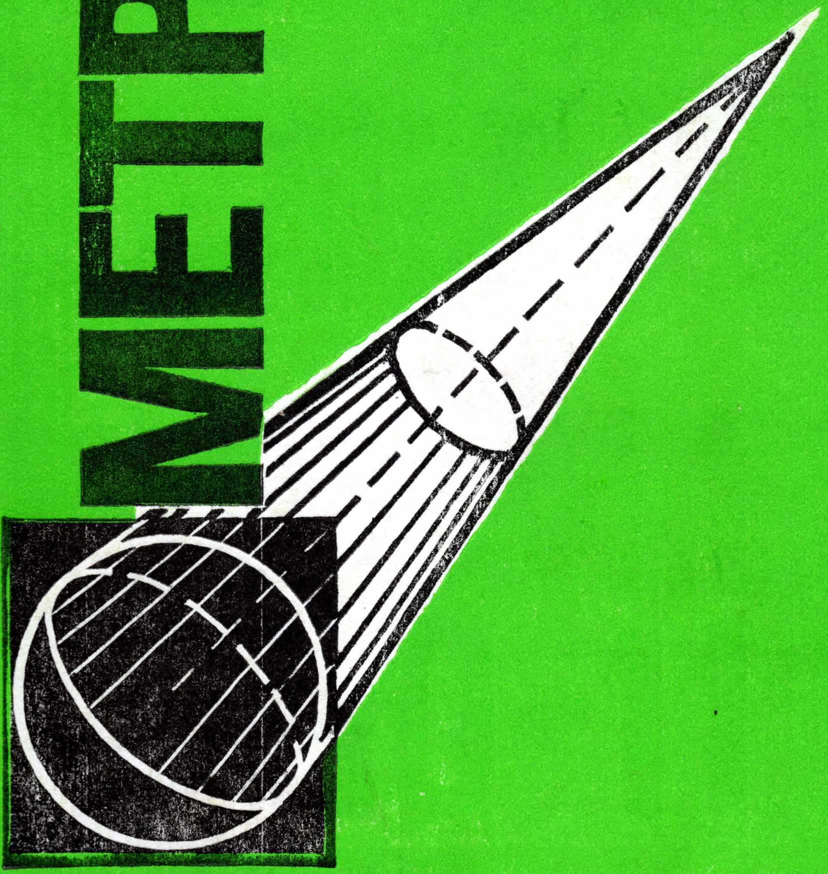
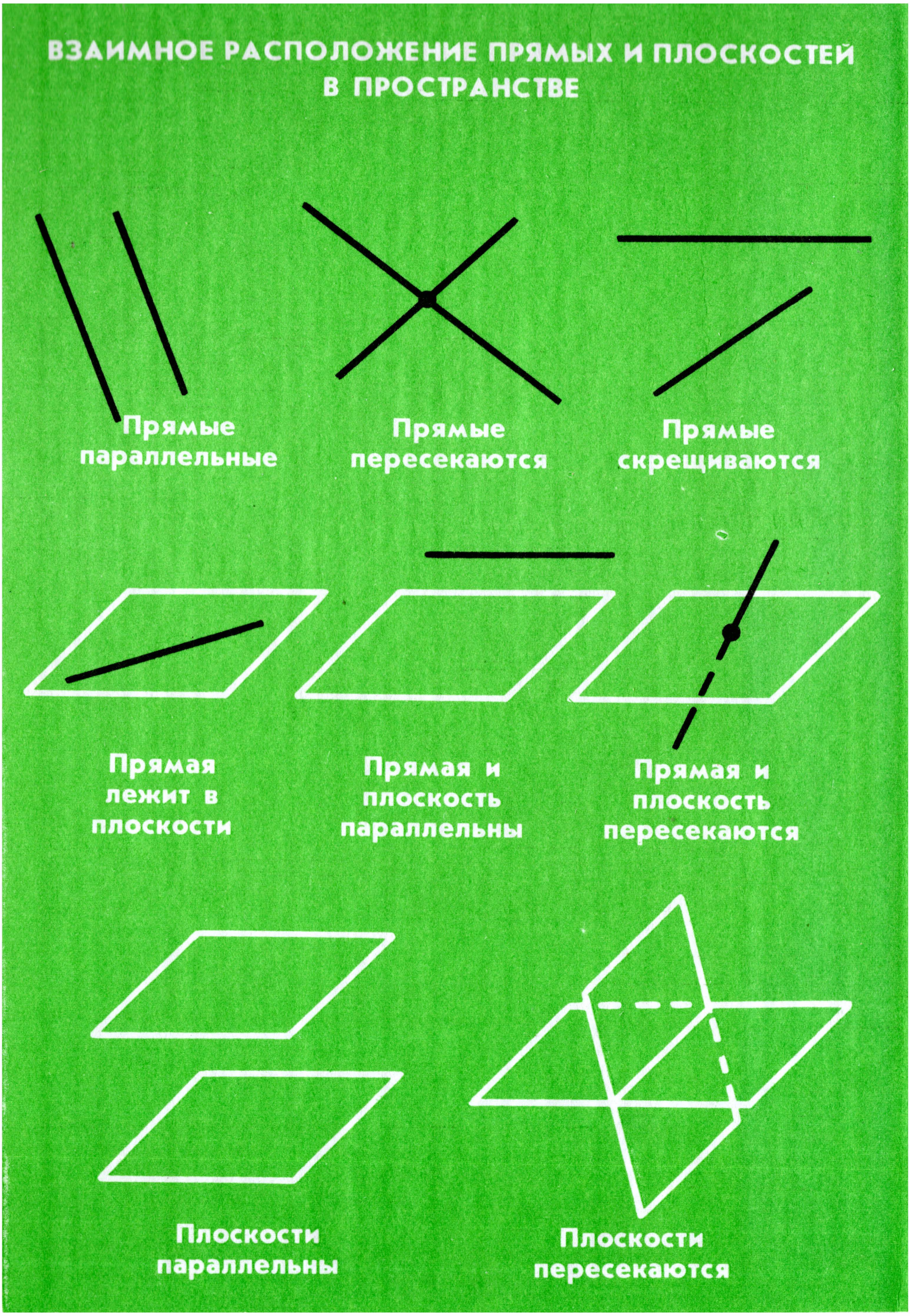
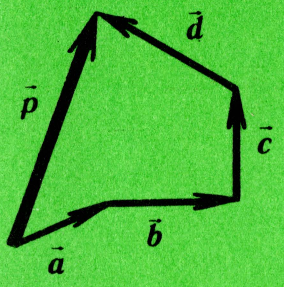
ГЕОМЕТРИЯ



