\alpha r_\alpha - Bx_\alpha\|^2 =$$

$$= \text{след}\, B\,[I - X_\alpha C^* (CX_\alpha C^* + (D_\alpha + V_\alpha))^{-1} C]\, X_\alpha B^*$$

обладает свойством

$$\lim_{\alpha\to 0} m_\alpha(B) = \text{след}\, B\,(C^*(D+V)^{-1} C)^+ B^* \tag{2.160}$$

и

$$\underset{\alpha\to 0}{\text{l.i.m.}}\,(R_\alpha r_\alpha - B\hat{x}_\alpha) = 0. \tag{2.161}$$

Доказательство. Пусть $R_\alpha(E, F) = BEC^*\,(CEC^* + \alpha F)^{-1}$, $\alpha > 0$, E, F — положительно определенные операторы. В соответствии с предложением 2.10 существует предел

$$R(E, F) = \lim_{\alpha\to 0} R_\alpha(E, F) = BE^{1/2}(F^{-1/2}CE^{1/2})^+ F^{-1/2}. \tag{2.162}$$

При этом

$$\Delta R_1 = R_\alpha(E, F) - R(E, F) =$$

$$= -\alpha BE^{1/2}(F^{-1/2}CE^{1/2})^+ Q^+ (I + \alpha Q^+)^{-1} F^{-1/2}, \tag{2.163}$$

где $Q = F^{-1/2}CEC^*F^{-1/2}$. В самом деле, учитывая лемму 2.4, получаем

$$\Delta R_1 = BE^{1/2}[E^{1/2}C^*F^{1/2}(F^{-1/2}CEC^*F^{-1/2} + \alpha I)^{-1} - (F^{-1/2}CE^{1/2})^+]\, F^{-1/2} =$$

$$= BE^{1/2}[\alpha^{-1}(E^{1/2}C^*F^{-1/2} - (E^{1/2}C^*F^{-1/2})(E^{1/2}C^*F^{-1/2})^+ \times$$

$$\times (E^{1/2}C^*F^{-1/2})) + E^{1/2}C^*F^{-1/2}Q^+(I + \alpha Q^+)^{-1} -$$

$$- (F^{-1/2}CE^{1/2})^+]\, F^{-1/2} = BE^{1/2}[E^{1/2}C^*F^{-1/2}(F^{-1/2}CEC^*F^{-1/2})^+ -$$

$$- (F^{-1/2}CE^{1/2})^+ - \alpha(F^{-1/2}CE^{1/2})^+ Q^+]\,(I + \alpha Q^+)^{-1} F^{-1/2}.$$

Откуда следует (2.163), так как $A^* (AA^*)^+ = A^+$, $A^* = E^{1/2} C^* F^{-1/2}$. Из (2.163) находим оценку $\| \Delta R_1 \|$:

$$\| \Delta R_1 \| \leqslant \alpha \| BE^{1/2} (F^{-1/2} CE^{1/2})^+ Q^+ \| \| F^{-1/2} \|, \tag{2.164}$$

поскольку $Q = AA^*$, $Q^+ = (A^+)^* A^+$ и

$$\| (I + \alpha Q^+)^{-1} \| = \alpha^{-1} \| (\alpha^{-1} I + (A^+)^* A^+)^{-1} \| \leqslant \alpha^{-1} \alpha = 1$$

согласно (2.45).

Далее,

$$\Delta R_2 = R(E, F) - R(I, F_0) = B [Z (I + Z)^{-1} \times$$
$$\times (F_0^{-1/2} C)^+ F_0^{-1/2} Y (I + Y)^{-1} - Z (I + Z)^{-1} (F_0^{-1/2} C)^+ F_0^{-1/2} -$$
$$- (F_0^{-1/2} C)^+ F_0^{-1/2} Y (I + Y)^{-1}], \tag{2.165}$$

где

$$Z = (I - C^+ C)(E^{-1} - I),$$
$$Y = (F - F_0) F_0^{-1/2} (I - F_0^{-1/2} C (F_0^{-1/2} C)^+) F_0^{-1/2}.$$

Учитывая лемму 2.12, получаем, что при $\| E - I \| \to 0$, $\| F - F_0 \| \to \to 0$ будет $\| Z \| \to 0$, $\| Y \| \to 0$,. т. е. $\| \Delta R_2 \| \to 0$. Положим в (2.162) — (2.165) $E = \alpha X_\alpha$, $F = D_\alpha + V_\alpha$, $F_0 = D + V$. Тогда

$$\| R_\alpha (E, F) - R(I, F_0) \| \leqslant \| R_\alpha (E, F) -$$
$$- R(E, F) \| + \| R(E, F) - R(I, F_0) \| \to 0,$$
$$\alpha \to 0, \quad \alpha > 0.$$

Соотношение (2.159) доказано. Вид дисперсии ошибки $m_\alpha B$ α-модели находим из теоремы 2.13, где $C_0 = C$, $X = X_\alpha$, $V + D = V_\alpha + + D_\alpha$. Для доказательства (2.160) заметим, что

$$m_\alpha (B) = \text{след } [B - R_\alpha (\alpha X_\alpha, D_\alpha + V_\alpha) C] (\alpha X_\alpha) B^*.$$

Из (2.163) находим, прибавляя и вычитая $R(E, F) C$,

$$\Delta B_\alpha = B - R_\alpha (E, F) C = B - BE^{1/2} C (F^{-1/2} CE^{1/2})^+ F^{-1/2} C +$$
$$+ \alpha BE^{1/2} (F^{-1/2} CE^{1/2})^+ Q^+ (I + \alpha Q^+)^{-1} F^{-1/2} C. \tag{2.166}$$

С другой стороны,

$$\Delta B = B - BE^{1/2} (F^{-1/2} CE^{1/2})^+ F^{-1/2} C = B (I - E^{1/2} (CE^{1/2})^+ C),$$

так для любого невырожденного оператора S справедливо $(SA)^+ SA = = A^+ A$.

Для упрощения последнего выражения отметим, что, согласно [4, с. 73], справедливо тождество

$$E^{1/2} (CE^{1/2})^+ = E^{1/2} [I - E^{-1/2} (I - C^+ C) [E^{-1/2} (I - C^+ C)]^+] E^{-1/2} C^+ =$$
$$= C^+ - (I - C^+ C) [E^{-1/2} (I - C^+ C)]^+ E^{-1/2} C^+.$$

Кроме того, $B (I - C^+ C) = 0$, поскольку $B \in \mathcal{D}_C$. Отсюда

$$\Delta B = B (I - C^+ C) (I + [E^{-1/2} (I - C^+ C)]^+ E^{-1/2} C^+) = 0$$

В (2.166) положим $E = \alpha X_\alpha$, $F = D_\alpha + V_\alpha$. Тогда в силу леммы 2.35

$$m_\alpha(B) = \text{след}\, \Delta B_\alpha(\alpha X_\alpha,\ D_\alpha + V_\alpha)(D_\alpha + V_\alpha) B^*$$

является непрерывной функцией аргументов αX_α и $(D_\alpha + V_\alpha)$. Из (2.157) следует, что $\alpha X_\alpha \to I$, $D_\alpha + V_\alpha \to D + V$, $\alpha \to 0$. Поэтому

$$Q_\alpha \equiv (D_\alpha + V_\alpha)^{-1/2} C(\alpha X_\alpha) C^* (D_\alpha + V_\alpha)^{-1/2} \to Q = \\ = (D+V)^{-1/2} CC^* (D+V)^{-1/2},$$

откуда

$$\Delta B_\alpha = B(\alpha^{1/2} X_\alpha^{1/2})((D_\alpha + V_\alpha)^{-1/2} C(\alpha X_\alpha^{1/2}))^+ Q_\alpha^+ (I + \alpha Q_\alpha^+)^{-1} \times \\ \times (D_\alpha + V_\alpha)^{-1/2} C \to B((D+V)^{-1/2} C)^+ Q(D+V)^{-1/2} C = \\ = B((D+V)^{-1/2} C)^+ ([(D+V)^{-1/2} C]^*)^+ = \\ = B(C^*(D+V)^{-1} C)^+, \quad \alpha \to 0.$$

Отсюда следует (2.160). Итак,

$$R_\alpha r_\alpha - B\hat{x}_\alpha = R_\alpha(C_\alpha x_\alpha + v_\alpha) - R(Cx_\alpha + v + g_\alpha) = \\ = (R_\alpha - R) Cx_\alpha + R_\alpha(g_\alpha + v_\alpha) - R(v + g_\alpha).$$

На основании предложения 2.8 и условия (2.158) имеем

$$\underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, R(v + g_\alpha) = R(v + g),$$

$$\underset{\alpha \to 0}{\text{l.i.m.}}\, R_\alpha(g_\alpha + v_\alpha) = R(v + g).$$

В то же время

$$M\|(R_\alpha - R) Cx_\alpha\|^2 = \|(R_\alpha - R) CX_\alpha^{1/2}\|_2^2$$

в силу (2.119). Поскольку $B \in \mathcal{D}_C$, то $BZ = 0$. Из (2.164) и (2.165) в этом случае получаем

$$\|(R_\alpha - R) CX_\alpha^{1/2}\|_2^2 \leqslant 2(\|\Delta R_1\|_2^2 + \|\Delta R_2\|_2^2) \leqslant \\ \leqslant \alpha^2 \text{const} \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Итак, (2.161) доказано, что и требовалось.

Теорема 2.15 показывает, что при сделанных предположениях приближенные α-модели можно использовать для аппроксимации оценки полезного вектора x, априори полностью неопределенного, причем устойчивым образом. Однако следует учитывать, что условия (2.157) показывают наличие в предельной модели наблюдательной системы корреляции $D + V$, а не V.

Отметим, что приведенные в этом пункте результаты для простейшей модели наблюдательной системы (2.144) переносятся на случай наблюдений случайных процессов с бесконечномерным пространством реализаций, включая случай сепарабельных банаховых пространств.

3°. Об управлении структурой измерительно-вычислительного комплекса. Еще раз вернемся к модели наблюдений (2.114):

$$r = Cx + v.$$

Оператор C, как указывалось в [90, гл. III], называется оператором наблюдений, и он обычно интерпретируется как прибор (линейного типа), с помощью которого производятся наблюдения за полезным сигналом x. Одна из важных задач планирования эксперимента состоит в управлении структурой наблюдательной системы, т. е. в подборе оператора C более удовлетворительным для целей эксперимента способом и уменьшении, если это возможно, шума наблюдений v, причем автоматически или полуавтоматически. В [90, гл. III] рассматривались некоторые формализации этой проблемы и соответствующие методы решения. Здесь, опираясь на теорию псевдообратных операторов, изложим подход, предложенный в [120]. Рассмотрим абстрактную постановку задачи управления структурой ИВК применительно к модели (2.114), а далее разберем одну частную, но практически важную проблему в развитии данной методики.

Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторое множество линейных непрерывных отображений $C: H \to F$, где H, F — сепарабельные гильбертовы пространства; $v: \Omega \to E$, где $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, v — случайный элемент (см. подробнее [89, приложение 2]), причем $M \| v(\omega)\|_F^2 < < \infty$. Корреляционный оператор V, как известно, определяется равенством

$$(Vf_1, f_2)_F = M[(f_1, v)_F (f_2, v)_F], \quad \forall f_1, f_2 \in F.$$

Отсюда $V = V^* \geqslant 0$, $\|V\| \leqslant M\|v\|_F^2$ и $M[f, v)_F^2 = \|V^{1/2}f\|_F^2$, $f \in F$. Отметим, что $V^{1/2}: F \to F$ — оператор Гильберта—Шмидта, поскольку

$$M\|v\|_F^2 = \sum_{n=1}^{\infty} M(v, f_n)_F^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|V^{1/2}f_n\|_n^2 = \|V^{1/2}\|_F^2 < +\infty,$$

где $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любой ортонормированный базис в F. Пусть $Mv = = \Theta_F$, где $(f, Mv)_F = M(f, v)_F$, $f \in F$.

На $\mathfrak{C}$ определена функция $G(\cdot)$ со значениями в частично упорядоченном пространстве $(x, \leqslant)$, задающая качество в $\mathfrak{C}$: если $G(C_1) \leqslant G(C_2)$, то считаем, что качество структуры наблюдений, описываемой оператором C_1, лучше, чем $C_2 \in \mathfrak{C}$. Рассмотрим формальное линейное преобразование наблюдений (2.114)

$$Rr = RCx + Rv = Bx + (RC - B)x + Rv, \tag{2.167}$$

где R, B — линейные непрерывные операторы. Слагаемое $(RC - B)x$ называется ложным шумом. Выбор R и B следует производить так, чтобы уменьшить влияние шумов (истинного и ложного): Rv и $(RC - - B)x$ и одновременно увеличить качество оператора B. Одна из формализаций этой идеи такова: нужно рассмотреть вариационную задачу

$$\inf\{\|RC - B\| : R \in \mathcal{L}(F, F),\ M\|Rv\|_F^2 \leqslant \varepsilon,$$
$$B \in \mathfrak{C},\ G(B) \leqslant \delta \in X\} = d_{\varepsilon,\delta}. \tag{2.168}$$

Решение этой задачи $R_{\varepsilon,\delta}$, $B_{\varepsilon,\delta}$ обеспечивает качество наблюдений не хуже, чем δ, а уровень шума не превосходит $\varepsilon > 0$.

Поскольку бесконечномерный случай требует уточнения постановки задачи управления (2.167), (2.168), вначале рассмотрим конечномерный случай: $H = R_n$, $F = R_m$, $X = R_1^+ = [0, \infty)$. При этом естественно начать с более простой задачи оптимизации, чем (2.168):

$$\inf\{\|RC - B\|_2 : R \in \mathscr{L}(R_m, R_m),\ M\|Rv\|^2_{R_m} \leqslant \varepsilon,$$
$$B \in \mathfrak{C},\ B\text{ — фиксирован}\} = d_\varepsilon. \qquad (2.169)$$

С учетом неравенства (2.30) минимизация $\|RC - B\|_2$ приведет к выбору малой евклидовой нормы $\|RC - B\|$. Поэтому решение R_ε задачи (2.169) можно называть «рациональным» решением (оператор R_ε, вообще говоря, не является минимизирующим евклидову норму $\|RC - B\|$). Норма $\|\cdot\|_2$ в (2.169) введена для упрощения выкладок. Пусть в дальнейшем V — положительно определенный оператор. Поставленная задача (2.169) решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.16. *Если* $\mathcal{R}(B)^* \not\subseteq \operatorname{Ker}[(C^*V^{-1}C)^+]$, *то решение* R_ε *задачи (2.169) имеет вид*

$$R_\varepsilon = \begin{cases} R_\alpha = BC^*Q_\alpha^{-1}, & \alpha = \alpha_\varepsilon > 0,\quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ B(V^{-1/2}C)^+ V^{-1/2}, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \end{cases}$$

где

$$Q_\alpha = CC^* + \alpha V,\ \varepsilon_0 = \|B[(C^*V^{-1}C)^+]^{1/2}\|_2^2,$$

$\alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(C, V, B)$ *— единственный корень алгебраического уравнения*

$$m_\alpha(B) = \|BC^*Q_\alpha^{-1}V^{1/2}\|_2^2 = \varepsilon. \qquad (2.170)$$

При этом

$$M\|R_\varepsilon v\|^2 = \begin{cases} \varepsilon, & 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \varepsilon_0, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \end{cases}$$

$$\|R_\varepsilon C - B\|_2^2 = \begin{cases} \|B(I - C^*Q_\alpha^{-1}C)\|_2^2, & \alpha = \alpha_\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \|B(I - C^+C)\|_2^2, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0. \end{cases}$$

Если $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \operatorname{Ker}[(C^*V^{-1}C)^+]$, *то при* $\varepsilon \geqslant 0$

$$R_\varepsilon = BC^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+),\quad P = I - CC^+,$$

причем $R_\varepsilon r = BC^+Cx$ *(почти наверное) и*

$$\|R_\varepsilon C - B\|_2^2 = \|B(I - C^+C)\|_2^2.$$

Доказательство. Запишем функцию Лагранжа

$$L(\alpha, R) = \|RC - B\|_2^2 + \alpha\|RV^{1/2}\|_2^2,\ \alpha \geqslant 0$$

выпуклой задачи (2.169). Условия

$$(RC - B)C^* + \alpha RV = 0,\quad \alpha \geqslant 0,$$
$$\alpha(\|RV^{1/2}\|_2^2 - \varepsilon) = 0,\ \|RV^{1/2}\|_2^2 \leqslant \varepsilon \qquad (2.171)$$

задают седловую точку и решение задачи (2.169) для $\varepsilon > 0$. Из (2.171) находим

$$R = R_\alpha = BC^*Q_\alpha^{-1} = B(I + \alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}C^+ \times$$
$$\times (I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+), \qquad (2.172)$$

причем функция

$$m_\alpha(B) = \|RV^{1/2}\|_2^2 = \|BC^*Q_\alpha^{-1}V^{1/2}\|_2^2 =$$
$$= \|B(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}[(C^*V^{-1}C)^+]^{1/2}\|_2^2$$

не возрастает по $\alpha \in (0, +\infty)$,

$$\frac{dm_\alpha(B)}{d\alpha} = -2\,\text{след}\,[B(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-2}((C^*V^{-1}C)^+)^3 \times$$
$$\times (I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}B^*] = 0,$$

в том и только в том случае, когда

$$\text{Ker}\,[(C^*V^{-1}C)^+(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}B^*] = R_k,$$

что означает $\mathcal{R}(B^*) \subset \text{Ker}\,[(C^*V^{-1}C)^+]$. В противном случае функция $m_\alpha(B)$ строго монотонно убывает на $(0, +\infty)$ и

$$\sup\{m_\alpha(B) : 0 < \alpha < +\infty\} = \lim_{\alpha\to 0+0} m_\alpha(B) =$$
$$= \|B(V^{-1/2}C)^+\|_2^2 = \text{след}\,[B(V^{-1/2}C)^+(C^*V^{-1/2})^+B^*] =$$
$$= \text{след}\,[B(C^*V^{-1}C)^+B^*] = \|B[(C^*V^{-1}C)^+]^{1/2}\|_2^2 = \varepsilon_0. \qquad (2.173)$$

Поэтому уравнение (2.170) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет единственный корень $\alpha = \alpha_\varepsilon$ и оператор $R_\varepsilon = K_{\alpha_\varepsilon}$ есть решение (2.171), а также задачи (2.169).

Если $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$, то (2.171) выполняется при $\alpha = 0$, и поэтому

$$R_\varepsilon = \lim_{\alpha\to 0} R_\alpha = B\lim_{\alpha\to 0} C^*V^{-1/2}(V^{-1/2}CC^*V^{1/2}+\alpha I)^{-1}V^{-1/2} =$$
$$= B(V^{-1/2}C)^+V^{-1/2}.$$

При этом согласно (2.173) $\|R_\varepsilon V^{1/2}\|_2^2 = \|B(V^{-1/2}C)^+\|_2^2 = \varepsilon_0$, а $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$. Если $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \text{Ker}\,[(C^{*-1}C)^+]$, то $m_\alpha(B) = \text{след}\,[BC^*Q_\alpha^{-1}VQ_\alpha^{-1}CB^*] = \text{след}\,[B(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}C^+V^{1/2}(I-(PV^{1/2})^+PV^{1/2})(I-V^{1/2}P\times$ $\times(V^{1/2}P)^+)V^{1/2}(C^*)^+(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}B^*] = \text{след}\,[B(I+\alpha\times$ $\times(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}(V^{-1/2}C)^+(C^*V^{-1/2})^+(I+\alpha(C^*V^{-1}C)^+)^{-1}B^*]$. Отсюда $m_\alpha(B) = 0$, поскольку $(V^{-1/2}C)^+(C^*V^{-1/2})^+ = (C^*V^{-1}C)^+$ для любого $\alpha \geqslant 0$. Поэтому в (2.171) $\alpha = 0$, и оператор

$$R_\varepsilon = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} R_\alpha = BC^+(I - V^{1/2}(PV^{1/2})^+)$$

удовлетворяет первому уравнению в (2.171). Заметим, что $R_\varepsilon r = R_\varepsilon Cx - R_\varepsilon v = BC^+Cx - BC^+V^{1/2}(PV^{1/2})^+Cx + R_\varepsilon v = BC^+Cx$ (почти наверное), так как $M\|R_\varepsilon v\|^2 = \|B[(C^*V^{-1}C)^+]^{1/2}\|_2^2 = 0$ и $BC^+V^{1/2}\times$ $\times(PV^{1/2})^+C = BC^+V^{1/2}(PV^{1/2})^+PC = 0$, ибо $PC = 0$. Теорема 2.15 доказана.

Уточним теперь постановку задачи управления ИВК (2.167), (2.168) в случае гильбертовых пространств. Сложность состоит в том, что некоторые линейные операторы, участвующие в постановке задачи, сказываются неограниченными. Так, корреляционный оператор V, будучи компактным, не может иметь ограниченного обратного V^{-1}.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(F, H_2)$ — гильбертово пространство всех операторов Гильберта — Шмидта, действующих из F в H_2, где H_2 — некоторое гильбертово пространство, со скалярным произведением

$$(A_1, A_2)_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 f_n, A_2 f_n)_{H_2}, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{H},$$

где $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в F, и нормой $\| A \|_2^2 = (A, A)_2$, $A \in \mathcal{H}$. Для упрощения выкладок предположим, что оператор V имеет алгебраический обратный V^{-1}, а линейный оператор $Z = V^{-1/2} C$ плотно определен и замкнут. При этом оператор $C^* V^{-1/2}$ замыкаем, поскольку $Z = (C^* V^{-1/2})^*$ и $\overline{C^* V^{-1/2}} = Z^*$. Поэтому операторы $(ZZ^* + \alpha I)^{-1}$ и $Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1}$, $\alpha > 0$, существуют, определены всюду в F и непрерывны [126, с. 327]. Причем

$$\|(ZZ^* + \alpha I)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1}, \quad \|Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1/2}. \tag{2.174}$$

Аналогично убеждаемся, что определены всюду и непрерывны линейные операторы

$$\overline{(Z^*Z + \alpha I)^{-1} Z^*} = Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1},$$
$$\overline{Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1} Z} = Z^*Z(Z^*Z + \alpha I)^{-1} = I - \alpha (Z^*Z + \alpha I)^{-1}. \tag{2.175}$$

Рассмотрим самосопряженный оператор $Q_\alpha = CC^* + \alpha V$, $\alpha > 0$. Для любого $x \in F$, $x \neq \Theta_F$, справедливо

$$(Q_\alpha x, x)_F = \alpha (Vx, x)_F + \| C_x^* \|_F^2 > 0, \tag{2.176}$$

так как V невырожден. Поэтому существует обратный оператор Q_α^{-1}, который плотно определен и замкнут в силу самосопряженности Q_α^{-1}. Оператор $Q_\alpha^{1/2}$ можно рассматривать как действующий в $\mathcal{H}$, причем

$$\| A Q_\alpha^{1/2} \|_2 \leqslant \| A \|_2 \| Q_\alpha^{1/2} \|_{\mathcal{L}(F,F)}, \quad A \in \mathcal{H}. \tag{2.177}$$

Поэтому в $\mathcal{H}$ можно ввести негативную норму

$$\| A \|_-^2 = \| A Q_\alpha^{1/2} \|_2^2, \quad A \in \mathcal{H}.$$

Пополняя $\mathcal{H}$ по этой норме, получим негативное гильбертово пространство $\mathcal{H}_-$ (см. [89, приложение 1]). Поскольку область определения $\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2})$ не зависит от $\alpha > 0$, то и $\mathcal{H}_-$ не зависит от выбора $\alpha > 0$. В самом деле, из (2.176) находим, что

$$\alpha^{1/2} \| V^{1/2} x \|_F \leqslant \| Q_\alpha^{1/2} x \|_F, \quad \| C^* x \|_F \leqslant \| Q_\alpha^{1/2} x \|_F, \quad x \in F.$$

Но

$$x \in \mathcal{R}(Q_\alpha^{-1/2}) = F, \text{ т. е. } \alpha^{1/2} \| V^{1/2} Q_\alpha^{-1/2} y \|_F \leqslant \| y \|_F,$$
$$\| C^* Q_\alpha^{-1/2} y \|_F \leqslant \| y \|_F, \quad x \in Q_\alpha^{-1/2} y, \quad y \in \mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}).$$

Значит, операторы $V^{1/2}Q_\alpha^{-1/2}$ и $C^*Q_\alpha^{-1/2}$ ограничены на всюду плотном в F линейном подмножестве $\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2})$. Замыкание этих операторов удовлетворяет неравенствам

$$\|\overline{V^{1/2}Q_\alpha^{-1/2}}\| \leqslant \alpha^{-1/2}, \quad \|\overline{C^*Q_\alpha^{-1/2}}\| \leqslant 1. \tag{2.178}$$

Причем сопряженные $Q_\alpha^{-1/2}V^{1/2}$ и $Q_\alpha^{-1/2}C$ также ограничены в силу (2.178) и определены всюду в F. Итак,

$$\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}) \supseteq \mathcal{R}(V^{1/2}), \quad \mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}) \supseteq \mathcal{R}(C),$$

т. е.

$$\mathcal{R}(C) + \mathcal{R}(V^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}). \tag{2.179}$$

В то же время, если $x \in \mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2})$, то

$$x = Q_\alpha^{-1/2}Q_\alpha x = Q_\alpha^{1/2}x = Q_\alpha Q_\alpha^{-1/2}x = CC^*Q_\alpha^{-1/2}x + \alpha VQ_\alpha^{-1/2}x.$$

Отсюда при $x \in F$ получаем

$$x = Q_\alpha^{1/2}x = C\,\overline{(C^*Q_\alpha^{-1/2})}\,x + \alpha V^{1/2}\,\overline{(V^{1/2}Q_\alpha^{-1/2})}\,x.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}) = \mathcal{R}(Q_\alpha^{1/2}) \subseteq \mathcal{R}(C) + \mathcal{R}(V^{1/2}). \tag{2.180}$$

Из (2.179) и (2.180) находим

$$\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2}) = \mathcal{R}(C) + \mathcal{R}(V^{1/2}), \tag{2.181}$$

т. е. действительно $\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1/2})$ не зависит от $\alpha > 0$.

Пусть линейный оператор B, отображающий H в H_2, принадлежит пространству операторов Гильберта — Шмидта $\mathcal{H}(H, H_2)$. (Напомним, что задача линейного оценивания в этом случае состоит в получении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора Bx.)

Рассмотрим сначала одну частную задачу управления ИВК: для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathcal{H}(H, H_2)$ найти линейный оператор $R_\varepsilon \in \mathcal{H}_-$ со всюду плотной в F областью определения $\mathcal{D}(R_\varepsilon)$ и замкнутый, такой, чтобы

$$\inf_R \{\|RC - B\|_2 : R \in \mathcal{H}(F, H_2),$$
$$\|RV^{1/2}\|_2^2 \leqslant \varepsilon\} = \|R_\varepsilon C - B\|_2. \tag{2.182}$$

Поскольку обычная норма оператора не превосходит нормы Гильберта — Шмидта, то, решая (2.182), уменьшаем ложный сигнал в (2.167). Заметим, что при таком подходе не учитываются вероятностные характеристики полезного сигнала x. Вместо функционала в (2.182) удобно ввести некий «регуляризованный» функционал на более широком гильбертовом пространстве. С этой целью отметим ряд утверждений.

Предложение 2.12. Если $A \in \mathcal{H}(F, H_2)$, то

$$\begin{gathered}\|AC\|_2 \leqslant \|A\|_-, \quad \|AV^{1/2}\|_2 \leqslant \alpha^{-1/2}\|A\|_-, \\ \|AQ_\alpha^{1/2}\|_2 = \|A\|_-, \quad |(AC, B)_2| \leqslant \|A\|_-\|B\|_2.\end{gathered} \tag{2.183}$$

Доказательство. Заметим, что если $T \in \mathscr{L}(H, F)$, то

$$\| AT \|_2 \leqslant \| A \|_2 \| T \|_{\mathscr{L}(H,F)}. \tag{2.184}$$

Это следует из определения $\| \cdot \|_2$. Поэтому согласно (2.184) и (2.178)

$$\| AC \|_2 = \| AQ_\alpha^{1/2} Q_\alpha^{-1/2} C \|_2 \leqslant \| A \|_- \| Q_\alpha^{-1/2} C \| \leqslant \| A_- \|.$$

Аналогично

$$\| AV^{1/2} \|_2 = \| AQ_\alpha^{1/2} Q_\alpha^{-1/2} V^{1/2} \|_2 \leqslant \alpha^{-1/2} \| A \|_-;$$
$$| (AC, \ B)_2 | \leqslant \| AC \|_2 \| B_2 \| \leqslant \| A \|_- \| B \|_2,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим функционал

$$\varphi(A) = \| AC - B \|_2^2 + \alpha \| AV^{1/2} \|_2^2 = \| AQ_\alpha^{1/2} \|_2^2 - 2(AC, \ B)_2 + \| B \|_2^2, \tag{2.185}$$

где $\alpha > 0$, $A \in \mathscr{H}(F, H_2)$.

Учитывая (2.183), функционалы $\| AC - B \|_2$, $\| AV^{1/2} \|_2$ и $(AC, B)_2$ можно продолжить по непрерывности на все негативное пространство $\mathscr{H}_-$. Поскольку $(AC, B)_2$ — линейный непрерывный (по A из $\mathscr{H}_-$) функционал, то по теореме Рисса [89, приложение 1] существует единственный элемент $D \in \mathscr{H}$ — такой, что

$$(AC, \ B)_2 = (A, \ D)_-, \quad A \in \mathscr{H}_-.$$

Поэтому функционал (2.185) расширяется на все $\mathscr{H}_-$ (по A) и принимает вид

$$\varphi(A) = \| A \|_-^2 - 2(A, \ D)_- + \| B \|_2^2 =$$
$$= \| A - D \|_-^2 - \| D \|_-^2 + \| B \|_2^2, \quad A \in \mathscr{H}_-. \tag{2.186}$$

Предложение 2.13. Если оператор $R : \mathscr{D}(R) \subset F \to H_2$ замкнут, $\overline{\mathscr{D}(R)} = F$ и $RV^{1/2} \in \mathscr{H}(F, H_2)$, то реализация $Rv \in H_2$ (почти наверное), причем

$$M[Rv] = 0, \ M \| Rv \|_{H_2}^2 = \| RV^{1/2} \|_2^2.$$

Доказательство. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — любой ортонормированный базис в H_2, причем $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(R^*) \subset H_2$. Ясно, что $\overline{\mathscr{D}(R^*)} = H_2$ и $R^* : \mathscr{D}(R^*) \to F$ — замкнутый оператор. Поэтому

$$\sum_{n=1}^\infty \| V^{1/2} R^* e_n \|_F^2 = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty (f_k, \ V^{1/2} R^* e_n)_F^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty (RV^{1/2} f_k, \ e_n)_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^\infty \| RV^{1/2} f_k \|_{H_2}^2 = \| RV^{1/2} \|_2^2 < +\infty,$$

где $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в F. Отсюда

$$M \| Rv \|^2 = M \sum_{n=1}^\infty (Rv, \ e_n)_{H_2}^2 = \sum_{n=1}^\infty M[(v, \ R^* e_n)_F^2] =$$
$$= \sum_{n=1}^\infty (VR^* e_n, \ R^* e_n)_F = \sum_{n=1}^\infty \| V^{1/2} R^* e_n \|_F^2 = \| RV^{1/2} \|_2^2.$$

Поэтому, в частности, $Rv \in H_2$ (почти наверное). При этом

$$(M[Rv],\ e_n)_{H_2} = M(Rv,\ e_n)_{H_2} = (Mv,\ R^*e_n) = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. $Mv = 0$, что и требовалось.

Предложение 2.14. Если

$$E_\alpha = C^*Q_\alpha^{-1}C,\ G_\alpha = C^*Q_\alpha^{-1}V^{1/2},\ H_\alpha = V^{1/2}Q_\alpha^{-1/2},$$
$$B \in \mathscr{H}(H,\ H_2),$$

то $B\overline{E}_\alpha$ и $B\overline{G}_\alpha$ — непрерывно дифференцируемые оператор-функции по $\alpha > 0$ со значениями в $\mathscr{H}(H,\ H_2)$ и $\mathscr{H}(F,\ H_2)$ соответственно, причем

$$\frac{d(B\overline{G}_\alpha)}{d\alpha} = -B\overline{G}_\alpha\overline{H}_\alpha\overline{H}_\alpha^*,\quad \frac{d(B\overline{E}_\alpha)}{d\alpha} = -B\overline{G}_\alpha\overline{G}_\alpha^*,$$

$$\frac{d\|B\overline{G}_\alpha\|_2^2}{d\alpha} = -2\|B\overline{G}_\alpha\overline{H}_\alpha\|_2^2, \tag{2.187}$$

$$\alpha\frac{d\|B\overline{G}_\alpha\|_2^2}{d\alpha} + \frac{d\|B\overline{E}_\alpha - B\|_2^2}{d\alpha} = 0;$$

при $\alpha > 0$ выполняются неравенства

$$\|B\overline{E}_\alpha\|_2 \leqslant \|B\|_2,\quad \|B\overline{G}_\alpha\|_2 \leqslant \alpha^{1/2}\|B\|_2. \tag{2.188}$$

Доказательство. Учитывая (2.181) для любых $\alpha,\ \alpha_1 > 0$, $x \in \mathscr{D}(Q_\alpha^{-1/2})$, находим

$$(Q_\alpha^{-1} - Q_{\alpha_1}^{-1})\,x = -Q_\alpha^{-1}(Q_\alpha - Q_{\alpha_1})\,Q_{\alpha_1}^{-1}x = -(\alpha - \alpha_1)\,Q_\alpha^{-1}VQ_{\alpha_1}^{-1}x.$$

Отсюда на основании (2.178) имеем при $\alpha_1 \to \alpha > 0$

$$\|G_\alpha - G_{\alpha_1}\| = \|-(\alpha - \alpha_1)\,C^*Q_\alpha^{-1}VQ_{\alpha_1}^{-1}\ V^{1/2}\| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha - \alpha_1|\,\|C^*Q_\alpha^{-1/2}\|\,\|Q_\alpha^{-1/2}V^{1/2}\|\,\|Q_{\alpha_1}^{-1/2}V^{1/2}\|^2 \leqslant \frac{|\alpha - \alpha_1|}{\alpha^{1/2}\alpha_1} \to 0.$$

Поэтому

$$B\overline{G}_\alpha = \lim_{\alpha_1 \to \alpha > 0} B\overline{G}_{\alpha_1},$$

так как, учитывая (2.184),

$$\|B(\overline{G}_\alpha - \overline{G}_{\alpha_1})\|_2 \leqslant \|B\|_2\|\overline{G}_\alpha - \overline{G}_{\alpha_1}\| = \|B\|_2\|G_\alpha - G_{\alpha_1}\|.$$

Вместе с тем из (2.188) следует

$$\|V^{1/2}(Q_\alpha^{-1} - Q_{\alpha_1}^{-1})\,V^{1/2}\| = |\alpha - \alpha_1|\,\|V^{1/2}Q_\alpha^{-1}VQ_{\alpha_1}^{-1}V^{1/2}\| \leqslant \frac{|\alpha - \alpha_1|}{\alpha\alpha_1}.$$

Тогда

$$\left\|\frac{G_\alpha - G_{\alpha_1}}{\alpha - \alpha_1} - (-G_\alpha V^{1/2}Q_\alpha^{-1}V^{1/2})\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\frac{G_\alpha - G_{\alpha_1}}{\alpha - \alpha_1} - (-G_\alpha V^{1/2}Q_{\alpha_1}^{-1}V^{1/2})\right\| +$$

$$+\|G_\alpha V^{1/2}(Q_\alpha^{-1}-Q_{\alpha_1}^{-1})V^{1/2}\|\leqslant\|(-C^*Q_\alpha^{-1}V^{1/2}+G_\alpha)V^{1/2}Q_{\alpha_1}^{-1}V^{1/2}\|+$$
$$+\|G_\alpha\|\frac{|\alpha-\alpha_1|}{\alpha\alpha_1}=\|G_\alpha\|\frac{|\alpha-\alpha_1|}{\alpha\alpha_1}. \qquad (2.189)$$

Оценим $\|G_\alpha\|$ сверху. Учитывая (2.178), получаем

$$\|G_\alpha\|\leqslant\|\overline{C^*Q_\alpha^{-1/2}}\|\|\overline{Q_\alpha^{-1/2}V^{1/2}}\|\leqslant\alpha^{-1/2}, \qquad (2.190)$$

Откуда

$$\|G_\alpha\|\frac{|\alpha-\alpha_1|}{\alpha\alpha_1}=\frac{|\alpha-\alpha_1|}{\alpha^{3/2}\alpha_1}\to 0,\quad \alpha_1\to\alpha. \qquad (2.191)$$

Отсюда и из (2.189) следует первое равенство в (2.187), а второе устанавливается аналогично. Третье и четвертое равенства в (2.187) находятся из следующих соображений. Учитывая (2.189) и (2.191), получаем

$$\frac{\|B\bar{G}_\alpha\|_2^2-\|\overline{BG}_{\alpha_1}\|_2^2}{\alpha-\alpha_1}=\left(\frac{B(\bar{G}_\alpha-\bar{G}_{\alpha_1})}{\alpha-\alpha_1};\ B\bar{G}_{\alpha_1}\right)_2+$$
$$+\left(\frac{B(\bar{G}_\alpha-\bar{G}_{\alpha_1})}{\alpha-\alpha_1};\ B\bar{G}_\alpha\right)_2\xrightarrow[\alpha\to\alpha_1]{}-2(B\bar{G}_\alpha\bar{H}_\alpha\bar{H}_\alpha^*;\ B\bar{G}_\alpha)_2=$$
$$=-2\|B\bar{G}_\alpha H_\alpha\|_2^2. \qquad (2.192)$$

Далее, оператор E_α ограничен на всюду плотном в F множестве, причем согласно (2.178)

$$\|\bar{E}_\alpha\|\leqslant\|\overline{C^*Q_\alpha^{-1/2}}\|^2\leqslant 1. \qquad (2.193)$$

Аналогично (2.192),

$$\frac{\|B(\bar{E}_\alpha-I)\|_2^2-\|B(\bar{E}_{\alpha_1}-I)\|_2^2}{\alpha-\alpha_1}\xrightarrow[\alpha_1\to\alpha]{}-2(B\bar{G}_\alpha G_\alpha^*;$$
$$B(\bar{E}_\alpha-I))_2=-2(B\bar{G}_\alpha;\ B(\bar{E}_\alpha-I)\bar{G}_\alpha)_2,$$

но

$$(E_\alpha-I)G_\alpha=C^*Q_\alpha^{-1}(Q_\alpha Q_\alpha^{-1}V^{1/2}-\alpha VQ_\alpha^{-1}V^{1/2}-V^{1/2})=-\alpha G_\alpha H_\alpha H_\alpha^*.$$

Поэтому

$$\frac{d\|B(\bar{E}_\alpha-I)\|_2^2}{d\alpha}=2\alpha\|\bar{G}_\alpha H_\alpha\|_2^2.$$

Итак, неравенства (2.188) следуют из (2.184), (2.190) и (2.193), что и требовалось.

Заметим, что задача (2.182) является выпуклой, причем при $R_0: F\to Q_{H_2}$ имеем $\|R_0V^{1/2}\|_2^2=0<\varepsilon$.

Последнее показывает, что выполняется условие Слейтера [50, с. 77]. В этом случае справедлива теорема Куна—Таккера [50], которую сформулируем применительно к данному случаю.

Теорема 2.17. *Для того чтобы задача (2.182) имела решение $R_\varepsilon\in\in\mathcal{H}(F, H_2)$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha\geqslant 0$*

$$\varphi(R_\varepsilon)=\|R_\varepsilon C-B\|_2^2+\alpha\|R_\varepsilon V^{1/2}\|_2^2=$$
$$=\min_{R\in\mathcal{H}(F,H_2)}\{\|RC-B\|_2^2+\alpha\|RV^{1/2}\|_2^2;\ \|RV^{1/2}\|_2^2\leqslant\varepsilon\}, \qquad (2.194)$$

причем

$$\alpha(\| R_\varepsilon V^{1/2}\|_2^2-\varepsilon)=0, \quad \| R_\varepsilon V^{1/2}\|_2^2-\varepsilon\leqslant 0. \tag{2.195}$$

Теперь мы можем доказать следующий результат, дающий решение задачи (2.182).

Теорема 2.18. *Пусть у оператора V существует алгебраический обратный оператор V^{-1}, причем оператор $B\in\mathcal{H}(H_1, H_2)$ таков, что $Q_\alpha^{-1}CB^*$ плотно определен. Тогда решение задачи (2.182) имеет вид*

$$R_\varepsilon=R_\alpha=\overline{BC^*Q_\alpha^{-1}}, \quad \alpha=\alpha_\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0,$$

где

$$\varepsilon_0=\lim_{\alpha\to 0}\| R_\alpha V^{1/2}\|_2^2,$$

а α_ε — единственный корень уравнения

$$m_\varepsilon(B)=\| R_\alpha V^{1/2}\|_2^2=\varepsilon. \tag{2.196}$$

Доказательство. Учитывая (2.186), получаем, что для $\alpha>0$ минимум функционала $\varphi(R)$ достигается на операторе $R_\alpha= = D\in\mathcal{H}_-$, определяемом из условия

$$(AC, B)_2=(A, D)_-, \quad A\in\mathcal{H}_-. \tag{2.197}$$

Заметим, что

$$(A, D)_-=\lim_{n\to\infty}(A, D_nQ_\alpha)_2=(A, DQ_\alpha)_2, \tag{2.198}$$

где $\| D_n-D\|_{\mathcal{H}}\to 0$, $n\to\infty$.

