

СБОРНИК
ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Под редакцией А. В. ЕФИМОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРЕБОТАННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.11
С23
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

Э. А. ВУКОЛОВ, А. В. ЕФИМОВ, В. Н. ЗЕМСКОВ,
А. Ф. КАРАКУЛИН, В. В. ЛЕСИН, А. С. ПОСПЕЛОВ,
А. М. ТЕРЕЩЕНКО

Сборник задач по математике для вузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособ./Вуколов Э. А., Ефимов А. В., Земсков В. Н. и др.; Под ред. А. В. Ефимова.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 304 с.— ISBN 5-02-014457-6 (Ч. 4).

Сборник содержит задачи и упражнения по специальным курсам математики: методам оптимизации, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Во всех разделах приводятся необходимые теоретические сведения. Все задачи снабжены ответами, а наиболее сложные — решениями. Решение части задач предполагает использование ЭВМ.

1-е изд.— 1984 г.

Для студентов вузов.

Рецензент
кафедра специальных курсов высшей математики
Московского энергетического института
(заведующий кафедрой профессор С. А. Ломов)

С $\frac{1602070000-016}{053(02)-90}$ 56-90

ISBN5-02-014457-6 (Ч. 4)
ISBN5-02-014338-3

© «Наука».
Физматлит, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	6
Глава 16. Методы оптимизации	7
§ 1. Численные методы минимизации функций одной переменной	7
1. Основные понятия. Прямые методы минимизации (7). 2. Методы минимизации, основанные на использовании производных функции (20).	
§ 2. Безусловная минимизация функций многих переменных	23
1. Выпуклые множества и выпуклые функции (23). 2. Методы безусловной минимизации, основанные на вычислении первых производных функции (26). 3. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции (32).	
§ 3. Линейное программирование	34
1. Постановки задач линейного программирования. Графический метод решения (34). 2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования (45). 3. Целочисленное линейное программирование (58).	
§ 4. Нелинейное программирование	68
1. Задачи, сводящиеся к нелинейному программированию (68). 2. Методы возможных направлений (75). 3. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования (84). 4. Методы штрафных и барьерных функций (91).	
§ 5. Дискретное динамическое программирование	96
§ 6. Вариационное исчисление	111
1. Предварительные сведения. Простейшая задача вариационного исчисления (111). 2. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления (117). 3. Задачи с подвижными границами (121). 4. Задачи на условный экстремум (125). 5. Прямые методы вариационного исчисления (130).	
Глава 17. Уравнения в частных производных	138
§ 1. Основные задачи и уравнения математической физики	138
1. Вывод уравнений и постановка задач математической физики (138). 2. Приведение уравнений к каноническому виду (141).	
§ 2. Аналитические методы решения уравнений математической физики	145

	1. Метод Даламбера (145). 2. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы (148). 3. Ортогональные ряды (154). 4. Метод Фурье решения уравнений математической физики (156).	
§ 8.	Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных	169
	1. Основные понятия метода сеток (169). 2. Численное решение краевых задач методом сеток (183).	
Глава 18.	Интегральные уравнения	188
§ 1.	Интегральные уравнения Вольтерра	188
	1. Уравнения Вольтерра 2-го рода: основные понятия, связь с дифференциальными уравнениями (188). 2. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты (194). 3. Уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки (198). 4. Уравнения Вольтерра 1-го рода (202).	
§ 2.	Интегральные уравнения Фредгольма	207
	1. Основные понятия. Метод последовательных приближений и резольвента для уравнений Фредгольма 2-го рода (207). 2. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром (213). 3. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма (216). 4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром (223).	
§ 3.	Численные методы решения интегральных уравнений	229
Ответы	236
Список литературы	299
Содержание частей 1—3	300

*Светлой памяти
Анатолия Федоровича
Каракулина
посвящается*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая четвертая часть сборника задач по математике для вузов содержит существенно переработанные главы 16—18 первого издания третьей части сборника (специальные курсы). Глава 16 «Методы оптимизации» написана заново. Во всех главах более четкими и лаконичными стали теоретические введения. Значительно увеличено число простых типовых задач. Исправлены неточности и опечатки в условиях задач, примерах и ответах.

В главе 16 «Методы оптимизации» расширен круг рассматриваемых методов одномерной минимизации, безусловной минимизации функций многих переменных, нелинейного программирования, включен материал по целочисленному линейному программированию, а также некоторым задачам вариационного исчисления. Больше внимание уделено методической стороне изложения материала: более простыми и полными стали теоретические введения, увеличено число разобранных примеров, в каждом разделе теперь предлагаются как простые, так и сложные задачи.

Изменения в главах 17 и 18 относятся в основном к численным методам. Более систематичным и полным стало изложение метода сеток в § 3 главы 17. В главу 18 добавлен § 3 «Численные методы решения интегральных уравнений».

Во время подготовки рукописи настоящего тома к изданию скорострительно скончался один из членов авторского коллектива доцент, кандидат физико-математических наук А. Ф. Каракулин, активно и плодотворно работавший над рукописью всех четырех частей задачника. В частности, им был подготовлен материал главы 18 «Интегральные уравнения».

§ 1. Численные методы минимизации функций одной переменной

1. Основные понятия. Прямые методы минимизации. Пусть на множестве $U \subset \mathbb{R}$ определена функция $f(x)$. Под *минимизацией функции* $f(x)$ на множестве U будем понимать решение следующей задачи: найти хотя бы одну точку минимума x^* и минимум $f^* = f(x^*)$ этой функции на множестве U .

Задача нахождения точки максимума и максимального значения функции $f(x)$ сводится к задаче минимизации заменой $f(x)$ на $-f(x)$, поэтому ниже будут рассматриваться только задачи на минимизацию.

Напомним, что число $x^* \in U$ называется *точкой абсолютного (глобального) минимума* или просто *точкой минимума* функции $f(x)$ на множестве U , если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in U$. Значение $f^* = \min_U f(x)$ называется *абсолютным (глобальным) минимумом* или

просто *минимумом* $f(x)$ на U . Множество всех точек минимума функции $f(x)$ на множестве U будем обозначать U^* .

Число $\tilde{x} \in U$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ для всех $x \in U_\delta = \{x \mid x \in U, |x - \tilde{x}| < \delta\}$. Значение $f(\tilde{x})$ называется *локальным минимумом* $f(x)$. Всякая точка глобального минимума $f(x)$ является и точкой локального минимума этой функции. Обратное, вообще говоря, неверно.

В задачах 16.1—16.4 найти множество точек минимума U^* функции $f(x)$ на множестве U .

16.1. $f(x) = \sin^2 \pi x$, $U = \mathbb{R}$.

16.2. $f(x) = |x - x^2|$. $U = [-1; 2]$.

16.3. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$, $U = (0; 1]$.

16.4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| > 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad U = \mathbb{R}$.

16.5. Доказать, что линейная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x) = Ax + B$, $A \neq 0$, достигает минимума на этом отрезке только в точке $x = a$ или $x = b$.

Отметим, что минимум функции $f(x)$ на множестве U может и не существовать, т. е. множество U^* может быть пустым. В этом случае используют обобщение понятия минимума — *точную нижнюю грань* функции $f(x)$ на множестве U . Пусть $f(x)$ ограничена снизу на U , т. е. $f(x) \geq A > -\infty$ для всех $x \in U$. Число f_* называется точной нижней гранью функции $f(x)$ на множестве U ($f_* = \inf_U f(x)$), если $f(x) \geq f_*$ при всех $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in U$ такая, что $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$. Для неограниченных снизу функций $f(x)$ полагают $f_* = -\infty$. Если $U^* \neq \emptyset$, то $f_* = \inf_U f(x) = f^* = \min f(x)$.

Пример 1. Пусть $f(x) = 1/x$, $U = [1; +\infty)$. Показать, что множество U^* точек минимума функции $f(x)$ на множестве U пусто и $f_* = \inf_U f(x) = 0$.

◀ Предположим, что $U^* \neq \emptyset$, т. е. существует хотя бы одна точка минимума $x^* \in U$ функции $f(x)$ на U . Возьмем произвольное число $x > x^*$. Тогда $x \in U$ и $f(x^*) = 1/x^* > 1/x = f(x)$, т. е. x^* не является точкой минимума $f(x)$ на U . Полученное противоречие и доказывает, что множество U^* точек минимума пусто.

Покажем, что $f_* = \inf_U f(x) = 0$. Очевидно, для произвольного $x \in [1; +\infty)$ справедливо неравенство $f(x) = 1/x > 0$. Далее, пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $x_\varepsilon > \max(1/\varepsilon, 1)$. Тогда $x_\varepsilon \in U$ и $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. Поэтому $f_* = 0$. ▶

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$, $U = (0; 1]$. Найти $f_* = \inf_U f(x)$.

◀ Функция $f(x)$ не ограничена снизу на множестве U , поэтому по определению точной нижней грани полагаем $f_* = -\infty$. ▶

В случае $U^* = \emptyset$ под задачей минимизации $f(x)$ на множестве U понимают определение $f_* = \inf_U f(x)$, полагая $f^* = f_*$. При этом точка минимума x^* не ищется.

В задачах 16.6—16.11 убедиться, что множество точек минимума функции $f(x)$, заданной на множестве U , пусто, и найти $f_* = \inf_U f(x)$.

16.6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $U = \mathbb{R}$.

16.7. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, $U = (-\infty; 5)$.

16.8. $f(x) = x \sin x$, $U = \mathbb{R}$.

16.9. $f(x) = \arctg x$, $U = (-\infty; -1]$.

16.10. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $U = [-2; 2]$.

16.11. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, а) $U = (0; 1)$; б) $U = (1; +\infty)$.

16.12. Показать, что если $\min_U f(x)$ существует, то

$$\inf_U f(x) = \min_U f(x).$$

Существование локальных минимумов функции $f(x)$, отличных от абсолютного, почти всегда затрудняет поиск точек $x^* \in U^*$, поэтому многие приближенные методы минимизации применимы только тогда, когда любой локальный минимум $f(x)$ является

одновременно и глобальным. Один из классов функций, удовлетворяющих этому условию, составляют *унимодальные функции*.

Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна на $[a; b]$ и существуют числа α и β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие, что:

- 1) если $a < \alpha$, то на отрезке $[a; \alpha]$ $f(x)$ монотонно убывает;
- 2) если $\beta < b$, то на отрезке $[\beta; b]$ $f(x)$ монотонно возрастает;
- 3) при $x \in [\alpha; \beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a; b]} f(x)$.

Отметим, что возможно вырождение в точку одного или двух из отрезков $[a; \alpha]$, $[\alpha; \beta]$ и $[\beta; b]$. Некоторые варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции показаны на рис. 204—207.

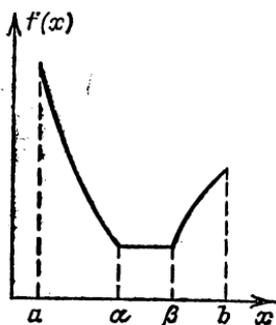


Рис. 204

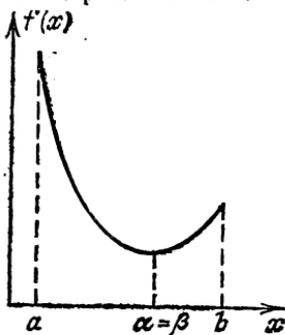


Рис. 205

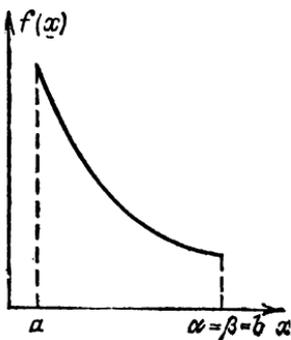


Рис. 206

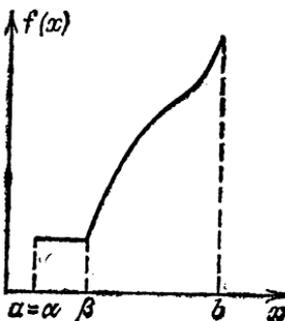


Рис. 207

Множество функций, унимодальных на отрезке $[a; b]$, будем обозначать $Q[a; b]$.

Для проверки унимодальности функции $f(x)$ на практике обычно используют следующие критерии:

- 1) если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x) \in Q[a; b]$;
- 2) если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то $f(x) \in Q[a; b]$.

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ унимодальна на отрезке $[3; 5]$.

◀ Вторая производная функции $f(x)$ равна $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72$. Корни полученного квадратного трехчлена $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если $x \geq 3$ и, в частности, при $x \in [3; 5]$. Используя второй критерий унимодальности, получаем, что $f(x) \in Q[3; 5]$. ▶

В задачах 16.13—16.16 убедиться в унимодальности функций $f(x)$ на указанных отрезках $[a; b]$.

16.13. $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$, $[1; 2]$.

16.14. $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$, $[0; \pi/4]$.

16.15. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$, $[0; 2]$.

16.16. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$, $[0; 1]$.

16.17. Показать, что любая из точек глобального минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$ является и точкой ее локального минимума.

16.18. Показать, что если $f(x) \in Q[a; b]$ и $a \leq c < d \leq b$, то $f(x) \in Q[c; d]$.

16.19. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Показать, что

а) если $f(x_1) > f(x_2)$, то $U^* \subset [x_1; b]$, а если $f(x_1) < f(x_2)$, то $U^* \subset [a; x_2]$;

б) если $f(x_1) = f(x_2)$, то отрезок $[x_1; x_2]$ содержит хотя бы одну точку $x^* \in U^*$;

в) если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a; x_2]$, а при $f(x_1) > f(x_2)$ имеем $x^* \in [x_1; b]$, где x^* — одна из точек минимума $f(x)$ на $[a; b]$.

16.20. На какие 3 части следует разбить отрезок $[-1; 2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x) = ||x(x-1)| - 1|$ была унимодальной?

16.21. Найти максимальное значение b , при котором функция $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ унимодальна на отрезке $[-5; b]$.

16.22. Будет ли функция $f(x) = ax^3 - 3x^2 - 10$ унимодальной на отрезке $[1; 2]$ при $a > 3$?

Большую группу приближенных методов минимизации функций составляют прямые методы минимизации, основанные на вычислении только значений минимизируемой функции в некоторых точках и не использующие значений ее производных.

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и требуется найти какую-либо из точек минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$. Разобьем $[a; b]$ на n равных частей точками деления $x_i = a + i(b-a)/n$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, где $n \geq (b-a)/\varepsilon$. Вычислив значения $f(x)$ в этих точках, путем сравнения найдем точку x_m , для которой

$$f(x_m) = \min_{0 \leq i < n} f(x_i). \quad (1)$$

Далее полагаем $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$. При этом максимальная погрешность e_n определения точки x^* равна $e_n = (b-a)/n$.

Пример 4. Найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1,5; 2]$. Точку x^* найти с погрешностью $\varepsilon = 0,05$.

◀ $f(x) \in Q[1,5; 2]$, так как $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12 > 0$ при $x \in [1,5; 2]$ (проверьте!).

Выбрав $n = \frac{2-1,5}{0,05} = 10$, вычислим значения $f(x_i)$, $x_i = 1,5 + i \cdot 0,05$, $i = 0, 1, \dots, 10$, поместив их в таблице 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

x_i	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
$f(x_i)$	-89,4	-90,2	-91,2	-91,8	-92,08	-92,12
x_i	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	
$f(x_i)$	-91,9	-91,4	-90,5	-89,4	-88,0	

Из таблицы 1.1 находим $x^* \approx 1,75$, $f^* \approx -92,12$. ▶

16.23*. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$, x_m — точка, найденная из условия (1), x^* — одна из точек минимума $f(x)$ на $[a; b]$. Показать, что если $1 \leq m \leq n-1$, то $x^* \in [x_{m-1}; x_{m+1}]$; если $m=0$, то $x^* \in [x_0; x_1]$; если $m=n$, то $x^* \in [x_{n-1}; x_n]$.

16.24. Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на n частей точками $x_i = a + (b-a)i/n = a + \Delta i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрев функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta-\delta}(x-x_{m+1}+\delta) & \text{при } x \in [a; x_{m+1}-\delta], \\ \frac{2}{\delta}(x-x_{m+1}+\delta) & \text{при } x \in [x_{m+1}-\delta; b], \end{cases}$$

где $1 \leq m \leq n-1$, $0 < \delta < \Delta$, показать, что абсолютная погрешность определения точки минимума унимодальной функции методом перебора может быть как угодно близкой к $\Delta = \frac{b-a}{n} = \varepsilon_n$.

16.25. Составить блок-схему алгоритма минимизации функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ методом перебора с помощью ЭВМ.

В задачах 16.26—16.33 методом перебора найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* .

- 16.26. $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$, $[1; 1,5]$, $\epsilon = 0,05$.
 16.27. $f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x$, $[0; \pi/4]$, $\epsilon = 0,03$.
 16.28. $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}$, $[0; 1]$, $\epsilon = 0,1$.
 16.29. $f(x) = x^4 + 4x^2 - 32x + 1$, $[1,5; 2]$, $\epsilon = 0,05$.
 16.30. $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$, $[1; 1,5]$, $\epsilon = 0,05$.
 16.31. $f(x) = x^3 - 3 \sin x$, $[0,5; 1]$, $\epsilon = 0,05$.
 16.32. $f(x) = 5x^2 - 8x^{5/4} - 20x$, $[3; 3,5]$, $\epsilon = 0,02$.
 16.33. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x$, $[1,5; 2]$, $\epsilon = 0,02$.

16.34. Пусть $f(x)$ — унимодальная дифференцируемая на $[a; b]$ функция, причем $|f'(x)| \leq M$ при $x \in [a; b]$. Оценить погрешность δ_n нахождения минимума f^* методом перебора при разбиении отрезка $[a; b]$ на n частей.

Метод перебора, предполагающий предварительный выбор точек x_i , $i=0, 1, \dots, n$, называется также *пассивной стратегией* поиска точки минимума x^* . На практике точки x_i выбираются заранее, когда удобно провести $n+1$ независимых экспериментов по измерению значений $f(x)$, а последовательное измерение этих значений трудоемко или невозможно, например ввиду нехватки времени. Однако использование уже полученной в предыдущих экспериментах информации о функции $f(x)$ для выбора очередной точки x_i измерения (вычисления) $f(x)$ приводит к более эффективному поиску точки x^* . Методы минимизации, в которых точки x_i определяются в процессе поиска точки минимума с помощью найденных ранее значений функции $f(x)$ называются *последовательными методами*.

Метод деления отрезка пополам является простейшим последовательным методом минимизации. Он позволяет для любой функции $f(x) \in Q[a; b]$ построить последовательность вложенных отрезков $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_{n-1}; b_{n-1}] \supset [a_n; b_n]$, каждый из

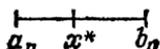
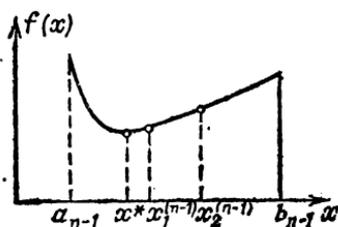


Рис. 208

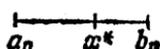
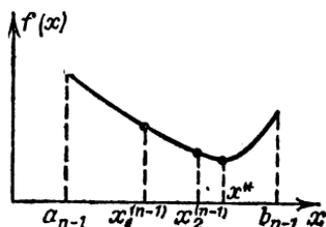


Рис. 209

которых содержит хотя бы одну из точек минимума x^* функции $f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ — требуемая точность определения точки x^* . Выбрав $\delta \in (0; 2\epsilon)$, построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_1^{(n)}\}$ в $\{x_2^{(n)}\}$, $n=0, 1, \dots$, используя рекуррентные формулы $a_0 = a$,

$$b_0 = b;$$

$$x_1^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} - \delta)/2, \quad x_2^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} + \delta)/2; \quad (2)$$

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = x_2^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) \leq f(x_2^{(n-1)}),$$

$$a_n = x_1^{(n-1)}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}).$$

Переход от отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ к отрезку $[a_n; b_n]$ методом деления отрезка пополам иллюстрируется на рис. 208, если $f(x_1^{(n-1)}) < f(x_2^{(n-1)})$, и на рис. 209, если $f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)})$.

Полагая $x^* \approx (a_n + b_n)/2$, находим x^* с абсолютной погрешностью, не превосходящей величины

$$\epsilon_n = (b_n - a_n)/2 = (b - a - \delta)/2^{n+1} + \delta/2. \quad (3)$$

Используя условие $\epsilon_n \leq \epsilon$, из последнего выражения можно найти необходимое число шагов n для обеспечения требуемой точности ϵ . Однако на практике часто поступают иначе: определив границы отрезка $[a_n; b_n]$, вычисляют ϵ_n по формуле (3) и сравнивают с заданной точностью ϵ .

Пример 5. Решить пример 4 методом деления отрезка пополам.

◀ Положим $\delta = 0,02 < 2\epsilon = 0,1$. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ по формулам (2), записывая результаты вычислений в таблицу 1.2:

Таблица 1.2

n	a_n	b_n	$\epsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
0	1,5	2	0,25	1,74	1,76	-92,135	-92,096	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	1,5	1,76	0,13	1,62	1,64	-91,486	-91,696	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1,62	1,76	0,07	1,68	1,70	-91,995	-92,084	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	1,68	1,76	0,04					$\epsilon_4 < \epsilon$, точность достигнута

Следовательно, $x^* \approx 1,72$, и $f^* \approx f(1,72) = 92,13$. ▶

Для увеличения скорости сходимости метода величину $\delta \in (0; 2\epsilon)$ целесообразно выбирать как можно меньшей, однако этот выбор ограничен снизу используемым количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x . В любом случае δ должно быть больше машинного нуля применяемого вычислительного средства.

16.35. Показать, что каждый из отрезков $[a_n; b_n]$, $n=1, 2, \dots$, полученных методом деления отрезка пополам, содержит хотя бы одну из точек минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$.

16.36. Показать, что для $f(x) \in Q[a; b]$ n шагов метода деления отрезка пополам обеспечивает вычисление точки минимума x^* на отрезке $[a; b]$ с абсолютной погрешностью, не превосходящей

$$\epsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

16.37. Найти число шагов n метода деления отрезка пополам, необходимое для определения точки минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$ на отрезке $[a; b]$ с точностью $\epsilon > 0$.

16.38. Достаточно ли вычисления 10 значений функции $f(x) \in Q[0; 1]$ для определения ее точки минимума на отрезке $[0; 1]$ с точностью $\epsilon = 0,02$ методом деления отрезка пополам?

16.39*. Сравнить необходимые количества вычисленных значений N_d и N_n функции $f(x)$ при поиске ее точки минимума на отрезке длины 1 с точностью $\epsilon = 10^{-5}$ методами деления отрезка пополам и перебора соответственно.

16.40. Составить блок-схему алгоритма метода деления отрезка пополам, рассчитанную на использование ЭВМ.
В задачах 16.41—16.48 методом деления отрезка пополам найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ϵ и минимум f^* .

16.41. $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $[-5; -4]$, $\epsilon = 0,02$.

16.42. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$, $[1,5; 2]$, $\epsilon = 0,05$.

16.43. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, $[-1; 0]$, $\epsilon = 0,1$.

16.44. $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$, $[0,5; 1]$, $\epsilon = 0,05$.

16.45. $f(x) = x^2 + 2 \left(x \lg \frac{x}{e} - 2 \right)$, $[1,5; 2]$, $\epsilon = 0,01$.

16.46. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x$, $[0; 0,5]$, $\epsilon = 0,01$.

16.47. $f(x) = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$, $[3,5; 4,5]$, $\epsilon = 0,02$.

16.48. $f(x) = e^x - \frac{1}{3} x^3 + 2x$, $[-1,5; -1]$, $\epsilon = 0,01$.

Метод золотого сечения также является последовательным методом минимизации. Опираясь на свойства золотого сечения отрезка, этот метод использует найденные значения $f(x)$ более рационально, чем метод деления отрезка пополам (см. задачу 16.53), что позволяет переходить к очередному отрезку, содержащему точку x^* после вычисления одного, а не двух значений $f(x)$. Деление отрезка на две неравные части так, что отношение длины всего отрезка к длине

большой его части равно отношению длины большей части к длине меньшей части, называется *золотым сечением этого отрезка*.

Золотое сечение отрезка $[a; b]$ осуществляется двумя точками

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a), \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (b - a), \quad (4)$$

причем x_1 есть вторая точка золотого сечения отрезка $[a; x_2]$, а x_2 — первая точка золотого сечения отрезка $[x_1; b]$.

Зная одну из точек золотого сечения отрезка $[a; b]$, другую можно найти по одной из формул

$$x_1 = a + b - x_2, \quad x_2 = a + b - x_1. \quad (5)$$

Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и требуется найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на $[a; b]$. Построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}, \quad b_n = x_2^{(n-1)}, \quad \bar{x}_n = x_1^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) \leq f(x_2^{(n-1)}); \\ a_n &= x_1^{(n-1)}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \bar{x}_n = x_2^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (6)$$

$n = 2, 3, \dots$, где $a_1 = a$, $b_1 = b$, $x_1^{(n-1)}$ и $x_2^{(n-1)}$ — первая и вторая точки золотого сечения (4) отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$.

Для определения чисел a_n , b_n , \bar{x}_n по найденным a_{n-1} , b_{n-1} , \bar{x}_{n-1} необходимо выполнить следующие операции:

1) найти одну из точек золотого сечения отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ по известной другой точке \bar{x}_{n-1} , используя формулы (5)¹⁾;

2) вычислить значение $f(x)$ во вновь найденной точке золотого сечения (значение в другой точке \bar{x}_{n-1} уже вычислено на одном из предыдущих шагов);

3) сравнить значения $f(x_1^{(n-1)})$ и $f(x_2^{(n-1)})$ и найти a_n , b_n , x_n по формулам (6).

Таким образом, на каждом шаге определения a_n , b_n и \bar{x}_n $n = 2, 3, \dots$, требуется вычисление одного значения $f(x)$. Положив $x^* \approx \bar{x}_n$, найдем точку минимума x^* с точностью ε_n :

$$|x^* - \bar{x}_n| \leq \varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a),$$

откуда следует, что число шагов n метода золотого сечения, обеспечивающее заданную точность ε нахождения точки x^* , должно удовлетворять неравенству

$$n \geq \ln \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right) / \ln \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \approx -2,1 \ln \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right). \quad (7)$$

Пример 6. Решить пример 3 методом золотого сечения.

¹⁾ При определении x^* с большой точностью, чтобы избежать накопления ошибок округления, обычно точки золотого сечения отрезка $[a_n; b_n]$ находят по формулам (4) и в качестве $x_1^{(n-1)}$ и $x_2^{(n-1)}$ используют \bar{x}_{n-1} и ту из найденных точек, которая больше отличается от \bar{x}_{n-1} .

◀ Вычисления проведем по формулам (6), представив результаты в таблице 1.3, где стрелками отмечены сохраняющиеся при переходе к следующему шагу значения.

Т а б л и ц а 1.3

n	ε_n	a_n	b_n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
1	0,309	1,5	2	1,691	1,809	-92,049	-91,814	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(1)}), b_2 = x_2^{(1)}$
2	0,191	1,5	1,809	1,618	1,691	-91,464	-92,049	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)}), a_3 = x_1^{(2)}$
3	0,118	1,618	1,809	1,691	1,736	-92,049	-92,138	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)}), a_4 = x_1^{(3)}$
4	0,073	1,691	1,809	1,736	1,764	-92,138	-92,083	$f(x_1^{(4)}) < f(x_2^{(4)}), b_5 = x_2^{(4)}$
5	0,045				1,736		-92,138	$\varepsilon_n < \varepsilon$, точность достигнута

Из таблицы 1.3 получаем $x^* \approx \bar{x}_5 = 1,736$, $f^* \approx f(\bar{x}_5) = -92,138$. Заметим, что если воспользоваться формулой (7), то необходимое число шагов n можно определить заранее. В нашем случае $n \geq 4,79$, т. е. $n=5$, и отпадает необходимость во втором столбце таблицы 1.3

16.49. Показать, что каждая из точек $x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)$ и $x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ осуществляет золотое сечение отрезка $[a; b]$.

16.50. Пусть x_1 и x_2 — точки золотого сечения отрезка $[a; b]$. Показать, что x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка $[a; x_2]$, а x_2 — первой точкой золотого сечения отрезка $[x_1; b]$.

16.51. Пусть x_1 и x_2 — точки золотого сечения отрезка $[a; b]$.

а) Доказать, что справедливы равенства $x_1 = a + b - x_2$, $x_2 = a + b - x_1$.

б) Найти длины отрезков $[a; x_2]$ и $[x_1; b]$.

16.52. Найти длину Δ_n отрезка $[a_n; b_n]$, полученного методом золотого сечения при поиске точки минимума x^* функции на отрезке $[a; b]$, и показать, что $|x^* - \bar{x}_n| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a)$, где \bar{x}_n — одна из точек золотого сечения отрезка $[a_n; b_n]$.

16.53. Сравнить необходимые количества вычисленных значений N_n и N_c функции $f(x)$ при ее минимизации на отрезке длины 1 с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ методами деления отрезка пополам и золотого сечения соответственно.

16.54. Составить блок-схему алгоритма метода золотого сечения, рассчитанную на применение ЭВМ.

В задачах 16.55—16.62 методом золотого сечения найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* .

$$16.55. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, [-1; 0], \varepsilon = 0,1.$$

$$16.56. f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x, [-3; -2], \varepsilon = 0,1.$$

$$16.57. f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), [0,5; 1], \varepsilon = 0,05.$$

$$16.58. f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x, [0,5; 1], \varepsilon = 0,05.$$

$$16.59. f(x) = (x+1)^4 - 2x^2, [-3; -2], \varepsilon = 0,05.$$

$$16.60. f(x) = 3(5-x)^{4/3} + 2x^2, [1,5; 2], \varepsilon = 0,025.$$

$$16.61. f(x) = -x^3 + 3(1+x)[\ln(1+x) - 1], [-0,5; 0,5], \varepsilon = 0,05.$$

$$16.62. f(x) = 2 + x^2 + x^{2/3} - \ln(1 + x^{2/3}) - 2x \operatorname{arctg} x^{1/3}, [0,5; 1], \varepsilon = 0,025.$$

В прямых методах [минимизации, рассмотренных выше, требуется, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной. Если $f(x)$ этим свойством не обладает, то применение указанных методов приводит, вообще говоря, к неверному результату. Кроме того, во многих случаях доказательство унимодальности функции $f(x)$ бывает затруднительно.

Метод ломаных является последовательным методом, рассчитанным на минимизацию произвольных (не обязательно унимодальных) функций, удовлетворяющих условию Липшица. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, если существует такое число $L > 0$ (константа Липшица), что

$$|f(x') - f(x'')| \leq L |x' - x''| \quad (8)$$

для всех $x', x'' \in [a; b]$.

Для проверки условия Липшица на практике используют следующий факт: если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную, то она удовлетворяет условию (8), где $L \geq \max_{[a; b]} |f'(x)|$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на $[a; b]$ условию Липшица с константой L . Опишем метод ломаных для минимизации $f(x)$.

Положим

$$x_1^* = \frac{1}{2L} [f(a) - f(b) + L(a+b)], \quad \rho_1^* = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) + L(a-b)]$$

и реализуем следующую схему вычислений:

Шаг 1. Вместо пары чисел (x_1^*, ρ_1^*) образуем две новые пары (x_1', ρ_1') и (x_1'', ρ_1'') следующим образом:

$$x_1' = x_1^* - \Delta_1, \quad x_1'' = x_1^* + \Delta_1, \quad \rho_1' = \frac{1}{2} [f(x_1') + \rho_1^*],$$

где $\Delta_1 = \frac{1}{2L} [f(x_1^*) - \rho_1^*]$.

Шаг 2. Из полученных двух пар (x_1', ρ_1') и (x_1'', ρ_1'') выберем ту, у которой вторая компонента минимальна. Обозначим ее (x_2^*, ρ_2^*) и исключим из рассматриваемого множества (очевидно, на данном шаге в качестве (x_2^*, ρ_2^*) можно взять любую из пар (x_1', ρ_1') ,

(x_1, p_1)). Вместо пары (x_1^*, p_1^*) добавляем две новые пары (x_2', p_2) и (x_2'', p_2) , компоненты которых находятся по формулам

$$x_2' = x_1^* - \Delta_2, \quad x_2'' = x_1^* + \Delta_2, \quad p_2 = \frac{1}{2} [f(x_2') - p_1^*],$$

где $\Delta_2 = \frac{1}{2L} [f(x_1^*) - p_1^*]$.

В результате получим множество, состоящее из трех пар чисел (x, p) .

Шаг n . Из n полученных на предыдущих шагах пар (x, p) выбираем ту, у которой вторая компонента p минимальна. Обозначим ее (x_n^*, p_n^*) . Исключаем эту пару из рассматриваемого множества и добавляем вместо нее две новые пары чисел (x_n', p_n) и (x_n'', p_n) по формулам

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n, \quad x_n'' = x_n^* + \Delta_n, \quad p_n = \frac{1}{2} [f(x_n') - p_n^*], \quad (9)$$

где $\Delta_n = \frac{1}{2L} [f(x_n^*) - p_n^*]$.

Полагая $x^* \approx x_n^*$, $f^* \approx f(x_n^*)$, получим приближенное решение задачи минимизации. Точность определения f^* характеризуется неравенствами $0 \leq f(x_n^*) - f^* \leq 2L\Delta_n$.

Геометрически метод ломаных состоит в построении последовательности ломаных, приближающихся к графику функции $f(x)$

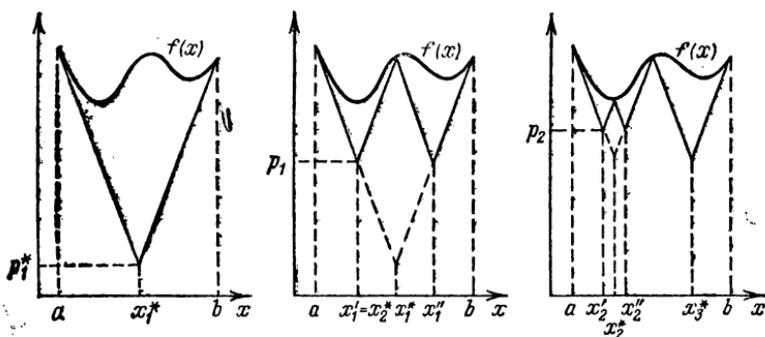


Рис. 210

снизу и имеющих угловые коэффициенты всех звеньев, равные $\pm L$ (рис. 210).

Пример 7. Методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[10; 15]$ с точностью 0,01 и точку минимума x^* .

Функция $f(x)$ дифференцируема на указанном отрезке. Так как $|f'(x)| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{x |\cos x| + |\sin x|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \leq 0,11$ при $x \in [10; 15]$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 0,11$.

Найдя $x_1^* = 12,056$, $p_1^* = -0,281$, продолжим вычисления, используя соотношения (9). Результаты вычислений представим в таблице 1.4.

Т а б л и ц а 1.4

n	Исключаемая пара (x, p)		2LΔ _n	Включенные пары (x, p)		
	x _n [*]	p _n [*]		x _n [']	x _n ^{''}	p _n
1	12,056	-0,281	0,240	10,963	13,149	-0,161
2	10,963	-0,161	0,070	10,646	11,280	-0,126
3	13,149	-0,161	0,203	12,227	14,071	-0,096
4	10,646	-0,126	0,038	10,474	10,818	-0,107
5	11,280	-0,126	0,041	11,094	11,466	-0,106
6	10,474	-0,107	0,024	10,364	10,584	-0,095
7	10,818	-0,107	0,160	10,745	10,891	-0,099
8	11,094	-0,106	0,016	11,020	11,168	-0,098
9	11,466	-0,106	0,028	11,338	11,594	-0,092
10	10,891	-0,099	0,008 < ε	—	—	—

Из таблицы 1.4 находим $x^* \approx 10,89$, $f^* \approx f(10,89) = 0,091$. Отметим, что $f(x) \notin Q[10; 15]$, поэтому из методов минимизации, рассмотренных выше, в данном случае применим только метод ломаных. ►

16.63. Показать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (8), то модуль углового коэффициента любой хорды или касательной к графику $f(x)$ не превосходит константы Липшица L .

16.64. Показать, что если функция удовлетворяет условию Липшица (8), то она непрерывна на $[a; b]$.

16.65. Найти наименьшую из констант Липшица функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ на отрезке: а) $[0; 1]$; б) $[0; 10]$.

16.66. Составить рассчитанную на использование ЭВМ блок-схему алгоритма метода ломаных.

В задачах 16.67—16.71 методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε .

16.67. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$, $[7; 11]$, $\varepsilon = 0,01$.

16.68. $f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0,01 \sin x$, $[9; 11]$, $\varepsilon = 0,05$.

16.69. $f(x) = (0,1x - 5)^8 + \cos(0,02x)$, $[49; 51]$, $\varepsilon = 0,02$.

16.70. $f(x) = \ln x + 0,1 \sin(0,1x)$, $[10; 12]$, $\varepsilon = 0,01$.

16.71. $f(x) = (x - 0,9)^2 + (x - 1,1)^4$, $[0,8; 1,2]$, $\varepsilon = 0,05$.

2. Методы минимизации, основанные на использовании производных функций. Если вычисление или измерение производных функции $f(x)$ не представляет больших затруднений, то при решении задачи минимизации можно применять непрямые методы, основанные на использовании производных $f'(x)$. Во многих случаях эти методы обеспечивают более быструю сходимость, чем прямые методы минимизации.

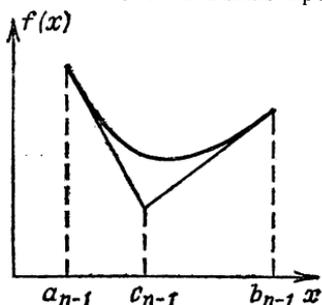


Рис. 211

Метод касательных применяется для минимизации выпуклых дифференцируемых функций. Функция $f(x)$ называется выпуклой на отрезке $[a; b]$, если

$$f[\alpha x' + (1-\alpha)x''] \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'') \quad (10)$$

для произвольных $x', x'' \in [a; b]$ и $\alpha \in [0; 1]$.

Проверка условия (10) почти всегда вызывает затруднения, поэтому на практике используют следующий критерий выпуклости:

Для того, чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$.

Опишем метод касательных. Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция, причем $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, в соответствии с рекуррентными соотношениями

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \\ c_{n-1} = \frac{b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1}) + f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})}, \quad (11)$$

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1} \quad \text{при } f'(c_{n-1}) \geq 0, \\ a_n = c_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1} \quad \text{при } f'(c_{n-1}) < 0. \quad (12)$$

После n шагов полагаем $x^* \approx c_n$, $f^* \approx f(c_n)$. Требуемая точность минимизации $f(x)$ считается достигнутой, если производная $f'(c_n)$ достаточно близка к нулю, т. е. $|f'(c_n)| \leq \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — заданное число, характеризующее точность.

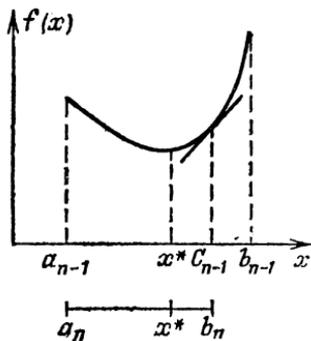


Рис. 212

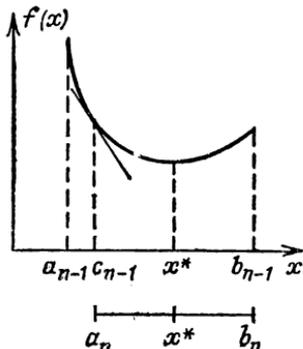


Рис. 213

Метод касательных имеет простой геометрический смысл: величина c_{n-1} из (11) — это абсцисса точки пересечения касательных к графику $f(x)$, проведенных в граничных точках отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ (рис. 211). Рис. 212 и 213 поясняют формулы (11) для случаев $f'(c_{n-1}) > 0$ и $f'(c_{n-1}) < 0$ соответственно. Отрезок $[a_n; b_n]$ выбирается так, чтобы $x^* \in [a_n; b_n]$.

Если условие $f'(a)f'(b) < 0$ не выполняется, то

а) $x^* = a$ при $f'(a) > 0, f'(b) > 0$;

б) $x^* = b$ при $f'(a) < 0, f'(b) < 0$;

в) $x^* = a$, если $f'(a) = 0$, и $x^* = b$, если $f'(b) = 0$.

Пример 8. Убедиться, что функция $f(x) = x^2 + e^x$ выпукла на $[-1; 1]$ и минимизировать ее методом касательных с точностью $|f'(c_n)| \leq 0,05$.

▲ Так как $f''(x) = 2 + e^x > 0$, то $f(x)$ — выпуклая функция; кроме того, $f'(a)f'(b) < 0$. Проведем вычисления по формулам (11), (12), поместив результаты вычислений в таблицу 1.5.

Таблица 1.5

n	a_n	b_n	c_n	$f'(c_n)$	Примечание
0	-1	1	0,11586	1,35	$f'(c_0) > 0, b_1 = c_0$
1	-1	0,11586	-0,41637	-0,173	$f'(c_1) < 0, a_2 = c_1$
2	-0,41637	0,11586	-0,14313	0,58	$f'(c_2) > 0, b_3 = c_2$
3	-0,41637	-0,14313	-0,27806	0,02	$ f'(c_3) < 0,05$, точность достигнута

Из таблицы 1.5 находим $x^* \approx c_3 = 0,278$; $f^* \approx f(c_3) = 0,835$. ►

16.72. Показать, что если функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a; b]$, то на любом отрезке $[x'; x''] \subset [a; b]$ график $f(x)$ лежит не выше хорды, проходящей через точки графика с абсциссами x' и x'' .

16.73**. Показать, что если $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция, то любая касательная к графику $f(x)$ лежит не выше этого графика.

16.74. Показать, что выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция унимодальна на этом отрезке.

16.75. Составить блок-схему алгоритма метода касательных, рассчитанную на использование ЭВМ.

В задачах 16.76—16.83, убедившись в выпуклости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, найти ее точку минимума x^* и минимальное значение f^* методом касательных, используя в качестве условия достижения требуемой точности неравенство $|f'(c_n)| \leq 0,01$.

16.76. $f(x) = x - \ln x, [0,1; 2]$.

16.77. $f(x) = x^2 - \sin x, [0; \pi/2]$.

16.78. $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, [-1; 2]$.

16.79. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x, [0; 3]$.

$$16.80. f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}, [0; 1].$$

$$16.81. f(x) = e^x + \frac{1}{x}, [0, 1; 2].$$

$$16.82. f(x) = (x-4)^2 + \ln x, [3; 5].$$

$$16.83. f(x) = x^4 + e^{-x}, [0; 1].$$

Метод Ньютона, использующий не только первую, но и вторую производные функции $f(x)$, при определенных условиях обеспечивает значительно более высокую, чем рассмотренные выше методы минимизации, скорость сходимости к точке минимума x^* .

Пусть $f(x)$ — выпуклая дважды дифференцируемая на \mathbb{R} функция. Выбрав начальное приближение x_0 , построим последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Считая неравенство $|f'(x_n)| \leq \varepsilon$ (ε — достаточно малое число) условием достижения требуемой точности вычислений, положим $x^* \approx x_n$, $f^* \approx f(x_n)$.

При неудачном выборе x_0 последовательность (13) может расходиться. Если же точка x_0 достаточно близка к x^* , то эта последовательность сходится к x^* достаточно быстро.

Оценка скорости сходимости может быть сформулирована следующим образом. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая на \mathbb{R} функция, причем $f''(x) \geq \mu > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица на \mathbb{R} с константой L . Тогда, если начальное приближение x_0 удовлетворяет условию $q = \frac{L}{2\mu^2} |f'(x_0)| < 1$, то последовательность (13) сходится к единственной точке минимума x^* функции $f(x)$ на \mathbb{R} , причем $|x^* - x_n| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2n}$, $n = 0, 1, \dots$

Пример 9. Методом Ньютона найти точку минимума x^* и минимальное значение f^* функции $f(x) = (x-2)^4 - \ln x$ с точностью $|f'(x_n)| < 10^{-7}$.

◀ Выберем $x_0 = 3$ и проведем вычисления по формуле (13), записывая результаты в таблице 1.6.

Таблица 1.6

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	3	$-9,86 \cdot 10^{-2}$	3,67
1	2,6972477	$-0,7558859$	0,985
2	2,5322701	$-0,8488508$	0,208
3	2,4736906	$-0,8553636$	$2,1 \cdot 10^{-2}$
4	2,4663735	$-0,8554408$	$3 \cdot 10^{-4}$
5	2,4662656	$-0,8554408$	$5 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$

Окончательно $x^* \approx 2,4662656$, $f^* \approx -0,8554408$. ▶

Метод Ньютона часто используется на завершающем этапе минимизации, когда точка минимума x^* грубо найдена другим, менее трудоемким методом и требуется найти x^* с большой точностью.

В задачах 16.84—16.89 минимизировать функцию $f(x)$ на всей числовой оси методом Ньютона. Критерием достижения требуемой точности считать выполнение неравенства $|f'(x_n)| \leq 10^{-4}$.

16.84. $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

16.85. $f(x) = 2x + e^{-x}$.

16.86. $f(x) = x^2 + x + \sin x$.

16.87. $f(x) = x^2 - x + e^{-x}$.

16.88. $f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x$.

16.89. $f(x) = 2x^2 + x + \cos^2 x$.

16.90. Найти точку минимума x^* функции $f(x)$ одной из задач 16.76—16.83 методом Ньютона, используя в качестве начального приближения решение, найденное методом касательных. Вычисления закончить при $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$.

§ 2. Безусловная минимизация функций многих переменных

1. Выпуклые множества и выпуклые функции. Пусть \mathcal{E}_n — n -мерное евклидово пространство арифметических векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множество $U \subset \mathcal{E}_n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in U$ оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки, т. е.

$$\alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha) \mathbf{x}^{(2)} \in U \text{ для всех } \alpha \in [0; 1]. \quad (1)$$

Пример 1. Показать, что множество точек $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ плоскости $U = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ выпукло.

◀ Пусть $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \in U$, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1-\alpha) \mathbf{x}^{(2)}$ — точка отрезка, соединяющего точки $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$. Покажем, что $\mathbf{x} \in U$. Имеем

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= [\alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha) x_1^{(2)}]^2 + \\ &\quad + [\alpha x_2^{(1)} + (1-\alpha) x_2^{(2)}]^2 = \\ &= \alpha^2 [(x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2] + \\ &\quad + (1-\alpha)^2 [(x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2] + \\ &\quad + 2\alpha(1-\alpha) [x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_2^{(1)} x_2^{(2)}]. \end{aligned}$$

Используя неравенства $(x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i)})^2 \leq 1$, $i=1, 2$ (так как $\mathbf{x}^{(i)} \in U$) и $2x_1^{(1)} x_1^{(2)} \leq (x_1^{(1)})^2 + (x_1^{(2)})^2$, получим $x_1^2 + x_2^2 \leq \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) = 1$, т. е. $\mathbf{x} \in U$.

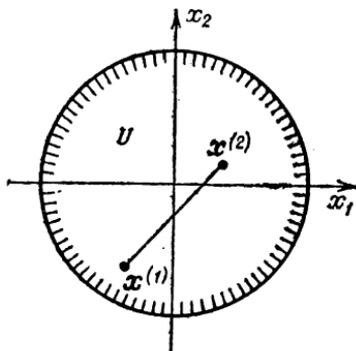


Рис. 214

Выпуклость множества U ясна и из рис. 214. Так как U — круг, то отрезок, соединяющий любые две точки $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in U$, целиком лежит в U . ▶

Проверка условия (1) в большинстве случаев требует громоздких выкладок, поэтому на практике при исследовании выпуклости

множеств в пространствах \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 часто используют геометрические иллюстрации, подобные рис. 214.

В задачах 16.91—16.100 установить, являются ли выпуклыми множества U .

$$16.91. U = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 - x_2 \geq -2, x_2 \geq 0\}.$$

$$16.92. U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}.$$

$$16.93. U = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq x_1^2\}.$$

$$16.94. U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

$$16.95. U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \leq 2, x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}.$$

$$16.96. U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}.$$

$$16.97. U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2\}.$$

$$16.98. U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

$$16.99. U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

$$16.100. U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} \geq 1 \right\}.$$

Функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, называется *выпуклой* на этой множестве, если для любых точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in U$ и произвольного числа $\alpha \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$f[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}] \leq \alpha f(x^{(1)}) + (1-\alpha)f(x^{(2)}). \quad (2)$$

На практике обычно используют следующий критерий выпуклости функции:

Если $f(x)$ — дважды дифференцируемая на выпуклом множестве $U \subset \mathcal{E}_n$ функция и матрица ее вторых производных $f''(x) = (\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j)$ (гессиан) положительно определена при всех $x \in U$, то функция $f(x)$ является выпуклой на множестве U .

Применяя критерий Сильвестра к матрице вторых производных, можно сформулировать это утверждение в более удобном для проверки виде:

Если все угловые миноры матрицы $f''(x)$ положительны при $x \in U$, то функция $f(x)$ выпукла на множестве U .

Пример 2. Выяснить, является ли функция $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^3 + \sin(x_1 + x_2)$ выпуклой в пространстве \mathcal{E}_2 .

◀ Запишем матрицу вторых производных

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Найдя угловые миноры этой матрицы $\Delta_1 = 4 - \sin(x_1 + x_2)$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 8 - 6 \sin(x_1 + x_2),$$

убеждаемся, что $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2$, при всех $x \in \mathcal{E}_2$, т. е. функция $f(x)$ выпукла. ▶

Выпуклые функции играют большую роль во многих вопросах оптимизации в связи с тем, что всякий локальный минимум выпуклой функции является одновременно и глобальным.

В задачах 16.101—16.106 убедиться в выпуклости функции $f(\mathbf{x})$ во всем пространстве \mathcal{E}_n .

$$16.101. f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 2.$$

$$16.102. f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

$$16.103. f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \cos \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

$$16.104. f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2.$$

$$16.105. f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

$$16.106. f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

В задачах 16.107—16.110 указать множества U , на которых функции $f(\mathbf{x})$ являются выпуклыми.

$$16.107. f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^3}{x_2}.$$

$$16.108. f(\mathbf{x}) = \sin(x_1 + x_2).$$

$$16.109. f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 2x_2^2 - \sin(x_1 - x_2).$$

$$16.110. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

Во многих задачах оптимизации рассматриваются квадратичные функции, т. е. функции вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_ix_j + \sum_{j=1}^n r_jx_j$. Если положить $q_{ij} = c_{ij} + c_{ji}$, то получим симметрическую матрицу $Q = (q_{ij})$, с помощью которой можно представить квадратичную функцию в виде

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(Q\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{r}, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ — векторы-столбцы, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) — скалярное произведение векторов \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_n$.

Градиент и матрица вторых производных функции (3) равны $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{r}$, $f''(\mathbf{x}) = Q = (q_{ij})$.

Таким образом, для того чтобы функция (3) была выпуклой в \mathcal{E}_n , достаточно, чтобы матрица Q была положительно определена.

Пример 3. Пусть $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

а) Найти матрицу Q и вектор \mathbf{r} в представлении (3) функции $f(\mathbf{x})$.

б) Найти градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$.

в) Выяснить, является ли функция $f(\mathbf{x})$ выпуклой.

◀ а) В данном случае $c_{11} = 2$, $c_{12} = -2$, $c_{13} = 3$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = -2$,

$$c_{33} = 4, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad \text{поэтому } Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б) Используя найденные матрицу Q и вектор \mathbf{r} , запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

в) Найдем угловые миноры Δ_i матрицы $f''(x) = Q$:

$$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 22.$$

Так как $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, то функция $f(x)$ выпукла в \mathcal{E}_3 . ►

16.111. При каких a , b и c функция $f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ является выпуклой в \mathcal{E}_2 ?

16.112. При каких значениях a функция $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2$ выпукла в \mathcal{E}_3 ?

В задачах 16.113—16.116 выписать матрицу Q квадратичной функции $f(x)$, найти ее градиент $f'(x^{(0)})$ в точке $x^{(0)}$ и убедиться в выпуклости $f(x)$ в \mathcal{E}_n .

16.113. $f(x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2$, $x^{(0)} = (1, 1)$.

16.114. $f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 10x_2^2 + 5x_1 - 3x_2$, $x^{(0)} = (2, 1)$.

16.115. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1 + x_3$, $x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

16.116. $f(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 - x_2 - 3x_3$, $x^{(0)} = (1, 2, 3)$.

2. Методы безусловной минимизации, основанные на вычислении первых производных функции. Постановка задачи минимизации функции n переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве $U \subset \mathcal{E}_n$ не отличается от постановки в одномерном случае. Если $U = \mathcal{E}_n$, то говорят о безусловной минимизации функции $f(x)$.

Для решения задачи безусловной минимизации функции $f(x)$ наиболее часто применяют приближенные методы, в основе которых лежит вычисление производных $f(x)$ первого порядка. Такие методы обычно называют градиентными. В ряде других методов требуется вычисление не только первых, но и вторых производных функции $f(x)$.

Метод градиентного спуска. Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая во всем пространстве \mathcal{E}_n функция и требуется найти ее точку минимума x^* . Выбрав произвольное начальное приближение $x^{(0)} \in \mathcal{E}_n$, построим последовательность

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где величины α_k (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми для того, чтобы выполнялось условие

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

В качестве условия окончания вычислений обычно используется близость к нулю градиента $f'(x^{(k)})$, т. е. выполнение неравенств

$$\left| \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_l} \right| \leq \varepsilon, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{или } \|f'(x^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_l} \right]^2} \leq \varepsilon \quad (6)$$

(ϵ — заданное достаточно малое число), после чего полагают $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Если при некотором k условие (5) нарушается, то шаг α_k в (4) уменьшают (дробят) в заданное число раз до выполнения неравенства (5) и продолжают вычисления.

Пример 4. Минимизировать в \mathcal{E}_2 функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$ методом градиентного спуска, завершив вычисления при $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 0,05$, $i = 1, 2$.

◀ Выбрав начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$ и $\alpha_0 = 1$, построим последовательность (4), записывая результаты вычислений в таблице 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(\mathbf{x}^{(k)})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}$	α_k	Примечание
0	0	0	1	1	1	1	Условие (5) нарушено. Уменьшаем α_0 в 2 раза
	-1	-1	3,145	-	-	-	
	0	0	1	1	1	0,5	Условие (5) нарушено. Уменьшаем α_0 в 2 раза
	-0,5	-0,5	1,118	-	-		
1	0	0	1	1	1	0,25	Условие (5) выполнено То же
	-0,25	-0,25	0,794	0,106	-0,393		
2	-0,2766326	-0,1516326	0,774	0,0983	0,0451	0,25	Точность достигнута
3	-0,3012259	-0,1629096	0,772	0,0262	-0,023	-	

Итак, $\mathbf{x}^* \approx (-0,301, -0,163)$, $f^* \approx 0,772$. ▶

Для квадратичной функции (3) формула (4) принимает вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k (Q \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{r}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

В задачах 16.117—16.120 совершить один шаг градиентного спуска (4) из точки $\mathbf{x}^{(0)}$ с шагом α_0 и сравнить значения $f(\mathbf{x}^{(0)})$ и $f(\mathbf{x}^{(1)})$.

16.117. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$, а) $\alpha_0 = 0,1$; б) $\alpha_0 = 0,265$; в) $\alpha_0 = 0,5$.

16.118. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$, а) $\alpha_0 = 0,1$; б) $\alpha_0 = 0,5$; в) $\alpha_0 = 1$.

16.119. $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)$, а) $\alpha_0 = 0,1$; б) $\alpha_0 = 0,638$; в) $\alpha_0 = 10$.

16.120. $f(\mathbf{x}) = e^{x_1^2} + (x_1 + x_2 + x_3)^2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$, а) $\alpha_0 = 0,1$; б) $\alpha_0 = 0,21268$; в) $\alpha_0 = 1$.

16.121. Составить блок-схему алгоритма метода градиентного спуска, рассчитанную на использование ЭВМ.

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска способом определения величины α_k , которая находится из условия

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f[x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})]. \quad (8)$$

Такой выбор α_k обеспечивает максимально возможное уменьшение функции $f(x)$ вдоль направления ее антиградиента $-f'(x^{(k)})$ в точке $x^{(k)}$.

Таким образом, для определения α_k на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается одномерная задача минимизации (8), для чего можно использовать методы, рассмотренные в § 1.

Пример 5. Решить пример 4 методом наискорейшего спуска.

Шаг 1. Положим $x^{(0)} = (0, 0)$, тогда $f'(x^{(0)}) = (1; 1)$, $\Phi_0(\alpha) = f(0 - \alpha \cdot 1, 0 - \alpha \cdot 1) = 3\alpha^2 + e^{-2\alpha}$. Для нахождения точки минимума функции $\Phi_0(\alpha)$ используем метод перебора:

α	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26
$\Phi_0(\alpha)$	0,7949	0,7903	0,7892	0,7916	0,7973

т. е. $\alpha = \alpha_0 = 0,22$, откуда $x^{(1)} = (0, 0) - 0,22 \cdot (1, 1) = (-0,22, -0,22)$.

Шаг 2. $f'(x^{(1)}) = (0,204, -0,236)$, $\Phi_1(\alpha) = (-0,22 - 0,204\alpha)^2 + + (-0,22 + 0,236\alpha)^2 + e^{-0,44+0,032\alpha}$. Минимизируем $\Phi_1(\alpha)$:

α	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$\Phi_1(\alpha)$	0,77401	0,77384	0,77380	0,77387	0,77408

т. е. $\alpha = \alpha_1 = 0,32$, откуда $x^{(2)} = (-0,22, -0,22) - 0,32 \cdot (0,204, -0,236) = (-0,2853, -0,1445)$.

Шаг 3. $f'(x^{(2)}) = (8,007, 7,268) \cdot 10^{-2}$, $\Phi_2(\alpha) = (-0,2853 - 8,007 \times \times 10^{-2}\alpha)^2 + + (-0,1445 - 7,268 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha)^2 + e^{-0,429 - 15,275 \cdot 10^{-2}\alpha}$. Минимизируем $\Phi_2(\alpha)$:

α	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
$\Phi_2(\alpha)$	0,77273	0,77241	0,77240	0,77241	0,77244

т. е. $\alpha = \alpha_2 = 0,24$, $x^{(3)} = (-0,3045, -0,1619)$, $f'(x^{(3)}) = (1,821, -2,051) \cdot 10^{-2}$, поэтому требуемая точность достигнута и $x^* \approx x^{(3)} = (-0,305, -0,162)$, $f^* \approx f(x^{(3)}) = 0,772$. ►

Если $f(x)$ — квадратичная функция (3), то величина α_k может быть найдена в явном виде

$$\alpha_k = \frac{(f'(x^{(k)}), f'(x^{(k)}))}{(Qf'(x^{(k)}), f'(x^{(k)}))}, \text{ где } f'(x^{(k)}) = Qx^{(k)} + r. \quad (9)$$

Таким образом, для квадратичной функции метод наискорейшего спуска состоит в построении последовательности $\{x^{(k)}\}$ по формулам (7), (9).

16.122*. Показать, что градиенты $f'(x^{(k)})$ и $f'(x^{(k+1)})$ в последовательных точках итерационного процесса метода наискорейшего спуска ортогональны, т. е. $(f'(x^{(k)}), f'(x^{(k+1)})) = 0$, $k = 0, 1, \dots$

16.123. Составить блок-схему метода наискорейшего спуска.

16.124. Составить блок-схему алгоритма метода наискорейшего спуска минимизации квадратичных функций.

В задачах 16.125—16.128 для функции $f(x)$ найти величину шага α_0 метода наискорейшего спуска из точки $x^{(0)}$.

16.125. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$, $x^{(0)} = (1, 1)$.

16.126. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$, $x^{(0)} = (0, 0)$.

16.127. $f(x) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, $x^{(0)} = (0, 1, 0)$.

16.128. $f(x) = e^{x_1^2} + (x_1 + x_2 + x_3)^2$, $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

В задачах 16.129—16.144 минимизировать квадратичные функции методом наискорейшего спуска, заканчивая вычисления при $\left| \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq 0,01$, $i = 1, 2, \dots, n$.

16.129. $f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$.

16.130. $f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$.

16.131. $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$.

16.132. $f(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$.

16.133. $f(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$.

16.134. $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$.

16.135. $f(x) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$.

16.136. $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$.

16.137. $f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.

16.138. $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1 - 3x_3$.

16.139. $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_1 - 3x_2 + x_3$.

16.140. $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 - 7x_3$.

16.141. $f(x) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.

16.142. $f(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 + x_3$.

16.143. $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3$.

$$16.144. \quad f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3.$$

Метод сопряженных направлений состоит в построении последовательных приближений $\mathbf{x}^{(k)}$ к точке минимума функции $f(\mathbf{x})$ следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad k=0, 1, \dots, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n, \quad (10)$$

где $\mathbf{x}^{(0)}$ — заранее выбранное начальное приближение, шаг α_k выбирается аналогично (8):

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{p}^{(k)}), \quad (11)$$

а направление спуска $-\mathbf{p}^{(k)}$ определяется по формуле

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) + \beta_k \mathbf{p}^{(k-1)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}),$$

где

$$\beta_k = \frac{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\|^2}{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k-1)})\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (12)$$

Таким образом, метод сопряженных направлений отличается от метода наискорейшего спуска только выбором направления уменьшения функции на каждом шаге ($-\mathbf{p}^{(k)}$ вместо $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$). Отметим, что $\mathbf{p}^{(k)}$ из (12) определяется не только антиградиентом $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$, но и направлением спуска $-\mathbf{p}^{(k-1)}$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в градиентных методах, рассмотренных выше, учитывать особенности функции $f(\mathbf{x})$ при построении последовательных приближений (10) к ее точке минимума.

Критерием достижения заданной точности вычислений в методе сопряженных направлений обычно служат неравенства (6). Часто для уменьшения влияния накапливающихся погрешностей вычислений через каждые N итераций (10) полагают $\beta_{mN} = 0$, $m=0, 1, \dots$, т. е. производят обновление метода (N — параметр алгоритма).

Для минимизации выпуклой квадратичной функции в \mathcal{E}_n требуется не более n итераций метода сопряженных направлений.

Пример 6. Методом сопряженных направлений найти точку минимума \mathbf{x}^* функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

◀ $f(\mathbf{x})$ — квадратичная функция, заданная в \mathcal{E}_2 . Поэтому точка \mathbf{x}^* будет найдена после двух шагов метода сопряженных градиентов.

Шаг 1. Выбрав начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$, по формулам (9)–(11) находим

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (2x_1 + x_2 - 7, \quad x_1 + 4x_2 - 7) |_{\mathbf{x}^{(0)}} = (-7, -7),$$

$\Phi_0(\alpha) = 98(2\alpha^2 - \alpha)$. Из условия $\Phi'_0(\alpha_0) = 0$ минимума $\Phi_0(\alpha)$ получим $\alpha_0 = \frac{1}{4}$. Отсюда $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0) - \frac{1}{4} \cdot (-7, -7) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

Шаг 2. $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(1)}) = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$, откуда с учетом (12) имеем $\beta_1 = \frac{1}{16}$, $\mathbf{p}^{(1)} = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{16}(-7, -7) = \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right)$. Поэтому

$$\Phi_1(\alpha) = \frac{49}{32} \left(\frac{7}{2} \alpha^2 - 4\alpha - 392 \right) \text{ и } \alpha_1 = \frac{4}{7}. \text{ Окончательно } \mathbf{x}^{(2)} =$$

$$= \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4} \right) - \frac{4}{7} \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16} \right) = (3, 1) = \mathbf{x}^*. \blacktriangleright$$

16.145. Показать, что при обновлении метода сопряженных направлений на каждом шаге (т. е. если $\beta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$) он переходит в метод наискорейшего спуска.

16.146. Составить блок-схему алгоритма метода сопряженных направлений.

16.147. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 16.129—16.136, совершив две итерации метода сопряженных направлений из произвольного начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{G}_2$.

16.148. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 16.137—16.144 с помощью трех итераций метода сопряженных направлений, используя произвольное начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{G}_3$.

В задачах 16.149—16.174 минимизировать функцию $f(\mathbf{x})$ методом сопряженных направлений, заканчивая вычисления при $\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq 10^{-3}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$16.149. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + 2x_2.$$

$$16.150. f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$$

$$16.151. f(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_1^3 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2.$$

$$16.152. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2).$$

$$16.153. f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2.$$

$$16.154. f(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$16.155. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2.$$

$$16.156. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2.$$

$$16.157. f(\mathbf{x}) = \ln[1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)].$$

$$16.158. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2.$$

$$16.159. f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

$$16.160. f(\mathbf{x}) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2}.$$

$$16.161. f(\mathbf{x}) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2} - x_1 - x_3.$$

$$16.162. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 + x_3.$$

$$16.163. f(\mathbf{x}) = 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2} + x_1 - 2x_2.$$

$$16.164. f(\mathbf{x}) = 2x_1^4 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1 + x_2.$$

$$16.165. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + \cos(x_1 - x_2 + x_3).$$

$$16.166. f(x) = e^{x_1^2 + x_2^2} + \ln(4 + x_2^2 + 2x_3^2).$$

$$16.167. f(x) = x_1 + x_2 - 5x_3 + e^{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2}.$$

$$16.168. f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + \sqrt{5 + x_2^2 + 2x_3^2} + x_1 + x_3.$$

$$16.169. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2\sin\left(\frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}\right).$$

$$16.170. f(x) = 2\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 3} + x_2^2 x_3^2 - x_1 - x_2.$$

$$16.171. f(x) = x_2^2 + x_3^2 + e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_1 - x_2.$$

$$16.172. f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + e^{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$16.173. f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2) + \sqrt{3 + x_2^2 + x_3^2}.$$

$$16.174. f(x) = x_1 + 10x_2 - 3x_3 + e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

3. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции. Если при построении последовательности приближений к точке минимума функции $f(x)$ использовать информацию, содержащуюся в значениях не только первых, но и вторых производных $f(x)$, то при определенных условиях можно обеспечить более быструю, чем в градиентных методах, сходимость этой последовательности.

Метод Ньютона применяется для безусловной минимизации выпуклых дважды дифференцируемых функций. В этом методе последовательные приближения $x^{(k)}$ к точке минимума функции $f(x)$ строятся с использованием первых и вторых производных следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f''(x^{(k)})]^{-1} f'(x^{(k)}), \quad k=0, 1, \dots, \quad (13)$$

где $x^{(0)} \in \mathcal{G}_n$ — начальное приближение, $[f''(x^{(k)})]^{-1}$ — матрица, обратная матрице вторых производных функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$. Критерием достижения требуемой точности вычислений обычно служат неравенства (6).

Если начальное приближение $x^{(0)}$ достаточно близко к точке минимума x^* , то метод Ньютона сходится, как правило, гораздо быстрее методов минимизации, использующих первые производные $f(x)$, поэтому его часто используют на завершающем этапе минимизации при уточнении приближения к точке x^* , найденного другим, более простым методом.

Пример 7. Используя решение примера 4 в качестве начального приближения метода Ньютона, найти точку минимума функции $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$ с точностью $|\partial f(x^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-5}$, $i=1, 2$.

◀ Используя результаты решения примера 4, запишем

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix}, \quad f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2},$$

$$f''(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,39319151 & 0,62867835 \\ 0,62867835 & 0,22329787 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$[f''(x^{(0)})]^{-1} = \begin{pmatrix} -0,39319151 & -5,3404226 \cdot 10^{-2} \\ -5,3404226 \cdot 10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix}.$$

откуда

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,39319151 & -5,3404226 \cdot 10^{-2} \\ -5,3404226 \cdot 10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{pmatrix} -0,3127641 \\ -0,1563821 \end{pmatrix}.$$

Вычислив $f'(\mathbf{x}^{(1)}) = (7,9 \cdot 10^{-6}, 7,9 \cdot 10^{-6})$, убеждаемся, что условие точности выполнено, т. е. $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(1)} = (-0,3127641, -0,1563821)$. ►

Модифицированный метод Ньютона обеспечивает более устойчивую сходимость последовательности приближений к точке минимума, чем метод Ньютона.

Если начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ выбрано недостаточно близким к точке минимума \mathbf{x}^* , то даже для выпуклой функции $f(\mathbf{x})$ последовательность (13) может не сходиться к \mathbf{x}^* . Этот недостаток метода Ньютона будет устранен, если последовательность приближений $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ строить по модифицированной формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k [f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} f'(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0, 1, \dots \quad (14)$$

где α_k находится подобно (8) и (11):

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \\ \Phi_k(\alpha) = f\{\mathbf{x}^{(k)} - \alpha [f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} f'(\mathbf{x}^{(k)})\}.$$

Кроме того, для последовательности (14) всегда выполняется неравенство $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(k)})$, $k=0, 1, \dots$, которое может нарушаться в случае (13).

16.175. Показать, что точка минимума выпуклой квадратичной функции находится с помощью одной итерации метода Ньютона из произвольного начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$.

16.176. Используя результат задачи 16.175, показать, что для нахождения точки минимума выпуклой квадратичной функции достаточно одной итерации модифицированного метода Ньютона при произвольном $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$.

16.177. Составить блок-схему алгоритма метода Ньютона.

16.178. Построить блок-схему алгоритма модифицированного метода Ньютона.

16.179. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 16.129—16.144 с помощью одной итерации метода Ньютона.

16.180. Используя в качестве начального приближения решение одной из задач 16.149—16.174, полученное методом сопряженных градиентов, уточнить это решение с помощью метода Ньютона, заканчивая вычисления при $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-6}$, $i=1, 2, \dots, n$.

16.181. Выбрав произвольное начальное приближение, минимизировать одну из функций задач 16.149—16.174 модифицированным методом Ньютона, используя критерий точности решения $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

§ 3. Линейное программирование

1. Постановки задач линейного программирования. Графический метод решения. Задача минимизации функции n переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на некотором множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, не совпадающем со всем пространством \mathcal{E}_n и заданном с помощью ограничений (равенств и неравенств) на координаты x_j точки $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$, называется *задачей математического программирования*. При этом функцию $f(\mathbf{x})$ называют *целевой функцией*, а множество U — *допустимым множеством*.

Решение задач математического программирования, как правило, связано со значительно большими трудностями, чем решение задач безусловной минимизации, рассмотренных в § 2.

Простейшим частным случаем задачи математического программирования является *задача линейного программирования*, состоящая в минимизации линейной целевой функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) =$

$= \sum_{j=1}^n c_j x_j$ на множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, заданном системой линейных ограничений (равенств и (или) неравенств) на координаты x_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Среди точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = l+1, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0,$$

найти те, в которых функция $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ принимает минимальное значение, и определить это значение.

Отметим, что в условии задачи линейного программирования могут содержаться неравенства и противоположного, чем в (2), знака, однако такие неравенства легко сводятся к виду (2) умножением на -1 .

Если в условии задачи линейного программирования не содержатся ограничения-неравенства (2), т. е. в (1) $l = m$, то она называется *задачей линейного программирования в каноническом виде*.

Вводя дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = l+1, \dots, m$, ограничения-неравенства (2) можно записать в виде равенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = l+1, \dots, m.$$

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в каноническом виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min^1, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$x_j \geq 0. \quad (5)$$

Часто используется векторная запись задачи (3) — (5):

$$\begin{aligned} f(x) &= (c, x) \rightarrow \min, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор неизвестных, $c = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции из (3), $A = (a_{ij})$ — прямоугольная матрица размера $m \times n$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ — вектор правых частей системы (4), а $x \geq 0$ — краткая запись условий неотрицательности (5).

Математические модели многих важных для практики задач оптимизации представляют собой задачи линейного программирования.

Пример 1. Составить математическое описание следующей задачи об оптимальном составе сплава и представить полученную задачу линейного программирования в каноническом виде.

Для приготовления b_0 кг сплава с заданными свойствами используют вещества A_j , $j = 1, \dots, n$. В x кг вещества A_j содержится a_{ij} кг химического элемента B_i , $i = 1, \dots, m$. Содержание элемента B_i в сплаве должно заключаться в пределах от β_i до b_i кг. Стоимость 1 кг вещества A_j составляет c_j руб.

Требуется определить такой состав для приготовления сплава, при котором общая стоимость израсходованных веществ минимальна.

◀ Обозначим x_j количество кг вещества A_j , используемое для приготовления сплава (очевидно $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда

содержание элемента B_i в сплаве составит $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ кг, а сто-

мость израсходованных веществ будет равна $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ руб.

¹ Символ $f(x) \rightarrow \min$ в записи условия задачи математического программирования используется вместо слов «минимизировать функцию $f(x)$ ». Далее указываются ограничения, определяющие допустимое множество.

Поэтому, с учетом ограничений на содержание элементов B_i в сплаве, для величин x_j получим следующие неравенства:

$$\beta_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m.$$

Кроме того, количество сплава должно составлять b_0 кг, поэтому

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0.$$

Таким образом, математическое описание задачи об оптимальном составе сплава принимает вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \beta_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0, \quad (9)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

Запишем эту задачу линейного программирования в каноническом виде.

Среди ограничений (7) — (9) на переменные x_j содержится $2m$ неравенств (7), (8). Для преобразования их в ограничения-равенства введем $2m$ дополнительных неотрицательных переменных x_{n+i} и x_{n+m+i} , $i=1, \dots, m$.

Прибавив переменные x_{n+i} к левым частям соответствующих неравенств (7) и вычтя переменные x_{n+m+i} из левых частей неравенств (8), получим задачу линейного программирования в каноническом виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+m+i} = \beta_i \quad (i=1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n. \blacktriangleright$$

Составить математическое описание задач оптимизации 16.182—16.187, представив полученные задачи линейного программирования в каноническом виде.