10-11

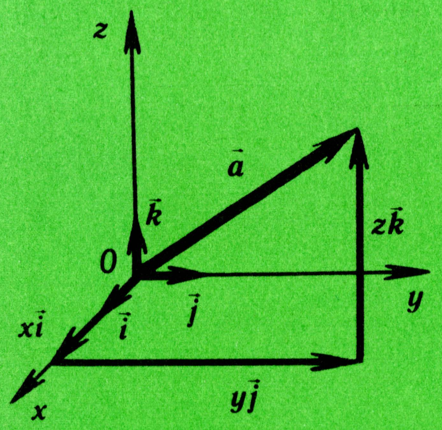

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
Прямые параллельные
Прямые пересекаются
Прямые скрещиваются
Прямая лежит в плоскости
Прямая и плоскость параллельны
Прямая и плоскость пересекаются
Плоскости параллельны
Плоскости пересекаются

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ



Сложение векторов
Правило многоугольника

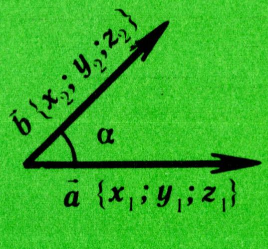
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{p}$$



Координаты вектора

$$\vec{a}\{x;\ y;\ z\}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



Скалярное произведение векторов.

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 10—11 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждено
Министерством образования
Российской Федерации

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1992

ББК 22.151я72
Г36

Авторы
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселева, Э. Г. Позняк

Издание подготовлено под научным руководством академика *А. Н. Тихонова*

Учебник занял первое место на всесоюзном конкурсе учебников по математике для средней общеобразовательной школы.

Г36 **Геометрия**: Учеб. для 10—11 кл. сред. шк./Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение, 1992.— 207 с.: ил.— ISBN 5-09-003870-8.