Введем замыкаемый оператор $BC^*Q_\alpha^{-1}$, $\alpha>0$. Действительно, сопряженный оператор $(BC^*Q_\alpha^{-1})^*=Q_\alpha^{-1}CB^*$ плотно определен по условию теоремы, а оператор BC^* — непрерывен. Причем область определения $\mathcal{D}(BC^*Q_\alpha^{-1})$ не зависит от $\alpha>0$, так как $\mathcal{D}(Q_\alpha^{-1})$ не зависит от $\alpha>0$. Поэтому, если положить $R_\alpha=D=\overline{BC^*Q_\alpha^{-1/2}}Q_\alpha^{-1/2}=\overline{BC^*Q_\alpha^{-1}}$, то, учитывая (2.198), находим

$$(A, \overline{BC^*Q_\alpha^{-1}})_-=(A_\alpha, \overline{BC^*Q_\alpha^{-1}}Q_\alpha)_2=(AC, B)_2,$$

т. е. указанный оператор R_α удовлетворяет (2.197), причем $R_\alpha V^{1/2}\in \in\mathcal{H}(F, H_2)$. Значит, по предложению 2.41 $R_\alpha v\in H_2$ (почти наверное). Отсюда

$$m_\alpha(B)=\| R_\alpha V^{1/2}\|_2^2=\| B\bar{G}_\alpha\|_2^2,$$

причем функция $m_\alpha(B)$ монотонно убывает по $\alpha>0$, поскольку $\frac{dm_\alpha(B)}{d_\alpha}<0$ в силу (2.187). При этом $\lim\limits_{\alpha\to\infty}m_\alpha(B)=0$ на основании второго неравенства из (2.188), а $\lim\limits_{\alpha\to 0}m_\alpha(B)=\varepsilon_0$ по условию. Значит, для любого $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$ существует единственный корень α_ε у уравнения (2.196), что и требовалось.

Замечание 2.1. Если положим $n_\alpha(B) = \| R_\alpha C - B \|_2^2$, то из последнего равенства в (2.187) находим связь между $m_\alpha(B)$ и $n_\alpha(B)$:

$$\frac{\alpha dm_\alpha(B)}{d\alpha} + \frac{dn_\alpha(B)}{d\alpha} = 0. \qquad (2.199)$$

Замечание 2.2. Оператор $\bar{G}_\alpha$ с помощью оператора $Z = V^{-1/2}C$ представим в виде

$$\bar{G}_\alpha = \overline{C^* Q_\alpha^{-1} V^{1/2}} = Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1}.$$

Поэтому согласно (2.175)

$$R_\alpha = R_\alpha(B) = \overline{BC^* Q_\alpha^{-1}} = \overline{BZ^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1} V^{-1/2}},$$

$$m_\alpha(B) = \| BZ^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1} \|_2^2,$$

$$n_\alpha(B) = \| B[\overline{Z^*(ZZ^* + \alpha I)^{-1} Z} - I] \|_2^2 = \alpha^2 \| B(Z^*Z + \alpha I)^{-1} \|_2^2. \quad (2.200)$$

Отсюда

$$\alpha m_\alpha(B) + n_\alpha(B) = \alpha \{ \| B\overline{(Z^*Z + \alpha I)^{-1} Z^*} \|_2^2 +$$
$$+ \alpha \| B(Z^*Z + \alpha I)^{-1} \|_2^2 \} = \alpha \| B(Z^*Z + \alpha I)^{-1/2} \|_2^2.$$

Рассмотрим теперь более общую, чем (2.182), постановку задачи управления ИВК. Разрешим изменяться R так как и B. Более точно, пусть $\{A_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}(H, H_2)$ — линейно независимый набор операторов, причем множество

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}(V^{-1/2} Z(Z^*Z + I)^{-1} A_k^*)$$

всюду плотно в H_2. (Это условие влечет замыкаемость линейного оператора R_α, который используется в дальнейшем.) Введем множество операторов

$$\mathfrak{B} = \left\{ B \in \mathcal{H}(H, H_2) : B = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k, \ \lambda_k \in R_1 \right\}.$$

Задание такого класса операторов B объясняется тем, что A_0 можно считать соответствующим «идеальному» устройству для переработки полезного сигнала x, а операторы $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ представляют собой искажения «идеального» устройства. На $\mathfrak{B}$ определим критерий качества $J(\cdot)$, если $J(B_1) \leqslant J(B_2)$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, то B_1 «лучше», чем B_2.

Пусть класс операторов

$$\{B \in \mathfrak{B} : J(B) \leqslant n\} = \left\{ B = B_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k \right\} = \mathfrak{B}_n.$$

Задача состоит в следующем: найти

$$\inf_{R,B} \{ \| RC - B \|_2 : R \in \mathcal{H}_-, \ \| RV^{1/2} \|_2^2 \leqslant \varepsilon, \ B \in \mathfrak{B}_n \}. \qquad (2.201)$$

Для ее решения понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 2.15. 1. Пусть $B \in \mathfrak{B}_n$, и оператор Z^*Z имеет замкнутую область значений $\mathcal{R}(Z^*Z)$ (т. е. нормально разрешим). Тогда система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k} \| B (Z^*Z + \alpha I)^{-1/2} \|_2^2 = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.202}$$

при $\alpha > 0$ имеет единственное решение $B = B_\alpha$, причем существуют пределы

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} B_\alpha = B_0, \quad \lim_{\alpha\to\infty} B_\alpha = B_{+\infty}.$$

2. Если B_α — решение (2.202), то функция $m_\alpha(B_\alpha) = \| B_\alpha Z^* \times$ $\times (ZZ^* + \alpha I)^{-1} \|_2^2$, ($n_\alpha(B_\alpha) = \alpha^2 \| B_\alpha (Z^*Z + \alpha I)^{-1} \|_2^2$ монотонно убывает (возрастает) по α на $(0, \infty)$, причем $\lim\limits_{\alpha\to\infty} m_\alpha(B_\alpha) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} m_\alpha(B_\alpha) =$ $= \| B [(Z^*Z)^+]^{1/2} \|_2^2$ ($\lim\limits_{\alpha\to 0} n_\alpha(B_\alpha) = \| B_0 (I - C^+C) \|_2^2$) и существует $\lim\limits_{\alpha\to\infty} n_\alpha(B_\alpha) = n_\infty$.

3. Если $W_n = \{B \in \mathfrak{B}_n : B(I - Z^+Z) = 0\} \neq \varnothing$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0} n_\alpha(B_\alpha) = 0$.

Теорема 2.19. *Пусть оператор Z^*Z нормально разрешим, B_α — решение (2.202). Тогда решение R_ε, B_ε задачи (2.201) имеет вид*

$$R_\varepsilon = \begin{cases} \overline{B_\alpha Z^* (ZZ^* + \alpha I)^{-1} V^{-1/2}}, & \alpha = \alpha_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \overline{B_0 Z + V^{-1/2}}, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \\ 0, & \varepsilon = 0, \end{cases}$$

$$B_\varepsilon = \begin{cases} B_\alpha, & \alpha = \alpha_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \\ B_0, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \\ B_\infty, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon_0 = \| B_0 [(Z^*Z)^+]^{1/2} \|_2^2$, α_ε *— единственный корень уравнения* $m_\alpha(B_\alpha) = \varepsilon$. *При этом*

$$\| R_\varepsilon C - B_\varepsilon \|_2^2 = \begin{cases} n_\alpha(B_\alpha), & \alpha = \alpha_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \| B_0 (I - C^+C) \|_2^2, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \\ n_\infty, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Если $W_n \neq \varnothing$, *то* $\| R_\varepsilon C - B_\varepsilon \|_2^2 = 0$ *при* $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. Задача (2.201) является выпуклой, поэтому условия минимума для $\varepsilon > 0$ имеют вид

$$\begin{gathered} (RC - B) C^* + \alpha RV = 0, \quad \alpha > 0, \\ ((RC - B), A_k)_2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ \alpha (\| RV^{1/2} \|_2^2 - \varepsilon) = 0, \quad \| RV^{1/2} \|_2^2 - \varepsilon \leqslant 0. \end{gathered} \tag{2.203}$$

Отсюда $R_\alpha = \overline{BC^*Q_\alpha^{-1}} = \overline{BZ^* (ZZ^* + \alpha I)^{-1} V^{-1/2}}$. Причем, учитывая (2.175), (2.200), получаем $RC - B = -\alpha B (Z^*Z + \alpha I)^{-1}$. Подставляя последнее во второе уравнение (2.203), приходим к (2.202) для нахождения $B = B_\alpha$. Если $\lim\limits_{\alpha\to 0} \| R_\alpha V^{1/2} \|_2^2 = \lim\limits_{\alpha\to 0} m_\alpha (B_\alpha) = \varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, то уравнение $m_\alpha (B_\alpha) = \varepsilon$ имеет единственное решение α_ε на основании предложения 2.15 (п.2). Если $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$, то (2.203) выполняются при $\alpha = 0$, откуда $R_\varepsilon = \overline{B_0 Z + V^{-1/2}}$, $B_\varepsilon = B_0$. Если $\varepsilon = 0$, то последнее условие в (2.203) влечет $R = 0$. Значит, (2.201) принимает вид

$$\inf \{ \| B \|_2 : B \in \mathfrak{B}_n \}.$$

Отсюда $(B, A_k)_2 = 0$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. $(A_0, A_k) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (A_j, A_k)_2$, $k = 1, \ldots, n$. Эта система, очевидно, имеет единственное решение, совпадающее с B_∞. Соотношения для $\| R_\varepsilon C - B_\varepsilon \|_2^2$ следуют из вышесказанного и предложения 2.15 (п. 3). Теорема 2.19 доказана.

Заметим, что условие $W_n \neq 0$ влечет полную подавляемость ложного сигнала $(R_\varepsilon C - B_\varepsilon)\, x$.

Задачи (2.182) и (2.201) являются важными, но частными случаями проблемы управления ИВК в рамках обсуждения, приведенного в начале этого пункта. Обобщение задач (2.182), (2.201) приводит к проблеме векторной оптимизации с использованием методов, выходящих за рамки данного изложения.

4°. О восстановлении траекторий динамических систем (ДС) при сильной зашумленности наблюдений [6]. Математическая модель пространственно-временного обнаружения траекторий движения динамических систем может быть записана следующим образом:

$$G(\tau) = C(\tau) X(\tau) + V(\tau), \tag{2.204}$$

где $G(\tau)$ — $(k \times l)$ — матричная функция наблюдений; $X(\tau)$ — «полезная» $(k \times l)$-матрица, элементы которой состоят из нулей и единиц в каждый момент времени; $C(\tau)$ — $(k \times k)$-матрица, характеризующая параметры наблюдательной аппаратуры; $V(\tau)$ — $(k \times l)$-матрица помех, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1 < +\infty$.

Если отношение сигнал/шум близко к единице, то известные методы обнаружения, основанные на классической теории распознавания статистических гипотез (типа критерия Неймана—Пирсона), оказываются мало пригодными. Однако подключение дополнительной априорной информации о возможных траекториях ДС позволяет разработать следующий подход к решению задачи обнаружения. Основная идея состоит в том, что задачи обнаружения необходимо решать не в статике, а в динамике, поскольку все возможные ДС являются движущимися объектами. Причем имеется по крайней мере две возможности: без учета информации о законе движения ДС и с учетом ее (хотя бы приближенной). В отличие от классической постановки задачи фильтрации, где требуется найти точечную оценку полезного сигнала $X(\tau)|_{\tau=t}$, оптимальную в среднеквадратическом смысле, в данной

[6] Данный пункт написан совместно с А. А. Хрупало.

ситуации требуется определить взвешенную интервальную оценку

$$\hat{X} = \int_0^t A(t, \tau) X(\tau) d\tau, \tag{2.205}$$

где $(k \times k)$-матрица $A(t, \tau)$ задается априорно. Введение интеграла (2.205) объясняется тем, что в результате происходит суммирование мгновенных состояний ДС в промежутке $[0, t]$, т. е. матрица $\hat{X} = \hat{X}([0, t])$ будет содержать оценки траекторий изучаемой ДС.

При этом полезна предварительная обработка наблюдений так, чтобы понизить уровень помех V. Поступим формально, следуя [120]:

$$LG = LCX + LV, \tag{2.206}$$

или

$$LG = AX + (LCX - AX) + LV. \tag{2.207}$$

Здесь L — оператор подавления помех. Он выбирается из соображений, чтобы

$$M \| LV \|^2 \leqslant \varepsilon, \tag{2.208}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, M — знак математического ожидания. Выражение $(LC - A) X$ определяет так называемый ложный сигнал. Оператор A имеет вид (2.205). Задачу оптимизации по обработке измерений можно поставить теперь в следующем виде. Найти

$$\inf \left\{ \| LC - A \|^2 : M \| LV \|^2 \leqslant \varepsilon, \ A(\cdot) = \int_0^t A(t, \tau)(\cdot) d\tau \right\}. \tag{2.209}$$

Здесь $A(t, \tau)$ — матрица с элементами из $L_2[0, t]$. Полезно ввести критерий качества J оператора обработки $A : J(A) \leqslant \delta$, где $\delta > 0$. Тогда матрицу $A(t, \tau)$ будем искать из множества

$$\mathfrak{A}_\delta = \{A(t, \tau) \in L_2[0, t] : J(A) \leqslant \delta\}. \tag{2.210}$$

Таким образом, требуется предварительное решение задачи (2.209), (2.210). В результате находится оператор $A_{\text{опт}}$ и $L_{\text{опт}}$, а затем определяется оценка $(\widehat{A_{\text{опт}}X})$ с помощью обычных методов фильтрации. Рассмотрим подробно указанный подход в двух случаях: когда отсутствует информация о законе движения изучаемой ДС и с учетом ее. Сразу же, для удобства выкладок, перейдем от матричной формы записи (2.204) к векторной (матрицу развернем в столбик-вектор).

А. Отсутствие априорной информации о траектории динамической системы. Пусть модель наблюдений имеет вид

$$\xi(\tau) = C(\tau) x(\tau) + w(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1 < +\infty, \tag{2.211}$$

где $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau))^T$, $x_i(\tau) \in L_2[0, t]$, $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 4$, $\xi(\tau) \in R_m$, $w(\tau)$ — белый гауссов шум с нулевым средним ($M[w] = 0$) и корреляцией $M[w(\tau) w^T(\sigma)] = W(\tau) \delta(\tau - \sigma)$, $\det W(\tau) \neq 0$, некоррелированный с полезным сигналом $x(\tau)$, т. е. $M[x(t) w^T(\sigma)] = 0$. (Здесь M — знак математического ожидания, T — знак транспонирования.) Матрица $C(\tau)$ имеет кусочно-непрерывные элементы. Известно, что реализация белого гауссова шума $w(\tau)$ (почти наверное) принадлежит негативному гильбертову пространству W_t^{-1} (см. [77]). Обозначим $\mathcal{R} = \mathcal{R}[0, T_1]$ — класс всех $(m \times m)$-матриц-функций $R(t, \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1)$ таких, что все элементы матрицы $R(t, \tau)$ по второму аргументу принадлежат соболевскому гильбертову пространству $W_2^{-1}[0, t]$; а по первому — являются непрерывными функциями на $[0, T]$. Для любой матрицы-функции $R(t, \tau)$ из $\mathcal{R}$ соотношение (2.211) преобразуем к виду

$$\int_0^t R(t, \tau)\,\xi(\tau)\,d\tau = \int_0^t R(t, \tau)\,C(\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \int_0^t R(t, \tau)\,w(\tau)\,d\tau, \quad 0 < t \leqslant T_1, \tag{2.212}$$

где первый и третий интегралы понимаются в смысле билинейной формы [77]. Вводя обозначения

$$r(t) = \int_0^t R(t, \tau)\,\xi(\tau)\,d\tau, \quad v(t) = \int_0^t R(t, \tau)\,w(\tau)\,d\tau, \quad 0 < t \leqslant T_1,$$

из (2.212) получаем

$$r(t) = \int_0^t R(t, \tau)\,C(\tau)\,x(\tau)\,d\tau + v(t). \tag{2.213}$$

В (2.213) гауссов случайный векторный сигнал (шум) $v(t)$ состоит из элементов $v_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, обладающими непрерывными реализациями (почти наверное), причем

$$M[v(t)] = M[w(\tau)] \equiv 0, \quad K_v(t, t_1) \equiv M[v(t)\,v^T(t_1)] =$$
$$= \int_0^t \int_0^{t_1} R(t, \tau)\,M[w(\tau)\,w^T(\sigma)]\,R^T(t_1\sigma)\,d\tau d\sigma =$$
$$= \int_0^t \int_0^{t_1} R(t, \tau)\,W(\tau)\,\delta(\tau - \sigma)\,R^T(t_1, \sigma)\,d\tau d\sigma =$$
$$= \int_0^{\min(t,t_1)} R(t, \tau)\,W(\tau)\,R^T(t_1, \tau)\,d\tau. \tag{2.214}$$

Физический смысл преобразования соотношения (2.211) к виду (2.213) состоит в обобщенном суммировании наблюдений $\xi(\tau)$ с весом $R(t, \tau)$ в промежутке $[0, t]$ (например, уменьшение яркости экрана РЛС с последующим наложением получаемых изображений). Однако наличие белого гауссова шума $w(\tau)$ с большой интенсивностью $W(\tau)$ может затруднить различение полезной компоненты $\int_0^t R(t, \tau)\,C(\tau)\,x(\tau)\,d\tau$ в выражении (2.213). Поэтому введем упомянутую во введении к п. 4°

взвешенную интегральную оценку

$$y(t) \equiv \int_0^t A(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{2.215}$$

где $m \times n$-матрица-функция $A(t, \tau)$ — имеет элементы, непрерывные по первому аргументу на $[0, T_1]$ и интегрируемые с квадратом, по Лебегу, по $\tau \in [0,t]$. Класс таких матриц обозначим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[0, T_1]$. Далее считаем $x(\tau)$ — гауссов случайный процесс на $[0, T_1]$. Значит, случайный процесс $y(t)$ — также гауссов, причем

$$M[y(t)] = \int_0^t A(t, \tau)\, M[x(\tau)]\, d\tau,$$

$$K_y(t, t_1) \equiv M[y(t)\, y^T(t_1)] =$$

$$= \int_0^t \int_0^{t_1} A(t, \tau)\, K_x(t, t_1)\, A^T(t_1, \sigma)\, d\tau d\sigma, \tag{2.216}$$

где $K_x(t, t_1) = M[x(t)\, x^T(t_1)]$, и реализации $y(t)$ являются непрерывными функциями на $[0, T_1]$ (почти наверное). С помощью (2.215) перепишем (2.213) в виде

$$r(t) = y(t) + \int_0^t [R(t, \tau)\, C(\tau) - A(t, \tau)]\, x(\tau)\, d\tau + v(t). \tag{2.217}$$

Векторный гауссов случайный процесс

$$u(t) = \int_0^t [R(t, \tau)\, C(\tau) - A(t, \tau)]\, x(\tau)\, d\tau \tag{2.218}$$

назовем ложным сигналом (ср. с п. 3°). При этом

$$M[u(t)] = \int_0^t [R(t, \tau)\, C(\tau) - A(t, \tau)]\, M[x(\tau)]\, d\tau;$$

$$K_u(t, t_1) \equiv M[u(t)\, u^T(t_1)] = \int_0^t \int_0^{t_1} [R(t, \tau)\, C(\tau) - A(t, \tau)] \times$$

$$\times K_x(\tau, \sigma)\, [C^T(\sigma)\, R^T(t_1, \sigma) - A^T(t_1, \sigma)]\, d\tau d\sigma. \tag{2.219}$$

Пусть корреляционная матрица-функция $K_x(\tau, \sigma)$ состоит из непрерывных в $[0, T_1] \times [0, T_1]$ функций. Ложный сигнал $u(t)$ оказывается коррелированным с полезным сигналом $y(t)$

$$K_{yu}(t, t_1) \equiv M[y(t)\, u^T(t_1)] =$$

$$= \int_0^t A(t, \tau)\, K_x(\tau, \sigma)\, [C^T(\sigma)\, R^T(t_1, \sigma) - A^T(t_1, \sigma)]\, d\tau d\sigma. \tag{2.220}$$

Таким образом, задача обработки наблюдений (2.211) сведена к предварительной задаче такого выбора матриц-функций $R(t, \tau)$ и $A(t, \tau)$, чтобы в соотношении

$$r(t) = y(t) + u(t) + v(t), \quad 0 < t \leqslant T_1 < +\infty, \tag{2.221}$$

максимально уменьшить ложный сигнал $u(t)$ и помеху $v(t)$. Поскольку в этом подпункте не предполагается каких-либо априорных сведений о законе движения ДС $x(\tau)$ (а поэтому и $y(t)$), то предварительная задача сводится к следующей детерминированной оптимизационной задаче. Выбрать матрицы-функции $R_0(t, \tau)$ и $A_0(t, \tau)$ из классов $\mathcal{R}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно так, чтобы минимизировать дисперсии $K_u(t, t)$ и $K_v(t, t)$ одновременно. Более точно, на основании формул (2.214), (2.218) имеем

$$K_v(t, t) = \int_0^t R(t, \tau) W(\tau) R^T(t, \tau)\, d\tau, \tag{2.222}$$

$$K_u(t, t) = \int_0^t \int_0^t [R(t, \tau) C(\tau) - A(t, \tau)] K_x(\tau, \sigma) [C^T(\sigma) R^T(t, \sigma) - \\ - A^T(t, \sigma)]\, d\tau d\sigma.$$

Пусть z — произвольный вектор из евклидова пространства R_m. Тогда требуется, чтобы

$$(K_{v_0}(t, t) z, z)_{R_m} = \int_0^t (R_0(t, \tau) W(\tau) R_0^T(t, \tau) z, z)_{R_m} d\tau \leqslant \\ \leqslant (K_v(t, t) z, z)_{R_m} = \int_0^t (R(t, \tau) W(\tau) R_0^T(t, \tau) z, z)_{R_m} d\tau, \tag{2.223}$$

$$\int_0^t \int_0^t ([R_0(t, \tau) C(\tau) - A_0(t, \tau)] K_x(\tau, \sigma) [C^T(\sigma) R_0^T(t, \sigma) - \\ - A_0^T(t, \sigma)]\, d\tau d\sigma z, z)_{R_m} \leqslant \int_0^t \int_0^t ([R(t, \tau) C(\tau) - A(t, \tau)] K_x(\tau, \sigma) \times \\ \times [C^T(\sigma) R^T(t, \sigma) - A^T(t, \sigma)]\, d\tau d\sigma z, z)_{R_m} \tag{2.224}$$

для любых $R(t, \tau) \in \mathcal{R}$, $A(t, \tau) \in \mathfrak{A}$. Задачу нахождения $R_0(t, \tau)$, $A_0(t, \tau)$, удовлетворяющих (2.223), (2.224), назовем глобальной задачей оптимизации структуры наблюдательной системы (2.211).

Предположим вначале, что матрица-функция $A_0(t, \tau)$ задана. Левая часть (2.223) имеет вид

$$(K_{v_0}(t, t) z, z)_{R_m} = \int_0^t \| W^{1/2}(\tau) R_0^T(t, \tau) z \|_{R_m}^2 d\tau = \\ = \| W^{1/2}(\tau) R_0^T(t, \tau) z \|^2_{L_2^{(m)}[0,t]} \to \min, \tag{2.225}$$

а левая часть (2.224) записывается так:

$$(K_{u_0}(t,\ t)\,z,\ z)_{R_m}=\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^t K_x(t,\ \sigma)\,[C^T(\sigma)R_0^T(t,\ \sigma)-A_0^T(t,\ \sigma)]\,zd\sigma,\right.$$

$$\left.[C^T(\tau)\,R_0^T(t,\ \tau)-A_0^T(t,\tau)]\,z\right)_{R_m}d\tau=$$

$$=(K\,[Q_0^Tz],\ Q_0^Tz)_{L_2^{(n)}[0,t]}=\|K^{1/2}[Q_0^Tz]\|^2_{L_0^{(n)}[0,t]},\qquad(2.226)$$

где $Q_0(\tau)=R_0(t,\ \tau)\,C_0(\tau)-A_0(t,\ \tau)$, $K[\cdot]=\int\limits_0^t K_x(\tau,\ \sigma)\,[\cdot]\,d\tau$. Оператор $K:L_2^{(n)}[0,\ t]\to L_2^{(n)}\ [0,\ t]$ является линейным непрерывным и положительным. Поэтому существует квадратный корень $K^{1/2}$ из оператора $K[\cdot]$; $K^{1/2}$ — тоже интегральный оператор. Если разложение ядра оператора K в ряд Мерсера имеет вид

$$K_x(\tau,\ \sigma)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(\tau)\,\varphi_i^T(\sigma),$$

где λ_i — (ненулевые) собственные числа оператора. K, а φ — n-мерные собственные функции, то ядро $S(\tau,\ \sigma)$ оператора $K^{1/2}$ определяется формулой

$$S(\tau,\ \sigma)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\varphi_i(\tau)\,\varphi_i^T(\sigma).$$

Отсюда следует, что для любой вектор-функции $f(\tau)\in L_2^{(n)}[0,\ t]$ справедливо равенство

$$K[f]=\int\limits_0^t K_x(\tau,\ \sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma=K^{1/2}\circ K^{1/2}[f]=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^t S(\tau,\ \sigma)\,S(\sigma,\ \eta)\,f(\eta)\,d\eta d\sigma.$$

Обозначим $b_0(\tau)=R_0^T(t,\ \tau)\ z\in L_2^{(m)}\ [0,\ \ t]$, $a_0(\tau)=A_0^T(t,\ \ \tau)\ z\in\in L_2^{(n)}\ [0,\ t]$. Тогда задача (2.225), (2.226) представима в виде: найти вектор-функцию $b_0(\tau)$ из $L_2^{(m)}\ [0,\ t]$ такую, что минимизирует функционал

$$J_z(b_0)=\|K^{1/2}[C^T(\tau)\,b_0(\tau)-a_0(\tau)]\|^2_{L_2^{(n)}[0,t]}\qquad(2.227)$$

и одновременно доставляет наименьшее значение функционалу

$$j_z(b_0)=\|W^{1/2}(\tau)\,b_0(\tau)\|^2_{L_2^{(m)}[0,t]}.$$

Преобразуем (2.227) следующим образом:

$$J_z(b_0)=\|K^{1/2}C^T(\tau)\,W^{-1/2}(\tau)\,[W^{1/2}(\tau)\,b_0(\tau)]-K^{1/2}[a_0(\tau)]\|^2_{L_2^{(n)}[0,t]}.\qquad(2.228)$$

Тогда, обозначая $d_0(\tau) = W^{1/2}(\tau)\, b_0(\tau)$, приходим к задаче определения псевдорешения операторного уравнения

$$K^{1/2} \circ C^T(\tau)\, W^{-1/2}(\tau)\, [d_0(\tau)] = K^{1/2}[a_0(\tau)] \qquad (2.229)$$

в гильбертовом пространстве $L_2^{(n)}[0, t]$ (знак «$\circ$» означает суперпозицию операторов). В результате получаем

$$d_0(\tau) = F^{+} \circ K^{1/2}[a_0(\tau)], \qquad (2.230)$$

где $F = K^{1/2} \circ C^T(\tau)\, W^{-1/2}(\tau) : L_2^{(n)}[0, t] \to L_2^{(n)}[0, t]$. В силу теоремы 2.9 выражение (2.230) принимает вид

$$d_0(\tau) = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} F^*(FF^* + \alpha I)^{-1} \circ K^{1/2}[a_0(\tau)] =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} W^{-1/2}(\tau)\, C(\tau)\, K^{1/2}(K^{1/2}C^T(\tau)\, W^{-1}(\tau)\, C(\tau)\, K^{1/2} + \alpha I)^{-1} K^{1/2}[a_0(\tau)] =$$

$$= W^{-1/2}(\tau)\, C(\tau)\, K^{1/2} \circ \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (K^{1/2}C^T(\tau)\, W^{-1}(\tau)\, C(\tau)\, K^{1/2} + \alpha I)^{-1} K^{1/2} A_0^T(t, \tau)\, z.$$

Отсюда

$$R_0^T(t, \tau)\, z = W^{-1}(\tau)\, C(\tau) \circ K^{1/2} \circ \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (K^{1/2} \circ C^T(\tau)\, W^{-1}(\tau)\, C(\tau) \circ K^{1/2} +$$
$$+ \alpha I)^{-1} \circ K^{1/2}(A_0^T(t, \tau))\, z.$$

Поскольку z — произвольный вектор из R_m, то

$$R_0(t, \tau) = K^{1/2} \circ \lim_{\alpha\to 0} (K^{1/2} \circ C^T(\tau)\, W^{-1}(\tau)\, C(\tau) \circ K^{1/2} + \alpha I)^{-1} \circ K^{1/2} \times$$
$$\times [A_0(t, \delta)] \circ C^T(t, \sigma)\, W^{-1}(\tau). \qquad (2.231)$$

Проанализируем формулу (2.231). Во-первых, матрица-функция $R_0(t, \tau)$, хотя и минимизирует (2.227) в классе $L_2^{(n)}[0, t]$, но может не принадлежать классу $\mathcal{R}$. Кроме того, линейный оператор, полученный в результате предельного перехода в (2.231), будет неограниченным.

Поэтому попытка точного нахождения оптимальной матрицы-функции $R_0(t, \tau)$ является некорректной задачей (в смысле Адамара), т. е. небольшие вариации в задании матрицы $A_0(t, \tau)$ могут привести к значительным ошибкам при вычислении $R_0(t, \tau)$ по (2.231). Но из (2.231) следует процедура приближенного нахождения $R_0(t, \tau)$. Фиксируя $\alpha > 0$, из (2.231) находим

$$R_{\alpha,\delta}(t, \tau) = K^{1/2} \circ (K^{1/2} \circ C^T(\tau)\, W^{-1}(\tau)\, C(\tau) \circ K^{1/2} + \alpha I)^{-1} \circ K^{1/2} \times$$
$$\times [A_0(t, \sigma)] \circ C_\delta^T(t, \tau)\, W^{-1}(\tau), \qquad (2.232)$$

где $C_\delta(t, \tau)$ — матрица с усредненными элементами матрицы $C(t, \tau)$ с параметром $\delta > 0$. Известно, что

$$\|C(t, \tau) - C_\delta(t, \tau)\|_{L_2[0,t]} \to 0, \quad \delta \to 0 \qquad (2.233)$$

(об усреднениях см., например, [77, гл. I]). Из (2.231) и (2.233) следует, что

$$\|R_{\alpha,\delta}(t,\ \tau)-R_0(t,\ \tau)\|_{L_2[0,t]}\to 0 \text{ при } \alpha,\ \delta\to 0, \qquad (2.234)$$

причем $R_{\alpha,\delta}$ $(t,\ \tau)\in\mathcal{R}$ при любых $\alpha>0$, $\delta>0$, и вычислительная процедура определения $R_{\alpha,\delta}$ $(t,\ \tau)$ по формуле (2.232) является устойчивой. (Доказательство гладкости элементов матрицы-функции $R_{\alpha,\delta}$ $(t,$ $\tau)$ по τ опирается на справедливость представления

$$(K^{1/2}\circ C^T(\tau)\,W^{-1}(\tau)\,C(\tau)\circ K^{1/2}+\alpha I)^{-1}=(I-L_\alpha^*)(I-L_\alpha), \qquad (2.235)$$

где L_α — интегральный оператор Вольтерра с непрерывным ядром, что вытекает из теоремы факторизации Крейна [12, с. 168].)

Таким образом, формула (2.232) задает регуляризующую последовательность матриц-функций $\{R_{\alpha,\delta}\ (t,\ \tau)\}_{\alpha,\delta}>0$ для решения задачи (2.223), (2.224).

Можно упростить достаточно сложную формулу (2.232), несколько огрубляя задачу (2.223), (2.224). А именно будем выбирать R_0 $(t,\ \tau)$ при фиксированной матрице A_0 $(t,\ \tau)$ так, чтобы выполнялось неравенство (2.223), а (2.224) заменим минимизацией функционала

$$j_z(R)=\|C^T(\tau)\,R^T(t,\ \tau)\,z-A^T(t,\ \tau)\,z\|^2_{L_2^{(n)}[0,t]}=$$

$$=\int_0^t\|C^T(\tau)\,b_0(\tau)-a_0(\tau)\|^2_{R_n}d\tau. \qquad (2.236)$$

Зафиксируем в подынтегральном выражении $\tau\in[0,\ t]$. Рассмотрим вспомогательную задачу: минимизировать

$$\|C^T(\tau)\,b_0(\tau)-a_0(\tau)\|^2_{R_n}, \qquad (2.237)$$

причем среди всех m-мерных векторов $b_0=b_0$ (τ) выбрать вектор, минимизирующий одновременно выражение

$$\|W^{1/2}(\tau)\ b_0\ (\tau)\|^2_{R_m}. \qquad (2.238)$$

Для решения задачи (2.237), (2.238) воспользуемся леммой 2.2.

Поскольку матрица $W^{1/2}$ (τ) — положительно определенная, то существует матрица $W^{-1/2}$ (τ). Поэтому, чтобы к задаче (2.237), (2.238) применить лемму 2.3, преобразуем (2.237) к виду

$$\|C^T(\tau)\,W^{-1/2}(\tau)\,W^{1/2}(\tau)\,b_0(\tau)-a_0(\tau)\|^2_{R_n}. \qquad (2.239)$$

Тогда в силу леммы 2.3 вектор, минимизирующий (2.239) и (2.238), имеет вид

$$b\equiv W^{1/2}(\tau)\,b_0(\tau)=(C^T(\tau)\,W^{-1/2}(\tau))^+\,a_0(\tau). \qquad (2.240)$$

Поскольку ранги матриц C^T (τ) и $W^{-1/2}$ (τ) равны m, то в силу свойства 1.1 псевдообратных операторов из п. 1° $(C^T$ (τ) $W^{-1/2}$ $(\tau))^+=$ $=(W^{1/2}$ (τ) C^+ $(\tau))^T$. Поэтому из (2.240) находим

$$b_0(\tau)=W^{-1/2}(\tau)\,W^{1/2}(\tau)\,(C^+(\tau))^T\,A_0(t,\ \tau)\,z,$$

или

$$b_0(\tau) = (C^+(\tau))^T A_0^T(t, \tau) z = R_0^T(t, \tau) z.$$

Поскольку $z \in R_m$ произволен, то

$$R_0(t, \tau) = A_0(t, \tau) C^+(\tau),$$

или

$$R_0(t, \tau) = A_0(t, \tau) C^T(\tau) \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} (C(\tau) C^T(\tau) + \alpha I_m)^{-1}. \qquad (2.241)$$

Фиксируя любое $\alpha > 0$, из (2.241) получаем регуляризованную последовательность

$$\{R_{\alpha,\delta}(t, \tau) = A_\delta(t, \tau) C_\delta^T(\tau) (C_\delta(\tau) C_\delta^T(\tau) + \alpha I_m)^{-1}\}_{\alpha,\delta>0} \qquad (2.242)$$

матриц-функций из класса $\mathcal{R}$ $[0, T_1]$, поскольку

$$\| R_0(t, \tau) - R_{\alpha,\delta}(t, \tau) \|_{L_2[0,t]} \to 0, \quad \alpha, \ \delta \to 0.$$

Пусть теперь задан критерий качества $J(A)$ на множестве $\mathfrak{A}$. Требуется выбрать матрицу-функцию $A(t, \tau)$ так, чтобы $J(A) \leqslant \delta$, где число $\delta > 0$ задается из априорных соображений. В этом случае, учитывая (2.232) и (2.242), получаем двухэтапную задачу оптимизации: сначала находим $A(t, \tau) \in \mathfrak{A}_\delta$, а затем по линейным формулам (2.232) (или (2.242)) определяем матрицу-функцию

$$R_{\alpha,\delta}(t, \tau).$$

После решения предварительной задачи (2.223), (2.224) (или (2.236)) рассматриваем задачу линейной фильтрации для наблюдений (2.221): найти оптимальную среднеквадратическую оценку $\hat{y}(t)_{t=t_0}$, если известны наблюдения $r(t)$ при $0 < t \leqslant t_0 \leqslant T_1$.

Величины $u(t)$ и $v(t)$ считаем шумами наблюдений. Как известно [9, гл. 2],

$$\hat{y}(t_0) = \int_0^{t_0} H(t_0, t) r(t) dt, \qquad (2.243)$$

где $(n \times m)$-матрица-функция $H(t_0, t)$ удовлетворяет матричному интегральному уравнению Винера — Хопфа

$$\int_0^{t_0} H(t_0, t) M[r(t) r^T(t_1)] dt = M[y(t_0) r^T(t_1)], \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_0. \qquad (2.244)$$

Вычисляем математические ожидания в (2.244):

$$M[r(t) r^T(t_1)] = M[y(t) y^T(t_1)] + M[u(t) u^T(t_1)] +$$
$$+ M[v(t) v^T(t_1)] + M[y(t) u^T(t_1)] + M[u(t) y^T(t_1)] +$$
$$+ M[y(t) v^T(t_1)] + M[v(t) y^T(t_1)] + M[u(t) v^T(t_1)] + M[v(t) u^T(t_1)]. \qquad (2.245)$$

Последние четыре слагаемых в (2.246) равны нулю, так как $x(\tau)$ и $w(\sigma)$ некоррелированы между собой. Используя (2.214), (2.216), (2.219), (2.220), из (2.242) получаем

$$K_r(t, t_1) = M[r(t) r^T(t_1)] = \int_0^t \int_0^{t_1} [A(t, \tau) K_x(t, \sigma) A^T(t_1, \sigma) +$$
$$+ [R(t, \tau) C(\tau) - A(t, \tau)] K_x(\tau, \sigma) [C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) - A^T(t_1, \sigma)] +$$
$$+ A(t, \tau) K_x(\tau, \sigma) [C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) - A^T(t_1, \sigma)] +$$
$$+ [R(t, \tau) C(\tau) - A(t, \tau)] K_x(\tau, \sigma) A^T(t_1, \sigma)] \, d\tau d\sigma + \tag{2.246}$$
$$+ \int^{\min(t, t_1)} R(t, \tau) W(\tau) R^T(t, \tau) \, d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^{t_1} R(t, \tau) C(\tau) K_x(\tau, \sigma) C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) \, d\tau d\sigma +$$
$$+ \int^{\min(t, t_1)} R(t, \tau) W(\tau) R^T(t_1, \tau) \, d\tau.$$

Далее

$$M[y(t_0) r^T(t_1)] = M[y(t_0) y^T(t_1)] + M[y(t_0) u^T(t_1)] + M[y(t_0) v^T(t_1)] =$$
$$= K_y(t_0, t_1) + K_{yu}(t_0, t_1) = \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} [A(t_0, \tau) K_x(\tau, \sigma) A^T(t_1, \sigma) +$$
$$+ A(t_0, \tau) K_x(\tau, \sigma) (C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) - A^T(t_1, \sigma))] \, d\tau d\sigma =$$
$$= \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} A(t_0, \tau) K_x(\tau, \sigma) C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) \, d\tau d\sigma. \tag{2.247}$$

Подставляя (2.246) и (2.247) в (2.244), получаем

$$\int_0^{t_0} H(t_0, t) \left(\int_0^t \int_0^{t_1} R(t, \tau) C(\tau) K_x(\tau, \sigma) C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) \, d\tau d\sigma \right) dt +$$
$$+ \int_0^{t_0} H(t_0, t) \left(\int_0^{\min(t, t_1)} R(t, \tau) W(\tau) R^T(t_1, \tau) \, d\tau \right) dt =$$
$$= \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} A(t_0, \tau) K_x(t, \sigma) C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) \, d\tau d\sigma, \tag{2.248}$$

или

$$\int_0^{t_0} H(t_0, t) K_r(t, t_1) \, dt = \int_0^{t_0} A(t_0, t) D(t, t_1) \, dt, \quad 0 \leqslant t, \ t_1 \leqslant t_0, \tag{2.249}$$

где $D(t, t_1) = \int_0^{t_1} K_x(t, \sigma) C^T(\sigma) R^T(t_1, \sigma) \, d\sigma$.

Тогда

$$K_r(t, t_1) = \int_0^t R(t, \tau) C(\tau) D(\tau, t_1) d\tau + \int_0^{\min(t,t_1)} R(t, \tau) W(\tau) R^T(t_1, \tau) d\tau.$$

В частности, если функционально-матричное уравнение

$$H(t_0, t) K_r(t, t_1) = A(t_0, t) D(t, t_1) \qquad (2.250)$$

имеет решение $H(t_0, t)$, то эта матрица-функция и будет решением (2.249). Заметим, что $H(t_0, t)$ есть функция от $A(t_0, t)$, что следует из (2.232) (или (2.241)) и (2.248). Если (2.250) не разрешимо (относительно $H(t_0, t)$), то для решения интегрального уравнения I рода (2.249) примени́м приближенно-аналитический метод, описанный в [89, гл. II].