16.182. Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два сплава тех же металлов, отличающиеся составом и стоимостью. Данные от этих сплавов приведены в таблице 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

Компоненты сплава	Содержание компонентов в %	
	сплав № 1	сплав № 2
Медь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Стоимость 1 кг	4	6

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова, а содержание цинка может составлять от 7,2 до 12,8 кг.

Определить количества x_j , $j = 1, 2$, сплавов каждого вида, обеспечивающие получение нового сплава с минимальными затратами на сырье.

16.183*. Для изготовления двух видов изделий A_1 и A_2 завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовлении изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные задачи приведены в таблице 3.2.

Т а б л и ц а 3.2

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		изделие A_1	изделие A_2
Алюминий (кг)	570	10	70
Медь (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-час.)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-час.)	3400	200	100
Прибыль на 1 изделие (тыс. руб.)		3	8

Определить количества x_j , $j = 1, 2$, изделий A_j , которые необходимо изготовить для достижения максимальной прибыли.

16.184. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице 3.3 указаны: состав поезда каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и максимальное число пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида.

Т а б л и ц а 3.3

Поезда	Вагоны				
	багаж- ный	почтовый	плац- картный	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	—	8	4	1
Число пассажиров	—	—	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Определить число скорых x_1 и пассажирских x_2 поездов, которые необходимо формировать ежедневно из имеющегося парка вагонов, чтобы число перевозимых пассажиров было максимальным.

16.185. Завод производит продукцию двух видов A_1 и A_2 , используя сырье, запас которого составляет b т. Согласно плану выпуск продукции A_1 должен составлять не менее 60% общего объема выпуска. Расход сырья на изготовление 1 т продукции A_1 и A_2 составляет соответственно a_1 и a_2 т. Стоимость 1 т продукции A_1 и A_2 составляет соответственно c_1 руб. и c_2 руб. Определить план выпуска продукции A_1 и A_2 , при котором стоимость выпущенной продукции будет максимальной.

16.186. В начале рабочего дня автобусного парка на линию выходит x_1 автобусов, через час к ним добавляется x_2 автобусов, еще через час — дополнительно x_3 машин.

Каждый автобус работает на маршруте непрерывно в течение 8 часов. Минимально необходимое число машин на линии в i -й час рабочего дня ($i = 1, 2, \dots, 10$) равно b_i . Превышение этого числа приводит к дополнительным издержкам в течение i -го часа в размере c_i руб. на каждый дополнительный автобус.

Определить количества машин x_1, x_2, x_3 , выходящих на маршрут в первые часы рабочего дня, с таким расче-

том, чтобы дополнительные издержки в течение всего рабочего дня были минимальными.

16.187. Процесс изготовления изделий двух видов состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования i -го станка составляет b_i часов в сутки, $i = 1, 2, 3$. Время обработки каждого изделия j -го вида, $j = 1, 2$, на i -м станке равно a_{ij} часам. Прибыль от реализации одного изделия j -го вида составляет c_j руб. Составить план суточного выпуска изделий так, чтобы прибыль от их производства была максимальной.

Если задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений-равенств (1), то такую задачу можно исследовать и решить графически.

Рассмотрим задачу

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (12)$$

На плоскости (x_1, x_2) любое из неравенств (11) определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон от прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. Для того чтобы определить расположение этой полуплоскости относительно граничной прямой, можно подставить координаты какой-либо точки (при $b_i \neq 0$ проще всего взять начало координат) в соответствующее неравенство (11) и проверить его выполнение.

Таким образом, допустимое множество U задачи (10) — (12) является пересечением первого квадранта $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ и полу-

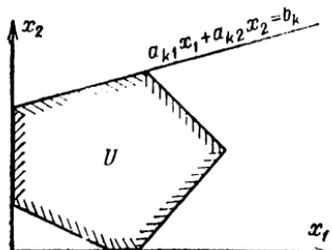


Рис. 215

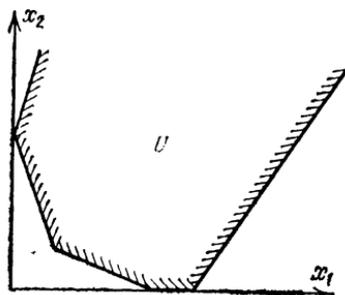


Рис. 216

плоскостей, соответствующих неравенствам (11). Поэтому множество U представляет собой либо:

- пустое множество, тогда задача (10) — (12) не имеет решений из-за несовместности ограничений (11), (12);
- многоугольник (рис. 215);
- неограниченное многоугольное множество (рис. 216).

Для решения задачи (10)–(12) в случае $U \neq \emptyset$ рассмотрим семейство линий уровня функции $f(x)$ из (10)

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C, \quad C = \text{const}, \quad (13)$$

которые являются параллельными прямыми. Антиградиент $-f'(x) = (-c_1, -c_2) = e$ перпендикулярен прямым (13) и указывает направление убывания $f(x)$. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (13), проходящую через допустимое множество U , в направлении e убывания $f(x)$ до тех пор, пока эта прямая будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством U , то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества U , в которой целевая функция $f(x)$ принимает минимальное на U значение.

Пример 2. Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_2 &\leq 3, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

▲ Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество U данной задачи (многоугольник $ABCDE$) и одну из линий уровня $-3x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции (рис. 217). Направление убывания $f(x)$ указывает вектор $e = (3, 2)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления e , находим её крайнее положение. В этом положении прямая $-3x_1 - 2x_2 = C$ проходит через вершину $D(3, 2)$ многоугольника $ABCDE$. Поэтому целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение f^* в точке $x^* = (3, 2)$, причем $f^* = f(3, 2) = -13$. ►

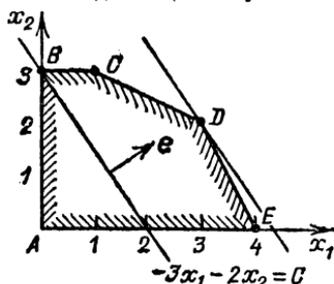


Рис. 217

Задача линейного программирования (10)–(12) может иметь

и бесконечное множество решений.

Пример 3. Решить задачу линейного программирования с целевой функцией $f(x) = -x_1 - 2x_2$ и ограничениями на допустимое множество U , взятыми из примера 2.

▲ Множество U построено при решении примера 2. На рис. 218 изображена линия уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции $f(x)$. В своем крайнем положении при параллельном переносе вдоль направления $e = (1, 2)$ она содержит сторону CD многоугольника $ABCDE$. Таким образом, все точки отрезка CD являются точками минимума функции $f(x)$ на множестве U . Так как концы C и D этого отрезка имеют координаты $(1, 3)$ и $(3, 2)$ соответственно, то любая точка минимума $f(x)$ представима в виде $x^* = \alpha(1, 3) + (1 - \alpha)(3, 2) = (3 - 2\alpha, 2 + \alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]$. Минимальное значение целевой функции $f^* = f(x^*) = -7$. ►

В случае неограниченного допустимого множества U задача линейного программирования (10)–(12) может не иметь решения.

так как целевая функция на таком множестве может быть не ограниченной снизу.

Пример 4. Решить графическим методом задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 &\geq -1, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

◀ Допустимое множество U данной задачи представляет собой неограниченное многоугольное множество (рис. 219). Функция $f(x)$

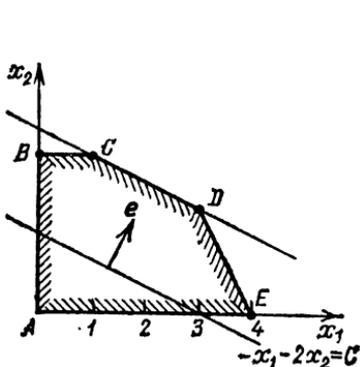


Рис. 218

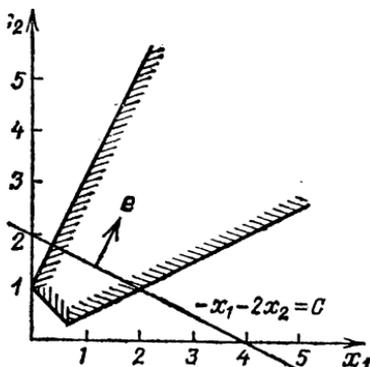


Рис. 219

убывает в направлении $e = (1, 2)$. При параллельном переносе линии уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ вдоль направления e она всегда пересекает множество U , а целевая функция $f(x)$ неограниченно убывает. Поэтому рассмотренная задача не имеет решений. ▶

Решить задачи линейного программирования 16.188 — 16.200 графическим методом.

16.188. $f(x) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

16.189. $f(x) = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 &\geq 0, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$16.190. f(x) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1.$$

$$3x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.191. f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 \leq 3,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.192. f(x) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 \leq 2,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.193. f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \leq 2,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.194. f(x) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2,$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0,$$

$$x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.195. f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \leq 2,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

16.196. Решить задачу 16.182 об оптимальном составе сплава.

16.197. Найти оптимальный план выпуска продукции в задаче 16.183.

16.198. Определить число формируемых пассажирских и скорых поездов в задаче 16.184.

16.199. Найти оптимальный план выпуска товаров в задаче 16.185, полагая $a_1=2$, $a_2=1$, $b=390$, $c_1=2$, $c_2=3$.

16.200. Решить задачу 16.187 со следующими исходными данными:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

а) $c_1=65$, $c_2=80$; б) $c_1=85$, $c_2=60$.

Графический метод используется также для решения задачи линейного программирования в каноническом виде (3)–(5) с произвольным числом переменных x_j , если число свободных переменных системы уравнений (4) не превосходит двух.

Пусть ранг r матрицы системы ограничений (4) (т. е. матрицы A из (6)) равен рангу расширенной матрицы $(A|b)$ этой системы. В противном случае система (4) несовместна и задача линейного программирования (3)–(5) не имеет решения, так как ее допустимое множество U пусто.

Выберем произвольный базисный минор матрицы A . Для определенности будем считать, что этот минор порядка r соответствует первым r столбцам и строкам матрицы A . Если $r < m$, то уравнения (4) с номерами $i=r+1, \dots, m$ являются следствиями остальных уравнений и их следует опустить. Поэтому будем считать, что $r=m$.

Предположим, что $n-m=2$ или $n-m=1$. Считая переменные x_j , $j=1, \dots, m$, базисными, а остальные—свободными, решим систему (4), т. е. выразим базисные переменные через свободные, после чего исключим базисные переменные из условия задачи (3)–(5). Для этого полученные соотношения для базисных переменных подставим в выражение (3) целевой функции и запишем условие неотрицательности (5) для всех переменных.

В результате получим задачу линейного программирования вида (10)–(12), эквивалентную исходной задаче и содержащую только свободные переменные исходной задачи, а их число не превосходит двух. Для решения полученной задачи можно использовать графический метод.

Пример 5. Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования в каноническом виде:

$$\begin{aligned} f(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

◀ В данном случае матрица системы ограничений-равенств имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг $r = 4 = m$, причем минор, образованный первыми четырьмя столбцами, может быть выбран в качестве базисного (проверьте!). Число свободных переменных $n - m = 2$, поэтому для решения задачи можно использовать графический метод.

Решив систему ограничений-равенств относительно базисных переменных $x_j, j = 1, \dots, 4$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 &= 50 - x_5, \\ x_3 &= 30 - x_6, \\ x_4 &= 60 - x_5 - x_6. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая с помощью (14) переменные x_1, \dots, x_4 из выражения для целевой функции, находим

$$f(x) = 740 - 7x_5 + 7x_6. \quad (15)$$

С учетом условия неотрицательности $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$, и равенств (14), (15) получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &= 740 - 7x_5 + 7x_6 \rightarrow \min, \\ x_5 + x_6 &\geq 40, \\ x_5 &\leq 50, \\ x_6 &\leq 30, \\ x_5 + x_6 &\leq 60, \\ x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Допустимое множество U последней задачи изображено на рис. 220. Это многоугольник $ABCDE$. Перемещая линию уровня

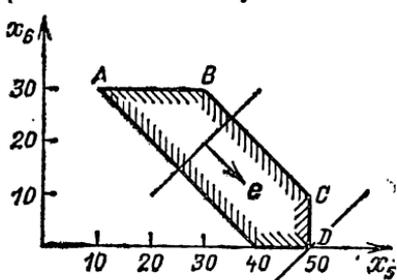


Рис. 220

$-7x_5 + 7x_6 = C$ функции (15) по направлению вектора $e = (7, -7)$, находим точку минимума $f(x)$ — вершину $D(50, 0)$ многоугольника $ABCDE$. Подставив значения $x_5 = 50, x_6 = 0$ в равенства (14), окончательно находим $x^* = (10, 0, 30, 10, 50, 0), f^* = 390$. ▶

Решить задачи линейного программирования в каноническом виде 16.201—16.206 графическим методом.

$$\begin{aligned} 16.201. \quad f(x) &= -x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 &= 15, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

- 16.202. $f(x) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$,
 $-x_1 + 3x_2 + x_4 = 13$,
 $4x_1 + x_2 + x_5 = 26$,
 $-2x_1 + x_2 + x_3 = 1$,
 $x_1 - 3x_2 + x_6 = 0$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$.
- 16.203. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$.
 $10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25$,
 $-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$,
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$.
- 16.204. $f(x) = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$,
 $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$,
 $x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$.
- 16.205. $f(x) = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10$,
 $2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25$,
 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9$,
 $6x_2 + x_3 + x_4 = 36$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$.
- 16.206. $f(x) = -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 \rightarrow \min$,
 $3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$,
 $x_1 + x_2 - x_6 = 3$,
 $4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 19$,
 $4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$.

2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Общим методом решения произвольной задачи линейного программирования является *симплекс-метод*, рассматриваемый ниже.

Пусть ранг r матрицы $A = (a_{ij})$ системы ограничений-равенств (4) задачи линейного программирования в каноническом виде совпадает с рангом расширенной матрицы $(A|b)$.

Выберем какой-нибудь базисный минор матрицы A . Для определенности будем считать, что он соответствует первым r столбцам и строкам этой матрицы. Если $r < m$, то уравнения с номерами $i = r + 1, \dots, m$, являющиеся следствиями остальных уравнений системы, отбросим, полагая в дальнейшем $r = m$.

Используя соотношение (17), выразим целевую функцию из (3) через свободные переменные x_j , $j = m+1, \dots, n$:

$$f(x) = p_0^{(0)} + \sum_{j=m+1}^n p_j^{(0)} x_j, \quad (19)$$

где

$$p_0^{(0)} = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^{(0)}; \quad p_j^{(0)} = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^{(0)}, \quad j = m+1, \dots, n.$$

Справедливы следующие утверждения:

а) Если в выражении (19) все коэффициенты $p_j^{(0)}$, $j = m+1, \dots, n$, неотрицательны, то в угловой точке (18) достигается минимум целевой функции $f(x)$ из (3) на допустимом множестве U задачи (3)–(5) и этот минимум равен $p_0^{(0)}$.

б) Если среди отрицательных коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, из (19) есть такой (например $p_l^{(0)}$), что в (16) все коэффициенты $\alpha_{il}^{(0)} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, то целевая функция $f(x)$ не ограничена снизу на допустимом множестве U и задача (3)–(5) не имеет решений.

в) Если хотя бы один из коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, в (19) отрицателен (например $p_l^{(0)} < 0$) и при этом среди коэффициентов $\alpha_{il}^{(0)}$ в (16) есть хотя бы один положительный, то существует угловая точка $x^{(1)}$ множества U такая, что $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

В случаях а) и б) процесс решения задачи линейного программирования на этом заканчивается. Рассмотрим подробнее случай в). Пусть в (19) коэффициент $p_l^{(0)} < 0$ и в (16) имеются положительные коэффициенты $\alpha_{il}^{(0)}$. Найдем номер k базисной переменной из условия

$$\frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} = \min_{i: \alpha_{il}^{(0)} > 0} \left\{ \frac{\beta_i^{(0)}}{\alpha_{il}^{(0)}} \right\}, \quad (20)$$

где минимум берется по всем номерам $i = 1, \dots, m$, для которых $\alpha_{il}^{(0)} > 0$.

Найдем решение системы (4), считая свободными переменные $x_{m+1}, \dots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \dots, x_n$, т. е. поменяв местами свободную переменную x_l с базисной переменной x_k . Система уравнений вида (16) в этом случае запишется следующим образом:

$$x_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \left(\alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{\alpha_{il}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

$$i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad (21)$$

$$x_l + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \frac{\alpha_{lj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_j + \frac{1}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

в зависимость целевой функции от новых свободных переменных примет вид

$$f(x) = \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \left(p_j^{(0)} - p_l^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{p_l^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k + p_0^{(0)} + p_l^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}. \quad (22)$$

Компоненты нового базисного решения $x^{(1)}$ можно найти, приравняв нулю свободные переменные x_j , $j=m+1, \dots, n$, $j \neq l$, в x_k и найдя при этом условия значения базисных переменных из (21). Базисное решение $x^{(1)}$ является допустимым, т. е. угловой точкой множества U , причем $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

По знакам коэффициентов в системе (21) и выражении для целевой функции (22) можно сделать одно из трех приведенных выше заключений, как это было сделано для угловой точки $x^{(0)}$. В случае в) следует совершить переход к очередной угловой точке $x^{(2)}$, аналогичный переходу от $x^{(0)}$ к $x^{(1)}$, и т. д.

Так как число угловых точек допустимого множества U не превышает C_n^m , то случай в) может повторяться конечное число раз, т. е. в результате конечного числа шагов перехода к новой угловой точке будет либо найдено решение задачи, либо сделано заключение о том, что она не имеет решений.

Реализация описанного выше симплекс-метода значительно упрощается при использовании *симплекс-таблицы*. Записав коэффициенты уравнений (16) и целевой функции (19) соответствующим образом (см. таблицу 3.4), получим симплекс-таблицу задачи (3) — (5) для угловой точки $x^{(0)}$ из (18).

Т а б л и ц а 3.4

	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
x_l	$\alpha_{1,m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{1,l}^{(0)}$...	$\alpha_{1,n}^{(0)}$	$\beta_1^{(0)}$
•	•		•		•	•
•	•		•		•	•
x_k	$\alpha_{k,m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{k,l}^{(0)}$...	$\alpha_{k,n}^{(0)}$	$\beta_k^{(0)}$
•	•		•		•	•
•	•		•		•	•
x_m	$\alpha_{m,m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{m,l}^{(0)}$...	$\alpha_{m,n}^{(0)}$	$\beta_m^{(0)}$
	$p_{m+1}^{(0)}$...	$p_l^{(0)}$...	$p_n^{(0)}$	$-p_0^{(0)}$

Рассмотрим переход от симплекс-таблицы, соответствующей угловой точке $x^{(0)}$, к симплекс-таблице для угловой точки $x^{(1)}$.

Пусть номера k и l определены так, как это сделано выше. Элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$, а также строка и столбец таблицы 3.4, на пересечении которых он стоит, называются *разрешающими* или *опорными*.

Из формул (21) и (22) следует, что преобразование исходной симплекс-таблицы с опорным элементом $\alpha_{kl}^{(0)}$ (см. таблицу 3.4) приводит к новой симплекс-таблице (таблица 3.5), для определения элементов которой необходимо выполнить следующие операции:

1. Поменять местами переменные x_k и x_l , остальные переменные оставить на прежних местах, см. таблицу 3.5.

Т а б л и ц а 3.5

	x_{m+1}	\dots	x_k	\dots	x_n	
x_1	$\alpha_{1, m+1}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{1, k}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{1, n}^{(1)}$	$\beta_1^{(1)}$
	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_l	$\alpha_{l, m+1}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{l, k}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{l, n}^{(1)}$	$\beta_l^{(1)}$
	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_m	$\alpha_{m, m+1}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{m, k}^{(1)}$	\dots	$\alpha_{m, n}^{(1)}$	$\beta_m^{(1)}$
	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	$\rho_{m+1}^{(1)}$	\dots	$\rho_k^{(1)}$	\dots	$\rho_n^{(1)}$	$-\rho_0^{(1)}$

2. На место опорного элемента поставить число $1/\alpha_{kl}^{(0)}$.

3. На остальных местах разрешающей строки записать соответствующие элементы исходной таблицы, деленные на опорный элемент.

4. На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком минус соответствующие элементы исходной таблицы, деленные на опорный элемент.

5. Оставшиеся свободные места в новой симплекс-таблице заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы.

Например, для строки с i -й базисной переменной имеем (знак \square стоит на месте элемента разрешающего столбца, заполненного согласно определению операции 4):

$$\begin{aligned} (\alpha_{i, m+1}^{(1)}, \dots, \square, \dots, \alpha_{i, n}^{(1)}, \beta_i^{(1)}) = \\ = (\alpha_{i, m+1}^{(0)}, \dots, \square, \dots, \alpha_{i, n}^{(0)}, \beta_i^{(0)}) - \\ - \alpha_{i, l}^{(0)} (\alpha_{l, m+1}^{(1)}, \dots, \square, \dots, \alpha_{l, n}^{(1)}, \beta_l^{(1)}). \end{aligned}$$

Пример 6. Решить задачу линейного программирования из примера 5 симплекс-методом, используя в качестве начальной угловой точки $x^{(0)}$ базисное решение, соответствующее свободным переменным x_1 и x_3 .

◀ Столбцы с номерами 2, 4, 5 и 6 матрицы A системы ограничительных равенств данной задачи образуют базисный минор (проверьте!). С помощью эквивалентных преобразований приводим эту систему к виду (16), где базисными являются переменные x_2 , x_4 , x_5 и x_6 :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & +x_1+x_3 & =40 \\ x_4 & +x_1 & =20 \\ x_5 & -x_1-x_3 & =10 \\ x_6 & +x_3 & =30. \end{array} \quad (23)$$

Полагая в равенствах (23) свободные переменные x_1 и x_3 равными нулю, находим $x_2=40$, $x_4=20$, $x_5=10$, $x_6=30$, т. е. базисное решение $x^{(0)}=(0, 40, 0, 20, 10, 30)$. Так как все базисные переменные в $x^{(0)}$ положительны, данное базисное решение является допустимым (т. е. угловой точкой) и невырожденным.

Исключив с помощью (23) базисные переменные в выражении для целевой функции, получим

$$f(x) = 880 - 7x_1 - 14x_3. \quad (24)$$

С помощью равенств (23) и (24) составляем симплекс-таблицу, соответствующую угловой точке $x^{(0)}$:

	x_1	x_3	
x_2	1	1	40
x_4	1	0	20
x_5	-1	-1	10
x_6	0	1	30
	-7	-14	-880

Среди коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, из (19) есть отрицательные — это элементы -7 и -14 последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $x^{(0)}$ не является решением задачи.

Для каждого из отрицательных элементов $p_j^{(0)}$ среди соответствующих коэффициентов $\alpha_{ij}^{(0)}$ из (16) (т. е. элементов симплекс-таблицы, стоящих в том же столбце, что и $p_j^{(0)}$) есть положительные, значит, возможен переход к новой угловой точке $x^{(1)}$ с меньшим значением $f(x)$.

Найдем разрешающий элемент. В качестве опорного можно взять любой из столбцов таблицы, соответствующих свободным переменным x_1 и x_3 . Выберем, например, столбец при свободной переменной x_3 .

Разрешающую строку находим в соответствии с (20): так как $\min(40/1, 30/1) = 30/1$, то разрешающей является строка, соответствующая базисной переменной x_6 . Итак, опорный элемент найден, в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполнив новую симплекс-таблицу по правилам, описанным выше, получим

	x_1	x_3	
x_2	1	-1	10
x_4	1	0	20
x_5	-1	1	40
x_3	0	1	30
	-7	14	-460

Отметим, что значение $f(x)$ в новой угловой точке уменьшилось по сравнению со значением в исходной: 460 вместо 880 (см. элементы в правых нижних углах симплекс-таблиц).

В нижней строке последней таблицы есть отрицательный элемент -7 , стоящий в столбце при свободной переменной x_1 . Кроме того, в этом столбце имеются положительные элементы, поэтому возможно дальнейшее уменьшение $f(x)$ с помощью очередного шага симплекс-метода.

На данном шаге выбор опорного столбца однозначен и определяется отрицательным элементом -7 последней строки. Разрешающая строка находится из условия (20): так как $\min(10/1, 20/1) = 10/1$, то это строка при базисной переменной x_2 . Опорный элемент в последней таблице обведен рамкой.

Как и на предыдущем шаге, находим очередную симплекс-таблицу по общим правилам:

	x_2	x_3	
x_1	1	-1	10
x_4	-1	1	10
x_5	1	0	50
x_3	0	1	30
	7	7	-390

В этой симплекс-таблице оба коэффициента $p_j^{(2)}$, $j \neq 0$, в последней строке положительны. Поэтому угловая точка $x^{(2)}$, соответствующая свободным переменным x_2 и x_3 , является точкой минимума целевой функции $f(x)$: $x^* = x^{(2)} = (10; 0; 30; 10; 50; 0)$. Минимальное значение $f(x)$ со знаком минус записано в правом нижнем углу симплекс-таблицы, поэтому $f^* = 390$. Сравните эти результаты с решением той же задачи, полученным графическим методом, см. пример 5. ►

Замечание. Если задача линейного программирования (3)–(5) вырождена, то возможны *холостые шаги* симплекс-метода, т. е. шаги, в результате которых значение целевой функции не изменяется. При этом теоретически возможно *изащивание*, т. е.

бесконечное повторение холостых шагов. Для того чтобы избежать заикливания, разработаны специальные алгоритмы (*антициклины*). Однако на практике заикливание происходит крайне редко, поэтому антициклины мы здесь не рассматриваем.

Решить задачи линейного программирования 16.207 — 16.212 симплекс-методом, используя $\mathbf{x}^{(0)}$ в качестве начальной угловой точки.

$$16.207. f(\mathbf{x}) = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 1, 2, 1).$$

$$16.208. f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10,$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 2, 0, 0).$$

$$16.209. f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (2; 1; 2; 0; 0).$$

$$16.210. f(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 \rightarrow \min,$$

$$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$-8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 1,$$

$$-x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (0; 1; 1; 0; 1).$$

$$16.211. f(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_2 + 2x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_1 - x_4 - x_5 = 1,$$

$$2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (1; 1; 2; 0; 0).$$

$$16.212. f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 1,$$

$$-3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (0; 1; 1; 1; 0).$$

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с поиска какой-либо угловой точки $x^{(0)}$ допустимого множества U этой задачи.

Метод искусственного базиса нахождения начальной угловой точки $x^{(0)}$ состоит в следующем. Пусть в ограничениях задачи линейного программирования (3)–(5) все $b_i \geq 0, i=1, \dots, m$. Если это не так, то умножим соответствующие уравнения (4) на -1 . Введем m дополнительных переменных $x_{n+i}, i=1, \dots, m$, и рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (26)$$

$$x_k \geq 0, \quad k=1, \dots, n+m. \quad (27)$$

Одной из угловых точек допустимого множества \hat{U} этой задачи, очевидно, является точка $\hat{x}^{(0)} = (0; \dots; 0; b_1; \dots; b_m)$. Поэтому для решения задачи (25)–(27) можно использовать симплекс-метод со следующей начальной симплекс-таблицей:

	x_1	x_2	\dots	x_n	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	b_2
\vdots					\vdots
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	b_m
	p_1	p_2	\dots	p_n	$-p_0$

где $p_j = -\sum_{i=1}^m a_{ij}, j=1, \dots, n; -p_0 = -\sum_{i=1}^m b_i$.

Отметим, что решение задачи (25)–(27) всегда существует, так как ее допустимое множество \hat{U} непусто ($\hat{x}^{(0)} \in \hat{U}$), а целевая функция (25) ограничена снизу на \hat{U} ($\hat{f}(x) \geq 0$).

Пусть $\hat{f}^* = \min_{\hat{U}} \hat{f}(x)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\hat{f}^* > 0$. Тогда допустимое множество U исходной задачи линейного программирования (3)–(5) пусто, т. е. эта задача не имеет решений.

2. $\hat{f}^* = 0$ и минимум целевой функции $\hat{f}(x)$ достигается в угловой точке

$$\hat{x} = (\hat{x}_1; \dots; \hat{x}_n; \hat{x}_{n+1}; \dots; \hat{x}_{n+m}) \quad (28)$$

допустимого множества \hat{U} вспомогательной задачи. Тогда

$$x^{(0)} = (\hat{x}_1; \hat{x}_2; \dots; \hat{x}_n) \quad (29)$$

есть угловая точка допустимого множества U исходной задачи (3)—(5) и ее можно использовать в качестве начальной угловой точки при решении этой задачи симплекс-методом.

Из (25) видно, что равенство $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}^* = 0$ возможно только тогда, когда все координаты x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, в (28) равны нулю.

Если задача (25)—(27) невырождена, то это означает, что все переменные x_{n+i} для угловой точки (28) являются свободными. Опустим столбцы, соответствующие этим переменным в окончательной симплекс-таблице, составленной при решении задачи (25)—(27). Полученная в результате этого таблица будет соответствовать системе уравнений (4), разрешенной относительно m переменных x_i , являющихся базисными для угловой точки (28). Поэтому остается заменить в этой таблице последнюю строку на строку коэффициентов целевой функции (3) исходной задачи и продолжить ее решение симплекс-методом из начальной угловой точки (29).

Если вспомогательная задача (25)—(27) вырождена, то в угловой точке (28) некоторые из переменных x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, могут оказаться базисными. Тогда эти переменные следует перевести в свободные с помощью холостых шагов симплекс-метода, выбирая в качестве разрешающих произвольные элементы симплекс-таблиц, отличные от нуля. После этого исходная задача (3)—(5) решается симплекс-методом так, как описано выше.

Пример 7. Методом искусственного базиса найти какую-либо угловую точку допустимого множества задачи линейного программирования, рассмотренной в примере 5, и записать соответствующую этой угловой точке симплекс-таблицу.

◀ Введем дополнительные переменные x_7, \dots, x_{10} и запишем условие вспомогательной задачи линейного программирования (25)—(27) для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \rightarrow \min, \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 20, \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 50, \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} &= 60, \\ x_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

Считая дополнительные переменные x_7, \dots, x_{10} базисными, запишем симплекс-таблицу этой задачи, соответствующую угловой точке $\hat{x}^{(0)} = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 20; 50; 30; 60)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_7	1	0	0	1	0	0	20
x_8	0	1	0	0	1	0	50
x_9	0	0	1	0	0	1	30
x_{10}	0	0	0	1	1	1	60
	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-160

Любой столбец этой симплекс-таблицы может быть выбран в качестве разрешающего, так как элементы ее последней строки отрицательны. Выберем, например, столбец, соответствующий свободной переменной x_4 . Тогда разрешающим будем элемент этого столбца, стоящий в первой строке, так как $\min(20/1, 60/1) = 20/1$.

Производя преобразования симплекс-метода, получим такую последовательность симплекс-таблиц (рамками обведены разрешающие элементы):

	x_1	x_2	x_3	x_7	x_5	x_6	
x_4	1	0	0	1	0	0	20
x_8	0	1	0	1	1	0	50
x_9	0	0	1	0	0	1	30
x_{10}	-1	0	0	-1	1	1	40
	1	-1	-1	2	-2	-2	-120

→

	x_1	x_2	x_3	x_{10}	x_6	
x_4	1	0	0	0	0	20
x_8	1	1	0	-1	1	10
x_9	0	0	1	0	1	30
x_5	-1	0	0	1	1	40
	-1	-1	-1	2	0	-40

→
→

	x_1	x_8	x_3	x_6	
x_4	1	0	0	0	20
x_2	1	0	0	-1	10
x_9	0	0	1	1	30
x_5	-1	0	0	1	40
	0	1	-1	-1	-30

	x_1	x_3	x_9	
x_4	1	0	0	20
x_2	1	1	1	40
x_8	0	1	1	30
x_5	-1	-1	-1	10
	0	0	0	0

В нижней строке последней симплекс-таблицы нет отрицательных элементов, а в правом нижнем углу стоит нуль. Следовательно, минимум $\hat{f}^* = 0$ вспомогательной целевой функции достигнут и

$$x^{(0)} = (0; 40; 0; 20; 10; 30) \quad (30)$$

есть угловая точка допустимого множества U исходной задачи линейного программирования из примера 5.

⁴⁾ Столбец симплекс-таблицы, соответствующий вспомогательной переменной x_{n+l} , вводимой в свободные на каждом шаге метода искусственного базиса, удобнее вычеркивать на данном шаге вместо того, чтобы исключать такие столбцы одновременно в окончательной симплекс-таблице.

Заменяя нижнюю строку последней симплекс-таблицы на строку коэффициентов целевой функции исходной задачи, получим симплекс-таблицу этой задачи, соответствующую угловой точке $x^{(0)}$ из (30):

	x_1	x_3	
x_4	1	0	20
x_2	1	1	40
x_6	0	1	30
x_5	-1	-1	10
	-7	-14	-880

Отметим, что другие варианты выбора разрешающих элементов в ходе реализации метода искусственного базиса могли привести к другим угловым точкам допустимого множества U исходной задачи.

Использование $x^{(0)}$ из (30) в качестве начальной угловой точки симплекс-метода в рассматриваемой задаче иллюстрирует решение примера 6.

Решить задачи линейного программирования 16.213 — 16.225 симплекс-методом, находя начальную угловую точку методом искусственного базиса.

16.213. $f(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

16.214. $f(x) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 &= 72, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

16.215. $f(x) = -x_1 - 4x_4 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 13, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 &= 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

16.216. $f(x) = -34x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \min,$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$16.217. f(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$16.218. f(x) = -3x_1 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} 15x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + x_5 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 7, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

$$16.219. f(x) = -x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1, \\ -x_1 + x_2 &\geq -1, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$16.220. f(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$16.221. f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_2 + x_4 + x_5 &= -3, \\ x_3 - 2x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\leq 5, \\ x_1 + x_2 &\geq -3, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

$$16.222. f(x) = -8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 &\leq 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 10, \\ 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 &\leq 26, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

16.223. Предприятие, располагающее ресурсами сырья трех видов B_i , $i = 1, 2, 3$, может производить продукцию четырех видов A_j , $j = 1, \dots, 4$. В таблице 3.6 указаны затраты ресурсов B_i на изготовление 1 т продукции A_j , объем ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции A_j .

Таблица 3.6

Вид сырья	Вид продукции				Объем ресурсов, т
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	4	5	2	3	60
B_2	30	14	18	22	400
B_3	16	14	8	10	128
Прибыль, руб.	48	25	56	30	

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условиях:

а) продукции A_2 необходимо выпустить не менее 8 т, продукции A_4 —не более 5 т, а продукции A_1 и A_3 —в отношении 2:1;

б) производственные издержки на 1 т продукции A_j , $j=1, \dots, 4$, составляют соответственно 3, 9, 12 и 6 руб., а суммарные издержки не должны превышать 96 руб.

16.224. Завод получает 4 вида полуфабрикатов B_i в количествах: B_1 —400 т, B_2 —250 т, B_3 —350 т и B_4 —100 т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции A_j . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для A_1 —2:3:5:2, для A_2 —3:1:2:1, для A_3 —2:2:1:3. Стоимость 1 т продукции A_j составляет: A_1 —12 руб., A_2 —10 руб., A_3 —15 руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию:

- максимальной стоимости выпущенной продукции;
- максимального использования полуфабрикатов.

16.225. Решить задачу 16.186 об оптимальном графике работы автобусного парка при следующих исходных данных:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_i	10	20	22	23	25	22	20	15	10	5
c_i	5	5	6	6	6	8	10	15	15	20

3. Целочисленное линейное программирование. Во многих случаях на допустимое множество задачи линейного программирования (3)—(5) накладывается дополнительное требование целочис-

ленности переменных x_j . Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем полностью целочисленную задачу линейного программирования, которая в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \\ x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n \quad (31)$$

где \mathbb{Z} — множество целых чисел.

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что допустимое множество \tilde{U} этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству U задачи линейного программирования без дополнительного требования (31).

Решить полностью целочисленные задачи линейного программирования 16.226—16.234 графическим методом.

16.226. $f(x) = x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$

$$-x_1 + 10x_2 \leq 40,$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 29,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2.$$

◀ На плоскости (x_1, x_2) построим допустимое множество U рассматриваемой задачи линейного программирования без требования целочисленности (многоугольник $ABCD$ на рис. 221) и отметим точки множества U с целочисленными координатами. Совокупность этих точек представляет собой допустимое множество \tilde{U} полностью целочисленной задачи.

Перемещая линию уровня целевой функции $f(x)$ в направлении $e = (-1, 20)$ убывания $f(x)$, находим крайнее положение этой линии, в котором она еще имеет непустое пересечение с множеством \tilde{U} . В этом положении линия уровня проходит через точку $B(0, 4)$, поэтому решение задачи имеет вид $\tilde{x}^* = (0, 4)$, $\tilde{f}^* = \min_{\tilde{U}} f(x) = -80$.

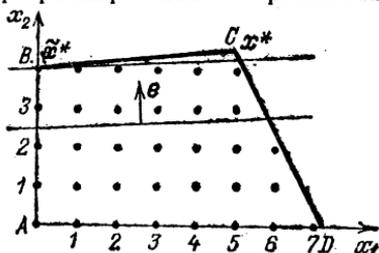


Рис. 221

Отметим, что, как видно из рис. 221, точкой минимума $f(x)$ в данной задаче без требования целочисленности является точка $C(5; 4,5)$, т. е. $x^* = (5; 4,5)$, $f^* = \min_U f(x) = -85$. Отсюда следует,

что точкой минимума целевой функции на допустимом множестве \tilde{U} целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению x^* обычной (нецелочисленной) задачи точка множества U с целочисленными координатами. ►

- 16.227. $f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 3x_2 \leq 36$,
 $x_1 \leq 13$,
 $3x_1 + x_2 \geq 6$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.
- 16.228. $f(x) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min$,
 $4x_1 + 3x_2 \leq 10$,
 $x_1 \leq 5$,
 $x_1 + 2x_2 \leq 8$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.
- 16.229. $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$,
 $4x_1 + x_2 \leq 10$,
 $2x_1 + 3x_2 \leq 8$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.
- 16.230. $f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 3x_2 \leq 5$,
 $x_1 \leq 2$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.
- 16.231. $f(x) = x_2 - x_3 \rightarrow \min$,
 $3x_2 + x_3 + x_4 = 3$,
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.
- 16.232. $f(x) = -x_2 \rightarrow \min$.
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 12$,
 $-8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24$,
 $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, 2$.

16.233. В цехе площадью 74 м² необходимо установить станки, на приобретение которых отпущено 42 тыс. руб.

Существует два типа станков. Станок первого типа стоимостью 6 тыс. руб., требующий 12 м² производственных площадей, обеспечивает изготовление 70 изделий в смену. Аналогичные характеристики станка второго типа составляют соответственно 4 тыс. руб., 6 м², 40 изделий в смену.

Найти оптимальный вариант приобретения станков, обеспечивающий максимальное производство изделий в цехе.

16.234. Решить задачу 16.182 об оптимальном составе сплава, предполагая, что сырье каждого вида приобретается в количествах, кратных 1 кг.

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется метод Гомори. Он состоит в последовательном отсеивании от допустимого множества U нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсеивания производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j .

Опишем алгоритм метода Гомори, использующий симплекс-метод.

1. С помощью симплекс-метода находится решение x^* задачи линейного программирования без учета требования целочисленности (31). Если для x^* условие (31) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_j последнего столбца симплекс-таблицы, определяющей решение x^* , есть такие, что $\{\beta_i\} > 0^1$.

2. Среди нецелых элементов β_i выбирается произвольный элемент β_r (например, с максимальной дробной частью $\{\beta_r\}$). По r -й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное

ограничение вида $-\sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{rj}\}x_j \leq -\{\beta_r\}$ (здесь, как и выше, для

определенности мы полагаем, что свободные переменные x_j имеют номера $m+1, \dots, n$). С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \geq 0$ это ограничение представляется в виде равенства $x_{n+1} -$

$-\sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{rj}\}x_j = -\{\beta_r\}$ и вводится в симплекс-таблицу дополнительной строкой

$$x_{n+1} | \alpha_{n+1, m+1} \dots \alpha_{n+1, n} | \beta_{n+1}, \quad (32)$$

где $\alpha_{n+1, j} = -\{\alpha_{rj}\}$, $j = m+1, \dots, n$; $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\}$.

Так как $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\} < 0$, то после дополнения строкой (32) симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи линейного программирования, которую она описывает.

3. Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

а) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей (на первом шаге, очевидно, $k = n+1$);

б) если все коэффициенты $\alpha_{kj} > 0$, то задача не имеет решения, в противном случае номер l разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{\beta_l}{|\alpha_{kl}|} = \min_{j: \alpha_{kj} < 0} \frac{\beta_j}{|\alpha_{kj}|};$$

в) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом α_{kl} . Если в новой таблице по-прежнему есть хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с операции а), необходимого число раз.

¹ Напомним, что всякое действительное число a можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ — целая часть числа a , а $\{a\} = a - [a]$ — его дробная часть.

Если все элементы β_i вновь полученной симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение найдено. Отметим, что выбор опорного элемента α_{ij} гарантирует неотрицательность коэффициентов p_j новой симплекс-таблицы. Поэтому найденное допустимое базисное решение является и оптимальным.

4. Если найденное в разделе 3 решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления завершаются, а если нет, то продолжаются переходом к разделу 2 описания алгоритма.

Описанный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной задачи линейного программирования или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 8. Решить задачу 16.226 методом Гомори.

◀ Введя дополнительные переменные $x_3, x_4 \geq 0$, запишем эту задачу в каноническом виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 - 20x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 10x_2 + x_3 &= 40, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 29, \\ x_j &\geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Отметим, что так как все коэффициенты ограничений-равенств данной задачи целые, то целочисленность исходных переменных x_1, x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4 . Поэтому и после перехода к каноническому виду можно рассматривать данную задачу как полностью целочисленную и применить для ее решения метод Гомори.

Одна из угловых точек допустимого множества нецелочисленной задачи очевидна: $x^{(0)} = (0, 0, 40, 29)$. Запишем симплекс-таблицу для этой угловой точки:

	x_1	x_2	
x_3	-1	10	40
x_4	4	2	29
	1	-20	0

Решение нецелочисленной задачи находится за две итерации симплекс-метода:

	x_1	x_3		x_4	x_3	
x_2	-1/10	1/10	4	x_2	1/42	4/42
x_4	42/10	-2/10	21	x_1	10/42	-2/42
	-1	2	80		10/42	82/42
						85

Это решение $x^* = (5, 9/2, 0, 0)$, $f^* = -85$ не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем последнюю симплекс-таблицу строкой (32):

	x_4	x_3	
x_2	1/42	4/42	9/2
x_1	10/42	-2/42	5
x_5	-1/42	-4/42	-1/2
	10/42	82/42	85

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий элемент по описанному правилу и преобразуем симплекс-таблицу:

	x_5	x_3	
x_2	1	0	4
x_1	10	-1	0
x_4	-42	4	21
	10	1	80

Последняя симплекс-таблица не только соответствует допустимому базисному решению, но и дает решение рассматриваемой задачи: $\tilde{x}^* = (0, 4)$, $\tilde{f}^* = -80$.

Отметим, что дополнительное ограничение, введенное в симплекс-таблицу, имеет вид $-\frac{2}{42} \cdot x_4 - \frac{4}{42} \cdot x_3 \leq 1/2$. С помощью уравнений $x_3 = 40 + x_1 - 10x_2$, $x_4 = 29 - 4x_1 - 2x_2$ перепишем его для переменных x_1 и x_2 : $x_2 \leq 4$. Отсюда видно, что дополнительное ограничение соответствует отсечению от допустимого множества U (многоугольника $ABCD$ на рис. 221) части, содержащей точку $x^* = (5, 9/2)$ (вершину C этого многоугольника). ►

Решить полностью целочисленные задачи линейного программирования 16.235—16.250 методом Гомори.

16.235. $f(x) = -x_1 + x_4 \rightarrow \min,$

$$-2x_1 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_4 = 2,$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 = 3,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.236. f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$$

$$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

$$16.237. f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 8,$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.238. f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.239. f(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

$$16.240. f(x) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.241. f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.242. f(x) = -x_3 \rightarrow \min,$$

$$-6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6,$$

$$7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей

ограничения-неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad (33)$$

не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях (33)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

вспомогательные переменные x_{n+i} не подчинены требованию целочисленности.

Однако если все коэффициенты a_{ij} , b_i в (33) — целые числа, то условие целочисленности можно распространить и на x_{n+i} , как это сделано при решении примера 8.

Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если в (33) a_{ij} , b_i — рациональные числа. Для этого следует умножить (33) на общее кратное знаменателей коэффициентов a_{ij} , b_i (т. е. перейти к целым коэффициентам в (33)) и лишь после этого ввести вспомогательные переменные x_{n+i} .

$$\begin{aligned} 16.243. \quad f(x) &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 10, \\ 2x_1 + 4x_3 &\geq 14, \\ 2x_2 + x_3 &\geq 7, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16.244. \quad f(x) &= -2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 16, \\ x_1 + x_2 &\leq 7, \\ 3x_1 + 2x_3 &\geq 18, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16.245. \quad f(x) &= -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + x_2 &\leq 44, \\ x_1 &\leq 22, \\ x_2 &\leq 18, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16.246. \quad f(x) &= x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 &\geq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 &\geq 1, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$16.247. f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 -$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq \frac{25}{6},$$

$$x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \leq 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

16.248. В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали A_1 и A_2 . Производительность станков в сутки, стоимость 1 детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице 3.7.

Т а б л и ц а 3.7

Детали	Производительность дет./сут		Стоимость 1 детали, руб.	Минимальный суточный план
	Тип 1	Тип 2		
A_1	20	15	6	1510
A_2	35	30	4	4500

Найти количества x_{ij} станков i -го типа, $i = 1, 2$, которые необходимо выделить для производства деталей A_j , $j = 1, 2$, с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

16.249. Решить задачу 16.183, считая, что в результате усовершенствования технологического процесса расход меди на изготовление одного изделия A_2 снизился с 50 до 40 кг.

16.250. Решить задачу 16.199 в предположении, что товары A_1 и A_2 выпускаются в количествах:

- кратных 1 кг;
- кратных 2 кг.

Если требованию целочисленности подчинены не все переменные задачи линейного программирования, то такая задача называется частично целочисленной.

Для решения частично целочисленных задач также используется метод Гомори, но его алгоритм в этом случае отличается видом коэффициентов $\alpha_{n+i, j}$ в дополнительной строке (32), а именно

$$\alpha_{n+i, j} = \begin{cases} -\alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj} \geq 0, \\ \frac{\{\beta_r\}}{1 - \{\beta_r\}} \alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj} < 0, \end{cases}$$

если переменная x_j подчинена требованию целочисленности, ■

$$\alpha_{n+1, j} = \begin{cases} -\{\alpha_{rj}\}, & \text{если } \{\alpha_{rj}\} \leq \{\beta_r\}, \\ \frac{\{\beta_r\}}{1 - \{\beta_r\}} (\{\alpha_{rj}\} - 1), & \text{если } \{\alpha_{rj}\} > \{\beta_r\}. \end{cases}$$

для x_j , свободных от этого требования.

Разумеется, вычисления заканчиваются, когда целыми являются не обязательно все коэффициенты β_i симплекс-таблицы, а только те, которым соответствуют переменные x_i , подчиненные требованию целочисленности.

Решить частично целочисленные задачи линейного программирования 16.251—16.256 методом Гомори.

$$16.251. \quad f(x) = x_1 - 10x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 12, \\ -8x_1 + 3x_2 &\leq 24, \\ x_j &\geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$16.252. \quad f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_j &\geq 0, \quad x_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$16.253. \quad f(x) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 7/2, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 7, \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad x_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$16.254. \quad f(x) = -10x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 3/2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 7/2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 &= 4, \\ x_j &\geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

16.255. Решить задачу 16.182 об оптимальном составе сплава, предполагая, что сырье второго вида приобретается в количествах, кратных 1 кг, а сырье первого вида — в произвольных количествах.

- 16.256. Решить задачу 16.199 в предположении, что:
- а) товар A_1 выпускается в количествах, кратных 1 кг, а товар A_2 — в произвольных количествах;
- б) товар A_1 выпускается в произвольных количествах, а товар A_2 — в количествах, кратных 1 кг.

§ 4. Нелинейное программирование

1. Задачи, сводящиеся к нелинейному программированию. В наиболее общей постановке задача нелинейного программирования формулируется следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (2)$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = l+1, \dots, m, \quad (3)$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, — заданные (не обязательно линейные) функции n переменных. Отметим, что условие неотрицательности переменных $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, входящее в постановку многих задач нелинейного программирования, можно записать в виде неравенств (3), положив $g_j(x) = -x_j$, $b_j = 0$.

Некоторые задачи нелинейного программирования сводятся к задачам линейного программирования, методы решения которых описаны в § 3.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = l+1, \dots, m, \quad (6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Будем считать, что на допустимом множестве U задачи (4) — (7) знаменатель целевой функции из (4) не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет знак. Если этот знаменатель отрицателен, то умножим числитель и знаменатель дроби из (4) на -1 и будем в дальнейшем считать, что $\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 > 0$ для всех $x \in U$.

Обозначим $y_0 = 1 / \left(\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 \right)$ (очевидно, $y_0 > 0$ при $x \in U$) и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j$, $j = 1, \dots, n$.

В новых переменных y_j , $j=0, 1, \dots, n$, задача (4)–(7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= \sum_{j=0}^n c_j y_j \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 &= 0, \quad i=1, \dots, l, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 &\leq 0, \quad i=l+1, \dots, m, \\ \sum_{j=0}^n d_j y_j &= 1, \\ y_j &\geq 0, \quad j=0, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

т. е. превращается в задачу линейного программирования (см. § 3). Отметим, что требование $y_0 \geq 0$, включенное в условие задачи (8), не ограничивает возможного изменения переменной y_0 , так как $y_0 > 0$ при $x \in U$.

Найдем решение $y^* = (y_0^*, \dots, y_n^*)$, \tilde{f}^* задачи линейного программирования (8) и, используя равенства

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, \quad j=1, \dots, n, \quad f^* = \min_U f(x) = \tilde{f}^*, \quad (9)$$

получим решение исходной задачи дробно-линейного программирования (4)–(7).

Если $y_0^* = 0$, то допустимое множество U задачи (4)–(7) не ограничено и минимум целевой функции $f(x)$ на нем не достигается.

Решить задачи дробно-линейного программирования
16.257–16.266.

$$\begin{aligned} 16.257. \quad f(x) &= \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

◀ Знаменатель $x_1 + 2x_2 + 1$ целевой функции положителен при всех x из допустимого множества U , так как $x_1, x_2 \geq 0$.

Вводя переменные $y_0 = 1/(x_1 + 2x_2 + 1)$, $y_j = y_0 x_j$, $j=1, 2, 3$, получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= -2y_1 + y_2 \rightarrow \min, \\ y_1 - 2y_2 - 2y_0 &\leq 0, \\ 2y_1 - y_2 + y_3 - 6y_0 &= 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 &= 1, \\ y_j &\geq 0, \quad j=0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Приведя эту задачу к каноническому виду и решив ее симплекс-методом, находим $y_0^* = 1/3$, $y_1^* = 2/3$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 2/3$, $f^* = -4/3$, откуда, используя формулы (9), получаем решение исходной задачи: $x^* = (2; 0; 2)$, $f^* = -4/3$. ►

$$16.258. f(x) = \frac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16,$$

$$x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \leq 6,$$

$$x_2 \leq 7,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.259. f(x) = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_2 + x_3 + 1} \rightarrow \min,$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 8,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$16.260. f(x) = \frac{3x_2 - 2x_3}{x_2 + 3x_3} \rightarrow \min,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

$$16.261. f(x) = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 3,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 4,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

$$16.262. f(x) = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{x_1 + 3x_2 + 5x_3} \rightarrow \min,$$

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12,$$

$$7x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12,$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

$$16.263. f(x) = \frac{x_1 - x_2 - 3}{3x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 9,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 10,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

$$16.264. \quad f(\mathbf{x}) = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$4x_1 - x_2 \leq 5,$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7,$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_4 = 17,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

$$16.265. \quad f(\mathbf{x}) = \frac{-3x_1 + 2x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \min,$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_4 = 10,$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_5 - x_6 = 20,$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_6 = 35,$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_6 = 11,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

$$16.266. \quad f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - 2x_2 + 3}{x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 1,$$

$$-3x_1 + x_2 + x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Другой важный класс задач нелинейного программирования, решение которых можно найти методами линейного программирования, образуют задачи квадратичного программирования, в которых требуется минимизировать выпуклую квадратичную функцию (см. § 2) на допустимом множестве, заданном линейными ограничениями, т. е.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{r}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ — симметричная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ — заданный вектор. Напомним, что если матрица \mathbf{Q} положительно определена, то квадратичная функция $f(\mathbf{x})$ из (10) является выпуклой в \mathbb{C}^n .

На основании известной теоремы Куна — Таккера [1] точка минимума $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ целевой функции $f(\mathbf{x})$ из (10) на допустимом множестве U (11), (12) может быть найдена как решение следующей системы уравнений с дополнительными переменными λ_i , x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$; μ_j , $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}x_i + r_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$\lambda_i x_{n+i} = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mu_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

удовлетворяющее условию неотрицательности

$$x_j \geq 0, \mu_j \geq 0, j=1, \dots, n; \quad \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, m. \quad (16)$$

Для решения системы (13)–(16) можно использовать метод искусственного базиса (см. § 3), позволяющий найти одну из угловых точек множества, заданного ограничениями (13), (14), (16). Так как эта точка принадлежит указанному множеству, то она удовлетворяет перечисленным ограничениям.

При реализации метода искусственного базиса следует учитывать и условия (15), т. е. не включать в базисные одновременно переменные λ_i и x_{n+i} с одним и тем же индексом i и переменные x_j, μ_j с одинаковым номером j .

Пример 1. Решить задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Матрица $Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ квадратичной функции $f(x)$ положительно определена (проверьте самостоятельно!). Система (13)–(16) в данном случае принимает вид

$$2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 2, \quad (17)$$

$$-2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 6, \quad (18)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad (19)$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \quad (20)$$

$$\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_4 = 0, \quad (21)$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0; \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0; \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Будем искать угловую точку множества, определяемого этой системой, методом искусственного базиса. При этом, так как уравнения (19) и (20) легко разрешаются относительно переменных x_3 и x_4 , для уменьшения размера симплекс-таблиц дополнительные переменные (x_5 и x_6) вводим только в уравнения (17) и (18), считая базисными переменными начальной угловой точки x_3, x_4, x_5 и x_6 .

Вспомогательную целевую функцию $\tilde{f}(x) = x_5 + x_6$ выразим через свободные переменные $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ и μ_2 с помощью уравнений (17) и (18): $\tilde{f}(x) = -2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + 8$.

Последовательность симплекс-таблиц, приводящих к решению задачи, приведена ниже. Рамками обведены опорные элементы, а те свободные переменные, которые на данном шаге нельзя переводить в базисные из-за условий (21), обведены кружками.

В последней таблице элементы нижней строки неотрицательны, следовательно, минимум вспомогательной целевой функции $\tilde{f}^* = 0$ достигается в угловой точке, соответствующей этой таблице.

Поэтому искомое решение задачи квадратичного программирования имеет вид $x^* = (4/5, 6/5)$, $f^* = f(x^*) = 36/5$. ►

З а м е ч а н и е. Если задача квадратичного программирования наряду с ограничениями-неравенствами (11) содержит и равенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \text{ то для преобразования их к виду (11) следует вы-}$$

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	2	-2	1	-1	-1	0	2
x_6	-2	4	1	2	0	-1	6
x_3	1	1	0	0	0	0	2
x_4	-1	2	0	0	0	0	2
	0	-2	-2	-1	1	1	-8

	x_1	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	1	1	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1
	-1	1	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	-1	-1	0	$\frac{10}{3}$
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{4}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2	-1	1	1	$-\frac{16}{3}$

	x_3	x_4	x_6	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	-1	-3	-1	1	$\frac{4}{3}$
λ_1	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{4}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$-\frac{10}{3}$	2	3	1	-1	$-\frac{2}{3}$

	x_3	x_5	x_6	λ_1	μ_1	μ_2	
x_4							$\frac{4}{10}$
λ_1							$\frac{28}{10}$
x_1							$\frac{4}{5}$
x_2							$\frac{6}{5}$
	0	1	1	0	0	0	0

разить из этих равенств какие-либо базисные переменные через остальные и записать условие неотрицательности для базисных переменных.

Например, преобразуем ограничения-равенства

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 16, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

к виду (11). Разрешив их относительно x_3 и x_4 , находим $x_3 = 6 - 2x_1 + x_2$, $x_4 = 10 - x_1 - 2x_2$. Учитывая условие неотрицательности $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, получим ограничения-неравенства (11): $2x_1 - x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

Решить задачи квадратичного программирования 16.267—16.276.

16.267. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min,$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- 16.268. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min$,
 $5x_1 + 13x_2 \leq 51$,
 $15x_1 + 7x_2 \leq 107$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.
- 16.269. $f(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 3x_2 \leq 6$,
 $2x_1 + x_2 \leq 4$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.
- 16.270. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 \rightarrow \min$,
 $9x_1 + 8x_2 \leq 72$,
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.
- 16.271. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.
- 16.272. $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 16$,
 $3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4$,
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$.
- 16.273. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$,
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.
- 16.274. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$,
 $x_1 + x_2 \leq 1$,
 $x_2 + x_3 \leq 1$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.
- 16.275. $f(x) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 = 4$,
 $x_2 + x_3 = 8$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.
- 16.276. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_3 \rightarrow \min$,
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.

Минимизировать в многоугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(5, 8)$, $(10, 4)$, $(6, 0)$ следующие функции:

$$16.277. f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 4x_1 - 6x_2.$$

$$16.278. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 16x_2.$$

$$16.279. f(x) = -x_1x_2.$$

$$16.280. f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2.$$

2. Методы возможных направлений. Основная идея этой группы методов решения задач нелинейного программирования заключается в построении последовательных приближений к точке минимума x^* целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве U :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k e^{(k)}, \quad k=0, 1, \dots, \quad x^{(0)} \in U, \quad \alpha_k > 0. \quad (22)$$

Эти методы напоминают безусловную минимизацию $f(x)$ градиентными методами (см. § 2).

Вектор $e^{(k)}$, определяющий направления перемещения (22) из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$, должен удовлетворять следующим двум требованиям.

1. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ точка $x^{(k+1)}$ из (22) принадлежит множеству U (т. е. $e^{(k)}$ задает возможное направление).

2. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ выполняется неравенство $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$ (т. е. $e^{(k)}$ определяет направление убывания $f(x)$).

Первое условие означает, в частности, что для граничных точек $x^{(k)}$ допустимого множества U вектор $e^{(k)}$ направлен внутрь U .

Величина $\alpha_k > 0$ в (22) выбирается из условия наибольшего убывания целевой функции в направлении $e^{(k)}$ с учетом требования $x^{(k+1)} \in U$.

Рассмотрим сначала метод возможных направлений решения задачи минимизации выпуклой дифференцируемой нелинейной функции $f(x)$ на допустимом множестве U , заданном линейными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i^1 \quad i=1, \dots, m, \quad (24)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n. \quad (25)$$

Опишем выбор вектора $e^{(k)} = (e_1^{(k)}; \dots; e_n^{(k)})$ из (22), определяющего возможное направление убывания функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть в точке $x^{(k)}$ все неравенства (24) и (25) выполняются как строгие. Это означает, что $x^{(k)}$ — внутренняя точка допустимого множества U . Тогда

$$e^{(k)} = -f'(x^{(k)}), \quad (26)$$

т. е. определение очередного приближения $x^{(k+1)}$ из (22) совпадает с итерацией градиентного метода (см. § 2).

2. Пусть хотя бы одно из неравенств (24), (25) в точке $x^{(k)}$ обращается в равенство, т. е. $x^{(k)}$ является граничной точкой допустимого множества U . Тогда выбор $e^{(k)}$ в соответствии с (26), вообще говоря, невозможен, так как может оказаться, что

¹⁾ Если среди этих ограничений есть равенства, то преобразовать их к виду (24) можно описанным выше способом (см. замечание на с. 72).

точка $x^{(k+1)}$ из (22) при любом $\alpha_k > 0$ не принадлежит множеству U ($e^{(k)}$ из (26) не является возможным в точке $x^{(k)}$ направлением).

Опишем, как определять возможное направление убывания $e^{(k)}$ в этом случае.

Обозначим через I_k и J_k множества индексов, соответствующих ограничениям (24) и (25), которые в точке $x^{(k)}$ обращаются в равенства, т. е.

$$I_k = \left\{ i \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} = b_i \right\}, \quad J_k = \{ j \mid x_j^{(k)} = 0 \}. \quad (27)$$

Представим компоненты $e_j^{(k)}$ вектора $e^{(k)}$ для $i \notin J_k$ в виде

$$e_j^{(k)} = e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}, \quad (28)$$

где

$$e_j^{(k)+} = \begin{cases} e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ 0, & \text{если } e_j^{(k)} < 0; \end{cases}$$

$$e_j^{(k)-} = \begin{cases} 0, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ -e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-} \geq 0$, и $e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-} = 0$ для всех $i \notin J_k$.

Вектор $e^{(k)} = (e_1^{(k)}; \dots; e_n^{(k)})$ из (22) ищется как решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(e^{(k)}) &= (f^*(x^{(k)}), e^{(k)}) = \\ &= \sum_{i \in J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} + \sum_{i \notin J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (29)$$

$$a^{(i)}, e^{(k)} = \sum_{i \in J_k} a_{ij} e_j^{(k)} + \sum_{i \notin J_k} a_{ij} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) \leq 0, \quad i \in I_k, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^n |e_j^{(k)}| = \sum_{i \in J_k} e_j^{(k)} + \sum_{i \notin J_k} (e_j^{(k)+} + e_j^{(k)-}) \leq 1, \quad (31)$$

$$e_j^{(k)} \geq 0, \quad i \in J_k, \quad (32)$$

$$e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-} \geq 0, \quad i \notin J_k, \quad (33)$$

$$e_j^{(k)+} \cdot e_j^{(k)-} = 0, \quad i \notin J_k^2, \quad (34)$$

где $a^{(i)} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$.

¹⁾ Такое представление для $e_j^{(k)}$, $i \notin J_k$, позволяет находить вектор $e^{(k)}$ как решение задачи линейного программирования, содержащей условие неотрицательности переменных, несмотря на то, что его компоненты могут быть отрицательными.

Для $i \in J_k$ представление (28) не используется, так как у вектора $e^{(k)}$, определяющего возможное направление, компоненты $e_j^{(k)}$ с номерами $i \in J_k$ не могут быть отрицательными.

²⁾ Для учета дополнительного условия (34) при решении задачи (29) — (33) симплекс-методом следует не включать переменные $e_j^{(k)+}$ и $e_j^{(k)-}$ с одинаковым номером j в число базисных одновременно.

Поясним смысл соотношений (29) — (33).

1. Минимуму целевой функции $\bar{f}_k(e^{(k)})$ из (29) соответствует минимально возможным с учетом ограничений (30) — (34) углом между искомым вектором $e^{(k)}$ и антиградиентом $-f'(x^{(k)})$, определяющим направление скорейшего убывания $f(x)$ в точке $x^{(k)}$.

2. Ограничение (30) для каждого $i \in I_k$ означает, что вектор $e^{(k)}$ составляет угол $\varphi_i \geq \frac{\pi}{2}$ с вектором $a^{(i)}$, нормальным к граничной гиперплоскости $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ допустимого множества U и направленным вне U .

Так как точка $x^{(k)}$ принадлежит этой гиперплоскости, то условие (30) для любого $i \in I_k$ гарантирует, что направление $e^{(k)}$ является возможным по отношению к i -му ограничению (24) исходной задачи. Рис. 222 поясняет смысл ограничений (30) в двумерном случае.

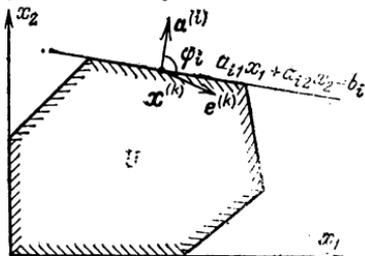


Рис. 222

3. Условие (31) является ограничением на длину вектора $e^{(k)}$ и обеспечивает ограниченность снизу целевой функции $\bar{f}_k(e^{(k)})$ из (29).

4. Неравенство (32) для каждого $j \in J_k$ гарантирует, что направление искомого вектора $e^{(k)}$ является возможным по отношению к j -му ограничению (25) исходной задачи.

5. Соотношения (33) и (34) следуют из представления (28) компонент $e_j^{(k)}$, $j \notin J_k$, вектора $e^{(k)}$.

Опишем теперь, как определить величину перемещения α_k вдоль направления $e^{(k)}$ из (22). Для найденного вектора $e^{(k)}$ она находится из условия

$$f(x^{(k)} + \alpha_k e^{(k)}) = \min_{\alpha > 0, x^{(k)} + \alpha e^{(k)} \in U} f(x^{(k)} + \alpha e^{(k)}),$$

т. е.

$$\alpha_k = \min(\bar{\alpha}_{k1}, \dots, \bar{\alpha}_{km}, \bar{\alpha}_{k1}, \dots, \bar{\alpha}_{kn}, \alpha_k^*), \quad (35)$$

где $\bar{\alpha}_{ki}$ и $\bar{\alpha}_{kj}$ — максимальные перемещения, при которых для точки $x^{(k+1)}$ из (22) выполняются соответственно i -е ограничение (24) и j -е ограничение (25). т. е.

$$\bar{\alpha}_{ki} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (a^{(i)}, e^{(k)}) \leq 0, \\ [b_i - (a^{(i)}, x^{(k)})] / (a^{(i)}, e^{(k)}), & \text{если } (a^{(i)}, e^{(k)}) > 0; \end{cases} \quad (36)$$

$$\bar{\alpha}_{kj} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ -x_j^{(k)} / e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} < 0, \end{cases} \quad (37)$$

а α_k^* находится из условия наискорейшего спуска вдоль направления вектора $e^{(k)}$ без учета ограничений (24), (25), т. е.

$$\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha e^{(k)}). \quad (38)$$

Приведем описание k -го шага решения задачи (23) — (25) методом возможных направлений.

1. Подставить $x^{(k)}$ в неравенства (24) и (25) и определить множества индексов I_k, J_k по формулам (27).

2. Если $I_k = J_k = \emptyset$, найти вектор $e^{(k)}$ из (26), в противном случае определить $e^{(k)}$ из решения задачи линейного программирования (29) — (33) с помощью формулы (28).

3. Для найденного вектора $e^{(k)}$ определить α_k из формул (34) — (37).

4. Найти очередное приближение $x^{(k+1)}$ по формуле (22).

При выполнении хотя бы одного из условий $\|f'(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$ или $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — число, определяющее точность решения задачи, вычисления завершают, полагая $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

Любое из равенств $\|f'(x^{(k)})\| = 0$, $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| = 0$ означает, что точка минимума x^* функции $f(x)$ на множестве U найдена точно: $x^* = x^{(k)}$.

Пример 2. Решить следующую задачу нелинейного программирования с линейными ограничениями методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|f'(x^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq 0,01$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения выберем, например, точку $x^{(0)} = (0,4; 1,4)$ (убедитесь, что $x^{(0)} \in U$).

Шаг 1.

1. Ограничения (24) и (25) в точке $x^{(0)}$ выполняются как строгие неравенства (проверьте!), т. е. $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества U , т. е. $I_0 = J_0 = \emptyset$.

2. В соответствии с (26) находим

$$e^{(0)} = -f'(x^{(0)}) = (7,2; 1,2). \quad (39)$$

3. Из формул (36), (37) получаем $\bar{\alpha}_{01} = 1/7$, $\bar{\alpha}_{02} = 1/12$, $\tilde{\alpha}_{01} = \tilde{\alpha}_{02} = +\infty$.

Определим α_0^* в соответствии с (38), используя условие минимума $\Phi_0'(\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\alpha) &= f(x^{(0)} + \alpha e^{(0)}) = (0,4 + \alpha \cdot 7,2 - 4)^2 + (1,4 + \alpha \cdot 1,2 - 2)^2, \\ \Phi_0'(\alpha) &= 107,04\alpha - 53,52 = 0, \quad \text{откуда } \alpha_0^* = 1/2. \end{aligned}$$

Из (35) окончательно находим

$$\alpha_0 = \min(1/7, 1/12, 1/2, +\infty) = 1/12. \quad (40)$$

4. Используя равенства (22), (39) и (40), получим

$$x^{(1)} = (0,4; 1,4) + \frac{1}{12}(7,2; 1,2) = (1; 1,5). \quad (41)$$

Шаг 2.

1. В точке $x^{(1)}$ из (41) второе из ограничений задачи выполняется как равенство, поэтому $x^{(1)}$ — граничная точка множества U , причем $I_1 = \{2\}$, $J_1 = \emptyset$.

2. Задача (29) — (33) для определения $e^{(1)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(e^{(1)}) &= -6e_1^{(1)+} + 6e_1^{(1)-} - e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} \rightarrow \min, \\ e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-} + 2e_2^{(1)+} - 2e_2^{(1)-} &\leq 0, \\ e_1^{(1)+} + e_1^{(1)-} + e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} &\leq 1, \\ e_j^{(1)+}, e_j^{(1)-} &\geq 0; e_j^{(1)+} \cdot e_j^{(1)-} = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Записав эту задачу в каноническом виде с помощью дополнительных переменных и выбрав эти переменные в качестве базисных, в результате двух шагов симплекс-метода получим $e_1^{(1)+} = 2/3$, $e_2^{(1)-} = 1/3$, $e_1^{(1)-} = e_2^{(1)+} = 0$, т. е.

$$e^{(1)} = (e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-}, e_2^{(1)+} - e_2^{(1)-}) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right). \quad (42)$$

3. По формулам (36), (37) находим $\bar{\alpha}_{11} = 3/2$, $\bar{\alpha}_{12} = 9/2$, $\bar{\alpha}_{13} = \bar{\alpha}_{14} = +\infty$, $\alpha_1 = 156/85$, поэтому в соответствии с (38)

$$\alpha_1 = \min \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{156}{85}, +\infty \right) = \frac{3}{2}. \quad (43)$$

4. Очередное приближение $x^{(2)}$ находим по формуле (22) с учетом (41), (42) и (43):

$$x^{(2)} = \left(1; \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) = (2; 1). \quad (44)$$

Шаг 3.

Как и на втором шаге, для определения $e^{(2)}$ получаем задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f_2(e^{(2)}) &= -4e_1^{(2)+} + 4e_1^{(2)-} - 2e_2^{(2)+} + 2e_2^{(2)-} \rightarrow \min, \\ e_1^{(2)+} - e_1^{(2)-} + e_2^{(2)+} - e_2^{(2)-} &\leq 0, \\ e_1^{(2)+} - e_1^{(2)-} + 2e_2^{(2)+} - 2e_2^{(2)-} &\leq 0, \\ e_1^{(2)+} + e_1^{(2)-} + e_2^{(2)+} + e_2^{(2)-} &\leq 1, \\ e_j^{(2)+}, e_j^{(2)-} &\geq 0; e_j^{(2)+} \cdot e_j^{(2)-} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

решив которую, получим

$$e^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right). \quad (45)$$

Как и на предыдущем шаге, находим $\bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_{22} = \bar{\alpha}_{23} = +\infty$, $\bar{\alpha}_{24} = \alpha_2^* = 1$, т. е.

$$\alpha_2 = \min(1, +\infty) = 1. \quad (46)$$

Из формул (22), (44) — (46) получаем

$$x^{(3)} = (2, 1) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Шаг 4.

Находя $e^{(3)}$ по общему правилу, получим $e^{(3)} = 0$, т. е. $x^{(4)} = x^{(3)}$, и $\|x^{(4)} - x^{(3)}\| = 0$. Это означает, что точка минимума x^* найдена точно: $x^* = x^{(4)} = (5/2; 1/2)$, $f^* = f(x^{(4)}) = 9/2$.

Рис. 223 дает геометрическую иллюстрацию хода решения задачи. На нем штриховыми линиями показаны линии уровня $f(x)$ (окружности с центром в точке $(4,2)$). ►

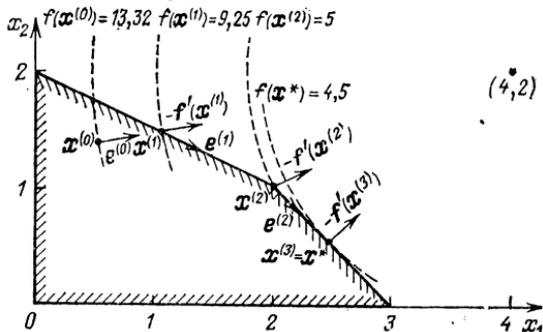


Рис. 223

Решить задачи нелинейного программирования с линейными ограничениями 16.281—16.290 методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|f'(x^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq 0,01$.

$$16.281. f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 40,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.282. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.283. f(x) = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2 \rightarrow \min,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 60,$$

$$x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 40,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.284. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.285. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$$

$$6x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,$$

$$-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$$

$$16.286. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 15, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 &= 60, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$16.287. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 32x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 30, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 &= 60, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{aligned}$$

$$16.288. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 15, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$16.289. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$16.290. f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Метод возможных направлений используется также для решения задачи нелинейного программирования более общего, чем (23)–(25), вида, а именно

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (47)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (48)$$

где $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ — выпуклые дифференцируемые в \mathcal{E}_n функции.

Опишем один из вариантов определения необходимого для решения этой задачи вектора $e^{(k)}$ из (22) методом возможных направлений, а также укажем критерий окончания вычислений.