Г $\frac{4306020000-287}{103(03)-92}$ инф. письмо — 92, доп. № 1 **ББК 22.151я72**

ISBN 5-09-003870-8

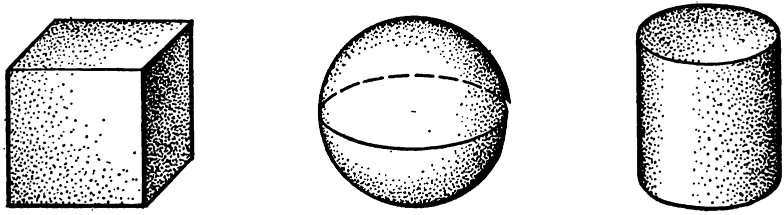
10 класс

ВВЕДЕНИЕ

1. Предмет стереометрии. Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. *Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.* Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный и «метрео» — измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются *точки прямые и плоскости.* Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать так называемые *геометрические тела* и их *поверхности.* Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются *многогранниками.* Одним из простейших многогранников является *куб* (рис. 1, *а*). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого *шаром* (рис. 1, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого *цилиндром* (рис. 1, *в*).

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделенную от остальной части пространства поверхностью — *границей* этого тела. Так, например, граница шара есть *сфера*, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.



а) Куб. *б)* Шар. *в)* Цилиндр.

Рис. 1.

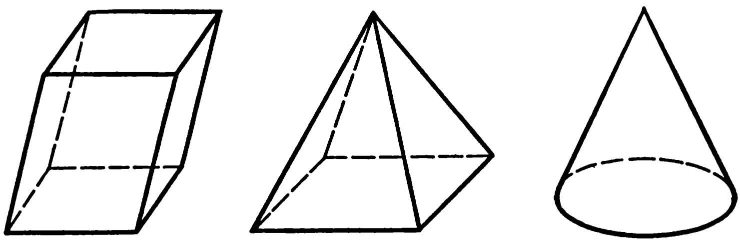
Изучая свойства геометрических фигур — воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств. На рисунках 2, *а, б* изображены два многогранника — *параллелепипед* и *пирамида*, а на рисунке 2, *в* — *конус*. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1.

В X классе мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники и векторы в пространстве, а в XI классе — метод координат в пространстве, «круглые» геометрические тела — цилиндр, конус, шар и рассмотрим вопрос об объемах тел.

2. Аксиомы стереометрии. В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура — *плоскость*. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т. д., а прямые — строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. или двумя большими латинскими буквами AB, CD и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, *а*) или в виде произвольной области (рис. 3, *б*).



а) Параллелепипед. *б)* Пирамида. *в)* Конус.

Рис. 2.

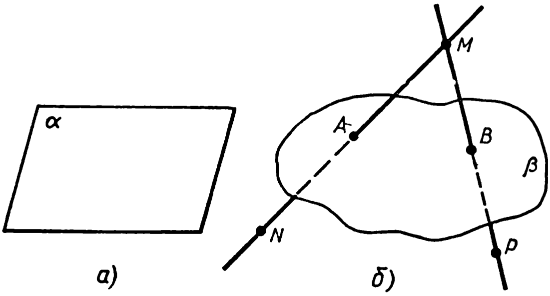


Рис. 3.

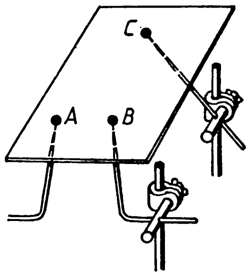


Рис. 4. Иллюстрация к аксиоме A_1: пластинка, поддерживаемая тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой.

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, *б* точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении 2. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

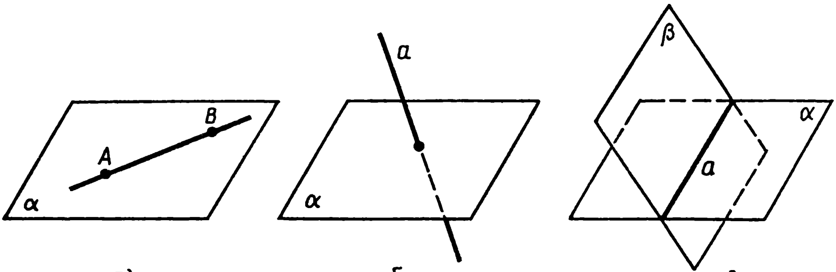
A_1. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображенная на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью ABC.

Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трех ножках, т. е. опирается на три «точки», а конец четвертой ножки (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

A_2. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.*

В таком случае говорят, что *прямая лежит в плоскости* или *плоскость проходит через прямую* (рис. 5, *а*).



а) Прямая AB лежит в плоскости α.

б) Прямая a и плоскость α пересекаются.

в) Плоскости α и β пересекаются по прямой a.

Рис. 5.

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки. С этой целью линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

Из аксиомы A_2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они *пересекаются* (рис. 5, *б*).

A_3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.*

В таком случае говорят, что *плоскости пересекаются по прямой* (рис. 5, *в*). Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).

3. Некоторые следствия из аксиом.

Теорема. ***Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.***

Доказательство. Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 6). Докажем, что через прямую a и точку M проходит плоскость. Отметим на прямой a две точки P и Q. Точки M, P и Q не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1

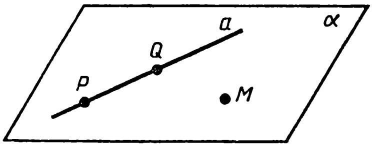


Рис. 6.

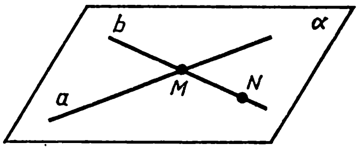


Рис. 7.

через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как две точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую a.

Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M, проходит через точки M, P и Q. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки M, P и Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Теорема. ***Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.***

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N, отличную от точки M, и рассмотрим плоскость α, проходящую через точку N и прямую a. Так как две точки прямой b лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Итак, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b, проходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. По рисунку 8 назовите: а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC; б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB; в) точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC; г) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.
2. По рисунку 9 назовите: а) точки, лежащие в плоскостях DCC_1 и BQC; б) плоскости, в которых лежит прямая AA_1; в) точки пересечения прямой MK с плоскостью ABD, прямых DK и BP с плоскостью $A_1B_1C_1$; г) прямые, по которым пересекаются плоскости AA_1B_1 и ACD, PB_1C_1 и ABC; д) точки пересечения прямых MK и DC, B_1C_1 и BP, C_1M и DC.
3. Верно ли, что: а) любые три точки лежат в одной плоскости; б) любые четыре точки лежат в одной плоскости; в) любые

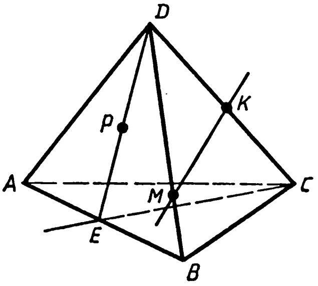


Рис. 8.

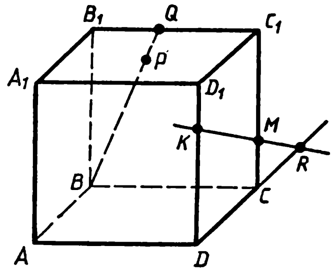


Рис. 9.

четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

4. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться? Ответ обоснуйте.
5. Докажите, что через три данные точки, лежащие на прямой, проходит плоскость. Сколько существует таких плоскостей?
6. Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.
7. Две прямые пересекаются в точке M. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку M и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку M?
8. Верно ли утверждение: а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости; б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?
9. Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте.
10. Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она: а) пересекает две стороны треугольника; б) проходит через одну из вершин треугольника?
11. Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.
12. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A, B, C и A, B, D?
13. Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки; в) только одну общую прямую?
14. Три прямые проходят через одну точку. Через каждые две из них проведена плоскость. Сколько всего проведено плоскостей?
15. Три прямые попарно пересекаются. Докажите, что они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку.

Глава I

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

4. Параллельные прямые в пространстве. Введем понятие параллельных прямых в пространстве.

Определение. *Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$. На рисунке 10 прямые a и b параллельны, а прямые a и c, a и d не параллельны.

Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема. ***Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.***

Доказательство. Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой α. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, должна лежать в одной плоскости с точкой M и прямой a, т. е. должна лежать в плоскости α. Но в плоскости α, как известно из курса планиметрии, через точку M проходит прямая, параллельная прямой a, и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой b. Итак, b — единственная прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a. Теорема доказана.

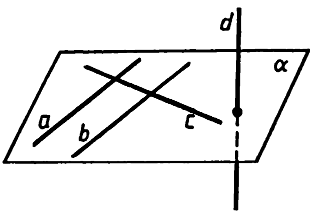


Рис. 10.