Б. Наличие априорной информации о траектории динамической системы. Пусть n-мерный случайный процесс $x(\tau)$ генерируется путем пропускания белого гауссова шума $u_0(\tau)$ через линейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} - F(\tau)\, x(\tau) = G(\tau) u_0(\tau), \\ x(0) = x_0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1 < +\infty. \end{cases} \qquad (2.251)$$

Наблюдается случайный m-мерный векторный процесс (2.211). Преобразуя (2.211) так, как это сделано в п. А, приходим к закону наблюдений

$$r(t) = y(t) + u(t) + v(t), \quad 0 < t \leqslant T_1 < +\infty.$$

Для простоты считаем, что белые гауссовы шумы $u_0(\tau)$ и $w(\tau)$ некоррелированы между собой, т. е. $M[u_0(\tau) w^T(\sigma)] = 0$, причем $F(\tau)$ — $(n \times n)$-матрица с кусочно-непрерывными элементами и

$$M[u_0] = 0, \quad M[u_0(\tau) u_0^T(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma),$$
$$M[x_0] = 0, \quad M[u_0(\tau) x_0^T] = 0, \qquad (2.252)$$
$$M[x_0 x_0^T] = P_0,$$

где $Q(\tau) = Q^T(\tau) \geqslant 0,\ P_0 = P_0^T \geqslant 0.$

Учитывая (2.251), запишем дифференциальные векторные уравнения для случайного n-мерного процесса $y(t)$. Ясно, что

$$\frac{dy}{dt} = A(t, t) x(t).$$

Это следует из (2.215). Поэтому, предполагая далее, что матрица-функция $A(t, \tau) \in \mathfrak{A}$ выбрана таким образом, что $\det A(t, t) \neq 0$ и все элементы $A(t, t)$ непрерывно дифференцируемы, получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dA(t, t)}{dt} A^{-1}(t, t) A(t, t) x(t) + A(t, t)\frac{dx}{dt} =$$
$$= \frac{dA}{dt} A^{-1} \frac{dy}{dt} + A(t, t) F(t) A^{-1}(t, t) A(t, t) x(t) + A(t, t) G(t) u_0(t),$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F_1(t)\frac{dy}{dt} + G_1(t)u_0(t), \tag{2.253}$$

причем $y(0) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T_1 < +\infty$.

Векторное уравнение (2.253) второго порядка перепишем в виде дифференциальной системы первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = F_1(t)z(t) + G_1(t)u_0(t), \end{cases} \tag{2.254}$$

$$y(0) = 0, \quad z(0) = A(0, 0)x_0. \tag{2.255}$$

Обозначим

$$p(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in R_{2n},$$

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & F_1(t) \end{bmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_1(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда (2.254), (2.255) принимают вид

$$\frac{dp(t)}{dt} = F_2(t)p(t) + G_2(t)u_0(t), \tag{2.256}$$

$$\begin{gathered} p(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ A(0, 0)x_0 \end{bmatrix} \in R_n; \quad M[p(0)] = 0, \\ M[p(0)p^T(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(0, 0)P_0A^T(0, 0) \end{bmatrix} \equiv E_0. \end{gathered} \tag{2.257}$$

Пусть $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис в $L_2[0, T_1]$. Перепишем (2.221) так:

$$r(t) = C_1p(t) + u(t) + v(t), \tag{2.258}$$

где $C_1 = [I_m, 0]$, и разложим корреляционные функции шумов $u(t)$, $v(t)$ в ряд Фурье

$$\begin{gathered} K_u(t, t_1) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i(t)U_{ij}\varphi_j(t_1), \\ K_v(t, t_1) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i(t)V_{ij}\varphi_j(t_1), \end{gathered} \tag{2.259}$$

где $U_{ij} = \|u_{pq}\|_{pq=\overline{1,m}}$, $V_{ij} = \|v_{pq}^{ij}\|_{pq=\overline{1,m}}$ — матрицы, составленные из коэффициентов Фурье элементов $u_{pq}(t, t_1)$ и $v_{pq}(t, t_1)$, матриц $K_u(t, t_1)$ и $K_v(t, t_1)$ т. е.

$$\begin{gathered} u_{pq}^{ij} = \int_0^{T_1}\int_0^{T_1} u_{pq}(t, t_1)\varphi_i(t)\varphi_j(t_1)\,dtdt_1, \\ v_{pq}^{ij} = \int_0^{T_1}\int_0^{T_1} v_{pq}(t, t_1)\varphi_i(t)\varphi_j(t_1)\,dtdt_1. \end{gathered} \tag{2.260}$$

Зафиксируем некоторое натуральное N и положим

$$K_N(t, t_1) = \sum_{i,j=1}^{N} \varphi_i(t) C_{ij} \varphi_j(t_1), \tag{2.261}$$

где $C_{ij} = U_{ij} + V_{ij}$. Формулу (2.261) удобно представить в виде

$$K_N(t, t_1) = M_N^T(t) A_N M_N(t_1). \tag{2.262}$$

Здесь

$$M_N^T(t) = [\varphi_1(t) I_m, \ldots, \varphi_N I_m], \quad A_N = \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1N} \\ \vdots & & \\ C_{N1} & \ldots & C_{NN} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$V_0(t) = [C_1 Z(t);\ M_N^T(t)],$$

$$W_0(t) = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix},$$

где $Z(t)$ — матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения однородного уравнения (2.256), т. е. уравнения

$$\frac{dp}{dt} = F_2(t) p(t),$$

а

$$B(t) = Z^{-1}(0) E_0 (Z^{-1})^T(0) + \int_0^{t_0} Z^{-1}(t) G_2(t) Q(t) G_2^T(t) (Z^{-1})^T(t)\, dt.$$

Зафиксируем некоторое число $\alpha > 0$ (параметр регуляризации) и определим последовательность n-мерных векторов $p_\alpha(t_0) = p_{\alpha(N)}(t_0)$ (приближенных оценок $y(t)$ в соответствии с алгоритмом [89, гл. II] при $t = t_0$:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = F_2(t) p_\alpha(t) + \alpha^{-1} [Q_1(t) C_1^T + Q_2(t) M_N(t)] \times$$
$$\times [r(t) - V_0(t) v_\alpha(t)], \quad p_\alpha(0) = 0. \tag{2.263}$$

Вектор-функция $v_\alpha(t)$ является решением линейного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = \alpha^{-1} (V_0(t) P_1(t) + V_0(t) W_0(t))^T [r(t) - V_0(t) v_\alpha(t)], \tag{2.264}$$
$$v_\alpha(0) = 0,$$

причем

$$\frac{dP_1}{dt} = -\alpha^{-1} (V_0(t) P_1(t) + V_0(t) W_0(t))^T \times$$
$$\times (V_0(t) P_1(t) + V_0(t) W_0(t)), \quad P_1(0) = 0. \tag{2.265}$$

Матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ являются блоками симметрической матрицы

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^T(t) & Q_3(t) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющей матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_2}{dt} = \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_2 + P_2 \begin{bmatrix} F_2^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} G_2 Q G_2^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \alpha^{-1} P_2 [C_1, M_N^T]^T [C_1, M_N^T] P_2, \tag{2.266}$$

$$P_2(0) = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix}.$$

При этом выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha(N)\to 0} M \| p(t_0) - p_{\alpha(N)}(t_0) \|^2_{R_{2n}} = \inf M \left\| p(t_0) - \int_0^{t_0} h(t_0, t)\, r(t)\, dt \right\|^2_{R_{2n}}, \tag{2.267}$$

где $(2n \times m)$-матрицы-функции $h(t_0, t)$ имеют все элементы, интегрируемые с квадратом по Лебегу, на $[0, t_0]$. Значит, последовательность $2n$-мерных векторов $p_{\alpha(N)}(t_0)$ сходится (в среднем квадратичном) к наилучшей линейной оценке вектора $p(t_0)$.

В. Выведем дифференциальные уравнения параметрического фильтра (2.263) — (2.266). Для упрощения выкладок сформулируем задачу линейной фильтрации, к которой в п. Б сведена исходная проблема, отдельно.

Итак, пусть n-мерный случайный гауссов процесс $x(\tau)$ генерируется путем пропускания гауссова шума $u(\tau)$ через линейную систему

$$\frac{dx}{d\tau} - F(\tau)\, x(\tau) = G(\tau)\, u(\tau), \quad x(0) = x_0; \tag{2.268}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1 < +\infty.$$

Наблюдения подчинены закону

$$r(\tau) = C(\tau)\, x(\tau) + w(\tau), \tag{2.269}$$

где $C(\tau)$, $F(\tau)$, $G(\tau)$ — детерминированные матрицы соответствующих размерностей, причем элементы матрицы $C(\tau)$ и $G(\tau)$ — гладкие функции на $[0, t]$, а $F(\tau)$ — кусочно-непрерывные. Шум $w(\tau)$ — чисто цветной, т. е. элементы его корреляционной матрицы $K_w(\tau, \sigma) = M[w(\tau) w^T(\sigma)]$ принадлежат $L_2[0, t] \times L_2[0, t]$, а компоненты его реализаций — $L_2[0, t]$ (почти наверное).

Далее полагаем, что шумы $u(\tau)$ и $w(\tau)$ имеют нулевые средние и некоррелированы между собой, причем

$$M[x_0] = 0, \quad M[u(\tau)\, x_0^T] = 0, \quad M[w(\sigma)\, x_0^T] = 0,$$

$$M[x_0 x_0^T] = P_0 = P_0^T \geqslant 0, \quad M[u(\tau)\, u^T(\sigma)] = Q(\tau)\, \delta(\tau - \sigma),$$

где $Q(\tau) = Q^T(\tau) \geqslant 0$; $\delta(\tau - \sigma)$ — дельта-функция Дирака. (См. подробнее, в каком смысле следует понимать обобщенную задачу Коши [77, гл. I].) Обозначим $m(t) = \inf M\left(z, x(t) - \int_0^t h(t, \tau) \times\right.$

$\times\, r(\tau)\,d\tau)^2_{R_n}$, где $z \in R_n$ — фиксированный произвольный вектор, и нижняя грань берется по всем матрицам-функциям $h(t, \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \leqslant t)$ с элементами из $L_2\,[0, t]$ (по переменной τ). Задача линейной фильтрации может быть сформулирована следующим образом. Пусть известны наблюдения $\{r(\tau) : 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$, требуется найти последовательность n-мерных векторов

$$\left\{x_\alpha(t) = \int_0^t h_\alpha(t, \tau)\, r(\tau)\, d\tau\right\}_{\alpha>0} \qquad (2.270)$$

с матрицами-функциями, не зависящими от z из R_n, все элементы которых при любом индексе $\alpha > 0$ принадлежат $L_2\,[0, t]$ (по τ) и такую, чтобы

$$\lim_{\alpha\to 0} (z, x(t) - x_\alpha(t))^2_{R_n} = m(t), \quad \forall z \in R_n. \qquad (2.271)$$

Заметим, что матрица-функция $h_\alpha(t, \tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению Винера — Хопфа

$$\alpha h_\alpha(t, \sigma) + \int_0^t h_\alpha(t, \tau)\, K_r(\tau, \sigma)\, d\tau = K_{xr}(t, \sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant t, \qquad (2.272)$$

где

$$K_r(\tau, \sigma) = M\,[r(\tau)\, r^T(\sigma)], \quad K_{xr}(t, \sigma) = M\,[x(t)\, r^T(\sigma)].$$

Пусть $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в $L_2\,[0, t]$. Разложим корреляционную матрицу $K_w(t, \sigma)$ чисто цветного шума $w(\tau)$ в наблюдениях $r(\tau)$ (см. (2.269)) в ряд Фурье

$$K_w(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i(t)\, C_{ij}\varphi_j(\sigma),$$

где $C_{ij} = \|c_{pq}^{ij}\|_{p,q=1,m}$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов $k_{pq}(t, \sigma)$ матрицы $K_w(t, \sigma)$, т. е.

$$c_{pq}^{ij} = \int_0^T \int_0^T k_{pq}(t, \sigma)\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\sigma)\, d\sigma dt.$$

Зафиксируем некоторое натуральное N и положим

$$K_N(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{N} \varphi_i(t)\, C_{ij}\varphi_j(\sigma).$$

Введем обозначения

$$M_N^*(t) = [\varphi_1(t)\, I_m, \ \ldots, \ \varphi_N(t)\, I_m], \quad A_N = \begin{bmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1N} \\ \vdots & & \\ C_{N1} & \ldots & C_{NN} \end{bmatrix},$$

где I_m — m-мерная единичная матрица. Тогда матрица $K_N(t, \sigma)$ представима в виде $K_N(t, \sigma) = M_N^*(t)\, A_N M_N(\sigma)$. Пользуясь свойствами корреляционной матрицы $K_\omega(t, \sigma)$, можно показать, что A_N — симметрическая неотрицательно определенная матрица (порядка mN).

Поэтому матрица A_N является матрицей вторых моментов некоторой mN-мерной случайной величины с нулевым средним ξ. Выберем $\xi(\omega)$ так, чтобы она была некоррелированной с белым шумом $u(t)$ в уравнении состояния (2.268) и с начальным условием x_0. Отсюда следует, что $M[\xi x^*(\tau)] = 0$ для любого момента времени $\tau \in [0, T]$. Тогда m-мерный случайный процесс $w_N(\tau) = \overset{*}{M}_N(\tau)\,\xi(\omega)$ также обладает указанными свойствами некоррелированности, причем

$$M[w_N(t)\,\overset{*}{w}_N(\sigma)] = \overset{*}{M}_N(t)\,A_N M_N(\sigma) = K_N(t, \sigma).$$

Обозначим

$$\tilde{K}_r(t, \sigma) = M[(C(t)\,x(t) + w_N(t))\,(C(\sigma)\,x(\sigma) + w_N(\sigma))^*],$$

где $x(t)$ — решение задачи Коши (2.268). Преобразуем матрицу $\tilde{K}_r(t, \sigma)$ следующим образом. Пусть $\Phi(t, \tau) = Z(t)\,Z^{-1}(\tau)$ — переходная матрица системы $\frac{dy}{dt} = F(t)\,y(t)$, т. е.

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = F(t)\,\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I_n,$$

I_n — единичная матрица размерности n. Тогда вектор-функция $x(t)$ принимает вид

$$x(t) = \Phi(t, 0)\,x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)\,G(\tau)\,u(\tau)\,d\tau. \tag{2.273}$$

(Напомним, что интеграл в (2.273) понимается в смысле билинейной формы, потому что $u(\tau)$ — реализация белого шума.) Однако

$$\tilde{K}_r(t, \sigma) = C(t)\,K_{xx}(t, \sigma)\,C^*(\sigma) + K_N(t, \sigma).$$

Учитывая (2.273), для матрицы $K_{xx}(t, \sigma) = M[x(t)\,x^*(\sigma)]$ получаем выражение

$$\begin{aligned} K_{xx}(t, \sigma) &= \Phi(t, 0)\,P_0\Phi^*(\sigma, 0) + \\ &+ \int_0^t\int_0^\sigma \Phi(t, \tau)\,G(\tau)\,Q(\tau)\,\delta(\tau - \eta)\,G^*(\eta)\,\Phi^*(\sigma, \eta)\,d\tau d\eta = \\ &= Z(t)\,Q_0 z^*(\sigma) + Z(t)\int_0^{t\wedge\sigma} Z^{-1}(\tau)\,D_0(\tau)\,Z^{-1*}(\tau)\,d\tau Z^*(\sigma), \end{aligned}$$

где $t \wedge \sigma = \min(t, \sigma)$; $Q_0 = \overset{*}{Q}_0 = Z^{-1}(0)\,P_0 Z^{-1*}(0)$; $D_0(\tau) = \overset{*}{D}_0(\tau) = G(\tau)\,Q(\tau)\,G^*(\tau)$.

Полагая $\Psi(t \wedge \sigma) \equiv \int_0^{t\wedge\sigma} Z^{-1}(\tau)\,D_0(\tau)\,Z^{-1*}(\tau)\,d\tau$, окончательно получаем

$$\tilde{K}_r(t, \sigma) = C(t) Z(t) Q_0 Z^*(\sigma) C^*(\sigma) + C(t) Z(t) \Psi(t \wedge \sigma) Z^*(\sigma) C^*(\sigma) + + \overset{*}{M}_N(t) A_N M_N(\sigma) \equiv V(t) W(t \wedge \sigma) V^*(\sigma),$$

где

$$V(t) = [C(t) Z(t), \overset{*}{M}_N(t)], \quad W(t \wedge \sigma) = \begin{bmatrix} Q_0 + \Psi(t \wedge \sigma) & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вспомогательную линейную систему

$$\frac{ds}{dt} = \mathcal{G}(t) u_1(t), \quad s(0) = s_0, \quad y(t) = V(t) s(t) + v(t), \quad (2.274)$$

где $u_1(t)$ и $v(t)$ — некоррелированные между собой векторные белые шумы с нулевыми средними, причем

$$M[u_1(t) \overset{*}{u}_1(\sigma)] = I\delta(t - \sigma), \quad M[v(t) v^*(\sigma)] = \alpha I_m \delta(t - \sigma),$$

$$M[s_0] = 0, \quad M[s_0 \overset{*}{s}_0] = W(0), \quad M[s_0 \overset{*}{u}_1(t)] = M[s_0 v^*(t)] = 0.$$

Постараемся матрицу $\mathcal{G}(t)$ определить так, чтобы

$$M[s(t) s^*(\sigma)] = W(t \wedge \sigma). \quad (2.275)$$

Интегрируя с этой целью дифференциальное уравнение в (2.274), находим

$$M[s(t) s^*(\sigma)] = W(0) + \int_0^{t \wedge \sigma} \mathcal{G}(\tau) \mathcal{G}^*(\tau) d\tau = W(t \wedge \sigma).$$

Откуда, полагая $t = \sigma$ и дифференцируя по t, получаем

$$\mathcal{G}(t) \mathcal{G}^*(t) = \frac{dW(t)}{dt} \begin{bmatrix} \frac{d\Psi(t)}{dt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Однако $\frac{d\Psi}{dt} = Z^{-1}(t) G(t) Q(t) G^*(t) Z^{-1*}(t)$ и $Q(t) = Q^*(t) \geqslant 0$.

Поэтому можно $\mathcal{G}(t)$ положить равной блочной матрице

$$\mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} Z^{-1} G(t) Q^{1/2}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система (2.274) полностью определена. Заметим, что

$$M[y(t) y^*(\sigma)] = V(t) W(t \wedge \sigma) V^*(\sigma) + \alpha I_m \delta(t - \sigma) =$$

$$= \tilde{K}_r(t, \sigma) + \alpha I_m \delta(t - \sigma), \quad M[s(t) y^*(\sigma)] = W(t \wedge \sigma) V^*(\sigma).$$

Поэтому задача оптимальной линейной фильтрации для процесса $s(t)$ эквивалентна решению интегрального уравнения

$$\alpha d_\alpha(t, \sigma) + \int_0^t d_\alpha(t, \tau) \tilde{K}_r(\tau, \sigma) d\tau = W(t \wedge \sigma) V^*(\sigma) \quad (2.276)$$

(см. [89, гл. II]). Аналогичная задача для случайного процесса $z(t) = V(t)s(t)$ сводится к интегральному уравнению

$$\alpha\delta_\alpha(t, \sigma) + \int_0^t \delta_\alpha(t, \tau)\tilde{K}_r(\tau, \sigma)\,d\tau = M[z(t)y^*(\sigma)] = \tilde{K}_r(t, \sigma). \quad (2.277)$$

Умножая слева обе части уравнения (2.276) на матрицу $V(t)$, получаем уравнение (2.277). Поэтому $\delta_\alpha(t, \sigma) = V(t)d_\alpha(t, \sigma)$. Учитывая, что матрица αI_m интенсивности белого шума $v(t)$ является невырожденной, для нахождения оптимальной линейной оценки $\hat{s}(t) = \int_0^t d_\alpha(t,\tau)y(\tau) \times d\tau$ можно применить стандартный калмановский линейный фильтр, который в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{s}}{dt} = \alpha^{-1}S(t)V^*(t)[y(t) - V(t)\hat{s}(t)], \\ \hat{s}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.278)$$

где симметрическая матрица $S(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha^{-1}S(t)V^*(t)V(t)S(t) + \mathcal{G}(t)\mathcal{G}^*(t), \\ S(0) = W(0). \end{cases} \quad (2.279)$$

С целью упрощения сделаем в уравнении (2.279) замену $P_1(t) = S(t) - W(t)$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\alpha^{-1}(V(t)P_1(t) + V(t)W(t))^*(V(t)P_1(t) + V(t)W(t)), \\ P_1(0) = 0. \end{cases} \quad (2.280)$$

Если матрица-функция $V^*(t)V(t)$ невырожденная при $t \in [0, T]$, то (2.280) эквивалентно уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\alpha^{-1}[V^*V]^{-1}V^*[VP_1V^* + \tilde{K}_r(t, t)]^2V[V^*V]^{-1}, \\ P_1(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнение (2.278) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{s}}{dt} = -\alpha^{-1}(VP_1 + VW)^*V\hat{s} + \alpha^{-1}(VP_1 + VW)^*y(t), \\ \hat{s}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.281)$$

Учтем, что

$$V(t)\hat{s}(t) = \int_0^t V(t)d_\alpha(t, \tau)y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \delta_\alpha(t, \tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Отвлечемся теперь от вероятностных соображений, приведенных выше. Тогда решение детерминированного интегрального уравнения (2.277) дается формулой

$$\delta_\alpha(t, \sigma) = V(t)\alpha^{-1}\Theta(t)\Theta^{-1}(\sigma)(V(\sigma)P_1(\sigma) + V(\sigma)W(\sigma))^*,$$

где $\Theta(t)$ — матрица фундаментальных решений системы (2.281). Поэтому также справедлива лемма 2.13.

Лемма 2.13. *Пусть матрица-функция $\delta_\alpha(t, \sigma)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.277) и задана m-мерная вектор-функция $y(\tau)$ с элементами из $W_t^{-1}[0, t]$. Тогда для вычисления интеграла*

$$v_N(t) = \int_0^t \delta_\alpha(t, \tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

достаточно решить систему, состоящую из дифференциальных уравнений (2.280) и (2.281) и положить

$$v_N(t) = V(t)\, \hat{s}(t).$$

Учитывая некоррелированность случайных процессов w и x, уравнение Винера — Хопфа (2.272) перепишем в виде

$$K_{xx}(t, \sigma)\, C^*(\sigma) = \int_0^t h_\alpha(t, \tau)\, K_r(\tau, \sigma)\, d\tau + \alpha h_\alpha(t, \sigma). \qquad (2.282)$$

Заменим в (2.282) ядро $K_r(t, \sigma)$ на $\tilde{K}_r(t, \sigma)$. В результате получим

$$K_{xx}(t, \sigma)\, C^*(\sigma) = \int_0^t \tilde{h}_\alpha(t, \tau)\, \tilde{K}_r(\tau, \sigma)\, d\tau + \alpha \tilde{h}_\alpha(t, \sigma). \qquad (2.283)$$

Рассмотрим также интегральное уравнение

$$K_N(t, \sigma) = \int_0^t \tilde{b}_\alpha(t, \tau)\, \tilde{K}_r(\tau, \sigma)\, d\tau + \alpha \tilde{b}_\alpha(t, \sigma). \qquad (2.284)$$

Из (2.283) и (2.284) следует, что $C(t) K_{xx}(t, \sigma) C^*(\sigma) + K_N(t, \sigma) = \int_0^t [C(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) + \tilde{b}_\alpha(t, \tau)]\, \tilde{K}_r(\tau, \sigma)\, d\tau + \alpha [C(t) \tilde{h}_\alpha(t, \sigma) + \tilde{b}_\alpha(t, \sigma)]$, или, учитывая некоррелированность шумов w_N и u и вводя обозначение $\delta_\alpha(t, \sigma) = C(t) \tilde{h}_\alpha(t, \sigma) + \tilde{b}_\alpha(t, \sigma)$, приходим к уравнению (2.277). Поскольку матрица $K_N(t, \sigma)$ имеет вид $K_N(t, \sigma) = A(t) B(\sigma)$, где $A(t) = M_N^*(t)$, $B(\sigma) = A_N M_N(\sigma)$, то можно показать, что матрица-функция $\tilde{h}_\alpha(\alpha, \sigma)$ непрерывно дифференцируемая по t. Поэтому из уравнения (2.283) получаем

$$\frac{\partial K_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} C^*(\sigma) = \tilde{h}_\alpha(t, t)\, N_\alpha(t, \sigma) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{h}_\alpha(t, \sigma)}{\partial t} N_\alpha(\tau, \sigma)\, d\tau, \qquad (2.285)$$

где

$$N_\alpha(t, \sigma) = \tilde{K}_r(t, \sigma) + \alpha I_m \delta(t - \sigma) = C(t) K_{xx}(t, \sigma) C^*(\sigma) + K_N(t, \sigma) + \alpha I_m \delta(t - \sigma)$$

Однако корреляционная матрица $K_{xx}(t, \sigma)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial K_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} = F(t) K_{xx}(t, \sigma) + G(t) M[u(t) x^*(\sigma)]. \qquad (2.286)$$

Но второй член при $\sigma < t$ равен нулю. В самом деле, если

$$\frac{\partial \Phi(t, \sigma)}{\partial t} = F(t) \Phi(t, \sigma), \quad \Phi(\sigma, \sigma) = I_n, \text{ то } M[u(t) x^*(\sigma)] =$$

$$= M[u(t) x^*(0)] \Phi(0, \sigma) + \int_0^\sigma M[u(t) u^*(\tau)] G^*(\tau) \Phi(\sigma, \tau) d\tau = 0,$$

потому что $M[u(t) x^*(0)] = 0$ и $M[u(t) u^*(\sigma)] = Q(t) \delta(t - \sigma)$, а $\int_0^\sigma f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = 0$, если $t > \sigma$. Поэтому из (2.286) следует

$$\frac{\partial K_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} C^*(\sigma) = \int_0^t F(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) N_\alpha(\tau, \sigma) d\tau. \qquad (2.287)$$

При $\sigma < t$ получаем также, что

$$\tilde{h}_\alpha(t, t) N_\alpha(t, \sigma) = \tilde{h}_\alpha(t, t) \tilde{K}_r(t, \sigma) =$$

$$= \tilde{h}_\alpha(t, t) C(t) K_{xx}(t, \sigma) C^*(\sigma) + \tilde{h}_\alpha(t, t) K_N(t, \sigma).$$

Заменим $K^N(t, \sigma)$ правой частью уравнения (2.284). Учитывая (2.283), находим

$$\tilde{h}_\alpha(t, t) N_\alpha(t, \sigma) =$$

$$= \int_0^t [\tilde{h}_\alpha(t, t) C(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) + \tilde{h}_\alpha(t, t) \tilde{b}_\alpha(t, \tau)] N_\alpha(\tau, \sigma) d\tau. \qquad (2.288)$$

Подставляя (2.287) и (2.288) в (2.285), приходим к равенству

$$\int_0^t \left[-F(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) + \tilde{h}_\alpha(t, t) [C(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) + \tilde{b}_\alpha(t, \tau)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \tilde{h}_\alpha(t, \tau)}{\partial t} \right] N_\alpha(\tau, \sigma) d\tau = 0. \qquad (2.289)$$

Однако $\tilde{K}_r(r, \sigma)$ — неотрицательно определенная матрица. Поэтому уравнение (2.289) эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial \tilde{h}_\alpha(t, \tau)}{\partial t} = F(t) \tilde{h}_\alpha(t, \tau) - \tilde{h}_\alpha(t, t) \delta_\alpha(t, \tau), \qquad (2.290)$$

где матрица $\delta_\alpha(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению (2.277). Умножим (2.290) справа на вектор-функцию $r(\tau)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. Тогда

$$\int_0^t \frac{\partial \tilde{h}_\alpha(t, \tau)}{\partial t} r(\tau)\, d\tau + \tilde{h}_\alpha(t, t)\, r(t) =$$

$$= F(t)\int_0^t \tilde{h}_\alpha(t, \tau)\, r(\tau)\, d\tau + \tilde{h}_\alpha(t, t)\left[r(t) - \int_0^t \delta_\alpha(t, \tau)\, r(\tau)\, d\tau\right]. \quad (2.291)$$

Обозначим $q_N(t) = \int_0^t \tilde{h}_\alpha(t, \tau)\, r(\tau)\, d\tau$, и (2.291) принимает вид

$$\frac{dq_N}{dt} = F(t)\, q_N(t) + \tilde{h}_\alpha(t, t)\left[r(t) - \int_0^t \delta_\alpha(t, \tau)\, r(\tau)\, d\tau\right], \quad (2.292)$$

$$q_N(0) = 0.$$

Вычислим коэффициент усиления $\tilde{h}_\alpha(t, t)$. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad z(0) = z_0, \quad y(t) = \overset{*}{M}_N(t)\, z(t) + v_\alpha(t), \quad (2.293)$$

где $v_\alpha(t)$ — m-мерный гауссов белый шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $\alpha I_m \delta(t - \sigma)$. Причем $M[v_\alpha(\tau)\, \overset{*}{z_0}] = M[v_\alpha(\tau)\, u^*(\sigma)] = 0$, где $u(\sigma)$ — белый шум в уравнении состояния $\mathcal{L}(x) \equiv \frac{dx}{d\tau} - F(\tau)\, x(\tau) = G(\tau)\, u(\tau)$; $x(0) = x_0$. Объединив систему (2.268) с системой (2.293), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t)\, x(t) + G(t)\, u(t), & x(0) = x_0, \\ \dfrac{dz}{dt} = 0, u(t), & z(0) = z_0, \quad M[z_0] = 0. \end{cases}$$

Случайную величину z_0 выберем так, чтобы $M[z_0 \overset{*}{x_0}] = 0$, $M[z_0 \overset{*}{z_0}] = A_N$, $M[z_0 u^*(\sigma)] = 0$. Поэтому корреляционная матрица процесса $y(t)$ (с нулевым средним) равна $M[y(t)\, y^*(\sigma)] = K_N(t, \sigma) + \alpha I_m\, \delta(t - \sigma)$. Предположим, что наблюдается «регуляризованный» процесс $r_\alpha(t) = C(t)\, x(t) + \overset{*}{M}_N(t)\, z(t) + v_\alpha(t)$. Можно показать, что матрица $\tilde{h}_\alpha(t, \tau)$ является верхней частью матрицы $l_\alpha(t, \tau)$, задающей оптимальную линейную оценку $\hat{X}(t) = \int_0^t l_\alpha(t, \tau)\, r_\alpha(\tau)\, d\tau$ процесса $X(t)$, где $X^*(t) = [x^*(t), z^*(t)]$. Можно показать, что матрица $l_\alpha(t, t)$ имеет вид $l_\alpha(t, t) = K(t)$. Здесь $K(t) = \alpha^{-1} P_2(t)\, [C(t), \overset{*}{M}_N(t)]^*$, а симметрическая $(n + mN) \times (n + mN)$-матрица $P_2(t)$ есть решение уравнения Риккати

$$\frac{dP_2}{dt} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_2 + P_2 \begin{bmatrix} F^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & Q & G^* & 0 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \alpha^{-1} P_2\, [C, \overset{*}{M}_N]^*\, [C, \overset{*}{M}_N]\, P_2, \quad P_2(0) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & A_N \end{bmatrix}. \quad (2.294)$$

Поэтому, если

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^*(t) & Q_3(t) \end{bmatrix},$$

где матрицы Q_1 и Q_2 имеют n строк, то

$$\tilde{h}_\alpha(t, t) = \alpha^{-1}[Q_1(t)C^*(t) + Q_2(t)M_N(t)]. \tag{2.295}$$

Для вычисления интеграла $\int\limits_0^t \delta_\alpha(t, \tau)r(\tau)d\tau$ в (2.292) воспользуемся леммой 2.47.

Таким образом, алгоритм построения почти оптимальной оценки случайного процесса $x(t)$ принимает следующий вид (если фиксированы параметры α и N). Уравнения линейного фильтра — это дифференциальные уравнения (2.292) и (2.281). Неизвестные коэффициенты этих уравнений определяем по схеме.

1. Для нахождения матриц Q_1 и Q_2 решаем уравнение типа Риккати (2.294).

2. Решаем уравнение типа Риккати (2.280) и его решение P_1 подставляем в коэффициенты уравнения (2.281). На этом заканчиваются предварительные вычисления. Затем поступившие наблюдения $\{r(\tau)\}$ подаем на вход линейной системы (2.281) и определяем вектор $\hat{s}(t)$. После этого подставляем вектор $V(t)\hat{s}(t) = \int\limits_0^t \delta_\alpha(t, \tau)\ r(\tau)\ d\tau$ и наблюдение $r(t)$ в (2.292) и находим оценку $q_N(t) = q_{\alpha,N}(t)$.

Таким образом, уравнения параметрического фильтра получены.

Покажем теперь, что при соответствующем выборе параметров α и N величину $|M(z, x(t) - q_{\alpha,N}(t))^2 - \tilde{m}(t)|$ можно сделать сколь угодно малой. Для этого нужно воспользоваться такой леммой.

Лемма 2.14. *Пусть* $\{A_N\}_{N=1}^\infty$ и A — *ограниченные линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве* H, *причем неотрицательные и симметрические. Если*

$$\|A_N - A\| = \sup_x \{\|A_N x - Ax\|_H,\ x \in H,\ \|x\| = 1\} \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

то для любого положительного α *последовательность* $\{g_N\}_{N=1}^\infty$ *решений уравнений* $\alpha g_N + A_N g_N = f$ *сходится по норме* H *к решению уравнения* $\alpha g_0 + Ag_0 = f$, *где* f — *некоторый элемент из* H.

Доказательство. Отметим вначале, что операторы $\{\alpha I_H + A_N\}_{N=1}^\infty$ и $\alpha I_H + A$ обладают в H ограниченными обратными. Пусть g — произвольный элемент из H. Тогда уравнение $\alpha v + A_N v = g$ можно переписывать в виде

$$\alpha v + Av - (A - A_N)v = g.$$

Применим оператор $\Gamma = (\alpha I_H + A)^{-1}$ к обеим частям последнего уравнения. В результате получим $v - \Gamma(A - A_N)v = \Gamma g$. Значит, $\Gamma_N \equiv (\alpha I_H + A_N)^{-1} = (I_H - \Gamma(A - A_N))^{-1}\Gamma$. Обозначим $B_N \equiv \Gamma(A - A_N)$. Тогда $\|B_N\| \leqslant \|\Gamma\|\ \|A - A_N\| \to 0$ при $N \to \infty$.

Выберем номер N настолько большим, чтобы $\| B_N \| \leqslant \frac{1}{2}$. В таком случае для любого $g \in H$ имеем

$$\Gamma_N g = \sum_{k=0}^{\infty} B_N^k \Gamma g. \qquad (2.296)$$

В самом деле, во-первых, ряд в (2.296) сходится, поскольку $\| B_N^k \Gamma g \|_H \leqslant \leqslant \| B_N \|^k \| \Gamma \| \| g \|_H \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \| \Gamma \| \| g \|_H$ и сходимость ряда вытекает из того, что его общий член не превосходит общего члена сходящейся прогрессии; во-вторых,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_N^k (I_H - B_N) = (I_H - B_N) \sum_{k=0}^{\infty} B_N^k = I_H,$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Но тогда $\Gamma_N g - \Gamma g = \sum_{k=1}^{\infty} B_N^k \Gamma g$, откуда $\| \Gamma_N g - \Gamma g \|_H \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| B_N \|^k \quad \| \Gamma g \|_H \leqslant \leqslant \frac{\| B_N \| \| \Gamma \| \| g \|_H}{1 - \| B_N \|} \to 0$. Поэтому $\| g_N - g_0 \|_H = \| \Gamma_N f - \Gamma f \|_H \leqslant \| \Gamma_N - \Gamma \| \times \times \| f \|_H \to 0$, $N \to \infty$. Лемма доказана.

Умножим теперь уравнения (2.283) и (2.284) слева на произвольный вектор z из R_n с единичной нормой. В $L_2^{(m)}$ $[0, t]$ введем линейные ограниченные неотрицательные симметрические операторы

$$A_N(g) = \int_0^t g^*(\tau) \tilde{K}_r(\tau, \sigma)\, d\tau; \quad A(g) = \int_0^t g^*(\tau) K_r(\tau, \sigma)\, d\tau.$$

Если обозначить $K_{N+1}(t, \sigma) = K_r(t, \sigma) - \tilde{K}_r(t, \sigma)$, то для любой вектор-функции $g \in L_2^{(m)}$ $[0, t]$ получаем

$$\| (A_N - A)(g) \|^2_{L_2^{(m)}[0,t]} = \int_0^t \left\| \int_0^t g^*(\tau) K_{N+1}(\tau, \sigma)\, d\tau \right\|^2_{R_m} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^t \| g(\tau) \|^2_{R_m} d\tau \right) \int_0^T \int_0^T \| K_{N+1}(\tau, \sigma) \|^2 d\tau d\sigma \to 0, \quad N \to \infty,$$

поскольку к нулю стремится второй множитель в правой части этого неравенства. Значит, $\| A_N - A \| \to 0$, $N \to \infty$. Поэтому, применяя лемму 2.14, находим

$$\| z^* h_\alpha(t, \tau) - z^* h_\alpha(t, \tau) \|_{L_2^{(m)}[0,t]} \leqslant \| \Gamma_N - \Gamma \| \| z^* K_{xx}(t, \sigma) C^*(\sigma) \|_{L_2^{(m)}[0,t]},$$

откуда

$$\mathfrak{A} \equiv \sup_{\|z\|_{R_n}=1} \| z^* (h_\alpha(t, \tau) - \tilde{h}_\alpha(t, \tau)) \|_{L_2^{(m)}[0,t]} \leqslant$$

$$\leqslant \| \Gamma_N - \Gamma \| \sup \| z^* K_{xx}(t, \sigma) C^*(\sigma) \|_{L_2^{(m)}[0,t]} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Таким образом,

$$M(z, x_\alpha(t) - q_{\alpha,N}(t))^2_{R_n} = M\left\{\int_0^t [z^*h_\alpha(t,\tau) - z^*\tilde{h}_\alpha(t,\tau)]\, r(\tau)\, d\tau\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant M[\|r(\tau)\|_{L_2^{(m)}[0,t]}]^2 \|\Gamma_N - \Gamma\| \sup \|z^*K_{xx}(t,\sigma)\, C^*(\sigma)\|_{L_2^{(m)}[0,t]} \to 0, \quad (2.297)$$
$$N \to \infty.$$

Учитывая (2.297), для любого $\varepsilon > 0$ выбираем параметры α и N так, чтобы

$$M(z, x(t) - x_\alpha(t))^2 \leqslant \tilde{m}(t) + \varepsilon, \quad A_0\|\Gamma_N - \Gamma\| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$A_0 = M[\|r(\tau)\|_{L_2^{(m)}}]^2 \sup\{\|z^*K_{xx}(t,\sigma)\, C^*(\sigma)\|_{L_2^{(m)}},\ \|z\|_{R_n} = 1\}.$$

Тогда

$$M(z, x(t) - q_{\alpha,N}(t))^2_{R_n} \leqslant \tilde{m}(t)(1+\varepsilon) + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \to m(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому решения уравнения (2.292) при соответствующем выборе параметров α и N удовлетворяют критерию оптимальности, т. е. образуют решение задачи линейной фильтрации. (О выборе параметра регуляризации α для данного класса задач см. [77, гл. III].)

ГЛАВА IV

ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В § 2 гл. I [89] был затронут вопрос многокритериальной оптимизации и отмечена сложность возникающих при этом математических проблем. В этой главе более подробно рассмотрим некоторые подобные задачи. Подчеркнем, что в настоящее время теории векторной (многокритериальной) оптимизации посвящено большое количество работ, в которых рассматриваются различные постановки задачи [13, 31, 36, 40, 45, 51, 95, 114, 138 и др.]. Здесь мы не ставили перед собой цели описать все или большинство предлагаемых подходов, а ограничились теми ситуациями, которые, на наш взгляд, имеют непосредственное отношение к изучаемой предметной области — сложные РТС и ИВК.

Развитие методов векторной оптимизации тесно связано с теорией оптимального управления, расширением ее области приложений. Так, в рамках задачи оценивания состояния динамической системы естественно возникает проблема получения достаточно точной оценки при минимальных затратах машинного времени. А это уже двукритериальная задача, и ее решение требует модификации известных алгоритмов оценивания, которые позволяют оптимизировать лишь один критерий качества — точность оценивания.

Принято считать, что впервые постановка задачи векторной оптимизации дана в 1896 г. в работе Парето [194], хотя в неявной форме она встречается еще у Эйлера. В нашем столетии в контексте проблем оптимального управления задача векторной оптимизации впервые поставлена в 1963 г. Заде [202]. В последующие годы эта тематика привлекла внимание многих исследователей в области оптимального управления, экономики и т. п.