1. Выбор вектора $e^{(k)}$. Если $\mathbf{x}^{(k)}$ — внутренняя точка допустимого множества U , т. е. $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) < 0$, $i=1, \dots, m$, то вектор $e^{(k)}$ определяется так же, как в рассмотренном выше случае линейных ограничений (24), (25), т. е. $e^{(k)} = -f'(\mathbf{x}^{(k)})$.

Если же $\mathbf{x}^{(k)}$ — граничная точка множества U , т. е. множество индексов

$$I_k = \{i \mid g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0\} \quad (49)$$

непусто, то компоненты $e_j^{(k)}$ вектора $e^{(k)}$ представляются в виде $e_j^{(k)} = e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}$ и находятся из решения следующей задачи линейного программирования с переменными $\sigma_k, e^{(k)+}, e_j^{(k)-}$.

$j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_k &= -\sigma_k \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) + \sigma_k &\leq 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) + \sigma_k &\leq 0, \quad i \in I_k, \\ \sum_{j=1}^n (e_j^{(k)+} + e_j^{(k)-}) &\leq 1, \\ \sigma_k, e_j^{(k)+}, e_i^{(k)-} &\geq 0, e_j^{(k)+} \cdot e_j^{(k)-} = 0, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (50)$$

З а м е ч а н и е. Для ускорения сходимости метода возможных направлений множество индексов (49) иногда определяют не по точному, а приближенному равенству $g_i(\mathbf{x}^{(k)})=0$ со все возрастающей точностью ε_k , т. е. вместо I_k используют множество $I_k(\varepsilon_k) = \{i \mid -\varepsilon_k \leq g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0\}$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2. Выбор величины перемещения α_k . Величина α_k находится по аналогии со случаем линейных ограничений (24), (25) на допустимое множество U , т. е.

$$\alpha_k = \min(\alpha_{ki}, \dots, \alpha_{km}, \alpha_k^*),$$

где α_k^* определяется из (37), а α_{ki} , $i=1, \dots, m$, — максимально возможное перемещение вдоль направления $e^{(k)}$ с учетом i -го ограничения (48), найденное из условия $g_i(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k e^{(k)}) = 0$.

3. Критерий окончания вычислений. Условием достижения заданной точности решения $\varepsilon > 0$ задачи (47), (48) методом возможных направлений служит выполнение хотя бы одного из неравенств $\|f'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$, $\sigma_k \leq \varepsilon$. При выполнении этого условия полагают $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Любое из равенств $f'(\mathbf{x}^{(k)})=0$, $\sigma_k=0$ означает, что точка минимума \mathbf{x}^* функции $f(\mathbf{x})$ на множестве U найдена точно: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k)}$.

Пример 3. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|f'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,1$ или $\sigma_k \leq 0,1$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ g_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 25 \leq 0. \end{aligned}$$

◀ Функции $f(\mathbf{x})$ и $g_1(\mathbf{x})$ являются выпуклыми (проверьте!) и дифференцируемыми в \mathbb{E}_n , поэтому можно использовать метод возможных направлений.

Выберем начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (0; 1)$. Очевидно, $\mathbf{x}^{(0)} \in U$. Шаг 1.

1. Так как $g_1(\mathbf{x}^{(0)}) = -24 < 0$, то $\mathbf{x}^{(0)}$ является внутренней точкой множества U и $I_k = \emptyset$.

2. Вектор $e^{(0)}$ находим по формуле $e^{(0)} = -f'(\mathbf{x}^{(0)}) = (1, 1)$.

3. Найдем максимально возможное перемещение α_{01} из условия $g_1(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{01}e^{(0)}) = 0$: $(0 + \alpha_{01} \cdot 1)^2 + (1 + \alpha_{01} \cdot 1)^2 - 25 = 2\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01} - 24 = 0$, откуда $\alpha_{01} = 3$.

Определяя α_0^* из (38), получим $\alpha_0^* = +\infty$, так как функция $\Phi_0(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha e^{(0)}) = -2\alpha - 1$ неограниченно убывает при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Отсюда находим величину перемещения на первом шаге: $\alpha_0 = \min(3, +\infty) = 3$.

4. Найдем следующее приближение (22):

$$x^{(1)} = (0, 1) + 3(1, 1) = (3, 4).$$

Шаг 2.

2. Поскольку $g_i(x^{(1)}) = 0$, то $x^{(1)}$ — граничная точка множества U и $I_1 = \{1\}$.

2. Вектор $e^{(1)}$ находим из решения задачи линейного программирования (50):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= -\sigma_1 \rightarrow \min, \\ e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-} + e_2^{(1)+} - e_2^{(1)-} + \sigma_1 &\leq 0, \\ 6e_1^{(1)+} - 6e_1^{(1)-} + 8e_2^{(1)+} - 8e_2^{(1)-} + \sigma_1 &\leq 0, \\ e_1^{(1)+} + e_1^{(1)-} + e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} &\leq 1, \\ \sigma_1, e_j^{(1)+}, e_j^{(1)-} &\geq 0, e_j^{(1)+} e_j^{(1)-} = 0, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Решив ее симплекс-методом, получим $\sigma_1 = 1/8$, $e_1^{(1)+} = 9/16$, $e_2^{(1)-} = 7/16$, $e_1^{(1)-} = e_2^{(1)+} = 0$, т. е. $e^{(1)} = (e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-}, e_2^{(1)+} - e_2^{(1)-}) = (9/16, -7/16)$.

3. Величину перемещения α_1 находим, как и на предыдущем шаге: $\alpha_{11} = 16/65$, $\alpha_1^* = +\infty$, т. е. $\alpha_1 = 16/65$.

4. Очередное приближение $x^{(2)}$ находим из (22):

$$x^{(2)} = (3, 4) + \frac{16}{65} \left(\frac{9}{16}; -\frac{7}{16} \right) = (3,138; 3,892).$$

Шаг 3.

Так как $g_1(x^{(2)}) = 0$, то точка $x^{(2)}$ является граничной. Находя $e^{(2)}$ и α_2 по общему правилу, получим: $\sigma_2 = 0,125$, $e^{(2)} = (0,547; -0,453)$, $\alpha_2 = 0,186$. Отсюда $x^{(3)} = (3,240; 3,809)$.

Переходя к следующему шагу, найдем $\sigma_3 = 0,094 < 0,1$, т. е. требуемая точность достигнута и $x^* \approx x^{(3)} = (3,240; 3,809)$, $f^* \approx f(x^{(3)}) = -7,049$. ►

Решить задачи нелинейного программирования 16.291—16.298 методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|f'(x^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\sigma_k \leq 0,01$,

16.291. $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0.$$

16.292. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 6x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0.$$

16.293. $f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 - x_2 \leq 0.$$

16.294. $f(x) = x_1 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \leq 0.$$

16.295. $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2 - 2 \leq 0.$$

- 16.296. $f(x) = 10x_1 - x_2 \rightarrow \min$,
 $g_1(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 3 \leq 0$,
 $g_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 - 4 \leq 0$.
- 16.297. $f(x) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min$,
 $g_1(x) = x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0$,
 $g_2(x) = x_1 - x_2 \leq 0$.
- 16.298. $f(x) = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 \rightarrow \min$,
 $g_1(x) = x_1^2 - 2x_2 \leq 0$,
 $g_2(x) = -x_1 + x_2 \leq 0$.

3. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. Один из подходов к решению задач нелинейного программирования состоит в такой модификации градиентных методов безусловной минимизации (см. § 2), чтобы в процессе построения последовательных приближений к точке минимума учитывались ограничения на допустимое множество.

Ниже рассматриваются два метода минимизации, основанных на этом подходе применительно к решению гладкой задачи выпуклого программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in U, \quad (51)$$

где $U \subset \mathcal{E}_n$ — выпуклое замкнутое множество, $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая на U функция.

Первый метод (метод проекции градиента). На каждой итерации этого метода предусмотрена процедура возврата очередного приближения градиентного спуска $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})$ на допустимое множество U , если $x^{(k+1)} \notin U$. Такой возврат производится посредством проектирования $x^{(k+1)}$ на U , т. е. замены $x^{(k+1)}$ на ближайшую точку множества U .

О п р е д е л е н и е. Пусть заданы замкнутое множество $U \subset \mathcal{E}_n$ и точка $z \in \mathcal{E}_n$. Точка $z_U = P_U(z)$ называется проекцией точки z на множество U , если

$$\rho(z_U, z) = \min_{x \in U} \rho(x, z),$$

где $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — расстояние между точками x и y в пространстве \mathcal{E}_n .

Очевидно, для точки $z \in U$ проекция $P_U(z)$ совпадает с z .

Таким образом, в методе проекции градиента последовательные приближения $x^{(k)}$ к точке минимума x^* целевой функции $f(x)$ на множестве U вычисляются по формулам

$$x^{(k+1)} = P_U[x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})], \quad k = 0, 1, \dots, x^{(0)} \in U. \quad (52)$$

В зависимости от способа вычисления α_k из (52) различают несколько вариантов метода проекции градиента, самыми распространенными из которых являются следующие.

1. α_k находится, как в методе наискорейшего спуска безусловной минимизации (см. § 2), т. е. $\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha)$, где $\Phi_k(\alpha) = f[x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})]$.

2. В предположении, что градиент $f'(x)$ целевой функции удовлетворяет на множестве U условию Липшица, т. е.

$$\|f'(x') - f'(x'')\| \leq L \|x' - x''\| \quad (53)$$

для всех $x', x'' \in U$, полагают $\alpha_k \equiv \alpha$, $k=0, 1, \dots$, где α — произвольное число из интервала $(0; 2/L)$. Если известна минимальная константа Липшица L из (53), то выбирают, как правило, $\alpha = 1/L$.

Вычисления по формуле (52) завершаются при выполнении одного из неравенств $\|f'(x^{(k)})\| \leq \epsilon$ или $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \epsilon$, где величина $\epsilon > 0$ определяет точность решения задачи. Окончательно полагают $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

Отметим, что определение проекции $P_U(z)$ для точки $z \notin U$ является самостоятельной задачей нелинейного программирования

$$\tilde{f}(x) = \|x - z\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min, \quad x \in U, \quad (54)$$

решение которой может вызвать затруднения.

В частном случае, когда множество U определяется лишь линейными ограничениями, задача (54) представляет собой задачу квадратичного программирования. Ее решение может быть найдено за конечное число шагов, как описано выше.

Особый интерес при использовании метода проекции градиента представляют такие множества U , для которых задача проектирования решается в явном виде.

Пример 4. Найти проекцию $P_U(z)$ точки $z \in \mathcal{E}_n$ на множество $U = \left\{ x \in \mathcal{E}_n \mid \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq R_0^2 \right\}$ (замкнутый шар радиуса R_0 с центром в точке 0 в пространстве \mathcal{E}_n).

Запишем условие задачи (54) для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j^2 &\leq R_0^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. $z \in U$, т. е. $\sum_{j=1}^n z_j^2 \leq R_0^2$. Тогда $P_U(z) = z$.

2. $z \notin U$, т. е. $\sum_{j=1}^n z_j^2 = R^2 > R_0^2$. Запишем ограничение-нера-

венство (55) в виде равенства, добавив в его левую часть дополнительную переменную $x_{n+1} = y^2 \geq 0$. В результате получим задачу на условный минимум (см. т. 1, с. 363):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min, \\ \varphi(x, y) &= \sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Для ее решения запишем необходимые условия экстремума функции Лагранжа $L(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 + \lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 \right)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 2(x_j - z_j) + 2\lambda x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 = 0.$$

Решив эту систему $n+2$ уравнений с учетом предположения $\sum_{j=1}^n z_j^2 = R_0^2 > R_0^2$, находим $x_j = \frac{R_0}{R} z_j$, $j = 1, \dots, n$, $\lambda = \frac{R}{R_0} - 1$, $y = 0$,

т. е. $\mathbf{x} = \frac{R_0}{R} \mathbf{z} = R_0 \mathbf{z} / \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}$.

Проверим выполнение достаточного условия минимума $L(x, y, \lambda)$ в найденной точке. Для этого найдем все частные производные второго порядка в точке $(\mathbf{x}; y; \lambda) = \left(\frac{R_0}{R} \mathbf{z}; 0; \frac{R}{R_0} - 1 \right)$: $\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2 \frac{R}{R_0}$,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y} = 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i \neq j; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right).$$

Поэтому $d^2L = 2 \frac{R}{R_0} \sum_{j=1}^n dx_j^2 + 2 \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) dy^2 > 0$ при $\sum_{j=1}^n dx_j^2 + dy^2 > 0$,

т. е. достаточное условие минимума выполняется.

Окончательно

$$P_U(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{z}, & \text{если } \sum_{j=1}^n z_j^2 \leq R_0^2, \\ R_0 \mathbf{z} / \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}, & \text{если } \sum_{j=1}^n z_j^2 > R_0^2. \blacktriangleright \end{cases} \quad (56)$$

Если проекция точки $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_n$ на допустимое множество задачи нелинейного программирования находится в явном виде, то использование метода проекции градиента для ее решения значительно упрощается.

Пример 5. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом проекции градиента, завершая вычисления при выполнении одного из условий $\|f'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,01$, $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 0,01$:

$$f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

◀ В качестве начального приближения возьмем, например, точку $\mathbf{x}^{(0)} = (0; 0,5) \in U$.

Градиент $f'(x) = (-1, 2x_2)$ удовлетворяет условию Липшица (53) с константой $L = 2$, так как

$$\begin{aligned} \|f'(x') - f'(x'')\| &= \sqrt{(-1+1)^2 + (2x_2' - 2x_2'')^2} = \\ &= 2 |x_2' - x_2''| \leq 2 \|x' - x''\|. \end{aligned}$$

Поэтому в (52) можно положить $\alpha_k \equiv \alpha \in (0; 1)$, $k = 0, 1, \dots$, например, $\alpha_k = 0,75$.

Шаг 1. Так как $f'(x^{(0)}) = (-1, 1)$, по формуле (52) находим $x^{(1)} = P_U [x^{(0)} - \alpha f'(x^{(0)})] = P_U [(0; 0,5) - 0,75(-1, 1)] = P_U [(0,75; -0,25)]$.

Точка $(0,75; -0,25)$ принадлежит множеству U , так как $0,75^2 + 0,25^2 = 0,625 < 1$, поэтому $x^{(1)} = (0,75; -0,25)$.

Требуемая точность не достигнута, так как $\|x^{(0)} - x^{(1)}\| = 1,06 > 0,01$.

Шаг 2. Как и на предыдущем шаге, находим

$$f'(x^{(1)}) = (-1; -0,5), \quad x^{(2)} = P_U [(0,75; -0,25) - 0,75(-1; -0,5)] = P_U [(1,5; 0,125)].$$

Точка $(1,5; 0,125)$ допустимому множеству не принадлежит, потому что $1,5^2 + 0,125^2 = 2,266 > 1$. Так как множество U представляет собой замкнутый шар радиуса $R_0 = 1$ с центром в точке 0 в пространстве \mathcal{E}_2 , то, используя результат примера 4, по формуле (56) находим

$$x^{(2)} = P_U [(1,5; 0,125)] = \frac{(1,5; 0,125)}{\sqrt{1,5^2 + 0,125^2}} = (0,9965; 0,08304).$$

Требуемая точность не достигнута, так как $\|x^{(1)} - x^{(2)}\| = 0,298 > 0,01$.

Результаты остальных шагов метода проекции градиента приведены в следующей таблице:

k	$x^{(k)}$	$\ x^{(k-1)} - x^{(k)}\ $	$f'(x^{(k)})$	$x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})$
2	(0,9965; 0,0830)	0,298	(-1; 0,1661)	(1,7465; -0,0415)
3	(0,9997; -0,0238)	0,107	(-1; -0,0476)	(1,7497; 0,0119)
4	(0,99998; 0,00679)	0,031	(-1; 0,0136)	(1,74998; -0,00339)
5	(0,99998; -0,00194)	0,0087	Точность достигнута	

Из таблицы следует, что $x^* \approx x^{(5)} = (0,99998; -0,00194)$, $f^* \approx f(x^{(5)}) = -1$. Отметим, что точное решение рассматриваемой задачи $x^* = (1, 0)$, $f^* = -1$. ►

В задачах 16.299—16.303 найти проекцию $z_U = P_U(z)$ точки $z \in \mathcal{E}_n$ на указанные множества $U \subset \mathcal{E}_n$.

16.299. $U = \{x \in \mathcal{E}_n \mid x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ (неотрицательный октант пространства \mathcal{E}_n).

16.300. $U = \{x \in \mathcal{E}_n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ (n -мерный параллелепипед).

16.301. $U = \left\{ x \in \mathcal{E}_n \mid \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)})^2 \leq R_0 \right\}$ (замкнутый шар радиуса R_0 с центром в точке $x^{(0)}$).

16.302. $U = \left\{ x \in \mathcal{E}_n \mid \sum_{j=1}^n a_j x_j = b, a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$ (гиперплоскость с нормальным вектором a).

16.303. $U = \left\{ x \in \mathcal{E}_n \mid \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b, a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$ (полупространство в \mathcal{E}_n).

Используя результаты решения подходящих задач 16.299—16.303, решить задачи нелинейного программирования 16.304—16.313 методом проекции градиента. Вычисления завершить при $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq 0,01$.

16.304. $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 16x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

16.305. $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2 - 54x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

16.306. $f(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2 \rightarrow \min,$
 $-1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 2.$

16.307. $f(x) = 2\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_2^2} + x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
 $5 \leq x_1 \leq 8, 1 \leq x_2 \leq 10.$

16.308. $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
 $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1.$

16.309. $f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 9.$

16.310. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 + x_3 = 3.$

16.311. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_3 = 2.$

16.312. $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 1)^4 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_2 \leq 2.$

16.313. $f(x) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 - 2x_2 \leq 1.$

Второй метод (метод условного градиента). Пусть $x^{(k)} \in U$ — очередное приближение к решению гладкой задачи выпуклого программирования (51), причем $f'(x^{(k)}) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $x^{(k)}$ функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)}) + o(\|x - x^{(k)}\|),$$

и линейная функция

$$f_k(x) = (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)})$$

является приближением разности $f(x) - f(x^{(k)})$ с точностью до величины $o(\|x - x^{(k)}\|)$ в некоторой окрестности точки $x^{(k)}$.

Поставим вспомогательную задачу минимизации на множестве U линейной функции $f_k(x)$, т. е.

$$f_k(x) = (f'(x^{(k)}), x - x^{(k)}) \rightarrow \min, \quad x \in U. \quad (57)$$

Пусть $\bar{x}^{(k)}$ — решение этой задачи. Следующее приближение $x^{(k+1)}$ к точке минимума x^* функции $f(x)$ на множестве U найдем по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k (\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}), \quad \alpha_k \in (0; 1). \quad (58)$$

В силу выпуклости допустимого множества $x^{(k+1)} \in U$.

Величина α_k из (58) в различных вариантах метода условного градиента вычисляется по-разному. Опишем два способа определения α_k .

1. $\alpha_k = \min(1, \alpha_k^*)$, где α_k^* найдено из условия наискорейшего спуска по направлению $\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}$: $\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha)$, где $\Phi_k(\alpha) = f[x^{(k)} + \alpha(\bar{x}^{(k)} - x^{(k)})]$.

2. В начале выполнения итерации (58) полагают $\alpha_k = 1$, после чего проверяют условие

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}). \quad (59)$$

Если оно нарушается, то α_k уменьшают (дробят) в 2 раза и повторно проверяют (59). Дробление α_k производят до выполнения неравенства (59), после чего переходят к следующей итерации (68).

Условие окончания вычислений по методу условного градиента совпадает с аналогичным условием метода проекции градиента.

Отметим, что вспомогательная задача (57) является, вообще говоря, задачей нелинейного программирования. Укажем случаи, когда поиск ее решения $\bar{x}^{(k)}$ не представляет затруднений.

1. Допустимое множество U задано линейными ограничениями и условием неотрицательности переменных. Тогда (57) — это задача линейного программирования и ее решение можно найти с помощью симплекс-метода (см. § 3).

2. Допустимое множество $U = \{x \in \mathbb{E}_n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ — n -мерный параллелепипед. Тогда

$$\bar{x}_j^{(k)} = \begin{cases} a_j, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j > 0, \\ b_j, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j < 0, \\ \frac{a_j + b_j}{2}, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j = 0. \end{cases} \quad (60)$$

3. Допустимое множество $U = \left\{ x \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{j=1}^n (x_j - y_j^{(0)})^2 \leq R_0^2 \right\}$ — шар радиуса R_0 с центром в точке $y^{(0)}$. Тогда

$$\bar{x}^{(k)} = y^{(0)} - R_0 \frac{f'(x^{(k)})}{\|f'(x^{(k)})\|}.$$

Пример 6. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом условного градиента, завершая вычисления

при $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq 0,1$:

$$f(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

◀ В качестве начального приближения выберем, например, точку $x^{(0)} = (0, 0) \in U$.

Шаг 1. Найдем градиент $f'(x) = (2x_1 - 4, 2x_2 - 2)$ в точке $x^{(0)}$: $f'(x^{(0)}) = (-4, -2)$. Запишем вспомогательную задачу (57):

$$f_k(x) = (f'(x^{(0)}), x - x^{(0)}) = -4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Это задача линейного программирования, ее можно решить симплекс-методом. Однако проще воспользоваться соотношениями (60), откуда следует $\bar{x}^{(0)} = (1, 2)$.

Найдем α_0 первым способом. В данном случае

$$\Phi_0(\alpha) = f[x^{(0)} + \alpha(\bar{x}^{(0)} - x^{(0)})] = f(\alpha, 2\alpha) = 5\alpha^2 - 8\alpha.$$

Из условия $\Phi_0'(\alpha) = 0$ находим $\alpha = \alpha_0^* = 0,8$. Поэтому $\alpha_0 = \min(1, 0,8) = 0,8$.

Вычислим очередное приближение $x^{(1)}$ по формуле (58): $x^{(1)} = (0, 0) + 0,8(1, 2) = (0,8; 1,6)$.

Так как $\|x^{(0)} - x^{(1)}\| = 1,79 > 0,1$, то требуемая точность не достигнута.

Результаты вычислений на следующих шагах метода условного градиента приведены в следующей таблице.

k	$x^{(k)}$	$\ x^{(k-1)} - x^{(k)}\ $	$\bar{x}^{(k)}$	α_k
1	(0,8; 1,6)	1,789	(1,0)	0,462
2	(0,892; 0,861)	0,745	(1,2)	0,212
3	(0,915; 1,103)	0,243	(1,0)	0,168
4	(0,929; 0,917)	0,187	(1,2)	0,140
5	(0,939; 1,069)	0,152	(1,0)	0,121
6	(0,947; 0,940)	0,129	(1,2)	0,106
7	(0,952; 1,053)	0,113	(1,0)	0,095
8	(0,957; 0,953)	0,1	Точность достигнута	

Окончательно $x^* \approx x^{(8)} = (0,957; 0,953)$, $f^* \approx f(x^{(8)}) = -3,91$. ▶

Решить задачи нелинейного программирования 16.314—16.322 методом условного градиента, завершая вычисления при $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq 0,1$.

$$16.314. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.315. f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 \rightarrow \min, \\ -2 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 3.$$

$$16.316. f(x) = e^{(2x_1 - x_2)^2} + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ -2 \leq x_2 \leq 3.$$

$$16.317. f(x) = \ln(2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) + e^{(x_1 - 3x_2)^2} \rightarrow \min, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 0.$$

$$16.318. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

$$16.319. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1.$$

$$16.320. f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13) - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ (x_1 + 2)^2 + x_2^2 \leq 4.$$

$$16.321. f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 + 5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16.322. f(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 26) - x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 2.$$

4. Методы штрафных и барьерных функций. Один из подходов к решению задачи нелинейного программирования $f(x) \rightarrow \min$, $x \in U$ основан на замене этой задачи последовательностью задач безусловной минимизации

$$f_k(x) = f(x) + \varphi_k(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathcal{E}_n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (61)$$

где $\varphi_k(x)$ — функции, которые с ростом k во все большей степени учитывают ограничения, определяющие допустимое множество U исходной задачи.

В методе штрафных функций функции $\varphi_k(x)$ подбираются так, чтобы при больших k функция $f_k(x)$ из (61) мало отличалась от $f(x)$ при $x \in U$ и быстро возрастала при удалении точки $x \notin U$ от допустимого множества U .

О п р е д е л е н и е. Пусть $U \subset \mathcal{E}_n$ — заданное множество. Последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$, определенных в \mathcal{E}_n и обладающих свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in U, \\ +\infty, & \text{если } x \notin U, \end{cases}$$

называется *последовательностью штрафных функций* множества U .

Рассмотрим один из вариантов метода штрафных функций приближенного решения задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ g_i(x) &= 0, \quad i=1, \dots, l, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i=l+1, \dots, m, \end{aligned} \quad (62)$$

считая, что функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i=1, \dots, m$, заданы во всем пространстве \mathcal{E}_n .

Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(x), \quad k=1, 2, \dots, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^l g_i^2(x) + \sum_{i=l+1}^m [g_i^+(x)]^2, \\ g_i^+(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } g_i(x) \leq 0, \\ g_i(x), & \text{если } g_i(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Равенства (63) определяет последовательность штрафных функций допустимого множества задачи (62) (проверьте!).

При определенных условиях последовательность решений задач безусловной минимизации (61), (63) сходится к решению x^* задачи (62), поэтому для достаточно больших k полагают $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

Критерием достижения требуемой точности решения задачи (62) может служить неравенство

$$\|x^{(k)} - x^{(k/2)}\| \leq \varepsilon, \quad (64)$$

где $\varepsilon > 0$ — число, характеризующее точность, k — четное число.

Для решения задач (61) можно использовать методы безусловной минимизации, рассмотренные в § 2.

Если в задаче (62) $f(x)$ — выпуклая квадратичная функция, а $g_i(x)$, $i=1, \dots, m$, — линейные функции, то точное решение вспомогательной задачи (61) можно найти из системы линейных уравнений $\partial f_k(x)/\partial x_j = 0$, $j=1, \dots, n$, определяющих стационарную точку функции $f_k(x)$.

Пример 7. Методом штрафных функций решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g_1(x) &= -x_1 - x_2 + 2 \leq 0, \\ g_2(x) &= x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0, \\ g_3(x) &= -2x_1 + x_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (65)$$

◀ Целевая функция $f(x)$ является выпуклой (проверьте!) квадратичной функцией, а ограничения, определяющие допустимое множество задачи, линейны. Поэтому решение $x^{(k)}$ вспомогательной задачи (61) для любого $k=1, 2, \dots$ может быть найдено точно из условия $f'_k(x^{(k)})=0$.

Так как функция $\varphi_k(x)$ из (63) в различных областях пространства \mathcal{E}_n задана по-разному, то при составлении вспомогательной функции $f_k(x)$ следует сделать определенное предположение о расположении ее точки минимума $x^{(k)}$.

1. Предположим, что в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ безусловного минимума функции $f_k(\mathbf{x})$ все ограничения задачи (65) нарушаются, т. е. $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда $g_i^+(\mathbf{x}^{(k)}) = g_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = 1, 2, 3$, поэтому считаем, что

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + k[g_1^2(\mathbf{x}) + g_2^2(\mathbf{x}) + g_3^2(\mathbf{x})] =$$

$$= (2 + 6k)x_1^2 + (1 + 6k)x_2^2 - 6kx_1x_2 - 2kx_1 - 8kx_2 + 5k.$$

Решив систему уравнений

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} = (4 + 12k)x_1 - 6kx_2 - 2k = 0,$$

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -6kx_1 + (2 + 12k)x_2 - 8k = 0,$$

находим

$$x_1^{(k)} = \frac{18k^2 + k}{27k^2 + 18k + 2}, \quad x_2^{(k)} = \frac{27k^2 + 8k}{27k^2 + 18k + 2}.$$

Так как $g_3(\mathbf{x}^{(k)}) = -2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = \frac{-9k^2 + 6k}{27k^2 + 18k + 2} < 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$, то предположение $g_3(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ не подтвердилось.

2. Предположим, что $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$, $i = 1, 2$, $g_3(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0$. Тогда $g_i^+(\mathbf{x}^{(k)}) = g_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = 1, 2$, $g_3^+(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$, поэтому считаем, что

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + k[g_1^2(\mathbf{x}) + g_2^2(\mathbf{x})] = (2 + 2k)x_1^2 + (1 + 5k)x_2^2 - 2kx_1x_2 -$$

$$- 2kx_1 - 8kx_2 + 5k, \text{ откуда находим}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{9k^2 + k}{9k^2 + 12k + 2}, \quad x_2^{(k)} = \frac{9k^2 + 8k}{9k^2 + 12k + 2}. \quad (66)$$

Легко проверить, что сделанное предположение подтверждается, т. е. равенства (66) определяют точку безусловного минимума $\mathbf{x}^{(k)}$ вспомогательной функции $f_k(\mathbf{x})$ из (61).

Окончательно находим $\mathbf{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (1; 1)$, $f^* = f(\mathbf{x}^*) = 3$.

Отметим, что для решения вспомогательных задач (61) можно было использовать и приближенные (например, градиентные) методы безусловной минимизации (см. § 2). Тогда, если требуемая точность решения задачи нелинейного программирования (65) задана числом ε из (64), равным, например, 0,01, то получим $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(120)} = (0,9899; 0,9963)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(120)}) = 2,9524$, так как $\|\mathbf{x}^{(120)} - \mathbf{x}^{(60)}\| = 0,01$. ►

Решить задачи нелинейного программирования 16.323 — 16.332 методом штрафных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq 0,05$.

16.323. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 - 13 \leq 0,$
 $2x_1 + x_2 - 10 \leq 0.$

16.324. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min,$
 $5x_1 + 13x_2 - 51 \leq 0,$
 $15x_1 + 7x_2 - 107 \leq 0.$

- 16.325. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6.$
- 16.326. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \rightarrow \min,$
 $9x_1 + 8x_2 - 72 \leq 0,$
 $x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0.$
- 16.327. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0,$
 $2x_1 + x_2 - 4 \leq 0.$
- 16.328. $f(\mathbf{x}) = x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 \leq 0,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq 0.$
- 16.329. $f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min,$
 $3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \leq 0.$
- 16.330. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0.$
- 16.331. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 \rightarrow \min,$
 $-2x_1 + x_2^2 \leq 0,$
 $x_1 - 2x_2 \leq 0.$
- 16.332. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0,$
 $-x_1 + x_2 \leq 0.$

В методе барьерных функций исходная задача нелинейного программирования также сводится к последовательности задач безусловной минимизации (61), но функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ выбираются таким образом, чтобы при больших k функции $f_k(\mathbf{x})$ из (61) мало отличались от $f(\mathbf{x})$ во внутренних точках \mathbf{x} допустимого множества U и в то же время при приближении точки $\mathbf{x} \in U$ к границе множества U эти функции неограниченно возрастали.

О п р е д е л е н и е. Пусть множество $U \subset \mathcal{O}_n$ задано. Последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$, определенных во всех внутренних точках множества U , называется *последовательностью барьерных функций* этого множества, если выполняются условия:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = 0$ для любой фиксированной внутренней точки \mathbf{x} множества U ;

2. $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}^{(r)}) = +\infty$ для любой последовательности $\{\mathbf{x}^{(r)}\}$ внутренних точек множества U , сходящейся к какой-либо граничной точке этого множества.

Рассмотрим некоторые варианты метода барьерных функций решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\rightarrow \min, \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (67)$$

Положим

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \varphi(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (68)$$

где

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m |g_i(\mathbf{x})|^{-p}, \quad p > 0, \quad (69)$$

или

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^m \ln[-g_i(\mathbf{x})]. \quad (70)$$

Выражения (68)–(70) определяют последовательности барьерных функций допустимого множества U задачи (67) (проверьте!).

Пусть $\mathbf{x}^{(k)}$ — решение задачи безусловной минимизации (61), где функция $\varphi_k(\mathbf{x})$ определена равенствами (68), (69) или (68), (70). Полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$ для достаточно большого k , находим приближенное решение задачи нелинейного программирования (67) методом барьерных функций. Для контроля достигнутой точности решения можно использовать критерий (64).

Пример 8. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом барьерных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq 0,002$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min, \\ g_1(\mathbf{x}) &= -x_1 + x_2 \leq 0, \\ g_2(\mathbf{x}) &= 1 - x_1 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

◀ Используем последовательность барьерных функций (68), (70). Тогда задача (61) принимает вид

$$f_k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - \frac{1}{k} [\ln(x_1 - x_2) + \ln(x_1 + x_2 - 1)] \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_n.$$

Решая ее методом Ньютона (см. § 2) при $k=500$ и $k=1000$, получаем $\mathbf{x}^{(500)} = (0,6696; 0,3319)$, $\mathbf{x}^{(1000)} = (0,6682; 0,3326)$. Так как $\|\mathbf{x}^{(1000)} - \mathbf{x}^{(500)}\| = 1,65 \cdot 10^{-3} < 0,002$, полагаем $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(1000)} = (0,6696; 0,3319)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(1000)}) = 0,6687$. ▶

Решить задачи нелинейного программирования 16.333–16.339 методом барьерных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq 0,05$.

$$16.333. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 - 2x_2 - x_1 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.334. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^3 - 10x_1 - 8x_2 + 3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 - 2 &\leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.335. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2 \rightarrow \min, \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.336. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 3 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 - 8 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.337. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 1 \rightarrow \min, \\ x_1^2 - 2x_2 &\leq 0, \\ -2x_1 + x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.338. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -x_1 - 5x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2^2 - 1 &\leq 0, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

$$16.339. \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\leq 0, \\ -x_1 + x_2 - 1 &\leq 0, \\ x_1 - x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

§ 5. Дискретное динамическое программирование

В этом параграфе рассматриваются *многошаговые задачи оптимизации*, т. е. задачи, оптимизацию в которых можно представить в виде ряда последовательных этапов (шагов).

Предположим, что состояние некоторого процесса или объекта описывается n -мерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, или, что то же самое, точкой \mathbf{x} пространства \mathcal{E}_n , которое называют *фазовым пространством*.

Будем считать, что процесс является N -шаговым, т. е. его эволюция происходит в N этапов (шагов) в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{x}^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathbf{x}^{(k-1)} & \rightarrow & \mathbf{x}^{(k)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathbf{x}^{(N)}. \\ \text{начальное} & & & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & & & & \text{конечное} \\ \text{состояние} & & & & k\text{-й шаг} & & & & & & \text{состояние} \end{array}$$

Переход между состояниями на k -м шаге происходит в соответствии с *уравнением состояний*

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathcal{E}_m$ есть m -мерный вектор управления, выбираемый на k -м шаге, $\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — заданная n -мерная вектор-функция аргументов $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_m$.

Таким образом, предполагается, что в результате k -го шага процесс переходит в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$, которое определяется только начальным состоянием $\mathbf{x}^{(k-1)}$ этого шага и выбранным на нем вектором управления $\mathbf{u}^{(k)}$ и не зависит от «предыстории» процесса до k -го шага, т. е. от $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-2)}$ и $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}$.

Показателем эффективности k -го шага является заданная числовая характеристика (целевая функция этого шага) $J_k = J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Предположим, что эффективность всего процесса в целом характеризуется целевой функцией вида

$$J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^N J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$ — набор состояний, называемый *фазовой траекторией процесса*, а $\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$ — набор векторов управления, который называется *управлением процессом*.

Таким образом, рассматриваются только *аддитивные* целевые функции J , представимые в виде суммы целевых функций шагов J_k .

Предположим далее, что на фазовую траекторию и выбор управлений наложены ограничения

$$\mathbf{x}^{(k)} \in X_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} \in U_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где X_k и $U_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$ — заданные множества в пространствах \mathcal{E}_n и \mathcal{E}_m соответственно, причём множество U_k зависит, вообще говоря, от начального состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ k -го шага.

Ограничения на начальное и конечное состояния процесса

$$\mathbf{x}^{(0)} \in X_0, \quad \mathbf{x}^{(N)} \in X_N$$

называются *начальными и конечными условиями*. При этом множества X_0 и $X_N \subset \mathcal{E}_n$ во многих случаях содержат по одной точке (начало и конец фазовой траектории).

Пусть $\hat{u} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ — управление процессом, удовлетворяющее ограничениям (4) и переводящее его из некоторого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ в некоторое конечное состояние $x^{(N)} \in X_N$ в соответствии с уравнениями (1) с учетом ограничений (3). Обозначим множество всех таких управлений буквой U .

Многошаговая задача оптимизации формулируется следующим образом: среди всех управлений $\hat{u} \in U$ выбрать такое ($\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, u^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}\}$), для которого целевая функция (2) принимает минимальное или максимальное (в зависимости от смысла задачи) значение.

Управление \hat{u}^* и соответствующая ему фазовая траектория x^* называются оптимальными.

Условие многошаговой задачи оптимизации будем записывать следующим образом:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \text{extr}^1, \quad (5)$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k=1, \dots, N, \quad (6)$$

$$x^{(k)} \in X_k, \quad k=1, \dots, N-1, \quad (7)$$

$$u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}), \quad k=1, \dots, N, \quad (8)$$

$$x^{(0)} \in X_0, \quad x^{(N)} \in X_N. \quad (9)$$

К многошаговым задачам оптимизации сводятся многие прикладные задачи.

Пример 1. Сформулировать следующую задачу в виде многошаговой задачи оптимизации (5) — (9).

С помощью N -ступенчатой ракеты с заданной стартовой массой M в космос запускается межпланетная станция массой m . За время работы каждой ступени ракета получает добавочную скорость $\Delta v = F(y, z)$, где y — масса, разгоняемая этой ступенью, z — масса самой ступени. Найти такое распределение общей массы M ракеты между ее ступенями, при котором конечная скорость станции будет максимальной.

◀ Обозначим $u^{(k)}$, $k=1, \dots, N$, массу k -й ступени, считая от межпланетной станции (т. е. на старте работает ступень массой $u^{(N)}$, а в конце разгона — ступень массой $u^{(1)}$).

Массу станции вместе с примыкающими к ней k ступенями ракеты обозначим $x^{(k)}$, $k=0, 1, \dots, N$. Тогда, очевидно,

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N;$$

$$x^{(0)} = m, \quad x^{(N)} = M + m.$$

Из условия задачи вытекают следующие ограничения на массы $x^{(k)}$ и $u^{(k)}$: $m \leq x^{(k)} \leq M + m$, $0 \leq u^{(k)} \leq M$, т. е.

$$x^{(k)} \in X_k = [m; M + m], \quad k=1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \in U_k = [0; M], \quad k=1, \dots, N.$$

¹ Символом extr мы будем обозначать минимум или максимум соответствующей функции, в зависимости от смысла задачи. Несмотря на то, что задачу на максимум целевой функции J всегда можно свести к задаче минимизации — $J \rightarrow \min$, мы будем рассматривать и задачи на максимум, используя обозначение $J \rightarrow \max$, чтобы математические постановки этих задач соответствовали их прикладному смыслу.

В результате работы k -й ступени ракеты приращение скорости станции составит $F(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, поэтому ее конечная скорость будет равна $\sum_{k=1}^N F(x^{(k-1)}, u^{(k)})$.

Таким образом, рассматриваемую задачу можно сформулировать как многошаговую задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{aligned}
 J(\hat{x}, \hat{u}) &= \sum_{k=1}^N F(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \max, \\
 x^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N, \\
 x^{(k)} &\in [m; m+M], \quad k=1, \dots, N-1, \\
 u^{(k)} &\in [0; M], \quad k=1, \dots, N, \\
 x^{(0)} &= m, \quad x^{(N)} = M + m. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Сформулировать задачи 16.340—16.349 в виде многошаговых задач оптимизации вида (5)—(9).

16.340. Сумма средств S распределяется между N предприятиями. Выделение k -му предприятию средств в размере u приносит доход $J_k(u)$, $k=1, 2, \dots, N$. Определить, какое количество средств необходимо выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход всех предприятий был максимальным.

16.341. Сумма средств S выделяется предприятию в течение N лет. Прибыль, получаемая предприятием в результате выделения ему средств u в течение k -го года, составляет $J_k(u)$, $k=1, \dots, N$. Распределить выделяемые средства по годам таким образом, чтобы суммарная прибыль предприятия за N лет была максимальной.

16.342. Найти N неотрицательных чисел $u^{(k)}$, $k=1, \dots, N$, сумма которых равна S , а произведение максимально.

16.343. Совхоз производит посевной материал. Ежегодно часть семян продается потребителям, а оставшаяся их часть используется для воспроизводства. Доход от продажи u т семян составляет $F(u)$ руб. Количество посевного материала, оставленное в совхозе, в следующем году увеличивается в A раз ($A > 1$). В начале первого года имеется a т семян. В конце N -го года их производство прекращается. Сколько семенного материала следует продавать каждый год, чтобы доход совхоза за N лет был максимальным?

16.344. Рассмотреть задачу 16.343 в предположении, что в конце N -го года производство семян не прекраща-

ется, и минимальное планируемое их количество к началу $(N+1)$ -го года составляет b т.

16.345. Планируется производство на двух предприятиях в течение N лет. Начальные средства, предназначенные для выделения предприятиям, составляют S руб. Средства в размере U руб., вложенные в производство на i -м предприятии в начале каждого года, приносят к концу этого года доход $J_i(u)$ руб., а также сумму $f_i(u)$, оставляемую для финансирования дальнейшего производства, $i=1, 2$. По истечении каждого года все предназначенные для дальнейшего производства средства перераспределяются между предприятиями.

Найти такой способ распределения средств предприятиям, при котором суммарный доход двух предприятий за N лет будет максимальным.

16.346. Оптовая база вмещает P т продукции. Запасы продукции могут пополняться и продаваться в начале каждого из N месяцев, причем пополнение предшествует продаже. Хранение 1 т продукции в течение k -го месяца обходится в α_k руб., а продажа того же ее количества в начале k -го месяца приносит доход β_k руб. Начальное количество продукции на базе составляет a т.

Определить количества продукции, которые в начале каждого месяца следует принимать на хранение и продавать, чтобы суммарная прибыль базы за N месяцев была максимальной.

16.347. Рассмотреть задачу 16.346 в предположении, что в начале каждого месяца продажа продукции предшествует ее пополнению.

$$16.348. F(u) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{k=1}^N a_k u^{(k)} \leq b,$$

$$u^{(k)} \geq 0, u^{(k)} \in \mathbb{Z}, k=1, \dots, N,$$

где $a_k \geq 0, k=1, \dots, N, b \geq 0$ (сепарабельная¹⁾ задача целочисленного программирования с одним линейным ограничением).

¹⁾ Функция n переменных вида $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ называется сепарабельной.

Если все функции, входящие в условие задачи математического программирования, сепарабельны, то такую задачу называют сепарабельной.

$$16.349. F(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(\mathbf{u}^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} \mathbf{u}^{(k)} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathbf{u}^{(k)} \geq 0, \quad \mathbf{u}^{(k)} \in Z, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $a_{ik}, b_i \geq 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, N$ (сепарабельная задача целочисленного программирования с m линейными ограничениями).

Для решения многошаговой задачи оптимизации (5)–(9) используется метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана:

Оптимальная траектория в задаче (5)–(9) обладает тем свойством, что любая ее завершающая часть, начинающаяся с k -го шага, $k = 1, \dots, N-1$, является оптимальной для остающихся шагов процесса.

Опишем метод динамического программирования.

Заметим прежде всего, что в формулировке многошаговой задачи оптимизации (5)–(9) ограничения на фазовую траекторию (7) и на конечное состояние (9) можно включить в ограничения на выбор управлений, заменив соотношения (7) и (8) следующим эквивалентным ограничением:

$$\mathbf{u}^{(k)} \in \tilde{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \{\mathbf{u}^{(k)} \in U_k \mid \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) \in X_k\}, \quad (10)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

С учетом этого перепишем формулировку задачи (5)–(9) в следующем виде:

$$J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^N J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) \rightarrow \text{extr}, \quad (11)$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} \in \tilde{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^{(0)} \in X_0. \quad (14)$$

Предположим, что в результате начальных $k-1$ шагов процесс перешел в состояние $\mathbf{x}^{(k-1)}$. Рассмотрим задачу оптимизации оставшихся $N-k+1$ шагов, аналогичную задаче (11)–(14). Пусть оптимальное управление $\hat{\mathbf{u}}^*(k) = \{\mathbf{u}^{(k)*}, \dots, \mathbf{u}^{(N)*}\}$ последних $N-k+1$ шагов и оптимальная траектория этих шагов $\hat{\mathbf{x}}^*(k) = \{\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)*}, \dots, \mathbf{x}^{(N)*}\}$, начатая из состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$, найдены.

Целевая функция $J^{(k)}(\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{u}}(k)) = \sum_{i=k}^N J_i(\mathbf{x}^{(i-1)}, \mathbf{u}^{(i)})$ послед-

них $N-k+1$ шагов при $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}^*(k), \hat{\mathbf{u}}(k) = \hat{\mathbf{u}}^*(k)$ принимает оптимальное (т. е. минимальное или максимальное) значение, зависящее от начального состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ фазовой траектории этих шагов, т. е.

$$\text{extr } J^{(k)}(\hat{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{u}}(k)) = J^{(k)}(\hat{\mathbf{x}}^*(k), \hat{\mathbf{u}}^*(k)) = B_k(\mathbf{x}^{(k-1)}). \quad (15)$$

Функция $B_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$ из (15) называется функцией Беллмана последних $N-k+1$ шагов.

Очевидно,

$$B_N(\mathbf{x}^{(N-1)}) = \operatorname{extr}_{\mathbf{u}^{(N)} \in \tilde{U}_N(\mathbf{x}^{(N-1)})} J_N(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)}). \quad (16)$$

Кроме того, функции Беллмана связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями, вытекающими из принципа оптимальности:

$$B_k(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \operatorname{extr}_{\mathbf{u}^{(k)} \in \tilde{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)})} \{B_{k+1}[f^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})] + J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})\}, \quad k=1, \dots, N-1. \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17), позволяющие последовательно найти функции Беллмана $B_N(\mathbf{x}^{(N-1)})$, $B_{N-1}(\mathbf{x}^{(N-2)})$, ..., $B_1(\mathbf{x}^{(0)})$, называются *уравнениями Беллмана*.

Находя функции $B_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k=N, N-1, \dots, 1$, из (16) и (17), мы одновременно определяем и управления $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, которым отвечают оптимальные значения соответствующих величин $Z_N = J_N(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)})$ и $Z_k = B_{k+1}[f^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})] + J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})$, $k=N-1, N-2, \dots, 1$, из правых частей равенств (16) и (17):

$$Z_N[\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)*}(\mathbf{x}^{(N-1)})] = \operatorname{extr}_{\mathbf{u}^{(N)} \in \tilde{U}_N(\mathbf{x}^{(N-1)})} Z_N(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)}) = B_N(\mathbf{x}^{(N-1)}), \quad (18)$$

$$Z_k[\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})] = \operatorname{extr}_{\mathbf{u}^{(k)} \in \tilde{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)})} Z_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) = B_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad (19)$$

$k=N-1, \dots, 1$.

Управления $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N$, называются *условными оптимальными управлениями*, а процесс их нахождения — *условной оптимизацией*. Отметим, что управления $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, найденные в соответствии с (19), удовлетворяют принципу оптимальности, т. е. в зависимости от начального состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ управление $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N-1$, учитывает оптимизацию не только k -го шага, но и следующих за ним $N-k$ шагов.

Итак, в результате условной оптимизации находятся функции Беллмана $B_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$ и условные оптимальные управления $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N$.

После этого можно осуществить безусловную оптимизацию в задаче (11) — (14), т. е. определить искомые оптимальное управление процессом $\hat{\mathbf{u}}^* = \{\mathbf{u}^{(1)*}, \dots, \mathbf{u}^{(N)*}\}$ и оптимальную фазовую траекторию $\hat{\mathbf{x}}^* = \{\mathbf{x}^{(0)*}, \dots, \mathbf{x}^{(N)*}\}$ следующим образом.

Так как функция Беллмана $B_1(\mathbf{x}^{(0)})$ для каждого начального состояния $\mathbf{x}^{(0)} \in X_0$ равна оптимальному значению целевой функции N шагов, т. е. всего процесса, начатого из состояния $\mathbf{x}^{(0)}$, то оптимальное начальное условие $\mathbf{x}^{(0)*} \in X_0$ находим из соотношения

$$B_1(\mathbf{x}^{(0)*}) = \operatorname{extr}_{\mathbf{x}^{(0)} \in X_0} B_1(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (20)$$

(если множество X_0 из (14) состоит из единственной точки $\mathbf{x}^{(0)}$, то полагаем $\mathbf{x}^{(0)*} = \mathbf{x}^{(0)}$).

Далее, используя найденные условные оптимальные управления, а также уравнения состояний (12), последовательно находим $u^{(1)*}, x^{(1)*}, u^{(2)*}, x^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}, x^{(N)*}$ из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} u^{(1)*} &= u^{(1)*}(x^{(0)*}), & x^{(1)*} &= f^{(1)}(x^{(0)*}, u^{(1)*}), \\ u^{(2)*} &= u^{(2)*}(x^{(1)*}), & x^{(2)*} &= f^{(2)}(x^{(1)*}, u^{(2)*}), \\ & \dots & & \dots \\ u^{(N)*} &= u^{(N)*}(x^{(N-1)*}), & x^{(N)*} &= f^{(N)}(x^{(N-1)*}, u^{(N)*}). \end{aligned} \quad (21)$$

Алгоритм метода динамического программирования.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Находим условное оптимальное управление $u^{(N)*}(x^{(N-1)})$ и функцию Беллмана $B_N(x^{(N-1)})$ в соответствии с (16), (18).

Шаг 2. Используя результаты первого шага, находим $u^{(N-1)*}(x^{(N-2)})$ и $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ с помощью равенств (17) и (19) при $k=N-1$.

Шаг N . Используя результаты $(N-1)$ -го шага, определяем $u^{(1)*}(x^{(0)})$ и $B_1(x^{(0)})$ в соответствии с (17) и (19) при $k=1$.

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Находим оптимальное начальное состояние $x^{(0)*}$ в соответствии с (20).

Шаг 1. Определяем оптимальные управление $u^{(1)*}$ и конечное состояние $x^{(1)*}$ первого шага процесса по формулам (21).

Шаг 2. Используя результаты предыдущего шага, находим $u^{(2)*}$ и $x^{(2)*}$ в соответствии с (21).

Шаг N . С помощью результатов $(N-1)$ -го шага определяем $u^{(N)*}$ и $x^{(N)*}$ по формулам (21).

Окончательно имеем $\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$, $\hat{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$.

Пример 2. Методом динамического программирования решить задачу из примера 1 со следующими исходными данными: $N=3$, $M=63$, $m=1$, $F(y, z) = z/y$.

◀ Для указанных исходных данных многошаговая задача оптимизации примера 1 формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} J(\hat{x}, \hat{u}) &= \sum_{k=1}^3 \frac{u^{(k)}}{x^{(k-1)}} \rightarrow \max, \\ x^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k=1, 2, 3, \\ x^{(k)} &\in [1; 64], \quad k=1, 2, \\ u^{(k)} &\in [0; 63], \quad k=1, 2, 3, \\ x^{(0)} &= 1, \quad x^{(N)} = 64. \end{aligned} \quad (22)$$

Определим множества $\tilde{U}_k(x^{(k-1)})$ из (10):

$$\tilde{U}_k(x^{(k-1)}) = \{u^{(k)} \in [0; 63] \mid x^{(k-1)} + u^{(k)} \in [1; 64]\} = [0; 64 - x^{(k-1)}],$$

$k=1, 2, 3$, так как $x^{(k-1)} \geq 1$.

Проведем вычисления по методу динамического программирования в соответствии с описанным выше алгоритмом.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Из (16) находим $B_3(x^{(2)}) = \max_{u^{(3)} \in [0; 64 - x^{(2)}]} \frac{u^{(3)}}{x^{(2)}}$. Так как $Z_3(x^{(2)}, u^{(3)}) = u^{(3)}/x^{(2)}$ при всех $x^{(2)} \in [1; 64]$ является возрастающей

функцией аргумента $u^{(3)}$, то ее максимум достигается при максимально возможном значении $u^{(3)}$, т. е.

$$u^{(3)*}(x^{(2)}) = 64 - x^{(2)}. \quad (23)$$

Тогда

$$B_3(x^{(2)}) = Z_3(x^{(2)}, u^{(3)*}(x^{(2)})) = \frac{64 - x^{(2)}}{x^{(2)}}. \quad (24)$$

Шаг 2. В соответствии с (17) при $k=2$ с учетом (24) и (22) получаем

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{u^{(2)} \in [0; 64 - x^{(1)}]} \left(\frac{64 - x^{(1)} - u^{(2)}}{x^{(1)} + u^{(2)}} + \frac{u^{(2)}}{x^{(1)}} \right).$$

Найдем точку максимума $u^{(2)*}(x^{(1)})$ функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}) = \frac{64 - x^{(1)} - u^{(2)}}{x^{(1)} + u^{(2)}} + \frac{u^{(2)}}{x^{(1)}}$ на отрезке $[0; 64 - x^{(1)}]$ в зависимости от $x^{(1)}$.

Для определения стационарных точек функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$ решим уравнение

$$\frac{\partial Z_2}{\partial u^{(2)}} = \frac{(u^{(2)})^2 + 2u^{(2)}x^{(1)} - (x^{(1)})^2 - 64x^{(1)}}{x^{(1)}(x^{(1)} + u^{(2)})^2} = 0, \quad u^{(2)} \in [0; 64 - x^{(1)}],$$

откуда получим

$$u^{(2)}(x^{(1)})_0 = 8\sqrt{x^{(1)}} - x^{(1)} \quad (25)$$

(очевидно, $u^{(2)}(x^{(1)})_0 \in [0; 64 - x^{(1)}]$, так как $x^{(1)} \leq 64$).

Сравним значения функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$ в точке $u^{(2)}(x^{(1)})_0$ из (25) и на концах отрезка $[0; 64 - x^{(1)}]$:

$$\text{а) } Z_2(x^{(1)}, 0) = \frac{64}{x^{(1)}} - 1; \quad \text{б) } Z_2(x^{(1)}, 64 - x^{(1)}) = 0;$$

$$\text{в) } Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}(x^{(1)})_0) = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(1)}}} - 1 \right).$$

Отсюда следует, что $Z_2(x^{(1)}, 64 - x^{(1)}) \leq Z_2(x^{(1)}, 0) \leq Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}(x^{(1)})_0)$ при $x^{(1)} \in [1; 64]$ (проверьте!). Поэтому

$$u^{(2)*}(x^{(1)}) = u^{(2)}(x^{(1)})_0 = 8\sqrt{x^{(1)}} - x^{(1)} \quad (26)$$

и

$$B_2(x^{(1)}) = Z_2[x^{(1)}, u^{(2)*}(x^{(1)})] = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(1)}}} - 1 \right). \quad (27)$$

Шаг 3. Учитывая равенства (27) и (22), из (17) при $k=1$ получаем

$$B_1(x^{(0)}) = \max_{u^{(1)} \in [0; 64 - x^{(0)}]} \left[2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(0)} + u^{(1)}}} - 1 \right) + \frac{u^{(1)}}{x^{(0)}} \right].$$

Как и на втором шаге, исследуя функцию $Z_1(x^{(0)}, u^{(1)}) = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(0)} + u^{(1)}}} - 1 \right) + \frac{u^{(1)}}{x^{(0)}}$ на максимум по $u^{(1)}$ на отрезке $[0; 64 - x^{(0)}]$ (проведите исследование самостоятельно), получим

$$u^{(1)*}(x^{(0)}) = 4(x^{(0)})^{2/3} - x^{(0)}, \quad (28)$$

$$B_1(x^{(0)}) = 12(x^{(0)})^{-1/3} - 3. \quad (29)$$

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Так как множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)}=1$, то полагаем

$$x^{(0)*}=1. \quad (30)$$

Шаг 1. Из формул (21) с учетом (28), (30) и (22) находим

$$u^{(1)*}=u^{(1)*}(1)=3, \quad x^{(1)*}=x^{(0)*}+u^{(1)*}=4.$$

Шаг 2. Аналогичным образом из формул (21), (26) и (22) получаем

$$u^{(2)*}=u^{(2)*}(4)=12, \quad x^{(2)*}=x^{(1)*}+u^{(2)*}=16.$$

Шаг 3. Используя равенства (21), (23) и (22), находим

$$u^{(3)*}=u^{(3)*}(16)=48, \quad x^{(3)*}=x^{(2)*}+u^{(3)*}=64.$$

Окончательно получаем $\hat{u}^*=\{3, 12, 48\}$, $\hat{x}^*=\{1, 4, 16, 64\}$. Таким образом, массы верхней, средней и нижней ступеней ракеты должны равняться соответственно 3, 12 и 48 единицам. При этом межпланетная станция достигнет максимально возможной в данных условиях скорости, равной $B_1(x^{(0)*})=9$ единицам (см. формулы (29), (30)). ▶

Задача, рассмотренная в примере 2, свелась к *непрерывной модели* многошагового процесса оптимизации. В этой модели управления $u^{(k)}$, векторы состояний $x^{(k)}$ и другие величины могут непрерывно изменяться на соответствующих множествах.

Для многих экономических и производственных задач характерной является *дискретная модель*, предполагающая, что величины, описывающие процесс, могут принимать только дискретный ряд значений. Функциональные зависимости в таких задачах задаются, как правило, в виде таблиц, а не аналитически. Однако общая схема их решения методом динамического программирования остается без изменений.

Пример 3. Общая сумма в 4 млн. руб. распределяется между тремя предприятиями в количествах, кратных 1 млн. руб. В результате выделения средств k -му предприятию в размере u оно дает доход $J_k(u)$, $k=1, 2, 3$, величина которого может быть найдена из таблицы 5.1.

Таблица 5.1

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	5	9	11	12
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	7	9	10	11

Распределить средства между предприятиями так, чтобы их суммарный доход был максимальным.

◀ Обозначив средства, выделенные k -му предприятию ($k=1, 2, 3$), символом $u^{(k)}$, а сумму средств, выделенных предприятиям с номерами от 1 до k , символом $x^{(k)}$, сформулируем рассматриваемую

задачу как многошаговую задачу оптимизации (11) — (14):

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^3 J_k(u^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k=1, 2, 3,$$

$$u^{(k)} \in [0; 4 - x^{(k-1)}] \cap \mathbb{Z}, \quad k=1, 2, 3,$$

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(3)} = 4.$$

Для решения этой задачи применим метод динамического программирования.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Найдем $B_3(x^{(2)}) = \max_{u^{(3)} \in [0; 4 - x^{(2)}] \cap \mathbb{Z}} J_3(u^{(3)})$. Так как функция $Z_3(x^{(2)}, u^{(3)}) = J_3(u^{(3)})$ является возрастающей функцией аргумента $u^{(3)}$ (см. таблицу 5.1), то ее максимум достигается при максимальном допустимом значении $u^{(3)}$, т. е.

$$u^{(3)*}(x^{(2)}) = [4 - x^{(2)}]^1. \quad (31)$$

Отсюда $B_3(x^{(2)}) = Z_3(x^{(2)}, u^{(3)*}(x^{(2)})) = J_3([4 - x^{(2)}])$. Значения $B_3(x^{(2)})$, найденные с помощью таблицы 5.1 представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

$x^{(2)}$	0	1	2	3	4
$B_3(x^{(2)})$	11	10	9	7	0

Шаг 2. Вычислим

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{u^{(2)} \in [0; 4 - x^{(1)}] \cap \mathbb{Z}} \{B_3(x^{(1)} + u^{(2)}) + J_2(u^{(2)})\}.$$

Для нахождения максимума функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}) = B_3(x^{(1)} + u^{(2)}) + J_2(u^{(2)})$ составляем таблицу 5.3 значений этой функции, используя данные таблиц 5.1 и 5.2.

В таблице 5.3 рамками обведены максимальные по $u^{(2)}$ значения функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$, соответствующие различным значениям $x^{(1)}$.

Используя таблицу 5.3 находим функции $B_2(x^{(1)})$ и $u^{(2)*}(x^{(1)})$, представив их значения в таблицах 5.4 и 5.3.

Шаг 3. Так как множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)} = 0$, то найдем только $B_1(0)$ и $u^{(1)*}(0)$:

$$B_1(0) = \max_{u^{(1)} \in [0; 4] \cap \mathbb{Z}} \{B_2(0 + u^{(1)}) + J_1(u^{(1)})\}.$$

Для определения максимума в правой части последнего равенства составим таблицу 5.6 значений функции $Z_1(0, u^{(1)}) = B_2(u^{(1)}) + J_1(u^{(1)})$, которые найдем с помощью таблиц 5.1 и 5.4.

Из таблицы 5.6 видно, что $B_1(0) = 20$, причем $u^{(1)*}(0) = 1$ или $u^{(1)*}(0) = 2$, т. е. в данной задаче существует два оптимальных управления и две оптимальные траектории.

¹⁾ Напомним, что символом $[a]$ обозначается целая часть числа a .

Таблица 5.3

$x^{(1)}$	$u^{(2)}$				
	0	1	2	3	4
0	11	14	17	19	14
1	10	13	15	12	—
2	9	11	8	—	—
3	7	4	—	—	—
4	0	—	—	—	—

Таблица 5.4

$x^{(1)}$	0	1	2	3	4
$B_2(x^{(1)})$	19	15	11	7	0

Таблица 5.5

$x^{(1)}$	0	1	2	3	4
$u^{(2)*}(x^{(1)})$	3	2	1	0	0

Таблица 5.6

$u^{(1)}$	0	1	2	3	4
$Z_2(0, u^{(1)})$	19	20	20	19	12

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 1. а) Пусть $u^{(1)*} = 1$. Тогда $x^{(1)*} = x^{(0)*} + u^{(1)*} = 1$.

б) Пусть $u^{(1)*} = 2$. Тогда $x^{(1)*} = x^{(0)*} + u^{(1)*} = 2$.

Шаг 2. а) Для $x^{(1)*} = 1$ имеем $u^{(2)*} = u^{(2)*}(1) = 2$ (см. таблицу 5.5), $x^{(2)*} = x^{(1)*} + u^{(2)*} = 3$.

б) Для $x^{(1)*} = 2$ получаем $u^{(2)*} = u^{(2)*}(2) = 1$ (см. таблицу 5.5), $x^{(2)*} = x^{(1)*} + u^{(2)*} = 3$.

Шаг 3. Так как для обеих оптимальных фазовых траекторий $x^{(2)*} = 3$, то из (31) находим $u^{(3)*} = u^{(3)*}(3) = 1$, $x^{(3)*} = x^{(2)*} + u^{(3)*} = 4$.

Окончательно получаем $\hat{u}^* = \{1, 2, 1\}$ или $\hat{u}^* = \{2, 1, 1\}$ и соответственно $\hat{x}^* = \{0, 1, 3, 4\}$ или $\hat{x}^* = \{0, 2, 3, 4\}$.

Таким образом, существуют два оптимальных варианта распределения средств предприятиям:

Первый вариант: первому предприятию выделяется 1 млн. руб., второму — 2 млн. руб. и третьему — 1 млн. руб.;

Второй вариант: первому — 2, второму — 1 и третьему — 1 млн. руб.;

В обоих случаях суммарный доход предприятий составит $B_1(0) = 20$ млн. руб. ▶

В условиях задачи 16.340 решить задачи 16.350 — 16.352 об оптимальном распределении средств предприятиям со следующими исходными данными.

16.350. $S = 5$ млн. руб., $N = 4$. Средства предприятиям распределяются в количествах, кратных 1 млн. руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы следующей таблицей:

u (млн. руб.)	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	1,5	2	3,5	5,5	9
$J_2(u)$	0	3	4,5	5,5	6,5	7,5
$J_3(u)$	0	4	5	5,5	6	9
$J_4(u)$	0	2	3	4	6,5	8

16.351. $S = 5$ млн. руб., $N = 5$. Средства распределяются в количествах, кратных 1 млн. руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы таблицей из условия задачи 16.350, а функция $J_5(u)$ — следующей таблицей:

u (млн. руб.)	0	1	2	3	4	5
$J_5(u)$	0	3	4,5	6	7,5	3,5

16.352. $S = 100$ тыс. руб., $N = 4$. Средства каждому предприятию выделяются в количествах, кратных 25 тыс. руб., но не могут превосходить 50 тыс. руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы следующей таблицей:

u (тыс. руб.)	0	25	50	75	100
$J_1(u)$	0	12	14	20	28
$J_2(u)$	0	12	18	24	30
$J_3(u)$	0	12	16	24	30
$J_4(u)$	0	8	12	16	24

В условиях задачи 16.341 решить задачи 16.353 — 16.357 об оптимальном выделении средств предприятию в течение N лет со следующими исходными данными.

16.353. $S = 500$ тыс. руб., $N = 4$. Средства, выделяемые в течение каждого года, кратны 100 тыс. руб. Функции $J_k(u)$ представлены в таблице.

u (тыс. руб.)	0	100	200	300	400	500
$J_1(u)$	0	40	70	104	120	136
$J_2(u)$	0	50	80	96	112	124
$J_3(u)$	0	34	76	100	110	120
$J_4(u)$	0	60	90	100	110	136

16.354*. Найти решение задачи 16.353, если начальная сумма S

а) уменьшена на 100 тыс. руб.;

б) увеличена на 100 тыс. руб. при следующих дополнительных данных о прибыли предприятия при выделении ему в течение k -го года средств в размере 600 тыс. руб.:

k	1	2	3	4
$J_k(600)$	146	132	130	144

16.355. $S = 400$ тыс. руб., $N = 4$. Выделяемые в течение k -го года средства кратны 20 тыс. руб. и не могут превосходить 200 тыс. руб. Функции $J_k(u)$ заданы таблицей

u (тыс. руб.)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$J_1(u)$	0	10	20	40	100	160	180	190	200	210	215
$J_2(u)$	0	20	40	60	80	95	101	102	103	104	105
$J_3(u)$	0	5	10	15	25	37	69	140	225	280	300
$J_4(u)$	0	30	68	95	140	160	170	175	176	177	178

16.356. $S = 300$ тыс. руб., $N = 3$, функции $J_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, определяются следующим образом:

а) $J_1(u) = J_2(u) = J_3(u) = 10 - 10^{-2} \cdot (u - 100)^2$;

$$6) J_1(u) = J_2(u) = 24 - 6 \cdot 10^{-4} (u - 200)^2,$$

$$J_3(u) = 16 - 4 \cdot 10^{-4} (u - 200)^2.$$

$$16.357. S = 150 \text{ тыс. руб.}, N = 3, J_1(u) = 0,12u, J_2(u) = 0,0012u^2, J_3(u) = 0,36u - 0,0024u^2.$$

16.358. Найти решение задачи 16.342, если $N = 3, S = 9$.

16.359. Найти решение задачи 16.342 с произвольными исходными данными.

16.360. Найти решение задачи 16.343, если $F(u) = cu, c > 0$.

16.361. Найти решение задачи 16.343 при следующих исходных данных: $F(u) = 0,1u^2, A = 5, a = 4, N = 3$.

16.362. Найти решение задачи 16.344, если $F(u) = cu, c > 0, A^2 a > b$.

16.363. Найти решение задачи 16.344 при следующих исходных данных: $F(u) = 0,1u^2, A = 5, a = 4, b = 5, N = 3$.

16.364. Найти решение задачи 16.345 со следующими исходными данными: $N = 4, S = 200$ тыс. руб., $J_1(u) = 0,3u, J_2(u) = 0,4u, f_1(u) = 0,8u, f_2(u) = 0,5u$.

16.365. Найти решение задачи 16.345 при следующих исходных данных: $N = 3, S = 120$ тыс. руб., $f_1(u) = 0,4u, f_2(u) = 0,6u$. Выделение средств предприятиям происходит в количествах, кратных 20 тыс. руб., а функции $J_1(u)$ и $J_2(u)$ заданы следующей таблицей:

(тыс. руб.)	0	20	40	60	80	100	120
$J_1(u)$	0	5	8	12	14	15	16
$J_2(u)$	0	3	5	8	12	14	15

16.366. Найти решение задачи 16.346 со следующими исходными данными: $P = 10, N = 4, a = 0$. Коэффициенты α_k и $\beta_k, k = 1, \dots, 4$, представлены в таблице:

k	1	2	3	4
α_k	10	15	10	6
β_k	7	12	9	8

Считать, что к концу рассматриваемого периода база должна быть освобождена от продукции.

16.367. Найти решение задачи 16.346 при следующих исходных данных: $P = 12, N = 4, a = 5$. Значения коэффи-

центов $\alpha_k, \beta_k, k=1, \dots, 4$, приведены в условии задачи 16.366.

Считать, что к концу рассматриваемого периода на базе должно остаться 4 т продукции.

Используя результат решения задачи 16.349, решить задачи целочисленного линейного программирования 16.368—16.371 методом динамического программирования.

16.368. $F(u) = -4u^{(1)} - 3u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$4u^{(1)} + u^{(2)} \leq 10,$$

$$2u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 8,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

16.369. $F(u) = -u^{(1)} - u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$u^{(1)} \leq 2,$$

$$2u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 5,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

16.370. $F(u) = -9u^{(1)} - 11u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$u^{(1)} \leq 5,$$

$$4u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 10,$$

$$u^{(1)} + 2u^{(2)} \leq 8,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

16.371. $F(u) = -u^{(1)} - 2u^{(2)} - 3u^{(3)} \rightarrow \min,$

$$6u^{(1)} + 4u^{(2)} + 3u^{(3)} \leq 25,$$

$$5u^{(1)} + 3u^{(2)} + 2u^{(3)} \leq 15,$$

$$u^{(k)} \geq 0; u^{(k)} \in \mathbb{Z}, k=1, 2, 3.$$

16.372. Имеется 7 т сырья, пригодного для производства изделий трех видов. Для изготовления одного изделия каждого вида требуется соответственно 1, 2 и 3 т сырья.

Расходы $J_k(u)$ на производство u изделий k -го вида, $k=1, 2, 3$, приведены в таблице (значения $J_k(0)$ характеризуют штраф, выплачиваемый в случае, если изделие k -го вида не производится).

u	0	1	2	3	4	5	6	7
$J_1(u)$	40	30	25	21	17	14	11	2
$J_2(u)$	55	40	29	21	—	—	—	—
$J_3(u)$	70	50	35	—	—	—	—	—

Спланировать выпуск изделий так, чтобы затраты на их производство были минимальны.

16.373. Судно грузоподъемностью 10 т загружается контейнерами трех типов. Массы контейнеров различных типов

и стоимости грузов в них составляют соответственно 860 кг, 720 кг, 600 кг и 516 руб., 360 руб., 240 руб.

Найти количества контейнеров каждого типа, которые необходимо загрузить, чтобы стоимость грузов на судне была максимальной.

16.374. Имеется 9 однотипных станков, каждый из которых можно наладить на производство изделий одного из трех видов. Зависимость количества изделий каждого вида, изготовленных за смену, от количества станков, занятых для их производства, приведена в таблице.

Вид изделия	Число станков								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	14	18	22	26	32	38	42	48	50
II	10	18	24	28	30	36	40	44	54
III	12	20	26	30	32	36	42	44	50

Найти количества станков, которые необходимо использовать для изготовления изделий каждого вида, чтобы общее число произведенных изделий было максимальным.

§ 6. Вариационное исчисление

I. Предварительные сведения. Простейшая задача вариационного исчисления. Существует ряд прикладных задач оптимизации, в которых качество выбранного решения не удается охарактеризовать с помощью целевой функции. Числовой показатель качества в этих задачах зависит от функции (а не от одной или нескольких переменных), определить которую необходимо так, чтобы этот показатель принял минимальное или максимальное значение. Числовыми показателями в указанных задачах являются *функционалы*.

О п р е д е л е н и е. Если каждому элементу $y = y(x)$ множества G из некоторого функционального пространства X поставлено в соответствие определенное число J , то говорят, что на множестве $G \subset X$ задан функционал $J(y) \equiv J[y(x)]$.

В качестве функциональных пространств X в вариационном исчислении используются пространства $C_n[a; b]$, которые определяются следующим образом.

Линейное нормированное пространство $C_n[a; b]$, $n = 0, 1, \dots$, состоит из функций $y(x)$, имеющих на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные $y^{(k)}(x)$ до n -го порядка включительно¹⁾, с нормой

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y^{(k)}(x)|.$$

¹⁾ Под производной $y^{(0)}(x)$ нулевого порядка здесь понимается сама функция $y(x)$.

Расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между функциями (кривыми) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространстве $C_n[a; b]$ определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2)_n = \|y_1 - y_2\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)|, \quad n=0, 1, \dots$$

Пусть функция $y^*(x) \in C_n[a; b]$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Множество функций (кривых) $y(x) \in C_n[a; b]$, для которых выполняется неравенство

$$\rho(y^*, y)_n < \varepsilon,$$

называется ε -окрестностью n -го порядка кривой $y^*(x)$.

Говорят, что функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ локального или относительного минимума (максимума), если для всех $y(x)$ из некоторой ε -окрестности кривой $y^*(x)$ выполняется неравенство

$$J[y^*(x)] \leq J[y(x)] \quad (J[y^*(x)] \geq J[y(x)]). \quad (1)$$

Локальные минимумы и максимумы функционала $J[y(x)]$ называются его локальными экстремумами.

Если (1) выполняется для всех кривых $y(x)$, принадлежащих некоторому множеству $G \subset C_n[a; b]$, то говорят, что на кривой $y^*(x)$ достигается абсолютный экстремум функционала $J[y(x)]$ на множестве G .

Пусть функционал $J[y(x)]$ определен на множестве $G \subset C_1[a; b]$. Функции $y(x) \in G$ можно рассматривать не только как элементы пространства $C_1[a; b]$, но и как элементы $C_0[a; b]$. Локальный экстремум функционала $J[y(x)]$ в пространстве $C_0[a; b]$ называется сильным, а в пространстве $C_1[a; b]$ — слабым локальным экстремумом. Всякий сильный экстремум функционала является и слабым, а обратное, вообще говоря, неверно.