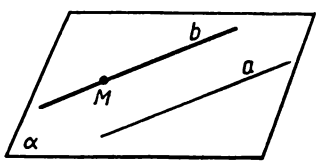


Рис. 11.

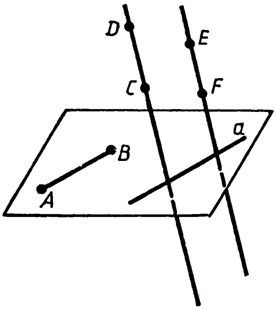


Рис. 12.

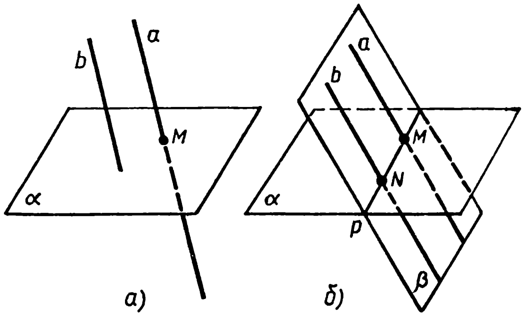


Рис. 13.

В дальнейшем нам понадобятся также понятия параллельных отрезков, параллельных отрезка и прямой, параллельных лучей. Два отрезка называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, а также параллельность двух лучей. На рисунке 12 отрезки CD и EF параллельны ($CD \parallel EF$), а отрезки AB и CD не параллельны, отрезок AB параллелен прямой a ($AB \parallel a$).

5. Параллельность трех прямых. Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма. ***Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.***

Доказательство. Рассмотрим параллельные прямые a и b, одна из которых — прямая a — пересекает плоскость α в точке M (рис. 13, *а*). Докажем, что прямая b также пересекает плоскость α, т. е. имеет с ней только одну общую точку.

Обозначим буквой β плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как две различные плоскости α и β имеют общую точку M, то по аксиоме A_3 они пересекаются по некоторой прямой p (рис. 13, *б*). Эта прямая лежит в плоскости β и пересекает прямую a (в точке M), поэтому она пересекает параллельную ей прямую b в некоторой точке N. Прямая p лежит также в плоскости α, поэтому N — точка плоскости α. Следовательно, N — общая точка прямой b и плоскости α.

Докажем теперь, что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки N. Это и будет означать, что прямая b пересекает плоскость α. Действительно, если бы прямая b имела еще одну точку с плоскостью α, то она целиком лежала бы в плоскости α и, значит, была бы общей прямой плоскостей α и β, т. е. совпадала бы с прямой p. Но это невозможно, так как по условию $a \parallel b$, а прямые a и p пересекаются. Лемма доказана.

Из курса планиметрии известно, что если три прямые лежат в одной плоскости и две из них параллельны третьей прямой, то эти две прямые параллельны. Докажем аналогичное утверждение для трех прямых в пространстве.

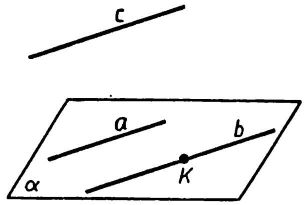


Рис. 14.

Т е о р е м а. ***Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$. Для этого нужно доказать, что прямые a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

1) Отметим какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку K (рис. 14). Докажем, что прямая b лежит в этой плоскости. Действительно, если допустить, что прямая b пересекает плоскость α, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость α. Но так как $c \parallel a$, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, ибо прямая a лежит в плоскости α.

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно. Теорема доказана.

6. Параллельность прямой и плоскости. Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то по аксиоме A_2 вся прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

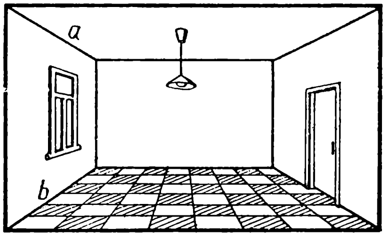
а) прямая лежит в плоскости (см. рис. 5, *а*);

б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются (см. рис. 5, *б*);

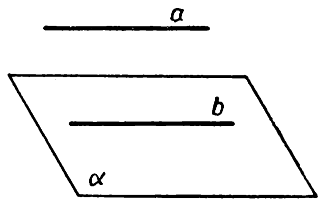
в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