В этой главе излагаются основные факты теории частично упорядоченных векторных пространств (в контексте банаховых пространств, хотя большинство фактов верно и в более общем случае), описаны некоторые аналитические методы решения экстремальных задач векторной оптимизации и показан ряд применений в области РТС. Численные методы решения многокритериальных задач и применение интерактивных методов в векторной оптимизации планируется изложить в четвертом томе данной серии. При написании этой главы использовались результаты, изложенные в работах [3, 14, 31, 50, 71, 89, 114, 157, 159, 164, 167, 195, 196]. Все векторные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел.

§ 1. Основные понятия теории векторной оптимизации

Разработка целевых установок (критериев) представляет собой один из важнейших подготовительных этапов математического обеспечения сложного эксперимента. Причем требование более высокой степени адекватности ММ—РО приводит к множественности критериев, на основании которых необходимо сделать выбор одной из многих альтернатив. Например, при оптимальном проектировании интегральных схем задача расчета номинальных значений параметров состоит в приписывании множеству расчетных величин, которые не изменяются случайно (габаритам резисторов и конденсаторов, размерам активных зон полупроводниковых приборов и т. п.), таких значений, при которых обеспечивалась бы оптимизация качественных показателей схемы в рамках определенных технических условий-ограничений. Качественные показатели схем и технические условия представляют собой функции расчетных параметров, которые выражаются через характеристики интегральной схемы. В случае расчета широкополосного усилителя, например, функциями качества могут быть коэффициент шума и полоса усилителя, а техническими условиями — требования, чтобы в рабочей полосе частот входное и выходное сопротивления не превосходили 50 Ом $\pm$ 5 % [19]. При формализации этой задачи сопротивления можно выразить через характеристики схемы: отношение фазового вектора выходного напряжения к фазовому вектору входного тока. Ширина полосы рассчитывается с помощью определения коэффициента усиления, а коэффициент шума находится как отношение квадрата выходного напряжения, порожденного источниками шума в схеме, к квадрату шумового напряжения, создаваемого внутренним сопротивлением источника на входе усилителя. Заметим, что здесь мы имеем дело с двумя взаимно противоречивыми критериями. Хотя, как отмечено, их можно явно выразить через характеристики схемы усилителя, но решить задачу оптимизации известными методами с одним критерием качества затруднительно.

В более общей ситуации многокритериальная задача оптимизации формулируется следующим образом. Обозначим пространство параметров проектируемой или исследуемой системы R_n. Пусть имеется m целевых функций $f_1, \ldots, f_m$, которые запишем в виде R_m-векторфункции F, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in R_m, x \in R_n$. Таким образом, F — нелинейное отображение R_n в R_m. Желательно найти оптимальное значение каждой из функций $f_1, \ldots, f_m$ (например, минимум). Но добиться искомого результата на одном каком-либо векторе $x_0 \in R_n$ обычно невозможно. Это легко понять уже на приведенном выше примере усилителя, где $m = 2$. Взаимная противоречивость критериев означает, что приращение $x \in R_n$ на Δx может вызвать увеличение одних и уменьшение других функций из $\{f_i\}_{i=1}^{m}$. Поэтому для двух различных векторов $x_1, x_2 \in R_n$ нужно ввести каким-то образом отношение предпочтения между $F(x_1)$ и $F(x_2)$ из R_m, чтобы выяснить, какой из векторов x_1 и x_2 «лучше» другого, или установить, что оба они равноценны (относительно критериев $f_1, \ldots, f_m$). Это можно сделать многими способами. Для изучения подобных ситуаций удобно привлечь теорию частично упорядоченных (или полуупорядоченных) множеств ([31; 51; 159, гл. V; 185; 195 и др.]).

1⁰. Элементы теории частично упорядоченных множеств. Пусть X — некоторое непустое множество. Бинарным отношением Q в X называется подмножество множества $X \times X = \{\{x, y\}: x, y \in X\}$. Если $(x, y) \in Q$, то говорят, что x и y находятся в отношении Q и записывают так: xQy. Отношение Q называется: 1) рефлексивным, если $(x, x) \in Q$ для любого $x \in X$, и иррефлексивным в противном случае; 2) симметричным, если $(x, y) \in Q$ влечет $(y, x) \in Q$, и антисимметричным, если из $(x, y) \in Q$, $(y, x) \in Q$ следует, что $x = y$; 3) транзитивным, если xQy и yQz влечет xQz, $y, x, z \in X$. Полагают, что элементы $x, y \in X$ сравнимы (по отношению Q), если xQy или yQx, и несравнимы в противном случае. Если любые $x, y \in X$ сравнимы по Q (в том числе и $x = y$), то Q называется полным (или линейным) отношением. Неполное отношение называется частичным.

Отношение Q, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется отношением эквивалентности. Оно позволяет в случае необходимости разбивать все множество X на попарно непересекающиеся подмножества эквивалентных между собой элементов X. (Элементы $x, y \in X$ называются эквивалентными, если xQy, где Q — отношение эквивалентности.)

Отношение Q_s называется строгим частичным порядком, если оно иррефлексивно и транзитивно. Заметим, что xQ_sy исключает yQ_sx. Действительно, если допустить, что одновременно xQ_sy и yQ_sx, то в силу транзитивности получили бы xQ_sx, что невозможно. Поскольку отношение строгого неравенства между вещественными числами ($>$) удовлетворяет свойствам иррефлексивности и транзитивности, то обычно и в общем случае xQ_sy формально записывают: $x > y$ или $y < x$, понимая под последним отношение Q_s.

Пример 1.1. Пусть $X = R_n$. Для двух векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ будем считать, что $x > y$, если $x_i \geqslant y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$, и при этом $x_{i_0} > y_{i_0}$ хотя бы при одном индексе i_0.

Пример 1.2. Пусть $X = C[0, 1]$ — банахово пространство всех непрерывных вещественных функций на $[0, 1]$ с равномерной метрикой. Для любых двух функций $f = f(\tau)$, $g = g(\tau)$ из $C[0, 1]$ положим $f > g$, если $f(\tau) \geqslant g(\tau)$ во всех точках $\tau \in [0, 1]$ и $f(\tau_0) > g(\tau_0)$ хотя бы в одной точке.

Пример 1.3. Пусть $X = \mathfrak{M}_n$ — векторное пространство всех квадратных n-мерных матриц с вещественными элементами. Положим $A > B$ для любых A, B из $\mathfrak{M}_n$, если $C = A - B$ — положительно определенная матрица, т. е. $(Cx, x)_{R_n} > 0$ для любого вектора $x \neq \Theta_{R_n}$ из R_n, $\Theta_{R_n} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Отношение Q называется (частичным) квазипорядком (или предпорядком), если оно рефлексивно и транзитивно. Отметим, если xQy и yQx, то может быть $x \neq y$.

Пример 1.4. Пусть $X = C[0, 1]$. Для $f, g \in C[0, 1]$ положим fQg, если $\int\limits_0^1 f(\tau)\,d\tau \geqslant \int\limits_0^1 g(\tau)\,d\tau$. Отношение Q рефлексивно и транзитивно, т. е. является квазипорядком, причем полным. Однако если $\int_0^1 f d\tau = \int_0^1 g d\tau$, то может быть $f(\tau) \neq g(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$.

Отношение S называется (частичным) порядком, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Пример 1.5. Пусть $X = R_n$. Скажем, что xSy, если выполняется одно из условий: 1) $x_1 < y_1$; 2) $x_1 = y_1, x_2 < y_2$; ... $n + 1$) $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots n$. Это отношение часто используется в приложениях [113] и называется согласно расположению слов в словаре лексикографическим порядком. Записывать его будем так: $x\,(\text{lex}) \leqslant y$ — это отношение является полным порядком.

Пример 1.6. Пусть $X = R_n$. Положим $x \geqslant y$, если $x_i \geqslant y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что отношение $\geqslant$ — частичный порядок. Например, векторы $x = (0, 0, \ldots, 0)^T$ и $y = (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1})^T$ не сравнимы друг с другом.

В дальнейшем отношение частичного порядка в множестве X обозначается знаком $\geqslant_X$ или $\geqslant$, если отсутствует конкретная информация о X и этом отношении. Пара $(X, \geqslant)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ).

Пусть дано ЧУМ $(X, \geqslant)$. Элемент $x_0 \in X$ называется верхней границей подмножества Y в $(X, \geqslant)$, если $x_0 \geqslant y$, $\forall y \in Y$. Элемент $y_0 \in X$ называется точной верхней гранью Y (супремумом), если y_0 — верхняя граница Y, и для любой другой верхней границы x справедливо $x \geqslant y_0$. Записывают: $y_0 = \sup Y$. Если $\sup Y$ существует, то он единствен. Аналогично определяется $\inf Y$. Если $x_1, x_2 \in X$, то $\sup \{x_1, x_2\}$ обозначают $x_1 \vee x_2$, а $\inf \{x_1, x_2\}$ — $x_1 \wedge x_2$. ЧУМ $(X, \geqslant)$ называют решеткой (или структурой [31]), если для любых $x_1, x_2 \in X$ существуют $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \wedge x_2$. Решетка называется полной, если всякое ее непустое подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Отсюда следует, что в непустой полной решетке $(X, \geqslant)$ существуют $\sup X$ и $\inf X$, называемые ее наибольшим и наименьшим элементами.

Пример 1.7. Пусть X — непустое множество, $\mathfrak{P}$ — совокупность всех отношений эквивалентности на X, т. е. $Q \in \mathfrak{P} \Leftrightarrow Q \subset X \times X$, $(x, x) \in Q$, $\forall x \in X$; $(x, y) \in Q \Rightarrow (y, x) \in Q$; $((x, y) \in Q, (y, z) \in Q)) \Rightarrow (x, z) \in Q$. Введем отношение $\leqslant$ частичного порядка в $\mathfrak{P}$: $Q_1 \leqslant Q_2 \Leftrightarrow Q_1 \subseteq Q_2$. Для любых $Q_1 Q_2 \in \mathfrak{P}$ существует наибольшее $Q_3 \in \mathfrak{P}$, $Q_3 = Q_1 \cap Q_2$, среди всех $Q \in \mathfrak{P}$ таких, что $Q \leqslant Q_1$ и $Q \leqslant Q_2$, а также наименьшее отношение $Q_4 \in \mathfrak{P}$ среди всех Q таких, что $Q \geqslant Q_1$ и $Q \geqslant Q_2$, $Q_4 = Q_1 \cup Q_2$. Наименьший элемент в этой решетке $\mathfrak{P}$ — это $Q_0 = \{(x, x) : x \in X\}$, а наибольший элемент — $X \times X$.

Теорема 1.1 [191]. *Всякое ЧУМ $(X, \geqslant_X)$ может быть погружено в полную решетку $(L, \geqslant_L)$ с сохранением граней, т. е. существует оператор V, отображающий X взаимно-однозначно на подмножество Y полной решетки $(L, \geqslant_L)$, причем, если $E \subseteq X$ и существует $\sup E$ ($\inf E$) в $(X, \geqslant_X)$, то $V(\sup E) = \sup V(E)$ $(V(\inf E) = \inf V(E))$.*

Пусть $Y \subseteq X$. Элемент $y_0 \in Y$ называется слабым минимумом в Y (минимумом по Парето, неулучшаемым элементом), если не существует точки $z \in Y$ такой, что $z \leqslant y_0$, $z \neq y_0$. Элемент $x_0 \in Y$ называется сильным минимумом в Y (наименьшим элементом), если $x_0 \leqslant y$ для любого $y \in Y$. Обозначим $y_0 = w - \min Y$, $x_0 = s - \min Y$. Аналогично вводятся понятия слабого и сильного максимумов. Если сильный минимум существует, то он единствен.

В приложениях часто X является линейным нормированным пространством (ЛНП). Спрашивается, каким образом отношение частичного порядка $\geqslant$ должно быть согласовано с линейной структурой и метрикой в X. ЧУМ $(X, \geqslant)$ называется (частично) упорядоченным линейным нормированным пространством (ЧУЛНП), если выполняются следующие аксиомы:

I если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$, для всех $x, y, z \in X$;

II если $x \leqslant y$, то $\lambda x \leqslant \lambda y$ для всех $x, y \in X$, $\lambda > 0$,

III если $x_n \geqslant \Theta_X$, $\| x_n - x \|_X \to 0$ при $n \to \infty$, то $x \geqslant \Theta_X$, где Θ_X — нуль ЛНП X.

Обозначим $C = \{x \in X : x \geqslant \Theta_X\}$ — множество всех неотрицательных элементов в X. Свойства C таковы: 1) C — конус с вершиной в нуле, т. е. $\lambda C \subseteq C$, $\forall \lambda \geqslant 0$; 2) C — выпуклое множество; 3) $C \cap (-C) = \{\Theta_X\}$; 4) C — замкнутое в метрике пространства X множество.

Верно обратное: если в ЛНП X задать конус C со свойствами 1—4, то он однозначно задаст в X отношение частичного порядка $(\geqslant)$, удовлетворяющее аксиомам I—III, по правилу: $y \leqslant x \Leftrightarrow x - y \in C$. Поэтому ЧУЛНП будем обозначать далее (X, C).

Для изучения свойств отношения порядка в (X, C) полезной оказывается теория двойственности векторных пространств [159]. Поэтому приведем ряд необходимых в дальнейшем утверждений этой теории.

Пусть E — вещественное векторное пространство, E' — векторное пространство линейных функционалов на E. Значение $f(x)$ функционала $f \in E'$ на векторе $x \in E$ будем записывать так: $\langle x, f \rangle$. Говорят, что E и E' образуют дуальную систему или двойственность $\langle E, E' \rangle$, если: 1) для каждого $x \neq \Theta_E$ из E существует $x' \in E'$ такой, что $\langle x, x' \rangle \neq 0$; 2) для каждого $x'' \neq \Theta_{E'}$ из E' существует $x \in E$ такой, что $\langle x, x'' \rangle \neq 0$. Выражение $\langle x, x' \rangle$ образует билинейную форму на $E \times E'$. Пусть $\langle E, E' \rangle$ — дуальная система. Каждому $x' \in E'$ соответствует преднорма p на E, определяемая формулой $p_{x'}(x) = |\langle x, x' \rangle|$. Слабой топологией в E, обозначаемой $\sigma(E, E')$, называют локально выпуклую топологию, порождаемую базисом окрестностей нуля

$$U = U(x_1', \ldots, x_n') = \{x \in E : \sup p_{x_i'}(x) < 1\},$$

$$\forall x_i' \in E', \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично вводится топология $\sigma(E', E)$ в E'. Сопряженное $(E, \sigma(E, E'))'$ к локально выпуклому топологическому векторному пространству (л. в. п.) $(E, \sigma(E, E'))$ совпадает с E'. Для каждого множества $N \subseteq E$ определим подмножество

$$N^\circ = \{x' \in E' : \langle x, x' \rangle \leqslant 1, \ \forall x \in N\} \subset E', \tag{1.1}$$

называемое полярой N. Поляра N° является $\sigma(E', E)$ — замкнутым выпуклым подмножеством, причем $\Theta_{E'} \in N^\circ$. Если C — конус с вершиной в Θ_E в E, то C° — выпуклый $\sigma(E', E)$ — замкнутый конус в E', который можно определить как множество всех $x' \in E'$ таких, что $\langle x, x' \rangle \leqslant 0$ для любого $x \in C$

Поляра множества N°, являющаяся подмножеством E, называется биполярой N и обозначается символом $N^{\circ\circ}$.

Теорема 1.2 (о биполяре). *Биполяра $N^{\circ\circ}$ любого множества $N \subseteq E$ совпадает с $\sigma(E, E')$ — замкнутой выпуклой оболочкой множества $N \cup \{\Theta_E\}$.*

Следствие 1.1. Пусть $\{N_j, j \in J\}$ — семейство $\sigma(E, E')$-замкнутых выпуклых подмножеств E, каждое из которых содержит Θ_E, $N = \bigcap_{j \in J} N_j$. Тогда поляра N° совпадает с $\sigma(E', E)$-замкнутой выпуклой оболочкой множества $\bigcup \{N_j^{\circ} : j \in J\}$.

Локально выпуклая топология τ на E называется согласованной с двойственностью $\langle E, E' \rangle$, если сопряженное к (E, τ) пространство совпадает с E'. Слабая топология $\sigma(E, E')$ является слабейшей согласованной топологией на E. Существует сильнейшая локально выпуклая топология $\tau(E, E')$ на E, согласованная с $\langle E, E' \rangle$, называемая топологией Макки.

Предложение 1.1. Замыкание выпуклого множества $B \subset E$ является одним и тем же для всех локально выпуклых топологий на E, согласованных с $\langle E, E' \rangle$ (и следовательно, совпадает с $\sigma(E, E')$ — замыканием B).

В частности, если X — ЛНП, то топология на X, порождаемая нормой $\| \cdot \|_X$, совпадает с топологией Макки $\tau(X, X')$, если векторные пространства X и X' рассматривать как дуальную систему. Известно, что X', наделенное нормой $\| x' \|_{X'} = \sup \{ | \langle x, x' \rangle | : x \in X, \ \| x \|_X = 1\}$, является банаховым пространством. Рассмотрим сопряженное пространство X'' к X'. Поскольку $\langle X, X' \rangle$ — дуальная система, то $X \subset X''$ (вложение понимается в следующем смысле: для любого $x \in X$ $\varphi_x(x') = \langle x, x' \rangle$, $x' \in X'$, есть линейный непрерывный функционал на X', т. е. $\varphi_x \in X''$). Соответствие $x \leftrightarrow \varphi_x$ таково, что норма $\| x \|_X$ равна норме $\| \varphi_x \|_{X''}$. Поэтому вложение X в X'' изометрично. В общем случае указанное вложение $X \subset X'$ строгое. Если это вложение таково, что $X = X''$, то X называется рефлексивным пространством. Поскольку X'' всегда банахово, то рефлексивные пространства составляют собственный подкласс в классе всех банаховых пространств. Рефлексивными являются пространства $L_p[0, 1]$, $1 < p < +\infty$, все гильбертовы пространства. Понятие рефлексивности в приложениях оказывается полезным, в частности, в связи со следующими утверждениями.

Теорема 1.3. *Всякое ограниченное слабо замкнутое множество S из рефлексивного банахова пространства B слабо компактно (т. е. компактно в топологии $\sigma(B, B')$).*

Поскольку проверка слабой замкнутости S не всегда проста, то часто более удобной оказывается следующая теорема.

Теорема 1.4. *Любое ограниченное выпуклое замкнутое (по норме) множество S рефлексивного банахова пространства B слабо компактно.*

Пусть $\langle E, E' \rangle$ — двойственность. Введем в E отношение частичного порядка $(\geqslant)$, удовлетворяющее аксиомам I, II. Как и в случае ЧУЛНП (X, C), порядок однозначно определяется с помощью выпуклого конуса K неотрицательных векторов, $K \cap (-K) = \{\Theta_E\}$.

Порядок ($\geqslant$) на E называется архимедовым, если условие «$nx \leqslant y$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и при заданном $y \in E$» (1.1) влечет за собой $x \leqslant \Theta_E$.

Предложение 1.2. Любое ЧУЛНП (X, C) архимедово упорядочено.

Доказательство. Пусть выполняется условие (1.1) для некоторых $x, y \in X$. Это означает, что $y - nx \in C$, откуда $\frac{y}{n} - x \in C$. Устремляя n к ∞, получаем $\frac{y}{n} - x \to -x$, причем $-x \in C$ в силу замкнутости конуса C. Поэтому $x \in -C$, что и требуется.

Оказывается, что если конус C не замкнут, то порядок может быть не архимедов.

Пример 1.8. Введем в R_n лексикографический порядок $\geqslant$ (lex) (см. пример 1.5). Конус C_{lex} неотрицательных элементов незамкнут в топологии R_n, $n \geqslant 2$. Рассмотрим $x = (0, 1, \ldots, 1)^T$, $y = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T$. Ясно, что условие (1.1) выполняется, т. е. $y \geqslant_{(\text{lex})} nx$, $n = 1, 2, \ldots$ Но $x \in C_{\text{lex}}$.

Порядковый сегмент в (E, K) — это подмножество вида $[x, y] = \{z \in E : x \leqslant z \leqslant y\}$, где $x, y \in E$ заданы. Подмножество $U \subset E$ порядково ограничено, если U содержится в некотором порядковом сегменте. Вектор $e \in E$ называется порядковой единицей в (E, K), если для любого $x \in E$ существует число $\lambda > 0$ такое, что $x \in [-\lambda e, \lambda e]$. Если внутренность $\operatorname{int} K$ конуса K не пуста, то понятия порядковой единицы и внутренней точки конуса K совпадают. В самом деле, пусть $x_0 \in \operatorname{int} K$, $S(x_0, r) = \{y \in E : \| y - x_0 \|_E < r\}$ — шар, лежащий в K, e — порядковая единица. Тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $\lambda e \geqslant x_0$. Отсюда для любого $z \in S(\lambda e, r)$ имеем $\| z - (\lambda e - x_0) - x_0 \|_E < r$ или $z - (\lambda e - x_0) \in S(x_0, r)$. Значит, $z \geqslant \lambda e - x_0 \geqslant \Theta_E$, т. е. $S(\lambda e, r) \subset K$. Поэтому $S(e, \lambda^{-1} r) \subset K$ и e — внутренняя точка K. Обратно, возьмем любой $x \in E$, $x \neq \Theta_E$. Положим

$$u_{1,2} = x_0 \pm \frac{r}{2\|x\|_E} x.$$

Однако

$$u_{1,2} \in S(x_0, r) \subset K \quad \text{или} \quad \frac{2\|x\|_E}{r} x_0 \pm x \geqslant \Theta_E.$$

Откуда

$$x \in \left[-2\frac{\|x\|_E}{r} x_0;\ 2\frac{\|x\|_E}{r} x_0\right].$$

Пример 1.9. Пусть $E = R_n$, частичный порядок определяется конусом $K = R_n^+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T.\ x_i \geqslant 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$. (ср. с примером 1.6). Вектор $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $e_i > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ — порядковая единица ЧУЛНП (R_n, R_n^+).

Пример 1.10. Пусть $E = C[0, 1]$, конус положительных элементов

$$K = \{f \in C[0, 1]:\ f(\tau) \geqslant 0, \quad \forall \tau \in [0, 1]\}.$$

Порядковой единицей является любая непрерывная функция $g(\tau)$ такая, что $g(\tau) > 0$ при всех $\tau \in [0, 1]$.

Линейный функционал f из E' называется положительным (неотрицательным), если из $x \geqslant \Theta_E$ следует $\langle x, f\rangle \geqslant 0$. Множество всех положительных линейных функционалов из E' образует дуальный конус K', являющийся полярой множества $(-K)$ (относительно двойственности $\langle E, E'\rangle$). Подпространство $E^+ = K' - K'$ пространства E' называется порядково сопряженным к (E, K). Для успешного использования двойственности при изучении упорядоченных векторных пространств необходимо иметь достаточно много положительных линейных функционалов. Более точно, частичный порядок, определяемый конусом K в E, регулярен, если (E, K) архимедово упорядочено и E^+ разделяет точки, т. е. для любых $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$, найдется функционал $f \in E^+$ такой, что $\langle x_1, f\rangle \neq \langle x_2, f\rangle$.

Предложение 1.3. Любое ЧУЛНП (X, C) регулярно упорядочено.

Доказательство. Достаточно убедиться, что порядково сопряженное $X^+ \equiv C' - C'$ разделяет точки X. Поскольку C — выпукло и замкнуто в X, по определению, то оно $\sigma(X, X')$ замкнуто (по предложению 1.1). Поэтому $C^{\circ\circ} = C$ в силу теоремы 1.2, и $(-C)^\circ = C'$. Так как $C \cap (-C) = \{\Theta_X\}$, то поляра $(C \cap (-C))^\circ = X'$ есть $\sigma(X', X)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $C^\circ \cup (-C)^\circ = C' \cup (-C')$. Значит, $C' - C'$ — плотно в X', т. е. X^+ разделяет точки X. Предложение 1.3 доказано.

Пусть $(H, \leqslant)$ — ЧУМ. Тогда H называется направленным по возрастанию (относительно $(\leqslant)$), если любое подмножество $\{x, y\}$ имеет верхнюю границу. Если $x_0 \in H$, то подмножество $H_{x_0} = \{h \in H: h \geqslant x_0\}$ называется сечением H, порожденным точкой x_0. Семейство всех сечений $\mathcal{H} = \{H_x, x \in H\}$, направленного по возрастанию множества H обладает свойствами: 1) $H_x \neq \varnothing$; 2) для любых H_x и H_y из $\mathcal{H}$ найдется H_z из $\mathcal{H}$ такое, что $H_x \cap H_y \supseteq H_z$. Семейство подмножеств с такими свойствами образует базис фильтра [26]. Фильтр Φ — это класс непустых подмножеств из H таких, что: 1) если $A \in \Phi$, $A \subseteq B \subseteq H$, то $B \in \Phi$; 2) если $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$, то $A \cap B \in \Phi$. Фильтр $\Phi(\mathcal{H})$ определяется по базису $\mathcal{H}$ единственным образом так, что $A \in \Phi(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один элемент $B \in \mathcal{H}$, $B \subseteq A$. Фильтр $\Phi(\mathcal{H})$ называется фильтром сечений множества H.

Если $(H, \leqslant)$ — топологическое пространство, то фильтр $\Phi(\mathcal{H})$ сходится к некоторой точке $x_0 \in H$, если любая открытая окрестность точки x_0 содержит элемент фильтра $\Phi(\mathcal{H})$.

Предложение 1.4. Пусть (X, C) — ЧУЛНП, $H \subseteq X$ — направленное по возрастанию подмножество, причем фильтр сечений $\Phi(\mathcal{H})$ сходится к вектору $x_0 \in X$. Тогда $x_0 = \sup H$.

Доказательство. Убедимся, что

$$x_0 \in \bar{H}_x, \ \forall\, x \in H, \tag{1.2}$$

где $\bar{H}_x$ — замыкание в ЛНП X сечения H_x. Если бы это было не так для некоторого $x \in H$, то нашлась бы открытая окрестность U вектора x_0 в X такая, что $U \cap H_x = \varnothing$. Но $\Phi(\mathcal{H})$ — фильтр, сходящийся к x_0. Поэтому существует сечение $H_y \in \mathcal{H}$ такое, что $H_y \subseteq U$, т. е.

$H_y \cap H_x = \varnothing$, что противоречит определению фильтра. Из (1.2) следует, что $x \leqslant x_0$, так как $\bar{H}_x = (x + C) \cap \bar{H}$, $x_0 \in \bar{H}$. Значит, x_0 — верхняя грань множества H в (X, C). Пусть y — любая грань H в (X, C), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность из H_x, сходящая к x_0. Поскольку $x_n \leqslant y$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ и конус C замкнут, то $\lim x_n = x_0 \leqslant y$. Предложение 1.4 доказано.

Замечание. Предложение 1.4 остается верным, если X — локально выпуклое векторное топологическое пространство с замкнутым конусом положительных элементов.

Среди конусов неотрицательных элементов в нормированных пространствах одно из важнейших мест занимают конусы, порождающие отношение порядка, в котором норма обладает определенным свойством монотонности. Это так называемые нормальные конусы [159]. Точное определение таково.

Конус C в ЧУЛНП (X, C) называется нормальным, если существует постоянная $\gamma \geqslant 1$ такая, что

$$\|x\|_X \leqslant \gamma \|x + y\|_X \tag{1.3}$$

для любых $x, y \in C$. Для всякого подмножества $Z \subset X$ положим по определению $[Z] = (Z + C) \cap (Z - C) = \bigcup \{[x, y] : x, y \in Z\}$. Подмножество $B \subset X$ называется C-насыщенным, если $B = [B]$. Для любого $Z \subset X$ множество $[Z]$ является пересечением всех C-насыщенных подмножеств, содержащих Z. Поэтому $[Z]$ называется C-насыщенной оболочкой множества Z.

Предложение 1.5. C-насыщенная оболочка обладает такими свойствами: 1) если $A \subset B$, то $[A] \subset [B]$; 2) если A выпукло, то выпукло и $[A]$; 3) если Φ — базис фильтра в X, то семейство $[\Phi] = \{[A]: A \in \Phi\}$ есть базис фильтра в X. Доказательство следует из определения $[A]$.

Предложение 1.6. Конус C в ЧУЛНП (X, C) нормальный тогда и только тогда, когда существует базис C-насыщенных окрестностей нуля Θ_X в X.

Доказательство. Пусть C — нормальный конус, $U_\varepsilon = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Убедимся, что

$$[U_\varepsilon \cap C] \subset \gamma U_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.4}$$

Действительно, если $z \in [U_\varepsilon \cap C]$, то существуют векторы $x, y \in U_\varepsilon \cap C$ такие, что $x \leqslant z \leqslant y$. Отсюда $z \geqslant \Theta_X$, $y - z \geqslant \Theta_X$, поэтому из (1.3) следует $\|z\|_X \leqslant \gamma \|z + (y - z)\|_X \leqslant \gamma\varepsilon$. Пусть $\mathfrak{A}$ — фильтр окрестностей Θ_X, $U \in \mathfrak{A}$. Покажем, что существует окрестность W из $\mathfrak{A}$ такая, что $[W] \subseteq U$. Выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma U_\varepsilon + U_\varepsilon \subset U$. Тогда $[U_{\varepsilon/2}] = \bigcup\limits_{x,y \in U_{\varepsilon/2}} [x, y] = \bigcup\limits_{x,y \in U_{\varepsilon/2}} (x + [\Theta_X, y - x]) \subset U_{\varepsilon/2} + [(U_{\varepsilon/2} + U_{\varepsilon/2}) \cap C] \subset U_\varepsilon + [U_\varepsilon \cap C] \subset U_\varepsilon + \gamma U_\varepsilon \subset U$. Таким образом, в качестве C-насыщенного базиса окрестностей можно выбрать семейство подмножеств $\{W = [U_\varepsilon], \varepsilon > 0\}$.

Если имеется C-насыщенный базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}$ в X, то выберем из $\mathfrak{B}$ выпуклое C-насыщенное множество W, причем закругленное, т. е. $\lambda W \subseteq W$ при $|\lambda| \leqslant 1$. Тогда функционал Минковского

$$p_W(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda W\}, \quad x \in X,$$

обладает свойством $p_W(x) \leqslant p_W(x+y)$ при $x, y \in C$ и определяет норму в X, эквивалентную исходной. Значит, конус C — нормальный. Предложение 1.6 доказано.

Предложение 1.7. В ЧУЛНП (X, C) с нормальным конусом C каждое ограниченное (по норме) множество $B \subset X$ обладает ограниченной (по норме) C-насыщенной оболочкой $[B]$.

Доказательство. Пусть $B \subseteq U_\varepsilon$ при некотором вещественном $\varepsilon > 0$. Отсюда $[B] \subseteq [U_\varepsilon]$, по предложению 1.5. Но $[U_\varepsilon]$ — окрестность нуля Θ_X в X в силу предложения 1.6, следовательно, $[B]$ ограничено, что и требовалось.

Заметим, что требование нормальности конуса C в (X, C) является, грубо говоря, мерой «заостренности» конуса. Так, если понятие нормальности перенести на произвольные выпуклые конусы, то оказывается, что нормальные выпуклые конусы не могут содержать ни одной прямой. Дуальный конус $C' \subset X'$ к C в ЧУЛНП (X, C) в случае нормальности C обладает свойством «тупости». Более точно, имеет место предложение 1.8.

Предложение 1.8. Если C — нормальный конус в ЧУЛНП (X, C), то $X' = C' - C'$, т. е. $X^+ = X'$.

Доказательство. Введем функцию F на C по формуле

$$F(x) = \sup\{\langle y, x'\rangle : y \in [\Theta_X, x]\}, \quad \forall x \in C,$$

где $x' \in X'$ — фиксированный функционал. Свойства $F(x)$ таковы: а) $F(x) \geqslant 0$; б) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, $\forall \lambda \geqslant 0$; в) $F(x+y) \geqslant F(x) + F(y)$, $\forall x, y \in C$. В пояснении нуждается только «в». Оно следует из включения $[0, x] + [0, y] \subset [0, x+y]$ для любых $x, y \in C$. В декартовом произведении $R_1 \mathrm{x} X$ рассмотрим множество $Y = \{(\lambda, x) : 0 \leqslant \lambda \leqslant F(x),\ x \in C\}$, которое является конусом, что вытекает из свойств функции F. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся к Θ_X последовательность в X, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R_1$ — такая последовательность, что $\{(\lambda_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$. В силу нормальности C неравенство $\|y\|_X \leqslant \|x_n\|_X$ справедливо для любого $y \in [\Theta_X, x_n]$, т. е. $\|[0, x_n]\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку функционал x' непрерывен на X, то получаем: $\lim F(x_n) = F(\Theta_X) = 0$. Но $0 \leqslant \lambda_n \leqslant F(x_n)$, поэтому $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$. Значит, пара $(1, \Theta_X)$ не может принадлежать замыканию $\mathrm{cl}\, Y$ множества Y в ЛНП $R_1 \times X$. Отсюда по следствию из теоремы Хана — Банаха существует замкнутая гиперплоскость $H_{(\beta, y')} = \{(\lambda, x) \in R_1 \times X : \lambda\beta + \langle x, y'\rangle = \alpha\}$ в $R_1 \times X$, строго разделяющая замкнутый выпуклый конус Y и точку $(1, \Theta_X)$, т. е. $\lambda\beta + \langle x, y'\rangle \geqslant \alpha_1 > \alpha \times \beta$. Можно считать, что $\alpha = \beta = -1$. Тогда $\alpha_1 = 0$ (если бы при некоторой паре $(\lambda_0, x_0) \in Y$ выполнялось неравенство $-\lambda_0 + \langle x_0, y'\rangle = \gamma_0 < 0$, $\gamma_0 \geqslant \alpha_1$, то, поскольку $\alpha(\lambda_0, x_0) = (\alpha\lambda_0, \alpha x_0) \in Y$, $\forall \alpha \geqslant 0$, нашлось бы $\alpha > 0$ такое, что $-(\alpha, \lambda_0) + \langle \alpha x_0, y'\rangle = \alpha\gamma_0 < -1$, что невозможно). Так как $(\Theta, x) \in Y$ при любом $x \in C$, то отсюда следует, что $\langle x, y'\rangle \geqslant 0$;

$x \in C$, т. е. $y' \in C'$. Сравним между собой функционалы x' и y'. С этой целью заметим, что пара $(F(x), x) \in Y$ для всех $x \in C$. Поэтому $-F(x) + \langle x, y' \rangle \geqslant 0, \forall x \in C$. Отсюда $\langle x, x' \rangle \leqslant F(x) \leqslant \langle x, y' \rangle, \forall x \in C$, т. е. $y' - x' \in C'$. Значит, $x' = y' - (y' - x') \in C' - C'$, что и требовалось доказать.

Предложение 1.9. Пусть Y — подмножество ЧУЛНП (X, C) с нормальным конусом C, направленное по возрастанию. Тогда, если фильтр сечений $\Phi(Y)$ сходится в слабой топологии $\sigma(X, X')$, то он сходится и в ЛНП X.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $Y \subset C$, Y направлено по убыванию и $\lim \Phi(Y) = \Theta_X$ (в топологии $\sigma(X, X')$). В самом деле, пусть $\lim \Phi(Y) = x_0 \in X$ (в $\sigma(X, X')$). Тогда по замечанию к предложению 1.4 $x_0 = \sup Y$. Рассмотрим множество $Z = Y - x_0$ и сдвинутый фильтр $\Psi = \Phi(Y) - x_0 = \{A - x_0;\ A \in \Phi(Y)\}$. Тогда $\Theta_X = \sup Z$, т. е. $Z \subset -C$, или $-Z \subset C$ и $\Theta_X = \lim \Psi(-Z)$ (в $\sigma(X, X')$).

Предположим от противного, что фильтр сечений $\Phi(Y)$ не сходится в сильной топологии X. Тогда существует окрестность нуля U, не содержащая сечений множества Y. В силу нормальности конуса C можно U считать выпуклым и C-насыщенным множеством. Если бы $x \in Y \cap U \neq \varnothing$, то сечение $Y_x = \{y \in Y : y \leqslant x\} \subseteq C \cap U \subset U$. Последнее по предположению невозможно, поэтому $Y \cap U = \varnothing$. Рассмотрим множество $Y + C = \{x + C : x \in Y\}$. Каждое подмножество $x + C$ выпукло, а все семейство таких подмножеств направлено по включению, поскольку для любых $x_1, x_2 \in Y$ найдется миноранта $x_3 \in Y$ $(x_3 \leqslant x_1,\ x_3 \leqslant x_2)$, по условию, и тогда $x_3 + C \supset x_i + C$, $i = 1, 2$. Следовательно, $Y + C$ — выпуклое множество. Далее, пусть найдутся векторы $y_0 \in Y$ и $c_0 \in C$ такие, что $y_0 + c_0 \in U$. В этом случае существует $u_0 \in U$ со свойством: $\Theta_X \leqslant y_0 + c_0 \leqslant u_0$, так как $U = [U]$. Отсюда $y_0 \leqslant u_0 - c_0$, $y_0 \geqslant \Theta_X$, поскольку $Y \subset C$, по условию. Значит, $y_0 \in [U] = U$, что противоречит доказанному $Y \cap U = \varnothing$. Итак, $(Y + C) \cap U = \varnothing$. Применяя теперь к выпуклым множествам $Y + C$ и U следствие из теоремы Хана — Банаха об отделимости, находим замкнутую гиперплоскость, разделяющую $Y + C$ и U в X, т. е. существует $y' \in X$ такой, что

$$\langle Y + C, y' \rangle \geqslant \alpha, \quad \langle U, y' \rangle \leqslant \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

Но последнее противоречит слабой сходимости фильтра $\Phi(Y)$ к нулю, так как в этом случае ни одно сечение Y_x не попадает в слабую окрестность нуля $V = \{x \in X : \langle x, y' \rangle < \alpha\}$. Предложение 1.9 доказано.

Теорема 1.5. *Пусть B — рефлексивное банахово пространство, частично упорядоченное с помощью нормального конуса C. Если Y — направленное по возрастанию подмножество пространства B, которое мажорируемо или ограничено по норме B, то существует $x_0 = \sup Y$ и фильтр сечений $\Phi(Y)$ сходится к вектору x_0.*

Доказательство. Рассмотрим сечение Y_x при некотором $x \in Y$. Убедимся, что существует $\sup Y_x$ в B. Если Y — мажорируемо, т. е. найдется вектор $z \in B$ такой, что $y \leqslant z$ для любого $y \in Y$, то сечение Y_x содержится в порядковом сегменте $[x, z]$. Применяя предложение 1.7, получаем, так как множество $\{x, z\}$ ограничено по норме B, то и $[x, z]$ ограничено, а поэтому и сечение Y_x ограничено в B. Следовательно, далее достаточно предположить, что Y_x ограничено в B. По предложению 1.8 получаем, что $B' = Y' - Y'$. Значит, базис окрестностей нуля слабой топологии $\sigma(B, B')$ может быть образован только с использованием функционалов из C'. Пусть $f \in C'$, $\Phi(Y_x)$ фильтр сечений множества Y_x. Для любого сечения $(Y_x)_z = \{y \in Y_x: z \leqslant y\} = (z + C) \cap Y_x$, ограниченного в B множества Y_x, имеем

$$-\infty < \alpha = f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) \leqslant \beta < +\infty. \tag{1.5}$$

Рассмотрим два элемента $(Y_x)_{z_1}$ и $(Y_x)_{z_2}$ фильтра $\Phi(Y_x)$. Используя (1.5), для любых $y_1 \in (Y_x)_{z_1}$, $y_2 \in (Y_x)_{z_2}$ получаем

$$|\langle y_1 - y_2, f\rangle| \leqslant |y_1 - z_1, f>| + |< z_1 - z_2,$$

$$f\rangle| + |\langle| y_2 - z_2, f\rangle| \leqslant 2\beta - \langle z_1, f\rangle - \langle z_2, f\rangle + |\langle z_1 - z_2, f\rangle|. \tag{1.6}$$

Поскольку Y_x направлено по возрастанию, то правую часть (1.6) можно сделать сколь угодно малой за счет выбора $z_1, z_2 \in Y_x$. Таким образом, $\Phi(Y_x)$ является слабым фильтром Коши в B, состоящим из ограниченных множеств. По теореме 1.3, так как B рефлексивно, слабое замыкание Y_x слабо компактно. Поэтому фильтр $\Phi(Y_x)$ сходится в топологии $\sigma(B, B')$ к некоторому вектору $x_0 \in B$. По предложению 1.9 $\Phi(Y_x)$ сходится в топологии B. Наконец, по предложению 1.4 существует $x_0 = \sup Y_x$. Убедимся, что x_0 — искомый элемент B. Для любого $z \in Y$ и данного $x \in Y$ существует $w \in Y$ такой, что $z \leqslant w$ и $x \leqslant w$, т. е. $w \in Y_x$. Поэтому $z \leqslant x_0$. Итак, x_0 — верхняя грань множества Y. Если $u \in B$ — другая верхняя грань Y, то, в частности, $u \geqslant y$, для любого $y \in Y_x$. Но x_0 — точная верхняя грань Y_x, откуда $u \geqslant x_0$. Следовательно, $x_0 = \sup Y$, что и требовалось.