Отметим, что всякий абсолютный экстремум функционала $J[y(x)]$ является сильным и слабым локальным экстремумом, но не всякий локальный экстремум будет абсолютным.

Сформулируем простейшую задачу вариационного исчисления.

Пусть функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам. Требуется среди всех функций $y(x) \in C_1[a; b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad (2)$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании на множестве всех гладких кривых, проходящих через точки $M_0(a, y_0)$ и $M_1(b, y_1)$, той кривой, на которой функционал (3) достигает слабого экстремума.

При решении простейшей задачи вариационного исчисления используется следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы функционал (3) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функ-

ция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (4)$$

Решения (интегральные кривые) уравнения (4) называют *экстремальми* функционала (3).

Уравнение (4) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$y''(x) F_{y'y'} + y'(x) F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые находятся с помощью граничных условий (2).

Отметим, что так как всякий сильный экстремум функционала является и слабым, то теорема 1 дает необходимое условие и сильного экстремума функционала (3).

Кроме того, так как абсолютный экстремум функционала (3) на множестве

$$G = \{y(x) \in C_1[a; b] \mid y(a) = y_0, y(b) = y_1\} \quad (5)$$

является и локальным экстремумом (сильным и слабым), то теорема 1 определяет необходимое условие абсолютного экстремума функционала (3) на множестве (5).

Таким образом, решение краевой задачи

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0, \\ y(a) &= y_0, \quad y(b) = y_1 \end{aligned}$$

позволяет найти все кривые возможного экстремума функционала (3) на множестве функций (5).

Пример 1. Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

◀ В данном случае $F(x, y, y') = y'^2 - 12xy$, поэтому уравнение Эйлера (4) имеет вид $y'' + 6x = 0$. Его общее решение $y(x) = -x^3 + C_1x + C_2$. Из условий $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ получаем систему уравнений для определения C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0, \\ y(1) &= -1 + C_1 + C_2 = 1, \end{aligned}$$

откуда находим $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче существует единственная экстремаль $y(x) = -x^3 + 2x$. ▶

Решение задачи (6) существует не всегда, а если оно существует, то может быть не единственным.

Пример 2. Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 (2x - y) y dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1$, $y(2) = 3$.

◀ Уравнение Эйлера имеет вид $x - y = 0$. Так как функция $y(x) = x$ условию $y(2) = 3$ не удовлетворяет, данная задача не имеет решений.

Пример 3. Найти гладкие экстремали функционала -

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$.

◀ Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Используя условия $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$, находим $y(x) = \cos x + C \sin x$, где C — произвольная постоянная.

Таким образом, данная задача имеет бесконечное множество решений. ▶

В задачах 16.375—16.384 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям.

$$16.375. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$16.376. J(y) = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx; y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$16.377. J(y) = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx; y(1) = e, y(e) = 0.$$

$$16.378. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$16.379. J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$16.380. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$16.381. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x) dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$16.382. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx; y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2e}.$$

$$16.383. J(y) = \int_0^{\ln 2} (y'^2 + 3y^2) e^{2x} dx; y(0) = 0, y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$$

$$16.384. J(y) = \int_0^b (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx; y(0) = 0, y(b) = y_1.$$

16.385. Показать, что функционал $\int_a^b [\rho(x)y' + q(x)y + r(x)] dx$, где $\rho(x) \in C_1[a; b]$, $q(x), r(x) \in C_0[a; b]$, не имеет экстремумов.

Уравнение Эйлера (4) не всегда интегрируется в квадратурах, а в ряде случаев его решение может вызвать затруднения. Перечислим частные случаи, в которых решение уравнения Эйлера упрощается по сравнению с общим случаем.

1. Функция F из (3) не зависит от y' , т. е. $F = F(x, y)$. Уравнение (4) в этом случае принимает вид $F_y(x, y) = 0$. Это конечное (не дифференциальное) уравнение, его решение не содержит произвольных постоянных и, следовательно, удовлетворяет условиям (2) только в исключительных случаях.

2. Функция F зависит только от y' : $F = F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$, а его общее решение $y(x) = C_1x + C_2$. Таким образом, в данном случае экстремальными функционала $J[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

3. Функция F не зависит от y , т. е. $F = F(x, y')$. Тогда уравнение (4) записывается в виде $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x, y') = C_1$, т. е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

4. Функция F не зависит явно от x , т. е. $F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_y - F_{yy'} y'' - F_{y'y'} y'' = 0$ или (после умножения обеих частей этого равенства на y') $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F - y' F_{y'} = C_1$. Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра.

Найти экстремали следующих функционалов $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям.

$$16.386. J(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; y(0) = 1; y(1) = e.$$

$$16.387. J(y) = \int_0^1 (e^{x+y} - y - \sin x) dx; y(0) = 0, y(1) = -1.$$

$$16.388. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$16.389. J(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} dx; y(-1) = 0, y(1) = 1.$$

$$16.390. J(y) = \int_0^{3/2} (y'^3 + 2x) dx; y(0) = 0, y\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

$$16.391. J(y) = \int_{-1}^1 (xy' + y'^2) dx; y(-1) = 1, y(1) = 0.$$

$$16.392. J(y) = \int_1^2 x^n y'^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 1; \quad y(1) = \frac{1}{1-n},$$

$$y(2) = \frac{2^{1-n}}{1-n}.$$

$$16.393. J(y) = \int_0^1 (y - y'^2) dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$16.394. J(y) = \int_0^1 yy' dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

$$16.395. J(y) = \int_0^{\pi/2} (2y + y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

В ряде случаев существование абсолютного экстремума функционала (3) на множестве функций (5) и его характер (минимум или максимум) бывают очевидны из физических или геометрических соображений. В таких случаях необходимое условие экстремума, сформулированное в теореме 1, позволяет найти функцию $y(x)$, дающую абсолютный минимум или максимум функционалу (3) на множестве (5).

Пример 4. Найти гладкую кривую на плоскости, соединяющую две данные точки $M_0(a, A)$ и $M_1(b, B)$ и имеющую минимальную длину.

◀ Длина дуги гладкой кривой, описываемой уравнением $y = y(x)$ и проходящей через точки с абсциссами a и b , равна $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Поэтому данную задачу можно сформулировать следующим образом: найти функцию $y(x)$, минимизирующую функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (6)$$

и удовлетворяющую условиям $y(a) = A, y(b) = B$.

Уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид $y''(x) = 0$, откуда $y = C_1 x + C_2$. Найдя C_1 и C_2 из условий на функцию $y(x)$ при $x = a$ и $x = b$, получим $y(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, т. е. необходимое условие экстремума функционала (6) выполняется на прямой, соединяющей точки M_0 и M_1 .

Из геометрических соображений ясно, что среди гладких кривых, соединяющих данные точки, кривая минимальной длины должна существовать, а кривая максимальной длины — нет. Поэтому упомянутая прямая и является искомой кривой. ▶

16.396. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей точки $M_0(a, A)$ и $M_1(b, B)$ со скоростью $v = ky'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

16.397. Решить задачу 16.396, если $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (1, 1)$, $v = x$.

16.398. Среди гладких кривых, соединяющих точки $M_0(0, 1)$ и $M_1(1, 1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

16.399.** *Задача о брахистохроне.* Найти гладкую кривую, соединяющую точки $M_0(0, 0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, при скатывании вдоль которой под действием силы тяжести материальная точка, зафиксированная первоначально в точке M_0 , переместится в точку M_1 за минимальное время (трением и сопротивлением воздуха пренебречь).

2. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Ниже рассмотрены два обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Первым из них является задача на экстремум функционала $J[y(x)]$, зависящего от производных высших порядков функции $y(x)$:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) dx, \quad (7)$$

где функция $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные вплоть до $(n+1)$ -го порядка по всем аргументам, а $y(x) \in C_n[a; b]$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} y(a) = y_0, \quad y^{(1)}(a) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, \\ y(b) = y_1, \quad y^{(1)}(b) = y_1^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведем обобщение теоремы 1 применительно к рассматриваемой задаче.

Теорема 2. *Для того чтобы функционал (7) достигал на функции $y(x) \in C_n[a; b]$ локального экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера—Пуассона*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(2)}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (9)$$

Подобно случаю простейшей задачи вариационного исчисления, решения уравнения (9) (экстремали функционала (7)), удовлетворяющие граничным условиям (8), являются кривыми возможного абсолютного экстремума этого функционала на множестве

$$G = \{y(x) \in C_n[a; b] \mid y(a) = y_0, \dots, y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, y(b) = y_1, \dots, \dots, y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}\}.$$

Пример 5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (120xy - y'') dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 6.$$

◀ Запишем уравнение Эйлера — Пуассона: $y^{(4)} = 120x$. Его общее решение $y(x) = x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Отсюда с помощью граничных условий получаем систему уравнений для определения постоянных C_1, \dots, C_4 :

$$\begin{aligned} C_4 &= 0, \\ C_3 &= 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 &= 1, \end{aligned}$$

из которой находим $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = C_4 = 0$. Поэтому экстремум функционала может достигаться на кривой $y(x) = x^5 + x^3 - x^2$. ▶

В задачах 16.400—16.411 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям.

$$16.400. \quad J(y) = \int_0^1 y'' dx; \quad y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$16.401. \quad J(y) = \int_0^1 (48y - y''^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \\ y'(1) = 4.$$

$$16.402. \quad J(y) = \int_0^1 (y''^2 - 24xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \\ = \frac{1}{5}, \quad y'(1) = 1.$$

$$16.403. \quad J(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$16.404. \quad J(y) = \int_0^b (y''^2 + y'^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = y(b) = \\ = y'(b) = 0.$$

$$16.405. \quad J(y) = \int_0^1 e^{-x} y''^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \\ y'(1) = 2e.$$

$$16.406. \quad J(y) = \int_0^1 (x+1)^3 y'^2 dx; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \\ y(1) = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{4}.$$

$$16.407. \quad J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + x^2) dx; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \\ = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$16.408. \quad J(y) = \int_0^1 y'''^2 dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = \\ = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12.$$

$$16.409. \quad J(y) = \int_0^1 (y'''^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = \\ = 1, \quad y(1) = y''(1) = \text{sh } 1, \quad y'(1) = \text{ch } 1.$$

$$16.410. \quad J(y) = \int_0^{\pi} (y'''^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \\ y(\pi) = \pi, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = 0.$$

$$16.411. \quad J(y) = \int_0^{\pi} (y'''^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \\ y(\pi) = y''(\pi) = \text{sh } \pi, \quad y'(\pi) = \text{ch } \pi + 1.$$

Другим обобщением простейшей задачи вариационного исчисления является задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций:

$$J[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx, \quad (10)$$

где функция $F(\dots)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам и $y_k(x) \in C_1[a; b]$, $k=1, \dots, n$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k=1, \dots, n. \quad (11)$$

Теорема 1 для данного случая обобщается следующим образом.

Теорема 3. Для того чтобы набор функций $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C_1[a; b]$ доставлял слабый экстремум функционалу (10), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли с и т е м е д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й Э й л е р а

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (12)$$

Пример 6. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a; b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2) dx$$

при граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1$.

◀ Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2 &= 0, \\ y_2'' + y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из второго уравнения функцию $y_2 = -y_1''$, получим $y_1^{(4)} - y_1 = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. Отсюда находим

$$y_2(x) = -y_1''(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$, поэтому $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin x$. ▶

В задачах 16.412—16.419 найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a; b]$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ при указанных граничных условиях.

$$16.412. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

$$16.413. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y_2(1) = -\operatorname{sh} 1.$$

$$16.414. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1'y_2' - y_1y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

$$16.415. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'y_2' + y_1y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(1) = 1/e.$$

$$16.416. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'y_2' + 6xy_1 + 12x^2y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

$$16.417. \quad J(y_1, y_2) = \int_1^3 (xy_1'^2 + y_2'^2 + xy_1y_2) dx, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = y_2(3) = 0, \quad y_1(3) = \ln 3 + 1.$$

$$16.418. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} (y_1'^2 - y_2'^2 + 2y_1'y_2' + 2y_1 \cos x + 2y_2^2) dx,$$

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = y_2(\pi) = 0, \quad y_1(\pi) = 1 + \pi.$$

$$16.419. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1) dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 1,$$

$$y_1(1) = 3/2, \quad y_2(1) = 1.$$

3. Задачи с подвижными границами. В задачах вариационного исчисления с подвижными границами в отличие от ранее рассмотренных задач граничные условия на функцию $y(x)$, $x \in [a; b]$ на концах отрезка $[a; b]$ не зафиксированы.

Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении функции $y(x) \in C_1[a; b]$ и точек $x_0, x_1 \in [a; b]$, $x_0 < x_1$, для которых функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (13)$$

достигает слабого¹⁾ экстремума при условиях

$$y(x_0) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1). \quad (14)$$

(Здесь $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x) \in C_1[a; b]$, $F(x, y, z)$ — заданные функции и $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам.)

Эту задачу можно сформулировать и следующим образом. Пусть на плоскости заданы гладкие кривые $\gamma_1: y = \varphi_0(x)$ и $\gamma_2: y = \varphi_1(x)$, $x \in [a; b]$. Требуется найти такую гладкую кривую $y = y(x)$, которая соединяет какую-либо точку кривой γ_1 с какой-либо точкой кривой γ_2 и доставляет слабый экстремум функционалу (13).

Приведем обобщение теоремы 1 для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными границами.

Теорема 4. Для того чтобы функционал (13) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума при условиях (14), необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} [F + (\varphi_0' - y') F_{y'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [F + (\varphi_1' - y') F_{y'}]_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

¹⁾ Напомним, что слабым называется локальный экстремум в пространстве $C_1[a; b]$. В задаче с подвижными границами на кривой $y^*(x)$ с абсциссами концов x_0^* и x_1^* функционал (13) достигает локального экстремума в $C_1[a; b]$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех кривых $y(x) \in C_1[a; b]$ и точек x_0 и x_1 , удовлетворяющих неравенствам $\|y^* - y\|_1 < \varepsilon$, $|x_0^* - x_0| < \varepsilon$, $|x_1^* - x_1| < \varepsilon$, справедливо $J[y^*(x)] \leq J[y(x)]$ (локальный минимум) или $J[y^*(x)] \geq J[y(x)]$ (локальный максимум).

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти общее решение $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, после чего из условий (15) и уравнений

$$y(x_0, C_1, C_2) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1, C_1, C_2) = \varphi_1(x_1) \quad (16)$$

определить постоянные C_1 и C_2 и концы отрезка $[x_0; x_1]$.

Если на одном из концов искомой кривой $y(x)$ задано обычное граничное условие ($y(a) = y_0$ или $y(b) = y_1$), то условие трансверсальности (15) следует записать только для другого конца кривой.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой $y(x)$, например $x_2 = b$, но граничное условие для $x = b$ отсутствует. Это означает, что граничная точка $(b, y(b))$ кривой $y(x)$ может перемещаться по вертикальной прямой $x = b$, и вместо второго условия трансверсальности (15) следует записать *естественное граничное условие*

$$[F_{y'}]_{x=b} = 0. \quad (17)$$

Пример 7. Найти экстремали функционала в следующей задаче с подвижными границами:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(x_0) = x_0^2 + 2, \quad y(x_1) = x_1.$$

◀ Так как функция $F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}$ зависит только от y' , то общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (18)$$

Запишем условия трансверсальности (15):

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + (2x-y') \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_0} = 0,$$

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + (1-y') \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_1} = 0.$$

Из (18) находим $y'(x_0) = y'(x_1) = C_1$. Отсюда с учетом равенств (16) получаем систему четырех уравнений для определения C_1, C_2, x_0 и x_1

$$\sqrt{1+C_1^2} + (2x_0 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0,$$

$$\sqrt{1+C_1^2} + (1 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0,$$

$$C_1 x_0 + C_2 = x_0^2 + 2,$$

$$C_1 x_1 + C_2 = x_1.$$

решив которую, находим $C_1 = -1, C_2 = 11/4, x_0 = 1/2, x_1 = 11/8$.

Следовательно, уравнение экстремали имеет вид $y(x) = -x + \frac{11}{4}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{11}{8}$,

Отметим, что функционал $J[y(x)]$ в данной задаче с подвижными границами представляет собой длину дуги кривой между

точками $(x_0, y(x_0))$ и $(x_1, y(x_1))$. Поэтому геометрический смысл этой задачи состоит в определении гладкой кривой минимальной длины, соединяющей параболу $y = x^2 + 2$ и прямую $y = x$. Найденное решение позволяет определить расстояние S между указанными параболой и прямой: $S = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(-1)^2} dx = \frac{7}{8} \sqrt{2}$. ►

Пример 8. Найти экстремали функционала в следующей задаче:

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1.$$

◀ В этой задаче отсутствует граничное условие при $x = \pi/4$, следовательно, правый конец кривой $y(x)$ может перемещаться по прямой $x = \pi/4$, и необходимо использовать естественное граничное условие (17).

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Из условия $y(0) = C_1 = 1$ находится постоянная C_1 , а из условия (17) $2y'(\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} + C_2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$ — постоянная $C_2 = 1$, откуда $y(x) = \cos x + \sin x$. ►

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами.

$$16.420. \quad J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

$$16.421. \quad J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = \frac{2}{1-x_1^2}.$$

$$16.422. \quad J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = \frac{1}{x_1^2}.$$

$$16.423. \quad J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx; \quad y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = x_1 - 5.$$

$$16.424. \quad J(y) = \int_0^{1/2} (y - y'^2) dx; \quad y(0) = 0.$$

$$16.425. \quad J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y) dx; \quad y(1) = 0.$$

$$16.426. \quad J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 0.$$

$$16.427. \quad J(y) = \int_0^{x_1} (y'^2 + y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = 1.$$

$$16.428. J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 1, \quad y(x_1) = x_1 - 1.$$

$$16.429. J(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx; \quad y(0) = 0.$$

К задачам вариационного исчисления с подвижными границами относится и задача Больца, состоящая в определении функции $y(x) \in C_1[a; b]$, доставляющей слабый экстремум функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx + f(y(a), y(b)), \quad (19)$$

где $f(u, v)$ — заданная функция, имеющая непрерывные производные по u и v .

Необходимое условие экстремума функционала (19) формулируется следующим образом.

Теорема 5. Для того чтобы функционал (19) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности для задачи Больца

$$\left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right]_{x=a} = 0, \quad \left[F_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right]_{x=b} = 0. \quad (20)$$

Условия (20) используются для определения постоянных C_1 и C_2 из общего решения $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера.

Пример 9. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx - y^2(0) + 2y\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

◀ Уравнение Эйлера $y'' + y = 0$ имеет общее решение

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (21)$$

Записав условия трансверсальности (20)

$$[2y' + 2y]_{x=0} = 2[-C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x]_{x=0} = 2C_1 + 2C_2 = 0,$$

$$[2y' + 2]_{x=\pi/2} = 2[-C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1]_{x=\pi/2} = -2C_1 + 2 = 0,$$

находим $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Таким образом, функция $y(x) = \cos x - \sin x$ является единственной кривой возможного экстремума функционала $J[y(x)]$. ▶

Найти экстремали следующих функционалов.

$$16.430. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1).$$

$$16.431. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx - 2 \operatorname{sh} 1 y(1).$$

$$16.432. J(y) = \int_0^\pi (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi).$$

$$16.433. J(y) = \int_0^3 4y'^2 y^2 dx + y^4(0) - 8y(3).$$

$$16.434. J(y) = \int_0^e 2y'(xy' + y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e).$$

$$16.435. J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (y'^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1).$$

$$16.436. J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx + 4e^y(0) + 32e^{-y}(1).$$

$$16.437. J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Задачи на условный экстремум. Задачи вариационного исчисления, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения, называются задачами на условный экстремум.

Рассмотрим следующую задачу об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций,

$$J[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx \quad (22)$$

с граничными условиями

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (23)$$

при дополнительных ограничениях, заданных уравнениями связи

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (24)$$

Эта задача вариационного исчисления называется задачей Лагранжа.

Введем функцию Лагранжа рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \\ + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\lambda_i(x) \in C_1[a, b]$ — произвольные функции (множители Лагранжа).

При решении задачи Лагранжа используется следующее необходимое условие экстремума функционала (22).

Теорема 6¹⁾. Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (22) при условиях (24), (25), то существуют множители Лагранжа $\lambda_i(x), i=1, \dots, t$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L_{y_k} - \frac{d}{dx} L_{y_k}' = 0, \quad k=1, \dots, n, \quad (26)$$

записанных для функционала $I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L dx$.

С помощью теоремы 6 решение задачи об условном экстремуме функционала $J(y_1, \dots, y_n)$ сводится к исследованию экстремума функционала $I(y_1, \dots, y_n)$ без дополнительных условий (24).

При использовании теоремы 6 для решения задачи Лагранжа искомые функции $y_k(x), k=1, \dots, n$, и множители Лагранжа $\lambda_i(x), i=1, \dots, t$, определяются из системы $n+t$ уравнений (26) и (24).

Пример 10. Найти функции $y_1(x), y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2 \operatorname{ch} 1, \quad y_2(1) = 2 \operatorname{sh} 1;$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

◀ Функция Лагранжа данной задачи имеет вид $L = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda(y_1' - y_2)$. Для определения функций $y_1(x), y_2(x)$ и $\lambda(x)$ запишем систему, состоящую из уравнений Эйлера (26) и уравнения связи:

$$2y_1'' + \lambda' = 0,$$

$$2y_2'' + \lambda = 0,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

Исключая из этой системы сначала функцию $\lambda(x)$, а затем $y_1(x)$, получим $y_2'''' - y_2'' = 0$. Обозначим y_2'' буквой z , тогда $z'' - z = 0$. Общее решение этого уравнения $z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Отсюда последовательно находим

$$y_2(x) = \int z(x) dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3,$$

$$y_1(x) = \int y_2(x) dx = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4.$$

Для определения постоянных C_1, \dots, C_4 из граничных условий получаем следующую систему уравнений:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

$$y_2(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 0,$$

$$y_1(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2 \operatorname{ch} 1,$$

$$y_2(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 = 2 \operatorname{sh} 1,$$

1) Эта теорема обобщает соответствующий результат для задачи на условный экстремум функции n переменных (см. т. I, стр. 363)

откуда находим $C_1=C_2=1$, $C_3=C_4=0$, т. е. в данной задаче функционал $J(y_1, y_2)$ может достигать экстремума при $y_1(x)=e^x+e^{-x}=2 \operatorname{ch} x$, $y_2=e^x-e^{-x}=2 \operatorname{sh} x$. ►

Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующих задачах Лагранжа.

$$16.438. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \cos x) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1;$$

$$y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

$$16.439. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + 2y_2'^2 + y_2^2) dx;$$

$$y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = -e^{-1}, \quad y_2(1) = 0;$$

$$y_1 - y_2' = 0.$$

$$16.440. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + x^3) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 2, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1;$$

$$y_1 - 2y_2 + 3x = 0.$$

$$16.441. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 2;$$

$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

$$16.442. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx,$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 0, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

$$16.443. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi} (y_1'^2 - y_2'^2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = \pi/2;$$

$$y_1' - y_2 + \cos x = 0.$$

$$16.444. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2) dx;$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1,$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1;$$

$$y_1' + y_2' - 4x = 0.$$

$$16.445. J(y_1, y_2) = \int_a^b (y_1 + y_2 + y_2') dx;$$

$$y_1(a) = y_1^{(0)}, y_2(a) = y_2^{(0)}, y_1(b) = y_1^{(1)}, y_2(b) = y_2^{(1)};$$

$$y_1' + y_2' - 1 = 0.$$

Задача на условный экстремум функционала (22) с граничными условиями (23) при дополнительных условиях

$$\int_a^b F_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = C_i, \quad i = 1, \dots, m^1, \quad (27)$$

называется *изопериметрической задачей*.

Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{L}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'), \end{aligned} \quad (28)$$

где множителями Лагранжа $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, являются произвольные вещественные числа.

При решении изопериметрической задачи используется следующее необходимое условие экстремума, подобное условию, сформулированному в теореме 6 для задачи Лагранжа.

Теорема 7. Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (22) при условиях (23), (27), то существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (множители Лагранжа), при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\bar{L}_{y_k} - \frac{d}{dx} \bar{L}_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (29)$$

где \bar{L} — функция Лагранжа (28).

При использовании теоремы 7 для решения изопериметрической задачи функции $y_k(x), k = 1, \dots, n$, и множители Лагранжа $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, находятся из системы $n + m$ уравнений (29) и (27).

Пример 11. Найти функцию $y(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала $J(y)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx;$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1; \quad \int_0^{\pi} y \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

◀ Функция Лагранжа данной задачи имеет вид $\bar{L} = y'^2 + \lambda y \cos x$. Из уравнения Эйлера $\lambda \cos x - 2y'' = 0$ находим $y(x) = -\frac{\lambda}{2} \cos x +$

¹ В данном случае, в отличие от задачи Лагранжа, число дополнительных ограничений не ограничивается условием $m < n$.

+ $C_1x + C_2$. Для определения множителя Лагранжа λ используем дополнительное условие $\int_0^{\pi} \left(-\frac{\lambda}{2} \cos x + C_1x + C_2 \right) \cos x dx =$
 $= -\frac{\pi}{4} \lambda - 2C_1 = \frac{\pi}{2}$, откуда находим $\lambda = -2 - \frac{8}{\pi} C_1$. Таким образом, общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y(x) = \cos x +$
 $+ \frac{4}{\pi} C_1 \cos x + C_1x + C_2$.

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий $y(0) =$
 $= 1 + \frac{4}{\pi} C_1 + C_2 = 1$, $y(\pi) = -1 + \left(\pi - \frac{4}{\pi} \right) C_1 + C_2 = -1$, откуда
 $C_1 = C_2 = 0$.

Итак, функционал $J(y)$ может достигать экстремума при $y(x) = \cos x$. ►

Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, \dots, y_n)$ в следующих изопериметрических задачах.

$$16.446. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1; \int_0^1 xy dx = 0.$$

$$16.447. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;$$

$$y(0) = y(1) = 0; \int_0^1 y dx = 1, \int_0^1 xy dx = 0.$$

$$16.448. J(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx;$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 1; \int_0^{\pi} y \sin x dx = 0.$$

$$16.449. J(y) = \int_0^{\pi} y \sin x dx;$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = \pi; \int_0^{\pi} y'^2 dx = \frac{3}{2} \pi.$$

$$16.450. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx;$$

$$y(0) = 0, y(1) = e^{-1}; \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4} (1 - 3e^{-2}).$$

$$16.451. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' y_2' dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1;$$

$$\int_0^1 y_1 dx = 1, \quad \int_0^1 y_2 dx = 0.$$

$$16.452. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1 + y_2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -3;$$

$$\int_0^1 y_1' y_2' dx = 0.$$

$$16.453. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1' y_2' dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1; \quad \int_0^1 x y_1 dx = 0,$$

$$\int_0^1 x y_2 dx = 0.$$

$$16.454. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0; \quad \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

$$16.455. \quad J(y_1, y_2) = \int_0^1 x (y_1 - y_2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 2;$$

$$\int_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

5. **Прямые методы вариационного исчисления.** Обычные методы вариационного исчисления, при использовании которых задача минимизации функционала сводится к интегрированию уравнений Эйлера—Лагранжа, как правило, приводят к трудоемким вычислениям и поэтому являются малоэффективными. Приближенные численные методы, дающие непосредственное решение вариационной задачи, называются *прямыми методами вариационного исчисления*. Основная идея прямых методов заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных.

Наиболее известными среди них являются *методы Ритца, Канторовича и Галёркина*. Следует отметить, что прямые методы вариационного исчисления являются также и приближенными методами решения краевых задач дифференциальных уравнений.

Метод Ритца. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (30)$$

Идея метода Ритца состоит в том, что значения функционала $J(y)$ рассматриваются не на произвольных допустимых кривых вариационной задачи (30), а лишь на всевозможных линейных комбинациях вида

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (31)$$

где $\varphi_0(a) = y_0$, $\varphi_0(b) = y_1$ и $\varphi_i(x)$ — последовательность линейно независимых функций, причем $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Эти функции называются *координатными*.

На функциях вида (31) функционал (30) превращается в функцию, зависящую от n переменных C_1, C_2, \dots, C_n :

$$J(y_n(x)) = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Значения C_1, C_2, \dots, C_n выбираются так, чтобы функция $\Phi(C_1, C_2, \dots, C_n)$ достигала экстремума, т. е. C_1, C_2, \dots, C_n определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

При найденных из системы (32) значениях C_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$, приближенное решение вариационной задачи (30) запишется в виде

$$y_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i^* \varphi_i(x). \quad (33)$$

Вопросы сходимости минимизирующей последовательности $\{y_n^*(x), n \in \mathbb{N}\}$ являются сложными. Они изучаются в специальной литературе. Для оценки точности результатов, полученных методом Ритца или другими прямыми методами, обычно пользуются следующим практическим правилом. Вычислив $y_n^*(x)$ и $y_{n+1}^*(x)$, сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка $[a, b]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи (30) равно $y_n^*(x)$. Если же значения $y_n^*(x)$ и $y_{n+1}^*(x)$ хотя бы в некоторых из выбранных точек отличаются значительно, то вычисляют $y_{n+2}^*(x)$ и сравнивают теперь значения $y_{n+1}^*(x)$ и $y_{n+2}^*(x)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения $y_{n+k}^*(x)$ и $y_{n+k+1}^*(x)$ не совпадут в пределах заданной точности.

Пример 12. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx \quad (34)$$

при граничных условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ методом Ритца.

◀ Полагаем $\varphi_0(x) \equiv 0$. В качестве координатных функций выбираем $\varphi_k(x) = x^{k+1} - x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$. Выберем $n = 2$. Тогда в соответствии с (33)

$$y_2(x) = C_1(x^2 - x) + C_2(x^3 - x^2) \quad (35)$$

и

$$y_2'(x) = C_1(2x - 1) + C_2(3x^2 - 2x). \quad (36)$$

После подстановки (35) и (36) в (34) и интегрирования получим

$$\Phi(C_1, C_2) = J(y_2(x)) = \frac{11}{30}C_1^2 + \frac{11}{30}C_1C_2 + \frac{1}{7}C_2^2 - \frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{10}C_2.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции $\Phi(C_1, C_2)$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} &= \frac{11}{15}C_1 + \frac{11}{30}C_2 - \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} &= \frac{11}{30}C_1 + \frac{2}{7}C_2 - \frac{1}{10} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Решая систему (37), получим $C_1^* = 69/473$, $C_2^* = 7/43$. Следовательно, приближенное выражение $y_2^*(x)$ для экстремали $y(x)$ имеет вид

$$y_2^*(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) = \frac{1}{473}(77x^3 - 8x^2 - 69x).$$

В данном случае существует точное решение поставленной задачи:

$$y(x) = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}) - x.$$

Сравним полученное методом Ритца приближенное решение $y_2^*(x)$ и точное при некоторых значениях аргумента:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y(x)$	0,0000	-0,0287	-0,0505	-0,0583	-0,0444	0,0000
$y_2^*(x)$	0,0000	-0,0285	-0,0506	-0,0585	-0,0442	0,0000

Сравнение показывает, что точное и приближенное решения совпадают с точностью до 0,0002. ▶

В задачах 16.456—16.460 методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме указанных функционалов.

$$16.456^*. J[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(2) = 0, \\ n = 2.$$

$$16.457^*. J[y(x)] = \int_1^2 \left(xy'^2 - \frac{x^2-1}{x} y^2 - 2x^2 y \right) dx, \\ y(1) = y(2) = 0, \quad n = 2.$$

$$16.458^*. J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \\ n = 2.$$

$$16.459^*. J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, \quad u|_{\Gamma_D} = x^2 + y^2, \quad n = 3.$$

$$16.460^*. J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy,$$

$$D = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}, \quad u|_{\Gamma_D} = 0, \quad n = 2.$$

16.461. Найти методом Ритца приближенное решение дифференциального уравнения $y'' + x^2 y = x$, $y(0) = y(1) = 0$. Определить $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ и сравнить их значения в точках $x = 0,25$ и $x = 0,5$.

Метод Канторовича. Этот метод применяется для приближенного решения вариационной задачи, когда функционал зависит от функции нескольких переменных. Пусть

$$J[u(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy, \quad (38)$$

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}, \quad u|_{\Gamma_D} = \psi(x, y).$$

При применении метода Ритца к функционалу (38) (см. задачи 16.459—16.460) выбирается следующая система координатных функций: $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, ..., $\varphi_n(x, y)$. Решение ищется в виде

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x, y),$$

где C_k — неизвестные постоянные. В методе Канторовича выражение для экстремали берется в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \varphi_k(x, y), \quad (39)$$

где $u_k(x)$ — неизвестные функции, определяемые таким образом, чтобы функционал (38) достигал экстремального значения. Отыскание решения в виде (39) позволяет расширить класс экстремалей.

После подстановки (39) в (38) и интегрирования полученного выражения по y получается следующий функционал:

$$J[u_n(x, y)] = \int_a^b \Phi(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x)) dx.$$

Функции $u_k^*(x)$, $k=1, 2, \dots, n$, должны удовлетворять системе уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\Phi_{u_k^*} - \frac{d}{dx} \Phi_{u_k^{*'}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

а приближенное решение $u_n^*(x, y)$ вида (39)—заданным граничным условиям на прямых $x=a$ и $x=b$.

Пример 13. Методом Канторовича найти экстремаль функционала

$$J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy, \quad (40)$$

где $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, $u|_{\Gamma_D} = 0$, $n=1$.

Решение будем искать в виде

$$u_1(x, y) = u_1(x)(b^2 - y^2).$$

Граничные условия на прямых $y \pm b$ выполняются. После подстановки $u_1(x, y)$ в (40) и интегрирования по y получаем

$$J[u_1(x)] = \int_{-a}^a \left(\frac{16}{15} b^2 u_1'^2 + \frac{8}{3} b^3 u_1^2 - \frac{8}{3} b^3 u_1 \right) dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид

$$u_1''(x) - \frac{5}{2b^2} u_1(x) = -\frac{5}{4b^2}.$$

Находим общее решение этого уравнения:

$$u_1(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{2,5} \frac{x}{b} + 0,5.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий, т. е.

$$u_1(-a) = u_1(a) = 0, \quad \text{откуда } C_2 = 0 \text{ и } C_1 = -\left(2 \operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

Окончательно получаем следующее приближенное выражение для экстремали функционала (40):

$$u_1^*(x, y) = u_1^*(x)(b^2 - y^2) = 0,5(b^2 - y^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{a}{b}} \right). \blacktriangleright$$

В задачах 16.462 и 16.463 найти приближенное решение методом Канторовича. Положить $n=1$.

$$16.462^*. J[u(x, y)] = \iint_D (u_{xx}'' + u_{yy}'' - 2u) dx dy, \text{ где } D = \\ = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, u|_{\Gamma} = 0.$$

$$16.463^*. J[u(x, y)] = \iint_D (u_{xx}'' + u_{yy}'' - 2xy) dx dy, \text{ где } D = \\ = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{\Gamma} = 0.$$

Метод Гялёркина. Этот метод применяется для отыскания приближенных решений как вариационных задач, так и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в частности, уравнений Эйлера—Лагранжа.

Пусть неизвестная функция $u(P)$ удовлетворяет в некоторой области D следующей краевой задаче:

$$L(u(P)) = f(P), \quad P \in G, \\ \Gamma(u(P)) = 0 \text{ на } \gamma \quad (\gamma \text{— граница } G).$$

Здесь L —некоторый линейный дифференциальный оператор, Γ —линейный оператор граничных условий. Приближенное решение краевой задачи (41) ищется в виде суммы

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(P),$$

где c_k —неопределенные коэффициенты, $\varphi_k(P)$ —система линейно независимых непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям. Обозначим δf невязку

$$\delta f = L(u_n(P)) - f(P).$$

Коэффициенты c_k определяются из условия ортогональности в области D невязки δf к функциям $\varphi_k(P)$, $k=1, 2, \dots, n$:

$$\int_D [L(u_n(P)) - f(P)] \varphi_k(P) dP = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

Так как оператор L линеен, то (42) запишется в каноническом виде, удобном для вычислений c_i :

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G L(\varphi_i(P)) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

или в виде

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G f_i(P) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

где $f_i(P) \equiv L(\varphi_i(P))$.

З а м е ч а н и е. Можно использовать ортогональность невязки к другой линейно независимой системе функций $\psi_k(P)$ выбираемой из удобства вычислений получаемых интегралов (см. решение примера 14).

Пример 14. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx$$

при граничных условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

◀ Составив уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$, имеем

$$Ly = f(x), \quad \text{т. е.} \quad y'' = -x. \quad (43)$$

Краевые условия остаются прежними: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче:

$$y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Решение будем искать приближенно методом Галёркина, записывая искомую функцию в виде

$$y(x) = x(1-x)(A+Bx) = Ax(1-x) + Bx^2(1-x), \quad (44)$$

где $\varphi_1(x) = x(1-x)$ и $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$. Вычисляя y'' и подставляя в левую часть уравнения (43), запишем выражение для невязки δ :

$$\delta f = -2A + B(2-6x) + x.$$

Вместо условий ортогональности невязки δf к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ коэффициенты A и B определены из условия ортогональности δf к функциям $\psi_1(x) = 1$ и $\psi_2(x) = x$ (функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ линейно независимы на $[0, 1]$ с $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$):

$$\begin{aligned} A \int_0^1 -2 dx + B \int_0^1 (2-6x) dx &= - \int_0^1 x dx, \\ A \int_0^1 -2x dx + B \int_0^1 (2-6x)x dx &= - \int_0^1 x^2 dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Вычисляя интегралы в (46), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 2A + B &= 1/2, \\ A + B &= 1/3. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно A и B , получим

$$A = 1/6, \quad B = 1/6.$$

Подставив найденные коэффициенты A , B в формулу (44), найдем искомое приближение для экстремали:

$$y^*(x) = \frac{1}{6} x(1-x) + \frac{1}{6} x^2(1-x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

Заметим, что в данной задаче найденное приближение совпадет с точным решением $y_T = x(1-x^2)/6$. ▶

Методом Галёркина найти решение следующих вариационных задач. Ограничиться приближениями искомой

экстремали в виде

$$y_n(x) = \varphi(x) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n),$$

где $\varphi(x)$ выбирается из условия выполнения граничных условий, а $n = 1$.

$$16.464. J(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

$$16.465. J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$16.466. I(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

16.467. Составить на фортране подпрограмму-функцию для вычисления функций $\varphi_{k+1}(x) = \varphi(x)x^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, используемых при решении задач 16.464—16.466. В качестве параметров выбрать FIK—идентификатор подпрограммы-функции, X—аргумент функции, параметр K на единицу меньше номера функции.

16.468*. Составить подпрограмму-функцию для вычисления функций $f_k(x)$ в задачах 16.464—16.466. В качестве параметров выбрать FK—идентификатор подпрограммы-функции, X—аргумент функции, $n = 3$.

16.469. Используя формулу Симпсона, составить подпрограмму-функцию для вычисления интегралов $\int_a^b \varphi_k(x) f_j(x) dx$, $k, j = 1, 2, \dots, n$. В качестве параметров взять A, B—начало и конец отрезка интегрирования, F1, F2—идентификаторы соответствующих функций, K на единицу меньше номера функции, EPS—абсолютная погрешность вычислений.

16.470*. Составить на фортране подпрограмму решения задач 16.464—16.466, используя подпрограммы, полученные при решении задач 16.467—16.469, а также подпрограмму решения системы линейных уравнений методом Жордана—Гаусса, выбирая при этом для $y_n(x)$ порядок $n = 4$, EPS = 0,05.

§ 1. Основные задачи и уравнения математической физики

1. Вывод уравнений и постановка задач математической физики. Многие задачи механики, физики, широкий круг инженерно-технических задач приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, являющихся частным случаем так называемых *уравнений математической физики*.

Их вывод опирается на механические или физические законы. Из всего многообразия таких задач мы ограничимся лишь несколькими простейшими, иллюстрирующими некоторые методы построения математических моделей реальных физических или механических процессов.

Пример 1. Вывести уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.

◀ Обозначим температуру тела в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t символом $u(x, y, z, t)$. Как известно, в теле происходит движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В теории теплопроводности принято, что количество тепла ΔQ , проходящего через некоторый элемент поверхности $\Delta \sigma$, лежащий внутри данного тела, пропорционально $\Delta \Pi \Delta t$, где $\Delta \Pi$ — поток вектора $\text{grad } u$ через элемент $\Delta \sigma$, т. е.

$$\Delta Q = k \Delta \Pi \Delta t. \quad (1)$$

Здесь $k = k(x, y, z)$ — коэффициент теплопроводности тела.

Выделим внутри тела произвольный объем V , ограниченный гладкой замкнутой поверхностью Σ , и составим уравнение теплового баланса для выделенного объема. Пусть Q_1 — количество тепла, входящего в V через поверхность Σ за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Тогда из (1) следует, что

$$Q_1 = \oint_{\Sigma} k(M) (\text{grad } u, d\sigma) \Delta t.$$

Обозначим Q_2 количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток $(t, t + \Delta t)$ вследствие имеющихся в этом объеме источников (или стоков), плотность которых, т. е. количество поглощаемого или выделяемого тепла за единицу времени в единице объема, обозначим $F(x, y, z, t)$. Ясно, что

$$Q_2 = \iiint_V F(x, y, z, t) dv \Delta t,$$

а тогда, используя формулу Гаусса—Остроградского, для общего количества тепла, приходящего в объем V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, получаем выражение

$$Q_1 + Q_2 = \iiint_V \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) dv \Delta t + \iiint_V F(x, y, z, t) dv \Delta t. \quad (2)$$

С другой стороны, на изменение температуры объема тела V за время $(t, t + \Delta t)$ на величину $\Delta_t u = u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) \approx \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \Delta t$ необходимо затратить следующее количество тепла:

$$Q_3 = \iiint_V [u(x, y, z + \Delta t) - u(x, y, z, t)] \gamma(x, y, z) \rho(x, y, z) dv \approx \iiint_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv \Delta t, \quad (3)$$

где $\gamma = \gamma(M)$ —теплоемкость вещества, а $\rho = \rho(M)$ —его плотность. Но $Q_1 + Q_2 = Q_3$, а потому из (2) и (3) следует соотношение

$$\iiint_V \left[\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) - F(x, y, z, t) \right] dv = 0.$$

Так как объем V произволен, а подынтегральная функция непрерывна, то отсюда следует, что в любой момент времени t должно выполняться соотношение

$$\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) + F(M, t). \quad (4)$$

Это уравнение (4) называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела*. Если тело однородно, то γ , ρ и k постоянные и уравнение (4) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma \rho}}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{1}{\gamma \rho} F(x, y, z, t). \blacktriangleright$$

Для вычисления температуры тела $u(x, y, z, t)$ в любой точке тела и в любой момент времени t недостаточно решения уравнения (4) или (5). Из физических соотношений следует, что необходимо знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие). Точно так же и для решения других задач математической физики требуется знание начальных (если процесс нестационарный) и граничных условий. Поэтому под *постановкой задачи* в дальнейшем подразумевается выбор функции, характеризующей исследуемый физический процесс, вывод (или выбор) соответствующего этому процессу уравнения, установление граничных условий и формулировка начальных условий.

Пример 2. Поставить задачу об определении температуры однородного изотропного стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура есть неко-

тая функция x , а на концы стержня подается извне заданный тепловой поток.

◀ Температура стержня зависит только от координаты точки $x \in [0, l]$ и времени t , т. е. $u = u(x, t)$. Внутри стержня источники тепла отсутствуют, т. е. $F(x, y, z, t) = 0$. Поэтому уравнение (5) принимает вид $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, где $a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$. Начальное условие записывается в виде $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, где $\varphi(x)$ — заданная функция. Граничные условия имеют вид

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t), \quad u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t), \quad 0 < t < \infty,$$

где σ — площадь поперечного сечения стержня, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — тепловые потоки (количество тепла, поступающего в единицу времени) в стержень через его концы. Таким образом, имеем задачу:

Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < \infty, \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t),$$

$$u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t) \quad (\text{граничные, или краевые, условия}). \quad \blacktriangleright \quad (7)$$

Рассмотренная в примере 2 задача относится к так называемым *смешанным задачам*, в которых участвуют как начальные, так и граничные условия. Граничные условия (7), наложенные на значения производной $u'_x(x, t)$, называют *условиями второго рода*. Рассматриваются также задачи с *условиями первого рода*, наложенными на значения функции $u(x, t)$,

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t) \quad (8)$$

и с *условиями третьего рода*, наложенными как на значения функции $u(x, t)$, так и на значения производной $u'_x(x, t)$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right) \Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right) \Big|_{x=l} = \psi_2(t). \quad (9)$$

Условие (9) означает упругое закрепление в точках $x=0$ и $x=l$.

Кроме смешанной задачи достаточно часто встречается *задача Коши*, состоящая в отыскании решения $u(x, t)$ в области $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, удовлетворяющего только начальным условиям (например, условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ для уравнения (6)).

17.1.** Вывести уравнение малых колебаний закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ натянутой струны, т. е. свободно изгибающейся в плоскости горизонтальной тонкой нити. Действующая на струну сила натяжения T значительно больше силы тяжести, т. е. действием силы тяжести можно пренебречь.

17.2. Используя уравнение задачи 17.1, поставить задачу о вынужденных колебаниях закрепленной на концах

$x=0$ и $x=l$ горизонтальной однородной струны, если в момент $t=0$ струна имела форму $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, и скорость струны в каждой ее точке задается функцией $\psi(x)$.

17.3*. Используя уравнение задачи 17.1, поставить задачу о свободных колебаниях закрепленной на конце $x=l$ горизонтальной однородной струны, левый конец которой (при $x=0$) движется так, что касательная в этом конце (при $x \rightarrow +0$) в любой момент времени горизонтальна. В момент $t=0$ струна имела формулу $\varphi(x)$, а скорость каждой точки равна нулю.

17.4**. Рассматривая однородную двухпроводную линию равномерно распределенных индуктивностей, сопротивлений, емкостей и утечки, вывести *волновое уравнение*, называемое также уравнением длинной линии. (Ввести величины: L —коэффициент индуктивности, C —емкость, R —сопротивление, G —коэффициент утечки, которые считать отнесенными к единице длины.)

17.5. Используя уравнение задачи 17.4, поставить задачу об отыскании закона изменения напряжения и силы тока в длинной линии ($0 \leq x < \infty$) без потерь (т. е. $R = G = 0$), если известны начальные напряжение $\varphi(x)$, сила тока $\psi(x)$, а напряжение в точке $x=0$ постоянно и равно E_0 .

17.6*. Воспользовавшись уравнением (6) примера 2, поставить задачу о распределении температуры внутри однородного изотропного стержня, начальная температура которого равна u_0 , при свободном внутреннем теплообмене, если в левом конце его (при $x=0$) поддерживается постоянная температура u_0 , а через правый конец (при $x=l > 0$) происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой задана функцией $\varphi(t)$.

17.7. На границе бесконечного изотропного однородного цилиндра, направляющая которого—кривая L —лежит в плоскости, перпендикулярной образующей, поддерживается температура, зависящая только от положения точки на L . Используя уравнение (5) примера 1, поставить задачу об установившемся стационарном распределении температуры внутри цилиндра (*плоская задача Дирихле*).

2. Приведение уравнений к каноническому виду. Общее уравнение второго порядка относительно функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + l \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0. \quad (10)$$

Методы решения таких уравнений и характер описываемых этими уравнениями процессов зависят от вида квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j \quad (11)$$

в каждой точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ некоторой области D n -мерного пространства.

Как известно, выбором линейного преобразования матрица $(a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0))_{i,j=1}^n$ квадратичной формы (11) может быть приведена к каноническому (диагональному) виду, причем согласно закону инерции число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов канонического вида матрицы не зависит от способа диагонализации.

В соответствии с этим уравнение (10) в точке M_0 (в области D) называется *уравнением эллиптического типа*, если все n коэффициентов канонического вида квадратичной формы одного знака, т. е. квадратичная форма (11) является положительно либо отрицательно определенной в точке M_0 (соответственно в области D). К уравнениям эллиптического типа обычно приводят задачи о стационарных тепловых процессах, об отыскании гармонических в области D функций.

Уравнение (10) имеет *гиперболический тип* в точке M_0 (в области D), если в точке M_0 (соответственно в области D) $n-1$ коэффициент канонического вида квадратичной формы (11) имеет один знак, а один коэффициент противоположен им по знаку. К уравнениям гиперболического типа приводят различные задачи о колебательных процессах. В более общем случае уравнение (10) имеет *ультрагиперболический тип*, если m коэффициентов канонического вида квадратичной формы одного знака, а остальные $n-m$ — противоположного.

Наконец, уравнение (10) имеет в точке M_0 (в области D) *параболический тип*, если в точке M_0 (соответственно в области D) хотя бы один из коэффициентов канонического вида квадратичной формы (11) равен нулю. Такие уравнения описывают процессы распространения тепла, диффузии и некоторые другие.

В случае двух независимых переменных x и y уравнение (10) обычно записывается следующим образом:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (12)$$

Соответствующая ему квадратичная форма имеет вид

$$a(x, y) t_1^2 + 2b(x, y) t_1 t_2 + c(x, y) t_2^2.$$

Тип уравнения (12) может быть определен и без приведения квадратичной формы к каноническому виду. Именно: уравнение (12) имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ (в области D)

эллиптический тип, если $ac - b^2 > 0$,
гиперболический тип, если $ac - b^2 < 0$,
параболический тип, если $ac - b^2 = 0$

в точке M_0 (соответственно в области D).

Уравнение

$$a(x, y) dy^2 - 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0 \quad (13)$$

называется *характеристическим* для уравнения (12), а его общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = C$$

— *характеристиками*.

Характеристики линейного уравнения в частных производных второго порядка (12) используются для приведения его к каноническому виду. Для уравнения гиперболического типа ($ac - b^2 < 0$) характеристики действительны и различны. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, приводим уравнение (12) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (14)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \Phi_1\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0, \quad (14')$$

если положить дополнительно $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.

Для уравнения эллиптического типа ($ac - b^2 > 0$) характеристики комплексные и комплексно сопряжены ($\varphi(x, y) = \overline{\psi(x, y)}$). Полагая $\xi = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \psi(x, y)) = \operatorname{Re} \varphi(x, y)$ и $\eta = \frac{1}{2i}(\varphi(x, y) - \psi(x, y)) = \operatorname{Im} \varphi(x, y)$, уравнение (12) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (15)$$

В случае уравнения параболического типа ($ac - b^2 = 0$) имеется только одна характеристика $\varphi(x, y) = C$. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная функция, независимая с $\varphi(x, y)$ (т. е. якобиан $I = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0$), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (16)$$

Уравнения (14), (14'), (15), (16) называются *каноническими*.

Рассмотренный метод приведения уравнения (12) к каноническому виду (14) — (16) и решение полученного уравнения носит название *метода характеристик*.

Так как для каждого типа канонических уравнений разработаны определенные методы как аналитического, так и численного решения, то задача приведения уравнений (12) к каноническому виду представляет практический интерес.

Заметим, что в различных областях тип одного и того же уравнения (12) может быть различным.

Пример 3. Определить тип уравнения

$$y^2 u''_{xx} + x^2 u''_{yy} - \frac{x^2}{y} u'_y - \frac{y^2}{x} u'_x = 0 \quad (17)$$

и привести его к каноническому виду.

◀ Так как $ac - b^2 = y^2 x^2 > 0$ во всех точках, не лежащих на прямых $x = 0$ или $y = 0$, то в любом открытом квадранте заданно-

уравнение имеет эллиптический тип. Составим характеристическое уравнение

$$y^2 dy^2 + x^2 dx^2 = 0.$$

Оно имеет комплексно сопряженные общие интегралы $y^2 + ix^2 = k$ и $y^2 - ix^2 = k$. Поэтому полагаем $\xi = y^2$ и $\eta = x^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} u'_x &= u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\eta \cdot 2x, \\ u'_y &= u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi \cdot 2y, \\ u''_{xx} &= (u''_{\xi\xi} \xi'_x + u''_{\eta\xi} \eta'_x) \cdot 2x + u''_{\eta\eta} \cdot 2 = u''_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + 2u''_{\eta}, \\ u''_{yy} &= (u''_{\xi\xi} \xi'_y + u''_{\xi\eta} \eta'_y) \cdot 2y + u''_{\xi\xi} \cdot 2 = u''_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + 2u''_{\xi}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

$$y^2 (4x^2 u''_{\eta\eta} + 2u''_{\eta}) + x^2 (4y^2 u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi}) - \frac{x^2}{y} 2yu'_\xi - \frac{y^2}{x} 2xu'_\eta = 0,$$

т. е. $4x^2 y^2 (u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\xi}) = 0$. Сокращая на $4x^2 y^2 \neq 0$, приходим к уравнению канонического вида $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. Отсюда заключаем, что решение уравнения является гармонической функцией по переменным ξ и η . ►

В задачах 17.8—17.18 определить тип уравнений и привести их к каноническому виду.

$$17.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$17.9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$17.10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$17.11. x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$17.12. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$17.13. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$17.14. xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ в области } x \geq 0, \\ y > 0.$$

$$17.15. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{ctg} x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

$$17.16. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$17.17. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в области } x \geq 0.$$

$$17.18. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

17.19**. Найти общее решение уравнения из задачи 17.8.

17.20. Найти общее решение уравнения из задачи 17.9.

17.21. Найти общее решение уравнения из задачи 17.11.

17.22. Найти общее решение уравнения из задачи 17.15.

17.23. Найти общее решение уравнения из задачи 17.18.

§ 2. Аналитические методы решения уравнений математической физики

1. Метод Даламбера. Одним из широко используемых способов решения уравнений колебаний струны является метод характеристик, называемый в этом случае *методом Даламбера*. В основе его лежит тот факт, что с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

преобразуется в уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ (см. задачу 17.5), которое имеет общее решение $u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta)$, где Φ и F — произвольные дважды дифференцируемые функции. Для определения этих функций Φ и F , т. е. для определения закона колебаний струны, требуется использовать начальные условия, а для некоторых задач и граничные. Если вернуться к старым переменным x и t , то решение имеет вид

$$u(x, t) = \Phi(x + at) + F(x - at).$$

Здесь $F(x - at)$ характеризует прямую волну (кривая $F(x)$ смещается вправо со скоростью a), а $\Phi(x + at)$ — обратную волну (кривая $\Phi(x)$ смещается влево со скоростью a).

Если рассматривается задача Коши для бесконечной струны $-\infty < x < \infty$, то по заданным начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

определяются функции Φ и F и искомое решение (*формула Даламбера*)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (3)$$

Пример 1. Найти решение $u(x, t)$ задачи Коши ($-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

◀ Используя формулу Даламбера (3), имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\cos(x-t) + \cos(x+t)] = \cos x \cos t. \quad \blacktriangleright$$

Используя формулу Даламбера, найти решения $u(x, t)$ следующих задач Коши ($-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$):

17.24. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$, $u'_t(x, 0) = 0$.

17.25. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$, $u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$.

17.26. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u'_t(x, 0) = \sin x$.

17.27. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$, $u'_t(x, 0) = \cos x$.

17.28. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$.

17.29*. Найти закон свободных колебаний бесконечной струны, если начальная скорость каждой ее точки равна нулю, а начальное отклонение задается функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0) \cup (2l, \infty), \\ x & \text{при } x \in (0, l), \\ 2l-x & \text{при } x \in (l, 2l). \end{cases}$$

Построить на чертеже профиль струны в моменты времени $t = l/2a$ и $t = l/a$ (a — входящая в уравнение (1) постоянная).

17.30*. Найти решение уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \varphi(x) \equiv 0$,

$$u'_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > h, \\ -a & \text{при } -h < x < 0, \\ a & \text{при } 0 < x < h. \end{cases}$$

Построить профиль струны в моменты времени $t = h/(2a)$ и $t = 3h/(2a)$.

В случае полубесконечной струны кроме начальных условий (2), заданных при $0 \leq x < \infty$, необходимо добавить еще граничное условие (конец струны предполагается в точке $x=0$)

$$u(0, t) = 0 \quad (4)$$

для закрепленной в точке $x=0$ струны,

$$u'_x(0, t) = 0 \quad (5)$$

для свободного конца в точке $x=0$,

$$u'_x(0, t) - hu(0, t) = 0$$

для упругого закрепления в точке $x=0$.

Из условий (2) и (4) следует, что $\varphi(0) = 0$.

В случае однородных граничных условий (4) или (5) решение задачи о колебании полубесконечной струны сводится к решению задачи о колебании бесконечной струны путем продолжения начальных условий на всю ось нечетным образом для условия (4), т. е. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, и четным образом для условия (5), т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$.

Пример 2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin^2 x$, $u(0, t) = 0$.

◀ Продолжим функции $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = \sin^2 x$ на отрицательную полуось нечетным образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{при } x \geq 0, \\ -\sin^2 x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда по формуле Даламбера (3) решение запишется следующим образом:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z) dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} [(x+at)^2 + (x-at)^2] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin^2 z dz & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2} [(x+at)^2 - (x-at)^2] + \\ + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \sin^2 z dz - \int_{x-at}^0 \sin^2 z dz \right] & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0, \\ x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ 2axt + \frac{1}{4a} [2x - \sin 2x \cos 2at] & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0. \end{cases} \blacktriangleright$$

З а м е ч а н и е. Как следует из формулы Даламбера (3) и уравнения (1), входящая в условие (2) функция $\varphi(x)$ должна иметь вторую производную, а функция $\psi(x)$ — первую. Однако в последующих задачах мы будем рассматривать функции $\varphi(x)$ с угловыми точками, а функции $\psi(x)$ — с точками разрыва, предполагая тем не менее, что определяемая по формуле (3) функция является решением (вообще говоря, обобщенным) исходного уравнения (1). Это объясняется тем, что путем незначительных изменений функции φ и ψ можно сделать достаточно гладкими и полученные для этих сглаженных функций по формуле (3) решения $u^*(x, t)$ будут мало отличаться от $u(x, t)$.

Используя метод продолжения и формулу Даламбера, найти решения следующих задач:

17.31. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \sin x, \quad u'_x(0, t) = 0.$$

17.32. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

17.33. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, \quad u(0, t) = 0.$$

17.34. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, \quad u(0, t) = 0.$$

17.35. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u'_t(x, 0) = \sin x, \quad u(0, t) = 0.$$

17.36. В области $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \in (l, \infty), \end{cases}$$

$$u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

Построить графики решения в моменты $t = l/(4a)$ и $t = 3l/(4a)$.

17.37. Полуограниченная струна ($u(0, t) = 0$) в начальный момент имеет форму $u(x, 0) = 0$ и начальную скорость

$$u'_t(x, 0) = \begin{cases} c & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \in [l, \infty). \end{cases}$$

Найти форму струны для момента времени $t = l/a$ и $t = 5l/a$, где a — входящая в уравнение (1) константа.

2. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы. Одним из наиболее распространенных аналитических методов решения уравнений математической физики является так называемый *метод Фурье*, который опирается на свойства ортогональных систем и

ортогональных разложений. Поэтому изложению метода Фурье мы предпосылаем ряд задач на свойства ортогональных систем, ортогональных рядов и на решение краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в векторном пространстве \mathcal{U} введено скалярное (внутреннее) произведение (x, y) векторов $x \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{U}$ (см. ч. I, глава 4, § 1, п. 3), удовлетворяющее условиям

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Нормой элемента $x \in \mathcal{U}$, обозначаемой $\|x\|$, называется число, равное $\sqrt{(x, x)}$, т. е. $\|x\|^2 = (x, x)$. Последовательность векторов $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет условию: для всех $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|x_{n_1} - x_{n_2}\| < \varepsilon$. Пространство \mathcal{U} называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность векторов $\{x_n\}$ этого пространства имеет предел $x_0 \in \mathcal{U}$. Полное линейное векторное пространство со скалярным произведением называется *пространством Гильберта* и обозначается буквой H .

17.38*. Доказать, что удовлетворяющее условиям 1)–4) скалярное произведение есть непрерывная функция относительно сходимости по норме, т. е. если $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ и $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $|(x_n, y_n) - (x, y)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

17.39. Доказать, что линейные операции над векторами гильбертова пространства H непрерывны, т. е. если $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ и последовательность чисел $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ($n \rightarrow \infty$), то $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \rightarrow 0$ и $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \rightarrow 0$.

17.40*. Доказать, что конечномерное евклидово пространство является полным.

17.41. Пусть l_2 — векторное пространство бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ с действительными (комплексными) компонентами x_n , $n \in \mathbb{N}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Доказать, что соотношение $(x, y) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

задает скалярное произведение в пространстве l_2 .

17.42. Доказать, что счетное множество $\mathcal{B} = \{e_n, n \in \mathbb{N}; e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}$ образует ортонормированный базис в пространстве l_2 относительно скалярного произведения задачи 17.41.

17.43*. Доказать, что l_2 является пространством Гильберта.

17.44. Пусть $L_2(a, b)$ — пространство заданных на $[a, b]$ комплекснозначных функций $f(x)$ таких, что $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Считая известным, что из условия $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ следует $f(x) = \theta(x)$, где $\theta(x)$ — нулевой элемент пространства $L_2(a, b)$, доказать, что если $f(x) \in L_2(a, b)$, $g(x) \in L_2(a, b)$, то соотношение $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ определяет скалярное произведение в $L_2(a, b)$. Написать неравенство Коши — Буняковского в $L_2(a, b)$, называемое также *неравенством Шварца* (см. ч. 1, с. 164).

17.45*. Доказать, что последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1, -1/n], \\ nt & \text{при } t \in (-1/n, 1/n), \\ 1 & \text{при } t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

фундаментальна в пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций с нормой $\left(\int_{-1}^1 (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$, но не имеет предела. Таким образом, это пространство не является полным.

17.46. Пусть $L_2^{\rho}(a, b)$ — пространство заданных на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что $\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$, где весовая функция $\rho(x) \geq 0$ и может обращаться в нуль только в отдельных точках. Доказать, что если $f(x) \in L_2^{\rho}(a, b)$, $g(x) \in L_2^{\rho}(a, b)$, то соотношение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

определяет скалярное произведение в $L_2^{\rho}(a, b)$ (см. условие задачи 17.44).

Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется *ортонормальной на $[a, b]$* , если

а) $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$, $n = 0, 1, \dots$;

$$\text{б) } (\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ d_n \neq 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *ортгональной на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$* , если

$$a) \varphi_n(x) \in L_2^0(a, b), \quad n=0, 1, \dots;$$

$$б) (\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ d_n \neq 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Если $d_n=1$ для всех $n=0, 1, \dots$, то система называется *ортонормированной на $[a, b]$* или соответственно *ортонормированной на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$* .

На примерах следующих задач убедиться в существовании ортгональных и ортгональных с весом систем функций.

17.47. Доказать, что тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ортгональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

ортонормирована на $[-\pi, \pi]$.

17.48. Доказать, что система функций $\left\{ \cos \frac{\pi nx}{l} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ортгональна на отрезке $[0, l]$.

17.49. Доказать, что система функций $\left\{ \sin \frac{2\pi nx}{l} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ортгональна на отрезке $[0, l/2]$.

17.50. Пусть система функций $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ из $L_2(a, b)$ линейно независима на $[a, b]$. Доказать по индукции, что построенные по рекуррентной формуле функции

$$\varphi_0(x) = \frac{f_0(x)}{\|f_0\|},$$

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k) \varphi_k(x)}{\left\| f_n - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k) \varphi_k \right\|}, \quad n=1, 2, \dots,$$

образуют ортонормированную на $[a, b]$ систему (метод ортгонализации Шмидта).

17.51. Используя метод ортгонализации Шмидта (см. задачу 17.50), найти первые четыре функции (ортонормированные полиномы Лежандра $\hat{P}_0(x), \hat{P}_1(x), \hat{P}_2(x)$ и $\hat{P}_3(x)$),

полученные при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$.

17.52. Используя метод ортогонализации Шмидта (см. задачу 17.50), найти первые 4 функции, получаемые при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ортонормированные полиномы Чебышева).

17.53*. Ненормированные полиномы Чебышева с коэффициентом 1 при старшей степени имеют вид

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что система $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17.54. Используя метод ортогонализации Шмидта (см. задачу 17.50), найти первые 3 функции, полученные при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[0, 1]$.

Функции Радемахера $r_n(x)$ определяются следующим образом:

$$r_n(x) = \text{sign} \sin 2^{n+1} \pi x, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

17.55. Построить графики функций Радемахера $r_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

17.56. Показать, что при $\mu > \nu$ каждый интервал постоянства функции $r_\nu(x)$ содержит четное число $2^{\mu-\nu}$ интервалов постоянства функции $r_\mu(x)$.

17.57. Доказать ортонормированность системы $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0, 1]$.

Функции Уолша $W_n(x)$, $x \in [0, 1]$, в нумерации Пэли определяются следующим образом:

$$W_0(x) \equiv 1, \quad W_{2^k}(x) = r_k(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

и если $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_\nu}$, $n_1 > n_2 > \dots > n_\nu \geq 0$, то

$$W_n(x) = \prod_{k=1}^{\nu} W_{2^{n_k}}(x) = \prod_{k=1}^{\nu} r_{n_k}(x),$$

где $r_n(x)$ — функции Радемахера, причем в точках разрыва

$$W_n(x) = \frac{1}{2} [W_n(x+0) + W_n(x-0)].$$

17.58. Построить графики функций Уолша $W_n(x)$ для $n=0, 1, \dots, 8$.

17.59. Доказать ортонормированность системы $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0, 1]$.

17.60**. Пусть $J_\nu(x)$ — решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, а $\{\mu_k^{(\nu)}\}_{k=1}^{\infty}$ — корни $J_\nu(x)$. Доказать, что система функций $\{J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x) = x$.

Отыскание решения $y(x)$, $x \in [a, b]$, уравнения

$$(k(x)y'(x))' - q(x)y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям одного из типов

1) $y(a) = y(b) = 0$,

2) $y'(a) = y'(b) = 0$,

3) $y(x)$ ограничено при $x \rightarrow a+0$ и $x \rightarrow b-0$, будем называть задачей Штурма—Лиувилля. При этом предполагаем, что функции $k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $k(a) = k(b) = 0$ в случае условия типа 3), $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$ и $\rho(x)$ ограничена для $x \in [a, b]$.

В общую задачу Штурма—Лиувилля краевые условия 1)–3) могут входить и в некоторых линейных комбинациях.

Нетривиальные решения $y(x) \neq 0$ уравнения (6), удовлетворяющие одному из краевых условий 1)–3), существуют не при всех λ . Значение λ^* , при котором существует нетривиальное решение $y^*(x)$ задачи Штурма—Лиувилля, называется *собственным числом уравнения* (6), а соответствующее ему решение $y^*(x)$ — *собственной функцией*.

Заметим, что собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задачи Штурма—Лиувилля, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, т. е.

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x) y_2(x) \rho(x) dx = 0.$$

Найти собственные числа и собственные функции следующих задач:

17.61**. $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$.

17.62. $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(l) = 0$.

17.63. $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = y'(l) = 0$.

17.64. $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y(l) = 0$.

17.65**. $y''(r) + \frac{1}{r} y'(r) + \omega^2 y(r) = 0$, $y(R) = 0$.

3. Ортогональные ряды. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[a, b]$ система функций, а функция $f(x) \in L_2(a, b)$. Тогда существуют числа

$$c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

называемые коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе Φ . Ряд с этими коэффициентами

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

называемые ортогональным разложением или рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Φ .

Если система Φ только ортогональна, а не нормирована, то

$$c_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

17.66. Используя результат задачи 17.60 (см. решение), найти выражение коэффициентов Фурье — Бесселя функции $f(x) \in L_2^0(0, 1)$ ($\rho(x) = x$) по системе $\{I_\nu(\mu_k^{(n)} x)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

17.67*. Нормированные полиномы Лежандра $P_n(x)$ (см. задачу 17.51) можно определить также соотношением (формула Родрига)

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Они образуют ортогональную на $[-1, 1]$ систему, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Найти первые 4 коэффициента разложения функции $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$, если известно, что $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2$, $P_3(x) = 5x^3/2 - 3x/2$.

17.68. Записать выражение коэффициентов Фурье функции $f(x) \in L_2^0(-1, 1)$ ($\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) по системе полиномов Чебышева (см. задачу 17.53).

17.69. Для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ вычислить первые четыре коэффициента ее разложения по системе Уолша в нумерации Пэли.

17.70*. Доказать, что частные суммы $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ разложения функции $f(x)$ по системе Φ дают решение

следующей задачи о наилучшем среднеквадратичном приближении: в множестве

$$M_n = \left\{ T_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\}$$

«полиномов» $T_n(x)$ по системе Φ порядка не выше n найти тот, который дает минимум интегралов

$$\min_{T_n \in M_n} \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx.$$

17.71. Используя результат задачи 17.70, вывести неравенство Бесселя для конечных сумм

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

и для бесконечных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

17.72. Написать неравенство Бесселя задачи 17.71 для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ периода 2π по тригонометрической системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ортогональная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *полной*, если из равенств

$$(f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

следует, что $f(x) = 0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

Для полных ортонормированных систем неравенство Бесселя обращается в равенство *Парсеваля*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Рассмотренные ранее тригонометрические системы, система Уолша, система функций Бесселя, системы полиномов Лежандра и Чебышева являются полными.

17.73. Каков смысл неравенства Бесселя и равенства Парсеваля в конечномерном евклидовом векторном пространстве?

17.74*. Доказать, что система функций Радемахера не является полной на отрезке $[0, 1]$.

4. Метод Фурье решения уравнений математической физики. Метод Фурье, широко используемый при решении ряда задач математической физики, состоит в следующем. Искомая функция, зависящая от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной или нескольких переменных. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, часть из которых вместе с краевыми условиями исходной задачи являются краевыми задачами Штурма — Лиувилля. Искомое решение представляется рядом по произведениям собственных функций этих задач Штурма — Лиувилля.

Пример 3. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на конце $x=0$ однородной горизонтальной струны, правый конец которой при $x=l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент времени струна имела форму $\frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}$, начальные скорости отсутствовали.

◀ Предполагая, что струна совершает малые колебания, получаем следующую смешанную краевую задачу: найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (7)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u'_x(l, t) = 0. \quad (9)$$

Решение этой задачи ищем в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$, подставляя которое в (7), находим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (10)$$

Каждое отношение в (10) зависит от своей переменной, поэтому равенство возможно только в том случае, когда каждое из этих отношений постоянно. Полагая $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ и используя граничные условия (9), получаем задачу Штурма — Лиувилля

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(l) = 0,$$

собственными числами которой являются числа $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$.

а собственными функциями — функции $X_k(x) = \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x$, $k=1, 2, \dots$ (см. задачу 17.63).

Подставив в (10) вместо отношения $\frac{X''(x)}{X(x)}$ его значение $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$, получим при каждом $k=1, 2, \dots$ уравнение

$$T''(t) + \left(\frac{2k-1}{2l}\pi a\right)^2 T(t) = 0,$$

общим решением которого является функция

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi a t.$$

Таким образом, решениями уравнения (7), удовлетворяющими граничным условиям (10), являются функции

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= T_k(t) X_k(x) = \\ &= \left(A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi a t \right) \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x, \\ & \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из линейности уравнения (7) следует, что любая линейная комбинация этих уравнений, т. е. формально составленный ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi a t \right) \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x \quad (11)$$

при условиях на коэффициенты A_k и B_k , допускающих возможность его двукратного почленного дифференцирования по t и по x , также является решением уравнения (7), удовлетворяющим граничным условиям (9).

Потребуем, чтобы представленное рядом (11) решение $u(x, t)$ удовлетворяло также граничным условиям (8), т. е. чтобы

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x$$

и

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2l}\pi a B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x.$$

Из этих равенств заключаем, что если числа A_k являются коэффициентами Фурье функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \frac{1}{30} \left(\sin \frac{7\pi x}{2l} + \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

по системе $\left\{ \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x \right\}_{k=1}^{\infty}$, т. е., если $A_k = 0$ при $k \neq 4$ и $k \neq 8$, а $A_4 = A_8 = 1/30$ и если $B_k = 0$ для всех $k=1, 2, \dots$, то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{30} \left(\cos \frac{7\pi a t}{2l} \sin \frac{7\pi x}{2l} + \cos \frac{15\pi a t}{2l} \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

является искомым решением уравнения (7). ►

17.75. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент струна имела форму $\frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}$, а начальные скорости отсутствовали.

17.76. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент точки струны находились в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $\frac{1}{3} \sin \frac{5\pi x}{l}$.

17.77. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на конце $x=l$ однородной горизонтальной струны, левый конец которой при $x=0$ перемещается так, что касательная к струне остается горизонтальной, если в начальный момент струна имела форму $\frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2l}$, а начальная скорость отсутствовала.

17.78. Найти отклонение $u(x, t)$ закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x=l/2$ и отклонением от положения равновесия h , а начальные скорости отсутствовали.

● Решить уравнение колебаний закрепленной на концах струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при начальных условиях

$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

17.79. Найти колебания закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны, находящейся в положении равновесия, если в начальный момент времени ударом молоточка в точке $x=l/3$ ей сообщается постоянная начальная скорость

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 & \text{при } \left| x - \frac{l}{3} \right| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0 & \text{при } \left| x - \frac{l}{3} \right| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

где π/h — ширина молоточка.

17.80. Найти закон свободных колебаний закрепленной на конце $x=0$ однородной горизонтальной струны, если правый ее конец при $x=l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной.

В начальный момент струна находилась в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $u_t(x, 0) = \sin \pi x/l$.