О п р е д е л е н и е. *Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.*

Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$. Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода — они параллельны плоскости земли. Другой пример дает линия пересечения стены и потолка — эта линия параллельна плоскости пола (рис. 15, *а*). Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, линия пересечения пола с той же самой стеной. На рисунке 15, *а* указанные прямые обозначены буквами a и b. Оказывается, что если в плоскости α имеется прямая b, параллельная прямой a, не лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны (рис. 15, *б*). Другими словами, наличие в плоскости α прямой b, параллельной прямой a, является *признаком*, по кото-



а)



б)

Рис. 15.

рому можно сделать вывод о параллельности прямой a и плоскости α. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема. ***Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.***

Доказательство. Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости (рис. 15, *б*). Докажем, что $a \parallel \alpha$. Допустим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, а значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая b лежит в плоскости α. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

Докажем еще два утверждения, которые часто используются при решении задач.

1^0. *Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

Пусть через данную прямую a, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b (рис. 16). Докажем, что $b \parallel a$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости β) и не пересекаются: ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α, что невозможно, поскольку по условию $a \parallel \alpha$.

2^0. *Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.*

В самом деле, пусть a и b — параллельные прямые, причем прямая a параллельна плоскости α. Тогда прямая a не пересекает плоскость α, и, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также не пересекает плоскость α. Поэтому прямая b либо параллельна плоскости α, либо лежит в этой плоскости.

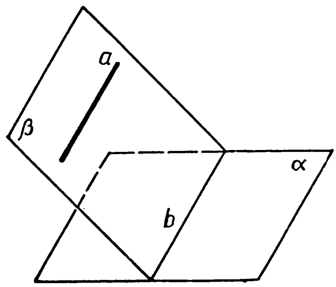


Рис. 16.

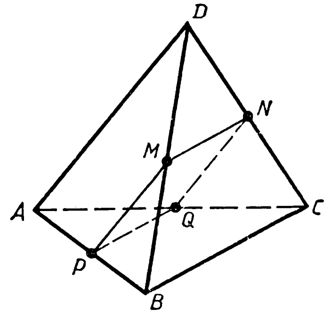


Рис. 17.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

16. Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Докажите, что прямая c, пересекающая прямые a и b, также лежит в плоскости α.

17. На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD=12$ см, $BC=14$ см.

18. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если: а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1=7$ см; б) $AC:CB=3:2$ и $BB_1=20$ см.

19. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

20. Средняя линия трапеции лежит в плоскости α. Пересекают ли прямые, содержащие основания трапеции, плоскость α? Ответ обоснуйте.

21. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.

22. Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.

23. Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.

24. Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BMC.

25. Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям.

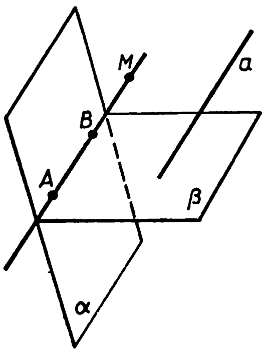


Рис. 18.

26. Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости* α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

27. Точка C лежит на отрезке AB, причем $AB:BC=4:3$. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

28. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что $DE=5$ см и $\frac{BD}{DA}=\frac{2}{3}$. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

29. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12 см. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K — середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H, и найдите отрезок KH.

30. Основание AB трапеции $ABCD$ параллельно плоскости α, а вершина C лежит в этой плоскости. Докажите, что: а) основание CD трапеции лежит в плоскости α; б) средняя линия трапеции параллельна плоскости α.

31. Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB. Докажите, что плоскость α проходит также через середину стороны AC.

32. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Прямая a параллельна как плоскости α, так и плоскости β. Докажите, что прямые a и AB параллельны.

Решение. Через точку A проведем** прямую AM, параллельную прямой a (рис. 18). Так как прямая a параллельна плоскостям α и β, то прямая AM лежит как в плоскости α, так и в плоскости β (п. 6, утверждение 2^0). Таким образом, AM — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β, т. е. она совпадает с прямой AB. Следовательно, $AB \parallel a$.

33. Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то прямые, по которым они пересекаются, либо параллельны, либо имеют общую точку.

---

* Говорят, что отрезок параллелен плоскости, если прямая, содержащая этот отрезок, параллельна плоскости.