Из этого результата следует ряд конкретных утверждений. Приведем одно из них.

Следствие (ср. с. [165]) 1.2. Пусть в R_n порядок определен конусом $C = \{x \in R_n : x_i \geqslant 0, i = \overline{1, n}\}$ и ограниченное подмножество $Y \subseteq R_n$ обладает свойством: для любых $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in$ $\in Y$ вектор z с координатами $z_i = \max(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, принадлежит Y. Тогда существует $x_0 = \sup Y$, причем x_0 есть предельная точка Y.

Теорема 1.6. *В любом* ЧУЛНП (X, C) *каждое слабо компактное подмножество* Y *обладает по крайней мере одним слабым минимумом, т. е.* $\mathrm{WM}(Y) \neq \varnothing$.

Доказательство приведено в [89, гл. I, § 2] для случая локально выпуклого пространства с замкнутым конусом, что, очевидно, включает результат теоремы 1.6.

Отсюда и из теоремы 1.4 получаем

Следствие 1.3. Если B — рефлексивное банахово пространство, упорядоченное замкнутым конусом C неотрицательных элементов, то для любого ограниченного выпуклого замкнутого множества S в B подмножество $\mathrm{WM}(S) \neq \varnothing$.

Учитывая теорему 1.5 (а именно тот факт, что супремум может быть предельной точкой множества), можно расширить понятие слабого и сильного экстремумов следующим образом [167]

Пусть (X, C) — ЧУЛНП $Y \subset X$. Вектор $x_0 \in X$ назовем $\sigma(X, X')$-слабым минимумом множества Y, если принадлежит $\sigma(X, X')$-замыканию Y в X и нет вектора $x \in Y$ такого, что $x \leqslant x_0$, $x \neq x_0$. Обозначим $x_0 = \sigma(X, X') - w - \min Y$, а множество всех таких векторов: $\sigma(X, X') - \mathrm{WM}(Y)$.

Существует полезная характеризация элементов множества $\sigma(X, X') - \mathrm{WM}(Y)$ с помощью сопряженного пространства X'. Пусть множество Y порядково ограничено снизу, т. е. $Y \subset z + C$ для некоторого вектора $z \in X$. Тогда для любого положительного функционала $f \in C' = (-C)^{\circ}$ множество вещественных чисел $A_f = \{\langle y, f\rangle : y \in Y\}$ непусто и ограничено снизу числом $\langle z, f\rangle$. Положим $\alpha_f = \inf A_f > -\infty$.

Предложение 1.10. Если множество Y не пусто, порядково ограничено снизу в ЧУЛНП (X, C) и функционал f принадлежит внутренности $\operatorname{int} C'$ конуса C' неотрицательных элементов в X', то любой вектор y_0 из $\sigma(X, X')$-замыкания $\sigma(X, X') - \operatorname{cl} Y$ множества Y, обладающий свойством

$$\alpha_f = \langle y_0, f\rangle, \tag{1.7}$$

принадлежит $\sigma(X, X') - \mathrm{WM}(Y)$.

Доказательство. Пусть вектор y_0 удовлетворяет (1.7), однако не является $\sigma(X, X')$-слабым минимумом Y. Тогда должен существовать вектор $y \in Y$, $y \neq y_0$, такой, что $y \leqslant y_0$, т. е. $y_0 - y \in C$. Поскольку $f \in C'$, то $\langle y_0 - y, f\rangle \geqslant 0$ или $\alpha_f \leqslant \langle y, f\rangle \leqslant \langle y_0, f\rangle = \alpha_f$. Значит, $\langle y, f\rangle = \langle y_0, f\rangle$, т. е. $y_0 - y \in \operatorname{Ker} f = \{x \in X : \langle x, f\rangle = 0\}$. Но по предположению $y_0 - y \neq \Theta_X$. Поэтому по теореме Хана — Банаха существует функционал $g \in X'$ такой, что $\langle y_0 - y, g\rangle = -1$. Выберем таким малым число $\varepsilon > 0$, чтобы функционал $f_\varepsilon = f + \varepsilon g \in \operatorname{int} C'$. Отсюда $\langle y_0 - y, f_\varepsilon\rangle \geqslant 0$. С другой стороны, $\langle y_0 - y, f_\varepsilon\rangle = \langle y_0 - y, f + \varepsilon g\rangle = -\varepsilon < 0$. Это противоречие доказывает, что $y_0 \in \sigma(X, X') - \mathrm{WM}(Y)$.

Следствие [52] **1.4.** Пусть $Y \subset (R_n, C)$, где $C = \{x \in R_n : X_i \geqslant 0, i = \overline{1, n}\}$, замкнуто и ограничено в R_n. Тогда решение задачи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \to \min_y, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in Y,$$

где $c_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$ является слабым минимумом Y в (R_n, C).

Заметим, что при нарушении условия $f \in \operatorname{int} C'$ предложение 1.10 перестает быть верным даже в случае (R_n, C) при $n = 2$. Пусть $Y = C$. Начало координат $y_0 = (0, 0)$ — единственный слабый минимум Y в (R_2, C). Если $f = (0, 1)^T$, то $f \bar{\in} \operatorname{int} C' = \{(z_1, z_2)^T : z_1 > 0, z_2 > 0\}$, но $f \in C'$. Получаем $\langle y, f\rangle = (y, f)_{R_2} = y_2 \geqslant 0$ для всех $y \in Y$ и $\alpha_f = 0$. Однако все векторы вида $y = (y_1, 0)^T$, $y_1 \geqslant 0$, принадлежат Y, удовлетворяют условию $\langle y, f\rangle = \alpha_f = 0$, хотя при $y_1 > 0$ не являются слабыми минимумами Y.

Пусть $Y \subset X$, (X, C) — некоторое ЧУЛНП, служащее множеством значений критерия качества некоторой оптимизационной задачи.

Совокупность слабых минимумов WM (Y) обладает в ряде случаев неустойчивыми точками (по отношению к векторному критерию качества). Это видно уже в конечномерной ситуации [114]. Пусть $X = R_2$, $C = R_2^+$, критерий качества $F = \{f_1, f_2\}$ принимает значения в множестве $Y = \{y = (y_1, y_2)^T \in R_2 \colon y_1 \geqslant (y_2)^2\}$. Тогда множество слабых минимумов $\mathrm{WM}(Y) = \{y \in Y \colon y_1 = y_2^2, y_2 \leqslant 0\}$. Если $y \in \mathrm{WM}(Y)$, $y \neq y_0 = (0, 0)^T \in \mathrm{WM}(Y)$, то $\Delta y_2 = y_2 - y_{0,2} = y_2 < 0$, $\Delta y_1 = y_1 - y_{0,1} = (\Delta y_2)^2 > 0$. Это означает, что переход из y_0 в достаточно близкую к ней точку $y \in \mathrm{WM}(Y)$ приводит к выигрышу первого порядка малости по второму критерию f_2 за счет проигрыша второго порядка малости по первому критерию f_1.

Поэтому при равноценности критериев f_1 и f_2 представляется более благоприятным выбрать точку y вместо y_0. В этом смысле точка y_0 является неустойчивой по критерию F. С целью исключения из рассмотрения таких аномальных точек вводят понятие собственно эффективной точки $y_1 \in Y \subset R_n$ — это такой элемент WM (Y), что существует положительное число $\varepsilon = \varepsilon(y_1)$ со свойством: для любых $y \in \mathrm{WM}(Y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $y_i < y_{1,i}$ и некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ такого, что $y_j > y_{1,j}$ выполняется неравенство

$$(y_{1,i} - y_i)/(y_j - y_{1,j}) \leqslant \varepsilon. \tag{1.8}$$

Имеет место в конечномерном случае следующий результат [114].

Теорема 1.7. *Точка $y \in Y \subset (R_n, R_n^+)$ собственно эффективна тогда и только тогда, когда существует конечный набор векторов $Z = \{y^j \in R_n^+ \colon j = 1, \ldots, m \leqslant n\}$ со свойством: для любого $u \in Y$ найдется еектор $y^j \in Z$ такой, что выполняется неравенство*

$$(y^j, y)_{R_n} \leqslant (y^j, u)_{R_n}. \tag{1.9}$$

В [114] приводится ряд других характеристик множества WM (Y) в конечномерном случае.

Для произвольного ЧУЛНП (X, C) определение слабого минимума можно переформулировать, используя сопряженное пространство (X', C'), следующим образом: вектор $x_0 \in Y \subset X$ является слабым минимумом в том и только в том случае, когда существует вектор-функция $\varphi \colon Y \to C'$ такая, что неравенство

$$\langle x_0, \varphi(y) \rangle \leqslant \langle y, \varphi(y) \rangle \tag{1.10}$$

справедливо для любого $y \in Y$. Как будет показано в дальнейшем, предложение 1.10 и (1.10) являются основой для некоторых численных методов нахождения слабых экстремумов.

Выше мы убедились на ряде результатов в полезности понятия нормальности конуса неотрицательных элементов. Введем еще несколько типов конусов в упорядоченных ЛНП.

Пусть B — банахово пространство, K — выпуклый замкнутый конус с вершиной в Θ_B, K° — его поляра. Говорят, что K обладает σ-свойством, если существует по крайней мере один функционал $f \in K^\circ$ такой, что для любого числа $\delta > 0$ множество

$$K(f, \delta) = \{x \in K \colon \langle x, f \rangle \geqslant -\delta\} \tag{1.11}$$

не пусто и относительно $\sigma(B, B')$-компактно в B (см. [167]).

Считаем, что замкнутый выпуклый конус K с вершиной в Θ_B обладает угловым свойством, если для некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$, $f \in -K^\circ$, $f \neq \Theta_{B'}$,

$$K \subset \{y \in B : \langle y, f\rangle \geqslant \varepsilon \| f \|_{B'} \| y \|_B\}. \tag{1.12}$$

Отметим, конус K с угловым свойством является нормальным. Действительно, для любых $x, y \in K$ имеем на основании (1.12):

$$\varepsilon \| x \|_B \leqslant \langle x, f\rangle \frac{1}{\| f \|_{B'}} \leqslant \frac{1}{\| f \|_{B'}} \langle x + y, f\rangle \leqslant \| x + y \|_B,$$

т. е. $\| x \|_B \leqslant \gamma \| x + y \|_B$, где $\gamma \geqslant 1$. Однако не всякий нормальный конус обладает угловым свойством.

Конус K с вершиной в нуле называют острым, если существует открытое полупространство $N_l = \{x \in B : \langle x, l\rangle > 0\}$, где $\Theta_{B'} \neq l \in B'$, содержащее замыкание $\mathrm{cl}\, K$ конуса K (без нуля), т. е.

$$\mathrm{cl}\, K \subset N_l \cup \{\Theta_B\}.$$

Предложение 1.11. Если замкнутый выпуклый конус K с вершиной в Θ_B некоторого банахова пространства B обладает угловым или σ-свойством, то он — острый и, следовательно, $K \cap (-K) = \Theta_B$.

Доказательство. Пусть K обладает σ-свойством, но он не острый. Это означает, что для любого функционала $f \in B'$ существует $x_f \in K \setminus \Theta_B$ такой, что $\langle x_f, f\rangle \leqslant 0$. Но в этом случае каково бы ни было число $\delta > 0$, множество $K(f, \delta)$ не является относительно $\sigma(B, B')$-компактным в B для любого $f \in K^\circ$, поскольку содержит неограниченное подмножество $\{\lambda x_{-f}, \lambda \geqslant 0\}$, где $\langle x_{-f}, -f\rangle \leqslant 0$. Последнее противоречит σ- свойству. Для углового свойства предложение 1.11 очевидно.

Предложение 1.12. Пусть (X, C) — сепарабельное ЧУЛНП с нормальным конусом. Тогда C — острый конус.

Доказательство. Можно показать, что (X, C) изоморфно (как упорядоченное ЛНП) некоторому подпространству банахова пространства $C[0, 1]$ (в естественном порядке, см. пример 2) [159, гл. 5, § 4). Но конус неотрицательных функций в $C[0, 1]$ является острым, так как $\int\limits_0^1 f(x)\, dx > 0$ для любой $f \in C[0, 1]$, $f > \Theta_{C[0,1]}$. Поэтому прообраз l функционала $\int\limits_0^1 (\cdot)\, dx$ в X' таков, что

$$C \subset \{x \in X : \langle x, l\rangle > 0\} \cup \{\Theta_X\}.$$

Угловое свойство влечет телесность дуального конуса в B. Конус C называют телесным, если он имеет непустую внутренность $\mathrm{int}\, C$. Более точно, справедливо следующее предложение.

Предложение 1.13. Если замкнутый выпуклый конус K удовлетворяет (1.12), то функционал $-f \in \mathrm{int}\, K^\circ$ в B'.

Доказательство. Пусть $g \in B'$, причем $\| f + g \|_{B'} \leqslant \varepsilon \| f \|_{B'}$. Тогда

$$|\langle y, f + g\rangle| \leqslant \| f + g \|_{B'} \| y \|_B \leqslant \varepsilon \| f \|_{B'} \| y \|_B.$$

Поэтому $\langle y, g\rangle \leqslant -\langle y, f\rangle + \varepsilon \| f \|_{B'} \| y \|_B \leqslant 0$ для всех $y \in K$. Следовательно,

$$\{g \in B' : \| g - (-f) \|_{B'} \leqslant \varepsilon \| f \|_{B'}\} \subset K^\circ,$$

т. е. $-f \in \operatorname{int} K^\circ$, что и требовалось.

Предложение 1.14. Пусть B — рефлексивное банахово пространство, K — замкнутый выпуклый конус с вершиной в Θ_B с угловым свойством. Тогда K обладает свойством σ.

Доказательство. Для любого $\sigma > 0$ получаем, что если $x \in K(-f, \delta)$, то $\| x \|_B \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon \| f \|_{B'}}$ в силу (1.12), т. е. $K(-f, \delta)$ ограничено в B. Поэтому $K(-f, \delta)$ относительно $\sigma(B, B')$-компактно в B на основании теоремы 1.3.

Предложение 1.15. Пусть B — конечномерное банахово пространство, K — любой замкнутый выпуклый конус с вершиной в нуле, причем острый. Тогда K обладает угловыми σ-свойствами.

Доказательство. Пусть $\gamma = \inf \langle z, l\rangle : z \in K \| z \| = 1\}$. Ясно, что $\gamma \geqslant 0$. Если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, $\| z_n \| = 1$, $\lim\limits_n \langle z_n, l\rangle = \gamma$, то существует в силу конечномерности подпоследовательность $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, (слабо) сходящаяся к вектору $z_0 \in B$. Но $z_0 \in K$, поскольку K замкнут в B. Значит, $\langle z_0, l\rangle > 0$, так как $z_0 \neq \Theta_B$. Однако $\langle z_0, l\rangle = \lim \langle z_{n_j}, l\rangle = \gamma$, т. е. $\gamma > 0$. Рассмотрим любой вектор $y \in K$, $y \neq \Theta_B$. Тогда $u = \frac{y}{\| y \|} \in K$, откуда $\langle u, l\rangle \geqslant \langle z_0, l\rangle = \gamma$, в силу определения числа γ. Из последнего неравенства находим

$$\langle y, l\rangle \geqslant \langle z_0, l\rangle \| y \|_B = \varepsilon \| l \|_{B'} \| y \|_B, \tag{1.13}$$

где $\varepsilon = \frac{\langle z_0, l\rangle}{\| l \|_{B'}} > 0$ и $\varepsilon = \frac{\langle z_0, l\rangle}{\| l \|_{B'}} \leqslant \frac{\| z_0 \|_B \| l \|_{B'}}{\| l \|_{B'}} = \| z_0 \|_B = 1.$

Таким образом, выбирая $\varepsilon \in (0, 1]$ и $l \in B'$ указанным способом, получим из (1.13), что

$$K \subset \{z \in B : \langle z, l\rangle \geqslant \varepsilon \| l \|_{B'} \| z \|_B\},$$

т. е. K обладает угловым свойством. Поэтому из предложения 1.14 следует, что K обладает также σ- свойством.

Пример 1.11. Рассмотрим гильбертово пространство

$$l_2 = \left\{ y = (\xi_1, \xi_2, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = \| y \|_{l_2}^2 < +\infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(x, y)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i, \quad x = (\eta_1, \eta_2, \ldots), \quad y = (\xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Рассмотрим вектор $z_\gamma = (\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots) \in l_2$, где $0 < \gamma < 1$, $\| z_\gamma \|_{l_2}^2 = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2}$. Тогда при $\varepsilon \in (0, (1 - \alpha^2)^{1/2}$ множество

$$J(\varepsilon, z_\gamma) = \{y \in l_2 : (y, z_\gamma)_{l_2} \geqslant \varepsilon \| y \|_{l_2} \| z_\gamma \|_{l_2}\}$$

содержит выпуклый конус с вершиной в Θ_{l_2}, порожденный векторами $z_\beta = (\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots)$, $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$, где α_1, α_2 — корни квадратного уравнения

$$(\gamma^2\varepsilon^2 + 1 - \gamma^2)\beta^2 - 2\gamma\varepsilon^2\beta + (\varepsilon^2 + \alpha^2 - 1) = 0.$$

Причем этот конус не вкладывается ни в какое конечномерное подпространство пространства l_2.

Более простые конусы могут не обладать ни σ-свойством, ни угловым свойством. В том же пространстве l_2 рассмотрим выпуклый замкнутый конус с вершиной в Θ_{l_2}

$$C = \{y \in l_2 : \xi_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Для любых $z = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in C^\circ$ и натурального $n > 0$ найдется η_j, $j = j(n)$, что $\eta_j > -\frac{1}{n}$. Поэтому вектор $x_n = (n\delta_{in})_{i=1}^{\infty}\delta_{jn}$ — символ Кронекера, таков, что $x_n \in \{y \in C : (y, z)_{l_2} \geqslant -1\}$; значит, это множество не слабо относительно компактно. Конус C не обладает и угловым свойством. В самом деле, пусть $x_0 \in -C^\circ$, $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и число $\varepsilon > 0$ таково, что $C \subset \{z \in l_2 : (z, x_0)_{l_2} \geqslant \varepsilon \| z \| \| x_0 \|\}$. Тогда

$$(l_i, x_0)_{l_2} \geqslant \varepsilon \| x_0 \|_{l_2} \| l_i \|_{l_2}, \quad l_i = (\delta_{ji})_{j=1}^{\infty}, \quad \text{т. е.} \quad \xi_i \geqslant \varepsilon \| x_0 \|_{l_2}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Но последнее неравенство противоречит сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < +\infty$. Тем не менее конус C является острым, поскольку $C \subset \{y \in l_2 : (y, y_0)_{l_2} > 0\} \cup \{\Theta_{l_2}\}$, где $y_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, а также нормальным.

Приведенные выше типы конусов неотрицательных элементов позволяют устанавливать существование слабых экстремумов при меньших ограничениях на подмножества в ЧУЛНП.

Теорема 1.8 [167]. *Пусть B — банахово пространство, частично упорядоченное с помощью замкнутого выпуклого конуса C (с вершиной в Θ_B)* (ЧУБП (B, C)), *причем C обладает σ-свойством, Y — порядково ограниченное снизу подмножество B, $Y \neq \varnothing$. Тогда*

$$\sigma(B, B') = \mathrm{WM}(Y) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Конус C острый в силу предложения 1.11. Поэтому существует функционал $f \in B'$ такой, что $\langle y, f \rangle > 0$ при $y \in C \setminus \{\Theta_B\}$. Пусть функционал $g \in C' = (-C)^\circ$ определяет σ-свойство, т. е. для любого $\delta > 0$

$$C(g, \delta) = \{x \in C : \langle x, g \rangle \leqslant \delta\} \neq \varnothing$$

и относительно $\sigma(B, B')$-компактно в B. Положим $h = g + f$. Если $z_0 \in B$ таково, что $z_0 + C \supset Y$, то

$$\langle y; h \rangle \geqslant \langle z_0, h \rangle$$

для всех $y \in Y$, поскольку $h \in C'$. Обозначим

$$\alpha_h = \inf\{\langle y, h \rangle,\ y \in Y\} > -\infty.$$

Выберем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ так, чтобы

$$\alpha_h + \frac{1}{n} \geqslant \langle y_n; h \rangle \geqslant \alpha_h.$$

Отсюда

$$0 \leqslant \langle y_n - z_0;\ h \rangle \leqslant \alpha_h + \frac{1}{n} - \langle z_0;\ h \rangle \langle \alpha_h + 2 - \langle z_0,\ h \rangle \equiv \delta_0.$$

Поэтому

$$\langle y_n - z_0;\ g \rangle \leqslant \langle y_n - z_0;\ h \rangle \leqslant \delta_0,$$

т. е. последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо относительно компактна в B. Пусть $y_0 \in B$ — ее слабая предельная точка. Значит, $y_0 \in \sigma(B, B')$ — — cl Y и $\lim\limits_n \langle y_n;\ h \rangle = \langle y_0; h \rangle \equiv \alpha_h$. Более того, если $z \in Y$ таков, что $z \leqslant y_0$, то $\langle z;\ h \rangle \leqslant \langle y_0;\ h \rangle = \alpha_h$, откуда $\langle z;\ h \rangle = \langle y_0;\ h \rangle$. Однако тогда $\langle y_0 - z;\ g \rangle = -\langle y_0 - z;\ f \rangle$. Это равенство возможно лишь в случае, когда $y_0 = z$ (на ненулевых элементах C функционал $-f$ принимает отрицательные значения, что противоречило бы положительности g при $y_0 \neq z$). Итак, $y_0 \in \sigma(B, B')$ — $WM(Y)$, что и требовалось.

Следствие 1.5. Пусть (B, C) — рефлексивное ЧУБП, причем внутренность дуального конуса int $C' \neq \varnothing$. Если $Y \neq \varnothing$ — порядково ограниченное снизу подмножество B такое, что для любого $y \in Y$, $y \neq \Theta_Y$, справедливо $y / \| y \|_B \in Y$, то $\sigma(B, B')$ — WM $(Y) \neq \varnothing$.

Доказательство. Возьмем любой функционал $f \in$ int C', $\alpha_f = \inf \{ \langle y, f \rangle : y \in Y \} > -\infty$. Как и выше, найдем $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ так, чтобы

$$\alpha_f + \frac{1}{n} \geqslant \langle y_n;\ f \rangle \geqslant \alpha_f.$$

После этого построим новую последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ по правилу: $z_n = y_n$, если $\| y_n \| \leqslant 1$, и $z_n = y_n / \| y_n \|$, если $\| y_n \| > 1$. Тогда $\langle z_n;\ f \rangle \xrightarrow[n]{} \alpha_f$, при этом $\| z_n \| \leqslant 1$. Согласно $\sigma(B, B')$-компактности единичного шара в B существует последовательность $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к $z_0 \in B$. При этом $\langle z_{n_j};\ f \rangle \xrightarrow[j]{} \langle z_0; f \rangle = \alpha_f$. Далее применяем предложение 1.10.

2°. **Топологические свойства множеств экстремальных точек.** В предыдущем пункте было дано определение слабых и сильных экстремальных точек у множества Y в ЧУЛНП (X, C) и приведены достаточные условия существования точной верхней грани у Y. В этом пункте рассмотрим множество слабых экстремумов (для определенности минимумов) WM (Y)некоторого множества $Y \subseteq (X, C)$.

Предложение 1.16. Если множество WM (Y) не пусто, то оно принадлежит границе Fr Y множества Y в ЛНП X.

Доказательство. Пусть некоторый слабый минимум $x_0 \in$ int $Y \neq \varnothing$ — внутренность множества Y в ЛНП X, т. е. существует открытый шар $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \| x - x_0 \| < \varepsilon\}$, при некотором числе $\varepsilon > 0$, целиком лежащий в Y. Но тогда множество $(x_0 - C) \cap S(x_0, \varepsilon)$ не пусто и содержит по крайней мере один элемент $y \neq x_0$. Действительно, если $z \in C$, $z \neq \Theta_X$, то найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda \| z \| < \varepsilon$. Тогда вектор $y = x_0 - \lambda z \in (x_0 - C) \cap S(x_0, \varepsilon)$ и $y \neq x_0$. Но это противоречит слабой минимальности вектора x_0, так как $y < x_0$, $y \in Y$. Предложение 1.16 доказано.

Пусть K подмножество ЛНП X. Непустое подмножество $S \subset K$ называется крайним множеством множества K, если из такого условия: при некотором числе $\alpha \in (0, 1)$ и векторах x, $y \in K$ справедливо $\alpha x + (1 - \alpha) y \in S$ — следует, что $x \in S$, $y \in S$. Множество $K \subset X$ выпукло, если для любых u, $w \in K$ и $\beta \in (0, 1)$ вектор $\beta u + (1 - \beta) w$ принадлежит K.

Предложение 1.17. Если Y — выпукло и WM (Y) не пусто, то WM (Y) является крайним подмножеством множества Y.

Доказательство. Пусть некоторый вектор w из WM (Y) имеет вид $w = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $x, y \in Y$, $\alpha \in (0, 1)$. Если бы вектор $u \leqslant x$, $u \neq x$, $u \in Y$, то $z = \alpha u + (1 - \alpha) y \leqslant \alpha x + (1 - \alpha) y$, и $z \in Y$, $z \neq w$, что противоречит слабой минимальности w в Y.

Предложение 1.18. Пусть на множестве Y из ЧУЛНП (X, C) задана функция $f(x)$, не убывающая по порядку, т. е. если $x_1 \leqslant x_2$, то $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Тогда точка y_0 из Y минимума f на Y является слабым минимумом в Y, если $f(x)$ — строго возрастает на Y ($f(u) > f(w)$ при $u \geqslant w$, $u \neq w$) или y_0 — единственная точка, в которой $f(x)$ достигает минимума на Y.

Доказательство следует из определения множества WM (Y).

Если $Y \subset C$ и конус C удовлетворяет свойствам, указанным в п. 1° (нормальность C и сепарабельность и полнота X, или угловое свойство для C), то существует функционал $f \in X'$, строго возрастающий на Y. Минимизируя его на Y, можно находить некоторые (не все!) слабые минимумы Y.

Как было показано на простом примере в [89, гл. I, § 2], множество WM (Y) даже при хорошем множестве Y (выпуклом и замкнутом) может быть не замкнутым и не выпуклым. Однако WM (Y) обладает некоторыми геометрическими свойствами в достаточно общей ситуации.

При доказательстве следующей теоремы используется вспомогательное

Предложение 1.19. Пусть (X, C) — ЧУЛНП, e — внутренняя точка C, Y — выпуклый компакт из C. Пусть $S_y = \{z \in Y : z \leqslant y\}$ — сечение Y такое, что $e \in S_y$, причем $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, $\| y_n - y \|_X \to 0$, $n \to \infty$. В этом случае расстояние по Хаусдорфу

$$d(S_{y_n}, S_y) = \max(\beta(S_{y_n}, S_y); \beta(S_y, S_{y_n})) \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

где

$$\beta(A, B) = \sup_{u \in A} \inf_{v \in B} \| u - v \|_X.$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\lim_{n \to \infty} \beta(S_y, S_{y_n}) = 0. \qquad (1.14)$$

Пусть $h \in S_y$. Тогда $h(\alpha) = \alpha e + (1 - \alpha) h \in S_y$, так как S_y — выпуклый компакт. При этом вектор $-\varepsilon h(\alpha) + y \in \operatorname{int} C$, при некотором $0 < \varepsilon < 1$. В самом деле, пусть шар $S(e; v) = \{x \in X : \| e - x \| \leqslant$

$\leqslant v\} \subset C$. Тогда любой вектор $z \in S(\alpha e + (1-\alpha)h;\ v_1\}$ таков, что $\|z - \alpha e - (1-\alpha)h\| \leqslant v_1 \leqslant v$, т. е. $z - (1-\alpha)h \in S(\alpha e : v_1) \subset C$, если $v_1 \leqslant \alpha v$. Таким образом, $h(\alpha) \in \operatorname{int} C$. Однако $y \geqslant h(\alpha)$, откуда $y - h(\alpha) + \xi h(\alpha) \in \operatorname{int} C$, для любого $0 < \xi < 1$, или $y - \varepsilon h(\alpha) \in \operatorname{int} C$, $0 < \varepsilon < 1$. Поскольку $y_n \to y$, $n \to \infty$, то $y_n - \varepsilon h(\alpha) \underset{n\to\infty}{\to} y - \varepsilon h(\alpha)$. Значит, найдется номер $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$ таков, что $y_n \geqslant \varepsilon h(\alpha)$ при любом $n \geqslant n_0$. Поэтому существуют такие векторы h_n в S_{y_n}, что $\|h_n - h\|_X \to 0$, $n \to \infty$, так как $\varepsilon h(\alpha) \to h$ при $\varepsilon \to 1$, $\alpha \to 0$. Этим 1.14) доказано. Для доказательства соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \beta(S_{y_n}, S_y) = 0 \tag{1.15}$$

предположим от противного, что это не так. Тогда найдется последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in S_{y_n}$, такая, что

$$\inf\{\|u_n - v\|_H : v \in S_y\} \geqslant \xi > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.16}$$

Согласно компактности Y существует последовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $u_{n_k} \underset{k}{\to} u_0 \in Y$. Но $u_{n_k} \leqslant y_{n_k}$ и $y_{n_k} \to y$, $k \to \infty$, поэтому $u_0 \in S_y$. А это противоречит (1.16), т. е. (1.15) верно.

Напомним некоторые топологические понятия, подробное обсуждение которых можно найти, например, в [2, 70].

Топологическое пространство Z называется стягиваемым в себе, если существует точка $z_0 \in Z$ и непрерывное отображение $f: Z \times [0, 1] \to Z$ такие, что

$$f(z, 0) = z, \ f(z, 1) = z_0 \tag{1.17}$$

для любого $z \in Z$.

Топологическое пространство Z называется дугообразно связным, если для любых двух точек $z_1, z_2 \in Z$ существует гомеоморфное отображение $\varphi : [0, 1] \to Z$ такое, что $\varphi(0) = z_1$, $\varphi(1) = z_2$. Отображение φ называют дугой в Z. Из этих определений следует предложение 1.20.

Предложение 1.20. Всякое топологическое пространство Z, стягиваемое в себе, дугообразно связано.

Теорема 1.9. *Пусть в сепарабельном ЧУБП* (B, C) *с нормальным конусом* C *задано выпуклое компактное подмножество* $Y \subseteq C$, *обладающее свойством (D): существует вектор* $w_0 \in Y$ *такой, что* Y *содержится в порядковом сегменте* $[\alpha w_0, \beta w_0]$, $\alpha, \beta > 0$, *причем есть хотя бы один вектор* $y_0 \in Y$ *такой, что* $y_0 \geqslant w_0$, $y_0 \neq w_0$.

Тогда непустое подмножество слабых минимумов $WM(Y)$ *стягиваемо в себе (в индуцированной топологии банахова пространства* B).

Доказательство. Пусть H — замыкание в B линейной оболочки $\operatorname{Lin} Y$ множества Y, $C_1 = H \cap C$ — нормальный в H конус, определяющий частичный порядок. По предложению 1.12 C_1 — острый конус, т. е. существует функционал $f \in C_1' \subset H'$ такой, что

$$C_1 \subset \{h \in H : \langle h, f\rangle > 0\} \cup \{\Theta_H\}.$$

Для любого $y \in Y$ множество $S_y = \{z \in Y : z \leqslant y\}$ выпукло и компактно. Поэтому множество

$$F(y) = \{z \in S_y : \langle z, f\rangle = \min\{\langle u, f\rangle : u \in S_y\}\} \neq \varnothing,$$

выпукло и компактно в H, причем все его элементы — слабые минимумы S_y, по теореме 1.6, а, следовательно, $F(y) \subset WM(Y)$. Банахово пространство H является, по построению, порожденным компактным множеством Y. Поэтому существует норма $\|\cdot\|_H$ на H, эквивалентная исходной $\|\cdot\|$ (т. е. $c_1\|h\| \leqslant \|h\|_H \leqslant c_2\|h\|$ для любого $h \in H$ и некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$), являющаяся строго выпуклой на H:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)\, y\|_H < \alpha\|x\|_H + (1-\alpha)\|y\|_H, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \tag{1.18}$$

где $x, y \in H$ и линейно независимы (см. [39]). В силу (1.18) задача минимизации: $\min\{\|z\|_H : z \in F(y)\}$ имеет единственное решение $g(y) \in F(y)$. Определим теперь на $WM(y) \times [0, 1]$ функцию

$$h(z, t) = g((1-t)z - ty_0),$$

где y_0 — указанный в условии (D) вектор из Y. Очевидно, что $h(z, 0) = z = g(z)$, $h(z, 1) = g(y_0) \in WM(Y)$ для любого $z \in WM(Y)$. Убедимся в непрерывности функции h. Пусть $t_0 = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$, $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, где $t_0, t_n \in [0, 1]$, $z_0, z_n \in WM(Y)$. Если $t_0 = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}[(1-t_n)z_n + t_n y_0] = z_0.$$

Учитывая, что $g(y) \in S_y$, получаем

$$h(z_n, t_n) \leqslant (1-t_n)z_n + t_n y_0. \tag{1.19}$$

В силу компактности Y пусть $\{h(z_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в B. Тогда из (1.19) следует, что $z_0 \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} h(t_n, z_n) \in Y$. Но z_0 — слабый минимум Y, поэтому отсюда $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} h(z_n, t_n)$. Возьмем теперь произвольную точку $y = (1-t_0)z_0 + t_0 y_0$ из Y, $t_0 > 0$. Предположим от противного, что

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n, \quad d = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \neq g(y). \tag{1.20}$$

По строению H в C_1 вектор w_0 является порядковой единицей, а поэтому в силу нормальности C_1 в банаховом пространстве Hw_0 — внутренняя точка C_1, т. е. $\operatorname{int} C_1 \neq \varnothing$. Поскольку $w_0 \leqslant y_0$, то

$$y = (1-t_0)z_0 + t_0 y_0 \geqslant (1-t_0)z_0 + t_0 w_0 \equiv w_1 \in Y$$

на основании выпуклости Y. Значит, $w_1 \in S_y$ и $w_1 \in \operatorname{int} C_1$ в виду того, что $z_0 \in C_1$. Применяя предложение 1.19, находим

$$\lim_{n\to\infty} d(S_g, S_{y_n}) = 0.$$

Тогда существует последовательность $\{z_n \in S_{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = g(y)$. При этом $g(z_n) \leqslant z_n < y_n$ и в силу компактности Y можно считать, что $\{g(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к вектору $v \in Y$. Однако $v = \lim\limits_{n=\infty} g(z_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} z_n = g(y) \in WM(Y)$, т. е. $v = g(y)$. Итак, существует последовательность $\{u_n = g(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ из $WM(Y)$, $u_n \in S_{y_n}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - g(y) \|_H = 0.$$

Есть две возможности: 1) $\alpha \in WM(Y) \cap S_y$. Тогда $\| g(y) \|_H < \| d \|_H$. Отсюда и из (1.19) получаем, что $\| u_n \|_H < \| g(y_n) \|_H$ при достаточно больших n, а последнее неравенство противоречит определению $g(y_n)$;

2) $d \in S_y \setminus \mathrm{WM}(Y)$. Тогда

$$\langle u_n, f\rangle = \langle g(y_n), f\rangle, \tag{1.21}$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, f\rangle = \langle g(y), f\rangle < \langle d, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g(y_n), f\rangle. \tag{1.22}$$

Ясно, что (1.22) противоречит (1.21). Таким образом, формула (1.20) не верна, и $h(z, t)$ — непрерывное на $WM(Y) \times [0, 1]$ отображение. Теорема 1.9 доказана.

В случае $X = R_n$ из этого результата получаем следующее.

Следствие [114] 1.6. Пусть Y — замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество евклидова пространства R_n, упорядоченного конусом $\{x \in R_n : x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n}\}$. Тогда $WM(Y)$ стягиваемо в себе.

3⁰. Положительные линейные отображения. Пусть (E, C), (F, K) — ЧУЛНП. Линейное отображение $A \in \mathcal{L}(E, F)$ называется положительным (неотрицательным), если $A(C) \subseteq K$. Множество всех линейных положительных операторов из $\mathcal{L}(E; F)$обозначим $\mathcal{L}^+(E, F)$. Это — конус в ЛНП $\mathcal{L}(E; F)$.

Пример 1.12. Пусть $E = R_n$, $F = R_n$, $C = K = R_n^+$ — векторы с неотрицательными координатами. Тогда $\mathcal{L}(R_n; R_n)$, как известно, отождествимо со множеством всех квадратных x n-матриц, а $\mathcal{L}^+(R_n; R_n)$ состоит из всех неотрицательно определенных матриц из $\mathcal{L}(R_n; R_n)$, т. е. $(Ax, x)_{R_n} \geqslant 0$ для всех $x \in R_n$.

Предложение 1.21. Конус $\mathcal{L}^+(E, F)$ замкнут в ЛНП $\mathcal{L}(E; F)$ и определяет частичный порядок в $\mathcal{L}(E, F)$.

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^+(E; F)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \|_{\mathcal{L}(E;F)} = 0, \quad A \in \mathcal{L}(E; F). \tag{1.23}$$

Из (1.23) следует, что $A_n x \to Ax$ для любого $x \in C$, и поэтому $Ax \in K$ в силу замкнутости конуса K в F.

Далее понадобятся следующие варианты теорем Хана — Банаха и Мазура — Орлича для векторных решеток [195].

Теорема 1.10. *Пусть (G, K) — полная векторная решетка (линейное пространство, наделенное порядковой структурой полной решетки, порождаемой конусом K), H — линейное пространство, $p : H \to G$ — полулинейный оператор, действующий из H в G, т. е. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, для любых $x, y \in H$, $\lambda \in R_1$. Если A — линейное отображение линейного подпространства L из H в G, причем $Ax \leqslant p(x)$ для каждого $x \in L$, то A допускает расширение до линейного оператора $A_1 : H \to G$, удовлетворяющего неравенству $A_1 x \leqslant p(x)$, для каждого $x \in H$.*

Теорема 1.11. *Пусть p — полулинейный оператор, действующий из линейного пространства H в полную векторную решетку G и заданы два множества $\{x_i : i \in I\} \subset H$ и $\{y_i : i \in I\} \subset G$, I — множество индексов. Тогда существует линейное отображение $B : H \to G$ такое, что:*

$$1)\ y_i \leqslant Bx_i,\quad \forall i \in I;\quad 2)\ Bx \leqslant p(x),\quad \forall x \in H \tag{1.24}$$

в том и только в том случае, когда выполняется условие: для любых конечных наборов индексов $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ и неотрицательных чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} \leqslant p\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right). \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть выполняется (1.25). Тогда из (1.25) получаем для любого $x \in H$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} \leqslant p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) + p(-x),$$

или

$$-p(-x) \leqslant p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k}. \tag{1.26}$$

Введем оператор $h : H \to G$ такой, что

$$h(x) \equiv \inf\left\{p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k}\right\}, \tag{1.27}$$

где точная нижняя грань ищется по всевозможным конечным наборам индексов $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ и неотрицательных чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Определение (1.27) корректно, поскольку множество в скобках в (1.27) ограничено снизу в силу (1.26), и поэтому существует инфимум, так как G — полная векторная решетка. Если даны наборы индексов $\{i_k\}_{k=1}^{n}$, $\{i_j\}_{j=1}^{m} \subset I$, неотрицательных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, $\{\mu_j\}_{j=1}^{m}$ и векторы x, $x_1 \in H$, то $p\left(x_1 + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_{i_j}\right) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_{i_j} + p\left(x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} \geqslant p\left(x + x_1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_{i_j}\right) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_{i_j} \geqslant h(x + x_1)$. Значит, $h(x + x_1) \leqslant h(x) + h(x_1)$, $\forall x,\ x_1 \in H$. Аналогично, $h(\gamma x) = \gamma h(x)$, $\forall \gamma \geqslant 0$, $\forall x \in H$. Введем линейный оператор B на подпространстве $L = \mathrm{Lin}\ \{x_{i_0}\}$, i_0 — фиксированный индекс, $Bx_{i_0} = -p(-x_{i_0}) \in G$. Тогда $Bx \leqslant h(x)$ для каждого $x \in L$ в силу (1.26). Поэтому по теореме 1.10 B можно расширить по линейности на все H, причем так, чтобы $Bx \leqslant h(x)$ для всех $x \in H$. Но согласно (1.27) $h(x) \leqslant p(x)$. Отсюда следует свойство 2. Далее, $h(-x_i) \leqslant p(-x_i + x_i) - y_i = -y_i$. Поэтому $Bx_i \leqslant h(-x_i) \leqslant -y_i$, что эквивалентно 1. Обратное утверждение: (1.24) $\Rightarrow$ (1.25) — очевидно, что и требовалось.

Предложение 1.22. Пусть (E, C) — ЧУЛНП, (F, K) — банахово пространство, наделенное структурой полной решетки (полная банахова решетка), K — нормальный конус; заданы множества $\{x_i\}_{i\in I} \subset E$, $\{y_i\}_{i\in I} \subset F$, I — множество индексов. Для того чтобы существовал оператор $A \in \mathscr{L}(E; F)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$Ax_i \geqslant y_i, \quad i \in I, \tag{1.28}$$

достаточно (а если внутренность $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, то и необходимо), чтобы существовала окрестность U нуля в E такая, что множество

$$W = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} : \lambda_k \geqslant 0,\ i_k \in I,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \in U\right\} \tag{1.29}$$

было ограничено сверху в F.