● Граничными условиями в данном случае являются условия $u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$, а системой собственных функций является система $\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

17.81. Закрепленной в точке $x=l$ однородной горизонтальной струне, левый конец которой в точке $x=0$ может перемещаться с горизонтальной касательной, придана начальная скорость $v = \frac{x(l-x)}{l^2}$. Найти закон ее свободных колебаний, если в начальный момент она имела форму $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

● Системой собственных функций задачи является система $\left\{ \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

17.82. На концах однородного изотропного стержня длиной l поддерживается нулевая температура. Предполагая, что стенки стержня теплоизолированы от окружающей среды, найти закон распределения температуры в стержне, если известно, что в начальный момент имелось следующее распределение температуры: $u(x, 0) = u_0 \frac{x(l-x)}{l^2}$, где $u_0 = \text{const}$.

● Решить уравнение распространения тепла $u_t = a^2 u_{xx}$.

17.83. Один конец стержня (при $x=0$) поддерживается при постоянной нулевой температуре, а второй (при $x=l$) теплоизолирован от окружающей среды (т. е. производная от $u(x, t)$ по x на этом конце равна нулю: $u_x(l, t) = 0$). Найти закон распределения температуры внутри стержня, если начальная температура задана функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < l/2, \\ u_0 & \text{при } l/2 < x < l. \end{cases}$$

● Системой собственных функций является система

$$\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

17.84**. Однородная прямоугольная мембрана ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq m$), закрепленная вдоль всего контура, лежащего

в горизонтальной плоскости, и имеющая в начальный момент форму $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, начала колебаться с начальной скоростью $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$. Найти закон свободных колебаний мембраны. Получить решение в случае $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$, $\psi(x, y) = 0$, если натяжение мембраны T_0 равно ее поверхностной плотности ρ , т. е. $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = 1$.

17.85*. Точкам закрепленной по контуру однородной квадратной мембраны со стороной l , находящейся в начальный момент в положении равновесия, придали начальные скорости $u_t(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}$. Найти закон свободных колебаний мембраны.

17.86*. Закрепленной по контуру однородной квадратной мембране со стороной l придали форму $u(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$. Найти закон свободных колебаний, если начальная скорость точек мембраны постоянна и равна a/l , где a — входящая в уравнение колебаний постоянная.

17.87**. Найти стационарное распределение температуры в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, если на границе прямоугольника поддерживается заданная температура:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad x \in (0, a), \\ u(0, y) = \varphi(y) = y(b-y), \quad u(a, y) = \psi(y) = \sin \frac{\pi y}{b}, \\ y \in (0, b). \end{aligned}$$

17.88*. Найти решение $u(x, y)$ уравнения Лапласа $\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = y(b-y), \quad u(a, y) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0.$$

17.89. Найти решение $u(x, y)$ уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \alpha, \quad u(a, y) = \alpha y, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0.$$

17.90**. Найти свободные колебания закрепленной по краю однородной круглой мембраны радиуса l , если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось

равенством $u(r, \varphi, C) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right)$, в котором μ_1 — первый положительный корень, $I_0(x)$, а начальная скорость мембраны равна ca , где a — постоянная, входящая в уравнение колебаний мембраны.

17.91.** Найти закон стационарного распределения температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R , если на его поверхности поддерживается заданная температура:

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi) = \sin \varphi.$$

В случае, когда исходное уравнение в частных производных является неоднородным, т. е. в характеризуемом этим уравнением физическом процессе имеются внешние силы и источники, предварительно находится система собственных функций соответствующего однородного уравнения и решение ищется в виде ряда по этим собственным функциям с переменными коэффициентами.

Пример 4. Найти форму $u(x, t)$ (отклонение от положения равновесия) закрепленной на конце $x=0$ однородной струны, правый конец которой имеет горизонтальную касательную и на которую действует внешняя сила с плотностью $F(x, t) \neq 0$. В начальный момент $t=0$ струна имела форму $\varphi(x)$ и каждая точка имела скорость $\psi(x)$. Найти $u(x, t)$ при условии, что $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, а $F(x, t) = a^2 = T_0/\rho$.

◀ Предполагая, что струна совершает малые колебания, имеем следующую первую краевую задачу: найти решение $u(x, t)$ уравнения вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (12)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (14)$$

Чтобы найти собственные функции однородного уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ с граничными условиями (13), положим $u(x, t) = X(x)T(t)$ и после разделения переменных получим уравнения

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad (15)$$

с граничными условиями

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (16)$$

Решая уравнение $X'' - \lambda X = 0$ с крайними условиями (16), находим собственные числа $\lambda_k = -\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$ и соответствующие

собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (17)$$

(см. задачу 17.63).

Рассматривая t как параметр, разложим функцию $F(x, t)$ в ряд по системе $\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l},$$

где

$$A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(v, t) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad (18)$$

подставляя который в (12) (считаем, что $c_k(t)$ таковы, что возможно двукратное почленное дифференцирование по x и по t) и сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $c_k(t)$:

$$c_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Из начальных условий (14) следует, что функции $c_k(t)$ должны удовлетворять условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}$$

и

$$u_t'(x, 0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Пусть

$$c_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(v) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv \quad (20)$$

и

$$c_k'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(v) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

т. е. $c_k(0)$ и $c_k'(0)$ являются коэффициентами Фурье соответственно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе (17). Найдем теперь решения

$c_k(t)$ уравнений (19), удовлетворяющие условиям (20) и (21), и, подставляя их в ряд (18), получим искомого решение $u(x, t)$.

По условию $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, поэтому

$$c_k(0) = c'_k(0) = 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Далее, так как $F(x, t) = a^2$, то

$$\begin{aligned} A_k(t) = A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l a^2 \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv = \\ &= -\frac{2a^2}{l} \frac{2l}{\pi(2k-1)} \cos \frac{\pi(2k-1)v}{2l} \Big|_{v=0}^l = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}. \end{aligned}$$

Поэтому требуется найти решения дифференциальных уравнений

$$c_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

удовлетворяющие условиям

$$c_k(0) = c'_k(0) = 0. \quad (23)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (22) мнимые, поэтому частные решения уравнений (22) ищем в виде $c_k(t) = \gamma_k$. Подставив эти значения в (22), найдем, что

$$\gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}.$$

в поэтому общее решение каждого из уравнений (22) запишется в виде

$$c_k(t) = \alpha_k \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k \sin \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и из условий (23) получим

$$c_k(0) = \alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} = 0,$$

$$c'_k(0) = \beta_k \frac{\pi a(2k-1)}{2l} = 0,$$

т. е. $\beta_k = 0$ и $\alpha_k = -\frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$c_k(t) = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \left(1 - \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} \right) = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l}$$

и искомого решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l} \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}. \blacktriangleright$$

17.92*. Для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = u_t'(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

17.93*. Для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = u_t'(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

17.94. Найти температуру стержня при $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура его концов равна нулю, а в точке $x_0 \in (0, l)$ находится сосредоточенный источник с постоянной мощностью Q .

● Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$, в котором $f(x, t) = Q \delta(x - x_0) / c\rho$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, c — удельная теплоемкость и ρ — удельная плотность.

При вычислении коэффициентов $A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(v, t) \sin \frac{\pi kv}{l} dv$ использовать следующее свойство δ -функции:

если $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

17.95. Для $0 \leq x \leq 2$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{\pi x}{4},$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = 0$ и граничным условиям $u(0, t) = 0$ и $u_x'(2, t) = 0$.

В примерах 3 и 4 краевые условия являлись однородными (см. определение задачи Штурма — Лиувилля перед задачей 17.61). Если же рассматривается задача с неоднородными краевыми условиями, то с помощью замены $u = v + U$ путем надлежащего выбора функции U задача сводится к решению уравнения относительно

функции v уже с однородными краевыми условиями. Выбор функции U определяется видом заданных краевых условий.

Пример 5. Найти закон свободных колебаний горизонтальной струны, правый конец которой при $x=l$ закреплен, а левый при $x=0$ движется по закону $u(0, t) = \sin \frac{\pi a t}{l}$. Начальные скорость и отклонение равны нулю.

◀ Имеем уравнение $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ с начальными условиями $u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0$ и неоднородными граничными условиями $u(0, t) = \sin \frac{\pi a t}{l}$, $u(l, t) = 0$. Произведем замену $u(x, t) = v(x, t) + \frac{l-x}{l} \sin \frac{\pi a t}{l}$. Тогда относительно функции $v(x, t)$ получим неоднородное уравнение

$$v''_{tt} = a^2 v''_{xx} + \frac{\pi^2 a^2 (l-x)}{l^3} \sin \frac{\pi a t}{l}$$

с начальными условиями $v(x, 0) = 0$, $v'_t(x, 0) = \frac{\pi a (l-x)}{l^2}$ и однородными граничными условиями $v(0, t) = v(l, t) = 0$. Однородное уравнение $v''_{tt} = a^2 v''_{xx}$ с этими граничными условиями имеет систему собственных функций $\left\{ \sin \frac{\pi k x}{l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$, поэтому ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Подставив это выражение в неоднородное уравнение, получим бесконечную систему уравнений

$$C''_k(t) + \left(\frac{\pi k a}{l} \right)^2 C_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

где $A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\pi^2 a^2 (l-x)}{l^3} \sin \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2\pi a^2}{l^3 k} \sin \frac{\pi a t}{l}$, причем

из начальных условий следуют следующие условия на $C_k(0)$ и $C'_k(0)$: $v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = 0$, т. е. $C_k(0) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$,

и $v'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C'_k(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = -\frac{\pi a (l-x)}{l^2}$, т. е.

$$C'_k(0) = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\pi a (l-x)}{l^2} \sin \frac{\pi k x}{l} dx = -\frac{2a}{lk} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

При $k=1$ в уравнении (24) имеет место резонанс (см. указание к задаче 17.93), поэтому частное решение ищется в форме

$\tilde{C}_1(t) = t \left(A_1 \cos \frac{\pi at}{l} + B_1 \sin \frac{\pi at}{l} \right)$; подставив его в уравнение, найдем, что $\tilde{C}_1(t) = -\frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l}$. Используя затем условия $C_1(0) = 0$ и $C_1'(0) = -\frac{2a}{l}$, находим, что

$$C_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi at}{l} - \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l}.$$

Далее, используя условия $C_k(0) = 0$ и $C_k'(0) = -\frac{2a}{lk}$, при $k \geq 2$ получаем следующие решения уравнений (24):

$$C_k(t) = -\frac{2}{\pi(k^2-1)} \sin \frac{\pi kat}{l} + \frac{i2}{\pi k(k^2-1)} \sin \frac{\pi at}{l}.$$

Подставив эти коэффициенты в ряд для $v(x, t)$, получим искомое решение

$$u(x, t) = \frac{l-x}{l} \sin \frac{\pi at}{l} + v(x, t). \blacktriangleright$$

17.96. В области $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения $u_t' = a^2 u_{xx}''$ при начальном условии $u(x, 0) = x/l$ и граничных условиях $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = e^{-t}$.

● Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + xe^{-t}/l$.

17.97. В области $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения $u_t' = u_{xx}''$ при начальном условии $u(x, 0) = 1$ и граничных условиях $u(0, t) = e^{-\frac{t}{4l^2}}$ и $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$.

● Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + e^{-\frac{t}{4l^2}}$.

17.98. Найти закон свободных колебаний горизонтальной струны, левый конец которой при $x=0$ закреплен, а правый движется по закону $u(l, t) = \sin \frac{\pi at}{2l}$. Начальные отклонения и скорость равны нулю.

● Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} \sin \frac{\pi at}{2l}$.

17.99. В области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ найти решение уравнения $u_t' = a^2 u_{xx}''$ при начальном условии $u(x, 0) = \frac{x}{l}$ и граничных условиях $u(0, t) = e^{-t}$, $u(l, t) = 0$.

17.100. В области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ найти решение уравнения $u_t' = u_{xx}''$ при начальном условии $u(x, 0) = 1$ и граничных $u_x'(0, t) = 0, u(l, t) = e^{-t/l^2}$.

При решении задачи Коши (в этом случае краевые условия заменены ограниченностью решения на бесконечности) метод Фурье приводит к использованию интеграла Фурье.

Пример 6. Найти закон распределения температуры $u(x, t)$ в длинном однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована и известно начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

▣ Пренебрегая влиянием температурных условий на концах длинного стержня, будем считать его бесконечным. Поэтому мы имеем следующую задачу Коши: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (25)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}. \quad (26)$$

Предполагаем, что $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на оси $(-\infty, \infty)$. Ищем решение в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$, поэтому уравнение (25) преобразуется к виду

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2, \quad (27)$$

причем отношение отрицательно в силу того, что при $t \rightarrow \infty$ функция $T(t) = e^{-a^2 \omega^2 t}$ не должна возрастать до бесконечности. Правое из отношений (27) приводит к уравнению $X'' + \omega^2 X = 0$, решениями которого являются функции

$$X_\omega(x) = A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x,$$

а потому решениями уравнения (25) являются функции

$$u_\omega(x, t) = e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x).$$

Если $A(\omega)$ и $B(\omega)$ абсолютно интегрируемы для $\omega \in [0, +\infty)$, то интеграл

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} u_\omega(x, t) d\omega = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega \quad (28)$$

можно дифференцировать по параметрам t и x и мы имеем

$$u_t'(x, t) = -a^2 \int_0^{+\infty} \omega^2 e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega,$$

$$u_{xx}''(x, t) = - \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \omega^2 (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega.$$

Следовательно, определяемая интегралом (28) функция $u(x, t)$ является решением уравнения (25), поэтому, если мы выберем

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

и

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

то определяемая интегралом (28) функция $u(x, t)$ будет удовлетворять и условию (26). Таким образом, искомым решением является функция

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) [\cos \omega x \cos \omega \tau + \sin \omega x \sin \omega \tau] d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \tau) d\omega. \end{aligned}$$

Используя формулу (см. задачу 8.192)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma \omega^2} \cos \delta \omega d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}},$$

вычисляем внутренний интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \tau) d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x - \tau)^2}{4a^2 t}},$$

а потому

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-\frac{(x - \tau)^2}{4a^2 t}} d\tau.$$

В нашем случае $\varphi(\tau) = e^{-\tau^2}$, поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{(x - \tau)^2}{4a^2 t}\right)} d\tau. \quad \blacktriangleright$$

В задачах 17.101—17.104 найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

при указанном начальном условии $u(x, 0)$.

$$17.101. \quad u(x, 0) = \begin{cases} A, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$$17.102. u(x, 0) = e^{-|x|}.$$

$$17.103. u(x, 0) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$$17.104. u(x, 0) = \begin{cases} x, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

§ 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

1. Основные понятия метода сеток. В большинстве случаев получить решение дифференциального уравнения в частных производных с помощью элементарных или специальных функций невозможно. В связи с этим важное значение приобретают приближенные методы его решения. Ниже мы ограничимся рассмотрением краевых задач для уравнений математической физики с двумя независимыми переменными в области D с границей γ , т. е.

$$Lu \equiv a(x, y) u''_{xx} + 2b(x, y) u''_{xy} + c(x, y) u''_{yy} + d(x, y) u'_x + + e(x, y) u'_y + g(x, y) u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$\Gamma u = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \quad (2)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $e(x, y)$, $g(x, y)$, $f(x, y)$ — известные функции переменных x и y , определенные в области D , Γ — некоторый линейный (в общем случае дифференциальный) оператор граничных условий и $\varphi(x, y)$ — известная функция, заданная на границе γ .

Наиболее часто используемым методом численного решения краевой задачи (1), (2) является *метод сеток* (*метод конечных разностей*). В методе сеток замкнутая область $\bar{D} = D \cup \gamma$ заменяется конечным множеством точек — *сеткой* $\bar{D}_h = D_h \cup \gamma_h$. Точки этого множества называются *узлами* сетки. Параметр $h = (h, \tau)$, шаг сетки, характеризует ее плотность в области D . Обычно при $|h| = \sqrt{h^2 + \tau^2} \rightarrow 0$ последовательность сеток \bar{D}_h стремится заполнить всю область \bar{D} . Производные, входящие в левые части соотношений (1) и (2), заменяются на сетке \bar{D}_h соответствующими разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} L_h u_h &= f_h(x_m, y_n), & (x_m, y_n) \in D_h, \\ \Gamma_h u_h &= \varphi_h(x_m, y_n), & (x_m, y_n) \in \gamma_h, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_h(x_m, y_n)$, $(x_m, y_n) \in \bar{D}_h$ — *искомая сеточная функция*, $f_h(x_m, y_n)$, $\varphi_h(x_m, y_n)$ — *сеточные функции*, заданные на множествах D_h и γ_h соответственно, и L_h, Γ_h — *разностные операторы*. Сеточная функция u_h , являющаяся решением системы уравнений (3), называется *приближенным решением* краевой задачи (1), (2) на сетке \bar{D}_h . Ее значения $\tilde{u}_{m, n} = \tilde{u}_h(x_m, y_n)$ приближенно заменяют в узлах сетки \bar{D}_h соответствующие значения точного решения $\tilde{u}(x_m, y_n)$ исходной краевой задачи с некоторой погрешностью $\delta_{m, n} = \tilde{u}_{m, n} - \tilde{u}(x_m, y_n)$.

Семейство систем уравнений (3), зависящее от параметра $\mathbf{h} = (h, \tau)$, называется *разностной схемой*. Разностную схему (3) иногда удобно записывать в виде

$$\bar{L}_h u_h = \bar{f}_h(x_m, y_n), \quad (x_m, y_n) \in \bar{D}_h, \quad (4)$$

где

$$\bar{L}_h = \begin{cases} L_h, & (x_m, y_n) \in D_h, \\ \Gamma_h, & (x_m, y_n) \in \gamma_h; \end{cases} \quad \bar{f}_h = \begin{cases} f_h, & (x_m, y_n) \in D_h, \\ \varphi_h, & (x_m, y_n) \in \gamma_h. \end{cases}$$

Построение разностной схемы (3) или (4) для краевой задачи (1), (2) начинается с выбора сетки, т. е. указывается правило замены области D и границы γ сеточной областью \bar{D}_h . Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной. Для этого проводятся два семейства параллельных прямых: $x = x_0 + mh$ и $y = y_0 + n\tau$ и рассматриваются всевозможные точки попарных пересечений прямых из этих семейств, т. е. точки вида $(x_m, y_n) = (x_0 + mh, y_0 + n\tau)$. Точки (x_m, y_n) , которые принадлежат замкнутой области \bar{D} , образуют сетку \bar{D}_h , являясь ее узлами. У каждого узла (x_m, y_n) имеется четыре соседних точки: (x_{m-1}, y_n) , (x_{m+1}, y_n) , (x_m, y_{n-1}) , (x_m, y_{n+1}) . Если все эти соседние точки также принадлежат сетке \bar{D}_h , то узел (x_m, y_n) называется *внутренним*, в противном

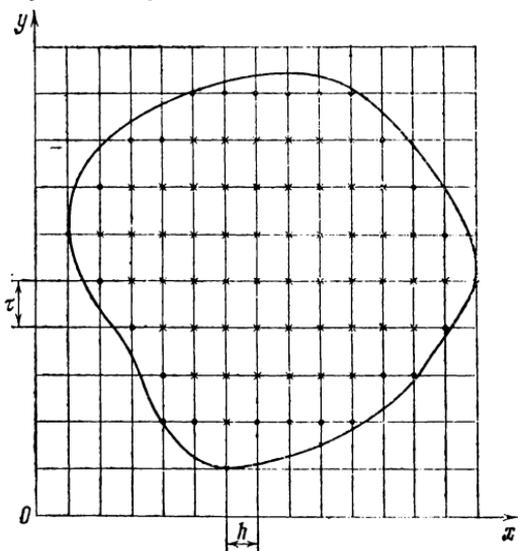


Рис. 224

случае узел (x_m, y_n) называется *граничным*. Совокупность внутренних узлов образует множество D_h , а граничных — множество γ_h (так что $\bar{D}_h = D_h \cup \gamma_h$). Следует отметить, что множество граничных узлов γ_h не обязательно является подмножеством точек границы γ , что приводит к погрешностям при построении сеточной функции φ_h из (3). На рис. 224 приведен пример прямоугольной и равномерной сетки \bar{D}_h , построенной для заданной области D

(внутренние узлы сетки здесь отмечены символом *, а граничные — символом ●).

После выбора сетки \bar{D}_h проводится построение сеточной функции $\bar{f}_h = (f_h, \varphi_h)$ и разностного оператора $\bar{L}_h = (L_h, \Gamma_h)$ из (4). Для определения \bar{f}_h в узлах сетки \bar{D}_h полагают $\bar{f}_h(x_m, y_n) = f(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in D_h$, $\bar{f}_h(x_m, y_n) = \varphi(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in \gamma_h$ и $(x_m, y_n) \in \gamma$, если же граничный узел $(x_m, y_n) \notin \gamma$, то в качестве $\bar{f}_h(x_m, y_n)$ выбирается значение функции $\varphi(x, y)$ в произвольной точке $(x, y) \in \gamma$, отстоящей от узла (x_m, y_n) на величину, меньшую $|h|$. Для построения разностного оператора \bar{L}_h все известные функции, участвующие в явной записи операторов L и Γ (например, $a(x, y)$, $b(x, y)$ и т. д.), заменяются своими значениями в узлах сетки \bar{D}_h и обозначаются соответственно через $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ и т. д., а частные производные 1-го и 2-го порядков неизвестной функции $u(x, y)$ приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями. В результате получаем разностную схему (4), соответствующую краевой задаче (1), (2).

Пример 1. Построить разностную схему для краевой задачи распространения тепла в конечном стержне ($0 \leq x \leq l$)

$$\begin{aligned} u_t' - a^2 u_{xx}'' &= f(x, t), & u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), & u(l, t) &= \psi_2(t). \end{aligned}$$

◀ Заметим, что область определения $\{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}$ данной краевой задачи является неограниченной. Поэтому для построения равномерной прямоугольной сетки \bar{D}_h (которая всегда является конечным множеством точек) поступим следующим образом. Проведем два семейства прямых $x = mh$ и $t = n\tau$ для некоторых заданных h и τ . Очевидно, что точка (x_m, t_n) принадлежит области определения исходной задачи, если $m = 0, 1, \dots, r$, где $r = [l/h]$, и $n = 0, 1, \dots$ Положим

$$\bar{D}_h = \{(x_m, t_n) | m = 0, 1, \dots, r, n = 0, 1, \dots, s\}, \quad (5)$$

где целое s выбирается так, чтобы интервал $0 \leq t \leq s\tau$ перекрывал тот временной диапазон, в котором изучается распространение тепла в стержне. Множество внутренних узлов имеет вид $D_h = \{(x_m, t_n) | m = 1, 2, \dots, r-1; n = 1, 2, \dots, s\}$. В это множество входят и узлы вида (x_m, t_s) , $m = 1, 2, \dots, r-1$, которые мы считаем внутренними, так как наше ограничение $t \leq s\tau$ является искусственным! Соответственно $\gamma_h = \bar{D}_h \setminus D_h$ или в явном виде $\gamma_h = \{(x_m, 0) | m = 0, 1, \dots, r\} \cup \{(0, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\} \cup \{(x_r, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\}$.

Далее полагаем $u_h = \{u_{m,n}\}$,

$$\bar{f}_h(x_m, t_n) = \begin{cases} f(x_m, t_n), & (x_m, t_n) \in D_h, \\ \varphi(x_m), & n = 0; m = 0, 1, \dots, r, \\ \psi_1(t_n), & m = 0; n = 1, 2, \dots, s, \\ \psi_2(t_n), & m = r; n = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что в случае, когда l/h не является целым числом, т. е. $r = [l/h] < l/h$, узлы (x_r, t_n) , $n = 1, 2, \dots, s$, не принадлежат граничной полупрямой $x = l, y \geq 0$. Вместе с тем эти узлы яв-

ляются граничными, поэтому значения сеточной функции \bar{f}_h в них перенесены с границы.

Для получения разностного уравнения заменим производные разностными отношениями (см. задачи 17.105 и 17.108):

$$u'_t(x_m, t_n) \approx \frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}),$$

$$u''_{xx}(x_m, t_n) \approx \frac{1}{h^2} (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}),$$

где $(x_m, t_n) \in D_h$. Следовательно,

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}) - \frac{a^2}{h^2} (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}), \\ \quad m=1, \dots, r-1; n=0, 1, \dots, s-1, \\ u_{m, 0}, \quad m=0, \dots, r, \\ u_{0, n}, \quad n=1, \dots, s, \\ u_{r, n}, \quad n=1, \dots, s. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в (4), получаем искомую разностную схему, которая представляет собой следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}) - \frac{a^2}{h^2} (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}) = f(x_m, t_n),$$

$$m=1, \dots, r-1; n=0, \dots, s-1,$$

$$u_{m, 0} = \varphi(x_m), \quad m=0, \dots, r,$$

$$u_{0, n} = \psi_1(t_n), \quad n=1, \dots, s,$$

$$u_{r, n} = \psi_2(t_n), \quad n=1, \dots, s.$$

Эта система состоит из $(s+1)(r+1)$ уравнений. Решив ее относительно неизвестных $u_{m, n}$, $m=0, \dots, r$; $n=0, \dots, s$, найдем сеточную функцию $\bar{u}_h = \{u_{m, n}\}$, значения которой в узлах сетки приближенно заменяют значения искомого решения исходной краевой задачи для уравнения теплопроводности. ►

Естественно, наибольшие трудности в построении разностной схемы (4) вызывает замена дифференциального оператора L исходного дифференциального уравнения в частных производных (1) разностным оператором \bar{L}_h из (3).

Пусть U_h — конечномерное нормированное пространство сеточных функций u_h , заданных на сетке D_h , с нормой $\|u_h\| = \max_v |u_v|$,

где u_v — координаты вектора u_h (индекс v последовательно пробегает все пары индексов (m, n) , нумерующих узлы сетки). Будем говорить, что разностный оператор \bar{L}_h приближает дифференциальный оператор L , если для любой функции $u(x, y)$, дифференцируемой достаточное число раз, норма сеточной функции $(Lu)_h - \bar{L}_h u_h$ стремится к нулю при $|h| \rightarrow 0$, т. е.

$$\|(Lu)_h - \bar{L}_h u_h\| \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0.$$

Если, кроме того, выполняется неравенство

$$\|(Lu)_h - \bar{L}_h u_h\| \leq C(|h|^p + |\tau|^q),$$

где C — константа, не зависящая от h , то порядок приближения разностным оператором равен p по переменной x и q по переменной y .

В частном случае, когда шаги сетки связаны соотношением $\tau = \theta(h)$ (т. е. не являются независимыми) и

$$\|(Lu)_h - L_h u_h\| \leq C |h|^n,$$

говорят, что разностный оператор L_h приближает оператор L с порядком приближения n .

Для определения порядка приближения обычно используется формула Тейлора.

Пример 2. Определить порядок приближения дифференциального оператора $Lu = u_t - a^2 u_{xx}$ разностным оператором из примера 1.

◀ В примере 1 был построен разностный оператор

$$(L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}) - \frac{a^2}{h^2} (u_{m+i, n} - 2u_{m, n} + u_{m-i, n}).$$

Используя формулу Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}) &= \frac{1}{\tau} (u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)) = \\ &= u'_t(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t_n), \end{aligned}$$

где $t_m < t' < t_m + \tau$, и

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (u_{m+i, n} - 2u_{m, n} + u_{m-i, n}) &= \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (u(x_m + h, t_n) - u(x_m, t_n)) + \frac{1}{h} (u(x_m - h, t_n) - u(x_m, t_n)) \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left(u'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2} u''_{xx}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{6} u'''_{xxx}(x_m, t_n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{24} u''''_{xxxx}(x', t_n) \right) + \left(-u'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2} u''_{xx}(x_m, t_n) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{6} u'''_{xxx}(x_m, t_n) + \frac{h^3}{24} u''''_{xxxx}(x'', t_n) \right), \end{aligned}$$

где $x_m - h < x'' < x_m < x' < x_m + h$. Приводя подобные члены в правой части последнего выражения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (u_{m+i, n} - 2u_{m, n} + u_{m-i, n}) &= u''_{xx}(x_m, t_n) + \\ &\quad + \frac{h^2}{24} (u''''_{xxxx}(x', t_n) + u''''_{xxxx}(x'', t_n)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_{m, n} &= u'_t(x_m, t_n) - a^2 u''_{xx}(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t_n) - \\ &\quad - \frac{a^2 h^2}{24} (u''''_{xxxx}(x', t_n) + u''''_{xxxx}(x'', t_n)). \quad (8) \end{aligned}$$

Используя выражение (8), разность между исходным дифференциальным оператором L и заменяющим его разностным L_h в узлах сетки можем представить в виде

$$(Lu)_{m, n} - (L_h u_h)_{m, n} = \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t') - \frac{a^2 h^2}{24} (u''''_{xxxx}(x', t_n) + u''''_{xxxx}(x'', t_n))$$

для некоторых $t' (t_n < t' < t_n + \tau)$ и $x', x'' (x_m - h < x' < x_m < x' < x_m + h)$. Если теперь $|u''_{tt}(x, t)| < M_1$ и $|u''''_{xxxx}(x, t)| < M_2$, то выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|(Lu)_h - L_h u_h\| &= \max_{m, n} |(Lu)_{m, n} - (L_h u_h)_{m, n}| \leq \\ &\leq \frac{M_1}{2} |\tau| + \frac{a^2 h^2}{12} |h|^2 \leq C (|h|^2 + |\tau|). \end{aligned}$$

Следовательно, использованный в примере 1 разностный оператор приближает исходный дифференциальный и порядок приближения по переменной x равен двум, а по t — единице.

Отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы порядок приближения был равен двум, необходимо шаги h и τ сетки связать соотношением $\tau = h^2$.

З а м е ч а н и е. Для облегчения запоминания построенного разностного оператора полезно поставить в соответствие ему «шаблон» — геометрическую картинку расположения узлов сетки, значения в которых связывает разностный оператор при некоторых фиксированных значениях m и n . Для разностного оператора из примера 1 шаблон изображен на рис. 225 (проверьте!). ▶

В задачах 17.105—17.107 определить порядок приближения дифференциального оператора частной производной u'_x указанным разностным оператором L_h .

17.105. $(L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{h} (u_{m+1, n} - u_{m, n})$ — оператор *правосторонней разности*.

17.106. $(L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{h} (u_{m, n} - u_{m-1, n})$ — оператор *левосторонней разности*.

17.107. $(L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{2h} (u_{m+1, n} - u_{m-1, n})$ — оператор *центральной разности*.

В задачах 17.108—17.111 определить порядок приближения заданного дифференциального оператора L второй частной производной указанным разностным оператором L_h .

17.108. $Lu = u''_{xx}, (L_h u_h)_{m, n} =$
 $= \frac{1}{h^2} (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}).$

17.109. $Lu = u''_{yy}, (L_h u_h)_{m, n} =$
 $= \frac{1}{h^2} (u_{m+1, n+1} - 2u_{m+1, n} + u_{m+1, n-1}).$

17.110. $Lu = u''_{xy}, (L_h u_h)_{m, n} =$
 $= \frac{1}{4h\tau} (u_{m+1, n+1} - u_{m+1, n-1} - u_{m-1, n+1} + u_{m-1, n-1}).$

17.111. $Lu = u''_{xy}, (L_h u_h)_{m, n} =$
 $= \frac{1}{h\tau} (u_{m+1, n+1} - u_{m+1, n} + u_{m, n} - u_{m, n+1}).$

17.112. Построить разностную схему для краевой задачи из примера 1, используя оператор правосторонней разности и оператор, аналогичный приведенному в задаче 17.109. Определить порядок приближения полученного разностного оператора L_h (шаблон приведен на рис. 226).

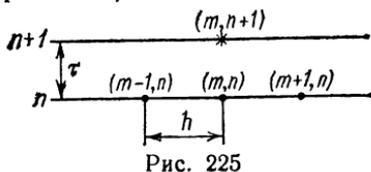


Рис. 225

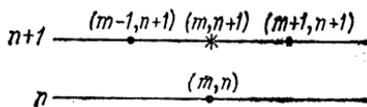


Рис. 226

В задачах 17.113 и 17.114 определить, какой дифференциальный оператор и с каким порядком приближается заданным разностным оператором L_h .

$$17.113. (L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{2h} (u_{m+1, n} - u_{m-1, n}) + \frac{1}{2\tau} (2u_{m, n+1} - u_{m+1, n} + u_{m-1, n}).$$

$$17.114. (L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{h^2} (u_{m-1, n} + u_{m, n-1} + u_{m+1, n} + u_{m, n+1} - 4u_{m, n}).$$

17.115. Определить при каком α порядок приближения дифференциального оператора $L: Lu = u_t - u_{xx}$ разностным L_h

$$(L_h u_h)_{m, n} = \frac{1}{\tau} (u_{m, n+1} - u_{m, n}) - \frac{1}{h^2} (\alpha (u_{m+1, n+1} - 2u_{m, n+1} - u_{m-1, n+1}) + (1 - \alpha) (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} - u_{m-1, n}))$$

будет четвертым по h и первым по τ .

Составить разностные схемы для следующих краевых задач.

$$17.116. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), u(0, t) = \psi_1(t), u(b, t) = \psi_2(t), D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}.$$

$$17.117. c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), c > 0, d > 0, u|_{\nu} = \psi(x, y), D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq Y\}.$$

Болез общим способом построения разностных операторов, приближающих заданный дифференциальный, является метод

неопределенных коэффициентов. Этот метод состоит в том, что приближается не каждая производная в отдельности, а сразу весь оператор. Для замены дифференциального оператора разностным в узле (x_m, y_n) рассмотрим N соседних узлов. Узел (x_m, y_n) обозначим индексом 0, а остальные рассматриваемые узлы занумеруем числами 1, 2, ..., N . Составим линейную комбинацию $\sum_{k=0}^N c_k u_k$ с неопределенными коэффициентами c_k , где u_k — значение $u(x, y)$ в узле k .

Предполагая функцию $u(x, y)$ дифференцируемой $n+1$ раз, разложим u_k по формуле Тейлора в окрестности узла 0. Считая сетку квадратной ($\tau=h$), имеем

$$\sum_{k=0}^N c_k u_k = \sum_{i+j \leq n} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right) h^{i+j} + R. \quad (9)$$

Коэффициенты γ_{ij} линейно выражаются через c_k . Выберем коэффициенты c_k так, чтобы правая часть в равенстве (9) отличалась возможно меньше от значения дифференциального выражения Lu в узле 0, т. е. чтобы коэффициенты при производных в уравнении (1) совпадали с коэффициентами при соответствующих производных в правой части (9), а коэффициенты при старших производных порядка r ($2 < r \leq n$) в (9) приравняем нулю, т. е.

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad 2 < i+j = r \leq n. \quad (10)$$

Учитывая, что γ_{ij} выражаются через c_k , имеем систему уравнений относительно c_k , решив которую, мы получим приближение оператора Lu в узле (m, n) :

$$\sum_{k=0}^N c_k u_k = (Lu)_0 + O(h^{r-1}).$$

Система уравнений (10) относительно c_k может иметь несколько решений, однако достаточно взять одно из них. Используя в случае необходимости достаточно большое число узлов N , можно получить хорошее приближение Lu в узле (m, n) .

В задачах 17.118 и 17.119 построить соответствующие разностные операторы методом неопределенных коэффициентов.

17.118. $Lu = u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy}$. Порядок приближения равен двум (шаблон указан на рис. 227).

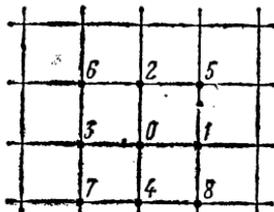


Рис. 227

◀ Построим квадратную сетку D_h , т. е. выбираем шаг как по переменной x , так и по переменной y равным h . В качестве соседних берем 8 узлов (см. рис. 227), т. е. $N=8$. Имеем линейную

комбинацию $\sum_{k=0}^8 c_k u_k = (Lu)_0$.

Разлагая u_k по формуле Тейлора в окрестности узла 0, будем иметь

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_0+h, y_0) = u_0 + u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4), \\ u_2 &= u(x_0, y_0+h) = u_0 + u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4), \\ u_3 &= u(x_0-h, y_0) = u_0 - u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4), \\ u_4 &= u(x_0, y_0-h) = u_0 - u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4), \\ u_5 &= u(x_0+h, y_0+h) = u_0 + u'_x h + u'_y h + \frac{h^2}{2!} (u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} (u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4), \\ u_6 &= u(x_0-h, y_0+h) = u_0 - u'_x h + u'_y h + \frac{h^2}{2!} (u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} (-u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} - 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4), \\ u_7 &= u(x_0-h, y_0-h) = u_0 - u'_x h - u'_y h + \frac{h^2}{2!} (u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) - \\ &\quad - \frac{h^3}{3!} (u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4), \\ u_8 &= u(x_0+h, y_0-h) = u_0 + u'_x h - u'_y h + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} (u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \frac{h^3}{3!} (u'''_{xxx} - 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} - u'''_{yyy}) + O(h^4). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в $(Lu)_0$:

$$\begin{aligned} (Lu)_0 &= u_0(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + \\ &\quad + u'_x h(c_1 - c_3 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8) + u'_y h(c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8) + \\ &\quad + u''_{xx} \frac{h^2}{2!} (c_1 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + u''_{yy} \frac{h^2}{2!} (c_2 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + \\ &\quad + \frac{2u''_{xy}}{2!} h^2 (c_5 - c_6 + c_7 - c_8) + \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx} (c_1 - c_3) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} u'''_{yyy} (c_2 - c_4) + \frac{h^3}{3!} c_5 (u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} c_6 (-u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} - 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) - \\ &\quad - \frac{h^3}{3!} c_7 (u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} c_8 (u'''_{xxx} - 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} - u'''_{yyy}) + R(c_1, c_2, \dots, c_8) h^4 = \\ &= u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих производных, получим систему линейных уравнений для нахождения c_k , выбирая при этом $i+j=3$:

$$\begin{aligned}
 c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_1 - c_3 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0, \\
 c_1 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= \frac{2}{h^2}, \\
 c_2 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= \frac{10}{h^2}, \\
 c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= \frac{2}{h^2}, \\
 c_1 - c_3 + c_4 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0, \\
 c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Систему уравнений (11) решаем методом исключения. Из последних четырех уравнений получим $c_5=c_7$, $c_2=c_4$. Используя эти равенства, из второго и третьего уравнения системы установим, что $c_6=c_8$, $c_1=c_3$. Можно переписать систему уравнений (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 c_0 + 2c_1 + 2c_2 + 2c_5 + 2c_6 &= 0, \\
 2c_1 + 2c_5 + 2c_6 &= 2/h^2, \\
 2c_2 + 2c_5 + 2c_6 &= 10/h^2, \\
 2c_5 - 2c_6 &= 2/h^2, \\
 c_4 &= 0, \\
 c_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Решая систему (12), получим следующие значения для искомых постоянных:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= -2/h^2, \quad c_1 = -4/h^2, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -4/h^2, \\
 c_4 &= 0, \quad c_5 = 3/h^2, \quad c_6 = 2/h^2, \quad c_7 = 3/h^2, \quad c_8 = 2/h^2.
 \end{aligned}$$

Окончательно для узла 0 получим

$$(Lu)_0 \approx (-2u_0 - 4u_1 - 4u_3 + 3u_5 + 2u_6 + 3u_7 + 2u_8),$$

т. е. для всех внутренних узлов сетки D_h имеет место формула

$$\begin{aligned}
 (L_h u)_m, n &= 2u_{m, n} + 4u_{m+1, n} + 4u_{m-1, n} - \\
 &\quad - 3u_{m+1, n+1} - 2u_{m-1, n+1} - 3u_{m-1, n-1} - 2u_{m, n+1}.
 \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации второй: $r-1 = n-1 = 2$. \blacktriangleright

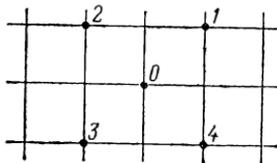


Рис. 228

17.119. $Lu = u''_{xx} + u''_{yy}$. Порядок приближения равен двум (шаблон указан на рис. 228).

Пусть, как и выше, $\tilde{u}_h = \{\tilde{u}_h(m, n)\}$ — решение разностной схемы, т. е. системы линейных алгебраических уравнений (4). Применение разностной схемы к решению краевой задачи (1), (2) оправдано, если величины $\tilde{u}_h(m, n)$ являются приближенными значениями сеточной функции $\tilde{u}(x_m, y_n)$, представляющей собой значения неизвестного решения $u(x, y)$ задачи (1), (2) в узлах сетки.

Будем говорить, что разностная схема (4) является сходящейся на решении $\tilde{u}(x, y)$ задачи (1), (2), если при $h \rightarrow 0$ выполняется условие ¹⁾

$$\|\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_h(m, n)\| \rightarrow 0.$$

Если дополнительно выполняется неравенство

$$\|\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_h(m, n)\| \leq Ah^s, \quad (13)$$

где A — константа, не зависящая от h , то говорят, что скорость сходимости имеет порядок s относительно h .

Сеточная функция $\tilde{u}(x_m, y_n)$, вообще говоря, не является решением разностной схемы. Поэтому при подстановке ее в левую часть (4) получается выражение

$$\bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) = \bar{f}_h + \delta\bar{f}_h,$$

где $\delta\bar{f}_h$ называется *невязкой* или *погрешностью* аппроксимации.

Если $\|\delta\bar{f}_h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то говорят, что разностная схема (4) *аппроксимирует* краевую задачу (1), (2) на решении $\tilde{u}(x, y)$. При выполнении дополнительного условия

$$\|\delta\bar{f}_h\| \leq Bh^\sigma, \quad (14)$$

где C — константа, не зависящая от h , число $\sigma > 0$ называется порядком аппроксимации.

Наконец, не менее важным свойством разностных схем является понятие их устойчивости. Разностная схема (4) называется *устойчивой*, если существует такое h_0 , что для всех $h < h_0$ и любых \bar{f}_h она имеет единственное решение и

$$\|\tilde{u}_h\| \leq C \|\bar{f}_h\|, \quad (15)$$

где C — константа, не зависящая от h и правой части \bar{f}_h .

Между рассмотренными понятиями сходимости, аппроксимации и устойчивости существует тесная связь.

Теорема 1. Пусть устойчивая разностная схема (4) аппроксимирует краевую задачу (1), (2) на решении $\tilde{u}(x, y)$ с порядком аппроксимации $\sigma > 0$. Тогда эта схема является сходящейся и порядок ее сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

Пример 3. Для задачи Коши

$$\begin{aligned} u'_t - u'_x &= f(x, t), & -\infty < x < +\infty, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, & \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь и в дальнейшем будем считать шаги h и τ зависящими, т. е. $\tau = \theta(h)$.

построена разностная схема

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{1}{h}(u_{m+1,n} - u_{m,n}) = f_{m,n},$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M; n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1,$$

$$u_{m,0} = \varphi_m, m = 0 \pm 1, \dots, \pm M,$$

где $\tau = \lambda h$ и постоянная $\lambda \leq 1$. Определить порядок аппроксимации этой схемы и исследовать ее на устойчивость.

◀ Сначала покажем, что построенная разностная схема аппроксимирует исходную краевую задачу и определим порядок аппроксимации. Предполагая, что решение $\tilde{u}(x, y)$ задачи Коши имеет ограниченные вторые производные, по формуле Тейлора имеем

$$\frac{1}{h}(\tilde{u}_{m+1,n} - \tilde{u}_{m,n}) = \frac{1}{h}(\tilde{u}(x_m + h, t_n) - \tilde{u}(x_m, t_n)) =$$

$$= \tilde{u}'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2}\tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n),$$

$$0 < \xi < h,$$

$$\frac{1}{\tau}(\tilde{u}_{m,n+1} - \tilde{u}_{m,n}) = \frac{1}{\tau}(\tilde{u}(x_m, t_n + \tau) - \tilde{u}(x_m, t_n)) =$$

$$= \tilde{u}'_t(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2}\tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta),$$

$$0 < \eta < \tau.$$

Учитывая соотношение $\tau = \lambda h$, получаем

$$\frac{1}{\tau}(\tilde{u}_{m,n+1} - \tilde{u}_{m,n}) - \frac{1}{h}(\tilde{u}_{m+1,n} - \tilde{u}_{m,n}) =$$

$$= (\tilde{u}'_t(x_m, t_n) - \tilde{u}'_x(x_m, t_n)) + h \left(\frac{\lambda}{2}\tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2}\tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right).$$

Погрешность аппроксимации $\delta \bar{f}_{m,n} = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_{m,n}$, следовательно, принимает вид

$$\delta \bar{f}_{m,n} = \begin{cases} h \left(\frac{\lambda}{2}\tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2}\tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right), \\ \tilde{u}_{m,0} - \varphi_m. \end{cases}$$

Но $\tilde{u}_{m,0} - \varphi_m = 0$ для любого m в силу граничных условий. Поэтому норма $\delta \bar{f}_{m,n}$ оценивается следующим образом:

$$\|\delta \bar{f}_{m,n}\| \leq \max_{m,n} \left| \frac{\lambda}{2}\tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2}\tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right| \leq hM \frac{\lambda + 1}{2},$$

где M — максимальное значение вторых производных функции $\tilde{u}(x, y)$ в области D . Полагая здесь $B = M \frac{\lambda + 1}{2}$, приходим к неравенству (14). Следовательно, рассматриваемая разностная схема аппроксимирует исходную задачу Коши и порядок аппроксимации равен единице. (Конечно же, на решении $\tilde{u}(x, y)$, обладающем ограниченными вторыми производными.)

Отметим, что метод проверки свойства аппроксимации разностной схемы во многом повторяет метод определения порядка приближения разностным оператором дифференциального.

Теперь проведем исследование разностной схемы на устойчивость. Снова используя соотношение $\tau = \lambda h$, перепишем исходную разностную схему в виде

$$\begin{aligned} u_{m, n+1} &= (1-\lambda) u_{m, n} + \lambda u_{m+1, n} + \lambda h f_{m, n}, \\ u_{m, 0} &= \varphi_m, \end{aligned} \quad (16)$$

где как и выше, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$; $n = 0, 1, \dots, [T/(\lambda h)] - 1$.

По условию $\lambda \leq 1$, поэтому $1 - \lambda \geq 0$. В этом случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} |(1-\lambda) u_{m, n} + \lambda u_{m+1, n}| &\leq (1-\lambda) |u_{m, n}| + \lambda |u_{m+1, n}| \leq \\ &\leq (1-\lambda) \max\{|u_{m, n}|, |u_{m+1, n}|\} + \lambda \max\{|u_{m, n}|, |u_{m+1, n}|\} = \\ &= \max\{|u_{m, n}|, |u_{m+1, n}|\} \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n}|. \end{aligned}$$

Используя эту оценку, из (16) находим:

$$|u_{m, n+1}| \leq |(1-\lambda) u_{m, n} + \lambda u_{m+1, n}| + \lambda h |f_{m, n}| \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n}| + \lambda h \|f_h\|, \quad (17)$$

где $\|f_h\| = \max_{m, n} |f_{m, n}|$. Правая часть неравенства (17) от m не зависит, поэтому выполняется неравенство

$$\max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n+1}| \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n}| + \lambda h \|f_h\| \quad (18)$$

для любого $n = 0, 1, \dots, [T/(\lambda h)] - 1$.

Используя неравенство (18) для оценки первого слагаемого в его правой части, последовательно находим

$$\begin{aligned} \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n+1}| &\leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n-1}| + 2\lambda h \|f_h\| \leq \dots \\ &\dots \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n-k'}| + (k+1)\lambda h \|f_h\| \leq \dots \\ &\dots \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, 0}| + (n+1)\lambda h \|f_h\| = \\ &= \max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| + (n+1)\lambda h \|f_h\|. \end{aligned} \quad (19)$$

так как $u_{m, 0} = \varphi_m$ из (16). Теперь заметим, что $\max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| \leq$

$\leq \|\bar{f}_h\|$ и $\|f_h\| \leq \|\bar{f}_h\|$. Подставляя эти неравенства в (19), получим

$$\begin{aligned} \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n+1}| &\leq (1 + (n+1)\lambda h) \|\bar{f}_h\| \leq \\ &\leq (1 + [T/\lambda h] \lambda h) \|\bar{f}_h\| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|. \end{aligned}$$

Правая часть полученного соотношения от h не зависит. Следовательно,

$$0 < n \leq [T/(\lambda h)] - 2 \quad \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m, n+1}| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|,$$

т. е.

$$\|u_h\| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|,$$

и мы получили искомое неравенство (15) (с $C = 1 + T$), означающее по определению, что разностная схема устойчива при $\lambda \leq 1$.

Так как заданная разностная схема аппроксимирует на решении исходную краевую задачу и устойчива, то при $\lambda \leq 1$ она является сходящейся и скорость сходимости по теореме 1 имеет первый порядок. ►

17.120. Доказать теорему 1.

17.121. Показать, что рассмотренная в примере 3 разностная схема неустойчива при $\lambda > 1$.

17.122**. В области $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq Y\}$ построить разностную схему первого порядка, аппроксимирующую первую краевую задачу для уравнения гиперболического типа

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$u|_{y=0} = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = \Phi(y), \quad u|_{x=1} = F(y).$$

17.123*. В области D из задачи 17.122 построить разностную схему второго порядка, аппроксимирующую первую краевую задачу.

17.124*. В области D построить разностную схему первого порядка, аппроксимирующую третью краевую задачу

$$Lu = f, \quad u|_{y=0} = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1(y) u \right) \Big|_{x=0} = \Phi(y), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right) \Big|_{x=1} = F(y).$$

17.125**. Построить разностную схему второго порядка, аппроксимирующую третью краевую задачу.

17.126*. Определить порядок аппроксимации разностной схемы задачи 17.117.

В задачах 17.127—17.129 для заданных задач Коши и соответствующих им разностных схем выполнить следующие задания:

1) Выписать разностный оператор \bar{L}_h и правую часть \bar{f}_h , возникающие при записи этой схемы в виде (4).

2) Нарисовать шаблон для разностного оператора L_h .

3) Показать, что разностная схема аппроксимирует соответствующую краевую задачу с первым относительно h порядком на решении $\tilde{u}(x, t)$, имеющем ограниченные вторые производные.

4) Исследовать разностную схему на устойчивость в зависимости от значений параметра λ : $\tau = \lambda h$.

17.127. $u'_t - u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m, n+1} - u_{m, n}) - \frac{1}{h}(u_{m, n} - u_{m-1, n}) = f_{m, n}$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m, 0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

17.128. $u'_t + u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m, n+1} - u_{m, n}) + \frac{1}{h}(u_{m, n} - u_{m-1, n}) = f_{m, n}$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m, 0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

17.129. $u'_t + u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m, n+1} - u_{m, n}) + \frac{1}{h}(u_{m+1, n} - u_{m, n}) = f_{m, n}$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m, 0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

17.130. Исследовать устойчивость разностной схемы из примера 1.

17.131. Исследовать устойчивость разностной схемы из задачи 17.112.

17.132. Исследовать устойчивость разностной схемы из задачи 17.116.

17.133. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{1}{2\tau}(u_{m, n+1} - u_{m, n-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{m-1, n} - 2u_{m, n} + u_{m+1, n}),$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_{m, 0} = \varphi_m, \quad u_{m, 1} = \psi_m, \quad u_{0, n} = u_{M, n} = 0.$$

2. Численное решение краевых задач методом сеток. Все разностные схемы, применяемые при решении краевых задач математической физики, делятся на два больших класса — явных и неявных схем.

Под *слоем* разностной схемы понимается совокупность точек сетки \bar{D} , лежащих на некоторой горизонтальной (или вертикальной) прямой. Если значения сеточной функции $u_{m, n+1}$, заданные на $(n+1)$ -м слое, выражаются в явном виде через значения этой же функции на слоях с меньшими номерами, то такая схема называется *явной*. В противном случае схема называется *неявной*.

Например, разностная схема, полученная в примере 1, является явной, так как может быть записана следующим образом (см.

выражение (7)):

$$\begin{aligned}
 u_{m, n+1} &= \tau u_{m, n} + \frac{a^2 \tau}{h^2} (u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}) + f_{m, n}, \\
 n &= 0, 1, \dots, s-1; \quad m = 1, \dots, r-1, \\
 u_{m, 0} &= \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, r, \\
 u_{0, n} &= \psi_1(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, s, \\
 u_{r, n} &= \psi_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Решение получающейся системы линейных алгебраических уравнений трудностей не представляет и осуществляется последовательно, переходом от слоя к слою.

Сложнее обстоит дело с неявными схемами (как в задаче 17.112, например). Для решения соответствующих им систем уравнений удобно применять метод прогонки, т. е. модифицированный метод исключения для решения системы линейных уравнений. Суть этого метода разберем на основе неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности (см. задачу 17.112). Введем обозначения

$$a_{m, n+1} = -\frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad b_{m, n+1} = 1 + \frac{2a^2 \tau}{h^2}, \quad g_{m, n+1} = u_{m, n} + \tau f_{m, n+1}. \quad (20)$$

Разностную схему из задачи 17.112 перепишем в виде

$$\begin{aligned}
 u_{0, n} &= \psi_1, n, \\
 a_{m, n+1} u_{m-1, n+1} + b_{m, n+1} u_{m, n+1} + a_{m, n+1} u_{m+1, n+1} &= g_{m, n+1}, \quad (21) \\
 u_{k, n} &= \psi_2, n, \quad n = 0, \dots, s-1, \\
 u_{m, 0} &= \varphi_m, \quad m = 1, \dots, k-1.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (21) при каждом фиксированном значении n совпадает с системой

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \varphi, \\
 a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} &= g_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (22) \\
 u_N &= \psi,
 \end{aligned}$$

для которой справедлива следующая

Лемма. Система уравнений (22), коэффициенты которой удовлетворяют неравенствам $|b_n| \geq 1 + |a_n| + |c_n|$, разрешима при любых правых частях, и для ее решения справедлива оценка

$$|u| \leq \max \{ |\varphi|, |g_1|, \dots, |g_{N-1}|, |\psi| \}.$$

Для системы (21) условия леммы выполнены. Систему уравнений (21) удобно решать с помощью метода, который называется *методом прогонки*. Будем искать решение системы уравнений (21) при каждом фиксированном n в виде

$$u_{m-1, n+1} = Q_{m, n+1} u_{m, n+1} + H_{m, n+1}, \quad m = k, \dots, 2. \quad (23)$$

Исключая $u_{m-1, n+1}$ из системы (21), получим

$$\begin{aligned}
 u_{m, n+1} &= -\frac{a_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}} u_{m+1, n+1} + \\
 &+ \frac{g_{m, n+1} - a_{m, n+1} H_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

Соотношение (24) связывает значения функций $u_{m, n+1}$, $u_{m+1, n+1}$, поэтому можно записать

$$u_{m, n+1} = Q_{m+1, n+1} u_{m+1, n+1} + H_{m+1, n+1}. \quad (25)$$

Сравнивая соотношения (24) и (25), имеем

$$Q_{m+1, n+1} = -\frac{a_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}, \quad (26)$$

$$H_{m+1, n+1} = \frac{g_{m, n+1} - a_{m, n+1} H_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}.$$

Соотношения (26) определяют значения всех прогоночных коэффициентов $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$. С помощью этих соотношений сетка проходит-ся вверх по m от значения 1 до значения $k-1$ при фиксированном значении n . При этом определяются все значения $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$ на сетке (прямая прогонка). Определив все прогоночные коэффициенты $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$, проходят сетку вниз от значения k до 2, последователь-но определяя значения $u_{m, n}$ из уравнения (23) (обратная прогонка). Граничное условие при $m=0$ определяет начальные значения $Q_{1, n+1}$, $H_{1, n+1}$, а граничное условие при $m=k$ в общем случае определяет первое значение u_k . Метод прогонки обладает тем свойством, что ошибки округления, получаемые на каждом шаге, не нарастают. Это свойство служит основанием ее широкого применения.

17.134.** Определить начальные значения прогоноч-ных коэффициентов и значение u_k для решения парабо-лического уравнения в случае граничных условий

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right) \Big|_{x=0} = \Phi_1, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \right) \Big|_{x=1} = \Phi_2.$$

В задачах 17.135—17.147, используя разобранные вы-ше разностные схемы, найти приближенное численное ре-шение.

17.135. $2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tx^2 = 0$, $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$, $u|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin x$, $u|_{x=0} = e^t - 1$, $u|_{x=2} = 4 \cos t$.

17.136. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8xy = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $u(0, x) = x$, $u(0, y) = y$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$, $u(1, y) = 1 - y$.

17.137. $u_{xx} - 4u_{yy} = xy$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, $u|_{y=0} = x^2 + 1$, $u'_y|_{y=0} = \frac{x^2}{2} + 6$, $u|_{x=0} = \sin y + 1$, $u|_{x=2} = 5 \cos y$.

17.138. $u_{xx} - 4u_{yy} - xy = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $u|_{y=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 8x - 2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + yu \right) \Big|_{x=0} = y^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u \right) \Big|_{x=1} = 5y^3 + 4y$.

$$17.139. u_{xx} - 4u_{yy} = e^{xy}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = 4x + 5, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 1, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sin yu\right)|_{x=0} = 5y, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^3u\right)|_{x=1} = \cos y.$$

Задачи 17.140—17.143 решить, используя явную или неявную схемы.

$$17.140. \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = 1 - \frac{x}{2}, u|_{x=0} = \cos y, u|_{x=2} = \sin y.$$

$$17.141. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 1 = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u(x, 0) = x^2, u|_{x=1} = e^{xy}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right)|_{x=0} = 0.$$

$$17.142. 4u_t - 2u_{xx} + xt = 0, D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}, u|_{t=0} = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = t, \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)|_{x=2} = 0.$$

$$17.143. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8x^2t^4, D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}, u|_{t=0} = \sin \pi x, \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 0,5u\right)|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 0,5u\right)|_{x=1} = 0.$$

Решить следующие задачи Дирихле.

$$17.144. 2u_{xx} + u_{yy} = x^2 + 2xy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = 1 + x, u|_{x=2} = 3 - y^2, u|_{x=0} = 1 + 5y, u|_{y=1} = 6 - x^2.$$

$$17.145. \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x^2 - y^2, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{x=0} = 2y^2, u|_{x=1} = y^2 + 4y, u|_{y=0} = 0, u|_{y=1} = x^2 + 2x + 2.$$

$$17.146. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin xy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y + 1, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = x, u|_{y=x-1} = xy + 1, u|_{y=1} = 5 - x, u|_{x=0} = 5y.$$

$$17.147. 2u_{xx} + 4u_{yy} + yx = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{x=0} = 5y, u|_{y=0} = \sqrt{x}, u|_{y=1} = 5 - x^2, u|_{x=2} = \sqrt{\frac{2}{y+1}}.$$

В задачах 17.148—17.155 составить на фортране подпрограммы для численного решения уравнений в частных производных методом сеток, используя разобранные выше разностные схемы. В качестве параметров подпрограмм использовать: F, FI, PSI 1, PSI 2, DLT 1, DLT 2 и т. д. — идентификаторы подпрограмм-функций, вычисляющих значения правых частей уравнений, а также начальные и краевые условия соответственно.

17.148. Составить подпрограмму для решения уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u|_{x=0} = \psi_1(t)$, $u|_{x=1} = \psi_2(t)$ явным методом, используя схему примера 1.

17.149. Составить подпрограмму для решения первой краевой задачи, используя разностную схему из задачи 17.123.

17.150. Составить подпрограмму для решения третьей краевой задачи, используя разностную схему из задачи 17.125.

17.151*. Составить подпрограмму для решения уравнения Пуассона, используя разностную схему из задачи 17.117.

17.152. Составить подпрограмму для решения уравнения теплопроводности методом прогонки, используя разностную схему из задачи 17.112: а) граничные условия не содержат производных; б) граничные условия общего вида (см. задачу 17.134).

17.153. Составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления функций правых частей уравнений 17.135—17.147.

17.154. Составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления начальных и краевых условий в задачах 17.135—17.147.

17.155*. Составить на фортране программы решения задач 17.135—17.147, используя подпрограммы, полученные при решении задач 17.148—17.154.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Интегральные уравнения Вольтерра

1. Уравнения Вольтерра 2-го рода: основные понятия, связь с дифференциальными уравнениями. *Линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода* называется уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt, \quad (1)$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, определенные соответственно в треугольнике $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$ на отрезке $[a, b]$. Функция $K(x, t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (1), функция $f(x)$ — *свободным членом* этого уравнения.

Решением уравнения (1) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a, b]$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Вопрос о существовании и единственности решения решается различным образом в зависимости от свойств ядра $K(x, t)$ и свободного члена $f(x)$, а также от того, в каком классе функций ищется решение. Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, мы будем предполагать, что функции $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения. При этом условии уравнение (1) имеет, и притом единственное, решение в классе функций, непрерывных на $[a, b]$.

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода используются обычно при описании динамики различных процессов в системах. В частности, всякая задача Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = f(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

может быть сведена к решению некоторого линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Пример 1. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши

$$u'' + 2u' + u = x^2, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

◀ Положим

$$u''(x) = y(x). \quad (2)$$

Интегрируя (2) с учетом начальных условий, последовательно находим

$$u'(x) = u'(0) + \int_0^x y(t) dt = \int_0^x y(t) dt, \quad (3)$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x ds \int_0^s y(t) dt = 1 + \int_0^x (x-t) y(t) dt. \quad (4)$$

Подставляя (2) — (4) в исходное дифференциальное уравнение, получаем

$$y(x) + 2 \int_0^x y(t) dt + \left(1 + \int_0^x (x-t) y(t) dt \right) = x^2,$$

или

$$y(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2+x-t) y(t) dt. \quad (5)$$

Таким образом, показано, что если $u(x)$ — решение исходной задачи Коши, то функция $y(x) = u''(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (5). Обратно, если $y(x)$ — решение этого уравнения, то функция $u(x)$, определяемая соотношением (4), удовлетворяет как исходному дифференциальному уравнению, так и начальным условиям. Следовательно, рассматриваемая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (5). ►

Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

$$18.1. \quad y(x) = e^{2x}, \quad y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

$$18.2. \quad y(x) = xe^{x^2/3}, \quad y(x) = x + \int_0^x xty(t) dt.$$

$$18.3. \quad y(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right).$$

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) y(t) dt.$$

Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим задачам Коши:

$$18.4. \quad u' + 2xu = e^x, \quad u(0) = 1.$$

$$18.5. \quad u'' - 2u' + u = 0, \quad u(2) = 1, \quad u'(2) = -2.$$

$$18.6. \quad u'' - \sin x \cdot u' + e^x u = x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -1.$$

$$18.7. \quad u''' + xu = e^x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = u''(0) = 0.$$

$$18.8. \quad u^{IV} + u'' - u = 0, \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 1.$$

18.9*. Показать, что задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f(x),$$

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

сводится к интегральному уравнению вида (1) с ядром

$$K(x, t) = - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!},$$

зависящим лишь от разности $x-t$ своих аргументов (интегральное уравнение типа свертки, см. п. 3).

Задача Коши для произвольного дифференциального уравнения 1-го порядка вида

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

эквивалентна в общем случае нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(t)) dt.$$

Аналогично, задача Коши для произвольного дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

может быть сведена к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра.

Пример 2. Составить систему интегральных уравнений, соответствующую задаче Коши

$$y'' = 2y - y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

◀ Пологая $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, сведем исходную задачу к задаче Коши для нормальной системы 2-го порядка

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1 - y_2^2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

В свою очередь, полученная система дифференциальных уравнений с учетом начальных условий эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = \int_0^x (2y_1(t) - y_2^2(t)) dt. \quad \blacktriangleright$$

Составить интегральные уравнения или системы уравнений, соответствующие следующим задачам Коши

$$18.10. y' = 1 + x \sin y, y(\pi) = 2\pi.$$

$$18.11. y' = -1 + 3x^2 + y^2, y(1) = 1.$$

$$18.12. y'' = x + y^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$18.13. y''' = \frac{3}{2} xy'^2, y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1.$$

$$18.14. y''' = x + xy^2 - y'^2, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$$

Во многих случаях решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (или системы таких уравнений) в свою очередь может быть сведено к решению некоторой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Укажем здесь два способа, посредством которых это может быть сделано.

а) Если в исходном интегральном уравнении (1) ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ имеют непрерывные производные $K'(x, t)$ и $f'(x)$, то это уравнение может быть продифференцировано (один или несколько раз), что и позволяет в ряде случаев свести его к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt. \quad (6)$$

◀ Последовательно дифференцируя интегральное уравнение, получаем

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt, \quad (7)$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt. \quad (8)$$

Исключая из уравнений (6) и (8) интеграл $\int_0^x \sin(x-t) y(t) dt$, полу-

чаем для неизвестной функции $y(x)$ дифференциальное уравнение $y''(x) = 0$. Из (6) и (7) находим начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Следовательно, $y(x) = x$. ▶

Рассмотренный прием всегда приводит к цели в том случае, когда ядро $K(x, t)$ имеет вид многочлена по степеням бинома $x-t$ (см. задачу 1.9).

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = x + 2 \sin x - 1 - \int_0^x (x-t) y(t) dt. \quad (9)$$

◀ Дважды дифференцируя уравнение (9), получаем

$$y'(x) = 1 + 2 \cos x - \int_0^x y(t) dt, \quad (10)$$

$$y''(x) = -2 \sin x - y(x). \quad (11)$$

Пример 5. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x} y(t) dt.$$

◀ Полагая $u(x) = \int_0^x \operatorname{ch} t y(t) dt$, получим

$$y(x) = 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x).$$

Далее, дифференциальное уравнение для $u(x)$ имеет вид

$$u'(x) = \operatorname{ch} x y(x) = \operatorname{ch} x \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x) \right)$$

или

$$u' - u = \operatorname{ch} x.$$

Решая это уравнение с учетом начального условия $u(0) = 0$, находим $u(x) = \frac{1}{2}(xe^x + \operatorname{sh} x)$, откуда

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{xe^x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \blacktriangleright$$

Решить интегральные уравнения, сведя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$18.15. \quad y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

$$18.16. \quad y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt.$$

$$18.17. \quad y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt.$$

$$18.18. \quad y(x) = e^{-x} \cos x - \int_0^x \cos xe^{-(x-t)} y(t) dt.$$

$$18.19. \quad y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

$$18.20. \quad y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

$$18.21. \quad y(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

$$18.22. \quad y(x) = \operatorname{ch} x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt.$$

$$18.23. \quad y(x) = x + \int_0^x (4 \sin(x-t) - x+t) y(t) dt.$$

$$18.24. \quad y(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)^2 - (x-t)) y(t) dt.$$

2. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты. Метод последовательных приближений применительно к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt$$

заключается в следующем. Строится последовательность функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, ..., где нулевое приближение $y_0(x)$ — произвольная функция, а последующие приближения определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ непрерывны соответственно при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$ и на отрезке $[a, b]$, то построенная таким образом последовательность приближений $y_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, при $n \rightarrow \infty$ сходится к единственному непрерывному решению интегрального уравнения.

Обычно полагают $y_0(x) = f(x)$, однако это вовсе не обязательно: удачный выбор нулевого приближения часто позволяет ускорить сходимость последовательности $y_n(x)$ к точному решению.

Пример 6. Методом последовательных приближений решить уравнение

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t) y(t) dt.$$

◀ Положим

$$y_0(x) = 1.$$

Тогда

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t) dt = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t) \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Для n -го приближения получим

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

откуда

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x. \blacktriangleright$$

Решить интегральные уравнения методом последовательных приближений:

18.25. $y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt, y_0(x) = 0.$

18.26. $y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x y(t) dt,$

а) $y_0(x) = 1,$ б) $y_0(x) = \frac{x^2}{2} + x.$

18.27. $y(x) = 1 - x^2 + \int_0^x xy(t) dt,$

а) $y_0(x) = 1 - x^2,$ б) $y_0(x) = 1.$

18.28. $y(x) = 1 + \int_0^x xy(t) dt, y_0(x) = 1.$

18.29. $y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt, y_0(x) = 1.$

18.30. $y(x) = 1 + \int_0^x t^p y(t) dt, y_0(x) = 1, p = 0, 1, 2, \dots$

18.31. $y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) = 0.$

18.32. $y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) = 0.$

18.33. $y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t}y(t) dt, y_0(x) = 0.$

18.34. $y(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} y(t) dt, y_0(x) = 0.$

В задачах 18.35—18.37 методом последовательных приближений найти для заданных нелинейных уравнений

Вольтерра второе приближение $y_2(x)$; в качестве нулевого приближения взять $y_0(x) = 0$:

$$18.35. \quad y(x) = \int_0^x (t^2 - y^2(t)) dt.$$

$$18.36. \quad y(x) = x - \pi + \int_0^x t \sin y(t) dt.$$

$$18.37. \quad y(x) = \int_0^x t e^{-y(t)} dt.$$

Часто вместо одного уравнения рассматривают семейство уравнений

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt, \quad (18)$$

соответствующих различным значениям числового параметра λ . Предполагая, что λ фиксировано, будем решать уравнение (18) методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения $y_0(x) = f(x)$. Тогда получим

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt,$$

где

$$K_1(x, t) = K(x, t);$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K(x, s) \left(\int_a^s K_1(s, t) f(t) dt \right) ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x \left(\int_t^x K(x, s) K_1(s, t) ds \right) f(t) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K_2(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_1(s, t) ds.$$

Вообще

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^x K_j(x, t) f(t) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x, t) \right) f(t) dt, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$K_j(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_{j-1}(s, t) ds, \quad j=2, 3, \dots, \quad (20)$$

$$K_1(x, t) = K(x, t).$$

Ядра $K_j(x, t)$ называются *повторными* или *итерированными*.

Если ядро $K(x, t)$ непрерывно, то ряд

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \quad (21)$$

при любых фиксированных значениях λ сходится (равномерно относительно $x \in [a, b]$ и $t \in [0, x]$) к функции $R(x, t, \lambda)$, называемой *резольвентой ядра* $K(x, t)$. Следовательно, соотношение (19) в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (22)$$

выражающую решение интегрального уравнения через резольвенту.

Пример 7. Найти резольвенту $R(x, t, \lambda)$ ядра $K(x, t) = x$ и, используя ее, решить интегральное уравнение

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x xy(t) dt.$$

◀ Из рекуррентных соотношений (20) получаем

$$K_1(x, t) = x,$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_1(s, t) ds = \int_t^x xs ds = x \frac{x^2 - t^2}{2},$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_2(s, t) ds = \int_t^x xs \frac{s^2 - t^2}{2} ds = x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^2.$$

Вообще, можно провести (например, методом математической индукции), что

$$K_j(x, t) = x - \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^{j-1}, \quad j=1, 2, \dots$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер в формулу (21), найдем резольвенту

$$R(x, t, \lambda) = x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^{j-1} = xe^{\lambda \frac{x^2 - t^2}{2}}.$$

Найдем теперь решение заданного интегрального уравнения. В рассматриваемом случае $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $f(x) = x$, поэтому на основании

(22) получаем

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x x e^{-\frac{x^2-t^2}{4}} \cdot t dt = x - x e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x d\left(e^{\frac{t^2}{4}}\right) = x e^{-\frac{x^2}{4}}. \blacktriangleright$$

Найти резольвенты для следующих ядер:

18.38. $K(x, t) = 1$.

18.39. $K(x, t) = t$.

18.40. $K(x, t) = x^2$.

18.41. $K(x, t) = xt$.

18.42. $K(x, t) = xt^2$.

18.43. $K(x, t) = e^{x-t}$.

18.44. $K(x, t) = 2^{\text{sh } x - \text{sh } t}$.

18.45. $K(x, t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$.

18.46. $K(x, t) = \frac{t^2 - t + 1}{x^2 - x + 1}$.

18.47. $K(x, t) = \frac{\text{ch } x}{\text{ch } t}$.

18.48. Показать, что для произвольного ядра вида $K(x, t) = x^p t^q$, где p и q — некоторые положительные целые числа, резольвента имеет вид

$$R(x, t, \lambda) = x^p t^q e^{\lambda \frac{x^{p+q+1} - t^{p+q+1}}{p+q+1}}.$$

18.49. Показать, что для произвольного ядра вида $K(x, t) = \frac{K(x)}{K(t)}$, $K(t) \neq 0$, резольвента имеет вид

$$R(x, t, \lambda) = \frac{K(x)}{K(t)} e^{\lambda(x-t)}.$$

Найти с помощью резольвенты решения следующих интегральных уравнений:

18.50. $y(x) = 1 - \int_0^x t y(t) dt$.

18.51. $y(x) = x + \int_0^x x t y(t) dt$.

18.52. $y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} y(t) dt$.

18.53. $y(x) = \text{ch } x + \int_0^x \frac{\text{ch } x}{\text{ch } t} y(t) dt$.

18.54. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2} y(t) dt$.

3. Уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x-t) y(t) dt, \quad (23)$$

в котором ядро $K(x, t) = K(x-t)$ зависит лишь от разности аргументов, называется *уравнением типа свертки*. Если в (23) a — конечное число, то, не ограничивая общности (см. задачу 18.65), можно считать $a=0$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Для решения уравнений типа свертки используется преобразование Лапласа.

Предположим, что функции $f(x)$ и $K(u)$ — оригиналы (см. ч. 2, глава 13, § 1, п. 1). Можно показать, что в этом случае решение $y(x)$ также будет оригиналом и, следовательно, к обеим частям уравнения (23) можно применить преобразование Лапласа. Полагая

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p), \quad K(u) \doteq \tilde{K}(p)$$

и используя теорему о свертке, согласно которой $\int_0^x K(x-t)y(t) dt \doteq \tilde{K}(p)Y(p)$, получим

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p)Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}.$$

Оригинал $y(x)$ для $Y(p)$ будет решением интегрального уравнения.

Пример 8. Используя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t) dt.$$

◀ Так как $1 \doteq \frac{1}{p}$ и $\operatorname{ch} u \doteq \frac{p}{p^2-1}$, то, применяя к обеим частям заданного уравнения преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, получим

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2-1}Y(p).$$

Отсюда

$$Y(p) \left(1 - \frac{p^2}{p^2-1}\right) = \frac{1}{p},$$

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2-p-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}},$$

и, следовательно, $y(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x$. ▶

С помощью преобразования Лапласа найти решения заданных уравнений типа свертки:

$$18.55. y(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x y(t) dt.$$

$$18.56. y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

$$18.57. y(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)}y(t) dt.$$

$$18.58. y(x) = \sin x + \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt.$$

$$18.59. y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt.$$

$$18.60. y(x) = \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t) dt.$$

$$18.61. y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

$$18.62. y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)e^{x-t}y(t) dt.$$

$$18.63. y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t)\sin(x-t)y(t) dt.$$

$$18.64. y(x) = 1 + x \cos x - \sin x + \int_0^x (x-t) \times$$

$\times \sin(x-t)y(t) dt.$

18.65. Показать, что если $y(x)$ — решение уравнения (23) с $a \neq 0$, то функция $y^*(x) = y(x+a)$ удовлетворяет уравнению

$$y^*(x) = f^*(x) + \int_0^x K(x-t)y^*(t) dt,$$

где $f^*(x) = f(x+a)$.

18.66. Показать, что для ядра $K(x, t) = K(x-t)$ все итерированные ядра, а следовательно, и резольвента также зависят лишь от разности аргументов $x-t$.

Решение уравнений типа свертки можно провести и несколькими способами, а именно — путем использования преобразования Лапласа для нахождения резольвенты. В самом деле, резольвента ядра $K(x, t) = K(x-t)$ зависит лишь от разности аргументов (см. задачу 18.66), и, следовательно, решение уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)y(t) dt \quad (24)$$

можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt, \quad (25)$$

где $R(x-t) = R(x, t, 1)$, а $R(x, t, \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, t) = K(x-t)$. Применяя к обеим частям уравнений (24) и (25) преобразование Лапласа, получим

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p) Y(p), \quad Y(p) = F(p) + \tilde{R}(p) F(p),$$

откуда

$$\tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (26)$$

Оригинал $R(u) \doteq \tilde{R}(p)$ определяет резольвенту $R(x-t)$, зная которую, из (25) найдем и решение уравнения.

Пример 9. С помощью резольвенты найти решение уравнения

$$y(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{x-t} e^{-\frac{x-t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (x-t) y(t) dt.$$

◀ В рассматриваемом случае $K(u) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-u/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} u$ и

$$\tilde{K}(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Из (26) получим $\tilde{R}(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \doteq 1 - e^{-u}$, т. е. $R(x-t) = 1 - e^{-(x-t)}$. Учитывая, что $f(x) = 1$, с помощью (25) найдем решение

$$y(x) = 1 + \int_0^x (1 - e^{-(x-t)}) dt = x + e^{-x}. \quad \blacktriangleright$$

Найдя резольвенту с помощью преобразования Лапласа, решить следующие интегральные уравнения:

$$18.67. \quad y(x) = 1 + \int_0^x e^{-2(x-t)} \cdot y(t) dt.$$

$$18.68. \quad y(x) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt.$$

$$18.69. \quad y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) y(t) dt.$$

$$18.70. \quad y(x) = e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^x (1 - e^{-(x-t)}) y(t) dt.$$

$$18.71. \quad y(x) = 1 + \int_0^x e^{-\frac{x-1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (x-t) y(t) dt.$$

Используя преобразование Лапласа, решить системы уравнений типа свертки:

$$18.72. \quad y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t) dt.$$

$$18.73. \quad y_1(x) = -x + \int_0^x y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = -3x^2 + x - 5 \int_0^x y_1(t) dt + 2 \int_0^x y_2(t) dt.$$

$$18.74. \quad y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 1 - \int_0^x (x-t) y_1(t) dt.$$

$$18.75. \quad y_1(x) = e^x - \int_0^x y_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{x-t} y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)} y_1(t) dt + \int_0^x y_2(t) dt.$$

$$18.76. \quad y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t) dt,$$

$$y_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t) y_1(t) dt.$$

4. Уравнения Вольтерра 1-го рода. *Линейным интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода* называется уравнение вида

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (27)$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $K(x, t)$ и $f(x)$ — заданные функции, определенные соответственно в треугольнике $a \leq x, t \leq b, t \leq x$ и на отрезке $[a, b]$. Классическим примером уравнения этого типа является *уравнение Абеля*

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x),$$

Таким образом, если непрерывное решение $y(x)$ существует, то функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно, причём

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0; \quad (31)$$

при этом решение единственно и должно иметь вид $y(x) = f^{(n)}(x)$. Подставляя в (30) $y(x) = f^{(n)}(x)$ и n раз интегрируя по частям с учетом соотношений (31), найдем, что функция $y(x) = f^{(n)}(x)$ действительно является решением исходного уравнения (проверьте!).

Если ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ ($f(a) = 0$) уравнения (27) таковы, что существуют непрерывные производные $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ и $f'(x)$ и, кроме того, функция $K(x, x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$, то уравнение (27) эквивалентно уравнению Вольтерра 2-го рода и, следовательно (см. п. 1), имеет единственное непрерывное решение. В самом деле, предполагая существование непрерывного решения и дифференцируя (27) с учетом перечисленных условий, получаем

$$K(x, x)y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt = f'(x)$$

или

$$y(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} + \int_a^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt, \quad (32)$$

т. е. $y(x)$ есть решение уравнения Вольтерра 2-го рода (32). Обратно, непосредственной проверкой убеждается, что решение уравнения (32) при условии $f(a) = 0$ удовлетворяет и исходному уравнению (см. задачу 18.77).

Пример 11. Решить уравнение

$$\int_0^x (2 + x^2 - t^2) y(t) dt = x^2,$$

сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

◀ Дифференцируя это уравнение, получаем

$$2y(x) + \int_0^x 2xy(t) dt = 2x$$

или

$$y(x) = x - \int_0^x xy(t) dt$$

— уравнение Вольтерра 2-го рода. Ядро $K(x, t) = -x$ вырождено

и, полагая $u(x) = \int_0^x y(t) dt$, получаем

$$\begin{aligned} y(x) &= x - xu(x), \\ u'(x) &= y(x) = x - xu(x) \end{aligned}$$

или

$$u' + xu = x, \quad u(0) = 0.$$

Отсюда $u(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ и $y(x) = xe^{-x^2/2}$. ►

Если в исходном уравнении Вольтерра 1-го рода (27) $K(x, x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то после дифференцирования этого уравнения слова получается уравнение 1-го рода, и—при выполнении соответствующих условий—можно повторить описанный выше прием. При этом, однако, следует всякий раз внимательно учитывать отмеченные выше ограничения на свободный член, необходимые для разрешимости уравнения.

Пример 12. Решить уравнение

$$\int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = e^x - 1. \quad (33)$$

◀ Условия существования и непрерывности производных для ядра и свободного члена здесь выполнены. Дифференцируя дважды, получаем

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = e^x, \quad (34)$$

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = e^x. \quad (35)$$

Уравнение (35) есть уравнение Вольтерра 2-го рода и оно имеет единственно непрерывное решение $y(x) = 2e^x - x - 1$, которое может быть найдено, например, операционным методом. Однако функция $y(x) = 2e^x - x - 1$ не удовлетворяет исходному уравнению, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Дело здесь в том, что уравнение (34) не имеет решения, так как $e^x|_{x=0} = 1 \neq 0$. А поскольку решение уравнения (33) должно удовлетворять уравнению (34), то и исходное уравнение (33) не имеет решения. ►

18.77. Доказать, что решение уравнения (32), в котором $f(a) = 0$, является решением и уравнения (27).

Решить заданные уравнения Вольтерра 1-го рода, сводя их к уравнениям 2-го рода.

$$18.78. \int_0^x (x-t) y(t) dt = e^x - x - 1.$$

$$18.79. \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

$$18.80. \int_0^x 3^{x-t} y(t) dt = x.$$

$$18.81. \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = 1 - \cos x.$$

$$18.82. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = \operatorname{sh} x - x.$$

$$18.83. \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3.$$

$$18.84. \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3 + x^2.$$

$$18.85. \int_0^x (1+x-t) y(t) dt = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x.$$

$$18.86. \int_0^x (1-x^2+t^2) y(t) dt = \frac{x^3}{2}.$$

$$18.87. \int_1^x (2t-x) y(t) dt = x^3 - 1.$$

Решить уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки, применяя преобразование Лапласа непосредственно к заданному уравнению (см. также п. 3)!

$$18.88. \int_0^x (x-t) y(t) dt = \operatorname{ch} x - 1.$$

$$18.89. \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = \frac{1}{2} x^4.$$

$$18.90. \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = x \sin x.$$

$$18.91. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$18.92. \int_0^x (x-t) \sin(x-t) y(t) dt = \sin^2 x.$$

$$18.93. \int_0^x (x-t) e^{x-t} y(t) dt = \frac{1}{2} e^{2x} - x e^x - \frac{1}{2}.$$

$$18.94. \int_0^x e^{x-t} \cos(x-t) y(t) dt = x e^x.$$

$$18.95. \int_0^x e^{x-t} \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}.$$

$$18.96. \int_0^x (x-t) \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$18.97^*. \int_0^x \sqrt{x-t} y(t) dt = x^2 \sqrt{x}.$$

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма

1. Основные понятия. Метод последовательных приближений и резольвента для уравнений Фредгольма 2-го рода. *Линейными интегральными уравнениями Фредгольма* называются уравнения вида

$$y(x) - \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

(уравнения 2-го рода) и

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (2)$$

(уравнения 1-го рода). В (1) и (2) $y(x)$ — искомая функция, а ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ предполагаются заданными соответственно в квадрате $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$. Если, в частности, $K(x, t) = 0$ при $a \leq x < t$, то уравнения (1) и (2) превращаются в уравнения Вольтерра 2-го и 1-го рода соответственно.

Мы ограничимся рассмотрением уравнений Фредгольма 2-го рода, наиболее интересных и важных для приложений.

Далее будем предполагать, что пределы интегрирования a и b в (1) — конечные числа, а функции $K(x, t)$ и $f(x)$ либо непрерывны в своей области определения, либо, в более общем случае, удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt = B_K^2 < +\infty. \quad (3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (4)$$

Если $f(x) = 0$ всюду на $[a, b]$, то уравнение Фредгольма 2-го рода (1) называется *однородным*, в противном случае оно называется *неоднородным*. Решением уравнения (1) будем называть всякую функцию $y(x)$ класса $L_2(a, b)$, обращающую это уравнение в тождество относительно $x \in [a, b]$.

Обычно рассматривается не одно уравнение (1), а семейство уравнений

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (5)$$

зависящих от числового параметра λ , который может принимать как действительные, так и комплексные значения. В отличие от

уравнений Вольтерра 2-го рода, существование и единственность решения уравнения (5) существенно зависят от значения параметра λ (см. подробно об этом в п. 3). В настоящем пункте рассмотрим случай, когда число λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{B_K} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right)^{-1/2} \quad (6)$$

(точнее, $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число уравнения (5), см. п. 3).

При условии (6) уравнение (5) имеет единственное решение (непрерывное, если непрерывны $K(x, t)$ и $f(x)$), которое может быть найдено методом последовательных приближений подобно тому, как это делается в случае уравнений Вольтерра 2-го рода (см. п. 2 § 1). А именно, перепишем уравнение (5) в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

и далее, выбрав произвольно нулевое приближение $y_0(x)$, построим последовательность $y_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, полагая

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если число λ удовлетворяет условию (6), то при $n \rightarrow \infty$ последовательность $y_n(x)$ сходится (в общем случае в метрике $L_2(a, b)$, а в случае непрерывного ядра и равномерно на $[a, b]$) к точному решению $y(x)$.

Пример 1. Методом последовательных приближений решить уравнение

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt = \sin \pi x.$$

◀ В данном случае, полагая $\lambda = 1/2$ и $K(x, t) = 1$, имеем $\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = B_K^2 = 1$ и, следовательно, условие $|\lambda| < 1/B_K$ выполнено. Приняв $y_0(x) = \sin \pi x$, последовательно находим

$$y_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_0(t) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$y_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_1(t) dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

$$y_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_2(x) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \\ = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi},$$

Вообще,

$$y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k},$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Поэтому решением уравнения является функция

$$y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi},$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. ►

Методом последовательных приближений найти решения заданных уравнений Фредгольма 2-го рода, предварительно убедившись, что условие (6) выполнено:

$$18.98. \quad y(x) - \int_0^1 xty(t) dt = 2x.$$

$$18.99. \quad y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 ty(t) dt = 1.$$

$$18.100. \quad y(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi ty(t) dt = \frac{1}{2}(1-x).$$

$$18.101. \quad y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin xy(t) t dt = 2 \sin x.$$

$$18.102. \quad y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x+t) + \cos(x-t)) y(t) dt = \cos x.$$

Если в качестве нулевого приближения выбрать свободный член уравнения (5), т. е. $y_0(x) = f(x)$, то для n -го приближения получается общая формула (см. также § 1, п. 2)

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^b K_j(x, t) f(t) dt = \\ = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x, t) \right) f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где итерированные ядра определяются соотношениями

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_j(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{j-1}(s, t) ds, \quad j=2, 3, \dots \quad (8)$$

При $|\lambda| < 1/B_K$ ряд

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \quad (9)$$

сходится к функции $R(x, t, \lambda)$, называемой *резольвентой* ядра $K(x, t)$. Следовательно, (7) в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (10)$$

выражающую решение интегрального уравнения через резольвенту.

З а м е ч а н и е. Понятие резольвенты как функции $R(x, t, \lambda)$, с помощью которой по формуле (10) определяется решение интегрального уравнения, сохраняет смысл для любых значений λ , при которых это уравнение однозначно разрешимо. Метод последовательных приближений и формула (9) дают представление для резольвенты в виде ряда по степеням λ (называемого *рядом Неймана*), годное лишь в области $|\lambda| < 1/B_K$.

Существует, однако, общий метод нахождения резольвенты — метод определителей Фредгольма, который в принципе позволяет построить резольвенту для любого значения λ , при котором интегральное уравнение имеет единственное решение. Этот метод здесь не рассматривается.

П р и м е р 2. С помощью итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$y(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t) dt = 1 + x^2.$$

◀ В данном случае $K(x, t) = \frac{x}{1+t^2}$ и для итерированных ядер на основании (8) получаем

$$K_1(x, t) = K(x, t) = \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, t) ds = \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} ds = \frac{\ln 2}{2} \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_2(s, t) ds = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} ds = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{1+t^2},$$

.....

$$K_j(x, t) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{j-1} \frac{x}{1+t^2}.$$

Поэтому резольвента ядра равна

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{2} \lambda \right)^{j-1} \frac{x}{1+t^2} = \frac{\frac{\ln 2}{2} \lambda}{1 - \frac{\ln 2}{2} \lambda} \frac{x}{1+t^2},$$

причем этот ряд сходится в области

$$|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}. \quad (11)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$B_K^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2} dx dt = \frac{\pi+2}{24}.$$

т. е. условие (6) приводит к неравенству

$$|\lambda| < 2 \sqrt{\frac{6}{\pi+2}}. \quad (12)$$

Так как $2 \sqrt{\frac{6}{\pi+2}} < \frac{2}{\ln 2}$, то из сравнения (11) и (12) видно, что в рассматриваемом случае область сходимости ряда Неймана для резольвенты шире, чем это гарантируется условием (6) (в соответствии с замечанием на с. 210).

Далее, для заданного уравнения $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$ и, следовательно,

$$R\left(x, t, \frac{1}{\ln 2}\right) = 2 \frac{x}{1+t^2}. \text{ Решение уравнения на основании (10) равно}$$

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 2 \frac{x}{1+t^2} (1+t^2) dt = 1 + \frac{2}{\ln 2} x + x^2. \blacktriangleright$$

Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение заданных интегральных уравнений:

$$18.103. \quad y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y(t) dt = \sin x.$$

$$18.104. \quad y(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} y(t) dt = x.$$

$$18.105. \quad y(x) + \pi \int_0^1 x \sin 2\pi t y(t) dt = \cos 2\pi x.$$

$$18.106. \quad y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x}.$$

$$18.107. \quad y(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos ty(t) dt = 1.$$

Ядра $K(x, t)$ и $L(x, t)$ называются *ортогональными* в квадрате $a \leq x, t \leq b$, если выполняются условия

$$\int_a^b K(x, s) L(s, t) ds = \int_a^b L(x, s) K(s, t) ds = 0$$

для всех $a \leq x, t \leq b$. Если, в частности, ядро $K(x, t)$ ортогонально самому себе, то для него второе итерированное ядро $K_2(x, t) = 0$ всюду в квадрате $a \leq x, t \leq b$. Следовательно, для такого ядра ряд Неймана для резольвенты сходится при любых значениях λ , а сама резольвента совпадает с ядром $K(x, t)$.

Пример 3. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x.$$

◀ Ядро $K(x, t) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ ортогонально самому себе:

$$\int_{-1}^1 K(x, s) K(s, t) ds = \int_{-1}^1 (\cos \pi x \cos 3\pi s) (\cos \pi s \cos 3\pi t) ds = 0.$$

Поэтому резольвента $R(x, t, \lambda) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ и решение заданного уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos 3\pi x + \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos^2 3\pi t dt = \cos 3\pi x + \cos \pi x. \blacktriangleright$$

18.108. Доказать, что если ядра $L(x, t)$ и $M(x, t)$ ортогональны, то резольвента ядра $K(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$ равна сумме резольвент ядер $L(x, t)$ и $M(x, t)$, т. е.

$$R_K(x, t, \lambda) = R_L(x, t, \lambda) + R_M(x, t, \lambda).$$

Используя ортогональность ядер и результат задачи 18.108, решить интегральные уравнения:

$$18.109. \quad y(x) - \int_0^1 x \left(1 - \frac{3}{2}t\right) y(t) dt = 1.$$

$$18.110. \quad y(x) - \int_0^1 \sin 2\pi xy(t) t dt = x.$$

$$18.111. \quad y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x + 2t) y(t) dt = x.$$

$$18.112. \quad y(x) - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 + 1 + xt) y(t) dt = 1.$$

$$18.113. \quad y(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \sin 2x) y(t) dt = \sin x.$$

2. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Ядро $K(x, t)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t).$$

Соответствующее интегральное уравнение

$$y(x) - \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \right) y(t) dt = f(x) \quad (13)$$

решается путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений следующим образом.

Перепишем уравнение (13) в виде

$$y(x) - \sum_{j=1}^n p_j(x) s_j = f(x), \quad (14)$$

где неизвестные s_j определяются через искомое решение $y(x)$ равенствами

$$s_j = \int_a^b q_j(t) y(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Умножая тождество (14) последовательно на $q_i(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и далее интегрируя обе части на отрезке $[a, b]$, с учетом (15) получим для неизвестных чисел s_i следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$s_i - \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \right) s_j = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \quad f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx. \quad (17)$$

Тогда система (16) запишется в виде

$$s_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

или в матричной форме

$$(E - A) S = F. \quad (19)$$

где E — единичная матрица, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $S = (s_1, \dots, s_n)^T$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$.

Если s_1, \dots, s_n — какое-нибудь решение системы (18), то в соответствии с (14) функция

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \rho_j(x) s_j \quad (20)$$

будет решением исходного интегрального уравнения (13). Если же система (18) несовместна, то и интегральное уравнение не имеет решения.

Этот метод применим, конечно, и в том частном случае, когда уравнение (13) однородное, т. е. $f(x) = 0$.

Пример 4. Решить уравнение

$$y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t \right) y(t) dt = \sin 2x.$$

◀ Ядро $K(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t$ вырожденное. Полагая

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\pi} \sin x, \quad \rho_2(x) = 1,$$

$$q_1(t) = \sin t, \quad q_2(t) = t,$$

по формулам (17) вычисляем

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 x dx = 1, \quad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} x \sin x dx = 2, \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \sin 2x dx = 0, \quad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x dx = -\pi.$$

Система (19) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix},$$

ее общее решение: $s_1 = C$, $s_2 = -\pi + 2C$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, любая функция вида

$$y(x) = \sin 2x + \frac{C}{\pi} \sin x - \pi + 2C = \sin 2x + C \left(\frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right) - \pi$$

есть решение заданного интегрального уравнения и других решений это уравнение не имеет. ▶

Пример 5. Решить уравнение

$$y(x) - 2 \int_0^1 \sqrt{xt} y(t) dt = x.$$

◀ Следуя изложенному выше общему методу, запишем это уравнение в виде

$$y(x) - 2 \sqrt{x} s = x,$$

где $s = \int_0^1 \sqrt{t} y(t) dt$. Умножая обе части на \sqrt{x} и интегрируя, получаем

$$s - 2 \int_0^1 x dx \cdot s = \int_0^1 x^{3/2} dx,$$

или $s - s = 2/5$. Последнее уравнение не имеет решения относительно s , следовательно, исходное интегральное уравнение также не имеет решения. ▶

Найти все решения или установить неразрешимость заданных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

$$18.114. y(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \sin ty(t) dt = \sin x.$$

$$18.115. y(x) - \frac{2e}{e^2 - 1} \int_0^1 \operatorname{ch} xy(t) dt = 1.$$

$$18.116. y(x) - \frac{24}{7} \int_0^1 (1 - x^2) \left(1 - \frac{3}{2} t\right) y(t) dt = x.$$

$$18.117. y(x) - \int_0^1 (1 + x) \cos 2\pi ty(t) dt = x.$$

$$18.118. y(x) - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} ty(t) dt = \cos^2 x.$$

$$18.119. y(x) - 4 \int_0^1 xt^2 y(t) dt = 0.$$

$$18.120. y(x) + \int_0^1 e^x ty(t) dt = 0.$$

$$18.121. y(x) - \int_0^1 (2x - t) y(t) dt = \cos 2\pi x.$$

$$18.122. y(x) - \int_0^1 (1 + 2xt) y(t) dt = -\frac{1}{6}(x + 3).$$

$$18.123. y(x) - \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} xt + x^2(t-1) \right) y(t) dt = 0.$$

$$18.124. y(x) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(x-t) y(t) dt = \sin 2x.$$

$$18.125. y(x) + \int_0^1 (x - \sqrt{t}) y(t) dt = \frac{5}{3} x + \sqrt{x} - \frac{1}{6}.$$

$$18.126. y(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t) y(t) dt = 0.$$

$$18.127. y(x) - 3 \int_0^1 (x^2 t^2 + 4xt + 1) \cdot y(t) dt = 2\pi^2 \cos 2\pi x.$$

$$18.128. y(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2) y(t) dt = 0.$$

3. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Значения параметра λ , при которых однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (21)$$

имеет ненулевые (нетривиальные) решения $y(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами* этого уравнения или ядра $K(x, t)$, а каждое ненулевое решение — *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ . Заметим, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим, так как при $\lambda = 0$ уравнение (21) имеет лишь нулевое решение. Если λ — характеристическое число, то число $\mu = 1/\lambda$ называется *собственным числом* интегрального уравнения. При этом $\mu \neq 0$.

Из результатов п. 2 следует, что в случае уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \right) y(t) dt = 0 \quad (22)$$

всякое решение имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n s_j p_j(x), \quad (23)$$

где $S = (s_1, \dots, s_n)^T$ — решение однородной системы

$$(E - \lambda A) S = 0 \quad (24)$$

с матрицей $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x)$, $i, j = 1, \dots, n$. Заметим, что если заменить λ на $1/\mu$, то система (23) принимает вид

$$(A - \mu E) S = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что собственные числа интегрального уравнения (22) совпадают с отличными от нуля собственными числами матрицы A , а собственные функции определяются соотношением (23), где $S = (s_1, \dots, s_n)^T$ — соответствующие собственные векторы этой матрицы.

Пример 6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (xt - 2x^2) y(t) dt = 0.$$

◀ Ядро $K(x, t) = xt - 2x^2$ вырожденное. Полагая

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x, & p_2(x) &= -2x^2, \\ q_1(t) &= t, & q_2(t) &= 1, \end{aligned}$$

найдем элементы матрицы A в (25):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & a_{12} &= -2 \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{2}, \\ a_{21} &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & a_{22} &= -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы A имеет вид

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{36} = \left(\mu + \frac{1}{6}\right)^2 = 0,$$

откуда $\mu = -1/6$ — единственное собственное число матрицы A . Соответствующие собственные векторы находим из системы уравнений

$$\left(A + \frac{1}{6} E\right) S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

общее решение которой $s_1 = C$, $s_2 = C$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, окончательно получаем, что заданное интегральное уравнение имеет единственное характеристическое число $\lambda = \frac{1}{\mu} = -6$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$y(x) = -6(s_1 x - 2s_2 x^2) = C(x - 2x^2),$$

где C — произвольная постоянная. ▶

Интегральное уравнение может вообще не иметь характеристических чисел (например, в том случае, когда ядро $K(x, t)$ вольтерровское или, в случае вырожденного ядра, матрица A в (24) нулевая) либо не имеет действительных характеристических чисел.

Пример 7. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos ty(t) dt = 0.$$

◀ Имеем

$$y(x) - \lambda s = 0, \quad s = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ty(t) dt,$$

откуда

$$s - \lambda s \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0.$$

Но $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0$, поэтому при любом λ последнее уравнение

имеет только одно решение: $s = 0$. Следовательно, при любом λ интегральное уравнение имеет только тривиальное решение, т. е. не имеет характеристических чисел. ▶

Пример 8. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t) y(t) dt = 0.$$

◀ Ядро

$$K(x, t) = \sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$$

вырожденное, причем можно положить

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sin x, & p_2(x) &= -\cos x, \\ q_1(t) &= \cos t, & q_2(t) &= \sin t; \end{aligned}$$

матрица $A = \left(a_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} q_i(x) p_j(x) dx \right)_{i, j=1}^2$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix};$$

характеристическое уравнение

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} -\mu & -\pi \\ \pi & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \pi^2 = 0$$

имеет только комплексные корни $\mu_{1,2} = \pm i\pi$. Найдем соответствующие собственные векторы. Для $\mu_1 = i\pi$

$$(A - i\pi E) S_{\mu_1} = \begin{pmatrix} -i\pi & -\pi \\ \pi & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

(26)

Для $\mu_2 = -i\pi$

$$(A + i\pi E) S_{\mu_2} = \begin{pmatrix} i\pi & -\pi \\ \pi & i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Окончательно заключаем, что заданное интегральное уравнение действительных характеристических чисел не имеет, но имеет два комплексных характеристических числа $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}} = \mp i \frac{1}{\pi}$. Соответствующие собственные функции имеют вид (см. (26) и (27))

$$y_1(x) = \lambda_1 (C_1 \sin x - iC_1 \cos x) = A_1 e^{ix},$$

$$y_2(x) = \lambda_2 (C_2 \sin x + iC_2 \cos x) = A_2 e^{-ix},$$

где A_1 и A_2 — произвольные комплексные постоянные. ►

Найти характеристические числа и собственные функции заданных интегральных уравнений с вырожденным ядром (ограничиться случаем действительных характеристических чисел):

$$18.129. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2x) ty(t) dt = 0.$$

$$18.130. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (1-x^2) y(t) dt = 0.$$

$$18.131. \quad y(x) - \lambda \int_{-1}^1 |x| y(t) dt = 0.$$

$$18.132. \quad y(x) - \lambda \int_0^\pi x \sin ty(t) dt = 0.$$

$$18.133. \quad y(x) - \lambda \int_0^\pi \cos x \cos ty(t) dt = 0.$$

$$18.134. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (x+t) y(t) dt = 0.$$

$$18.135. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (xe^t + 2t) y(t) dt = 0.$$

$$18.136. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 \left(x \sin 2\pi t - \frac{1}{2\pi} \right) y(t) dt = 0.$$

$$18.137. \quad y(x) - \lambda \int_0^\pi \sin(x+t) y(t) dt = 0.$$

$$18.138. \quad y(x) - \lambda \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = 0.$$

Для уравнений Фредгольма 2-го рода вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (28)$$

где a и b — конечные числа, а ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ интегрируемы с квадратом в области $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$ (в частности, непрерывны), справедливы следующие теоремы Фредгольма (при формулировке которых мы ограничимся случаем действительного ядра $K(x, t)$).

1. *Однородное уравнение*

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (29)$$

имеет либо конечное, либо счетное множество характеристических чисел; если этих чисел счетное множество, то они стремятся к бесконечности.

2. Если λ — характеристическое число, то уравнение (29) и сопряженное ему однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, t) y(t) dt = 0, \quad (30)$$

где $K^*(x, t) = K(t, x)$, имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.

3. Альтернатива Фредгольма: либо неоднородное уравнение (28) имеет одно и только одно решение для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$, либо соответствующее однородное уравнение (29) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. (Другими словами, если число λ не является характеристическим, то уравнение (28) имеет, и притом единственное, решение для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$.)

4. Если λ — характеристическое число, то для того чтобы уравнение (28) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ был ортогонален любому решению $y^*(x)$ однородного сопряженного уравнения (30), т. е.

$$\int_a^b f(x) y^*(x) dx = 0.$$

Проиллюстрируем теоремы Фредгольма на примере интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Пример 9. Исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \sin t) y(t) dt = \cos x \quad (31)$$

в зависимости от значений параметра λ .

◀ Решение интегрального уравнения сводится к решению неоднородной системы

$$(E - \lambda A) S = F, \quad (32)$$

где

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и $F = (f_1, \dots, f_n)^T \left(f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx \right)$. В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2, & p_2(x) &= x, \\ q_1(t) &= \cos t, & q_2(x) &= \sin t, \\ a_{11} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x^2 dx = 4\pi, & a_{12} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x dx = 0, \\ a_{21} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot x^2 dx = 0, & a_{22} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot x dx = -2\pi, \\ f_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi, & f_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0. \end{aligned}$$

Система (32) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + 2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Характеристическое уравнение

$$\det(E - \lambda A) = (1 + 2\pi\lambda)(1 - 4\pi\lambda) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2\pi}$, являющиеся характеристическими числами соответствующего однородного уравнения.

При любом $\lambda \neq \frac{1}{4\pi}$, $-\frac{1}{2\pi}$ система (33) имеет единственное решение

$$s_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \quad s_2 = 0;$$

соответствующее решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda} x^2, \quad \lambda \neq \frac{1}{4\pi}, \quad -\frac{1}{2\pi}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ из (33) получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система, а вместе с ней и исходное интегральное уравнение, решения не имеют.

При $\lambda = \lambda_2 = -1/(2\pi)$ система (33) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

и имеет решения $s_1 = \pi/3$, $s_2 = C$. Соответствующие решения интегрального уравнения таковы:

$$y(x) = \cos x + \lambda_2 (s_1 x^2 + s_2 x) = \cos x - \frac{1}{6} x^2 + Cx,$$

где C — произвольная постоянная. ►

Исследовать решения заданных уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра λ :

$$18.139. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 x(1+t)y(t) dt = x^2.$$

$$18.140. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 xy(t) dt = \sin 2\pi x.$$

$$18.141. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2x)ty(t) dt = 1 - \frac{3}{2}x.$$

$$18.142. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi ty(t) dt = x.$$

$$18.143. \quad y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} ty(t) dt = \operatorname{ctg} x.$$

$$18.144. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 \arccos ty(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$18.145. \quad y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos ty(t) dt = \cos x.$$

$$18.146. \quad y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (1+xt)y(t) dt = \sin \pi x.$$

$$18.147. \quad y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+t)y(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$$

$$18.148. \quad y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)y(t) dt = 1.$$

4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром. Ядро $K(x, t)$ называется *симметричным*, если оно удовлетворяет условию

$$K(x, t) = K(t, x)$$

для всех $a \leq x, t \leq b$.

Для симметричных ядер, удовлетворяющих условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty,$$

дополнительно к основным теоремам Фредгольма (см. п. 3) справедливы следующие утверждения:

1. *Симметричное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере одно характеристическое число.*

2. *Характеристические числа симметричного ядра действительны, а собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.*

На практике часто встречается случай, когда интегральное уравнение с симметричным ядром является решением некоторой самосопряженной однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В таких случаях нахождение характеристических чисел и собственных функций ядра сводится к решению указанной краевой задачи.

Пример 10. Найти характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ (t+1)x, & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (34)$$

◀ Заметим, что ядро (34) симметричное. Действительно, из (34) следует

$$K(t, x) = \begin{cases} x(t+1), & 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ (x+1)t, & 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (35)$$

Сравнивая (34) и (35), видим, что $K(x, t) = K(t, x)$ для любой пары (x, t) .

Однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (36)$$

с ядром (34) запишем следующим образом:

$$y(x) = \lambda \left(x \int_0^x (t+1) y(t) dt + (x+1) \int_x^1 ty(t) dt \right). \quad (37)$$

Далее, дважды продифференцируем (37):

$$y'(x) = \lambda \left(\int_0^x (t+1) y(t) dt + x(x+1) y(x) + \right. \\ \left. - \int_x^1 ty(t) dt - (x+1)xy(x) \right), \quad (38)$$

$$y''(x) = \lambda ((x+1)y(x) - xy(x)) = \lambda y(x). \quad (39)$$

Таким образом, число λ и функция $y(x)$ таковы, что

$$y'' - \lambda y = 0. \quad (40)$$

Найдем теперь краевые условия, которым должна удовлетворять искомая функция $y(x)$. Для этого, подставляя в (37) и (38) $x=0$ и $x=1$, получим

$$\begin{aligned} y(0) &= \lambda \int_0^1 ty(t) dt, & y(1) &= \lambda \int_0^1 (t+1)y(t) dt, \\ y'(0) &= \lambda \int_0^1 ty(t) dt, & y'(1) &= \lambda \int_0^1 (t+1)y(t) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). \quad (41)$$

Соотношения (40) и (41) образуют в совокупности однородную краевую задачу, решая которую, найдем характеристические числа и соответствующие им собственные функции исходного интегрального уравнения.

Рассмотрим три случая

1) $\lambda = 0$. Уравнение (40) принимает вид

$$y'' = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 + C_2 x. \quad (42)$$

Используя краевые условия (41), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2, \\ C_1 + C_2 &= C_2, \end{aligned}$$

которая имеет единственное решение $C_1 = 0, C_2 = 0$. Следовательно, краевая задача — а вместе с ней и уравнение (36) — при $\lambda = 0$ имеют лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, т. е. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом. Впрочем, это можно было заметить сразу из уравнения (36): если в нем $\lambda = 0$, то $y(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = \omega^2 > 0$. Уравнение (40) имеет вид

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Краевые условия (41) приводят к системе

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \omega C_1 - \omega C_2, \\ C_1 e^{\omega} + C_2 e^{-\omega} &= \omega C_1 e^{\omega} - \omega C_2 e^{-\omega} \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega & 1 + \omega \\ e^{\omega} - \omega e^{\omega} & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Эта система имеет нетривиальные решения в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega & 1 + \omega \\ e^{\omega} - \omega e^{\omega} & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{vmatrix} = (1 - \omega)(1 + \omega) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{vmatrix} = \\ = -2(1 - \omega)(1 + \omega) \operatorname{sh} \omega = 0, \end{vmatrix}$$

т. е. $\omega = \pm 1$ ($\omega^2 > 0$), или $\lambda = \omega^2 = 1$.

При $\omega = 1$ из (43) получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $y(x) = C_1 e^x$, C_1 — произвольная постоянная.

Аналогично, при $\omega = -1$ получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

откуда $y(x) = C_2 e^{-x}$, C_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, $\lambda = 1$ — характеристическое число ядра (35), соответствующая ему линейно независимая система собственных функций состоит из двух функций $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, а любая собственная функция имеет вид $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$. В этом случае уравнение (40) имеет вид

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Краевые условия (41) приводят к системе

$$\begin{aligned} C_1 &= \omega C_2, \\ C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega &= -\omega C_1 \sin \omega + \omega C_2 \cos \omega \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \cos \omega + \omega \sin \omega & \sin \omega - \omega \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Эта система имеет отрицательные решения в том и только в том случае, когда $\omega^2 \sin \omega = 0$, т. е. $\omega_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, или $\lambda_n = -\omega_n^2 = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

При $\omega = \omega_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, из системы (44) получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi n \\ (-1)^n & -\pi n (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = \pi n C_2$, $C_2 = C$ и $y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x)$, где C — произвольная постоянная и $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Заметим, однако, что в этом выражении для $y(x)$ переход от n к $-n$ приводит лишь к смене знака, т. е. к изменению константы C . С учетом этого получаем, что каждому из характеристических чисел $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, соответствует одна базисная собственная функция $y_n = \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$, а любая собственная функция имеет вид

$$y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

C — произвольная постоянная.

Подводя итог, заключаем, что для заданного ядра задача о характеристических числах и собственных функциях имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, & y_{0,1} &= e^x, & y_{0,2} &= e^{-x}, \\ \lambda_n &= -\pi^2 n^2, & y_n &= \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x, & n &\in \mathbb{N}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

$$18.149. K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.150. K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq t, \\ -t, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.151. K(x, t) = \begin{cases} -x-1, & 0 \leq x \leq t, \\ -t-1, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.152. K(x, t) = \begin{cases} \cos t \sin x, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.153. K(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & 0 \leq x \leq t, \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.154. K(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin(t-1)\sin x}{\sin 1}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{\sin t \sin(x-1)}{\sin 1}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.155. K(x, t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(t-1)\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.156. K(x, t) = \frac{1}{2} \sin|x-t|, \quad 0 \leq x \leq t \leq \pi.$$

$$18.157. K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t} \operatorname{ch} x, & 0 \leq x \leq t, \\ -\operatorname{ch} te^{-x}, & t \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Если задано неоднородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (45)$$

с симметричным ядром $K(x, t) = K(t, x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty,$$

то его решение в общем случае может быть найдено следующим образом.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (46)$$

— последовательность характеристических чисел ядра $K(x, t)$, а

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (47)$$

— соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. При этом в последовательности (46) каждое характеристическое число выписывается столько раз, каков его ранг, т. е. число линейно независимых функций, соответствующих этому характеристическому числу.

Если параметр λ в уравнении (45) не совпадает ни с одним из характеристических чисел λ_n , $n=1, 2, \dots$, то решение этого уравнения (существующее и единственное в силу 3-й теоремы Фредгольма для любой правой части $f(x)$) дается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x), \quad (48)$$

где

$$f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) dx, \quad n=1, 2, \dots \quad (49)$$

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, имеющих ранг r , т. е.

$$\lambda = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_{m+r}$$

для некоторого m , то решение существует в том и только в том случае, когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим данному характеристическому числу, т. е. выполнены r условий

$$\int_a^b f(x) y_n(x) dx = 0, \quad n = m+1, m+2, \dots, m+r. \quad (50)$$

В этом случае уравнение имеет бесконечное множество решений, имеющих вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m+1, \dots, m+r}}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + C_1 y_{m+1}(x) + \dots + C_r y_{m+r}(x), \quad (51)$$

где C_1, \dots, C_r — произвольные постоянные.

Пример 11. Найти все решения неоднородного интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, t) y(t) dt = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}, \quad (52)$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos t \sin x, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

при различных значениях параметра λ .

◀ Характеристические числа и соответствующие им собственные функции ядра (52) имеют вид (см. задачу 18.152)

$$\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad y_n = \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что в данном случае каждое характеристическое число имеет ранг $r=1$, а последовательность собственных функций ортогональна, но не нормирована на отрезке $[0, \pi]$: нормированные собственные функции имеют вид

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

По формулам (49) для $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x dx - \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2(2n+1)} - \frac{\pi}{2} \delta_{n,0} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+1} & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\lambda \neq \lambda_n$, $n=0, 1, 2, \dots$, уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2n+1}.$$

При $\lambda = \lambda_0 = -3/4$ в силу ортогональности $f(x)$ к собственной функции $y_0(x) = \sin \frac{x}{2}$ получаем бесконечное множество решений вида

$$y(x) = \frac{\pi}{4} \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{n(n+1)(2n+1)} + C \sin \frac{x}{2},$$

где C — произвольная постоянная.

Наконец, при $\lambda = \lambda_n$, $n=1, 2, \dots$, уравнение решения не имеет. \blacktriangleright

Найти решения неоднородных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром при различных значениях параметра λ (характеристические числа и собственные функции соответствующих ядер см. в задачах 18.149 — 18.157).

$$18.158. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 1,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.159. y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq t \\ -t, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$18.160. y(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, t) y(t) dt = x - \pi,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & 0 \leq x \leq t, \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.161. y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin |x - t| y(t) dt = 1.$$

§ 3. Численные методы решения интегральных уравнений

Существуют различные методы численного решения интегральных уравнений: *метод конечных сумм*, *метод моментов*, *метод коллокации* и др. Ниже будут рассмотрены два из них — метод конечных сумм и метод моментов.

Пусть задано интегральное уравнение Фредгольма второго рода (ср. § 2, п. 1 настоящей главы)

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — искомая функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, определенные в прямоугольнике $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$ соответственно, λ — параметр, не равный собственному числу соответствующего однородного уравнения.

Метод конечных сумм. Этот метод основан на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R_F, \quad (2)$$

где $x_i, i=1, 2, \dots, n$, — точки отрезка $[a, b]$, $A_i, i=1, 2, \dots, n$, — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$, и R_F — ошибка формулы (2), порожденная приближенным вычислением интеграла. В случае равноотстоящих узлов $x_i = a + (i-1)h, i=1, \dots, n$, где $h = \frac{b-a}{n-1}$, коэффициенты A_i в приближенных формулах (2) имеют следующие значения:

1) для формулы прямоугольников

$$A_i = h, i=1, 2, \dots, n-1, A_n = 0;$$

2) для общей формулы трапеций

$$A_1 = A_n = h/2, A_2 = \dots = A_{n-1} = h;$$

3) для общей формулы Симпсона при $n = 2m + 1$

$$A_1 = A_{2m+1} = h/3, A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = 4h/3, A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = 2h/3.$$

Вводя обозначения

$$y(x_i) = y_i, K(x_i, x_j) = K_{ij}, f(x_i) = f_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

интегральное уравнение (1) на основании формулы (2), в которой ошибка R_F отброшена, можно заменить системой n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных \tilde{y}_i — приближенных значений точного решения $y(x)$ в узлах x_i :

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Система (3) может быть решена одним из численных методов линейной алгебры, например, методом Гаусса.

Найдя \tilde{y}_i из (3), для решения $y(x)$ получаем из уравнения (1) приближенное аналитическое выражение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) \tilde{y}_j.$$

Пример 1. Используя квадратурную формулу Симпсона, методом конечных сумм найти приближенное решение уравнения

$$y'(x) - 0,5 \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x}. \quad \text{В вычислениях положить } n=3.$$

◀ Выбираем равноотстоящие узлы $x_1=0, x_2=0,5, x_3=1$. Значения ядра $K(x, t) = x e^t$ и правой части $f(x) = e^{-x}$ в точках (x_i, t_j) в x_i соответственно оформим в виде таблиц:

Т а б л и ц а значений $K_{ij} = K(x_i, t_j)$

$t_j \backslash x_i$	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,5	0	0,8244	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

Т а б л и ц а значений $f_i = f(x_i)$

x_i	0	0,5	1
f_i	1	0,6065	0,3679

Квадратурная формула Симпсона (см. (3)) в нашем случае имеет вид

$$\int_0^1 F(x) dx \approx \frac{1}{6} (F(0) + 4F(0,5) + F(1)),$$

так как $h=1/2$, $A_1=h/3=1/6$, $A_2=4h/3=4/6$, $A_3=h/3=1/6$.

Для определения приближенных значений \tilde{y}_i , $i=1, 2, 3$, решения $y(x)$ в узлах x_i согласно (3) получим, используя таблицы значений K_{ij} и f_i , следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 - \frac{0,5}{6} (0,5y_1 + 3,2976y_2 + 1,3592y_3) &= 0,6065, \\ y_3 - \frac{0,5}{6} (y_1 + 6,5948y_2 + 2,7183y_3) &= 0,3679. \end{aligned} \quad (4)$$

После упрощения система (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ 0,7252y_2 - 0,1133y_3 &= 0,6482, \\ 0,5496y_2 - 0,7735y_3 &= -0,4512. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему (5), находим

$$\tilde{y}_1 = 1, \quad \tilde{y}_2 = 1,1079, \quad \tilde{y}_3 = 1,3706.$$

Следовательно, приближенное решение интегрального уравнения выражается формулой

$$\tilde{y}(x) = e^{-x} + 1,003x.$$

Заметим, что точное решение уравнения есть $y(x) = e^{-x} + x$. ► Изложенный выше метод применяется также для приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

В последнем случае полагают, что

$$K_{ij} = 0, \quad j > i.$$

Действительно, уравнение Вольтерра с ядром $K(x, t)$ можно свести к уравнению Фредгольма с ядром $K^*(x, t)$, вводя функцию

$$K^*(x, t) = \begin{cases} K(x, t) & a \leq t \leq x, \\ 0 & x < t. \end{cases}$$

Метод моментов. В методе моментов приближенное решение \tilde{y} интегрального уравнения ищется в виде суммы $f(x)$ и линейной комбинации линейно независимых на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, т. е.

$$\tilde{y}(x) = y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — некоторые постоянные. Подставляя (6) в (1), получаем невязку

$$R[y_n(x)] = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \quad (7)$$

где

$$\psi_i(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно методу моментов коэффициенты c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определяются из условий ортогональности невязки ко всем функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Эти условия дают следующую систему линейных уравнений:

$$\int_a^b R[y_n(x)] \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в силу (7)

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \lambda \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \beta_{ij} &= \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt, \\ \gamma_i &= \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) f(t) \varphi_i(t) dt. \end{aligned}$$

Если определитель $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij})$ системы (8) отличен от нуля, то коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n определяются однозначно. Подставляя их найденные значения в (6), получаем приближенное решение исходного интегрального уравнения.

З а м е ч а н и е. Для удобства вычислений интегралов систему (8) иногда формируют, используя условие ортогональности невязки (7) к некоторой иной системе функций, отличной от системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$.

П р и м е р 2. Найти приближенное решение уравнения

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 1,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

◀ Используя выражение для ядра $K(x, t)$, перепишем уравнение в виде

$$y(x) - \left(\int_0^x t(x-1)y(t) dt + \int_x^1 (t-1)xy(t) dt \right) = 1.$$

Положим $\tilde{y}(x) = y_2(x) = 1 + c_1x + c_2x^2$. Тогда невязка $R[y_2(x)]$ имеет вид

$$R[y_2(x)] = c_1x + c_2x^2 - \left[(x-1) \left(c_1 \frac{x^3}{3} + c_2 \frac{x^4}{4} \right) + x \left(-\frac{c_1}{6} - c_1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{c_2}{12} + c_2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \right) \right] - \frac{(x-1)x^2}{2} + \frac{x(x-1)^2}{2}.$$

Из условия ортогональности невязки $R[y_2(x)]$ к функциям x и x^2 получаем следующую систему:

$$\int_0^1 R[y_2(x)] x dx = 0,$$

$$\int_0^1 R[y_2(x)] x^2 dx = 0.$$

После вычисления интегралов и некоторых преобразований получим следующую систему линейных уравнений (для определения c_1 и c_2):

$$0,3555c_1 + 0,3146c_2 = -0,1167,$$

$$0,2638c_1 + 0,2417c_2 = -0,025.$$

Решая эту систему, находим $c_1 = 0,027$, $c_2 = -0,029$. Приближенное решение исходного интегрального уравнения имеет вид $\tilde{y}(x) = 1 + 0,027x - 0,029x^2$. ▶

З а м е ч а н и е. Мы не приводим оценок точности приближенного решения для изложенных методов ввиду довольно громоздких выкладок. Изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе¹⁾.

Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$18.162. \quad y(x) - 4 \int_0^1 \sin^2(xt^2) y(t) dt = 2x - \pi.$$

$$18.163. \quad y(x) - \int_0^1 e^{\arcsin \frac{xt}{2}} y(t) dt = \operatorname{tg} x.$$

$$18.164. \quad y(x) - \int_0^1 \operatorname{tg} e^{0,1(x^2+t)} y(t) dt = \operatorname{ctg}(x+5).$$

¹⁾ См., например, Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — Т. 2. — М.: Физматгиз, 1962, гл. 10, § 10.

- 18.165. $y(x) - \int_0^1 \sin(x+1)^t y(t) dt = x^2 + 5.$
- 18.166. $y(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 + \sin xt) y(t) dt = \cos 2x.$
- 18.167. $y(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 x \ln(x^2 + 10t^2 + 3) y(t) dt = x^2 + 3x.$
- 18.168. $y(x) - 5 \int_0^1 \operatorname{tg} e^{0,1tx} y(t) dt = \cos^2 x.$
- 18.169. $y(x) - \int_0^1 (1 + \sin e^{xt}) y(t) dt = \frac{1}{8} (x + 8).$
- 18.170. $y(x) - 3 \int_0^1 (x^2 t^2 + e^{xt} + 1) y(t) dt = \cos 2x.$
- 18.171. $y(x) + 5 \int_0^1 e^{xt+t^2} y(t) dt = \ln(1+x).$
- 18.172. $y(x) + \int_0^1 (x \sin t - \sqrt{t}) y(t) dt = \cos 3x.$
- 18.173. $y(x) - \int_0^1 (xt + x^2 \cos t) y(t) dt = x - 2.$
- 18.174. $y(x) - \int_0^1 (x+3) e^{xt+t^2} y(t) dt = x(e^x + 2).$
- 18.175. $y(x) - \frac{1}{5} \int_0^1 \cos \ln((t+5)x) y(t) dt = \sin x.$
- 18.176. $y(x) - \int_0^1 (5x \arcsin t - \ln(t+8)) y(t) dt = x^2 + 8.$
- 18.177. $y(x) - 4 \int_0^1 x e^{x^2+tx} y(t) dt = e^{2x} + 8.$
- 18.178. $y(x) + \int_0^1 \cos 2\pi(x^2 + tx) y(t) dt = x^2 + \sin x.$
- 18.179. $y(x) - 4 \int_0^1 (x^2 t + \sin xt + \ln(t+4)) y(t) dt = e^{x^2} + 8.$

$$18.180. y(x) - \int_0^x (x - \sin xt) y(t) dt = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$18.181. y(x) - \int_0^x (1 + x^2 t - e^{tx}) y(t) dt = e^{2x} + x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$18.182. y(x) - \int_0^x \sin(3x - 8tx) y(t) dt = 1 - 2 \cos x,$$

$0 \leq x \leq 1.$

$$18.183. y(x) - \int_0^x e^{t^2 x^2 - 5tx} y(t) dt = e^{3x} + 9, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$18.184. y(x) - \int_0^x (x \ln(t + 8) - t) y(t) dt = \frac{1}{4} e^{2x} + x,$$

$0 \leq x \leq 1.$

18.185. Составить на фортране подпрограмму для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1). В качестве формальных операторов использовать: N — количество узловых точек, $S = \lambda$, X — одномерный массив размера N , который перед обращением к подпрограмме содержит значения узловых точек x_k , $k = 1, 2, \dots, N$, A — одномерный массив размера N , который перед обращением к подпрограмме содержит коэффициенты квадратурных формул A_m , $m = 1, 2, \dots, N$, RK — промежуточный двумерный массив размера $N \times N$, R — одномерный массив размера N , в котором до обращения к подпрограмме находятся значения правых частей, а после окончания работы — решение системы линейных уравнений, F и EF — имена подпрограмм-функций, вычисляющих значения $K(x, t)$, $f(x)$ соответственно.

● Для решения системы линейных уравнений можно использовать подпрограмму EXCLUS(A, B, N) (см. ч. 2, с. 178) или стандартную подпрограмму математического обеспечения ЭВМ серии ЕС.

18.186. Используя подпрограммы задачи 18.185 и квадратурную формулу Симпсона, найти решения задач 18.162—18.184. Число точек деления выбрать равным $n = 21$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 16

- 16.1. $U^* = \mathbb{Z}$. 16.2. $U^* = \{1, 2\}$. 16.3. $U^* = \left\{ \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 16.4. $U^* = [-1; 1]$. 16.6. $f_* = 0$. 16.7. $f_* = -\infty$. 16.8. $f_* = -\infty$.
 16.9. $f_* = -\pi/2$. 16.10. $f_* = -\infty$. 16.11. а) $f_* = -\infty$; б) $f_* = 0$.
 16.20. $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 2]$. 16.21. $b = 2,5$. 16.22. Да. 16.23. ● Воспользоваться результатом задачи 16.19. 16.25. См. рис. 229.

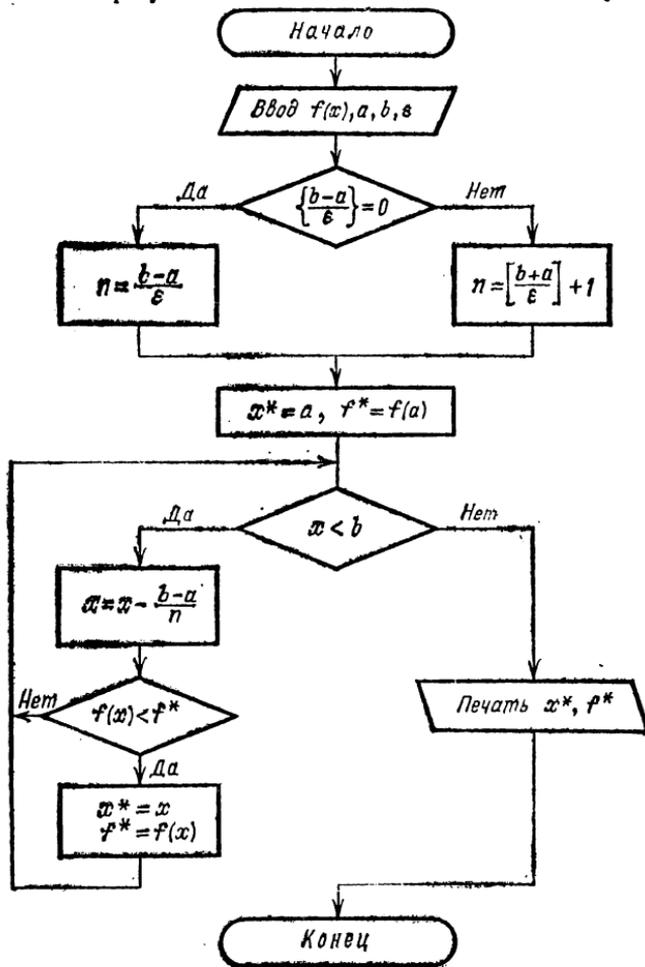


Рис. 229

16.26. $x^* = 1,156$, $f^* = 0,6609$. 16.27. $x^* = 0,6605$, $f^* = -0,4501$.
 16.28. $x^* = 0,6565$, $f^* = 1,4653$. 16.29. $x^* = 1,6702$, $f^* = -33,5064$.
 16.30. $x^* = 1,2963$, $f^* = -1,7557$. 16.31. $x^* = 0,8241$, $f^* = -1,6421$.
 16.32. $x^* = 3,3532$, $f^* = -47,1447$. 16.33. $x^* = 1,8411$, $f^* = -6,0016$.
 16.34. $\delta_n \leq \frac{M}{n} (b-a)$. 16.37. $n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$. 16.38. Да. 16.39. $N_d =$
 $= 32$, $N_n = 100001$; $N_n/N_d = 3125$. ● Использовать результат за-
 дачи 16.37, полагая $\delta \approx 0$. 16.40. См. рис. 230. 16.41. $x^* = -4,4934$,

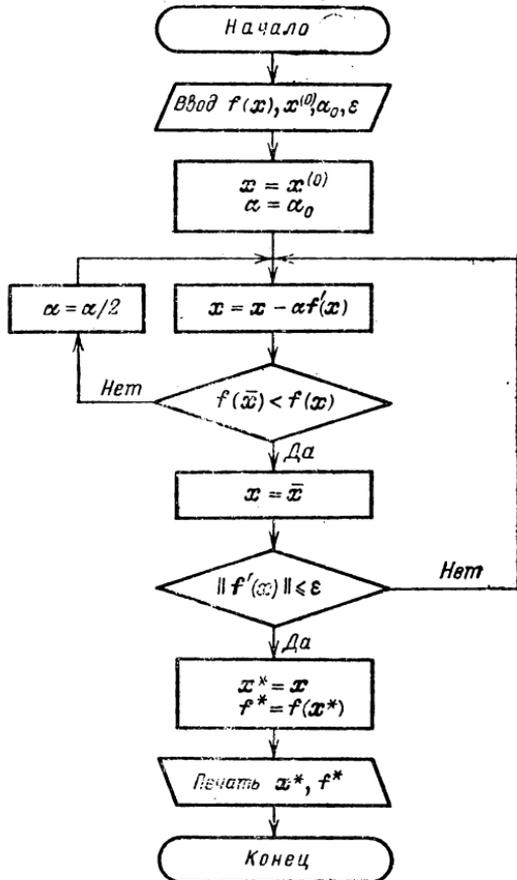


Рис. 230

$f^* = -4,8206$. 16.42. $x^* = 1,6030$, $f^* = -2,1376$. 16.43. $x^* = -0,7549$,
 $f^* = -3,6347$. 16.44. $x^* = 0,3822$, $f^* = -3,7491$. 16.45. $x^* = 1,7556$, $f^* =$
 $= 2,4154$. 16.46. $x^* = 0,3384$, $f^* = 2,4154$. 16.47. $x^* = 4$, $f^* = -8,9169$.
 16.48. $x^* = -1,5$, $f^* = -1,6519$. 16.51. б) $x_2 - a = b - x_1 =$
 $= \frac{\sqrt{5}-1}{2} (b-a)$. 16.52. $\Delta_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n-1}$. 16.53. $N_d = 32$, $N_c =$
 $= 24$; $N_d/N_c = 1,33$. 16.54. См. рис. 231. 16.55. $x^* = -0,6823$, $f^* =$

= -0,5814. 16.56. $x^* = -2,2340$, $f^* = 61,1806$. 16.57. $x^* = 0,6488$, $f^* =$
 = -2,3675. 16.58. $x^* = 0,5110$, $f^* = -2,5054$. 16.59. $x^* = -2,3247$,
 $f^* = -7,7290$. 16.60. $x^* = 1,5160$, $f^* = 20,4445$. 16.61. $x^* = 0$, $f^* = -3$.

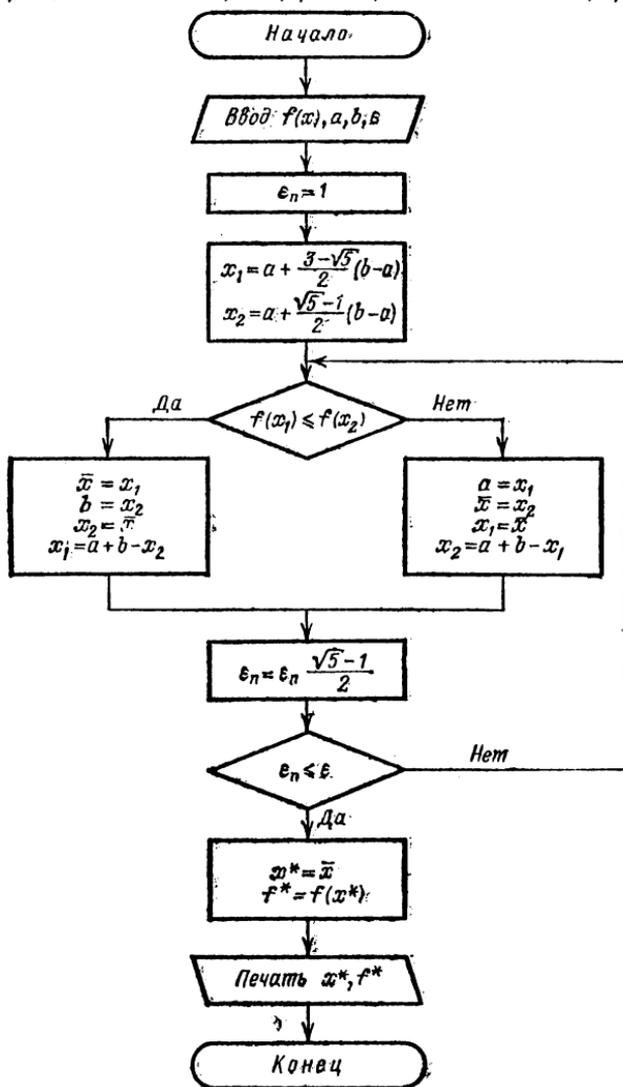


Рис. 231

16.62. $x^* = 0,7339$; $f^* = 1,6796$. 16.65. а) $L = 5$; б) $L = 135$. 16.66. См.
 рис. 232. 16.67. $f^* = 1,152 \times 10^{-2}$. 16.68. $f^* = -10,006$. 16.69. $f^* =$
 = 0,523. 16.70. $f^* = 2,387$. 16.71. $f^* = 1,393 \times 10^{-3}$. 16.73. ◀ Урав-
 нение касательной к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

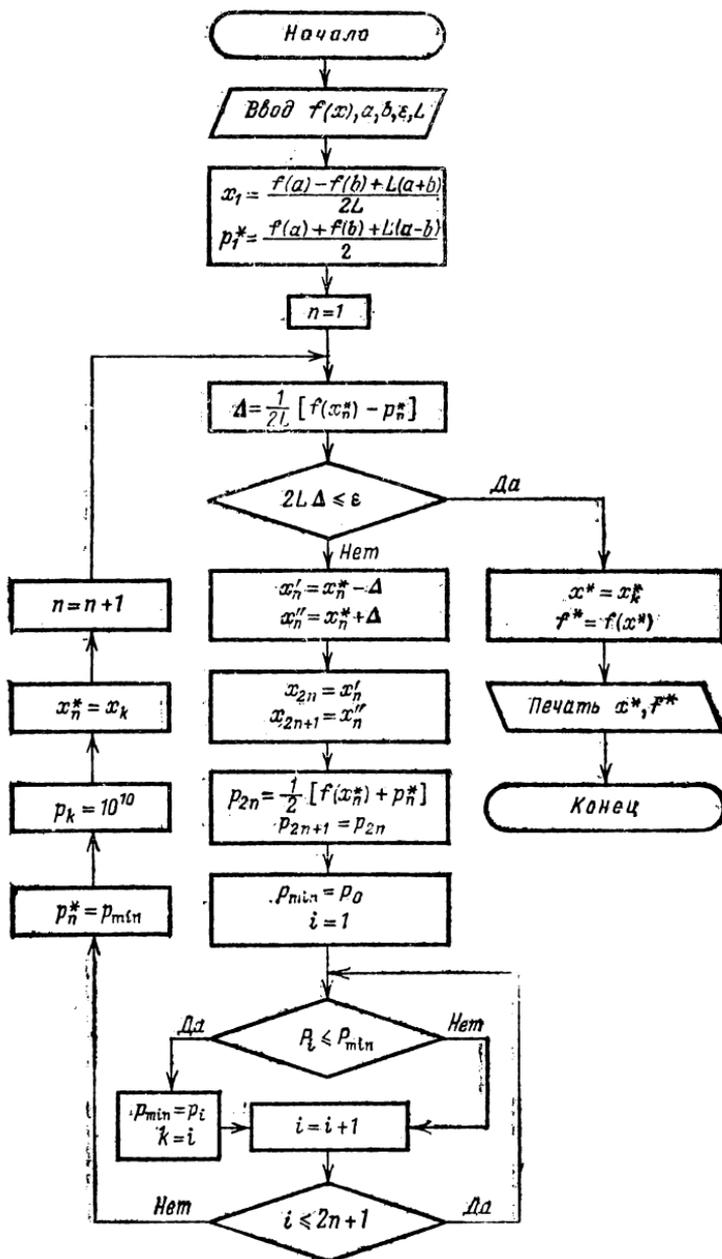


Рис. 232

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. По формуле конечных приращений $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, где ξ заключено между x и x_0 . Поэтому $f(x) - y = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0) \geq 0$, так как $f'(x)$ не убывает. ►
 16.75. См. рис. 233. 16.76. $x^* = 1$, $f^* = 1$. 16.77. $x^* = 0,4502$, $f^* = -0,2325$. 16.78. $x^* = -0,3855$, $f^* = 0,7852$. 16.79. $x^* = 0$, $f^* = -1$.

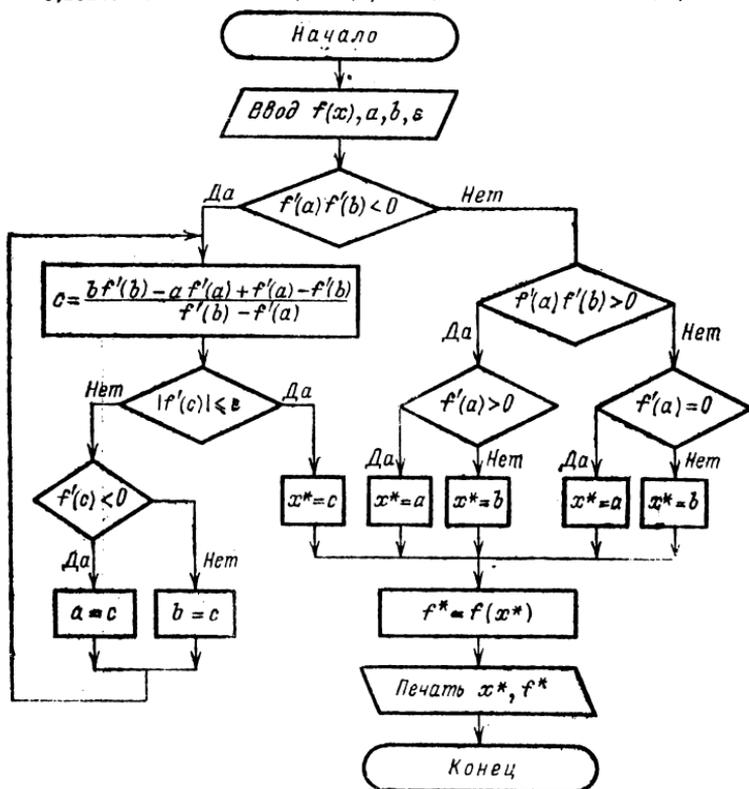


Рис. 233

16.80. $x^* = 0,6501$, $f^* = 1,6951$. 16.81. $x^* = 0,7035$, $f^* = 3,4422$.
 16.82. $x^* = 3,8708$, $f^* = 1,3702$. 16.83. $x^* = 0,5283$, $f^* = 0,6675$.
 16.84. $x^* = 0,351734$, $f^* = 0,827184$. 16.85. $x^* = -0,693147$, $f^* = 0,6137064$.
 16.86. $x^* = -0,835430$, $f^* = -0,879073$. 16.87. $x^* = 0,738835$, $f^* = 0,284712$. 16.88. $x^* = -0,175203$, $f^* = 1,908524$.
 16.89. $x^* = -0,443931$, $f^* = 0,765751$.

16.91. Да. 16.92. Да. 16.93. Да. 16.94. Нет. 16.95. Да. 16.96. Да. 16.97. Нет. 16.98. Да. 16.99. Да. 16.100. Нет. 16.107. $U = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$. 16.108. $U = \{(x_1, x_2) \mid (2k-1)\pi < x_1 + x_2 < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. 16.109. $U = \mathbb{C}$. 16.110. $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 < -\sqrt[3]{2}\}$. 16.111. $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$. 16.112. $a \in (-2; 2)$.

16.113. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

16.114. $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16.115. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

16.116. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

16.117. а) $x^{(1)} = (0,0611; -0,1389)$, $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$; б) $x^{(1)} = (-1,4881; -2,0181)$, $f(x^{(1)}) = f(x^{(0)})$; в) $x^{(1)} = (-3,6945; -4,6945)$, $f(x^{(1)}) > f(x^{(0)})$. 16.118. а) $x^{(1)} = (-0,1; -0,1)$, $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$; б) $x^{(1)} = (-0,5; -0,5)$, $f(x^{(1)}) = f(x^{(0)})$; в) $x^{(1)} = (-1, -1)$, $f(x^{(1)}) > f(x^{(0)})$. 16.119. а) $x^{(1)} = (-0,1; 0,8; -0,1)$, $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$; б) $x^{(1)} = (-0,638; -0,276; -0,638)$, $f(x^{(1)}) = f(x^{(0)})$; в) $x^{(1)} = (-10, -19,$

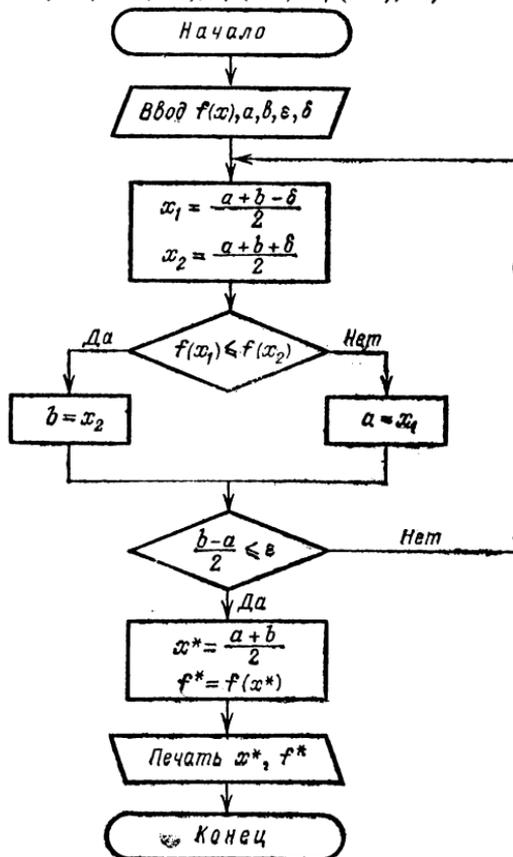


Рис. 234

$-10)$, $f(x^{(1)}) > f(x^{(0)})$. 16.120. а) $x^{(1)} = (-0,1437; 0,4; 0,4)$, $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$; б) $x^{(1)} = (-1,4323; -0,2761; -0,2761)$, $f(x^{(1)}) = f(x^{(0)})$; в) $x^{(1)} = (-10,4366; -5; -5)$, $f(x^{(1)}) > f(x^{(0)})$. 16.121. См. рис. 234. 16.122. ● Воспользоваться необходимым условием минимума функции $\Phi_k(\alpha) = f[x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})]$ в точке α_k : $\Phi'_k(\alpha_k) = 0$. 16.123. См.

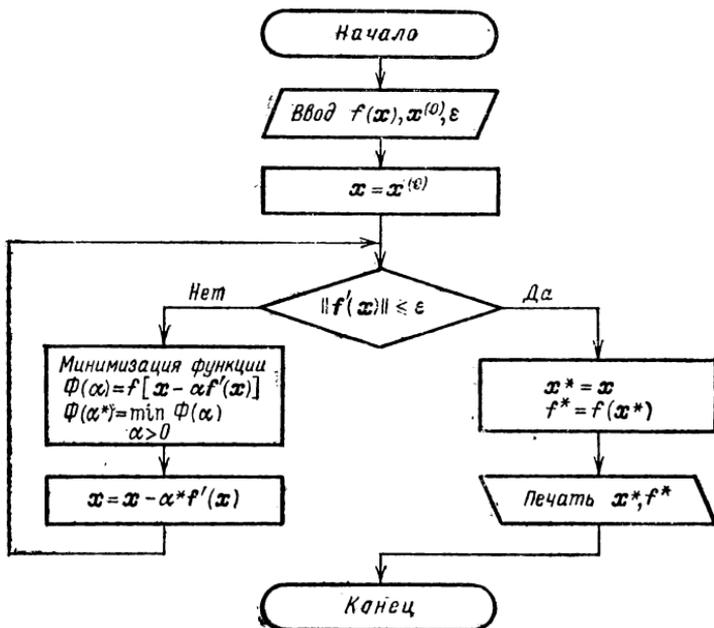


Рис. 235

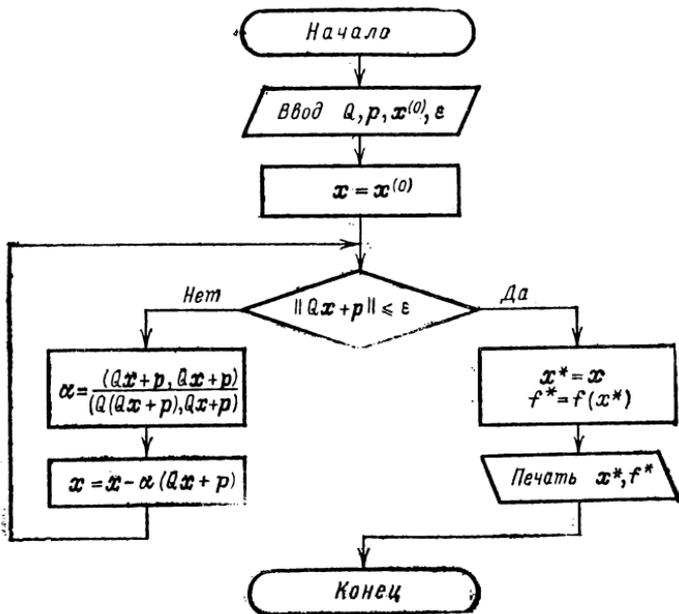


Рис. 236

рис. 235. 16.124. См. рис. 236. 16.125. $\alpha_0 = 0,113$. 16.126. $\alpha_0 = 0,25$.
 16.127. $\alpha_0 = 0,236$. 16.128. $\alpha_0 = 0,119$. 16.129. $x^* = (-0,2206; 1,0441)$,
 $f^* = -5,3309$. 16.130. $x^* = (0,3333; 0)$, $f^* = 0,3333$. 16.131. $x^* =$
 $= (0,3846; -0,1923)$, $f^* = -0,4877$. 16.132. $x^* = (0,1667; 0,1667)$,
 $f^* = -0,1667$. 16.133. $x^* = (2,55; -0,85)$, $f^* = -21,675$. 16.134. $x^* =$
 $= (0; 0,5)$, $f^* = -0,75$. 16.135. $x^* = (0,9677; -6,4516)$, $f^* = -32,2581$.
 16.136. $x^* = (-0,5; 0)$, $f^* = -0,25$. 16.137. $x^* = (-0,1053; 0,0789$;
 $-0,0639)$, $f^* = -0,1207$. 16.138. $x^* = (-0,1538; 0,1154; 0,3077)$, $f^* =$
 $= -0,5385$. 16.139. $x^* = (-2,6028; -0,0198; 0,1050)$, $f^* = -6,4658$.
 16.140. $x^* = (-1,5865; 0,3221; 0,2981)$, $f^* = -5,8029$. 16.141. $x^* =$
 $= (-0,1112; -0,0292; 0,0308)$, $f^* = -0,4435$. 16.142. $x^* = (-0,5236$;
 $0,2028; -0,1698)$, $f^* = -1,3939$. 16.143. $x^* = (-1,2867; 0,2317; -0,2569)$,
 $f^* = -4,6319$. 16.144. $x^* = (-0,0732; -0,2195; 0,6830)$, $f^* = -0,4146$.
 16.146. См. рис. 237. 16.149. $x^* = (0,2310; -0,3160)$, $f^* = 0,5565$.