Доказательство. Пусть существует указанная в условии окрестность нуля U и d — верхняя грань множества W. Не ограничивая общности, считаем, что U — выпукло и уравновешено, т. е. для любых неотрицательных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, $\{i_k\}_{k=1}^{n} \in I$ существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \in \lambda U.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} \leqslant \lambda d. \tag{1.30}$$

Пусть $r(x)$ — функционал Минковского множества U,

$$r(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in U\}. \tag{1.31}$$

Из (1.30), (1.31) находим

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k} \leqslant r\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) d. \tag{1.32}$$

Определим полулинейный оператор $p(x) = r(x)\, d : E \to F$. Из теоремы 1.11 следует: существует линейный оператор $A : E \to F$ такой, что $Ax_i \geqslant y_i$, $i \in I$, и $Ax \leqslant p(x)$, согласно (1.32) для всех $x \in E$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|\delta d\|_F \leqslant \varepsilon$. Но для любого $x \in U$ в силу уравновешенности U и (1.31) $-\delta d \leqslant -\delta r(x) d \leqslant A(\delta x) \leqslant \delta r(x)\, d \leqslant \delta d$. Поэтому, учитывая нормальность конуса K в F, получаем $A(\delta U) \subset [-\delta d, \delta d] \subset [S_\varepsilon]$, где $S_\varepsilon = \{y \in F : \|y\|_F \leqslant \varepsilon\}$. Значит, A — непрерывный оператор. Если $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ и A — оператор из $\mathscr{L}(E; F)$, удовлетворяющий (1.28), то положим $U = \{x \in E : Ax \leqslant e\} = A^{-1}(e - K)$ — окрестность нуля в E, где $e \in \operatorname{int} K$. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \in U$ при некотором наборе неотрицательных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ и индексов $\{i_k\}_{k=1}^{n} \subset I$. Тогда

$$e \geqslant A\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A x_{i_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{i_k}.$$

А это означает ограниченность сверху множества W в F, что и требовалось.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат этого пункта [195]. Пусть (E, C) — ЧУЛНП, (F, K) — полная банахова решетка с нормальным конусом K, H — линейное пространство, $A : H \to F$, $B : H \to E$ — линейные отображения. Рассмотрим два утверждения: 1) существует непрерывный положительный оператор $Q : E \to F$ такой, что

$$Q \circ B = A; \tag{1.33}$$

2) существует окрестность U нуля в E такая, что множество $Z = \{Ah : Bh \leqslant z$, для некоторых $z \in U,\ h \in H\}$ ограничено сверху в F. Имеет место теорема 1.12.

Теорема 1.12. *Из 2 следует 1. Если* $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, *то 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть справедливо 2 и d — верхняя грань множества Z. Учитывая, что множество Z представимо в виде $Z = \{Ah : u + Bh \in U$, для некоторых $u \in C,\ h \in H\}$, положим в условии предложение 1.22 $\{x_i\} = \{Bh : h \in H\} \cup \{C\} \subset E$, $\{y_i\} = \{Ah : h \in H\} \cup \{\Theta_F\} \subset F$. Тогда $W = Z \leqslant d$ и в силу предложения 1.22 существует оператор $Q \in \mathcal{L}(E; F)$ такой, что

$$Qx \geqslant \Theta_F, \quad QBh \geqslant Ah,$$

для любых $x \in C,\ h \in H$. В частности, $A(-h) \leqslant QB(-h)$, откуда следует (1.33). Если $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, то опять по предложению 1.22 получаем, что утверждения 1 и 2 эквивалентны. Теорема 1.12 доказана.

Следствие 1.7. 1. Пусть A — линейный оператор, определенный на линейном подпространстве L ЧУЛНП (E, C), со значениями в полной банаховой решетке (F, K) с нормальным конусом K. Если существует окрестность нуля U в E такая, что множество $\{Ax : x \in L,\ x \leqslant u$, при некотором $u \in U\}$ ограничено сверху в F, то A расширяется до положительного непрерывного линейного оператора $A_1 : E \to F$.

2. Пусть f — линейный функционал, определенный на подпространстве L из (E, C). Если множество $\{\langle x, f\rangle : x \in L,\ x \leqslant u$, при некотором $u \in U\}$ ограничено сверху в R_1, где U — некоторая окрестность нуля в E, то f расширяется до линейного непрерывного положительного функционала $f_1 : E \to R_1$.

3. Пусть (Y, C) — упорядоченное векторное пространство, X — линейное подпространство в Y такое, что для любого $y \in C$ существует $x \in X$, $x \geqslant y$. Тогда каждый положительный функционал на X расширяется до положительного линейного функционала на всем (Y, C).

Как видно из определения положительности линейного оператора, это понятие зависит от того, как введены в соответствующих пространствах конусы положительных векторов. В приложениях встречаются ситуации, когда в одном и том же пространстве E имеются несколько различных конусов, определяющих в общем случае частичные предпорядки в E.

Пусть E, F — ЛНП, $\{C_i\}_{i=1}^n$ — система выпуклых конусов в E $(C_i + C_i \subseteq C_i,\ \lambda C_i \subseteq C_i$ для любого $\lambda \geqslant 0)$. Отметим, что здесь не предполагается замкнутость конусов или выполнение свойства $C_i \cap (-C_i) = \{\Theta_E\}$. Если K — выпуклый замкнутый конус в F, то обозначим

$$S_i^+ = S_i^+(E, F) = \{A \in \mathscr{L}(E, F) : Ax \in K, \quad \forall x \in C_i\},$$

$i = 0, 1, \ldots, n$, (C_0 определен в (1.34)) выпуклые конусы операторов в $\mathscr{L}(E; F)$.

Теорема 1.13. [196]. *Пусть F — рефлексивное банахово пространство с нормальным конусом K. Если конус*

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl} C_i, \tag{1.34}$$

где $\operatorname{cl} C_i$ — замыкание конуса C_i, обладает свойством: 1) $\operatorname{int} C_0 \neq \varnothing$, *или 2) C_0 имеет внутренние точки относительно подпространства $L = Lin\{C_0\}$, $C_0 \cap \operatorname{int} C_i \neq \varnothing$ хотя бы для одного $i \in \{1, \ldots, n\}$ и для любого $f \in F^*$ такого, что $f(K) = 0$ имеем $f = \Theta_{F^*}$, то*

$$S_0^+ = S_1^+ + \cdots + S_n^+. \tag{1.35}$$

В частности, для линейных непрерывных функционалов на E имеет место теорема 1.14.

Теорема 1.14. [196]. *Пусть $\{C_i\}_{i=1}^n$ — выпуклые конусы в ЛНП E, C_0 определен в (1.34) и $C_0 \cap (\operatorname{int} C_i) \neq \varnothing$ хотя бы для одного индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $Q_i = \{f \in E' : \langle x, f\rangle \geqslant 0, \ \forall x \in C_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то*

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n. \tag{1.36}$$

§ 2. Аналитические методы векторной оптимизации

1°. Вспомогательные сведения из анализа. Пусть X — ЛНП, Y — банахово пространство, U — открытое множество пространства X. Отображение $F : X \to Y$ называется дифференцируемым (по Фреше) в точке $x_0 \in U$, если существует непрерывный линейный оператор $L = L(x_0) : X \to Y$ такой, что для любого $h \in X$, удовлетворяющего условию $x_0 + h \in U$,

$$\Delta F(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0) h + \varphi(x_0, h), \tag{2.1}$$

где $\dfrac{\|\varphi(x_0, h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$ при $\|h\|_X \to 0$.

Главная линейная часть $L(x_0) h$ приращения (2.1) обозначается $dF(x_0, h)$ и называется дифференциалом (Фреше) отображения F в точке x_0. Линейный оператор $L(x_0)$ называется производной (Фреше) отображения F в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$. Отображение, дифференцируемое в каждой точке множества U, называется дифференцируемым на U. Производная $F'(x)$ определяется однозначно для дифференцируемого отображения.

Пусть F дифференцируема на U. Если $dF(x, h_1)$ как функция от x при любом фиксированном h_1 дифференцируема в точке $x_0 \in U$, т. е.

имеет место соотношение

$$dF(x_0+h_2,\ h_1)-dF(x_0,\ h_1)=d[dF(x_0,\ h_1),\ h_2]+\Psi(h_2,\ x_0), \quad (2.2)$$

где

$$\Psi(h_2,\ x_0): X \to \mathscr{L}(X;\ Y),$$

$$\frac{\|\Psi\|_{\mathscr{L}(X;Y)}}{\|h_2\|_X} \to 0 \text{ при } \|h_2\|_X \to 0,$$

то F называется дважды дифференцируемым в точке $x_0 \in U$, а $d[dF(x_0,\ h_1),\ h_2] \equiv d^2 F(x_0,\ h_1,\ h_2)$ называется вторым дифференциалом отображения F в точке x_0.

Таким образом, первая производная F' есть отображение множества U в $\mathscr{L}(X;\ Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов $L: X \to Y$ с нормой $\|L\|_{\mathscr{L}(X;Y)} = \sup\{\|Lx\|_Y: x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\}$, а вторая производная F'' отображает U в $\mathscr{L}(X;\ \mathscr{L}(X;\ Y))$. Считают, что отображение F принадлежит классу $C^2(U)$ (или дважды непрерывно дифференцируемо на множестве U), если F дважды дифференцируемо и отображение $F'': U \to \mathscr{L}(X;\ \mathscr{L}(X;\ Y))$ непрерывно. Аналогично вводится класс $C^1(U)$. Заметим, что банахово пространство $\mathscr{L}(X;\ \mathscr{L}(X;\ Y))$ изометрически изоморфно банахову пространству $\mathscr{L}(X;\ X;\ Y)$ всех билинейных непрерывных отображений $X \times X$ в Y [54]. Поэтому $F''(x_0)$, $x_0 \in U$, является билинейным непрерывным отображением $X \times X$ в Y, причем симметрическим, т. е. $F''(x_0)(x_1,\ x_2) = F''(x_0)(x_2,\ x_1)$, $x_1,\ x_2 \in X$.

Пусть пространство $X = X_1 \times X_2$, где X_1, X_2 — линейные нормированые пространства; U — окрестность точки $(x_0,\ y_0)$ в $X_1 \times X_2$, $F: U \to Y$. Если отображение $x \to F(x,\ y_0)$ дифференцируемо (по Фреше) в точке x_0, то его производная называется частной производной по x отображения F в точке $(x_0,\ y_0)$ и обозначается $F_x(x_0,\ y_0)$. Аналогично определяется частная производная $F_y(x_0,\ y_0)$ по y.

Теорема 2.1 (о неявной функции) [3, с. 166]. *Пусть X_1, X_2, Z — банаховы пространства, W — открытая окрестность точки (x_0, y_0) в $X_1 \times X_2$, $\Psi: W \to Z$ — отображение класса $C^1(W)$. Если: 1) $\Psi(x_0, y_0) = 0_Z$; 2) существует обратный оператор*

$$[\Psi_y(x_0,\ y_0)]^{-1} \in \mathscr{L}(Z;\ X_2),$$

то существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и такое отображение $\varphi: S(x_0,\ \delta) = \{x \in X_1 : \|x - x_0\|_{X_1} < \delta\} \to X_2$ класса $C^1(S(x_0,\ \delta))$, что: а) $\varphi(x_0) = y_0$; б) при $\|x - x_0\|_{X_1} < \delta$ справедливо $\|\varphi(x) - y_0\|_{X_2} < \varepsilon$ и $\Psi(x, \varphi(x)) = \Theta_Z$; в) в множестве $S(x_0, \delta) \times S(y_0, \varepsilon)$ равенство $\Psi(x, y) = \Theta_Z$ возможно только при $y = \varphi(x)$, где $S(y_0, \varepsilon) = \{y \in X_2 : \|y - y_0\|_{X_2} < \varepsilon\}$; г) *при $x \in S(x_0,\ \delta)$ справедливо соотношение*

$$\Psi_y(x,\ \varphi(x))\,\varphi'(x) + \Psi_x(x,\ \varphi(x)) = \Theta_Z.$$

Пусть M — подмножество банахова пространства X. Вектор $x \in X$ называется касательным к множеству M в точке $x_0 \in M$, если существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $\alpha \to r(\alpha)$ отрезка $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ в X, что $x_0 + \alpha x + r(\alpha) \in M$, $\|r(\alpha)\|_X/\alpha \to 0$, при $\alpha \to 0$.

Теорема 2.2 (Л. А. Люстерника) [50, с. 41]. *Пусть X, Z — банаховы пространства, U — открытая окрестность точки $x_0 \in X$, G — отображение U в Z класса $C^1(U)$, $G(x_0) = \Theta_Z$. Предположим, что производная $G'(x_0) \in \mathcal{L}(X; Z)$ есть отображение X на все Z. Тогда множество $K(x_0)$ всех касательных векторов к множеству $M = \{x \in X;\ G(x) = \Theta_Z\}$ в точке $x_0 \in M$ является замкнутым линейным подпространством в X, причем $K(x_0) = \mathrm{Ker}\, G'(x_0) = \{x \in X : G'(x_0)x = \Theta_Z\}$, Θ_Z — нуль в Z.*

Лемма 2.1. *Пусть X, Z, U и G такие же, как и в теореме 2.2, причем $G \in C^1(X)$ и к подпространству $X_1 = \mathrm{Ker}\, G'(x)$ в X существует дополнение X_2, т. е. X_2 — замкнутое подпространство в X и X есть прямая сумма X_1 и X_2: $X = X_1 \oplus X_2$. Тогда существует такая окрестность U_1 нуля в X_1 и такое отображение $\varphi : U_1 \to X_2$ класса $C^1(U_1)$, со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, что значения отображения $g : U_1 \to X$, действующего по формуле*

$$g(h) = x_0 + h + \varphi(h), \quad h \in U_1,$$

принадлежат M.

Доказательство. Введем отображение $\Psi(x, y) = G(x_0 + x + y) : X_1 \times X_2 \to Z$, $x \in X_1$, $y \in X_2$. Тогда $\Psi \in C'(X_1 \times X_2)$ в силу того, что $G \in C^1(X)$. Положим в теореме 2.1 $x_0 = y_0 = \Theta$. Ясно, что $\Psi(0, 0) = G(x_0) = \Theta$, $\Psi_x(0, 0) = G'(x_0)|_{X_1}$, $\Psi_y(0, 0) = G'(x_0)|_{X_2}$, где $G'(x_0)|_{X_i}$, $i = 1, 2$,— сужения оператора $G'(x_0)$ на подпространства X_i. Заметим, что по условию линейный оператор $G'(x_0)|_{X_2}$ отображает X_2 на все пространство Z, причем взаимно-однозначно. Поскольку X_2, Z — банаховы пространства, то по теореме Банаха об открытом отображении существует непрерывный обратный оператор $[\Psi_y(0, 0)]^{-1} : Z \to X_2$. Поэтому в силу теоремы 2.1 существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и отображение $\varphi : S(0, \delta) \to X_2$ класса $C^1(S(0, \delta))$ со свойствами: а) $\varphi(0) = 0$; б) при $\|x\|_{X_1} < \delta$, $x \in X_1$, справедливо $\|\varphi(x)\|_{X_2} < \varepsilon$ и $G(x_0 + x + \varphi(x)) = 0$, т. е. $g(x) = x_0 + x + \varphi(x) \in M$. При этом $G'(x_0)|_{X_1} + G'(x_0)|_{X_2}\, \varphi'(0) = 0$, откуда следует, что $\varphi'(0) = 0$, так как $G'(x_0)|_{X_1} \equiv \Theta$, а $G'(x_0)|_{X_2}\, y = \Theta_Z$ лишь в том случае, когда $y = \Theta_X$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть отображение F открытого подмножества Z ЛНП X в банахово пространство Y принадлежит классу $C^1(Z)$, u, $u + h \in Z$, $h \neq \Theta_X$, причем $u + \tau h \in Z$ для любого $\tau \in [0, 1]$. Рассмотрим вещественнозначную функцию одного переменного $\tau \in [0, 1]$

$$\varphi(\tau) = \langle F(u + \tau h),\ y^* \rangle,$$

где $y^* \in Y'$ — фиксированный линейный непрерывный функционал. Ясно, что $\varphi \in C^1[0, 1]$ и справедлива формула

$$\varphi'(\tau) = \langle F'(u + \tau h)\, h,\ y^* \rangle.$$

Для функции $\varphi(\tau)$ имеет место формула конечных приращений

$$\varphi(\tau) - \varphi(0) = \varphi'(\Theta\tau)\tau, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Отсюда при $\tau = 1$ получаем

$$\langle F(u + h) - F(u),\ y^* \rangle = \langle F'(u + \Theta h)\, h,\ y^* \rangle, \tag{2.3}$$

где $\Theta = \Theta(y^*) \in [0, 1]$. Усилить формулу (2.3), отбросив функционал y^*, вообще говоря, нельзя (см. пример в [3, с. 148]). Выполняется лишь следующее утверждение.

Предложение 2.1. Существует оператор $L \in \mathcal{L}(X; Y)$, принадлежащий замкнутой выпуклой оболочке множества $\{F'(x) : x \in [u, u + h]\}$ и такой, что

$$F(u+h) - F(u) = Lh.$$

В самом деле, для функции $\varphi(\tau)$ имеет место представление $\varphi(\tau) - \varphi(0) = \int_0^\tau \varphi'(\tau)\,d\tau$, откуда при $\tau = 1$ получаем

$$\langle F(u+h) - F(u), y^* \rangle = \int_0^1 \langle F'(u + \sigma h) h, y^* \rangle\, d\sigma.$$

Если ввести интеграл $\int_0^1 F'(u+\sigma h) h d\sigma$ как предел интегральных сумм $\sum_{k=0}^{n-1} F'(u + \sigma_k h) h (\xi_{k+1} - \xi_k)$, отвечающих разбиениям $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n = 1$, $\sigma_k \in [\xi_k; \xi_{k+1}]$, то при $\max(\xi_{k+1} - \xi_k) \to 0$ предел существует в силу непрерывности вектор-функции $F'(u+\sigma h) h : [0, 1] \to Y$. Поэтому из последнего равенства следует

$$F(u+h) - F(u) = \int_0^1 F'(u + \sigma h) h d\sigma. \tag{2.4}$$

Из определения интеграла в (2.4) получаем данное утверждение.

Пусть банахово пространство Y частично упорядочено замкнутым конусом C положительных элементов. Отображение F ЛНП X в (Y, C) называется выпуклым [строго выпуклым] на выпуклом множестве $Z \subseteq X$, если

$$y(\alpha, x_1, x_2) \equiv \alpha F(x_1) + (1-\alpha) F(x_2) - F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \in C \tag{2.5}$$

$$[y(\alpha, x_1, x_2) \in C \setminus \{\Theta_Y\}] \tag{2.6}$$

для любых $x_1, x_2 \in Z$, $\alpha \in [0, 1]$ $[\alpha \in (0, 1)]$. Если внутренность $\operatorname{int} C$ конуса C не пуста, то F называется сильно выпуклым на Z в случае существования положительного числа $\varkappa = \varkappa(F)$ такого, что

$$y(\alpha, x_1, x_2) - \alpha(1-\alpha)\varkappa \|x_1 - x_2\|_X^2 e \in C \tag{2.7}$$

при всех $x_1, x_2 \in Z$, $\alpha \in [0, 1]$, где e — порядковая единица в (Y, C). Заметим, что понятия порядковой единицы и внутренней точки конуса C совпадают.

Предложение 2.2. Пусть Z — открытое выпуклое множество в X, $F : Z \to (Y, C)$ и $F \in C^1(Z)$. Введем условия:

$$y(x, h) \equiv F(x+h) - F(x) - F'(x) h \in C \tag{2.8}$$

для любых $x, h \in X$, $x \in Z$, $x + h \in Z$;

$$y(x, h) \in C \setminus \{\Theta_Y\}, \tag{2.9}$$

$$y(x, h) - \alpha(1-\alpha)\varkappa\|h\|_X^2 e \in C \tag{2.10}$$

для любых $x, h \in X$, $x \in Z$, $x + h \in Z$, $h \neq \Theta_Y$. Тогда (2.8) [(2.10)] необходимо и достаточно для выпуклости (сильной выпуклости) отображения F на Z, а (2.9) достаточно для строгой выпуклости F.

Доказательство. Если условие (2.8) выполняется для всех $x \in Z$, $x + h \in Z$, то положим $x_\alpha = \alpha(x+h) + (1-\alpha)x$, $y_1 = F(x+h) - F(x_\alpha) - F'(x_\alpha)(x + h - x_\alpha)$, $y_2 = F(x) - F'(x_\alpha) - F'(x_\alpha)(x - x_\alpha)$.

Тогда $y_1, y_2 \in C$ в силу (2.8). Отсюда $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 = \alpha F(x+h) + (1-\alpha) F(x) - F(x_\alpha) - F'(x_\alpha)(x_\alpha - x_\alpha) \in C$, что эквивалентно (2.5). Аналогично доказывается достаточность условий (2.9), (2.10) для строгой и сильной выпуклости F на Z. Обратно, пусть $F(x)$ выпукло на Z. Тогда из (2.5) получаем

$$F(x_2 + \alpha(x_1 - x_2)) - F(x_2) \leqslant \alpha(F(x_1) - F(x_2)).$$

Отсюда для любого линейного непрерывного положительного функционала $y^* \in C'$ на основании (2.3) находим

$$\alpha\langle F'(x_2 + \alpha\Theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2),\ y^*\rangle \leqslant \alpha\langle F(x_1) - F(x_2),\ y^*\rangle,$$
$$0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Сокращая на $\alpha > 0$ и переходя к пределу в левой части неравенства при $\alpha \to 0 + 0$, получаем

$$\langle F'(x_2)(x_1 - x_2),\ y^*\rangle \leqslant \langle F(x_1) - F(x_2),\ y^*\rangle,$$

учитывая непрерывность $F'(x)$. Отсюда следует (2.8). Если $F(x)$ сильно выпуклое отображение, то $F(x_2 + \alpha(x_1 - x_2)) - F(x_2) \leqslant \alpha[F(x_1) - F(x_2)] - \alpha(1-\alpha)\varkappa\|x_1 - x_2\|_X^2 e$. Тогда для любого $y^* \in C'$ с помощью (2.3) получаем $\langle F(x_1) - F(x_2),\ y^*\rangle \geqslant (1 - \alpha)\varkappa\|x_1 - x_2\|_X^2\langle e, y^*\rangle + \langle F'(x_2 + \alpha\Theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), y^*\rangle$. Устремляя α к нулю, приходим к неравенству

$$\langle F(x_1) - F(x_2),\ y^*\rangle - \varkappa\|x_1 - x_2\|_X^2\langle e,\ y^*\rangle \geqslant \langle F'(x_2)(x_1 - x_2),\ y^*\rangle,$$

откуда в силу произвольности $y^* \in C'$ получаем (2.10) при $x_1 = x + h$, $x_2 = x$. Предложение 2.2 доказано.

Имеется еще одна характеризация выпуклости и сильной выпуклости векторзначных отображений.

Предложение 2.3. Пусть Z — открытое выпуклое множество в X, $F: Z \to (Y, C)$, $F \in C^1(Z)$, $g(x_1, x_2) \equiv (F'(x_1) - F'(x_2))(x_1 - x_2)$. Тогда F выпуклое [сильно выпуклое] отображение в том и только в том случае, когда

$$g(x_1, x_2) \in C, \tag{2.11}$$

$$[g(x_1, x_2) - \mu\|x_1 - x_2\|_X^2 e \in C] \tag{2.12}$$

для любых $x_1, x_2 \in Z$, $\mu = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Если $F(x)$ выпуклое, то из (2.8) находим

$$F(x_2) \geqslant F(x_1) + F'(x_1)(x_2 - x_1),$$
$$F(x_1) \geqslant F(x_2) + F'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Сложив эти два равенства почленно, получим (2.11). Аналогично для сильно выпуклого отображения F (2.12) следует из (2.10) с $\mu = 2\varkappa$. Обратно, пусть выполняется (2.11). Тогда, используя формулу (2.4), находим

$$y(\alpha, x_1, x_2) = \alpha [F(x_1) - F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)] + $$
$$+ (1-\alpha)[F(x_2) - F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)] =$$
$$= \alpha (1-\alpha) \int_0^1 F'(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma (1-\alpha)(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)\, d\sigma +$$
$$+ (1-\alpha)\alpha \int_0^1 F'(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma\alpha (x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\, d\sigma =$$
$$= \alpha (1-\alpha) \int_0^1 [F'(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma (1-\alpha)(x_1 - x_2)) -$$
$$- F'(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma\alpha (x_2 - x_1))](x_1 - x_2)\, d\sigma.$$

Отсюда, обозначая $z_1(\sigma) = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma (1-\alpha)(x_1 - x_2)$, $z_2(\sigma) = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 + \sigma\alpha (x_2 - x_1)$, получаем

$$y(\alpha, x_1, x_2) = \alpha (1-\alpha) \int_0^1 (F'(z_1(\sigma)) - F'(z_2(\sigma)))(z_1(\sigma) - z_2(\sigma))\, d\sigma/\sigma. \tag{2.13}$$

Однако из условия (2.11) следует

$$g(z_1(\sigma), z_2(\sigma)) \in C, \quad \forall \sigma \in [0, 1],$$

поскольку $z_1(\sigma)$, $z_2(\delta) \in Z$. Поэтому согласно замкнутости конуса C в Y интеграл в правой части (2.13) принадлежит C. Таким образом, левая часть равенства (2.13) неотрицательна, т. е. (2.5) доказано. Если выполняется (2.12) при некотором $\mu > 0$, то в силу (2.10) и (2.13) получаем

$$y(\alpha, x_1, x_2) = \alpha (1-\alpha) \int_0^1 g(z_1(\sigma), z_2(\sigma))\, d\sigma/\sigma \geqslant$$
$$\geqslant \alpha (1-\alpha)\mu \int_0^1 \| z_1(\sigma) - z_2(\sigma) \|_X^2\, e\, d\sigma/\sigma = \frac{\alpha (1-\alpha)\mu}{2} \| x_1 - x_2 \|_X^2\, e,$$

где $x_1, x_2 \in Z$, $\alpha \in [0, 1]$. Итак, доказано (2.7) с $\varkappa = \mu/2$, что и требовалось.

Если существует вторая производная по Фреше у отображений в частично упорядоченные пространства, то можно, как и в классическом анализе, получить условия выпуклости отображения в терминах второй производной.

Пусть $Q(x, x)$ — квадратичная форма на ЛНП X со значениями в ЧУЛНП (E, K), т. е. сужение билинейного отображения $Q(x, y)$ на диагональ $\{(x, x) : x \in X\}$ декартова произведения $X \times X$. Она называется: а) неотрицательно определенной, если $Q(x, x) \in C$ для любого $x \in X$; б) положительно определенной, если $Q(x, x) \in C \setminus \{\Theta_Y\}$ для любого $x \in X$, $x \neq \Theta_X$; в) в случае, когда $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, сильно положительно определенной, если $Q(x, x) - \mu \| x \|_X^2 e \in C$ для всякого $x \in X$ и некоторого $\mu = \mu(Q) > 0$, где e — порядковая единица (E, K).

Предложение 2.4. Пусть Z — открытое выпуклое множество в ЛНП X, $F : Z \to (Y, C)$, $F \in C^2(Z)$, где (Y, C) — частично упорядоченное банахово пространство. Тогда для выпуклости (сильной выпуклости) $F(x)$ необходимо и достаточно, чтобы второй дифференциал Фреше $d^2F(x, h, h)$, $h \in X$, был неотрицательно определенной (сильно положительно определенной) квадратичной формой.

Доказательство. Пусть $d^2F(x, h, h) \in C$ для всех $x \in Z$, $h \in X$. Тогда для любого положительного линейного функционала $y^* \in C'$ на основании (2.3) находим

$$\langle (F'(x_1) - F'(x_2))(x_1 - x_2), y^* \rangle = \langle d^2F(x_2 + \Theta(x_1 - x_2), x_1 - x_2, x_1 - x_2), y^* \rangle \geqslant 0$$

для любых $x_1, x_2 \in Z$ и некоторого $\Theta = \Theta(y^*) \in [0, 1]$. Значит, $(F'(x_1) - F'(x_2))(x_1 - x_2) \in C$ в силу произвольности $y^* \in C'$, и $F(x)$ — выпуклое отображение по предложению 2.3. Аналогично, пусть $d^2F(x, h, h) \geqslant \mu \| h\|_X^2 e$ для всех $x \in Z$, $h \in X$. Тогда $\langle (F'(x_1) - F'(x_2))(x_1 - x_2), y^* \rangle = \langle d^2F(x_2 + \Theta(x_1 - x_2), x_1 - x_2, x_1 - x_2), y^* \rangle \geqslant \langle \mu \| x_1 - x_2 \|_X^2 e, y^* \rangle$, для любых $x_1, x_2 \in Z$, $y^* \in C'$. Отсюда следует (2.12), т. е. $F(x)$ — сильно выпукло. Обратно, пусть F — выпуклое отображение на Z. Для любого $x \in Z$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $h \in X$, $\| h \|_X = 1$, $0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ имеем $x + \varepsilon h \in Z$, в силу открытости Z. Поэтому на основании (2.3) и (2.11) находим

$$\varepsilon \langle (F'(x + \varepsilon h) - F'(x)) h, y^* \rangle = \varepsilon^2 \langle d^2F(x + \Theta\varepsilon h, h, h), y^* \rangle \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\langle d^2F(x + \Theta\varepsilon h, h, h), y^* \rangle \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в этом неравенстве, получаем $\langle d^2F(x, h, h), y^* \rangle \geqslant 0$, или $d^2F(x, h, h) \in C$, учитывая непрерывность d^2F и произвольность $y^* \in C'$. Аналогично в случае сильной выпуклости $F(x)$ показывается, что $d^2F(x, h, h) \geqslant \mu \| h \|_X^2 e$, $x \in Z$, $h \in X$. Предложение 2.4 доказано.

Подобные результаты для конечномерного пространства (Y, C) рассматривались в [29, 164, 173 и др.].

2°. Экстремальные свойства векторзначных функций. Хорошо известно, какую роль в классическом анализе и его многочисленных приложениях играют теоремы о необходимых и достаточных условиях экстремума дифференцируемых функций. Оказывается, что многие эти результаты (но не все!) распространяются на случай функций со значениями в частично упорядоченных векторных пространствах [14, 164, 173, 196 и др.]. В этом пункте рассмотрим ряд таких утверждений с указанием некоторых поясняющих примеров, ориентированных на техническую проблематику, которой посвящена данная серия книг.

Теорема 2.3. *Пусть в банаховом пространстве Y частичный порядок определяется замкнутым конусом C, F — непрерывно дифференцируемая по Фреше функция, действующая из X в Y. Если $x_0 \in X$ есть точка локального сильного минимума для F, т. е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $h \in X$, $\| h \|_X < \varepsilon$, справедливо*

$$F(x_0 + h) \geqslant F(x_0) \quad \text{в} \quad (Y, C),$$

то

$$F'(x_0) = \Theta. \tag{2.14}$$

Доказательство. Учитывая дифференцируемость по Фреше отображения F в точке $x_0 \in X$, получаем

$$\| F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0) h \|_Y = o(\| h \|_X). \tag{2.15}$$

Положим в (2.15) $h = th_0$, где $0 < \| h_0 \|_X < \varepsilon$, $0 < t < 1$. Тогда

$$\left\| \frac{F(x_0 + th_0) - F(x_0)}{t} - F'(x_0) h_0 \right\|_Y = \frac{o(t)}{t}. \tag{2.16}$$

Ясно, что

$$y_t = \frac{F(x_0 + th_0) - F(x_0)}{t} \in C. \tag{2.17}$$

Но C замкнут в Y, поэтому из (2.16), (2.17) следует

$$\lim_{t \to 0+0} y_t = F'(x_0) h_0 \in C. \tag{2.18}$$

Рассмотрим в (2.16) вместо h_0 вектор $(-h_0)$. Тогда $F'(x_0)(-h_0) \in C$, откуда, учитывая (2.18), получаем (2.14). Теорема 2.3 доказана.

Замечание. То, что $x_0 \in X$ — точка локального сильного минимума функции $F(x)$, записывают так: $x_0 = s - \mathrm{loc} - \min F$. Говорят, что $x_0 \in X$ — точка сильного минимума функции $F(x): X \to (Y, C)$ на множестве $Z \subseteq X$, если $F(x) \geqslant F(x_0)$ для любого $x \in Z$. Обозначают: $x_0 = s - \min F|_Z$.

Следствие. Пусть X, (Y, C), как и в теореме 2.3, F — непрерывно дифференцируемое по Фреше и выпуклое отображение открытого выпуклого множества Z из X в (Y, C). Тогда F достигает сильного минимума на Z в точке $x_0 \in Z$ в том и только в том случае, когда $F'(x_0) = \Theta_{\mathscr{L}(X;Y)}$.

Действительно, необходимость следует из теоремы 2.3, а достаточность — из неравенства (2.8).

Теорема 2.4. *Пусть F — отображение* ЛНП *X в частично упорядоченное банахово пространство (Y, C), причем* $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. *Если $F \in C^2(X)$ и для некоторой точки $x_0 \in X$ имеем $F'(x_0) = \Theta$, $d^2F(x_0, h, h)$ — сильно положительно определенная квадратичная форма на X,* *то*

$$x_0 = s - \mathrm{loc} - \min F. \tag{2.19}$$

Доказательство. Для любого $h \in X$ имеем, учитывая (2.19),

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = d^2F(x_0, h, h) + \omega(h) =$$

$$= \|h\|_X^2 \left(d^2F\left(x_0, \frac{h}{\|h\|_X}, \frac{h}{\|h\|_X}\right) + \frac{\omega(h)}{\|h\|_X^2} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \|h\|_X^2 \left(\mu e + \frac{\omega(h)}{\|h\|_X^2} \right), \quad \mu = \mathrm{const} > 0,$$

где

$$\frac{\|\omega(h)\|_Y}{\|h\|_X^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_X \to 0.$$

Здесь e — порядковая единица пространства (Y, C). Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $h \in X$, $\|h\|_X < \varepsilon$, имеем

$$\mu e + \frac{\omega(h)}{\|h\|_X^2} \in C.$$

Значит, $F(x_0 + h) \geqslant F(x_0)$ для каждого $h \in X$, $\|h\|_X < \varepsilon$, что и требовалось.

Отметим, что ослабить достаточное условие (2.19), вообще говоря, нельзя. Даже при $Y = R_1$, если X — бесконечномерное пространство, равенство нулю первой производной и строгая положительная определенность второго дифференциала Фреше не являются достаточными для существования локального минимума [29].

Пример 2.1.

Пусть $X = l_2$, $Y = R_1$,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i^2}{i^3} - x_i^4 \right), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$$

Тогда в точке $x_0 = (0, 0, \ldots) \in l_2$ справедливо $F'(x_0) = 0$, $d^2F(x_0, h, h) > 0$ для всех $h \in l_2$, $h \neq 0$, но для любого $h_n = (0, \ldots, 0, 1/n, 0, \ldots)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеем $F(h_n) = \frac{1-n}{n^5} < F(0) = 0$.

Понятие локального слабого минимума вводится аналогично локальному сильному минимуму: если у точки x_0 подмножества B некоторого ЧУЛНП (Y, C) найдется ε-окрестность $U \subset Y$ такая, что

$$\{x \in B \cap U : x \leqslant x_0, x \neq x_0\} \neq \varnothing,$$

то x_0 называется слабым локальным минимумом и обозначается $x_0 = w - \mathrm{loc} - \min B$. Говорят, что отображение $F : X \to (Y, C)$, где X — некоторое множество, имеет слабый локальный минимум в точке $x_0 \in X$, если

$$F(x_0) = w - \mathrm{loc} - \min \{F(x) : x \in X\}.$$

Обозначим $x_0 = w - \mathrm{loc} - \min F$.

Теорема 2.5. *Пусть X — ЛНП, Y — банахово пространство, C — замкнутый в Y конус положительных элементов, задающий частичный порядок в Y, причем* $\operatorname{int} C \neq \varnothing$; $F : X \to Y$ — *непрерывно дифференцируемое (по Фреше) отображение. Если* $x_0 = w - \operatorname{loc} - \min$ F в X, *причем* $F'(x_0) \neq \Theta$, *то с необходимостью не существует такого* $x \in X$, *чтобы*

$$\pm dF'(x_0, x) \in \operatorname{int} C.$$

Доказательство. Поскольку F имеет локальный слабый минимум в точке $x_0 \in X$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $F(x_0 + h)$ не может быть меньше, чем $F(x_0)$ для любого $h \in X$, $\|h\|_X < \varepsilon$. Из непрерывной дифференцируемости F следует, что

$$F(x_0 + h) =$$
$$= F(x_0) + dF(x_0, h) + o(h) = F(x_0) + \|h\|_X \left(\frac{dF(x_0, h)}{\|h\|_X} + \frac{o(h)}{\|h\|_X} \right),$$

если $\|h\|_X \neq 0$. Причем

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|_X} = \Theta_Y.$$

Предположим от противного, что существует такой вектор $h \in X$, $\|h\|_X < \varepsilon$, что $dF(x_0, h) \in \operatorname{int} C$. Тогда найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого $t \in (0, \varepsilon_1)$

$$\frac{dF(x_0, th)}{\|th\|_X} + \frac{o(th)}{\|th\|_X} = \frac{dF(x_0, h)}{\|h\|_X} + \frac{o(th)}{\|th\|_X} \in \operatorname{int} C.$$

Заменяя в последнем включении h на $-h$ и используя линейность $dF(x_0, \cdot)$, получаем, что $dF(x_0, -h) \in \operatorname{int}(-C)$. Поэтому $F(x_0 - h) \leqslant F(x_0)$, что невозможно. Теорема 2.5 доказана.

Для доказательства следующего результата об альтернативе понадобится одно следствие из теоремы Хана — Банаха.

Предложение 2.5. Любые два непересекающихся выпуклых множества A и B в ЛНП X, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ могут быть разделены некоторым ненулевым линейным непрерывным функционалом, т. е. найдется $\varphi \in X'$, $\varphi \neq \Theta_{X'}$, что $\varphi(A) \geqslant 0$, а $\varphi(B) \leqslant 0$.

Теорема 2.6. *Пусть X, Y, Z — ЛНП, C, K — замкнутые конусы положительных элементов в Y и Z соответственно, причем* $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, $K \neq \{\Theta_Z\}$. *Тогда для линейного оператора* $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ *справедливо одно из следующих условий:*

1) *существует вектор $x \in X$ такой, что $Ax \in \operatorname{int} C$;*

2) *существует положительный оператор $L \in \mathscr{L}(Y; Z)$ такой, что*

$$L \circ A = \Theta \in \mathscr{L}(X; Z), \quad L \neq \Theta_{\mathscr{L}(Y; Z)}.$$

Доказательство. Пусть условие 1 не выполняется, т. е. область значений $\mathcal{R}(A)$ оператора A не пересекается с внутренностью $\operatorname{int} C$ конуса C. Но $\operatorname{int} C$ — выпуклое в Y множество с внутренними точками. Значит, существует $\varphi \in X'$, $\varphi \neq \Theta_{X'}$, такой, что $\varphi(\operatorname{int} C) \geqslant 0$, $\varphi(\mathcal{R}(A)) = 0$ в силу предложения 2.5 и того, что $\mathcal{R}(A)$ — подпространство в Y. Определим линейный непрерывный положительный оператор $L : Y \to Z$ по формуле:

$$Ly = \varphi(y) k_0, \quad \forall y \in Y,$$

где $k_0 \in K$ — фиксированный ненулевой вектор. Оператор L удовлетворяет условию 2, что и требовалось.

Объединяя теоремы 2.5, 2.6, получаем следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть F — непрерывно дифференцируемое отображение ЛНП X в частично упорядоченное банахово пространство (Y, C), причем* $\operatorname{int} C \neq \varnothing$ *и* $x_0 = w - \operatorname{loc} - \min F$, $F'(x_0) \neq \Theta_{\mathscr{L}(X;Y)}$. *Тогда с необходимостью существует такой положительный оператор* $L \in \mathscr{L}(Y; Z)$, $L \neq \Theta_{\mathscr{L}(Y;Z)}$, *где* (Z, K) *— некоторое* ЧУЛНП *с ненулевым конусом K положительных элементов, что*

$$L \circ F'(x_0) = \Theta_{\mathscr{L}(X;Z)}.$$

Оказывается, что если область значений отображения в частично упорядоченное пространство имеет размерность больше единицы, то даже выпуклое отображение может не иметь сильного минимума, хотя его компоненты и будут возрастать с увеличением нормы аргумента [164].

Пример 2.2.