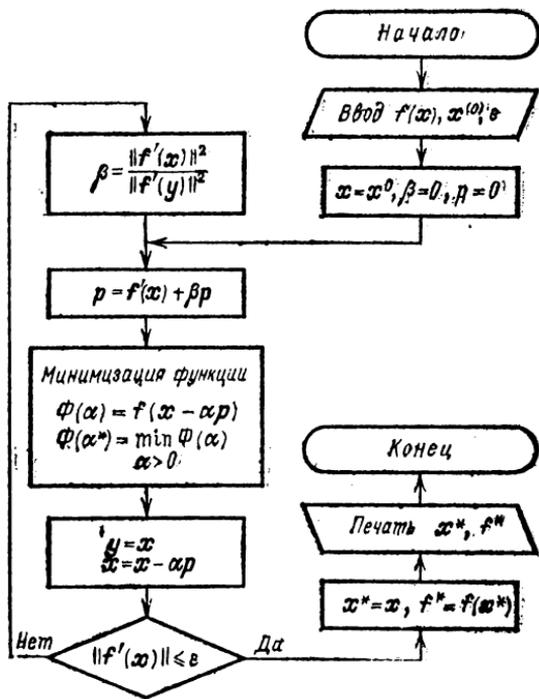


Рис. 237

16.150. $x^* = (-0,7071; 0,7074)$, $f^* = -0,7071$. 16.151. $x^* = (-0,7592$;
 $-0,4053)$, $f^* = -1,4428$. 16.152. $x^* = (0; 0)$, $f^* = 1$. 16.153. $x^* =$
 $= (0,2420; 0,1829)$, $f^* = 1,7814$. 16.154. $x^* = (-0,1918; -0,9596)$,
 $f^* = -2,3843$. 16.155. $x^* = (0,7358; -0,8580)$, $f^* = -1,4001$.
 16.156. $x^* = (0,2400; -0,3267)$, $f^* = -0,4504$. 16.157. $x^* = (0; 0)$,
 $f^* = 0,6931$. 16.158. $x^* = (-0,6132; -0,6633)$, $f^* = -1,805$. 16.159. $x^* =$
 $= (-0,3015; -0,6031)$, $f^* = 3,3166$. 16.160. $x^* = (-0,2990; 1,4952)$,
 $f^* = -4,7290$. 16.161. $x^* = (1,2248; 0; 1,2248)$, $f^* = 2,4495$. 16.162. $x^* =$
 $= (0; 0,1555; -0,4119)$, $f^* = 0,6949$. 16.163. $x^* = (-0,3016; 0,6030; 0)$,

$f^* = 3,3166$. 16.164. $x^* = (-0,4446; -0,5778; 0,0010)$, $f^* = -0,7668$.
 16.165. $x^* = (0; 0)$, $f^* = 1$. 16.166. $x^* = (0', 0^0, 0)$, $f^* = 2,3863$.
 16.167. $x^* = (-0,1907; -0,0954; 0,9535)$, $f^* = -2,4321$. 16.168. $x^* =$
 $= (-0,6300; 0; -1,5811)$, $f^* = 1,1087$. 16.169. $x^* = (0,2300; 0,4600;$
 $-0,1150)$, $f^* = -0,4131$. 16.170. $x^* = (1,0610; 0,3539; 0,0011)$, $f^* =$
 $= 2,8284$. 16.171. $x^* = (-0,4041; 0,2235; 0)$, $f^* = 0,6600$. 16.172. $x^* =$
 $= (-0,1912; -0,4081; -0,3602)$, $f^* = 3,5056$. 16.173. $x^* = (-0,2136;$
 $-0,3328; 0)$, $f^* = 1,4461$. 16.174. $x^* = (-0,1154; -1,1544; 0,3463)$,
 $f^* = -8,3670$. 16.177. См. рис. 238. 16.178. См. рис. 239.

16.182. $f(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$,
 $0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 2$,
 $0,1x_1 + 0,3x_2 \geq 3$,
 $0,8x_1 + 0,6x_2 \geq 7,2$,
 $0,8x_1 + 0,6x_2 \leq 12,8$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.

16.183. $f(x) = -3x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$,
 $10x_1 + 70x_2 \leq 570$,
 $20x_1 + 50x_2 \leq 420$,
 $300x_1 + 400x_2 \leq 5600$,
 $200x_1 + 100x_2 \leq 3400$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.

● Максимуму прибыли $3x_1 + 8x_2$ соответствует минимуму противоположной величины.

16.184. $f(x) = -626x_1 - 656x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 \leq 12$,
 $x_1 \leq 8$,
 $5x_1 + 8x_2 \leq 81$,
 $6x_1 + 4x_2 \leq 70$,
 $3x_1 + x_2 \leq 26$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.

16.185. $f(x) = -C_1x_1 - C_2x_2 \rightarrow \min$,
 $0,4x_1 - 0,6x_2 \geq 0$,
 $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.

16.186. $f(x) = x_1 \sum_{i=1}^8 C_i + x_2 \sum_{i=2}^9 C_i + x_3 \sum_{i=3}^{10} C_i - \sum_{i=1}^{10} C_i b_i \rightarrow \min$,

$x_1 \geq b_1$,
 $x_1 + x_2 \geq b_2$,
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq \max_{3 \leq i \leq 8} b_i$,

$x_2 + x_3 \geq b_9$,
 $x_3 \geq b_{10}$,
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.

16.187. $f(x) = -C_1x_1 - C_2x_2 \rightarrow \min$,
 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$,
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$,
 $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3$,
 $x_1, x_2 \geq 0$.

16.188. $x^* = (1; 1)$; $f^* = -1$. 16.189. $x^* = (2/3; 2/3)$; $f^* = -8/3$.
 16.190. Нет решений. 16.191. Бесконечное множество решений:
 $x^* = (\alpha; 1 - \alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]$; $f^* = 1$. 16.192. $x^* = (1; 2)$; $f^* = -9$.
 16.193. $x^* = (2; 2)$; $f^* = -4$. 16.194. Нет решений. 16.195. Бесконеч-
 ное множество решений: $x^* = (? - \alpha; \alpha + 1)$, где $\alpha \in [0; 1]$; $f^* = -3$.
 16.196. $x^* = (2; 28/3)$. 16.197. $x^* = (1; 8)$. 16.198. $x^* = (5; 7)$.
 16.199. $x^* = (146, 25; 97, 5)$. 16.200. а) $x^* = (20; 50)$; б) $x^* = (30; 40)$.
 16.201. $x^* = (4; 1; 7; 0; 0)$; $f^* = -3$. 16.202. $x^* = (5; 6; 5; 0; 0; 13)$;

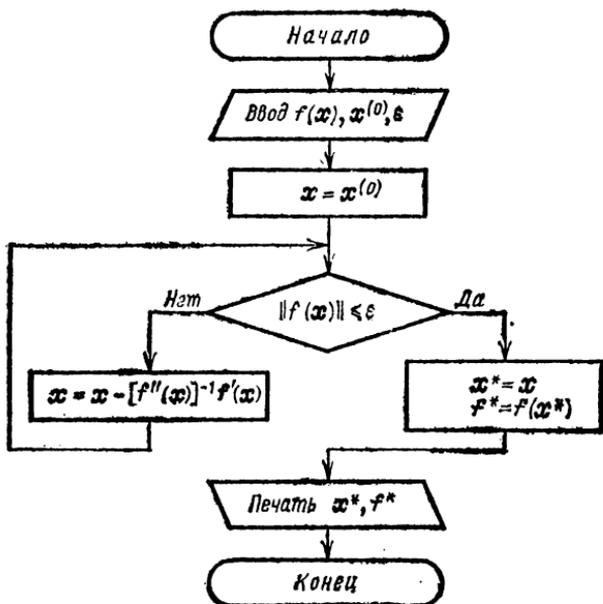


Рис. 238

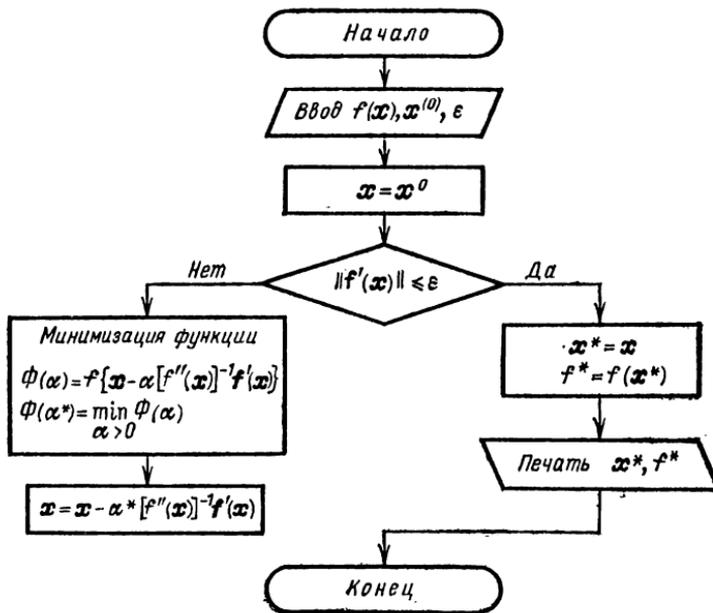


Рис. 239

$f^* = 2$. 16.203. $x^* = (10/3; 7/3; 5/3; 0; 0)$; $f^* = 29/3$. 16.204. $x^* = (0; 2; 1; 0)$; $f^* = 3$. 16.205. Бесконечное множество решений: $x^* = (6 - 3\alpha; 5 + \alpha; 6 - 6\alpha; 0; 3\alpha; 3 + 4\alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]$; $f^* = -21$. 16.206. $x^* = (1; 2; 0; 3; 14; 0)$; $f^* = -4$. 16.207. $x^* = (1; 0; 2; 0; 2)$; $f^* = -17$. 16.208. Нет решений. 16.209. $x^* = (3; 0; 2; 0; 1)$; $f^* = 6$. 16.210. Нет решений. 16.211. $x^* = (9/2; 0; 0; 3/2; 2)$; $f^* = -25/2$. 16.212. $x^* = (0; 0; 11/10; 12/5; 3/5)$; $f^* = -5/3$. 16.213. $x^* = (2; 0; 1; 0; 1)$; $f^* = -9$. 16.214. $x^* = (5; 2; 0; 0)$; $f^* = -46$. 16.215. $x^* = (1/2; 0; 6; 3/2; 0)$; $f^* = -6.5$. 16.216. $x^* = (0; 1; 3; 1)$; $f^* = 7$. 16.217. $x^* = (1; 0; 3; 3)$; $f^* = 2$. 16.218. $x^* = (1/5; 27/5; 0; 7/5; 0)$; $f^* = -17/5$. 16.219. Нет решений. 16.220. Нет решений. 16.221. $x^* = (0; 2; 4; 1; 0)$; $f^* = -2$. 16.222. $x^* = (3; 0; 0; 4/5)$; $f^* = -36$. 16.223. а) $x^* = (0,9; 8; 0,45; 0)$; б) $x^* = (4,71; 0; 6,82; 0)$. 16.224. а) $x^* = (600; 0; 0)$; б) $x^* = (0; 700; 0)$. 16.225. $x^* = (15; 5; 5)$. 16.227. $x^* = (13; 3)$; $f^* = -16$. 16.228. $x^* = (1; 2)$; $f^* = -31$. 16.229. $x^* = (2; 1)$; $f^* = -11$. 16.230. Два решения: $x^* = (2; 0)$, $x^* = (1; 1)$; $f^* = -2$. 16.231. $x^* = (0; 0; 1; 2)$; $f^* = -1$. 16.232. $x^* = (1; 9; 0; 5)$; $f^* = -9$. 16.233. $x^* = (3; 6)$. 16.234. $x^* = (3; 9)$. 16.235. $x^* = (0; 4; 0; 1; 0)$; $f^* = 1$. 16.236. $x^* = (0; 0; 11; 3; 1)$; $f^* = -24$. 16.237. $x^* = (3; 2; 2; 1)$; $f^* = -2$. 16.238. $x^* = (0; 3; 2; 0)$ или $x^* = (1; 2; 1)$ или $x^* = (2; 1; 0; 2)$; $f^* = -3$. 16.239. $x^* = (1; 3; 0; 0; 1)$; $f^* = 8$. 16.240. $x^* = (2; 1; 1)$; $f^* = -11$. 16.241. $x^* = (2; 1; 2; 1)$ или $x^* = (1; 2; 1; 2)$ или $x^* = (3; 0; 3; 0)$ или $x^* = (0; 3; 0; 3)$; $f^* = -3$. 16.242. $x^* = (1; 3; 5; 3)$; $f^* = -5$. 16.243. $x^* = (1; 2; 3)$; $f^* = 10$. 16.244. $x^* = (6; 1; 4)$; $f^* = -17$. 16.245. $x^* = (6; 18)$; $f^* = -78$. 16.246. $x^* = (0; 1; 1)$; $f^* = 3$. 16.247. $x^* = (0; 0; 7)$; $f^* = -21$. 16.248. $x_{11} = 76$, $x_{12} = 24$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 200$. 16.249. $x^* = (7; 7)$. 16.250. а) $x^* = (146; 97)$; б) $x^* = (146; 96)$. 16.251. $x^* = (3/8; 9)$; $f^* = -717/8$. 16.252. $x^* = (1; 3/2)$; $f^* = -5/2$. 16.253. $x^* = (3; 7/2; 0; 1/2; 3/2)$; $f^* = -17$. 16.254. $x^* = (1; 0; 1/6; 2/3)$; $f^* = -65/6$. 16.255. $x^* = (3; 9)$. 16.256. а) $x^* = (146; 292/3)$; б) $x^* = (293/2; 97)$. 16.258. $x^* = (6; 0)$; $f^* = -2$. 16.259. $x^* = (6; 14; 0)$; $f^* = -8/29$. 16.260. $x^* = (0; 0; 2; 4)$; $f^* = -2/3$. 16.261. $x^* = (3/5; 11/5; 0; 1/5)$; $f^* = 5/6$. 16.262. $x^* = (5/2; 11/2; 0; 27; 0)$; $f^* = -21/38$. 16.263. $x^* = (0; 0; 6; 9; 10)$; $f^* = -3$. 16.264. $x^* = (12/5; 23/5; 46/5; 29/5)$; $f^* = -1/91$. 16.265. $x^* = (5; 5; 10; 0; 0; 16)$; $f^* = -4/13$. 16.266. Нет решений. 16.267. $x^* = (2; 3)$; $f^* = -52$. 16.268. $x^* = (5; 2)$; $f^* = -131$. 16.269. $x^* = (2/3; 14/9)$; $f^* = -22/9$. 16.270. $x^* = (2; 4)$; $f^* = -80$. 16.271. $x^* = (33/13; 4/13; 0)$; $f^* = -273/13$. 16.272. $x^* = (1/2; 1; 9/2; 8)$; $f^* = -7/4$. 16.273. $x^* = (0; 0; 1)$; $f^* = -1$. 16.274. $x^* = (0; 0; 0)$; $f^* = 0$. 16.275. $x^* = (0; 4; 4)$; $f^* = 12$. 16.276. $x^* = (0; 0; 3)$; $f^* = -6$. 16.277. $x^* = (2; 3)$; $f^* = -13$. 16.278. $x^* = (8; 28/5)$; $f^* = -154,24$. 16.279. $x^* = (15/2; 6)$; $f^* = 45$. 16.280. $x^* = (10; 4)$; $f^* = -344$. 16.281. $x^* = (29/5; 22/5)$; $f^* = -108,44$. 16.282. $x^* = (7; 8)$; $f^* = -173$. 16.283. $x^* = (10; 5)$; $f^* = 52$. 16.284. $x^* = (1; 2)$; $f^* = -3$. 16.285. $x^* = (2; 4; 8; 16)$; $f^* = -20$. 16.286. $x^* = (0; 10; 0; 30)$; $f^* = -10$. 16.287. $x^* = (3; 8; 13; 4; 14)$; $f^* = -137$. 16.288. $x^* = (0; 0; 0)$; $f^* = 0$. 16.289. $x^* = (0; 1; 0)$; $f^* = -1$. 16.290. $x^* = (1; 0; 0)$; $f^* = -2$. 16.291. $x^* = (-2,683; -1,342)$; $f^* = -4,025$. 16.292. $x^* = (3,578; 1,789)$; $f^* = -37,667$. 16.293. $x^* = (0,447; 0,894)$; $f^* = -1,4$. 16.294. $x^* = (0,791; 1,258)$; $f^* = -2,214$. 16.295. $x^* = (0; 0)$; $f^* = 0$. 16.296. $x^* = (1,005; 0,099)$; $f^* = 9,95$. 16.297. $x^* = (0,618; 0,618)$; $f^* = 4,090$. 16.298. $x^* = (1; 0,5)$; $f^* = -1,75$. 16.299. $z_U = \max(0, z_j)$, $j = 1, \dots, n$.

$$16.300. z_{Uj} = \begin{cases} a_j, & \text{если } z_j < a_j, \\ b_j, & \text{если } z_j > b_j, \\ z_j, & \text{если } a_j \leq z_j \leq b_j. \end{cases} \quad j=1, \dots, n,$$

$$16.301. z_U = \begin{cases} z, & \text{если } z \in U, \\ x^{(0)} + R_0(z - x^{(0)}) / \|z - x^{(0)}\|, & \text{если } z \notin U. \end{cases}$$

$$16.302. z_U = z - [(a, z) - b] a / \|a\|. \quad 16.303. z_U = z + \max\{0, b - (a, z)\} a / \|a\|. \quad 16.304. x^* = (0; 0), f^* = 0. \quad 16.305. x^* = (3; 0), f^* = -81. \quad 16.306. x^* = (4; 2), f^* = -68. \quad 16.307. x^* = (5; 1), f^* = 11,29. \quad 16.308. x^* = (3,1056; 1,5528), f^* = 7,764. \quad 16.309. x^* = (2,1213; 1,8787), f^* = -8,9411. \quad 16.310. x^* = (1; 1; 1), f^* = 6. \quad 16.311. x^* = (0,8; 1; 0,4), f^* = -8,2. \quad 16.312. x^* = (0,8; 0,4), f^* = 104,987. \quad 16.313. x^* = (1; 0,5), f^* = 0,5. \quad 16.314. x^* = (1,5; 0,5), f^* = -8,5. \quad 16.315. x^* = (2; 1), f^* = -16. \quad 16.316. x^* = (1; 2), f^* = -3. \quad 16.317. x^* = (3; 1), f^* = 2,3026. \quad 16.318. x^* = (-0,9487; 0,3162), f^* = -5,3246. \quad 16.319. x^* = (1,7071; 0,2929), f^* = -9,4858. \quad 16.320. x^* = (-2,111; 0,8944), f^* = 1,7603. \quad 16.321. x^* = (1,6; 0,8), f^* = -3,8. \quad 16.322. x^* = (2; 2), f^* = -2,2082. \quad 16.323. x^* = (2; 3), f^* = -117. \quad 16.324. x^* = (5; 2), f^* = -51. \quad 16.325. x^* = (33/13; 4/13; 0), f^* = -7,385. \quad 16.326. x^* = (2; 4), f^* = -30. \quad 16.327. x^* = (2/3; 14/9), f^* = -2,444. \quad 16.328. x^* = (0; 1; 1), f^* = -1. \quad 16.329. x^* = (1,258; 0,791), f^* = -2,214. \quad 16.330. x^* = (2,684; 1,342), f^* = -11,125. \quad 16.331. x^* = (0,5; 1), f^* = -1,75. \quad 16.332. x^* = (0,618; 0,618), f^* = 4,090. \quad 16.333. x^* = (1,8388; 0,7862), f^* = -2,7933. \quad 16.334. x^* = (0,6667; 0,6667), f^* = -8,1111. \quad 16.335. x^* = (0,791; 1,258), f^* = -0,214. \quad 16.336. x^* = (2,530; 1,265), f^* = -14,299. \quad 16.337. x^* = (1; 0,5), f^* = -0,75. \quad 16.338. x^* = (0,8284; 0,4142), f^* = -2,8995. \quad 16.339. x^* = (3; 4), f^* = 40.$$

$$16.340. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(u^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \in [0; S], \quad k=1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \in [0; S], \quad k=1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = 0, \quad x^{(N)} = S,$$

где $u^{(k)}$ — средства, выделенные k -му предприятию, $x^{(k)}$ — сумма средств, выделенных предприятиям с номерами от 1 до k .

16.341. См. ответ к задаче 16.340, где $u^{(k)}$ — средства, выделенные предприятию в k -м году, а $x^{(k)}$ — средства, выделенные ему за первые k лет, $k=1, \dots, N$.

$$16.342. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x_1^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} \cdot u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N,$$

$$x_1^{(k)} \in [0; S], \quad k=1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \in [0; S], \quad k=1, \dots, N,$$

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 1, \quad x_1^{(N)} = S,$$

где $x_1^{(k)} = \sum_{i=1}^k u^{(i)}$, $x_2^{(k)} = \prod_{i=1}^k u^{(i)}$; $J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) = 0$, $k=1, \dots, N-1$,

$$J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) = x_2^{(N-1)} \cdot u^{(N)}.$$

$$16.343. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} - u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \geq 0, \quad k=1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \geq 0, \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(0)} = a, \quad x^{(N)} = 0,$$

где $u^{(k)}$ — количество семян, проданных в k -м году, $x^{(k)}$ — их количество, оставленное в совхозе к концу k -го года, $k=1, \dots, N$.

16.344. В ответе задачи 16.343 заменить конечное условие $x^{(N)} = 0$ на условие $x^{(N)} \geq b$.

$$16.345. \quad J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N [J_1(u^{(k)}) + J_2(x^{(k-1)} - u^{(k)})] \rightarrow \max, \\ x^{(k)} = f_1(u^{(k)}) + f_2(x^{(k-1)} - u^{(k)}), \quad k=1, \dots, N, \\ u^{(k)} \in [0; x^{(k-1)}], \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(0)} = S, \quad x^{(N)} \geq 0,$$

где $x^{(k-1)}$ — средства, перераспределяемые в начале k -го года, $u^{(k)}$ — средства, выделяемые первому предприятию в k -м году.

$$16.346. \quad J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N (\beta_k u_2^{(k)} - \alpha_k u_1^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u_1^{(k)} - u_2^{(k)}, \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(k)} \in [0; P], \quad k=1, \dots, N-1, \\ u_1^{(k)} \in [0; P - x^{(k-1)}], \quad u_2^{(k)} \in [0; x^{(k-1)} + u_1^{(k)}], \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(0)} = a, \quad x^{(N)} \in [0; P],$$

где $x^{(k-1)}$ — запасы продукции в начале k -го месяца, $u_1^{(k)}$ и $u_2^{(k)}$ — количества продукции, принятой и проданной в начале k -го месяца соответственно.

16.347. В ответе задачи 16.346 заменить ограничения на управления следующими ограничениями: $u_2^{(k)} \in [0; x^{(k-1)}]$, $u_1^{(k)} \in [0; P - x^{(k-1)} + u_2^{(k)}]$, $k=1, \dots, N$.

$$16.348. \quad J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - a_k u^{(k)}, \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(k)} \geq 0, \quad k=1, \dots, N-1, \\ u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(0)} = b, \quad x^{(N)} \geq 0,$$

где $x^{(k)} = b - \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}$.

$$16.349. \quad J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - u^{(k)} \alpha^{(k)}, \quad k=1, \dots, N, \\ x_i^{(k)} \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, N-1, \\ u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k=1, \dots, N, \\ x^{(0)} = b = (b_1, \dots, b_m), \quad x_i^{(N)} \geq 0, \quad i=1, \dots, m,$$

где $x^{(k)}$ и $\alpha^{(k)}$ — m -мерные векторы с компонентами $x_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} u^{(j)}$ и $a_i^{(k)} = a_{ik}$ соответственно, $k=1, \dots, N$.

16.350. $\hat{u}^* = \{1, 2, 1, 1\}$, $J^* = 12$. 16.351. Три решения: $\hat{u}^* = \{0, 2, 1, 1, 1\}$, $\hat{u}^* = \{1, 1, 1, 1, 1\}$, $\hat{u}^* = \{0, 1, 1, 1, 2\}$, $J^* = 13,5$. 16.352. $\hat{u}^* = \{25, 25, 25, 25\}$, $J^* = 44$. 16.353. $\hat{u}^* = \{100, 100, 200, 100\}$, $J^* = 226$. 16.354. а) $\hat{u}^* = \{100, 100, 200, 0\}$, $J^* = 186$; б) $\hat{u}^* = \{100, 100, 300, 100\}$. ● Использовать результаты условной оп-

тимизации, полученные при решении задачи 16.353. 16.355. Семь решений: $\hat{u}^* = \{100, 0, 200, 100\}$, $\hat{u}^* = \{100, 40, 180, 80\}$, $\hat{u}^* = \{120, 0, 200, 80\}$, $\hat{u}^* = \{120, 0, 180, 100\}$, $\hat{u}^* = \{120, 20, 180, 80\}$, $\hat{u}^* = \{100, 20, 200, 80\}$, $\hat{u}^* = \{100, 20, 180, 100\}$; $J^* = 620$. 16.356. а) $\hat{u}^* = \{100, 100, 100\}$, $J^* = 300$; б) $\hat{u}^* = \{114,3; 114,3; 71,4\}$, $J^* = 48,6$. 16.357. $\hat{u}^* = \{0, 150, 0\}$, $J^* = 27$. 16.358. $\hat{u}^* = \{3, 3, 3\}$, $J^* = 27$. 16.359. $\hat{u}^* = \{S/N, S/N, \dots, S/N\}$, $J^* = (S/N)^N$. 16.360. $\hat{u}^* = \{0, 0, \dots, 0, aAN\}$, $J^* = caAN$. 16.361. $\hat{u}^* = \{19,2; 3,84; 0,768\}$, $J^* = 38,402$. 16.362. $\hat{u}^* = \{0, 0, \dots, 0, aAN - b\}$, $J^* = caAN - cb$. 16.363. $\hat{u}^* = \{19,01; 3,802; 7,604\}$, $J^* = 37,638$. 16.364. $\hat{u}_1^* = \{200, 160, 128, 0\}$, $\hat{u}_2^* = \{0; 0; 0; 102,4\}$, $J^* = 187,36$, где \hat{u}_1^* и \hat{u}_2^* — средства, распределенные первому и второму предприятиям соответственно. 16.365. $\hat{u}_1^* = \{40; 64; 25,6\}$, $\hat{u}_2^* = \{80, 0, 0\}$, $J^* = 99,84$. 16.366. $\hat{u}_1^* = \{10, 0, 10, 0\}$, $\hat{u}_2^* = \{0, 10, 10, 0\}$, $J^* = 90$. 16.367. $\hat{u}_1^* = \{7, 0, 12, 4\}$, $\hat{u}_2^* = \{0, 12, 12, 0\}$, $J^* = 111$. 16.368. $u^* = (2, 1)$, $F^* = -11$. 16.369. Два решения: $u^* = \{2, 0\}$, $u^* = \{1, 1\}$; $F^* = -2$. 16.370. $u^* = \{1, 2\}$, $F^* = -31$. 16.371. $u^* = \{0, 0, 7\}$, $F^* = -21$. 16.372. $\hat{u}^* = \{2, 1, 1\}$, $J^* = 115$. 16.373. $\hat{u}^* = \{10, 1, 1\}$, $J^* = 5760$. 16.374. Четыре решения: $\hat{u}^* = \{2, 3, 4\}$, $\hat{u}^* = \{3, 3, 3\}$, $\hat{u}^* = \{1, 4, 4\}$, $\hat{u}^* = \{2, 4, 3\}$; $J^* = 72$. 16.375. $y = \frac{1}{12}(x^3 - x)$. 16.376. Бесконечное множество решений: $y = (C + x) \sin x$, $C \in \mathbb{R}$. 16.377. $y = e/x - \ln x$. 16.378. $y = x^3 - x$. 16.379. Нет решений. 16.380. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - \frac{x}{2}$. 16.381. $y = \operatorname{sh} 2x - \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x$. 16.382. $y = \frac{1}{2} x e^x - \operatorname{sh} x$. 16.383. $y = e^x - e^{-3x}$. 16.384. $y = \frac{y_1 - \sin b}{\operatorname{sh} b} \operatorname{sh} x + \sin x$. 16.386. Нет решений. 16.387. $y = -x$. 16.388. $y = x$. 16.389. $y = \frac{1}{2}(1 + x)$. 16.390. $y = (2x/3)^{3/2}$. 16.391. $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. 16.392. $y = x^{1-n}/(1-n)$. 16.393. $y = \frac{1}{4}(x - x^2)$. 16.394. Два решения: $y = (x+1)^{2/3}$ и $y = (3x-1)^{2/3}$. 16.395. $y = \cos x + \sin x - 1$. 16.396. $y = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A$. 16.397. $y = \sqrt{1-x^2} + 1$. 16.398. $y = \operatorname{ch}\left(x - \frac{1}{2}\right) / \operatorname{ch} \frac{1}{2}$. 16.399. ◀ Направим ось Oy вертикально вниз. Скорость материальной точки $ds/dt = \sqrt{2gy}$, поэтому время ее движения из точки M_0 в точку M_1 $t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$. Так как подынтегральная функция не зависит явно от x , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$ или $y(1+y'^2) = C_1$. Введем параметр t , полагая $y' = \operatorname{ctg} t$. Тогда $y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$; $dx = \frac{dy}{y'}$

$= C_1(1 - \cos 2t) dt$, $x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$. Из условия прохождения кривой $y(x)$ через точку $M_0(0, 0)$ находим: $C_2 = 0$. Обозначив t через t_1 , получим уравнения семейства циклоид: $x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1)$, $y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1)$. Таким образом, искомая кривая является циклоидой. Постоянная C_1 может быть найдена из условия ее прохождения через точку $M_1(x_1, y_1)$. 16.400. $y = x(x-1)^5$. 16.401. $y = x^4$. 16.402. $y = \frac{1}{10}(x^5 + 3x^3 - 2x^2)$. 16.403. $y = x + \cos x$. 16.404. $y = 0$. 16.405. $y = xe^x$. 16.406. $y = \frac{1}{x+1}$. 16.407. $y = \cos x$. 16.408. $y = x^4$. 16.409. $y = \operatorname{sh} x$. 16.410. $y = x - \sin x$. 16.411. $y = \operatorname{sh} x - \sin x$. 16.412. $y_1 = \sin x$, $y_2 = -\sin x$. 16.413. $y_1 = \operatorname{sh} x$, $y_2 = -\operatorname{sh} x$. 16.414. $y_1 = \sin x$, $y_2 = -\sin x$. 16.415. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. 16.416. $y_1 = x^4$, $y_2 = x^3$. 16.417. $y_1 = \ln x + 1$, $y_2 = 0$. 16.418. Бесконечное множество решений: $y_1 = -\frac{x}{2} \sin x - \cos x - C \sin x + x$, $y_2 = -\frac{x}{2} \sin x + C \sin x$, $C \in \mathbb{R}$. 16.419. $y_1 = \frac{x^2}{2} + 1$, $y_2 = 1$. 16.420. $y = -2x$, $x_1 = 1$. 16.421. Два решения: $y = \pm 4x$, $x_1 = \frac{1}{2}$. 16.422. $y = x/\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt[6]{2}$. 16.423. $y = -x + 3/4$, $x_0 = 1/2$, $x_1 = 23/8$. 16.424. $y = \frac{1}{4}x(1-x)$. 16.425. $y = (x^2 - 1)/4$. 16.426. Бесконечное множество решений: $y = C \sin x$, $C \in \mathbb{R}$. 16.427. Нет решений. 16.428. $y = \sqrt{2 - (x-1)^2}$, $x_1 = 2$. 16.429. $y = \left(x - \frac{\pi}{4} - 1\right) \sin x$. 16.430. $y = 0$. 16.431. $y = \operatorname{sh} x$. 16.432. $y = e^x + \sin x$. 16.433. Два решения: $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \sqrt[6]{\frac{4}{3}x^2}$. 16.434. $y = \ln x + 1$. 16.435. $y = -e^x/(e^3 + 1)$. 16.436. $y = 2 \ln(x+1)$. 16.437. $y = \sin x + \cos x$. 16.438. $y_1 = \cos x + \sin x$, $y_2 = \cos x - \sin x$. 16.439. $y_1 = (x-2)e^{-x}$, $y_2 = (1-x)e^{-x}$. 16.440. $y_1 = 2-x$, $y_2 = x+1$. 16.441. $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = x^2 - x$. 16.442. Нет решения. 16.443. $y_1 = \frac{x}{2} \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$. 16.444. $y_1 = x^3 + \cos x + \sin x$, $y_2 = x^3 - \cos x - \sin x$. 16.445. Бесконечное множество решений: $y_1 = \psi(x)$, $y_2 = x - \psi(x) + y_2^{(0)} + y_1^{(0)} - a$, где $\psi(x) \in C_1[a; b]$, если $y_2^{(1)} - y_1^{(1)} - (y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) = b - a$; нет решений при $y_2^{(1)} - y_1^{(1)} - (y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) \neq b - a$. 16.446. $y = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. 16.447. $y = 60x^3 - 96x^2 + 36x$. 16.448. $y = (x - 2 \sin x)/\pi$. 16.449. Два решения: $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$. 16.450. $y = xe^{-x}$. 16.451. $y_1 = -6x^2 + 6x$, $y_2 = 3x^2 - 2x$. 16.452. Два решения: $y_1 = 3x^2 - 2x$, $y_2 = 3x^2 - 6x$ и $y_1 = -3x^2 + 4x$, $y_2 = -3x^3$. 16.453. $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. 16.454. Бесконечное множество решений: $y_1 = 2 \sin k\pi x$, $y_2 = -2 \sin k\pi x$, $k \in \mathbb{Z}$. 16.455. Два решения: $y_1 = 3x - x^3$, $y_2 = x^3 - x$ и $y_1 = x^3 + x$, $y_2 = -x^3 + x$. 16.456. $y_2^*(x) = x(2-x)(-1,3551 + 0,303x)$. ● Искать решение

$y_2(x) = x(2-x)(C_1 + C_2x)$. 16.457. $y_1^*(x) = 0,3215(x-1)(x-2)$. ●
 Решение искать в виде $y_1(x) = C_1(x-1)(x-2)$. 16.458. $y_2^*(x) =$
 $= x(1-x)(0,192 + 0,171x)$. ● Решение искать в виде $y_2(x) =$
 $= x(1-x)(C_1 + C_2x)$. 16.459. $u_3^*(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1-x-y) \times$
 $\times (3,0401 - 0,0562x(1+x))$. ● Решение искать в виде $u_3(x, y) =$
 $= x^2 + y^2 + C_1xy(1-x-y) + C_2x^2y(1-x-y) + C_3x^3y(1-x-y)$.
 16.460. $u_1^*(x, y) = 0,0037(x^2-4)(y^2-4)$. ● Решение искать в виде
 $u_1(x, y) = C_1(x^2-4)(y^2-4)$. 16.461. $y_2^*(x) = x(x-1)(0,1708 + 0,1744x)$,
 $y_3^*(x) = x(x-1)(0,1705 + 0,176x - 0,002x^2)$. ● Решения искать в виде
 $y_2(x) = x(x-1)(C_1 + C_2x)$, $y_3(x) = x(x-1)(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. В за-
 данных точках значения y_2^* и y_3^* совпадают с точностью до
 0,0001. 16.462. $u_1^*(x, y) = 0,3125(x^2-1)(y^2-1)$. ● Решение
 искать в виде $u_1(x, y) = C_1(x^2-1)(y^2-1)$. 16.463. $u_1^*(x, y) =$
 $= 0,3125xy(x-1)(y-1)$. ● Решение искать в виде $u_1(x, y) =$
 $= 0,3125xy(x-1)(y-1)$. 16.464. $y(x) = x(2-x)/4$. 16.465. $y(x) =$
 $= x(1-x)(0,140 - 0,144x)$. 16.466. $y(x) = x(1-x)(-0,655 - 0,277x)$.
 16.467. Для задачи 16.464 функции $\varphi_{k+1}(x)$ имеют вид

$$\varphi_{k+1}(x) = x(2-x)x^k, \quad k=0, 1, 2, 3, 4.$$

Ответ записывается следующим образом:

```

FUNCTION FIK(X, K)
IF (X.EQ.0OR.X.EQ.2.) GO TO 1
FIK=X*(2.-X)*X**K.
RETURN
1 FIK=0
RETURN
END
  
```

Для остальных задач ответы отличаются вторым оператором и оператором, определяющим значение функции $\varphi_{k+1}(x)$.

16.468. Для задачи 16.464 ответ записывается следующим образом

```

FUNCTION F1(X)
F1=-2.
RETURN
END
FUNCTION F2(X)
F2=4.-6.*X
RETURN
END
FUNCTION F3(X)
F3=12.*(X-X**2)
RETURN
END
  
```

Уравнение Эйлера в данной задаче имеет вид $y'' + 1/2 = 0$, следовательно, $Ly = y''$, $f(x) = -1/2$ и $f_k(x) = \varphi_k''(x)$, $k=1, 2, 3, 4, 5$. Для остальных задач ответы отличаются только вторым оператором.

```

16.469.
FUNCTION SIMP(A,B,F1,FT,K,EPS)
I=0
N=2
  
```

```

5 H=(B-A)N
  P1=0.
  P2=0.
  X=A
  DO 1 J=1, N
    X=X+H
    P1=P1+F1(X,K)*FT(X)
    X=X+H
1  P2=P2+F1(X,K)*FT(X)
  P3=(F1(A,K)*FT(A)-F1(B,K)*FT(B)+
    *2.*P2+4.*P1)*H/3.
  IF (I.EQ.1) GO TO 2
  I=I+1
8  Y=P3
  N=N*2
  GO TO 5
2  EPS1=ABS ((P3-Y)/15.)
  IF (EPS1-EPS) 10,10,12
12 I=0
  GO TO 3
10 SIMP=P3
  RETURN
  END
16.470.
  DIMENSION A1 (5, 5), B1(5)
  EXTERNAL FIK,F1,F2,F.3,F4,F5,F
  DATA A/0./, B/2./
  EPS=.05
  J=1
  DO 3 I=1,5
    A1 (I,J)=SIMP(A,B,FIK,F1,I-1,EPS)
    A1 (I,J+1)=SIMP(A,B,FIK,F2,I-1,EPS)
    A1 (I, J+2)=SIMP(A,B,FIK,F3,I-1,EPS)
    A1(I,J+3)=SIMP(A,B,FIK,F4,I-1,EPS)
    A1(I,J+4)=SIMP(A,B,FIK,F5,I-1,EPS)
8  B1(I)=SIMP(A,B,FIK,F,I-1,EPS)
  CALL EXCLUDE (A1,B1,5)
  PRINT 2, B1
2  FORMAT (//10X,5F9.4)
  STOP
  END

```

● Задание для ЭВМ должно содержать 9 программных единиц — указанную здесь основную программу и другие подпрограммы, подпрограммы-функции, а именно: FIK(X,K), F1(X), F2(X), F4(X), F5(X), SIMP(A,B,F1,FT,K,N, EPS), EXCLUDE(A,B,N), а также подпрограмму-функцию F(X), вычисляющую значения функции правой части $Ly=f(P)$, в данном случае

```

FUNCTION F(X)
  F=-.5
  RETURN
END

```

При решении задачи 16.464 для функций F1(X), F2(X), F3(X), F4(X), F5(X) использовать решение задачи 16.468. При решении остальных задач необходимо составить подпрограммы-функции, вычисляющие соответствующие значения $f_k(x)$.

ГЛАВА 1.

$$17.1. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t), \text{ где } u(x, t) \text{ — отклонение точки струны с абсциссой } x \text{ от положения равновесия в момент времени } t, a^2 = T/\rho, \rho \text{ — плотность струны, } F(x, t) \text{ — плотность распределения действующих на струну внешних сил. } \blacktriangleleft$$

Пусть $\alpha = \alpha(x, t)$ — острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t . Условие малости колебаний означает, что величиной $\alpha^2(x, t)$ можно пренебречь, а потому имеем $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$.

Длина любого участка $M_1 M_2$ струны в момент времени t выражается формулой

$$|M_1 M_2| = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx,$$

а так как $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx \alpha^2 \approx 0$, то

$$|M_1 M_2| \approx x_2 - x_1 = \Delta x.$$

Согласно второму закону Ньютона сумма всех сил, действующих на участок струны $M_1 M_2$, равна по величине и по направлению вектору ускорения этого участка, умноженному на его массу. Вычислим все силы, действующие на этот участок. Плотность распределения внешних сил обозначим через $F(x, t)$, тогда внешняя сила, действующая на $M_1 M_2$, равна $F(x, t) \Delta x$. Далее, силы натяжения T_1 и T_2 , действующие на концах M_1 и M_2 , направлены по касательным к дугам в соответствующих точках. Из малости колебаний и из того, что равнодействующая этих сил вызывает только вертикальные перемещения, заключаем, что горизонтальная составляющая равнодействующей равна нулю, т. е. $-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$. Так как $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$, то отсюда выводим равенство $T_1 = T_2 = T$. Следовательно, вертикальная составляющая сил натяжения дается выражением $T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1$ и сумма всех сил $F_{M_1 M_2}$, действующих на участок $M_1 M_2$, равна

$$F_{M_1 M_2} = T(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + F(x, t) \Delta x.$$

Но в момент времени t $\alpha = \alpha(x) = \operatorname{arctg} u'_x$, а потому

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 &= \sin \alpha(x_1 + \Delta x) - \sin \alpha(x_1) = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) (\alpha(x_1 + \Delta x) - \alpha(x_1)) = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) (\operatorname{arctg} u'_x)'_{x=x_1 + \theta_1 \Delta x} \Delta x = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (u'_x)^2}} u''_{xx} \right]_{x=x_1 + \theta_1 \Delta x} \Delta x \\ &\quad (0 < \theta < 1, 0 < \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

При наших предположениях $\cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) \approx 1$ и $(u'_x)^2|_{x=x_1 + \theta_1 \Delta x} \approx 0$. Таким образом,

$$F_{M_1 M_2} \approx T \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x + F(x, t) \Delta x. \quad (*)$$

С другой стороны, считая участок M_1M_2 материальной точкой (при достаточно малом Δx), имеем

$$F_{M_1M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho \Delta x. \quad (**)$$

Приравняв согласно закону Ньютона выражения (*) и (**) и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, для искомой функции $u(x, t)$ получаем дифференциальное уравнение $u''_{tt} = \frac{T}{\rho} u''_{xx} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$. \blacktriangleright

17.2. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $0 \leq x \leq l$, и $0 \leq t \leq +\infty$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t),$$

($a^2 = T/\rho$, T — натяжение струны, ρ — плотность струны, $F(x, t)$ — плотность распределения внешних сил) и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0 && \text{(граничные условия),} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) && \text{(начальные условия).} \end{aligned}$$

17.3. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq t < +\infty$, являющуюся решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

($a^2 = \frac{T}{\rho}$, T — натяжение, ρ — плотность струны) и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u(l, t) &= 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0 && \text{(граничные условия),} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0 && \text{(начальные условия).} \end{aligned}$$

● Граничное условие при $x=0$ получить из отсутствия на этом конце внешней силы и, следовательно, равенства нулю силы натяжения T , пропорциональной $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$.

17.4. Напряжение $u(x, t)$ и сила тока $i(x, t)$ в точках линии в любой момент времени t должны удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + (LC + RC) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + RGw(x, t).$$

◀ Рассматриваем двухпроводную линию как систему равномерно распределенных индуктивностей, сопротивлений, емкостей и утечки (см. рис. 240). Согласно первому закону Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю) имеем

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = C \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G \Delta x u(x, t),$$

где $C \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ — ток через конденсатор, а $G \Delta x i(x, t)$ — ток утечки. Разделив это равенство на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - G i(x, t). \quad (**)$$

Далее, согласно второму закону Кирхгофа падение напряжения $u(x, t)$ на участке между x и $x + \Delta x$ состоит из падения напря-

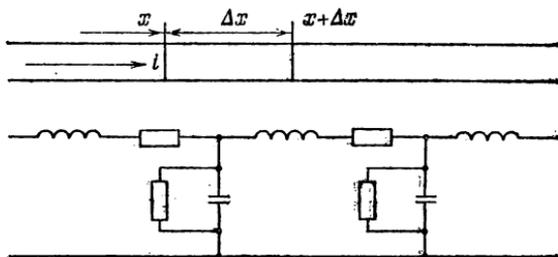


Рис. 240

жения на индуктивности $L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ и из падения напряжения на сопротивлении $R \Delta x i(x, t)$, т. е.

$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R \Delta x i(x, t).$$

Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R i(x, t). \quad (**)$$

Уравнения (*) и (**) называются *уравнениями длинной линии*. Исключая из этих уравнений $i(x, t)$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u, \quad (***)$$

а исключая $u(x, t)$ — к уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial i}{\partial t} + RG i, \quad (***)$$

Уравнения (***) и (****) называют также *телеграфными уравнениями*. ► 17.5. Найдти функции $u(x, t)$ и $i(x, t)$, определенные при $0 \leq x < +\infty$ и $0 \leq t < +\infty$, являющиеся решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & i(x, 0) &= \psi(x) & \text{(начальные условия),} \\ u(0, t) &= E_0, & & & \\ u(+\infty, t) &= i(+\infty, t) = 0 & & & \text{(граничные условия)} \end{aligned}$$

(условия при $x = \pm \infty$ следуют из физических соображений).
17.6. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и удовлетворяющую условиям

$$u(x, 0) = u_0 \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u(0, t) = u_0,$$

$$u'_x(l, t) + \gamma [u(l, t) - \varphi(t)] = 0 \quad (\text{граничные условия}),$$

где γ — коэффициент теплообмена между стержнем и средой. ●
 Для получения граничного условия при $x = l$ заметим, что количество тепла, проходящего через конец стержня за время Δt , равно $\Delta q = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} S \Delta t$, где S — площадь поперечного сечения стержня, а k — коэффициент теплопроводности материала стержня. С другой стороны, Δq пропорционально произведению разности температур $u(l, t) - \varphi(t)$ на площадь S и на время Δt , т. е. $\Delta q = h [u(l, t) - \varphi(t)] S \Delta t$, где $h \geq 0$ зависит от качества теплоизоляции конца стержня от окружающей среды. Сравнив оба выражения для Δq и обозначая $\gamma = \frac{h}{k}$, приходим к написанному граничному условию.

17.7. Пусть система координат выбрана так, что ось Oz параллельна образующей. Область, ограниченную кривой L в плоскости Oxy , обозначим через D . Найти функцию $u(x, y)$, которая для всех точек $M(x, y) \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. является гармонической в области D , а на границе области, т. е. на кривой L , удовлетворяет условию

$$u(x, y) |_{(x, y) \in L} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — заданная на L непрерывная функция. Для установившегося теплового процесса $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. **17.8.** Гиперболический, $u''_{\xi\eta} = 0$.

17.9. Параболический. Выбирая $\xi(x, y) = 2x - y$ и $\eta(x, y) = x$, после преобразования получаем уравнение $u''_{\eta\eta} + 3u'_\eta = 0$. **17.10.** Эллиптический, $u''_{\mu\mu} + u''_{\nu\nu} = 0$, где $\mu(x, y) = -3x - y = \operatorname{Re} \xi(x, y)$ и $\nu(x, y) = 2x = \operatorname{Im} \xi(x, y)$. **17.11.** Параболический. Выбирая $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ и $\eta = x$, после преобразования получаем уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

17.12. Параболический. Выбирая $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$ при $\xi \neq \eta^2$, т. е. при $y \neq 0$, получаем уравнение $u''_{\eta\eta} + \frac{2\xi}{\xi - \eta^2} u'_\xi = 0$. При $y = 0$ имеем уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, а при $x = 0$ — уравнение $u''_{xx} = 0$. **17.13.** В области $D = \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$ гиперболический, $u''_{\xi\eta} - \frac{\xi + 2\eta}{(\xi^2 - \eta^2)} u'_\xi -$

$-\frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u'_\eta = 0$. При $x = 0$ или $y = 0$ параболический.

17.14. В области $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ эллиптический, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. При $x=0$ или $y=0$ параболический. 17.15. Гиперболический, $u''_{\xi\eta} = 0$.

17.16. В области $D = \{(x, y) | x \neq 0\}$ гиперболический, $u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \times \times (u'_\xi - u'_\eta) = 0$. При $x=0$ параболический. 17.17. В области

$D = \{(x, y) | x \neq 0\}$ эллиптический, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u'_\eta = 0$. При $x=0$

параболический. 17.18. Параболический. Выбирая $\xi(x, y) = y/x$ и $\eta(x, y) = y$, после преобразования получаем уравнение $u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0$.

17.19. $u(x, y) = \varphi(4x - y) + \psi(x - y)$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. ◀ Выбирая $\xi(x, y) = = 4x - y$ и $\eta(x, y) = x - y$, приводим уравнение к виду $u''_{\xi\eta} = 0$ (см. задачу 17.8), последовательно интегрируя которое, находим

$u'_\xi = \varphi_0(\xi)$ и $u(\xi, \eta) = \int \varphi_0(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Подставив

сюда выражения для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, получим искомое решение.

17.20. $u(x, y) = \psi(2x - y)e^{-3x} + \varphi(2x - y)$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. 17.21. $u(x, y) = = x\varphi(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \psi(\sqrt{y} - \sqrt{x})$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные

дважды дифференцируемые функции. 17.22. $u(x, y) = \Phi(y - x + \cos x) + \Psi(y - x - \cos x)$, где $\Phi(v)$ и $\Psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. 17.23. $u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)y + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, где

$\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

$$17.24. u(x, t) = \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2}.$$

$$17.25. u(x, t) = \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2} + \frac{1}{4a} \ln \frac{1 + (x + at)^2}{1 + (x - at)^2}.$$

$$17.26. u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{x + t}{1 + (x + t)^2} + \frac{x - t}{1 + (x - t)^2} \right] + \sin x \sin t.$$

$$17.27. u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + (x + t)^2} + \frac{1}{1 + (x - t)^2} \right] + \sin x \cos t.$$

17.28. $u(x, t) = e^{-(x^2 + t^2)} \cdot \operatorname{ch} 2xt + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + (x + t)^2}{1 + (x - t)^2}$. 17.29. Если

$0 \leq t \leq \frac{l}{2a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + at) & \text{при } -at \leq x \leq at, \\ x & \text{при } at \leq x \leq l - at, \\ l - at & \text{при } l - at \leq x \leq l + at, \\ 2l - x & \text{при } l + at \leq x \leq 2l - at, \\ l - \frac{1}{2}(x - at) & \text{при } 2l - at \leq x \leq 2l + at, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{2a} < t < \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } -at \leq x \leq l-at, \\ l - \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } l-at \leq x \leq at, \\ l-at & \text{при } at \leq x \leq 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } 2l-at \leq x \leq l+at, \\ l - \frac{1}{2}(x-at) & \text{при } l+at \leq x \leq 2l+at, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < +\infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } -at \leq x \leq l-at, \\ l - \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } l-at \leq x \leq 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x-at) & \text{при } at \leq x \leq l+at, \\ l - \frac{1}{2}(x-at) & \text{при } l+at \leq x \leq 2l+at, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{2a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{2}\right) & \text{при } -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{l}{2} & \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq \frac{3l}{2}, \\ \frac{5}{4}l - \frac{1}{2}x & \text{при } \frac{3l}{2} \leq x \leq \frac{5l}{2}, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+l) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(l-x) & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{2}(x-l) & \text{при } l \leq x \leq 2l, \\ \frac{3l}{2} - \frac{x}{2} & \text{при } 2l \leq x \leq 3l, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

● Рассмотреть случаи различного возможного расположения значений $x-at$ и $x+at$ на оси x , а именно: если $x-at < 0$, то точка $x+at$ может лежать в промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, l)$, $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если $0 < x-at < l$, то точка $x+at$ может лежать в промежутках $(0, l)$, $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если $l < x-at < 2l$, то точка $x+at$ может лежать в промежутках $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если

$2l < x - at < +\infty$, то и $x + at \in (2l, +\infty)$. 17.30. Если $0 \leq t \leq \frac{h}{2a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq at - h, \\ -at & \text{при } at - h \leq x \leq -at, \\ x & \text{при } -at \leq x \leq at, \\ at & \text{при } at \leq x \leq h - at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } h - at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

Если $\frac{h}{2a} \leq t \leq \frac{h}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq -at, \\ \frac{1}{2}(x + at - h) & \text{при } -at \leq x \leq at - h, \\ x & \text{при } -h + at \leq x < h - at, \\ \frac{1}{2}(x - at + h) & \text{при } h - at \leq x \leq at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

При $t \geq \frac{h}{a}$ имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq -at, \\ \frac{1}{2}(x + at - h) & \text{при } -at \leq x \leq h - at, \\ 0 & \text{при } h - at \leq x \leq at - h, \\ \frac{1}{2}(x - at + h) & \text{при } at - h \leq x \leq at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{h}{2a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left(-\infty, -\frac{3h}{2}\right) \cup \left(\frac{3h}{2}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3h}{2}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ x & \text{при } x \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \\ \frac{1}{2}\left(-x + \frac{3h}{2}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right); \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3h}{4a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left(-\infty, -\frac{7h}{4}\right) \cup \left(\frac{7h}{4}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2}\left(x + \frac{7h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{7h}{4}, -\frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{3h}{4}, -\frac{h}{4}\right), \\ x & \text{при } x \in \left(-\frac{h}{4}, \frac{h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{h}{4}, \frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(-x + \frac{7h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{3h}{4}, \frac{7h}{4}\right). \end{cases}$$

● Рассмотреть случаи различного возможного расположения значений $x-at$ и $x+at$: если $x-at < -h$, то $x+at$ может лежать в промежутках $(-\infty, -h)$, $(-h, 0)$, $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $-h < x-at < 0$, то $x+at$ может лежать в промежутках $(-h, 0)$, $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $0 < x-at < h$, то $x+at$ может лежать в промежутках $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $h < x-at < +\infty$, то $x+at \in (h, +\infty)$. 17.31.

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sin x \sin at, & at \leq x < +\infty, \\ \frac{1}{a} (1 - \cos x \cos at), & 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

17.32.

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2} \right] & \text{при } x \geq at, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} - \frac{(at-x)^2}{1+(at-x)^2} \right] & \text{при } 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

$$17.33. \quad u(x, t) = \frac{1}{4a} \ln \frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}.$$

$$17.34. \quad u(x, t) = \frac{1}{4a} \ln \frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2} +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} - \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2} \right] & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2} \right] & \text{при } x \geq at. \end{cases}$$

$$17.35. \quad u(x, t) = e^{-(x^2+a^2t^2)} \operatorname{ch} axt +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{a} (1 - \cos x \cos at) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ \frac{1}{a} \sin x \sin at & \text{при } x \geq at. \end{cases}$$

17.36. Если $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq l-at, \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} (x-at) & \text{при } l-at \leq x \leq l+at, \\ 0 & \text{при } l+at \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < +\infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq at - l \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} (x - at) & \text{и при } l + at \leq x < +\infty, \\ & \text{при } at - l \leq x \leq at + l. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{3l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} \left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{при } \frac{3l}{4} \leq x \leq \frac{5l}{4}, \\ 0 & \text{при } \frac{5l}{4} \leq x < +\infty, \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{l} \left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{при } \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{7l}{4}, \\ 0 & \text{при } \frac{7l}{4} \leq x < +\infty. \end{cases}$$

17.37. Если $0 \leq t < \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} ct & \text{при } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{c}{2a} (l + at - x) & \text{при } l - at \leq x < l + at, \\ 0 & \text{при } l + at \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < \infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} cl & \text{при } 0 \leq x \leq at - l, \\ \frac{c}{2a} (l + at - x) & \text{при } at - l \leq x < at + l, \\ 0 & \text{при } at + l \leq x < +\infty. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{c}{2a} (2l - x) & \text{при } 0 \leq x < 2l, \\ 0 & \text{при } 2l \leq x < +\infty; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{5l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{cl}{a} & \text{при } 0 \leq x < 4l, \\ \frac{c}{2a} (6l - x) & \text{при } 4l \leq x < 6l, \\ 0 & \text{при } 6l \leq x < +\infty. \end{cases}$$

17.38. ● Выражение $(x_n, y_n) - (x, y)$ записать в виде $(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)$ и воспользоваться неравенством Коши—Буняковского. 17.40. ● Показать, что в произвольном ортонормированном базисе фундаментальность последовательности векторов $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ эквивалентна фундаментальности числовых последовательностей их координат. 17.43. ● Воспользовавшись результатами задач 17.41 и 17.42, доказать полноту пространства l_2 .

$$17.44. \left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

17.45. ● Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $C^{(2)}[-1, 1]$ и $h(t)$ — разрывная функция, равная -1 при $t < 0$ и 1 при $t \geq 0$. Из неравенства Коши — Буняковского для интегралов (неравенства Шварца, см. задачу 17.44) следует, что

$$\left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right)^{1/2} \geq \left(\int_{-1}^1 (f(t) - h(t))^2 dt \right)^{1/2} - \left(\int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt = 0,$$

и в силу непрерывности

$$\int_{-1}^1 (f(t) - h(t))^2 dt > 0.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt$ не может стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, какова бы ни была $f(t) \in C^{(2)}[-1, 1]$.

$$17.51. \hat{P}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{P}_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \hat{P}_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

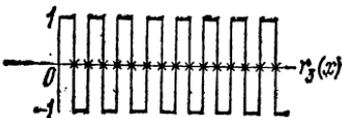
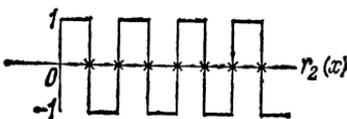
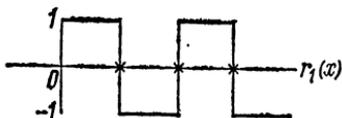
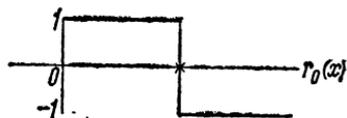


Рис. 241

$$\hat{P}_3(x) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

$$17.52. \hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \hat{T}_1(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \quad \hat{T}_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1),$$

$$\hat{T}_3(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(4x^3 - 3x). \quad 17.53. \bullet$$

При вычислении интегралов произвести замену переменной $\arccos x = \theta$. 17.54. $\varphi_0(x) = 1$,

$$\varphi_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_2(x) =$$

$$= 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right). \quad 17.55. \text{ См.}$$

рис. 241. Вертикальные прямые в точках разрыва проведены только для наглядности. 17.58. См. рис. 242. Вертикальные прямые в точках разрыва проведены для наглядности. 17.60. ◀ Учитывая,

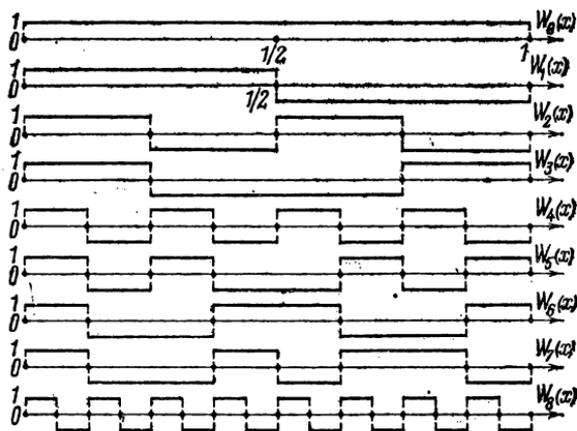


Рис. 242

что $I_\nu(\alpha x)$ есть решение уравнения $xy'' + y' + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu}{x}\right)y = 0$ (см. ч. 2, гл. 12, задача 12.338), т. е. уравнения

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu}{x}\right)y = 0,$$

и полагая $Z_\alpha = I_\nu(\alpha x)$ и $U_l = I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x)$, можно записать

$$\frac{d}{dx}(xZ'_\alpha) + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)Z_\alpha = 0$$

и

$$\frac{d}{dx}(xU'_l) + \left((\mu_l^{(\nu)})^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)U_l = 0.$$

Умножая первое равенство на U_l , второе на Z_α , вычитая из первого полученного равенства второе и принимая во внимание соотношение

$$U_l \frac{d}{dx}(xZ'_\alpha) - Z_\alpha \frac{d}{dx}(xU'_l) = \frac{d}{dx}(Z_\alpha x U'_l - x U_l Z'_\alpha),$$

получим

$$\frac{d}{dx}(xZ_\alpha U'_l - xU_l Z'_\alpha) + x((\mu_l^{(\nu)})^2 - \alpha^2)Z_\alpha U_l = 0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до 1 и учитывая, что $\frac{d}{dx}(Z_\alpha) = \frac{d}{dx} I_\nu(\alpha x) = \alpha I'_\nu(\alpha x)$, приходим к равенству

$$((\mu_l^{(\nu)})^2 - \alpha^2) \int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x) I_\nu(\alpha x) x dx = -\mu_l^{(\nu)} I_\nu(\alpha) I'_\nu(\mu_l^{(\nu)})$$

Отсюда при $\alpha = \mu_m^{(\nu)} \neq \mu_l^{(\nu)}$ получаем

$$\int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x) I_\nu(\mu_m^{(\nu)} x) x dx = 0,$$

в переходя к пределу при $\alpha \rightarrow \mu_l^{(v)}$, найдем

$$\int_0^1 [I_\nu(\mu_l^{(v)} x)]^2 x dx = \lim_{\alpha \rightarrow \mu_l^{(v)}} = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow \mu_l^{(v)}} \frac{\mu_l^{(v)} I_\nu(\alpha) I'_\nu(\mu_l^{(v)})}{\alpha^2 - (\mu_l^{(v)})^2} = \frac{1}{2} [I'_\nu(\mu_l^{(v)})]^2 \neq 0. \blacktriangleright$$

17.61. $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$. ◀ Из общего реше-

ния уравнения $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda x}}$ при $\lambda > 0$ или $y(x) = c_1 x + c_2$ при $\lambda = 0$ и из граничных условий следует, что отличное от тождественного нуля решение этой задачи возможно только при $\lambda < 0$ (системы $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda l}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda l}} = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 l = 0 \end{cases}$ имеют нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$). Поэтому полагаем $\lambda = -\omega^2$ и общее решение

уравнения запишем в виде $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Из граничных условий следует, что $C_1 = 0$ и $C_2 \sin \omega l = 0$. Это означает, что отличное от тождественного нуля решение задачи возможно только в случае $\sin \omega l = 0$, т. е. при $\omega = \omega_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и находим

собственные числа. Функции $y_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, являются собственными функциями этой задачи. ▶ 17.62. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$, $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$. 17.63. $\lambda_k = -\left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2$, $y_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$, $k \in \mathbb{N}$. 17.64. $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$, $y_k(x) =$

$= \cos x \frac{2k-1}{2l} \pi x$, $k \in \mathbb{N}$. 17.65. $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2$, $y_k(r) = I_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r\right)$, где $I_0(r)$ — функция Бесселя порядка нуль, а $\mu_k^{(0)}$, $k \in \mathbb{N}$ — ее нули, т. е. $I_0(\mu_k^{(0)}) = 0$. ◀ Если $\omega = 0$, то получаем уравнение $\frac{1}{r}(ry''(r) +$

$+ y'(r)) = 0$, или $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ry') = 0$, решая которое, находим сначала $ry'(r) = c_1$ и, наконец, $y = c_1 \ln r + c_2$. Из ограниченности решения при $r = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Используя далее граничное условие $y(R) = 0$, находим, что $c_2 = 0$, т. е. $y(r) \equiv 0$. Последнее означает, что $\omega = 0$ не является собственным числом. Пусть теперь $\omega \neq 0$. Произведем в исходном уравнении замену переменной $\eta = \omega r$. Так как $y_r = y'_\eta \eta_r = \omega y'_\eta$, $y_{rr} = \omega^2 y''_\eta$, то уравнение преобразуется к виду

$$\omega^2 \left(y''_\eta(\eta) + \frac{1}{\eta} y'_\eta(\eta) + y(\eta) \right) = 0, \quad (*)$$

которое является частным случаем (при $\nu = 0$) уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Следовательно, решением уравнения (*) является функция Бесселя $J_0(\eta)$, т. е. решением исходного уравнения является функция $y(r) = I_0(\omega r)$.

Из граничного условия $y(R) = I_0(\omega R) = 0$ находим, что $\omega R = \mu_k^{(0)}$. Таким образом, собственными значениями нашей задачи являются числа $\lambda_k = \omega_k^2 = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, а собственными функциями — функции $I_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r\right)$.

З а м е ч а н и е. Уравнение

$$y'' + \frac{1}{r} y' - \omega^2 y = 0 \quad (**)$$

заменой $y_1 = -y$ приводится к виду $y_1'' + \frac{1}{r} y_1' + \omega^2 y_1 = 0$, откуда заключаем, что уравнение (**) имеет решение $y = -I_0(\omega r)$, а потому для краевой задачи с уравнением (**) легко находим собственные числа и собственные функции. ► 17.66. $c_k =$

$$= \frac{2}{[J_0'(\mu_k^{(v)})]^2} \int_0^1 f(x) I_0(\mu_k^{(v)} x) x dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad 17.67. \quad c_1 = c_3 = 0, \quad c_0 = \frac{1}{2},$$

$c_2 = \frac{5}{8}$. ● Воспользоваться четностью функции $|x|$ и четностью или нечетностью соответствующих полиномов. 17.68. $c_0 =$

$$= \pi \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad c_k = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 f(x) \frac{\cos(k \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

17.69. $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, $c_3 = 0$. 17.70. ● Воспользовавшись ортонормированностью функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, записать интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k=0}^n (c_k - \alpha_k)^2. \end{aligned}$$

$$17.72. \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 - b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

17.73. Равенство Парсеваля означает, что квадрат модуля вектора равен сумме квадратов всех его координат (в ортонормированном базисе), а неравенство Бесселя — что квадрат модуля вектора не меньше суммы квадратов некоторых из его координат. 17.74. ● Воспользоваться тем фактом, что функции Уолша $W_k(x)$ при $k \neq 2^n$ (см. определение перед задачей 17.58 и задачу 17.59) ортогональны функциям Радемахера $r_m(x) = W_{2^m}(x)$.

$$17.75. \quad u(x, t) = \frac{1}{8} \cos \frac{3\pi t}{l} \sin \frac{3\pi}{l} x.$$

$$17.76. u(x, t) = \frac{l}{15a\pi} \sin \frac{5a\pi t}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}.$$

$$17.77. u(x, t) = \frac{1}{9} \cos \frac{3a\pi t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}.$$

$$17.78. u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(2k+1)at}{l}}{(2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

$$17.79. u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{3} \sin \frac{\pi^2 k}{2lh}}{k^2} \sin \frac{\pi k a t}{l} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$17.80. u(x, t) = \frac{16l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \times \\ \times \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

$$17.81. u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{(2k+1)(2k-3)} \cos \frac{(2k-1)\pi a t}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{4l}{\pi^2 a} \left[-1 + \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} \right] \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi a t}{2l} \right\} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

$$17.82. u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} e^{-\left(\frac{(2m+1)\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{l}.$$

$$17.83. u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{4}}{2k+1} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

$$17.84. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + \right. \\ \left. + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m},$$

где

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \varphi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz,$$

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi a l m \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz,$$

$k, n \in \mathbb{N}$. В случае, когда $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$, $\psi(x, y) \equiv 0$ и

$a=1$, $u(x, y, t) = \cos \pi \sqrt{\frac{9}{l^2} + \frac{64}{m^2}} t \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$. ◀ Предполагая, что мембрана совершает малые колебания, имеем первую краевую задачу: найти решение $u(x, y, t)$ уравнения свободных

колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, m, t) = 0. \quad (3)$$

Ищем решение в виде произведения

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t),$$

подставив которое в (1), получаем

$$XYT'' = a^2 (X''YT + Y''XT).$$

Разделив это равенство на a^2XYT , имеем

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}. \quad (4)$$

Каждое отношение здесь зависит от своей переменной, а потому равенство возможно только в том случае, когда каждое из этих отношений постоянно. Полагая $X''/X = \lambda$, $Y''/Y = \mu$ и используя граничные условия (3), получаем две задачи Штурма — Лиувилля:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (5)$$

и

$$Y'' - \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала задачу (5). Как показано в задаче 17.61, собственными числами задачи (5) являются числа $\lambda_k = -(\pi k/l)^2$, а собственными функциями — функции

$$X_k(x) = \sin \pi k x / l, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Аналогично, собственными значениями задачи (6) являются числа $\mu_n = -(\pi n/m)^2$, $n \in \mathbb{N}$, а собственными функциями — система функций $Y_n(y) = \sin \pi n y / m$, $n \in \mathbb{N}$. Подставив в (4) вместо отношений X''/X и Y''/Y их значения $-(\pi k/l)^2$ и $-(\pi n/m)^2$, получим уравнения

$$T'' + \pi^2 a^2 \left[\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right] T = 0,$$

решениями которых при различных k и n будут функции

$$T_{k,n}(t) = A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t.$$

Таким образом, решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (3), являются функции

$$u_{k,n}(x, y, t) = \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}. \quad (8)$$

Из линейности уравнения (1) следует, что и любая линейная комбинация решений (8), т. е. формально составленный двойной ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + \right. \\ \left. + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}, \quad (9)$$

при условии возможности его двукратного почленного дифференцирования также является решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (3). Потребуем, чтобы представленное рядом (9) решение $u(x, y, t)$ удовлетворяло условиям (6), т. е. чтобы

$$u(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} = \varphi(x, y)$$

и

$$u_t'(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{k,n} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} = \psi(x, y).$$

Из этих равенств заключаем, что если числа $A_{k,n}$ являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x, y)$, т. е. если

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \varphi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

а числа $B_{k,n} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}$ — коэффициентами Фурье функции $\psi(x, y)$, т. е. если

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi a l m \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \sin \frac{\pi k v}{l} \sin \frac{\pi n z}{m} dv dz, \\ k, n \in \mathbb{N}.$$

то ряд (9) является искомым решением задачи 17.84 в общем случае. Если же $\psi(x, y) = 0$, то все $B_{k,n} = 0$, $k, n \in \mathbb{N}$, а для $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$ имеем $A_{k,n} = 0$ при $(k, n) \neq (3, 8)$ и $A_{3,8} = 1$. ►

17.85. $u(x, y, t) = \frac{l}{\pi a \sqrt{5}} \sin \frac{\pi a \sqrt{5}}{l} t \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}$. ● Воспользоваться формулами для коэффициентов $A_{k,n}$ и $B_{k,n}$, полученными в задаче 17.84.

$$\begin{aligned}
 17.86. \quad u(x, y, t) = & \left(\cos \frac{\pi a \sqrt{2} t}{l} + \frac{16}{\pi^3 \sqrt{2}} \sin \frac{\pi a \sqrt{2} t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} + \\
 & + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi a \sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2} t}{l}}{(2k+1)(2n+1) \sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}} \times \\
 & \times \sin \frac{(2k+1) \pi x}{l} \sin \frac{(2n+1) \pi y}{l}.
 \end{aligned}$$

Воспользоваться формулами для коэффициентов $A_{k, n}$ и $B_{k, n}$, полученными в задаче 17.84.

$$17.87. \quad u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}} \left[a_k \operatorname{sh} \frac{\pi k (a-x)}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right],$$

где

$$\begin{aligned}
 a_k = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv &= \frac{2}{b} \int_0^b v(b-v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv = \\
 &= \begin{cases} \frac{8b^3}{\pi^3 (2m-1)^3} & \text{при } k=2m-1, \\ 0 & \text{при } k=2m, \quad m \in \mathbb{N}; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{2}{b} \int_0^l \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi k y}{b} dy = \begin{cases} 1 & \text{при } k=1, \\ 0 & \text{при } k \geq 2. \end{cases}$$

◀ Определенное стационарное распределение температуры сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с заданными граничными условиями. Решение ищется в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда имеем уравнения $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \omega^2$ и граничные условия $Y(0) = Y(b) = 0$. Таким образом, задача $Y'' + \omega^2 Y = 0$, $Y(0) = Y(b) = 0$ приводит к собственным функциям (см. задачу 17.61) $Y_k(y) = \sin \frac{\pi k y}{b}$ и собственным числам $-\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Решения уравнений $X'' - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X = 0$ запишем через гиперболические функции:

$$X_k(x) = a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}.$$

Тогда решение исходного уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее всем граничным условиям, запишем в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right) \sin \frac{\pi k y}{b}.$$

Для определения чисел a_k и b_k получаем соотношения

$$u(0, y) = \varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi ky}{b}$$

и

$$u(a, y) = \psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} \right) \sin \frac{\pi ky}{b},$$

из которых находим, что

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv = \frac{2}{b} \int_0^b v(b-v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv = \\ &= \begin{cases} \frac{8b^2}{(2m-1)^3 \pi^3} & \text{при } k=2m-1, \\ 0 & \text{при } k=2m, m \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$a_k \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv.$$

Из последнего равенства находим b_k :

$$b_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} \left[\frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv - \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \right].$$

Подставляя значения a_k и b_k в ряд для $u(x, y)$, получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi kx}{b} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv - \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} \right\} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi ky}{b} = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv \left[\operatorname{ch} \frac{\pi kx}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} - \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv \operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b} \right\} \frac{\sin \frac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} \left[a_k \operatorname{sh} \frac{\pi k(a-x)}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b} \right]. \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$17.88. u(x, y) = -\frac{b^2}{6a}x + \frac{b^2}{6} + \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{2m\pi(x-a)}{b}}{m^2 \operatorname{sh} \frac{2m\pi a}{b}} \cos \frac{2m\pi y}{b}.$$

● Собственными числами соответствующей задачи Штурма — Ливилля являются числа $-\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, $k=0, 1, \dots$, а соответствующие им собственные функции имеют вид $Y_k(y) = \cos \frac{\pi k y}{b}$, $k=0, 1, \dots$

Поэтому уравнение $X'' - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X = 0$ имеет систему решений $X_0(x) = a_0 x + b_0$ и $X_k(x) = a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$17.89. u(x, y) = \alpha + \frac{\alpha(b-2)}{2a}x - \frac{4\alpha b}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi a}{b}} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{b}.$$

$$17.90. u(r, \varphi, t) = u(r, t) = \alpha \cos \frac{\alpha \mu_1 t}{l} I_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right) + 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)} \sin \frac{\alpha \mu_k t}{l} I_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

◀ Уравнение $u_{tt}'' = a^2 \Delta u$, где $u = u(x, y, t)$ и $\Delta u = u_{xx}'' + u_{yy}''$, в полярных координатах (r, φ) записывается в виде (см. задачу 10.168 при $u(x, y, z, t) = u(x, y, t)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Начальные условия не зависят от φ , поэтому колебания радиальные, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (*)$$

Требуется найти решение $u = u(r, t)$, $0 \leq r \leq l$, уравнения (*) при начальных условиях

$$u(r, 0) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right),$$

$$u_t'(r, 0) = c\alpha$$

и граничном условии $u(l, t) = 0$.