Пусть $F : R_n \to (R_m, R_m^+)$, где $R_m^+ = \{x \in R_m : x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, выпуклое отображение вида

$$F(x) = (x^T A_1 x + b_1^T x,\quad x^T A_2 x + b_2^T x,\ \ldots,\ x^T A_m x + b_m x)^T,$$

где $\{A_i\}_{i=1}^m$ — симметрические положительно определенные матрицы порядка n, $\{b_i\}_{i=1}^m \subset R_n$ — фиксированные векторы. Тогда

$$F'(x) = (2x^T A_1 + b_1^T,\ \ldots,\ 2x^T A_m + b_m^T)^T \in \mathscr{L}(R_n; (R_m, R_m^+)).$$

В силу выпуклости F, если существует точка $x_0 \in R_n$ такая, что $F'(x_0) = \Theta$, то x_0 — сильный минимум отображения F на R_n согласно следствию к теореме 2.3. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имела решение система линейных алгебраических уравнений

$$2A_i x_0 = -b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.20}$$

что не всегда возможно при $m \geqslant 2$ (система (2.20) становится переопределенной). Если (2.20) не имеет решения, т. е. $F'(x) \neq 0$ для любого вектора $x \in R_n$, то отсутствует и сильный минимум у выпуклого отображения $F(x)$ на R_n. Воспользуемся в этом случае теоремой 2.7. Определим линейный положительный оператор $L \in \mathscr{L}((R_m; R_m^+), (R_1, R_1^+))$, $L = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, такой, что $L \cdot F'(x_0) = \Theta_{\mathscr{L}(R_n; R_1)}$, системой соотношений

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i (2A_i x_0 + b_i) = 0. \tag{2.21}$$

Если для некоторой точки $x_0 \in R_n$ найдется такой оператор L, то x_0 — точка, «подозрительная на слабый минимум» $F(x)$ в силу теоремы 2.7. Поэтому из (2.21) можно получить аналитическое описание множества всех слабых минимумов отображения $F(x)$:

$$WM(F) \subseteq \left\{ x \in R_n : x = -{}^1/_2 \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i,\quad \alpha_i \geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

Обратим внимание на то, что теорему 2.7 можно использовать для отыскания множества слабых минимумов отображений в частично упорядоченные пространства, что продемонстрировано в примере 2.2.

Пример 2.3.

Рассмотрим задачу линейного оценивания в гильбертовых пространствах. Пусть H_2 — гильбертово пространство реализаций «полезного» сигнала $x = x(\omega)$, H_1 — гильбертово пространство наблюдений $r = r(\omega)$, $w = w(\omega)$ — помеха с реализациями в H_1, $\omega \in (\Omega, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство (см. [89, гл. II, приложение 2]). Пусть модель наблюдений имеет вид

$$r = Cx + w,$$

где оператор наблюдений $C \in \mathscr{L}(H_2; H_1)$. Для простоты предположим, что $x(\omega)$ и $w(\omega)$ имеют совместно гауссово распределение и $M[xw] = 0$, $M[x] = \Theta_{H_2}$, $M[w] = \Theta_{H_1}$, K_x, K_w — корреляционные операторы x и w соответственно, $K_x = K_x^* \geqslant 0$, $K_w = K_w^* \geqslant 0$, $K_r = CK_xC^* + K_w$, $K_{xr} = CK_x$.

Постановка задачи в этих терминах такова: заданы гильбертово пространство H_3 оценок и линейный непрерывный оператор $E : H_2 \to H_3$. Требуется найти линейный непрерывный оператор $S_{\text{опт}} \in \mathscr{L}(H_1, H_3)$ (фильтр), оптимальный в смысле «наименьшего» корреляционного оператора $K_{e_0} = K_{e_0}(S_{\text{опт}})$ ошибки оценивания $e_0 = Ex - S_{\text{опт}}r$ (в каком-нибудь разумном понимании). Используя изложенную выше теорию, введем банахово пространство всех самосопряженных операторов $\mathscr{H}$ в гильбертовом пространстве H_3 с конусом $\mathscr{H}^+$ положительных элементов, состоящем из неотрицательно определенных операторов, т. е.

$$A \in \mathscr{H}^+ \Leftrightarrow (Ax, x)_{H_3} \geqslant 0, \quad \forall\, x \in H_3.$$

В результате вводится отображение $F : \mathscr{L}(H_1; H_3) \to (\mathscr{H}, \mathscr{H}^+)$ вида $F(S) = K_e(S)$, и нужно доказать, что существует сильный минимум у $F(S)$, и указать процедуру его нахождения. Это операторная формулировка известной задачи оценивания по минимуму среднеквадратической ошибки. Расписывая оператор $F(S)$, получаем

$$F(S) = EK_xE^* + SK_rS^* - SK_{xr}E^* - EK_{rx}S^*.$$

Отсюда первый дифференциал Фреше имеет вид

$$dF(S_0, S) = S(K_rS_0^* - K_{xr}E^*) + (S_0K_r - EK_{rx})S^*,$$

а второй дифференциал Фреше —

$$d^2F(S_0, S, S) = SK_rS^* \in \mathscr{H}^+, \quad \forall\, S \in \mathscr{L}(H_1; H_3).$$

Поскольку $d^2F(S_0, S, S)$ — неотрицательно определен, то $F(S)$ — выпуклое отображение по предложению 2.4. Значит, согласно следствию к теореме 2.3 решение уравнения $F'(S) = 0$ (если оно существует) представляет собой сильный минимум F на пространстве $\mathscr{L}(H_1; H_3)$, т. е. решение операторного уравнения

$$S_{\text{опт}}K_r = EK_{rx}. \tag{2.22}$$

Таким образом, оператор $S_{\text{опт}}$ определяет K_{e_0}, который и является (наименьшим) в указанном строгом смысле. Если ядерный оператор K_w положительно определен, то существует непрерывный обратный оператор K_r^{-1} и решение (2.22) принимает вид $S_{\text{опт}} = EK_{rx}K_r^{-1}$. Но в случае неотрицательной определенности K_w уравнение (2.22) может не иметь решений в $\mathscr{L}(H_1; H_3)$, что обсуждалось в [89, гл. II]. Тогда $F' \times (S) \neq \Theta$ для всех $S \in \mathscr{L}(H_1; H_3)$, и поэтому $F(S)$ не имеет сильного минимума в $\mathscr{L}(H_1; H_3)$. Требуется или расширить пространство $\mathscr{L}(H_1; H_3)$, или, применяя теорему 2.7, описать множество «подозрительных на слабый минимум» операторов. Можно показать, что применение регуляризации А. Н. Тихонова в этом случае ([89, гл. II]) фактически выводит на одну из точек слабого минимума.

Рассмотрим проблему нахождения сильного минимума при наличии ограничений. Пусть X, Z — банаховы пространства, G — отображение X в Z, (Y, C) — частично упорядоченное банахово пространство, F — отображение X в (Y, C). Поставим задачу: найти локальный сильный минимум в множестве

$$\mathcal{F} = \{y \in Y : y = F(x),\ G(x) = \Theta_Z\}. \tag{2.23}$$

Точка $x_0 \in M = \{x \in X : G(x) = \Theta_Z\}$, обладающая свойством $F(x_0) = s - \mathrm{loc} - \min \mathcal{F}$, называется s-минимальным локальным решением задачи (2.23). Укажем один из вариантов метода множителей Лагранжа для задачи (2.23) [14]. Для этого понадобится

Лемма 2.2. *Пусть F, G — непрерывно дифференцируемые отображения, x_0 — s — минимальное (локальное) решение задачи (2.23). Если производная $G'(x_0) \in \mathcal{L}(X;\ Z)$ есть отображение X на все Z и $X_1 = \mathrm{Ker}\, G'(x_0)$ — дополняемое подпространство в X, то справедливо включение*

$$\mathrm{Ker}\, G'(x_0) \subseteq \mathrm{Ker}\, F'(x_0). \tag{2.24}$$

Доказательство. Рассмотрим касательное подпространство $K(x_0)$ к многообразию $M = \{x \in X : G(x) = \Theta_Z\}$, которое совпадает с $\mathrm{Ker}\, G'(x_0) = X_1$ по теореме 2.2. По условию существует окрестность U точки x_0 в X такая, что для любого $y \in U$, $G(y) = \Theta_Z$, справедливо

$$F(y) \geqslant F(x_0).$$

Пусть U_1 — окрестность нуля в X_1, введенная в лемме 2.1. Будем считать, что $U_1 + x_0 = \{y = u + x_0;\ u \in U_1\} \subset U$. Положим $E = F \circ g;\ U_1 \to (Y, C)$. Поскольку g — непрерывное отображение U_1 в M, то при достаточно малых по норме векторах $x \in U_1$ $g(x)$ будет попадать в U. Поэтому $E(0_X) = F(x_0) \leqslant E(x) = F(x_0 + x + \varphi(x))$. Можно считать, что указанное неравенство выполняется для всех $x \in U_1$. Но тогда точка Θ_X является локальным s-минимумом для отображения $E : U_1 \to (Y, C)$ в банаховом пространстве X_1. Значит, по теореме 2.1 производная

$$E'(0) = F'(x_0) \circ g'(0) = F'(x_0) \circ [I_{X_1} + y'(0)] = \\ = F'(x_0) \circ I_{X_1} = \Theta, \tag{2.25}$$

где I_{X_1} — тождественный оператор в X_1. Из (2.25) следует (2.24). Лемма 2.2 доказана.

Пусть F, G, $U \subseteq X$, Y, Z обладают свойствами, указанными выше. Учтем, что оператор $G'(x_0)|_{X_2}$ обладает непрерывным обратным оператором $[G'(x_0)|_{X_2}]^{-1} \equiv S : Z \to X_2$. Поэтому,

$$F'(x_0)|_{X_2} = F'(x_0) \circ S \circ G'(x_0)|_{X_2} : X_2 \to (Y, C). \tag{2.26}$$

Обозначим $L = -F'(x_0)|_{X_2} \circ S \in \mathcal{L}(Z;\ Y)$. Тогда (2.26) принимает вид

$$F'(x_0)|_{X_2} + L \circ G'(x_0)|_{X_2} = \Theta_{\mathcal{L}(X_2; Y)}. \tag{2.27}$$

Равенство (2.27) можно расширить на все X, поскольку по лемме 2.2

$F'(x_0)X_1 = \Theta_Y$, $G'(x_0)X_1 = \Theta_Z$. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 2.8. *Пусть X, Z — банаховы пространства, (Y, C) — частично упорядоченное линейное нормированное пространство с замкнутым конусом C неотрицательных элементов. Даны отображения $F: X \to (Y, C)$, $G: X \to Z$, которые являются непрерывно дифференцируемыми на X. Если $x_0 \in M = \{x \in X : G(x) = \Theta_Z\}$ — локальное, s — минимальное решение задачи (2.23), причем подпространство* Ker $G'(x_0)$ *дополняемо в X и $G'(x_0)$ отображает X на все Z, то существует линейный непрерывный оператор L, действующий из Z в Y, такой, что*

$$F'(x_0) + L \circ G'(x_0) = \Theta_{\mathscr{L}(X;\,Y)}. \tag{2.28}$$

Ограничения в задаче (2.23) имеют форму равенств. Рассмотрим бесконечномерный аналог известной ситуации, когда ограничения имеют форму неравенств. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, C, K — замкнутые выпуклые конусы положительных элементов, определяющие частичный порядок в Y и Z соответственно, $F: X \to Y$, $G: X \to Z$ — заданные отображения. Поставим задачу найти сильный (локальный) минимум в множестве

$$\mathscr{F}_K = \{y \in Y : y = F(x),\ G(x) \in K\}. \tag{2.29}$$

Точка $x_0 \in M_K = \{x \in X : G(x) \in K\}$, обладающая свойством

$$F(x_0) = s - \min \mathscr{F}_K \text{ (локально)},$$

называется s-минимальным (локальным) решением задачи (2.29). Выполняется теорема 2.9.

Теорема 2.9. *Пусть Z — рефлексивное банахово пространство с нормальным конусом K, x_0 — s-минимальное (локальное) решение задачи (2.29) и выполняются предположения теоремы 2.18 об отображениях $F: X \to (Y, C)$ и $G: X \to (Z, K)$. Тогда существует линейный непрерывный оператор $L: Z \to Y$ такой, что выполняется равенство (2.28). При этом $L(K) \subseteq -C$ и $LG(x_0) = \Theta$.*

В математическом программировании условия оптимальности часто даются в форме утверждений о седловой точке функции Лагранжа, ассоциированной с данной проблемой минимизации ([3,29 и др.]). Назовем функцией Лагранжа выражение

$$\mathscr{L}(x; L) = F(x) - LG(x),\ x \in X,\ L \in \mathscr{L}(Z; Y).$$

Седловой точкой функции $\mathscr{L}(x; L)$ называется пара $(\hat{x}, \hat{L})$, $\hat{x} \in X$, $\hat{L} \in \mathscr{L}^+(Z; Y)$, такая, что

$$\mathscr{L}(x; \hat{L}) \geqslant \mathscr{L}(\hat{x}; \hat{L}) \geqslant \mathscr{L}(\hat{x}; L) \tag{2.30}$$

для всех $x \in X$, $L \in \mathscr{L}(Z; Y)$.

Теорема 2.10. *Пусть X, Y, Z — введенные выше банаховы пространства. Если существует седловая точка $(\hat{x}, \hat{L})$ у $\mathscr{L}(x; L)$, то $F(x)$ достигает сильного (глобального) минимума в точке $\hat{x}$.*

Доказательство. Из (2.30) получаем

$$F(x) - \hat{L}G(x) \geqslant F(\hat{x}) - \hat{L}G(\hat{x}) \geqslant F(\hat{x}) - LG(\hat{x}). \tag{2.31}$$

Из второго неравенства следует

$$(L - \hat{L})\, G(\hat{x}) \geqslant \Theta_Y, \quad \forall L \in \mathscr{L}^+(Z;\, Y). \tag{2.32}$$

Убедимся, что $G(\hat{x}) \in K$. В противном случае нашелся бы функционал $f \in K' \subset Z'$, $f \neq \Theta$, такой, что $f(G(\hat{x})) < 0$. Рассмотрим любой вектор $y_0 \in C \setminus \{\Theta_Y\}$ и положим

$$L_0(\cdot) = y_0 f(\cdot) \in \mathscr{L}^+(Z;\; Y),\;\; L = \hat{L} + L_0.$$

Отсюда

$$(L - \hat{L})\, G(\hat{x}) = y_0 f(G(\hat{x})) \in -C \setminus \{\Theta_Y\},$$

что противоречит (2.32). Итак, $\hat{x}$ — допустимый элемент задачи (2.29). Но $LG(\hat{x}) = \Theta_Y$. В самом деле, полагая в (2.32) $L = {}^1/_2\hat{L} \in \mathscr{L}^+(Z;\, Y)$, находим $\Theta_Y \leqslant {}^1/_2\, \hat{L}G(\hat{x}) \leqslant \Theta_Y$. Поэтому из (2.31) следует

$$F(x) - \hat{L}G(x) \geqslant F(\hat{x}). \tag{2.33}$$

Из (2.33) получаем, что для любого $x \in X$, $G(x) \in K$, $F(x) \geqslant F(\hat{x})$, что и требовалось.

В качестве одного из применений обобщенного метода Лагранжа рассмотрим задачи (3.2) — (3.4) из гл. I. Пусть множества X и Y всех непустых подмножеств классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}$ моделей и параметров, соответственно, наделены структурами банаховых пространств, причем отображения $\Phi : X \to Y$ и $\Psi : X \to (Z, C)$ (ЧУЛНП значений критериев качества) непрерывно дифференцируемы (по Фреше). Если

$$W = \{z \in Z : z = \Psi(x),\; \Phi(x) = y_0\},$$

существует $x_3 \in W$ такой, что

$$\Psi(x_3) = s - \mathrm{loc} - \min W,$$

$\Phi'(x_3)$ отображает X на все Y и $\operatorname{Ker} \Phi'(x_3)$, дополняемое в X подпространство, то найдется $L \in \mathscr{L}(Y;\, Z)$ такой, что

$$\Psi'(x_3) + L\Phi'(x_3) = \Theta.$$

Если ограничения на область определения отображения со значениями в частично упорядоченном пространстве заданы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то имеется аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина [173].

3°. Операторные неравенства в ЧУЛНП. Хорошо известно, какую роль играют линейные неравенства в исследовании операций, в частности, в важнейшем его разделе — математическом программировании (см., например, [156]). В этом пункте рассмотрим некоторые аналоги конечномерных результатов для случая линейных операторов в ЛНП с выпуклыми конусами, следуя [196].

Заданы вещественные ЛНП X, Y_0, Y_1, ..., Y_m, $\{K_j\}_{j=0}^m$ — выпуклые конусы в $\{Y_j\}_{j=0}^m$, т. е. $K_j + K_j \subseteq K_j$, $\mu K_j \subset K_j$ для всех $\mu \in R_1$, $\mu \geqslant 0$. Тогда справедливы вспомогательные утверждения.

Предложение 2.6. Пусть $A : X \to Y_1$, $B : X \to Y_2$ — линейные операторы, причем $K_2 \cap (-K_2) = \Theta_{Y_2}$. Тогда

1) если $Bx \in K_2$, для любого вектора $x \in \operatorname{Ker} A = \{x \in X : Ax = \Theta_{Y_1}\}$, то существует линейный оператор $C : Y_1 \to Y_2$ такой, что

$$B = C \circ A;$$

2) если для любого $x \in X$ такого, что $Ax \in K_1$, справедливо $Bx \in K_2$, то существует линейный оператор $D : Y_1 \to Y_2$ такой, что $B = D \circ A$ и $Dy \in K_2$, как только $y \in \mathcal{R}(A) \cap K_1$. Если A, B — непрерывны и X и $\mathcal{R}(A)$ — банаховы пространства, то C и D являются непрерывными на $\mathcal{R}(A)$..

Предложение 2.7. Пусть выполняются предположения предложения 2.6. Кроме того, пусть Y_2 — рефлексивное банахово пространство, причем K_2 — нормальный конус, $\operatorname{int} K_1 \cap \mathcal{R}(A) \neq \varnothing$, и если $f(K_2) = 0$ для некоторого $f \in Y_2'$, то $f = \Theta_{Y_2'}$. В этом случае, если существует линейный ограниченный оператор $C : Y_1 \to Y_2$ такой, что $B = C \circ A$ и $Cy \in K_2$, как только $y \in \mathcal{R}(A) \cap K_1$, то найдется линейный непрерывный оператор $C_1 : Y_1 \to Y_2$ со свойствами: 1) $B = C_1 \circ A$; 2) $C_1 = C$ на $\mathcal{R}(A)$; 3) если $y \in K_1$, то $C_1 y \in K_2$.

Лемма 2.3. *Пусть X, $\{Y_j\}_{j=1}^m$ — ЛНП, K_j — выпуклые конусы в Y_j с непустыми внутренностями, Z — рефлексивное банахово пространство, частично упорядоченное нормальным конусом K, $A_j \in \mathcal{L}(X, Y_j)$, $j = 1, ..., m$, $A_0 \in \mathcal{L}(X; Z)$, $\{c_j \in \mathcal{R}(A_j)\}_{j=0}^m$ — фиксированные векторы. Предположим, что существует $x_0 \in X$ такой, что $A_j x_0 > \Theta$, $j = 1, ...$ ..., m.* Тогда

$$A_j x \geqslant c_j,\ j = 1, \ldots, m \Rightarrow A_0 x \geqslant c_0 \tag{2.34}$$

для любого $x \in X$ тогда и только тогда, когда существуют линейные операторы $\{B_j\}_{j=1}^m$, $B_j : Y_j \to Z$, такие, что $B_j y \geqslant \Theta$ для любого $y \in \mathcal{R}(A_j) \cap K_j$ и

$$A_0 = \sum_{j=1}^m B_j \circ A_j,\quad \sum_{j=1}^m B_j c_j \geqslant c_0. \tag{2.35}$$

Если X, $\mathcal{R}(A)$ — банаховы пространства, то $\{B_j\}_{j=1}^m$ можно выбрать непрерывными на $\mathcal{R}(A_j)$. При этом существуют $F_j \in \mathcal{L}(Y_j; Z)$ такие, что $F_j y = B_j y$, $y \in \mathcal{R}(A_j)$, и $F_j(K_j) \geqslant \Theta$ в предположении, что $\operatorname{int} K_j \cap \mathcal{R}(A_j) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть выполняется (2.34). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} A_j x - c_j\lambda \geqslant 0, & j = 1, \ldots, m, \\ \lambda > 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Если (x, λ) — решение (2.36), то $A_j(\lambda^{-1}x) \geqslant c_j$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда $A_0(\lambda^{-1}x) \geqslant c_0$, или $A_0x - \lambda c_0 \geqslant 0$ в силу (2.34). Введем в R_1 выпуклый конус $K_{m+1} = [0, +\infty)$, а в $X \times R_1$ — выпуклые конусы

$$E_j = \{(x, \lambda) \in X \times R_1 : L_j(x, \lambda) \geqslant \Theta\},$$

$j = 0, 1, \ldots, m+1$. Здесь $L_j = (A_j, -c_j) \in \mathscr{L}(X \times R_1;\ Y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, и $L_{m+1} = (0, 1) \in (X \times R_1)'$. В таком случае

$$E = \bigcap_{j=1}^{m+1} E_j$$

есть выпуклый конус в $X \times R_1$. Но $\operatorname{int} E \neq \varnothing$ в $X \times R_1$, поскольку существует $x_0 \in X$, такой, что $A_jx_0 > \Theta$, $j = 1, \ldots, m$, по условию.

Применим теорему 1.13 к оператору L_0, распространенную по индукции на конусы $\{E_j\}_{j=1}^{m+1}$, так как $L_0(C) \subseteq K_1$. Получим, что найдутся операторы $\{N_j\}_{j=1}^{m+1} \subset \mathscr{L}(X \times R_1;\ Z)$ такие, что

$$L_0 = \sum_{j=1}^{m+1} N_j, \quad N_j(E_j) \subset K.$$

Из $L_j(x, \lambda) \geqslant \Theta$ следует $(x, \lambda) \in E_j$, откуда $N_j(x, \lambda) \in K$. Значит, существуют линейные отображения $B_j : Y_j \to Z$, $j = 1, \ldots, m$, $B_{m+1} : R_1 \to Z$ такие, что $N_j = B_j \circ L_j$, $j = 1, \ldots, m+1$, и из $y \in \mathscr{R}(A_j) \cap K_j$ следует $B_jy \in K$ в силу предложения 2.6. Поэтому

$$L_0 = (A_0, -c_0) = \sum_{j=1}^{m+1} B_j \circ L_j = \sum_{j=1}^{m} B_j \circ (A_j, -c_j) + B_{m+1} \circ (0, 1). \tag{2.37}$$

Отсюда получаем

$$A_0 = \sum_{j=1}^{m} B_j \circ A_j, \quad -c_0 = -\sum_{j=1}^{m} B_jc_j + B_{m+1}(1), \tag{2.38}$$

сначала полагая в (2.37) аргумент равным $(x, 0)$, $x \in X$, а потом — $(0, \lambda)$, $\lambda \in R_1$.

Поскольку $B_{m+1}(1) \geqslant 0$, из (2.38) находим

$$\sum_{j=1}^{m} B_jc_j \geqslant c_0.$$

Итак, (2.35) доказано. Из полноты $\mathscr{R}(A_j)$ следует, что $\mathscr{R}(L_j)$ — банаховы пространства. Поэтому заключительное утверждение теоремы вытекает из предложений 2.6, 2.7.

Обратно, пусть справедливо (2.35). Тогда

$$A_0x - \sum_{j=1}^{m} B_jc_j = \sum_{j=1}^{m} B_j(A_jx - c_j) \geqslant \Theta,$$

поскольку $(A_jx - c_j) \in \mathscr{R}(A_j) \cap K_j$. Таким образом,

$$A_0x \geqslant \sum_{j=1}^{m} B_jc_j \geqslant c_0,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. О сравнении технических систем по векторному показателю качества

В настоящее время значительное внимание уделяется вопросам автоматизации проектирования и исследования сложных технических систем (ТС). При этом используются различные подходы к математической формализации соответствующих технических проблем, часто сводящихся к многокритериальным задачам оптимизации [95]. Обратим внимание на одно существенное обстоятельство, связанное с изучением серий однотипных ТС.

Как известно, два образца одной и той же ТС не могут быть абсолютно идентичными друг другу. Обязательно имеется расхождение, хотя бы небольшое, по тем или иным характеристикам. Поэтому представление данной ТС в виде единственной точки некоторого фазового пространства X параметров не всегда целесообразно, поскольку практически затруднительно восстановить реальную ТС, соответствующую точно данной точке фазового пространства. Таким образом, данную ТС естественно представлять в виде не одной точки, а элемента некоторого подмножества A из X. Изучая ТС, мы более точно определяем одни параметры, огрубляем другие, и в результате A трансформируется в иное подмножество B из X, причем $A \cap B \neq \varnothing$, поскольку истинная (неизвестная нам точно) точка x_0, соответствующая данной ТС, принадлежит как A, так и B. Поэтому вместо термина «точка фазового пространства» при моделировании сложных ТС полезно пользоваться понятием «информация о точке», которое формализуется с помощью задания системы подмножеств A, B, ..., образующих базис фильтра Φ [26]. По определению $\varnothing \notin \Phi$ и если $A_1, A_2 \in \Phi$, то $\exists A_3 \in \Phi$, $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$. Далее, фазовое пространство X — отделимое топологическое пространство. Тогда базис фильтра Φ в X назовем «информацией о точке $x \in X$», если x есть точка прикосновения любого $A \in \Phi$, т. е. каждая окрестность точки $x \in X$ пересекает A. (В этом случае x называют точкой прикосновения базиса фильтра Φ [26].)

Введем линейное нормированное пространство Y, частично упорядоченное замкнутым выпуклым конусом K (с вершиной в нуле Θ_Y), $K \cap (-K) = \{\Theta_Y\}$. Пару (Y, K) рассматриваем как пространство значений векторного критерия качества ТС. Под информационным описанием ТС будем понимать

$$S = (\Phi = \{U_\alpha\},\ F = \{f_\alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}),$$

где Φ — базис фильтра в X; F — система отображений $f_\alpha : U_\alpha \to Y$, $\mathfrak{A}$ — множество индексов. Пусть в X задан набор (конечный или бесконечный) информационных описаний $ТС_i$, $i \in I$,

$$\mathcal{B} = \{S_i = (\Phi_i = \{U_{\alpha,i}\},\ F_i = \{f_{\alpha,i}\},\ \alpha \in \mathfrak{A}),\quad i \in I\},$$

где I — множество индексов. Возникает задача сравнения $ТС_i$, соответствующих различным $i \in I$. Пусть все $U_{\alpha,i}$ — компакты в X, $f_{\alpha,i}$ — непрерывные отображения. В силу теоремы 1.15, при сделанных предположениях существует, по крайней мере, одна точка $u_\alpha \in U_\alpha$,

$\alpha \in \mathfrak{A}$, такая, что $f_\alpha(u_\alpha)$ — слабый минимум в множестве $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha) \subset \subset (Y, K)$, т. е. не найдется такой точки $v \in V_\alpha$, чтобы $v \leqslant f_\alpha(u_\alpha)$, $v \neq f_\alpha(u_\alpha)$. Обозначим множество всех слабых минимумов в $V_\alpha - P(V_\alpha)$, а соответствующие точки $u_\alpha \in U_\alpha - P(U_\alpha)$. Система непустых подмножеств $\mathfrak{P}(\Phi) = \{P(U_\alpha),\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$, вообще говоря, не образует базис фильтра, а — квазифильтр (см. гл. I, § 2).

Введем несколько типов сравнения TC_i, $i \in I$. Пусть зафиксирован индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$. Тогда TC_{i_0} — α_0 — неулучшаемая (относительно информационных описаний $\mathcal{B}$), если не существует такого TC_i, $i \neq i_0$, чтобы $S_i(\alpha_0) \leqslant S_{i_0}(\alpha_0)$, причем $S_{i_0}(\alpha) \nless S_i(\alpha_0)$ ($S_i(\alpha_0) \leqslant S_{i_0}(\alpha_0)$ как только для любого $y \in \overline{P(V_{\alpha_0, i_0})}$ найдется $z \in \overline{P(V_{\alpha_0, i})}$ такой, что $z \leqslant y$ в (Y, K), т. е. $y - z \in K$; черта означает замыкание множества в Y). TC_{i_0} — абсолютно неулучшаема, если она α-неулучшаема для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ (последнее отношение обозначим $(\mathfrak{A}) - \leqslant$). Отношения $(\alpha_0) - \leqslant$ и $(\mathfrak{A}) - \leqslant$ на $\mathcal{B}$ являются предпорядками, т. е. рефлексивными ($S_i \leqslant S_i$) и транзитивными отношениями ($S_i \leqslant S_j$, $S_j \leqslant \leqslant S_k \Rightarrow S_i \leqslant S_k$).

Пусть $Z = (2^Y)_m$ — метрическое пространство всех замкнутых ограниченных подмножеств Y с метрикой Хаусдорфа

$$d(A, B) = \max\{\sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\|_Y;\ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_Y\}.$$

Тогда приведенная выше конструкция позволяет ввести предпорядок $(\leqslant)$ в $Z : A \leqslant B$, как только для любого $b \in B$ найдется $a \in A$, что $a \leqslant b$ в (Y, C).

Предложение 3.1. Пусть Y — рефлексивное банахово пространство, Z_1 — подпространство Z, состоящее из слабо замкнутых ограниченных подмножеств конуса K, причем K — нормальный конус. Тогда для любого $B \in Z_1$ множество $Q(B) = \{A \in Z_1 : A \leqslant B\}$ замкнуто *в* Z_1.

Доказательство. Пусть $A_n \leqslant B$, $d(A_n, A_0)_n \to 0$, B, $A_n \in Q(B)$. Тогда для любого $b \in B$ существуют $a_n \in A_n$, $a_n \leqslant b$. В силу нормальности $K \| a_n \|_Y \leqslant \| b \|_Y$. Поэтому найдется подпоследовательность $\{a_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что a_{nj} слабо сходится к некоторому $a_0 \in A_0$ на основании рефлексивности Y. Но конус K слабо замкнут в Y, т. е. $a_0 \leqslant b$. Значит, $A_0 \leqslant B$.

Наделим I компактной топологией. Пусть отображение $i \to \overline{P(V_{\alpha, i})}$ непрерывно из I в Z для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 3.2. В предположениях предложения 3.1 пусть $\overline{P(V_{\alpha_0, i})} \in Z_1$ для любого $i \in I$. Тогда существует, по крайней мере, одна α_0-неулучшаемая TC_{i_0} относительно информационных описаний $\mathcal{B}$).

Доказательство проводится с помощью предложения 3.1 аналогично доказательству теоремы из работы [89, с. 27].

Предложение 3.3. Если $\overline{P(V_{\alpha, i})} \in Z_1$ для любых $\alpha \in \mathfrak{A}$, $i \in I$, и выполняются предположения предложения 3.1, то существует, по крайней мере, одна абсолютно неулучшаемая TC_{i_0}, $i_0 \in I$.

Доказательство. Рассмотрим топологическое произведение $Z_1^{\mathfrak{A}}$ и введем в нем предпорядок $(\mathfrak{A}) - \leqslant$. Тогда множество

$Q^{\mathfrak{A}}(D) = \{E \in Z_1^{\mathfrak{A}} : E(\mathfrak{A}) - \leqslant D\}$ замкнуто в $Z_1^{\mathfrak{A}}$ для любого $D \in Z_1^{\mathfrak{A}}$. Отсюда следует справедливость предложения 3.3, поскольку по теореме А. Н. Тихонова о компактности декартова произведения компактов образ I в $Z_1^{\mathfrak{A}}$ при отображении $i \to \{\overline{P(V_{\alpha,i})},\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ компактен. Далее рассуждаем, как и в предложении 3.2.

Однако проверка последних условий часто затруднительна, поскольку найти все точки из $P(V_{\alpha,i})$ не всегда возможно. Поэтому пусть имеется $\{v_{\alpha,i} : \alpha \in \mathfrak{A},\ i \in I\}$, $v_{\alpha,i} \in P(V_{\alpha,i})$. Тогда в $\mathscr{B}$ вводится частичный порядок $((w) - \leqslant) : S_{i_1}(w) - \leqslant S_{i_2}$, как только $v_{\alpha,i_1} \leqslant v_{\alpha,i_2}$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Рассмотрим декартово произведение $Y^{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}$ экземпляров Y, упорядоченное конусом $K^{\mathfrak{A}}$, тогда $(Y^{\mathfrak{A}},\ K^{\mathfrak{A}})$ — частично упорядоченное локально выпуклое пространство с замкнутым конусом $K^{\mathfrak{A}}$.

Предложение 3.4. Если отображение $i \to v_{\alpha,i}$ непрерывно из I в Y для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$, то существует, по крайней мере, одно $S_{i_0} \in \mathscr{B}$, являющееся слабым минимумом в $\mathscr{B}$ (относительно частичного порядка $(w) - \leqslant$).

Один из распространенных способов нахождения слабых минимумов (парето-минимумов) в многокритериальной оптимизации состоит в той либо иной свертке критериев [101 и др.]. Применительно к рассматриваемым здесь задачам можно предложить следующую процедуру. Пусть множество $S \subset K \setminus \{\Theta_Y\}$ таково, что $P(S) \neq \varnothing$. Выберем в сопряженном к Y пространстве Y' замкнутое множество C линейных положительных функционалов (т. е. $f(y) = \langle y,\ f\rangle \geqslant 0$, $\forall y \in K$, $\forall f \in C$) таких, что: 1) $\|f\|_{Y'} = 1$; 2) $f(y) > 0$, $\forall y \in S$; 3) если $y_1 \neq y_2$ и $y_1 - y_2 \in K$, то в этом и только в этом случае $f(y_1) > f(y_2)$, $\forall f \in C$. В частности, если внутренность $\operatorname{int} K'$ сопряженного конуса K' не пуста, то свойство 2 можно заменить следующим: C принадлежит $\operatorname{int} K'$. Поскольку единичная сфера в сопряженном пространстве является компактом (в слабой * топологии), то C — компакт. Введем на C некоторую борелевскую положительную меру μ такую, что

$$S_1(\mu) = \left\{y \in S : \int_C \langle y,\ f\rangle\, d\mu(f) = 1\right\} \neq \varnothing.$$

Обозначим

$$g_x(f) = \frac{\langle x,\ f\rangle^{-1}}{\int_C \langle x,\ f\rangle^{-1}\, d\mu(f)} \tag{3.1}$$

для любого вектора $x \in S$. Для $x \in S$, $y \in S_1(\mu)$ определим свертку

$$y \circ x = \max \langle y,\ f\rangle \langle x,\ f\rangle : (y,\ x) \to (0,\ +\infty). \tag{3.2}$$

В частности, для $x_1,\ x_2 \in S$ положим

$$g_{x_1} \circ x_2 = \max_{f \in C} g_{x_1}(f) \langle x_2,\ f\rangle. \tag{3.3}$$

Если $x_1 = x_2$, то из (3.3) следует, что

$$g_x \circ x = \max_{f \in C} g_x(f) \langle x,\ f\rangle = \frac{1}{\int_C \langle x,\ f\rangle^{-1}\, d\mu(f)} = g_x(f_1)\langle x, f_1\rangle \tag{3.4}$$

для любого $f_1 \in C$. Справедлива теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Для того чтобы вектор* $x_0 \in P(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $y \in S_1$ (*или* $g_y(f)$) *функция* $y \circ x$ (*или* $g_y \circ x$) *достигала минимального значения в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $x_0 \in P(S)$, но существует вектор $y \in S$ такой, что

$$g_{x_0} \circ x_0 > g_{x_0} \circ y. \qquad (3.5)$$

Из (3.5), (3.4) следует

$$g_{x_0}(f)\langle x_0, f\rangle > \max_{f \in C} g_{x_0}(f)\langle y, f\rangle \geqslant g_{x_0}(f)\langle y, f\rangle \qquad (3.6)$$

для любого $f \in C$. Однако по определению $g_{x_0}(f) > 0$. Поэтому $\langle x_0, f\rangle > \langle y, f\rangle$ на основании (3.6). В силу свойства 3 компакта C получаем $x_0 > y$, а это противоречит условию. Значит, (3.5) не верно, что и требовалось. Пусть $\varphi(f) = \langle y, f\rangle$, $y \in S_1(\mu)$ или $\varphi(f) = g_y(f)$. Свертка $\varphi \circ x$ по $x \in S$ достигает минимума в точке $x_0 \in S$. Предположим, что $x_0 \notin P(S)$, т. е. существует вектор $y \in S$ такой, что $x_0 \geqslant y$, $x_0 \neq y$. В силу свойства 3 имеем $\langle x_0, f\rangle > \langle y, f\rangle$ для любого $f \in C$.

Отсюда

$$\varphi(f)\langle x_0, f\rangle > \varphi(f)\langle y, f\rangle, \qquad (3.7)$$

поскольку $\varphi(f) > 0$, $f \in C$. Взяв максимум в (3.7) по $f \in C$, получим

$$\varphi \circ x_0 > \varphi \circ y.$$

Последнее неравенство противоречит условию, что $\varphi \circ x_0 \leqslant \varphi \circ y$. Теорема доказана.

Таким образом, задача отыскания слабых минимумов в множествах $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ сводится к решению скалярных задач оптимизации при специальном задании слабого компакта в сопряженном пространстве к пространству значений векторного критерия качества.

Пример 3.1. Пусть ТС — антенная решетка из n элементов. Тогда фазовое пространство $X = \mathbb{C}^n$, а $Y = R_k$, $K = R_k^+$. Здесь характеристикой ТС являются n комплексных коэффициентов возбуждения излучателей, причем естественно считать, что данной ТС соответствуют множества $\{U_\alpha = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T : \mathrm{Re}\,(\mathrm{Im}) \times \varepsilon_i \leqslant \mathrm{Re}\,(\mathrm{Im})\, x_i \leqslant \mathrm{Re}\,(\mathrm{Im})\, \delta_i,\ i = 1, \ldots, n\},\ \alpha = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{C}^{2n} = \mathfrak{U}\}$. Критерий качества $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^T : \mathbb{C}^n \to R_k$ определяется функционалами $f_i(x)$, которые характеризуют различные показатели поля излучателя и эксплуатационные качества антенны.

Рассмотренное выше понятие «информация о точке» в виде базиса фильтра, у которого данная точка является точкой прикосновения, применимо также к задачам проектирования сложных ТС [157].

Пусть X, Y — отделимые топологические пространства. X представляет множество возможных проектов (моделей) ТС, а Y — множество требований к проектам. Пусть ξ, ξ_1 — эквивалентные базисы фильтров в Y, т. е. порождающие один и тот же фильтр (см. свойства базисов фильтров в [26]). Они называются эквивалентными информациями (или заданиями) о точке $y \in Y$, если y — точка прикосновения как ξ, так и ξ_1. Если $\xi \subset \xi_1$, то ξ_1 — более точная информация (более точное задание) о точке y, чем ξ. На множестве всех фильтров можно ввести отношение частичного порядка с помощью теоретико-множественного включения. Совокупность всех слабых максимумов в множестве всех фильтров на Y (относительно указанного частичного порядка) называется множеством ультрафильтров. Поскольку каждое линейно упорядоченное подмножество фильтров имеет верхнюю грань, то в силу леммы Цорна заключаем, что для любого фильтра в Y существует ультрафильтр, его мажорирующий.

Базис фильтра ξ сходится к точке $y \in Y$, если всякое множество из фундаментальной системы окрестностей точки y содержит множество из ξ. Задание точки $y \in Y$, являющееся базисом ξ ультрафильтра в Y, называется ультразаданием и обозначается ξ_y. Пусть $\xi = \{U_i : i \in I\}$ (I — множество индексов) — информация (задание) о точке $y_0 \in Y$. Выберем по одному элементу y_i из каждого $U_i \in \xi$. В результате получим сеть (обобщенную последовательность) $\{y_i : i \in I\}$, называемую терминальным заданием точки y_0. Упорядочим множество I следующим образом: будем считать, что

$$i_1 \geqslant i_2 \Leftrightarrow U_{i_1} \subseteq U_{i_2}.$$

Тогда $(I, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество со свойством: если i_1, i_2 — любые индексы из I, то найдется $i_0 \in I$ такой, что $i_0 \geqslant i_1, i_0 \geqslant i_2$. В самом деле, i_0 определяется множеством $U_{i_0} = U_{i_1} \cap U_{i_2}$ (такая пара $(I, \geqslant)$ называется направленностью). Говорят, что сеть $\{y_i : i \in (I, \geqslant)\}$ сходится к $y \in Y$, если для любой окрестности W точки y найдется индекс $i_0 \in I$ такой, что для любого $i \in I$, $i \geqslant i_0$, имеем $x_i \in W$. Заметим, что не все терминальные задания точки y_0 сходятся к y_0. Для сходимости необходимо и достаточно, чтобы базис фильтра ξ — задание точки y_0 — сходился к y_0. В частности, для того чтобы базис ультрафильтра ζ сходился к точке $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы y была его точкой прикосновения. Поэтому информацию о точке $y \in Y$ лучше задавать в виде базиса ультрафильтра. Это гарантирует сходимость любого терминального задания точки y.

Аналогично вводятся понятия проекта η точки $x \in X$, ультрапроекта, сравнение проектов, терминальный проект $\{x_j : j \in (J, \geqslant)\}$.