Ищем решение в виде произведения $u(r, t) = R(r)T(t)$, подставив которое в (*), получаем:

$$T''R = a^2 \left(TR'' + \frac{1}{r} TR' \right),$$

т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Отсюда получаем уравнение

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \lambda R(r) = 0$$

с граничным условием $R(l) = 0$. Собственными числами этой краевой задачи (см. ответ к задаче 17.65) являются числа $\lambda_k = -\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, а собственными функциями — функции $R_k(r) = I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right)$.

Решая уравнение

$$T_k''(t) + a^2 \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

получаем

$$T_k(t) = \alpha_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + \beta_k \sin \frac{a\mu_k t}{l}.$$

Следовательно, искомое решение представляется в виде ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + \beta_k \sin \frac{a\mu_k t}{l} \right) I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right).$$

Используя начальные условия, находим

$$u(r, 0) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1}{l} r\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right), \quad (**)$$

$$u_t(r, 0) = ca = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{a\mu_k}{l} I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right).$$

Из ортогональности с весом $\rho(x) = x$ (см. задачу 17.60) системы $\left\{ I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right), k \in \mathbb{N} \right\}$ на промежутке $[0, l]$ и из соотношения (**), имеем $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_k = 0$ при $k \geq 2$.

Учитывая равенства

$$\int_0^l I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right) I_0\left(\frac{\mu_m}{l} r\right) r dr = l^2 \int_0^1 I_0(\mu_k v) I_0(\mu_m v) v dv =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} l^2 (I_0'(\mu_k))^2, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

находим выражения коэффициентов Фурье — Бесселя γ_k функции $f(r)$ по системе $\left\{ I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right), k \in \mathbb{N} \right\}$ на отрезке $[0, l]$ (см. задачу 17.66):

$$\gamma_k = \frac{2}{l^2 (I_0'(\mu_k))^2} \int_0^l r f(r) I_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right) dr, \quad k \in \mathbb{N}.$$

а тогда из второго начального условия имеем

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{l}{a\mu_k} \cdot \frac{2}{l^2 (I'_0(\mu_k))^2} \int_0^l r \cdot \cos \cdot I_0 \left(\frac{\mu_k}{l} r \right) dr = \\ &= \frac{2a}{(\mu_k (I'_0(\mu_k))^2)} \int_0^{\mu_k} \left(\frac{l}{\mu_k} \right)^2 v I_0(v) dv = \frac{2cl}{\mu_k^2 (I'_0(\mu_k))^2} \int_0^{\mu_k} v I_0(v) dv. \end{aligned}$$

Но (см. часть 2, задачу 12.335) $v I_0(v) = \frac{d}{dv} (v I_1(v))$ и $I_1(v) = -I'_0(v)$, а потому

$$\int_0^{\mu_k} v I_0(v) dv = \int_0^{\mu_k} \frac{d}{dv} (v I_1(v)) dv = v I_1(v) \Big|_0^{\mu_k} = \mu_k I_1(\mu_k) = -\mu_k I'_0(\mu_k).$$

т. е.

$$\beta_k = -\frac{2cl}{\mu_k^2 I'_0(\mu_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \alpha \cos \frac{a\mu_1 t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_1}{l} r \right) - \\ &= 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I'_0(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_k}{l} r \right) = \\ &= \alpha \cos \frac{a\mu_1 t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_1}{l} r \right) + 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I'_0(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_k}{l} r \right). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$17.91. \quad u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k \cos k\varphi + B_k r^k \sin k\varphi) = \frac{r}{R} \sin \varphi, \quad \text{где}$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi R k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{R}, \quad B_k = \frac{1}{\pi R k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = 0, \quad k \geq 2.$$

◀ Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ (u не зависит от z). Решение $u(r, \varphi)$ должно быть ограничено при $0 < r < R$ и периодически по φ , т. е. $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$. Полагая $u(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi)$, приходим к

уравнениям

$$\frac{\frac{1}{r} X'(r) + X''(r)}{\frac{1}{r^2} X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \quad (*)$$

Решение уравнения $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ должно иметь период 2π , а потому $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, \dots$, и мы имеем

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

При $\lambda = k^2$ из левой части (*) получаем уравнение Эйлера

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - k^2 X(r) = 0,$$

которое путем замены $r = e^v$ сводится к уравнению $X''(v) = 0$ при $k = 0$ и к уравнению $X''(v) - k^2 X(v) = 0$ при $k \geq 1$, решениями которого будут функции $X_0(v) = a_0 v + b_0$, $X_{k,1}(v) = e^{kv} = r^k$ и $X_{k,2}(v) = e^{-kv} = r^{-k}$. При $a_0 \neq 0$ решение $X_0(v)$ не ограничено при $v \rightarrow -\infty$, также не ограничены и решения $X_{k,2}(r) = r^{-k}$ при $0 < r < R$. Следовательно, будем иметь $u_0(r, \varphi) = b_0$, $u_k(r, \varphi) = r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$. Выберем a_k и b_k так, чтобы функция

$u(r, \varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ удовлетворяла условию

$u(R, \varphi) = f(\varphi)$, т. е. чтобы $f(\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$.

Для этого следует выбрать $b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$, $a_k =$

$$= \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В нашем случае $f(\varphi) = \sin \varphi$, а потому $b_0 = 0$, $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1 = \frac{1}{R}$ и $b_k = 0$ при $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} 17.92. \quad u(x, t) &= \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi t}{l} - 1}{(2m-1)^5} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l} = \\ &= \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi t}{l}}{(2m-1)^5} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l} - \frac{x}{12} (x^3 - 2x^2 l + l^3). \end{aligned}$$

● Последнее выражение получено путем двукратного почленного интегрирования:

$$\int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} v(v-l) dv = -\frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} \sin \frac{(2m-1)\pi v}{l} dv.$$

$$17.93. \quad u(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi at}{l} - \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[-\frac{1}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi at}{l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2m+1} \sin \frac{\pi at}{l} \right] \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l}.$$

● При решении системы уравнений $C_k''(t) + \left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 C_k(t) = A_k(t)$, $k=2m-1$ — нечетные числа, следует учесть, что частота амплитуды внешней силы совпадает с частотой амплитуды первой гармоники, т. е. имеет место резонанс и частное решение следует искать в форме

$$\tilde{C}_1(t) = t \left(\alpha_1 \sin \frac{\pi at}{l} + \beta_1 \cos \frac{\pi at}{l} \right).$$

$$17.94. \quad u(x, t) = \frac{2Ql}{C_0 \pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} \right] \sin \frac{\pi k x_0}{l} \times \\ \times \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$17.95. \quad u(x, t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 t} \right) \sin \frac{\pi x}{4}.$$

$$17.96. \quad u(x, t) = \frac{x}{l} e^{-t} +$$

$$+ \frac{2l^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right]}{k[(\pi ka)^2 - l^2]} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$17.97. \quad u(x, t) = e^{-\frac{t}{4l^2}} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)[\pi(2k+1)^2 - 1]} \left[e^{-\frac{t}{4l^2}} - e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}\right)^2 t} \right].$$

$$17.98. \quad u(x, t) = \frac{x}{l} \sin \frac{\pi at}{2l} +$$

$$+ \frac{1}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{3l+1}{k} \sin \frac{\pi akt}{l} - 2 \sin \frac{\pi at}{2l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$17.99. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{l-x}{l} e^{-t} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-\left(\frac{\pi a(2m-1)}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi(2m-1)x}{l} +$$

$$+ \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\pi ak + l)(\pi ak - l)} \left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{\pi ak}{l}\right)^2 t} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$17.100. u(x, t) = e^{-t/l^2} +$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2 t} - e^{-t/l^2}}{(2k-1)\left(\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2 - 1\right)} \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x.$$

$$17.101. u(x, t) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{\sin \omega h}{\omega} \cos \omega x d\omega.$$

$$17.102. u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega^2 + 1} \cos \omega x d\omega.$$

$$17.103. u(x, t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{\sin \frac{\omega h}{2}}{\omega} \left(h \cos \frac{\omega h}{2} - \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega h}{2} \right) \times \\ \times \cos \omega x d\omega.$$

$$17.104. u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sin \omega h}{\omega} - h \cos \omega h \right) \sin \omega x d\omega.$$

17.105. Первый. 17.106. Первый. 17.107. Второй. 17.108. Второй. 17.109. Второй. 17.110. Второй, если $\tau = \lambda h$. 17.111. Первый, если $\tau = \lambda h$.

17.112.

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{u_{m, n+1} - u_{m, n}}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1, n+1} - 2u_{m, n+1} + u_{m-1, n+1}}{h^2}, & m=1, \dots, k-1, n=0, \dots, s-1, \\ u_{m, 0}, & m=0, \dots, k, \\ u_{0, n}, & n=0, \dots, s; \\ u_{k, n}, & \end{cases}$$

$$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n+1}, & m=1, \dots, k-1, n=0, \dots, s-1, \\ \varphi_m, & m=0, \dots, k, \\ \psi_{1, n}, & n=0, \dots, s, \\ \psi_{2, n}, & \end{cases}$$

$\bar{L}_h u_h = \bar{f}_h$. Порядок приближения разностным оператором L_h — второй по h и первый по τ . 17.113. $Lu = u_x' + u_y'$, порядок приближения — первый по h и второй по τ , если $\tau^2 = \lambda h$. 17.114. $Lu = u_{xx}'' + u_{yy}''$, порядок приближения второй. 17.115. $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{12h}$.

17.116. Разностные схемы могут быть следующими:

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{u_{m, n+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2}, & m=1, \dots, k-1, n=1, \dots, s-1, \\ u_{m, 0}, & m=0, \dots, k, \\ \frac{u_{m, 1} - u_{m, 0}}{\tau}, & \\ u_{0, n}, & n=0, \dots, s; \\ u_{k, n}, & \end{cases}$$

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{m, n+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2}, & m=1, \dots, k-1, n=1, \dots, s-1, \\ u_{m, 0}, & m=0, \dots, k, \\ \frac{u_{m, 1} - u_{m, -1}}{2\tau}, & \\ u_{0, n}, & n=0, \dots, s; \\ u_{k, n}, & \end{cases}$$

$$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n+1}, & m=1, \dots, k-1, n=0, \dots, s-1, \\ \varphi_m, & m=0, \dots, k, \\ \psi_m, & \\ \psi_{1, n}, & n=0, \dots, s. \end{cases} \quad \bar{L}_h u_h = \bar{f}_h.$$

17.117. $\tau=h, \bar{L}_h u_h \equiv$

$$\equiv \begin{cases} c_{m, n} \frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2} + d_{m, n} \frac{u_{m, n+1} - 2u_{m, n} + u_{m, n-1}}{h^2}, & m=1, \dots, k-1, n=1, \dots, s-1, \\ u_{m, n} \quad (x_m, y_n) \in \gamma_h; \\ \bar{f}_h \equiv \begin{cases} f_{m, n}, & m=1, \dots, k-1, n=1, \dots, s-1, \\ \psi_{m, n}, & (x_m, y_n) \in \gamma_h. \end{cases} \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. В случае данной области разностные уравнения составляются и для точек γ_h .

17.119. $u_{m+1, n+1} + u_{m-1, n+1} + u_{m-1, n-1} + u_{m+1, n-1} - 4u_{m, n} = 2h^2 f_{m, n}$. Порядок аппроксимации равен двум. ● $(Lu)_0 = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4$. В силу симметрии уравнения и симметрии шаблона положить $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = b$.

17.120. ◀ По определению аппроксимации имеем (см. соотношение (14))

$$\|\delta f_h\| \leq Bh^{\sigma}, \quad (*)$$

где $\delta \bar{f}_h = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_h$.

Положим $e_h(x_m, y_n) = \tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_{m, n}$. Здесь, как и ранее, $\tilde{u}(x, y)$ — решение краевой задачи (1), (2), а $\{\tilde{u}_{m, n}\} = \tilde{u}_h$ — решение разностной схемы (4). В силу линейности оператора \bar{L}_h имеем:

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(e_h) &= \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_{m, n}) \\ &= \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - L_h(\tilde{u}_{m, n}) = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_h = \delta \bar{f}_h, \end{aligned}$$

т. е. сеточная функция $e_h(x_m, y_n)$ является решением разностной схемы $\bar{L}_h u_h = \delta \bar{f}_h$. В силу устойчивости этой разностной схемы (соотношение (15)), а также используя неравенство (*), находим:

$$\|e_h(x_m, y_n)\| \leq C \|\delta \bar{f}_h\| \leq CBh^{\sigma} = Ah^{\sigma},$$

где $A = BC$. Тем самым неравенство (13) установлено, что и доказывает теорему.

17.121. ● Для доказательства неустойчивости достаточно рассмотреть разностную схему при некотором выборе правой части \bar{f}_h .

Положить $f_{m,n} = 0$ для всех m и n и $\varphi_m = (-1)^m \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Тогда разностная схема запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_{m,n+1} &= (1-\lambda) u_{m,n} + \lambda u_{m+1,n}, \\ u_{m,0} &= (-1)^m \varepsilon. \end{aligned}$$

Получить отсюда, что

$$\tilde{u}_{m,n} = (1-2\lambda)^n (-1)^m \varepsilon.$$

Затем показать, что

$$\|\tilde{u}_h\| = |1-2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \varepsilon.$$

Если $\|\bar{f}_h\| = \max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| = \varepsilon$, то, следовательно, выполняется равенство

$$\|\tilde{u}_h\| = |1-2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \cdot \|\bar{f}_h\|.$$

Сравнивая это равенство и соотношение (15) и учитывая, что

$$|1-2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \rightarrow \infty$$

при $h \rightarrow 0$, получаем, что исходная разностная схема неустойчива.
17.122.

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} A_{m,n} u_{m,n+1} + B_{m,n} u_{m,n-1} + C_{m,n} u_{m+1,n} + \\ \quad + D_{m,n} u_{m-1,n} + E_{m,n} u_{m,n}, \\ \quad n=1, \dots, s-1, m=1, \dots, k-1, \\ u_{m,0}, \quad m=0, \dots, k, \\ u_{0,n}, \quad n=0, \dots, s; \\ u_{k,n}, \end{cases}$$

$$f_h = \begin{cases} f_{m,n}, & n=1, \dots, s-1, m=1, \dots, k-1, \\ \varphi_m, & m=0, \dots, k, \\ \varphi_m + \tau \psi_m, \\ \Phi_n, \\ F_n, & n=0, \dots, s, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + \frac{d_{m,n}}{2\tau}, & B_{m,n} &= -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} - \frac{d_{m,n}}{2\tau}, \\ C_{m,n} &= \frac{a_{m,n}}{h^2} + \frac{c_{m,n}}{2h}, & D_{m,n} &= \frac{a_{m,n}}{h^2} - \frac{c_{m,n}}{2h}, \\ E_{m,n} &= -\frac{2a_{m,n}}{h^2} + 2\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + g_{m,n}. \end{aligned}$$

17.123.

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} A_{m,n} u_{m,n+1} + B_{m,n} u_{m,n-1} + C_{m,n} u_{m+1,n} + \\ \quad + D_{m,n} u_{m-1,n} + E_{m,n} u_{m,n}, \\ u_{m,0}, \\ u_{m,1}, \\ u_{0,n}, \\ u_{k,n}, \end{cases}$$

$$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n} \\ \Psi_m \\ \frac{1}{A_{m, 0} + B_{m, 0}} \{f_{m, 0} + 2\tau B_{m, 0} \Psi_m - C_{m, 0} \Phi_{m+1} - \\ - D_{m, 0} \Phi_{m-1} - E_{m, 0} \Phi_m\}, \\ \Phi_n \\ F_n \end{cases}$$

где значения коэффициентов те же, что и в задаче 17.122. ● Привлекая еще один горизонтальный ряд, соответствующий $n = -1$,

производную $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ заменить разностным отношением $\frac{u_{m, 1} - u_{m, -1}}{2\tau}$. Промежуточные значения $u_{m, -1}$ исключить, используя разностное уравнение

$$L_h u_h = A_{m, n} u_{m, n+1} + B_{m, n} u_{m, n-1} + C_{m, n} u_{m+1, n} + \\ + D_{m, n} u_{m-1, n} + E_{m, n} u_{m, n} = f_{m, n}.$$

При исследовании порядка аппроксимации учесть, что порядок аппроксимации уравнения равен двум. Для исследования порядка аппроксимации разностной схемы необходимо определить порядок аппроксимации начальных и граничных условий.

17.124. $A_{m, n} u_{m, n+1} + B_{m, n} u_{m, n-1} + C_{m, n} u_{m+1, n} + \\ + D_{m, n} u_{m-1, n} + E_{m, n} u_{m, n} = f_{m, n}, m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1.$
 $u_{m, 0} = \Phi_m, m = 0, \dots, k,$
 $u_{m, 1} = \Phi_m + \tau \Psi_m.$

$$u_{l, n} = (1 - \delta_{1n} h) u_{0, n} + h \Phi_n, u_{k, n} = \frac{h}{(1 + \delta_{2n} h)} F_n + \frac{u_{k-1, n}}{(1 + \delta_{2n} h)}.$$

Значения коэффициентов те же, что и в задаче 17.122.

17.125. $A_{m, n} u_{m, n+1} + B_{m, n} u_{m, n-1} + C_{m, n} u_{m+1, n} + \\ + D_{m, n} u_{m-1, n} + E_{m, n} u_{m, n} = f_{m, n}, m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1,$
 $u_{m, 0} = \Phi_m, m = 0, \dots, k.$

$$u_{m, 1} = \frac{1}{A_{m, 0} + B_{m, 0}} \{f_{m, 0} + 2\tau B_{m, 0} \Psi_m - C_{m, 0} \Phi_{m+1} - \\ - D_{m, 0} \Phi_{m-1} - E_{m, 0} \Phi_m\},$$

$$A_{0, n} u_{0, n+1} + B_{0, n} u_{0, n-1} + (C_{0, n} + D_{0, n}) u_{1, n} + (E_{0n} + 2h\delta_{1n} D_{0, n}) u_{0, n} = \\ = f_{0, n} + 2hD_{0, n} \Phi_n, (*)$$

$$(A_{0, 0} + B_{0, 0}) u_{0, 1} = f_{0, 0} + 2\tau B_{0, 0} \Psi_0 + 2hD_{0, 0} \Phi_0 - (C_{0, 0} + D_{0, 0}) \Phi_1 - \\ - (E_{0, 0} + 2h\delta_{10} D_{0, 0}) \Phi_0,$$

$$(A_{k, 0} + B_{k, 0}) u_{k, 1} = f_{k, 0} + 2\tau B_{k, 0} \Psi_k - 2hC_{k, 0} \Phi_0 - (C_{k, 0} + D_{k, 0}) \Phi_{k-1} - \\ - (E_{k, 0} - 2h\delta_{20} C_{k, 0}) \Phi_k,$$

$$A_{k, n} u_{k, n+1} + B_{k, n} u_{k, n-1} + (C_{k, n} + D_{k, n}) u_{k-1, n} + \\ + (E_{k, n} + 2h\delta_{2n} C_{k, n}) u_{k, n} = f_{k, n} - 2hC_{k, n} F_n.$$

Схема (*) имеет второй порядок аппроксимации на решении, обладающем ограниченными четвертыми производными. ◀ Заменим входящие в начальные и граничные условия производные центральными разностями. Для аппроксимации граничных условий в узлах

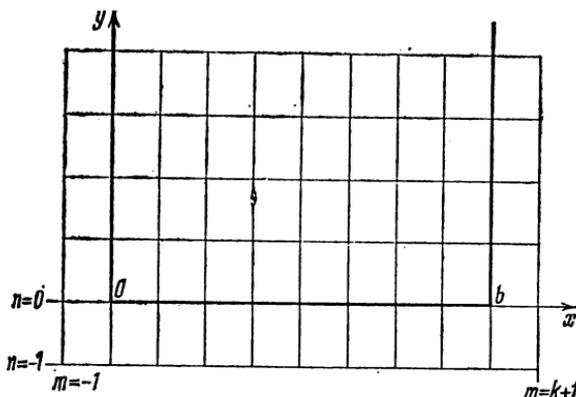


Рис. 243

(0, n) и (k, n) привлечем еще узлы вертикальных рядов, соответствующие $m = -1$ и $m = k + 1$ (см. рис. 243), и запишем следующие соотношения:

$$\frac{u_{1, n} - u_{-1, n}}{2h} + \delta_{1n} u_{0, n} = \Phi_n, \quad (**)$$

$$\frac{u_{k+1, n} - u_{k-1, n}}{2h} + \delta_{2n} u_{k, n} = F_n.$$

Разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальное уравнение задачи 17.122 в узлах (0, n) и (k, n), имеют вид

$$A_0, n u_{0, n+1} + B_0, n u_{0, n-1} + C_0, n u_{1, n} + D_0, n u_{-1, n} + E_0, n u_{0, n} = f_0, n,$$

$$A_k, n u_{k, n+1} + B_k, n u_{k, n-1} + C_k, n u_{k+1, n} + D_k, n u_{k-1, n} + E_k, n u_{k, n} = f_k, n.$$

Исключая из этих уравнений $u_{-1, n}$, $u_{k+1, n}$ с помощью выражений (**), получим

$$A_0, n u_{0, n+1} + B_0, n u_{0, n-1} + (C_0, n + D_0, n) u_{1, n} + (E_0, n + 2h\delta_{1n} D_0, n) u_{0, n} = f_0, n + 2hD_0, n F_1, n, \quad (***)$$

$$A_k, n u_{k, n+1} + B_k, n u_{k, n-1} + (C_k, n + D_k, n) u_{k-1, n} + (E_k, n - 2h\delta_{2n} C_k, n) u_{k, n} = f_k, n - 2hC_k, n F_2, n.$$

Значения решения в узлах (0, 1) и (k, 1) определяются из (***) при $n = 0$. Исключая величины $u_{0, -1}$, $u_{k, -1}$ с помощью начальных

условий $\frac{u_{0, 1} - u_{0, -1}}{2\tau} = \psi_0$, $\frac{u_{k, 1} - u_{k, -1}}{2\tau} = \psi_n$, получим выражения для определения $u_{0, 1}$, $u_{k, 1}$:

$$(A_{0, 0} + B_{0, 0}) u_{0, 1} = f_{0, 0} + 2\tau B_{0, 0} \psi_0 + 2hD_{0, 0} \Phi_0 - (C_{0, 0} + D_{0, 0}) \varphi_1 - (E_{0, 0} + 2h\delta_{10} D_{0, 0}) \varphi_0,$$

$$(A_{k, 0} + B_{k, 0}) u_{k, 1} = f_{k, 0} + 2\tau B_{k, 0} \psi_k - 2hC_{k, 0} F_0 - (C_{k, 0} + D_{k, 0}) \varphi_{k-1} - (E_{k, 0} - 2h\delta_{20} C_{k, 0}) \varphi_k. \blacktriangleright$$

17.126. Порядок аппроксимации равен двум. ● Для замены частных производных u''_{xx} , u''_{yy} использовать разностный оператор из задачи 17.108. Положить $\tau = h$.

17.127. 1)

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m, n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u_{m, n} + \frac{1}{h} u_{m-1, n}, \\ u_{m, 0}, \\ \bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n}, \\ \varphi_m. \end{cases} \end{cases}$$

2) Шаблон изображен на рис. 244. 4) Схема неустойчива при любом λ .

17.128. 1) $\bar{L}_h u_h =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m, n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) u_{m, n} - \frac{1}{h} u_{m-1, n}, \\ u_{m, 0}. \end{cases} \quad \bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n}, \\ \varphi_m. \end{cases}$$

2) Шаблон тот же, что и в задаче 17.127. 4) Схема устойчива при $\lambda \leq 1$.

17.129. 1) $\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m, n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u_{m, n} + \frac{1}{h} u_{m+1, n}, \\ u_{m, 0}, \end{cases}$

$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m, n}, \\ \varphi_m. \end{cases}$ 2) Шаблон изображен на рис. 245. 4) Схема неустой-

чива при любом λ . 17.130. Схема устойчива при условии $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

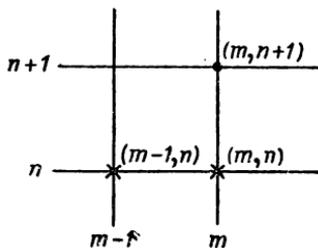


Рис. 244

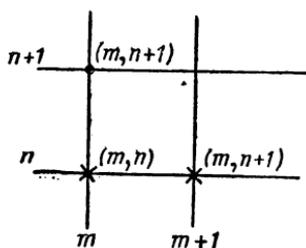


Рис. 245

17.131. Схема устойчива при любых h, τ . 17.132. Схема устойчива при условии $a\tau \leq h$. 17.133. Схема всегда устойчива. 17.134. Про-

гоночные коэффициенты $Q_{1, n} = -\frac{\alpha_{1, n}}{h\beta_{1, n} - \alpha_{1, n}}$, $H_{1, n} = \frac{h\Phi_{1, n}}{h\beta_{1, n} - \alpha_{1, n}}$, $n=1, \dots, s$. Значение решения на правой границе, необходимое для обратной прогонки,

$$u_{k, n} = \frac{\alpha_{2, n} H_{k, n} + h\Phi_{2n}}{\alpha_{2, 1}(1 - Q_{k, n}) + h\beta_{2, n}}, \quad n=1, \dots, s.$$

◀ Аппроксимируем граничные условия задачи 17.134 разностными соотношениями

$$\alpha_{1, n} \frac{u_{1, n} - u_{0, n}}{h} + \beta_{1, n} u_{0, n} = \Phi_{1, n}, \quad (*)$$

$$\alpha_{2, n} \frac{u_{k, n} - u_{k-1, n}}{h} + \beta_{2, n} u_{k, n} = \Phi_{2, n}, \quad n=0, \dots, s. \quad (**)$$

Полагая в формуле (25) $m=0$, запишем следующее равенство:

$$u_{0,n} = Q_{1,n} u_{1,n} + H_{1,n}, \quad n = 1, \dots, s. \quad (***)$$

Сравнивая равенства (*) и (***), получим начальные значения прогоночных коэффициентов

$$Q_{1,n} = -\frac{\alpha_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}, \quad H_{1,n} = \frac{h\Phi_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}, \quad n = 1, \dots, s.$$

Для обратной прогонки необходимо знать значение решения на правой границе $u_{k,n}$. Для определения этого значения запишем равенство (23) в узле (k, n) :

$$u_{k-1,n} = Q_{k+n} u_{k,n} + H_{k,n}, \quad n = 1, \dots, s. \quad (***)$$

Заметим, что все прогоночные коэффициенты определены по формулам (24). Сравнивая равенства (***) и (**), получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} Q_{k,n} u_{k,n} - u_{k-1,n} &= -H_{k,n}, \\ (\alpha_{2,k} + h\beta_{2,k}) u_{k,n} - \alpha_{2,k} u_{k-1,n} &= h\Phi_{2,n}. \end{aligned}$$

$u_{k,n}$ получим как решение этой системы. ►

17.135. $h=0,02$; $\tau=0,01$;

	λ					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,22	0,28	0,82	1,67	2,80	3,98
0,4	0,49	0,48	1,08	1,96	3,10	3,68
0,6	0,82	0,92	1,41	2,33	3,19	3,30
0,8	1,23	1,42	1,82	2,76	3,11	2,79
1,00	1,72	1,97	2,46	2,97	2,88	2,16

17.136. $h=0,01$; $\tau=0,01$;

ν	λ					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,2	0,20	0,20	0,40	0,60	0,80	0,80
0,4	0,40	0,20	0,39	0,59	0,78	0,60

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,6	0,60	0,39	0,37	0,56	0,54	0,40
0,8	0,80	0,57	0,34	0,49	0,28	0,20
1,00	1,00	0,73	0,47	0,20	0,00	0,00

17.137. $h=0,02$; $\tau=0,01$;

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	1,00	1,16	1,64	2,44	3,56	5,00
0,2	1,20	2,42	2,94	3,82	5,06	4,90
0,4	1,39	3,73	4,33	5,29	6,57	4,61
0,6	1,56	4,15	5,80	6,82	6,53	4,13
0,8	1,72	4,53	7,31	8,37	6,23	3,48
1,00	1,84	4,91	7,94	8,38	5,74	2,70

17.138. $h=0,01$; $\tau=0,01$;

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,2	-0,42	-0,03	0,41	0,93	1,53	3,01
0,4	-1,14	-0,08	0,68	1,52	2,44	7,28
0,6	-3,28	-0,14	0,97	2,12	4,18	14,60
0,8	-10,87	-0,51	1,27	2,75	8,14	26,44
1,0	-40,84	-2,30	1,56	4,20	15,18	44,60

17.139. $h=0,02$; $\tau=0,01$;

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	5,00	6,60	8,20	9,80	11,40	13,00
0,2	5,30	6,79	8,39	9,99	11,59	13,12
0,4	5,65	6,98	8,58	10,17	11,77	13,18
0,6	6,19	7,15	8,74	10,33	11,92	13,18
0,8	7,26	7,32	8,89	10,46	12,04	13,09
1,00	9,61	7,57	9,01	10,57	12,03	12,87

17.140. $h=0,02; \tau=0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,0
0,0	1,00	0,80	0,60	0,40	0,20	0,0
0,20	0,98	0,84	0,72	0,58	0,42	0,20
0,40	0,92	0,87	0,81	0,72	0,59	0,39
0,60	0,83	0,88	0,88	0,83	0,73	0,56
0,80	0,70	0,86	0,91	0,92	0,86	0,72
1,00	0,54	0,80	0,92	0,98	0,96	0,84

17.141. $h=0,02; \tau=0,01;$

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,20	-0,17	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
0,40	-0,72	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00
0,60	-1,63	0,10	0,04	0,00	0,00	0,00
0,80	0,97	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

17.142. $h=0,02; \tau=0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,28	0,46	0,83	1,28	1,52	1,27
0,4	0,30	0,42	0,53	0,60	0,54	0,38
0,6	-0,03	0,05	-0,05	-0,24	-0,43	-0,44
0,8	-0,67	-0,61	-0,87	-1,23	-1,47	-1,29
1,0	-1,57	-1,52	-1,90	-2,38	-2,62	-2,21

17.143. $h=0,01; \tau=0,01;$

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,00
0,0	0,0	0,59	0,95	0,95	0,59	0,00
0,2	0,50	0,54	0,57	0,58	0,57	0,53
0,4	0,60	0,70	0,88	1,10	1,29	1,31
0,6	2,01	2,51	3,54	4,88	6,08	6,31
0,8	8,05	9,90	13,58	18,31	22,41	23,03
1,0	25,35	30,58	40,44	52,78	63,21	64,34

17.144. $h=0,02$;

y	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,00
0,0	1,00	1,40	1,80	2,20	2,60	3,00
0,2	2,00	1,05	0,95	1,06	1,44	2,96
0,4	3,00	1,02	0,60	0,59	0,93	2,84
0,6	4,00	1,36	0,76	0,67	0,93	2,64
0,8	5,00	2,76	2,12	1,81	1,64	2,36
1,0	6,00	5,84	5,36	4,56	3,44	2,00

17.145. $h=0,02$;

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,20	0,08	0,32	0,51	0,72	0,99	0,84
0,40	0,32	0,72	1,07	1,41	1,78	1,76
0,60	0,72	1,23	1,68	2,12	2,56	2,76
0,80	1,28	1,82	2,65	3,22	3,82	3,84
1,00	2,00	2,44	2,96	3,56	4,24	5,00

17.146. $h=0,02$;

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,20	1,00	0,24	0,35	1,24	0,0	0,0
0,40	2,00	0,34	0,10	0,82	0,0	0,0
0,60	3,00	0,66	0,19	0,47	1,96	0,0
0,80	4,00	1,92	1,34	1,25	2,04	0,0
1,00	5,00	4,60	4,20	3,80	3,40	3,00

17.147. $h=0,02$;

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,63	0,89	1,10	1,26	1,41
0,20	1,00	0,36	0,44	0,54	0,64	1,29
0,40	2,00	0,32	0,26	0,28	0,32	1,20
0,60	3,00	0,83	0,66	0,56	0,45	1,12
0,80	4,00	2,86	2,06	1,69	1,19	1,05
1,00	5,00	4,84	4,36	3,56	2,44	1,00

17.148.

```
SUBROUTINE PARAB(A,F,FI,PSI1, PSI2,  
* K1,NS1,X,T,U)  
COMMON Y1, B  
DIMENSION X(K1),T(NS1),U(K1,NS1)  
HT=Y1/(NS1-1)  
HX=B/(K1-1)  
DO 2 I=1, K1  
X(I)=HX*(I-1)  
2 U(I,1)=F1(X(I))  
DO 3 J=1, NS1  
T(J)=HT*(J-1)  
U(1,J)=PSI1(T(J))  
3 U(NS1,J)=PSI2(T(J))  
A1=HT*A/HX**2  
A2=1.-2*A1  
K=K1-1  
NS=NS1-1  
DO 5 J=2, NS  
DO 5 I=2, K  
5 U(I,J+1)=A1*U(I+1,J)+A2*U(I,J)+  
* A1*U(I-1,J)+HT*F(X(I),T(J))  
RETURN  
END
```

17.149.

```
SUBROUTINE GIPER1(A,F,FI,PSI,EFL,EFR,  
* K1,NS1,X,Y,U)  
DIMENSION X(K1), Y(NS1), U(K1,NS1)  
COMMON /C/ Y1, B  
HY=Y1/(NS1-1)  
HX=B/(K1-1)  
7 FORMAT (///10X,'HX=',F7.4,10X,'HY=',F7.4)  
PRINT 7, HX, HY  
HY2=HY**2  
A1=HY2/(A*HX**2)  
DO 3 J=1, NS1  
Y(J)=HY*(J-1)  
U(1,J)=EFL(Y(J))  
U(K1,J)=EFR(Y(J))  
3 CONTINUE  
DO 10 I=1, K1  
10 X(I)=HX*(I-1)  
DO 2 I=1, K1  
U(I,1)=F1(X(I))  
IF (I.EQ.1) GO TO 2  
IF (I.EQ.K1) GO TO 2  
U(I,2)=-.5*(HY2/A)*F(X(I),  
* Y(1))+HY*PSI(X(I))+.5*A1  
* (F1(X(I+1))+F1(X(I-1)))+(1.-A1)*F1(X(I))  
2 CONTINUE  
K=K1-1  
NS=NS1-1  
DO 5 J=2, NS  
DO 5 I=2, K  
5 U(I,J+1)=- (HY2/A)*F(X(I), Y(J))-  
* U(I,J-1)+A1*(U(I+1,J)+U(I-1,J))*
```

```

* +2.*(1.-A1)*U(1,J)
RETURN
END
17.150.
SUBROUTINE GIPER3(A,F,FI,PSI,ELF,EFR,DLT1,
* DLT2,K1,NS1,X,Y,U)
DIMENSION X(K1), Y(NS1), U(K1,NS1)
COMMON /C/ Y1, B
HY=Y1/(NS1-1)
HX=B/(K1-1)
7 FORMAT (///10X,'HX=',F7.4,10X,'HY=',F7.4)
PRINT 7, HX, HY
HY2=HY**2
A1=HY2/(A*HX**2)
NS=NS1-1
K=K0-1
DO 11 I=1, K1
10 X(1)=HX*(I-1)
DO 2 J=1, NS1
2 Y(J)=HY*(J-1)
DO 3 I=1, K1
U(1, 1)=F1(X(I))
IF (1.EQ.1.OR.1.EQ.K1) GO TO 3
U(1,2)=-.5*(HY2/A)*F(X(I), Y(1))+HY*PSI(X(I))
* +.5*A1*(F1(X(I+1))+F1(X(I-1)))
* +(1.-A1)*F1(X(I))
3 CONTINUE
T1=1.-A1+HX*A1*DLT1(Y(1))
T2=1.-A1-HX*A1*DLT2(Y(1))
U(1,2)=-.5*(HY2/A)*F(X(I),Y(1))+
* HY*PSI(X(I))-HX*A1*ELF(Y(1))+A1*
* F1(X(2))+T1*F1(X(I))
U(K1,2)=-.5*(HY2/A)*F(X(K1),
* Y(1))+HY*PSI(X(K1))
* +HX*A1*EFR(Y(1))+A1*F1(X(K))+T2*F1(X(K1))
DO 6 J=2, NS
DO 5 I=2, K
U(I,J+1)=-(HY2/A)*F(X(I),Y(J))-
* U(I,J-1)+A1*(U(I+1,J)+U(I-1,J))+
* 2.*(1.-A1)*U(I,J)
U(1, J+1)=-U(1, J-1)+2.*A1*U(1,J)+
* 2.*(1.-A1+A1*HX*DLT1(Y(J)))*U(1,J)-
* (HY2/A)*F(X(1), Y(J))-2.*A1*HX*ELF(Y(J))
U(K1,J+1)=-U(K1,J-1)+2.*A1*
* U(K,J)+2.*(1.-A1-HX*A1*DLT2(Y(J)))*U(K,J)-
* (HY2/A)*F(X(K),Y(J))+2.*A1*EFR(Y(J))
6 GONTINUE
RETURN
END
17.151.
SUBROUTINE ELIPT(F,FI,EFL,EFV,EFR,K1,
* NS1,X,YU)
DIMENSION X(K1),Y(NS1), U(K1,NS1)
COMMON /W/ A, KT, AM0, EPS
COMMON /C/ B
HX=B/(K1-1)

```

```

17 FORMAT (///10X,'HX=',F7.4)
PRINT 17, HX
HX2=HX**2
K=K1-1
NS=NS1-1
DO 6 J=1, NS1
Y(J)=HX*(J-1)
K2=KT*(J-1)+K1
DO 6 I=1, K2
X(I)=HX*(I-1)
IF (I.GT.1.AND.I.LT.K2)U(I,J)=AM0
IF (I.EQ.1)U(I,J)=EFL(Y(J))
IF (I.EQ.K2)U(I,J)=EFP(X(I),Y(J))
IF (J.EQ.1)U(I,J)=FI(X(I))
IF (J.EQ.NS1)U(I,J)=EFV(X(I))
6 CONTINUE
4 D=0
DO 3 J=2, NS
M=KT*(J-1)+K
DO 3 I=2, M
R=(U(I+1,J)+U(I-1,J)+A*(U(I,J+1)+
* U(I,J-1))-HX2*F(X(I),Y(J)))/(2.*(1.+A))
D1=ABS(R-U(I,J))
IF (D1.GT.D)D=D1
3 U(I,J)=R
IF (D.GT.EPS)GO TO 4
RETURN
END

```

● При численной реализации разностной схемы для краевой задачи 17.117 необходимо привести уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_1(x, y).$$

Для решения системы линейных разностных уравнений применить метод простой итерации по формулам:

$$u_{m,n}^{(i+1)} = \frac{1}{2(1+a)} (u_{m+1,n}^{(i)} + u_{m-1,n}^{(i)} + a(u_{m,n+1}^{(i)} + u_{m,n-1}^{(i)}) - h^2 f_1(x_m, y_n),$$

где i — номер итерации. Пусть ϵ — абсолютная погрешность вычислений. Будем считать, что решение получено с заданной точностью, если выполнено соотношение

$$\max_{m,n} |u_{m,n}^{(i)} - u_{m,n}^{(i+1)}| \leq \epsilon.$$

При написании программы использовать указанное выше правило. Использовать идентификаторы: F — правые части, FI, EFL, EFP, EFV — идентификаторы функций, вычисляющих краевые условия на нижней, левой, правой, верхней границе соответственно. AM0 — возможная вариация для значения $u_{m,n}^{(0)}$; KT=0 для прямоугольной области, KT=1 для трапецидальной области.

17.152.

```

a) SUBROUTINE PROGNI (A,F,FI,PSI1, PSI2,
* K1,NS1,X,T,U,Q,H)
COMMON Y1, B

```

```

DIMENSION X(K1),T(NS1), U(K1,NS1),Q(K1,NS1), H(K1,NS1)
HT=Y1/(NS1-1)
HX=B/(K1-1)
A2=(HX**2)/(A*HT)
K=K1-1
DO 2 I=1, K1
X(I)=HX*(I-1)
2 U(I,1)=F1(X(I))
DO 3 J=1, NS1
T(J)=HT*(J-1)
Q(I,J)=0
H(I,J)=PSI1(T(J))
U(K1,J)=PSI2(T(J))
3 U(1,J)=H(1,J)
DO 20 J=2, NS1
DO 7. I=1, K
Q(I+1,J)=1./(2.+A2-Q(I,J))
7 H(I+1,J)=Q(I+1,J)*(A2*U(I,J-1)+
* HT*F(X(I),T(J))+H(I,J))
I=K1
8 U(I-1,J)=Q(I,J)*U(I,J)+H(I,J)
IF (3-1) 15, 20, 20
15 I=I-1
GO TO 8
20 CONTINUE
RETURN
END

6) SUBROUTINE PROGN2(A,F,FI,ALF1,BET1,
* ALF2,BET2,EF1,
* EF2,K1,NS1,X,T,U,Q,H)
COMMON /C/ Y1, B
DIMENSION Q(K1,NS1), H(K1,NS1)
DIMENSION X(K1), T(NS1), U(K1, NS1)
HT=Y1/(NS1-1)
HX=B/(K1-1)
17 FORMAT (///10X, 'HX=', F7.4,10X, 'HT=', F7.4)
PRINT 17, HX, HT
A2=(HX**2)/(A*HT)
K=K1-1
DO 2 I=1, K1
X(I)=HX*(I-1)
2 U(I,1)=F1(X(I))
DO 3 J=1, NS1
T(J)=HT*(J-1)
Q(I,J)=-ALF1(T(J))/(HX*BET1(T(J))-ALF1(T(J)))
H(I,J)=HX*EF1
* (T(J))/(HX*BET1(T(J))-ALF1(T(J)))
3 CONTINUE
DO 20 J=2, NS1
DO 7I=1, K
Q(I+1,J)=1./(2.+A2-Q(I,J))
7 H(I+1,J)=Q(I+1,J)*(A2*U(I,J-1)+
* HT*F(X(I),T(J))+H(I,J))
I=K1
U(I,J)=(ALF2(T(J))*H(K1,J)+HX*
* EF2(T(J)))/(ALF2(T(J))*(1.-Q(K1,J))+

```

```

      * HX*BET2(T(J,J))
      8 U(I-1,J)=Q(I,J)*U(I,J)+H(I,J)
        IF (2-I) 15, 20, 20
    15 I=I-1
        GO TO 8
    20 CONTINUE
        RETURN
        END

```

17.153. Для задачи 17.135 ответ записывается следующим образом:

```

FUNCTION (T,X)
F=-.5*T*X**2
RETURN
END

```

Ответы для остальных задач отличаются только вторым оператором, определяющим значение F.

17.154. Ответ к задаче 17.135:

```

FUNCTION F1(X)
F1=X**2
RETURN
END
FUNCTION PSI(X)
PSI=SIN(X)
RETURN
END
FUNCTION EFL(T)
EFL=EXP(T)-1
RETURN
END
FUNCTION EFP (T)
EFP=4.*COS(T)
RETURN
END

```

Ответы к другим задачам отличаются вторыми операторами.

17.155. Ответ к задаче 17.135:

```

EXTERNAL F,F1,PSI,EFL,EFP
DIMENSION X(101), T(101), U(101,101)
COMMON /C/ Y1, B
Y1=1
B=2
DATA A /1./, K1 /101/, NS1 /101/
CALL GIPER1(A,F,F1,PSI, EFL, EFP,
25 * K1,NS1,X,T,U)
  * K1,NS1,X,T,U)
  * 110('—')/15X, 'T/X', 2X, 11F8.2/(11X,F8.2,
  * 1X, 11F8.2))
  PRINT 25, (X(I), I=1, K1, 10), (T(J), (U(I,J),
  * I=1, K1, 10), J=1, NS1, 10)
  STOP
  END

```

● Задание для ЭВМ должно содержать 7 программных единиц: указанную здесь основную программу, а также программы, полученные при решении задач 17.149, 17.153, 17.154. Программа решения любой другой задачи отличается от приведенной операторами, содержащими обращение к соответствующим подпрограммам.

ГЛАВА 18

$$18.4. y(x) = e^x - 2x - \int_0^x 2xy(t) dt.$$

$$18.5. y(x) = 2x - 9 + \int_2^x (2 - x + t) y(t) dt.$$

$$18.6. y(x) = e^x(x-1) - \sin x + x + \int_0^x (\sin x - e^x(x-t)) y(t) dt.$$

$$18.7. y(x) = e^x - x - \frac{1}{2} \int_0^x x(x-t)^2 y(t) dt.$$

$$18.8. y(x) = \frac{x^3}{6} - x - \int_0^x \left(x-t - \frac{(x-t)^3}{6} \right) y(t) dt.$$

18.9. ● Воспользоваться формулой

$$\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_a^{t_1} y(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t) dt.$$

$$18.10. y(x) = x + \pi + \int_{\pi}^x t \sin y(t) dt. \quad 18.11. y(x) = x^3 - x + 1 +$$

$$+ \int_1^x y^2(t) dt.$$

$$18.12. y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \int_0^x y_1^2(t) dt.$$

$$18.13. y_1(x) = -3 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = 1 + \int_0^x y_3(t) dt, \quad y_3(x) =$$

$$= -1 + \frac{3}{2} \int_0^x y_2^2(t) dt. \quad 18.14. y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) =$$

$$= \int_0^x y_3(t) dt, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x t y_1^3(t) dt - \int_0^x y_2^2(t) dt. \quad 18.15. y(x) =$$

$$= e^x(x+1). \quad 18.16. y(x) = e^{x^2/2}. \quad 18.17. y(x) = \frac{1}{1+x^2} + x \operatorname{arctg} x -$$

$$- \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad 18.18. y(x) = \cos x e^{-(x+\sin x)}. \quad 18.19. y(x) = 2e^x -$$

$$- 2 \cos x + 5 \sin x. \quad 18.20. y(x) = -e^{-x}. \quad 18.21. y(x) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(e^x + 3 \cos x + 3 \sin x - 4e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \quad 18.22. y(x) = 1.$$

- 18.23. $y(x) = x \operatorname{ch} x$. 18.24. $y(x) = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x}$
 $\times \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x + 3 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)$. 18.25. $y(x) = e^x$. 18.26. $y(x) = x$.
- 18.27. $y(x) = 1$. 18.28. $y(x) = 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + x e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.
- 18.29. $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. 18.30. $y(x) = e^{\frac{x^{p+1}}{p+1}}$. 18.31. $y(x) = \sin x$.
- 18.32. $y(x) = \operatorname{ch} x$. 18.33. $y(x) = (2e)^x$. 18.34. $y(x) = (1+x^2) e^{-\frac{1}{2}x}$.
- 18.35. $y_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}$. 18.36. $y_2(x) = x + x \cos x - \sin x$.
- 18.37. $y_2(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$. 18.38. $e^{\lambda(t-x)}$. 18.39. $te^{\lambda \frac{x^2-t^2}{2}}$. 18.40. $x^2 e^{\lambda \frac{x^3-t^3}{3}}$.
- 18.41. $xt e^{\lambda \frac{x^3-t^3}{3}}$. 18.42. $xt^2 e^{\lambda \frac{x^4-t^4}{4}}$. 18.43. $e^{(\lambda+1)(x-t)}$.
- 18.44. $2^{\operatorname{sh} x} - \operatorname{sh} t e^{\lambda(x-t)}$. 18.45. $\frac{1+x^2}{1+t^2} e^{\lambda(x-t)}$. 18.46. $\frac{t^2-t+1}{x^2-x+1} e^{\lambda(x-t)}$.
- 18.47. $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} e^{\lambda(x-t)}$. 18.50. $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 18.51. $x e^{\frac{x^3}{3}}$. 18.52. $\frac{1}{5} e^{3x} - \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$.
- 18.53. $e^x \operatorname{ch} x$. 18.54. $\frac{e^x}{1+x^2}$. 18.55. $e^x(x-1) + 1$.
- 18.56. $\operatorname{ch} x - 1$. 18.57. $e^{2x} - e^x$. 18.58. $\frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$.
- 18.59. $2e^x - x - 1$. 18.60. $2 \sin x - x$. 18.61. $y(x) = \frac{1}{3} e^x - \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \times$
 $\times \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\pi}{6} \right)$. 18.62. $\frac{1}{4} e^{2x} (2x+3) + \frac{1}{4}$. 18.63. $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3} x$.
- 18.64. 1. 18.67. $2 - e^{-x}$. 18.68. $\operatorname{ch} x + \cos x$. 18.69. $e^{-x} \left(1 + \frac{x^2}{2} \right)$.
- 18.70. $\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{2}} \left(1 + 4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{5}}{2} x \right)$. 18.71. $2 - \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x$.
- 18.72. $y_1(x) = 1 - 2 \cos x$, $y_2(x) = 2 \sin x$. 18.73. $y_1(x) = \frac{3}{25} - \frac{6}{5} x - \frac{1}{25} e^x (3 \cos 2x - 4 \sin 2x)$,
 $y_2(x) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$.
- 18.74. $y_1(x) = x + e^{-x} - e^{x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$, $y_2(x) =$
 $= -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$. 18.75. $y_1(x) = (x+2) \sin x + (2x+1) \cos x$,
 $y_2(x) = -\left(\frac{1}{2} + x \right) \sin x + \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) \cos x$. 18.76. $y_1(x) = 2 \sin x$,
 $y_2(x) = 2 \cos x - 1$, $y_3(x) = x$. 18.78. e^x . 18.79. $x - \frac{x^2}{2}$. 18.80. $1 - x \ln 3$.

- 18.81. 1. 18.82. x . 18.83. 3. 18.84. Решения нет. 18.85. $e^{-x} \left(\frac{1}{2} - \sin x \right)$.
 18.86. xe^{x^2} . 18.87. $3(2x-1)$. 18.88. $\operatorname{ch} x$. 18.89. $x^2 \left(6 + \frac{1}{2} x^2 \right)$. 18.90. $2 \sin x$.
 18.91. $2 \cos x - 1$. 18.92. Решения нет. 18.93. $\frac{1}{2} (e^{2x} - 1)$.
 18.94. $e^x \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \right)$. 18.95. 1. 18.96. 1. 18.97. $\frac{15}{4} x$. ● Воспользоваться формулой $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. 18.98. $3x$. 18.99. $\frac{2}{3}$. 18.100. $1 - x$.
 18.101. $4 \sin x$. 18.102. $\frac{2}{3} \cos x$. 18.103. $R(x, t, \lambda) = \frac{1}{1 - \pi\lambda}$,
 $y(x) = \sin x$. 18.104. $R(x, t, \lambda) = 2^{x+t} \frac{1}{1 - \frac{3\lambda}{2 \ln 2}}$, $y(x) = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} \times$
 $\times 2^{x+1} + x$. 18.105. $R(x, t, \lambda) = x \sin 2\pi t$, $y(x) = \cos 2\pi x$.
 18.106. $R(x, t, \lambda) = \frac{xe^{t\lambda}}{1 - \lambda}$, $y(x) = e^{-x} + x$. 18.107. $R(x, t, \lambda) =$
 $= \frac{2}{2 - \lambda} \sin x \cos t$, $y(x) = 1 + 2 \sin x$. 18.109. $1 + \frac{1}{4} x$.
 18.110. $+\frac{1}{3} \cos 2\pi x$. 18.111. $x - \pi \cos x$. 18.112. $7 + 6x^2$.
 18.113. $\sin x - \frac{1}{6} x$. 18.114. $\sin x + \cos x$. 18.115. Решения нет.
 18.116. $x + C(1 - x^2)$. 18.117. x . 18.118. $\cos^2 x + \frac{1}{2(2 - \ln 2)}$.
 18.119. Cx . 18.120. 0. 18.121. $\cos 2\pi x$. 18.122. $x + \frac{1}{2}$.
 18.123. $C \left(\frac{5}{2} x + x^2 \right)$. 18.124. Решения нет. 18.125. $1 + \sqrt{x}$.
 18.126. $C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 18.127. $2\pi^2 \cos 2\pi x + \frac{5}{3} (2x^2 - 1)$. 18.128. 0.
 18.129. $\lambda = \frac{6}{7}$, $y(x) = C(1 + 2x)$. 18.130. $\lambda = \frac{3}{2}$, $y(x) = C(1 - x^2)$.
 18.131. $\lambda = 1$, $y(x) = C|x|$. 18.132. $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $y(x) = Cx$. 18.133. $\lambda = \frac{2}{\pi}$,
 $y(x) = C \cos x$. 18.134. $\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{1,2}(x) = C(\sqrt{3}x \pm 1)$.
 18.135. $\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}(e-1)}$, $y_{1,2}(x) = C \left(\sqrt{\frac{3}{2}(e-1)} x \pm 1 \right)$.
 18.136. $\lambda = -2\pi$, $y(x) = C$. 18.137. $\lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi}$, $y_{1,2}(x) = C(\sin x \pm \cos x)$.
 18.138. $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 18.139. При $\lambda \neq \frac{6}{5}$ $y(x) =$
 $= x^2 + \frac{1}{2} \frac{7\lambda}{6 - 5\lambda} x$, при $\lambda = \frac{6}{5}$ решения нет. 18.140. При $\lambda \neq 2$
 $y(x) = \sin 2\pi x$, при $\lambda = 2$ $y(x) = \sin 2\pi x + Cx$. 18.141. При $\lambda \neq \frac{6}{7}$ $y(x) =$

$= 1 - \frac{3}{2}x$, при $\lambda = \frac{6}{7} y(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1+2x)$. 18.142. При $\lambda \neq$

$\neq -2\pi y(x) = \frac{2\pi}{2\pi + \lambda}x$, при $\lambda = -2\pi$ решения нет. 18.143. $y(x) =$

$= \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 18.144. При $\lambda \neq 1$ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2\lambda}{8(1-\lambda)}$.

18.145. $y(x) = \cos x + \frac{\pi\lambda}{2} \sin x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 18.146. При $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} y(x) =$

$= \sin \pi x + \frac{\frac{2}{\pi}\lambda}{1 - \frac{3}{3}\lambda}x$, при $\lambda = \frac{1}{2} y(x) = \sin \pi x + \frac{3}{2\pi}x + C$, при $\lambda = \frac{3}{2}$

решения нет. 18.147. При $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2} y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{\lambda}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} \times$

$\times \left((1+2\lambda)x + 1 + \frac{2}{3}\lambda \right)$, при $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ решения нет. 18.148. При

$\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi} y(x) = 1 - \frac{2\lambda}{1 + \frac{\lambda\pi}{2}} \sin x$, при $\lambda = \frac{2}{\pi} y(x) = 1 - \sin x + C \cos x$,

при $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ решения нет. 18.149. $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $y_n = \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$.

18.150. $\lambda_n = -\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2$, $y_n = \sin \pi \frac{2n+1}{2}x$, $n=0, 1, 2, \dots$

18.151. $\lambda_n = -\omega_n^2$, где ω_n — корни уравнения $\omega = \operatorname{ctg} \omega$, $y_n =$
 $= \cos \omega_n(x-1)$, $n \in \mathbb{N}$. 18.152. $\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n = \sin \frac{2n+1}{2}x$,

$n=0, 1, 2, \dots$ 18.153. $\lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n = \cos \frac{2n+1}{2}x$, $n=0, 1,$

$2, \dots$ 18.154. $\lambda_n = 1 - \pi^2 n^2$, $y_n = \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. 18.155. $\lambda_n = -1 - \pi^2 n^2$,

$y_n = \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. 18.156. $\lambda_0 = 1, y_0 = 1$; $\lambda_n = 1 - 4n^2$, $y_n = C_1 \cos 2\pi n x +$
 $+ C_2 \sin 2\pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. 18.157. $\lambda_n = 1 + \omega_n^2$, где ω_n — корни уравнения

$\omega = \operatorname{ctg} 2\omega$, $y_n = \cos \omega_n x$, $n \in \mathbb{N}$. 18.158. При $\lambda \neq \lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda} \cdot \frac{4 \sin \pi (2k+1)x}{\pi (2k+1)}$$

и $\lambda = \lambda_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda_{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2m}} \cdot \frac{4 \sin \pi (2k+1)x}{\pi (2k+1)} + C \sin 2\pi m x;$$

при $\lambda = \lambda_{2m+1}$, $m=0, 1, \dots$, решения нет. 18.159. При $\lambda \neq \lambda_n =$
 $= -\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $n=0, 1, 2, \dots$

$$y(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2}x - \lambda \left(\frac{1}{\lambda + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{\lambda + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2}x \right);$$

при $\lambda = \lambda_0 = -\frac{\pi^2}{4}$ и $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9\pi^2}{4}$ решения нет; при $\lambda = \lambda_n$, $n = 2, 3, \dots$,

$$y(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x - \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{\lambda_n + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} x \right) + C \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} x.$$

18.160. При $\lambda \neq \lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$y(x) = x - \pi + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}{\lambda - \lambda_n} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} x;$$

при $\lambda = \lambda_n$ решения нет. 18.161. При $\lambda = \lambda_n = 1 - 4\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y(x) = (1 - \lambda)^{-1}$; при $\lambda = \lambda_0 = 1$ решения нет, при $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda_n} + C_1 \cos 2nx + C_2 \sin 2nx.$$

18.162 ¹⁾ .	18.163.	18.164.	18.165.	18.166.	18.167.
-3,1459	-4,3533	0,5335	63,0353	1,0000	0,0000
-3,0518	-4,3578	0,3333	63,9561	1,0135	0,2209
-2,9692	-4,3631	0,1614	64,8184	1,0172	0,4469
-2,8983	-4,3688	0,0109	65,6236	1,0111	0,6780
-2,8387	-4,3747	-0,1233	66,3731	0,9955	0,9142
-2,7903	-4,3806	-0,2448	67,0681	0,9709	1,1557
-2,7527	-4,3863	-0,3566	67,7100	0,9376	1,4025
-2,7257	-4,3914	-0,4608	68,2999	0,8963	1,6546
-2,7089	-4,3956	-0,5594	68,8388	0,8476	1,9121
-2,7015	-4,3985	-0,6535	69,3277	0,7921	2,1751
-2,7033	-4,3998	-0,7444	69,7680	0,7306	2,4436
-2,7137	-4,3988	-0,8332	70,1604	0,6641	2,7176
-2,7321	-4,3950	-0,9209	70,5058	0,5933	2,9972
-2,7577	-4,3877	-1,0082	70,8054	0,5192	3,2825
-2,7900	-4,3759	-1,0959	71,0600	0,4428	3,5734
-2,8282	-4,3585	-1,1848	71,2707	0,3651	3,8701
-2,8715	-4,3341	-1,2758	71,4384	0,2870	4,1726
-2,9193	-4,3008	-1,3695	71,5642	0,2096	4,4809
-2,9707	-4,2563	-1,4668	71,6409	0,1340	4,7950
-3,0247	-4,1974	-1,5688	71,6940	0,0610	5,1150
-3,0811	-4,1198	-1,6765	71,6998	-0,0083	5,4410

¹⁾ Ответы к задачам 18.162—18.184 приводятся в виде значений функции $y(x)$ в точках отрезка $[0, 1]$, выбранных с шагом $\Delta x = 0,05$, т. е. $y_k = y(x_k) = y(k\Delta x)$, $k = 0, 1, \dots, 20$. При решении этих задач методом конечных сумм, либо моментов следует сравнить значения полученного решения с приведенным в точках вида $x_k = k \cdot 0,05$, $k = 0, 1, \dots, 20$.

18.168.	18.169.	18.170.	18.171.	18.172.	18.173.
0,3123	2,4334	-1,1130	0,9897	-0,1988	0,8313
0,2985	2,3247	-1,0644	0,9686	-0,1636	0,8287
0,2796	2,1981	-1,0122	0,9376	-0,1312	0,8039
0,2555	2,0532	-0,9562	0,8970	-0,1016	0,7577
0,2264	1,8890	-0,8963	0,8469	-0,0744	0,6912
0,1925	1,7072	-0,8322	0,7879	-0,0497	0,6062
0,1539	1,5056	-0,7639	0,7202	-0,0273	0,5048
0,1111	1,2843	-0,6910	0,6446	-0,0071	0,3894
0,0641	1,0430	-0,6134	0,5617	0,0110	0,2629
0,0134	0,7813	-0,5308	0,4722	0,0270	0,1281
-0,0407	0,4988	-0,4431	0,3768	0,0410	-0,0116
-0,0978	0,1951	-0,3500	0,2763	0,0530	-0,1528
-0,1575	-0,1303	-0,2513	0,1719	0,0630	-0,2922
-0,2192	-0,4778	-0,1466	0,0643	0,0711	-0,4265
-0,2827	-0,8480	-0,0358	-0,0455	0,0774	-0,5526
-0,3472	-1,2413	0,0815	-0,1565	0,0818	-0,6672
-0,4125	-1,6584	0,2056	-0,2675	0,0842	-0,7678
-0,4780	-2,0997	0,3369	-0,3777	0,0848	-0,8518
-0,6076	-2,5659	0,4755	-0,4860	0,0834	-0,9172
-0,6708	-3,0576	0,6220	-0,5914	0,0802	-0,9623
	-3,5754	0,7766	-0,6929	0,0750	-0,9859

18.174.	18.175.	18.176.	18.177.	18.178.	18.179.
-2,0000	-2,8204	4,7481	9,0000	-0,7005	2,0380
-2,0579	-2,7112	4,9997	9,6196	-0,5713	1,8073
-2,1294	-2,5946	5,2563	10,4009	-0,4441	1,5597
-2,2145	-2,4700	5,5178	11,3784	-0,3191	1,2958
-2,3133	-2,3366	5,7844	12,5934	-0,1964	1,0164
-2,4257	-2,1938	6,0560	14,0952	-0,0760	0,7219
-2,5517	-2,0408	6,3326	15,9423	0,0420	0,4131
-2,6913	-1,8768	6,6142	18,2048	0,1574	0,0909
-2,8446	-1,7009	6,9008	20,9659	0,2702	-0,2436
-3,0114	-1,5122	7,1924	24,3244	0,3804	-0,5896
-3,1920	-1,3096	7,4890	28,3977	0,4878	-0,9456
-3,3861	-1,0922	7,7906	33,3252	0,5923	-1,3104
-3,5938	-0,8587	8,0971	39,2718	0,6938	-1,6823
-3,8152	-0,6050	8,4087	46,4331	0,7924	-2,0595
-4,0502	-0,3388	8,7252	55,0407	0,8879	-2,4400
-4,2988	-0,0497	9,0468	65,3683	0,9802	-2,8212
-4,5610	0,2607	9,3734	77,7398	1,0693	-3,2004
-4,8369	0,5939	9,7050	92,5376	1,1552	-3,5743
-5,1263	0,9518	10,0416	110,2132	1,2376	-3,9390
-5,4294	1,3351	10,3832	131,3000	1,3167	-4,2900
-5,7462	1,7488	10,7297	156,4264	1,3923	-4,6216

18.180.	18.181.	18.182.	18.183.	18.184.
0,0000	1,0000	-1,0000	10,0000	0,2500
0,0501	1,1550	-1,0087	11,0564	0,3279
0,1004	1,3207	-1,0196	11,6033	0,4112
0,1517	1,4969	-1,0398	12,5516	0,5029
0,2027	1,6862	-1,0515	13,1184	0,6005
0,2556	1,8859	-1,0674	14,0373	0,7127
0,3076	2,1029	-1,0692	14,5906	0,8301
0,3625	2,3292	-1,0641	15,4312	0,9712
0,4151	2,5790	-1,0452	15,9774	1,1155
0,4717	2,8354	-1,0042	16,7572	1,2966
0,5247	3,1245	-0,9569	17,3502	1,4771
0,5823	3,4152	-0,8761	18,1492	1,7136
0,6349	3,7512	-0,8027	18,8795	1,9427
0,6926	4,0800	-0,6992	19,8175	2,2555
0,7443	4,4708	-0,6154	20,7997	2,5495
0,8008	4,8389	-0,5200	22,0172	2,9672
0,8508	5,2909	-0,4442	23,3845	3,3491
0,9053	5,6921	-0,3751	25,0395	3,9123
0,9535	6,2067	-0,3108	26,9496	4,4129
1,0059	6,6194	-0,2539	29,2271	5,1786
1,0499	7,2710	-0,1807	31,8675	5,7222

18.185.

```

SUBROUTINE INTEGR (N, C, X, A, RK, R, F, EF)
  DIMENSION X(N),A(N),RK(N,N),R(N)
  DO 5 I=1, N
  DO 6 J=1, N
  6 RK(I,J)=-C*A(J)*F(X(I), X(J))
  RK(I,I)=1.+RK(I, I)
  5 R(I)=EF(X(I))
  CALL EXCLUS(RK, R, N)
  RETURN
  END

```

Подпрограмма для решения уравнения Вольтерра второго рода отличается от вышеприведенной следующими операторами:

```

RK(I, J)=-C*A(J)*F(X(I),X(J))
IF (J.GT.I) RK(I, J)=0.
IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) RK(I,J)=0.
6 CONTINUE
RK(I,I)=1.+RK(I,I)

```

15.186. Ответ приводится для решения задачи 18.162:

```

EXTERNAL F1, FF1
DIMENSION X(21), A(21), RK(21,21), R(21)
N=21
A1=0.
B=1.
H=(B-A1)/(N-1)
N1=N-1
C=4.
DO 5 I=1, N
5 X(I)=(I-1)*H
DO 6 J=2, N1, 2
A(J)=4.*H/3.
IF(J.NE.N1)A(J+1)=2.*H/3.

```

```

6 CONTINUE
  A(1)=H/3.
  A(N)=A(1)
  CALL INTEGR (N, C, X, A, RK, R, FF1, F1)
  PRINT 9, (X(I), R(I), I=1,N)
9  FORMAT (50X, 'РЕШЕНИЕ' //10,X, 'X',
* 10X, 'Y'/(1H0, 2F15.6))
  STOP
  END

```

● Задание для ЭВМ должно содержать 3 программных модуля: указанную здесь основную программу, а также программы, реализующие соответствующие подпрограммы-функции. Для рассматриваемой задачи 18.162 они имеют вид:

```

FUNCTION F1(X)  FUNCTION FF1(X,T)
PI=3.14593      FF1=SIN(X*T**2)**2
F1=2.*X-PI     RETURN
RETURN         END
END

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.
2. Кузин Л. Т. Основы кибернетики.— Т. I: Математические основы кибернетики.— М.: Энергия, 1973.
3. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы).— Ч. I: Общие функциональные ряды и их приложения.— М.: Высшая школа, 1980.
4. Ефимов А. В., Золотарев Ю. Г., Терпигорев В. М. Математический анализ (специальные разделы).— Ч. II: Применение некоторых методов математического и функционального анализа.— М.: Высшая школа, 1980.
5. Гачев Э. М., Кушниренко А. Г., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимальному управлению.— М.: Изд. МГУ, 1980.
6. Колихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах.— М.: Высшая школа, 1979.
7. Очан Ю. С. Методы математической физики.— М.: Высшая школа, 1965.
8. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики.— М.: Высшая школа, 1967.
9. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по уравнениям математической физики.— М.: Наука, 1972.
10. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1964.
11. Смирнов М. М. Задачник по уравнениям математической физики.— М.: Наука, 1968.
12. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
13. Калиткин Н. Н. Численные методы.— М.: Наука, 1978.
14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1989.
15. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию.— М.: Наука, 1975.
16. Краснов М. Л., Киселев А. Н., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения.— 2-е изд.— М.: Наука, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ ЧАСТЕЙ 1—3

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Предисловие

Глава 1. Введение в анализ

- § 1. Действительные числа. Множества. Логическая символика
- § 2. Функции действительной переменной
- § 3. Предел последовательности действительных чисел
- § 4. Предел функции. Непрерывность
- § 5. Комплексные числа

Глава 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

- § 1. Векторная алгебра
- § 2. Линейные геометрические объекты
- § 3. Кривые на плоскости
- § 4. Поверхности и кривые в пространстве

Глава 3. Определители и матрицы. Системы линейных уравнений

- § 1. Определители
- § 2. Матрицы
- § 3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы
- § 4. Системы линейных уравнений
- § 5. Некоторые вычислительные задачи линейной алгебры

Глава 4. Элементы линейной алгебры

- § 1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением
- § 2. Линейные операторы
- § 3. Билинейные и квадратичные формы

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- § 1. Производная
- § 2. Дифференциал
- § 3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора
- § 4. Исследование функций и построение графиков
- § 5. Векторные и комплексные функции действительной переменной
- § 6. Численные методы функции одной переменной

Глава 6. Интегральное исчисление функций одной переменной

- § 1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла
- § 2. Интегрирование основных классов элементарных функций
- § 3. Смешанные задачи на интегрирование
- § 4. Определенный интеграл и методы его вычисления
- § 5. Несобственные интегралы
- § 6. Геометрические приложения определенного интеграла
- § 7. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики
- § 8. Численное интегрирование функций одной переменной

Глава 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

- § 1. Основные понятия
- § 2. Дифференцирование сложных и неявных функций
- § 3. Приложения частных производных
- § 4. Приближенные числа и действия над ними

Ответы

ЧАСТЬ 2 СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Предисловие

Глава 8. Кратные интегралы

- § 1. Двойной интеграл
- § 2. Тройной интеграл
- § 3. Несобственные кратные интегралы
- § 4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра

Глава 9. Дифференциальные уравнения

- § 1. Уравнения 1-го порядка
- § 2. Дифференциальные уравнения высших порядков
- § 3. Системы дифференциальных уравнений
- § 4. Элементы теории устойчивости
- § 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Глава 10. Векторный анализ

- § 1. Скалярные и векторные поля. Градиент
- § 2. Криволинейные и поверхностные интегралы
- § 3. Соотношения между различными характеристиками скалярных и векторных полей
- § 4. Специальные виды векторных полей
- § 5. Применение криволинейных координат в векторном анализе

Глава 11. Основные понятия теории функций комплексной переменной

- § 1. Элементарные функции
- § 2. Аналитические функции. Условия Коши—Римана
- § 3. Конформные отображения
- § 4. Интеграл от функции комплексной переменной

Глава 12. Ряды и их применение

- § 1. Числовые ряды
- § 2. Функциональные ряды
- § 3. Степенные ряды
- § 4. Применение степенных рядов
- § 5. Ряды Лорана
- § 6. Вычеты и их применение
- § 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

Глава 13. Операционное исчисление

- § 1. Преобразование Лапласа
- § 2. Восстановление оригинала по изображению
- § 3. Применения операционного исчисления
- § 4. Дискретное преобразование Лапласа и его применение

Ответы

ЧАСТЬ 3

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Предисловие

Глава 14. Теория вероятностей

- § 1. Случайные события
- § 2. Случайные величины
- § 3. Случайные векторы
- § 4. Функции случайных величин
- § 5. Закон больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей
- § 6. Случайные функции (корреляционная теория)

Глава 15. Математическая статистика

- § 1. Методы статистического описания результатов наблюдений
- § 2. Статистическое оценивание характеристик распределения генеральной совокупности по выборке
- § 3. Интегральные оценки
- § 4. Проверка статистических гипотез
- § 5. Однофакторный дисперсионный анализ
- § 6. Критерий χ^2 и его применение
- § 7. Элементы регрессионного анализа и метод наименьших квадратов
- § 8. Непараметрические методы математической статистики

Ответы

Приложения

Список литературы

Учебное издание

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

для вузов

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Под редакцией **А. В. Ефимова**

Заведующий редакцией **С. И. Зеленский**
Редактор **В. В. Донченко**
Художественный редактор **Т. Н. Кольченко**
Технический редактор **С. Я. Шкляр**
Корректор **Н. В. Румянцева**

ИБ № 41097

Сдано в набор 05.05.89. Подписано к печати
22.01.90. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл.
печ. л. 15,96. Усл. кр.-отт. 16,17.
Уч.-изд. л. 20,76. Тираж 49 000 экз.
Заказ № 3439. Цена 90 коп.

Издательско-производственное
и книготорговое объединение «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и сматрицировано в
Ордена Октябрьской Революции и ордена
Трудового Красного Знамени МПО «Первая
Образцовая типография Государственного
комитета СССР по печати
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано в типографии
издательства «Коммуна»,
г. Воронеж, пр. Революции, 39

90 коп.