Пусть φ — отображение Y в X, ξ — базис фильтра в Y. Тогда $\varphi(\xi) = \{\varphi(U_i) : i \in I\}$ — базис фильтра в X. Действительно, если $Z \subset Y$, $Z \neq \varnothing$, то $\varphi(Z) \neq \varnothing$ и

$$\varphi(Z_1 \cap Z_2) \subset \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2).$$

Предложение 3.5. Если ζ — базис ультрафильтра в Y, то $\varphi(\zeta)$ — базис ультрафильтра в X.

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом: а) если δ — система образующих какого-либо фильтра Ψ в множестве X и для любого $W \subset X$ имеем $W \in \delta$ или дополнение $\complement W \in \delta$, то δ — ультрафильтр в X. В самом деле, фильтр Ψ, содержащий δ, должен совпадать с δ, поскольку если $W \in \Psi$, то $\complement W \notin \Psi$ и, значит, $\complement W \notin \delta$, откуда $W \in \delta$. Пусть теперь Z — ультрафильтр, порожденный ζ и $T \subset X$. Если $\varphi^{-1}(T)$ содержит некоторое множество Q из ζ, то T содержит $\varphi(Q)$. Если нет, то $\complement\varphi^{-1}(T) = \varphi^{-1}(\complement T)$ содержит некоторое множество D из ζ. Действительно, предположим от противного, что нет такого D. Пусть X — множество всех $E \subset Y$ таких, что $\mathbf{C}\varphi^{-1}(T) \cup E \in \mathbf{Z}$. Тогда X — фильтр в Y, мажорирующий Z, поскольку $\varphi^{-1}(T) \in \mathrm{X}$. Но это противоречит тому, что Z — ультрафильтр. Итак, $\varphi(D)$ содержится в $\mathbf{C}T$. Применяя теперь факт «а», заканчиваем доказательство.

Пусть $\xi_y = \{U_i : i \in I\}$ — базис ультрафильтра в Y, сходящийся к точке $y \in Y$, и для любого U_i определено отображение $A_i : U_i \to X$.

Если система множеств $\eta = \{A_i(U_i) : i \in I\}$ образует базис ультрафильтра в X, сходящегося к некоторой точке $x \in X$, то говорят, что определено тихоновское операторное семейство для пары точек y, x, и записывают

$$^{y}T^{x} = \{A_i : U_i \to X,\ i \in I\},\quad ^{y}T^{x} : \xi_y \to \eta_x,\quad \eta_x = {}^{y}T^{x}\xi_y \tag{3.8}$$

(см. [157]). Из этого определения следует

Предложение 3.6. Любое тихоновское операторное семейство (3.8) для точек $y \in Y$, $x \in X$ задает ультраоператор $\mathfrak{H} : y \to x$, т. е. $\mathfrak{H}: \xi_y \to \eta$.

Пусть задано отображение

$$f : X \to Y, \tag{3.9}$$

ставящее каждому проекту (модели) $x \in X$ его характеристики (требования к проекту) $y \in Y$.

Предложение 3.7. Пусть существует правый обратный $g : Y \to X$ к f ($f \circ g(y) = y$, $\forall y \in Y$), непрерывный в точке $y_0 \in Y$ и определенный на всех множествах $U_i \in \xi_{y_0}$. Тогда сужения g_i оператора g на U_i из ξ_{y_0} образуют тихоновское операторное семейство $^{y_0}T^{x_0}$, где $x_0 = g(y_0)$.

Доказательство. Нужно убедиться, что система множеств $\{g(U_i) : i \in I\}$ образует базис ультрафильтра η_{x_0}, сходящийся к точке $x = g(y_0)$. В самом деле, из предложения 3.5, следует, что $\{g(U_i) : i \in I\}$ — базис ультрафильтра в X. Возьмем какое-либо $g(U_i)$, и пусть W — любая открытая окрестность точки x_0. В силу непрерывности g прообраз $V = g^{-1}(W)$ — открытая окрестность точки y_0 в Y. Поэтому по определению ξ_{y_0} $V \cap U_i \neq \varnothing$. Отсюда $g(U_i) \cap W \neq \varnothing$ и, значит, x_0 — точка прикосновения $g(U_i)$, что и требовалось.

Пусть $\mathfrak{H} : y \to x$ — ультраоператор, определяемый тихоновским операторным семейством $^{y}T^{x}$. Он называется ультранепрерывным, если для любой терминальной сети $\{y_i : i \in I\}$ из ξ_y, $\lim\limits_{I} y_i = y$, справедливо

$$\lim_{I} x_i = x,$$

где $x_i = A_i y_i$. (3.10)

Предложение 3.8. Пусть $^{y}T^{x} = \{A_i : U_i \to X,\ i \in I\}$ — тихоновское операторное семейство, для точек $y \in Y$, $x \in X$, и

$$U_{i_1} \subset U_{i_2} \Rightarrow A_{i_1}(U_{i_1}) \subset A_{i_2}(U_{i_2}), \tag{3.11}$$

для любых U_{i_1}, U_{i_2} из ξ_y. Тогда справедливо (3.10).

Доказательство. Пусть W — любая окрестность точки x в X. Тогда существует множество $A_{i_0}(U_{i_0})$ из η_x такое, что $A_{i_0}(U_{i_0}) \subseteq W$, поскольку η_x — ультразадание точки x. Значит, для каждого $i \geqslant i_0$ точка $x_i \in W$ в силу (3.11), что и требовалось.

Рассмотрим следующую ситуацию. Заданы отображение f из (3.9), ультразадание ξ_y некоторой точки $y \in Y$, компактное подмножество $K \subseteq X$, содержащее хотя бы один прообраз x_0 точки y, $y = f(x_0)$.

Требуется найти ультрапроект η_x какого-либо прообраза $x \in K$ точки y. Один из способов решения этой задачи — построение ультраоператора $\mathfrak{H} : \xi_y \to \eta_x$ (например, указание тихоновского семейства операторов ${}^yT^x$).

Решение, основанное на этом подходе, базируется на следующих соображениях. Для каждого $U_i \in \xi_y$ пусть

$$Z_i = \{x \in K : f(x) \in U_i\} \neq \varnothing.$$

Предложение 3.9. Семейство $\zeta = \{Z_i : i \in I\}$ образует базис ультрафильтра в K.

Доказательство. Пусть $H \subset K$ — любое подмножество. Тогда найдется $U_i \in \xi_y$ такое, что $U_i \subset f(H)$ или $U_i \subset \mathbf{C}f(H) = f(\mathbf{C}H)$, так как ξ_y — базис ультрафильтра (см. доказательство предложения 3.5). Отсюда $Z_i \subset H$ или $Z_i \subset \mathbf{C}H$, т. е. ζ — базис ультрафильтра.

Но ультрафильтр, порожденный ζ, сходится к некоторой точке $x_0 \in K$, поскольку K — компакт.

Предложение 3.10. Если f из (3.9) — непрерывное отображение в точке $x_0 \in K$, то $y = f(x_0)$.

Компакт K можно задавать с помощью регуляризатора, действующего из вспомогательного топологического векторного пространства U в X. Регуляризатором $R : U \to X$ называется оператор, переводящий любое замкнутое ограниченное множество $E \subset U$ в компактное множество $K \subset X$ [157].

Пример 3.2. В рамках примера 3.1 $X = \mathbb{C}^n$, $U = R_m$, и $R : U \to X$ определяется решением экстремальной задачи

$$\arg\min_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x) + \omega(x) \right\}, \tag{3.12}$$

где $\omega(x)$ — так называемый стабилизирующий функционал. Так, если $\{f_j(x)\}_{j=1}^{m}$, $\omega(x)$ непрерывны на X, множества $\{x \in X : \omega(x) \leqslant \alpha\}$ компактны в X для любого $\alpha > 0$ и существует единственное решение задачи (3.12), то R — регуляризатор.

Пусть даны регуляризатор R и оператор $G : \xi_y \to E$, ставящий в соответствие каждому $U_i \in \xi_y$ точку $u_i \in E$ такую, что $fRu_i \in U_i$, т. е. $fRG(U_i) \in U_i$ для любого $i \in I$. Тогда множества $\{U_i : i \in I\}$ называются целевыми, точки $u_i = G(U_i)$ — терминальными управлениями, а G — оператором выбора терминального управления. Имеет место

Предложение 3.11. Пусть $Y = (Y, \rho)$ — метрическое пространство, $R : U \to X$ — регуляризатор, ξ_y — ультразадание точки $y \in Y$.

Если

$$U_i \cap fR(E) \neq \varnothing$$

для любого $U_i \in \xi_y$, то любой конечный алгоритм единственного решения задачи

$$\min_{u \in E} \rho(fRu, U_i) = 0, \forall i \in I$$

определяет оператор выбора терминального управления.

Заметим, что наличие оператора G позволяет построить терминальный проект точки $x \in X$, полагая $\{x_i = RG(U_i) : i \in I\}$. Тогда $x_i \in \in Z_i \in \zeta$.

Данный подход применялся при проектировании эквидистантной фазированной решетки из прямоугольных волноводных щелевых излучателей, расположенных на цилиндрической поверхности. К полю излучения в дальней зоне предъявлялись требования: 1) строгая фиксация вершины главного лепестка в заданном направлении; 2) косекансная форма главного лепестка амплитудной диаграммы направленности излучения в заданном угловом секторе; 3) низкий уровень боковых лепестков для заданных угловых секторов [157].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Третий том данной серии завершен, однако не следует думать, что здесь рассмотрены все (или почти все) направления теории математического моделирования сложных радиотехнических систем. Многие вопросы остались незатронутыми. При отборе материала мы учитывали, насколько широко рассматриваемая проблема освещена в монографической литературе, а также в немалой степени и личные научные интересы авторов. Тем не менее хотелось бы отметить следующее. Хорошо известно, что ИВК представляет собой сложную нелинейную систему, объединяющую измерительные приборы с современными ЭВМ, предназначенную для обработки и анализа измерений о РО, развитие которого в фазовом пространстве контролируется чаще всего нелинейными закономерностями. Но при построении математической модели РО (и ИВК, если решается задача проектирования) обычно не удается учесть все влияющие факторы. Да и добиваться абсолютной точности математической модели во многих случаях нецелесообразно из-за чрезмерного нарастания сложности и громоздкости получаемых математических соотношений. Кроме того, новый экспериментальный материал может в корне изменить представление исследователя о РО, что повлечет перестройку формализованной модели. Причем, ряд факторов в нашей предметной области оказывается случайным, и случайность возникает не в силу теоретических исследований, а определяется физико-техническими особенностями РО, заранее часто точно не прогнозируемыми.

Имеющиеся измерения, учитывая огромные возможности, которые ЭВМ дают для обработки больших массивов информации, можно использовать двояко: оценивать состояние РО, а также «подстраивать» модель. Подстройка модели относится к числу проблем, которые были немыслимы в «домашинный век», поскольку изменение модели необходимо производить в реальном времени эксперимента. Каким образом это осуществимо? Исходная нелинейная закономерность в текущий момент времени аппроксимируется линейной зависимостью, которая представляется частной моделью из класса упрощенных моделей, организованных в виде иерархической системы, описанной в [89, гл. I]. Выбор частной модели основан на измерениях, полученных к текущему моменту времени и априорных сведениях о РО с помощью ЭВМ, включенной в состав ИВК. При этом важную роль может играть профессиональный опыт и интуиция исследователя, работающего с ИВК — имеется возможность влияния на ход автоматического принятия решений.

После выбора линейной модели можно использовать весь комплекс алгоритмов обработки измерений и интерпретации полученных данных, хорошо в настоящее время обоснованных в линейном случае. Одновременно с этим должна производиться постоянная проверка адекватности РО — выбранная линейная модель. Здесь применимы методы, описанные в [89, гл. III]. Как только будет получена информация о наступлении рассогласования РО — ММ, необходимо выбрать иную упрощенную модель из иерархической системы моделей, и с ее помощью произвести дальнейшую обработку измерений. При наполнении указанной системы моделей конкретным материалом можно использовать результаты книги [90] и гл. I, II этого тома. При разработке управляющего аппроксимацией алгоритма, который призван решать многокритериальную задачу оптимизации на системе упрощенных моделей, следует применять методы векторной оптимизации, некоторые из которых изложены в гл. IV. При перестройке линейных моделей оказываются практически полезными методы, описанные в гл. III, успешно использующиеся в экспериментальной физике.

Этот подход допускает естественное обобщение, частично изложенное в [89, гл. I, § 5]. Многие задачи математического моделирования сложных технических систем требуют привлечения семейства $\mathfrak{M}$ математических моделей, определенным образом согласованных друг с другом. Для рассматриваемого класса проблем чаще всего модели имеют тип «вход — выход» и получаются друг из друга детализацией или агрегированием. Формализацию удобно провести таким образом, что в результате $\mathfrak{M}$ представляется как проективная система. В $\mathfrak{M}$ выделяются подсемейства моделей одинакового уровня детализации, что дает возможность изучать вопросы адекватности $\mathfrak{M}$ — РО, используя различные подходы, как детерминированные, так и стохастические. Опираясь на методы работ [89, 90], можно разработать алгоритмы выбора подсемейств моделей из $\mathfrak{M}$, обеспечивающих субадекватность. Дело в том, что «идеальную» модель, являющуюся проективным пределом $\mathfrak{M}$, обычно трудно реализовать, о чем уже говорилось выше. Поэтому и разрабатываются принципы выбора нескольких моделей из $\mathfrak{M}$, обеспечивающих получение информации об объекте, которую можно было бы получить из всего $\mathfrak{M}$. Некоторые общие результаты такого рода изложены в гл. I, § 2 и § 3. Оказывается, в ряде практически важных случаев эта задача является некорректно поставленной. Одним из возможных подходов к решению можно назвать метод регуляризации Тихонова. Интересно, что указанная формализация позволяет охватить достаточно широкий класс задач, выходящий за пределы исследования РТС и ИВК. Например, с помощью данной методики удается разработать численные приемы решения ряда проблем оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных (задачи подвижного управления нагревом тел сложной конфигурации точечным источником тепла и др.). Аналогичная методика применима и при исследовании некоторых операторных неравенств, являющихся обобщением известных краевых задач математической физики.

Родственное направление представляют интенсивно развиваемые в последнее время методы редукции данного ИВК к «идеальному» прибору [119, 120 и др.]. Технически это осуществляется путем перенастройки характеристик ИВК оптимальным или субоптимальным образом с помощью ЭВМ. Необходимый математический аппарат изложен в гл. III. Любопытно, что проведенные эксперименты показывают существенные преимущества «среднего» прибора, рассчитанного на работу с ЭВМ в режиме эксперимента, по сравнению с прибором, обладающим практически идеальными характеристиками (максимально возможной разрешимостью и т. п.), но не приспособленного к работе с ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Математика и диалектика.— Сиб. мат. журн., 1970, **11**, с. 243—263.
2. *Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.* Общая топология.— М. : Высш. шк., 1979.— 336 с.
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
4. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М. : Наука, 1977.— 244 с.
5. *Антонов А. М., Белов Ю. А.* Асимптотическое исследование задачи обтекания сверхзвуковым потоком газа тонких заостренных тел при интенсивном вдуве.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1976, **16**, № 6, с. 1609—1614.
6. *Антонов А. М., Белов Ю. А.* Асимптотика решения одного класса нелинейных краевых задач со свободной границей.— Там же, 1978, **18**, № 6, с. 1539—1548.
7. *Антонов А. М., Белов Ю. А., Комашенко А. П.* Решение некоторого класса нелинейных краевых задач, возникающих при исследовании проблемы сильного вдува.— В кн. : Нелинейные краевые задачи математической физики. Киев : ИМ АН УССР, 1973, с. 117—132.
8. *Антонов А. М., Хорошилов О. В.* Розрахунок параметрів газу в області вдуву при обтіканні пористого конусу під кутом атаки.— Докл. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 1, с. 52—55.
9. *Антонов А. М., Хорошилов А. В.* Решение модельной задачи об обтекании пористого конуса.— Там же, 1975, № 2, с. 129—132.
10. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики.— М. : Наука, 1979.— 295 с.
11. *Баклашов Н. И., Белюнов А. Н., Солодихин Г. М.* и др. Натурный эксперимент : Информ. обеспечение эксперим. исслед.— М. : Радио и связь, 1982.— 304 с.
12. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
13. *Батищев Д. И.* Задачи и методы векторной оптимизации.— Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1979.— 92 с.
14. *Баховец Е. Б., Цитрицкий О. Е.* О методе Лагранжа в задачах векторной оптимизации.— Вычисл. и прикл. математика, 1984, вып. 54, с. 82—86.
15. *Белов Ю. А., Макаров В. Л., Шелепов В. Г., Шульженко В. Б.* Верификация схем моделей для импульсных радиотехнических систем.— Кибернетика, 1981, № 5, с. 40—47
16. *Белов Ю. А., Осипов В. П., Шелепов В. Г.* К вопросу о проверке на ЭВМ адекватности математической модели сложной информационно-измерительной системы реальному объекту.— В кн.: Тез. докл. 2-й респ. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Киев, 1978, с. 35.
17. *Борисов Ю. П.* Математическое моделирование радиосистем.— М. : Сов. радио, 1976.— 296 с.
18. *Браславский Д. А., Петров В. В.* Точность измерительных устройств.— М. : Машиностроение, 1976.— 310 с.
19. *Брейтон Р. К., Хэтчел Г. Д., Санджовани-Винчентелли А. Л.* Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем.— ТИИЭР, 1981, **69**, № 10, с. 180—215.

20. *Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления.— Киев : Вища шк. 1975.— 328 с.
21. *Бусленко В. Н.* Автоматизация имитационного моделирования сложных систем.— М. : Наука, 1977.— 239 с.
22. *Бусленко В. Н., Чашник Е. И.* О стандартной форме представления данных для имитационного моделирования сложной системы.— Программирование, 1976, № 5, с. 74—78.
23. *Бусленко Н. П.* Сложные системы и имитационные модели.— Кибернетика, 1976, № 6, с. 50—59.
24. *Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем.— М. : Наука, 1978.— 399 с.
25. *Бусленко Н. П., Симонов В. М.* О категориальном представлении динамических систем.— Программирование, 1976, № 5, с. 65—73.
26. *Бурбаки Н.* Общая топология : Основ. структуры.— М. : Наука, 1968.— 272 с.
27. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1971.— 326 с.
28. *Вавилов С. И.* Избранные сочинения.— М. : Изд-во АН СССР, 1965.— Т. 3.
29. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
30. *Виленкин Н. Я.* Теория характеров топологических абелевых групп с заданной ограниченностью.— Изв. АН СССР. Сер. Математика, 1951, **15**, № 5, с. 439—462.
31. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М. : ГИФМЛ, 1961.— 408 с.
32. *Глушков В. М.* Математизация научного знания и теория решений.— Вопр. философии, 1979, № 1, с. 29—33.
33. *Глушков В. М., Гусев В. В., Марьянович Т. П., Санюк М. А.* Программные средства моделирования непрерывно-дискретных систем.— Киев : Наук. думка, 1975.— 152 с.
34. *Гренандер У.* Лекции по теории образов.— М. : Мир, 1979 — 1983.— Т.1—3.
35. *Гурин Л. Г.* О понятии точек равновесия и точек Парето в задачах со случайными факторами.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, **21**, № 6, с. 1411—1422.
36. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества.— М. : Сов. радио, 1975.— 368 с.
37. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.
38. *Диваков О. Г., Кузьмин В. А., Мадьяров Т. И., Шуров Ю. В.* Подход к автоматизации построения математических моделей.— В кн. : Пакеты прикладных программ : Методы и разраб. Новосибирск, 1981, с. 63—81.
39. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств : Избр. гл. Пер. с англ.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
40. *Дубов Ю. А.* Условия оптимальности в динамических многокритериальных задачах.— М., 1979.— 64 с. —(Препринт / ВНИИСИ).
41. *Дубов Ю. А., Епихова Н. В.* Об одном алгоритме поиска оптимальных решений в задачах автоматизации проектирования.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 8, с. 95—100.
42. *Дубовский С. В.* Проблемы согласования системы моделей. Сб. тр. ВНИИСИ, 1980, вып. 14, с. 40—48.
43. *Дышлевой П. С., Лукьянец В. С.* Проблемы статуса пространственно-временного континуума.— Вопр. философии, 1970, № 10, с. 25—35.
44. *Дюкова М. Г.* Гносеологические функции принципов в построении, интерпретации и оценке научной теории.— В кн. : Понятия, принципы, категории. Л. : ЛГПИ, 1975, с. 3—11.
45. *Елтаренко Е. А., Симонов С. В.* Методы решения многокритериальных задач.— М. : МИФИ, 1980.— 68 с.
46. *Жуковский Е. Л., Липцер Р. Ш.* О вычислении псевдообратных матриц.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, **15**, № 2, с. 489—492.
47. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.— 242 с.
48. *Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М.* Об асимптотическом характере формул М. А. Лаврентьева.— Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 2, с. 231—234.

49. *Ильин В. В.* Онтологическое и гносеологическое значение категорий качество и количество.— М. : Мысль, 1972.— 120 с.
50. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
51. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинкснер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.— М. : Гостехиздат, 1950.— 548 с.
52. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М. : Мир, 1964.— 256 с.
53. *Карлов В. Я., Корягин Д. А.* Пакеты прикладных программ.— М. : Знание, 1983.— 64 с.
54. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.— М.: Мир, 1971.— 392 с.
55. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные управления.— М. : Мир, 1977.— 656 с.
56. *Кендеров П.* О топологических векторных группах.— Мат. сб., 1970, **81**, № 4, с. 580—598.
57. *Кинг Дж.* Проверяющий компилятор.— В кн. : Средства отладки больших систем М. : Статистика, 1977, с. 23—40.
58. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп.— М. : Мир, 1972.— Т.2. 424 с.
59. *Коган И. М.* Прикладная теория информации.— М. : Радио и связь, 1981.— 216 с.
60. *Козлов В. П.* Емкость множества в пространстве сигналов и риманова метрика.— Докл. АН СССР, 1966, **166**, № 4, с. 779—782.
61. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы.— М. : Наука, 1972.— 200 с.
62. *Копнин П. В.* Введение в марксистскую гносеологию.— Киев : Наук. думка, 1966.— 282 с.
63. *Котов В. Е.* Введение в теорию схем программ.— Новосибирск : Наука, 1978.— 257 с.
64. *Краснощеков П. С.* Математика и проектирование.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика, 1979, № 4, с. 22—29.
65. *Краснощеков П. С., Морозов В. В., Федоров В. В.* Декомпозиция в задачах проектирования.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 7—17.
66. *Краснощеков П. С., Морозов В. В., Федоров В. В.* Последовательное агрегирование в задачах внутреннего проектирования технических систем.— Там же, № 5, с. 5—12.
67. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 264 с.
68. *Кристофидес Н.* Теория графов.— М. : Мир, 1978.— 432 с.
69. *Кудрявцев В. Б.* О полноте для функциональных систем.— Докл. АН СССР, 1981, **257**, № 2, с. 274—278.
70. *Куратовский К.* Топология.— М. : Мир, 1969.— Т. 2. 624 с.
71. *Курилин Б. И.* Модели сравнения технических систем по векторному критерию качества.— Вычисл. и прикл. математика, 1984, вып. 55, с. 114—118.
72. *Ласточкин Б. А.* Бесконечность и вероятность.— В кн. : Бесконечность и вселенная. М. : Мысль, 1969, с. 93—102.
73. *Лебедев А. Н.* Введение в теорию моделирования.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, 18.04.80, № 1531—80 Деп.— РЖ Математика.
74. *Левин В. А.* Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа.— Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газа, 1973, № 5, с. 97—104.
75. *Левин В. А., Липатов И. И., Нейланд В. Я.* Асимптотические методы исследования задач обтекания тел с интенсивным теплообменом.— Киев : О-во «Знание» УССР, 1982.— 20 с.
76. *Леонов А. И., Васенев В. Н., Гайдуков Ю. И. и др.* Моделирование в радиолокации.— М. : Сов. радио, 1979.— 264 с.
77. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 232 с.
78. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции.— М. : Наука, 1965.— 391 с.
79. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М. : Наука, 1970.— 392 с.
80. *Мановицкий В. И., Сурков Е. М.* Система имитационного моделирования дискретных процессов (ДИСМ).— Киев ; Одесса : Вища шк., 1981.— 96 с.

81. *Марковиц Г., Хауснер Б., Карр Г.* СИМСКРИПТ : Алгоритм. яз. для моделирования.— М. : Сов. радио, 1966.— 152 с.
82. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1977.— 455 с.
83. *Матвеева Н. С., Нейланд В. Я.* Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке.— Учен. зап. ЦАГИ, 1970, 1, № 5, с. 13—22.
84. *Математика* в современном мире.— М. : Мир, 1967.— 207 с.
85. *Математические* методы планирования эксперимента / Под ред. В. В. Пененко.— Новосибирск : Наука, 1981.— 256 с.
86. *Математическое* моделирование и исследование измерительных систем. Заключительный отчет по НИР № 411—77. Киевский гос. ун-т. Науч. рук. В. Л. Макаров. ГР № 77057726.— Киев, 1980.— 166 с.
87. *Математическое* обеспечение ЕС ЭВМ.— Минск : ИМ АН БССР, 1973.— Вып. 2. 272 с.
88. *Математическое* обеспечение ЕС ЭВМ.— Минск : ИМ АН БССР, 1976.— Вып. 10. 240 с.
89. *Математическое* обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем / Ю. А.. Белов, В. П. Диденко, Н. Н. Козлов и др.— Киев : Наук. думка, 1982.— 304 с.
90. *Математическое* обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Математические модели при измерениях / Ю. А. Белов, В. П. Диденко, Н. Н. Козлов и др.— Киев : Наук. думка, 1983.— 264 с.
91. *Матросов В. М., Васильев С. Н., Диваков О. Г., Тятюшин А. И.* О технологии моделирования и оптимизации сложных систем.— В кн. : Пакеты прикладных программ : Методы и разраб. Новосибирск : Наука, 1981, с. 21—35.
92. *Меркурьев В. В., Молдавский М. А.* Семейство сверток векторного критерия для нахождения точек множества Парето.—Автоматика и телемеханика, 1979, № 1, с. 110—121.
93. *Месарович М., Мако Д., Такахара Я.* Теория иерархических многоуровневых систем.— М. : Мир, 1973.— 328 с.
94. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем : Мат. основы.— М. : Мир, 1978.— 312 с.
95. *Михалевич В. С., Волкович В. Л.* Вычислительные методы исследования сложных систем.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
96. *Моисеев Н. Н.* К теории волн в завихренной жидкости.— Журн. прикл. математики и техн. физики, 1960, № 3, с. 81—89.
97. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа.— М. : Наука, 1981.— 487 с.
98. *Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М.* Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической.— Тр. МФТИ, 1959, № 3, с. 25—59.
99. *Мостепаненко А. М.* Проблема универсальности основных свойств пространства и времени.— Л. : Наука, 1969.— 229 с.
100. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений.— М. : Сов. радио, 1976.— 192 с.
101. *Наумов Г. Е.* Правило множителей для векторной задачи оптимизации с бесконечным множеством критериев.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1978, № 2, с. 36—38.
102. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа.— Там же. Сер. Механика жидкостей и газа, 1969, № 4, с. 22—32.
103. *Нейланд В. Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем.— Там же, 1970, № 4, с. 40—49.
104. *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации.— М. : Наука, 1979.— 384 с.
105. *Нозицкий П. В.* Основы информационной теории измерительных приборов.— Л. : Энергия, 1968.— 250 с.
106. *Обработка* и энтропийная интерпретация данных / С. М. Берсенев, Е. Л. Жуковский, В. М. Киселев.— Красноярск, 1982.— 32 с.— (Препринт/АН СССР. ВЦ СО; № 14.)
107. *Оре О.* Теория графов.— М. : Наука, 1968.— 352 с.
108. *Павловский Ю. Н.* Теория факторизации и декомпозиции управляемых динами-

ческих систем и ее приложения.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1984, № 2, с. 45—57.
109. *Панкратов Б. М., Полежаев Ю. В., Рудько А. К.* Взаимодействие материалов с газовым потоком.— М. : Машиностроение, 1976.— 224 с.
110. *Перельман И. И.* Оперативная идентификация объектов управления.— М. : Энергоиздат. 1982.— 272 с.
111. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Ульянов С. В.* Теория моделей в процессах управления.— М. : Наука, 1978.— 224 с.
112. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Ценность информации : Семиот. аспекты информ. теории упр. и кибернетики.— М., 1973.— 15 с.— (Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Сер. Техн. кибернетика; Т.5.)
113. *Петров Ю. А.* Логические функции категорий диалектики.— М. : Высш. шк., 1972.— 272 с.
114. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.— М. : Наука, 1982.— 256 с.
115. *Полляк Ю. Г.* Вероятностное моделирование на ЭВМ.— М. : Сов. радио, 1971.— 400 с.
116. *Полляк Ю. Г.* Основы теории моделирования сложных систем управления.— Тр. радиотехн. ин-та, 1977, № 29, с. 3—13.
117. *Постон Т., Стюарт Я.* Теория катастроф и ее приложения.— М. : Мир, 1980.— 524 с.
118. *Построение* современных систем автоматизированного проектирования / К. Д. Жук. А. А. Тимченко, А. А. Родионов и др.— Киев : Наук. думка, 1983.— 248 с.
119. *Пытьев Ю. П.* Псевдообратный оператор : Свойства и прил. Мат. сб., 1982, **118**, № 1, с. 19—49.
120. *Пытьев Ю. П.* Задачи редукции в экспериментальных исследованиях.— Там же, 1983, **120**, № 2, с. 240—272.
121. *Райков Д. А.* О *В*-полных топологических векторных группах.— Stud. Math., 1968, **31**, 295—305.
122. *Редько В. Н.* Теоретико-дефиниторные аспекты языков.— Пробл. кибернетики, 1976, вып. 31, с. 43—52.
123. *Редько В. Н.* Композиции программ и композиционное программирование.— Программирование, 1978, № 5, с. 3—19.
124. *Редько В. Н.* Основания композиционного программирования.— Там же, 1979, № 3, с. 3—13.
125. *Редько В. Н.* Семантические структуры программ.— Там же, 1981, № 1, с. 3—19.
126. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 592 с.
127. *Рузавин Г. И.* Проблема бесконечности в математике.— В кн.: Бесконечность и вселенная. М. : Мысль, 1969.— 325 с.
128. *Русанов В. В., Нажесткина Э. И.* Волновое сопротивление тел вращения степенной формы : (Осесимметр. обтекание).— М. ; 1972.— 34 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики № 33.)
129. *Садовничий В. А.* Теория операторов.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.— 296 с.
130. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.— Вестн. АН СССР, 1979, № 5, с. 38—49.
131. *Самарский А. А.* Вести широкую пропаганду идей и методов вычислительного эксперимента.— Там же, 1981, № 3, с. 61—65.
132. *Самарский А. А.* Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент.— Коммунист, 1983, № 17, с. 30—42.
133. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Вычислительный эксперимент в физике.— В кн.: Наука и человечество. М. : Знание, 1975, с. 280—291.
134. *Седых Л. Г.* Статистические аспекты теории математических моделей. — Л., 1982.— 207 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, 28.12.82, № 6344—82 Деп.
135. *Системное* проектирование средств отображения информации в АСУ / Б. М. Герасимов, Б. М. Егоров.— Киев : КВИРТУ, 1983.— 348 с.
136. *Скиба Г. Г.* Аэродинамика асимметричного деформируемого тела при его нестационарном движении со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкостей и газа, 1980, № 2, с. 162—167.

137. *Скурихин А. Д., Миронов В. Г., Квачев Ю. Е. и др.* Автоматизированная система обработки данных летных испытаний (Темп).— Упр. системы и машины, 1980, № 6.
138. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.— М. : Наука, 1981.— 82 с.
139. *Солодовников В. В., Бирюков В. Ф., Тумаркин В. И.* Принцип сложности в теории управления.— М. : Наука, 1977.— 344 с.
140. *Стратонович Р. Л.* Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов.— Радиотехника и электрон., 1960, **5**, № 11, с. 1751—1763.
141. *Тер-Крикоров А. М.* Усредненная волна на поверхности завихренной жидкости.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, **1**, № 6, с. 1077—1088.
142. *Тимофеев И. С.* Методологическое значение категорий «качество» и «количество».— М. : Наука, 1972.— 282 с.
143. *Тихонов А. Н.* Математическая модель.— БСЭ, 1974, т. 15, с. 480.
144. *Тихонов А. Н.* Вычислительная математика и научно-технический прогресс.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика, 1979, № 4, с. 5—13.
145. *Уиллер Дж.* Гравитация, нейтрино и Вселенная.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 403 с.
146. *Федотов А. М.* Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных.— Новосибирск : Наука, 1982.— 192 с.
147. *Фильтрация* и стохастическое управление в динамических системах : Пер. с англ. / Под ред. К. Т. Леондеса.— М. : Мир, 1980.— 407 с.
148. *Фомин В. Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация.— М. : Наука, 1984.— 288 с.
149. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы.— М. : Мир, 1965.— 343 с.
150. *Харафас Д. Н.* Системы и моделирование.— М. : Мир, 1967.— 312 с.
151. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М. : Мир, 1974.— 519 с.
152. *Хусаинов Д. Я., Цитрицкий О. Е.* Некоторые обобщения второго метода А. М. Ляпунова.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 2, с. 267—271.
153. *Хьюит Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ.— М. : Наука, 1975.— Т.1. 657 с.
154. *Цитрицкий О. Е.* Действительные характеры и выпуклые множества в топологических группах.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 3, с. 415—421.
155. *Цитрицкий О. Е.* О двойственности слабо локальных выпуклых групп.— Там же, 1976, **28**, № 5, с. 704—708.
155а. *Цитрицкий О. Е.* Об интегральных представлениях векторных мер на вполне регулярном пространстве.— Мат. заметки, 1976, **20**, № 3, с. 401—408.
156. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М. : Наука, 1968.— 488 с.
157. *Чечкин А. В.* Ультраоператоры в топологических пространствах. Их применение в практике проектирования систем различного назначения.— В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения : Тр. Всесоюз. шк.-семинара, Ноорус. 1981 г. Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 141—149.
158. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем — искусство и наука.— М. : Мир, 1978.— 418 с.
159. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 360 с.
160. *Шрайбер Т. Дж.* Моделирование на GPSS.— М. : Машиностроение, 1980.— 592 с.
161. *Шрейдер Ю. А.* Об одной модели семантической теории информации.— Пробл. кибернетики, 1965, вып. 13, с. 233—240.
162. *Эйнштейн* и современная физика.— М. : Гостехиздат, 1956.
163. *Яновская С. А.* Количество в математике.— В кн.: Филос. энцикл., 1969, т. 2, с. 560—562.
164. *Athans M., Geering H. P.* Necessary and sufficient conditions for differentiable nonscalar — valued functions to attain extrema.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, **18**, N 2, p. 132—139.
165. *Bod P.* On closed sets having a least element.— Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1976, **117**, p. 23—34.
166. *Brennan R. D.* Continuous system modeling programs : State of programming

languages.— In: Proc. working Conf. simulat. progr. lang. / Ed. T. N. Buston. Amsterdam : North-Holland publ. co., 1968, p. 371—396.
167. *Cesari L., Suryanarayana M. B.* Existence theorems for pareto optimization; multi-valued and banach space valued functionals.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **244**, p. 37—65.
168. *Cole J. D., Aroesty J.* The blowhard problem inviscid flow with surface injection.— Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1968, **11**, N 7, p. 1167—1183.
169. *Corley H. W.* An existence result for maximization with respect to cones.— J. Optimiz. Theory and Appl., 1980, **31**, N 2, p. 277—281.
170. *Dinculeanu N.* Vector mesures.— Berlin, 1966.— 432 p.
171. *Dudewicz E. J.* Statistics in simulation: how to desi on for selecting the best alternative.— In: Winter simulation conf. New Jersey, 1976, vol. 1, p. 66—71.
172. *Emanuel Y.* Blowing from a porous cone or wedge when contact surface is straight.— AIAA Journal, 1967,
173. *Geering H. P., Athans M.* The infimum principle.— IEEE Trans. Automat Contr., 1974, **19**, N 5, p. 485—494.
174. *Gomez A. V., Gurry D. M., Johnston C. G.* Radiative, ablative and active cooling thermal protection studies for the leading edge of a fixed stroight wing space shuttle.— AIAA Pap., 1971, N 71.
175. *Hayes A.* Additive functionals on groups.— Proc. Cambridge, Phil. Soc., 1962, **58**, p. 196—205.
176. *Hoare C. A. R.* An axiomatic basis of computer programming.— Comm. ACM, 1969, **12**, N 10, p. 576—583.
177. *Inger G. R., Gaitatzes G. A.* Strong blowing into laminar viscous flows around two dimensional and axisymmetric supersonic bodies.— AIAA Pap., 1968, N 719.
178. *Jacoby S. L., Kowalik J. S.* Mathematical modeling with computers.— New Jersey : Prentice—Hall, 1980.— 292 p.
179. *Jakubowski R., Krol J.* Grafy funkcyjnew zastosowaniu do opisu i symulacji zlozonych systemow dynamicznych.— Podst. sterow., 1973, **3**, z. 2, p. 131—151.
180. *Jakubowski R., Krol J.* Reprezentacja komputerowa struktury zlozonych systemow.— Ibid., 1974, **4**, z. 4, p. 371—379.
181. *Jakubowski R.* Rozszerzone grafy funkcyjne w modelowaniu i symulacji systemow.— Ibid., 1979, **9**, z. 2, p. 189—206.
182. *Jacubowski R., Szelc A.* Functional graphs as an extension of petri nets. 1. Marking processes over functional graphs.— Ibid., 1976, **6**, z. 4, p. 401—412.
183. *Jakubowski R., Szelc A.* Quasi-linguistic representation of systems.— Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. techn., 1977, **25**, N 12, p. 67—74.
184. *Jakubowski R., Szelc A.* Quasi-linguistic representation of systems and its application.— Podst. sterow., 1977, **7**, z. 4, p. 337—349.
185. *Jameson G.* Ordered linear spaces.— Lect. Notes Math., 1970, **141**, 154 p.
186. *Kahane J.-P.* Brownian motion and classical analysis.— Bull. London. Math. Soc., 1976, **8**, p. 145—155.
187. *Kluvanek I., Knowles G.* Vector measures and control systems.— New Jersey : Springer, 1976.— 180 p.
188. *Kubota, Fernandez F. L.* Boundary layer flows with Injection and heat Transfer.— AIAA Journal, 1968, N 1.
189. *Legett R. W., Williams L. R.* A reliability index for models.— Ecol. Model., 1981, **13**, N 4, p. 303—312.
190. *MacLane S.* Categories for the working mathematician.— New Jersey : Springer, 1971.
191. *MacNeille H. M.* Partially ordered sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **42**, p. 416—460.
192. *Manna Z.* Mathematical theory of computation.— New York : McGraw—Hill book co., 1974.— 226 p.
193. *Manna Z., Ness S., Vuillemin J.* Inductive methods for proving properties of programs.— Comm. ACM, 1973, **16**, N 8, p. 491—502.
194. *Pareto V.* Coursa déconomie politique.— Lausanne : Rouge, 1896.
195. *Peressini A. L.* Ordered topological vector spaces: — New Jersey : Harper, 1967.— 228 p.
196. *Ritter K.* Optimization theory in linear spaces. p. I, II, III.— Math. Annal., 1969, **182**, p. 189—206; **183**, p. 169—180; **184**, p. 133—154.

197. *Scoville C. L., Gorsuch P. D.* Thermal protection for the space shuttle.— Raumfahrforschung, 1971, H. 2, p. 38.
198. *Shannon R. E.* Simulation : a Survey with Research Suggestions.— AIIE Trans., 1975, 7, N 3, p. 289—301.
199. *Speckhart F. H., Green W.* A Guide to using CSMP — the continuous system modeling program.— New Jersey : Prentice—Hall, 1976.— 325 p.
200. *Uhl J. J., Jr.* The range of vector-valued measure.— Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 23, N 1, p. 158—163.
201. *Wallace J., Kemp N.* Similarity solutions to the massive blowing problem.— AIAA Journal, 1969, N 8, p. 34—42.
202. *Zadeh L. A.* Optimality and non-scalar-valued performance criteria.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1963, 8, p. 59—60.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юрий Анатольевич Белов
Николай Николаевич Козлов
Иван Иванович Ляшко
Владимир Леонидович Макаров
Олег Евгеньевич Цитрицкий

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА
Т. 3

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Утверждено к печати ученым советом Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко

Редактор М. К. ПУНИНА
Оформление художника Д. Д. ГРИБОВА
Художественный редактор И. П. АНТОНЮК
Технический редактор Т. С. БЕРЕЗЯК
Корректоры О. Е. ИСАРОВА,
Е. А. ДУБАРЬ, Р. С. КОГАН, С. Д. СЕМЕНОВА

Информ. бланк № 5749
Сдано в набор 29.03.85. Подп. в печ. 17.09.85. БФ 01664. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 17,0 Усл. кр.-отт. 17,38. Уч.-изд. л. 18,05. Тираж 2550 экз. Заказ 5-444. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, 57, ул. Довженко, 3, на книжной фабрике «Коммунист» 310012, Харьков 12, ул. Энгельса 11.

3 р. 10 к.

«НАУКОВА ДУМКА»