** Выражения «проведем прямую», «проведем плоскость», разумеется, не нужно понимать в буквальном смысле (ни прямую, ни плоскость в пространстве мы не проводим). Эти слова означают, что указанная прямая или плоскость вводятся в рассмотрение.

§ 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

7. Скрещивающиеся прямые. Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Однако в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. не существует такой плоскости, которая проходит через обе эти прямые. Ясно, что такие прямые не пересекаются и не параллельны.

Определение. *Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.*

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 19).

Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема. ***Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.***

Доказательство. Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадет с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит в плоскости α. Теорема доказана.

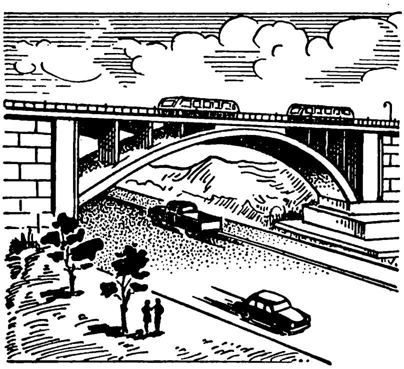


Рис. 19.

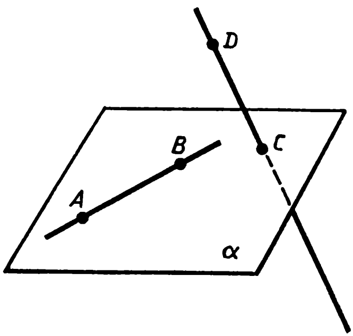
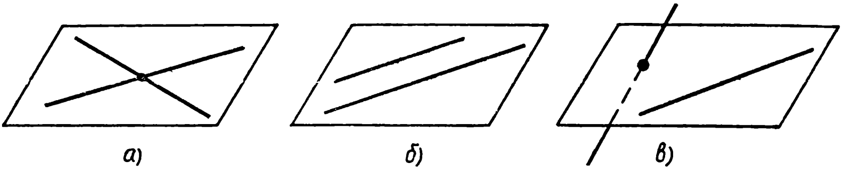


Рис. 20.



а) Пересекающиеся прямые. б) Параллельные прямые. в) Скрещивающиеся прямые.

Рис. 21.

Итак, возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

а) *прямые пересекаются*, т. е. имеют только одну общую точку (рис. 21, *а*);

б) *прямые параллельны*, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, *б*);

в) *прямые скрещивающиеся*, т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, *в*).

Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема. ***Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.***

Доказательство. Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и притом только одна.

Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α.

Ясно, что α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD. Теорема доказана.

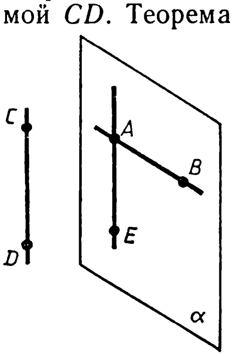


Рис. 22.

Наглядной иллюстрацией этой теоремы служат две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (см. рис. 19). Нижняя дорога лежит в плоскости земли, параллельной дороге на эстакаде. Ясно, что и через дорогу на эстакаде проходит плоскость, параллельная плоскости земли, а значит, параллельная нижней дороге.

8. Углы с сонаправленными сторонами. Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части,

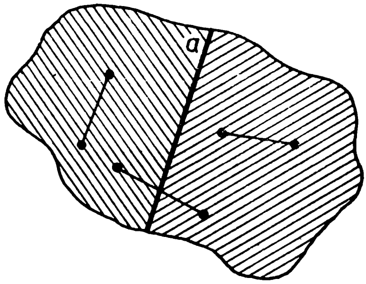


Рис. 23.

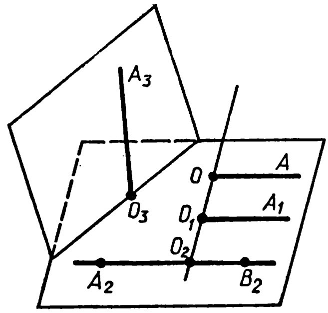


Рис. 24.

называемые *полуплоскостями* (рис. 23). Прямая a называется *границей* каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей — по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1. Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи OA и O_1A_1, а также лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2, OA и O_3A_3, O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему).

Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.

Теорема. ***Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.***

Доказательство. Рассмотрим углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами и докажем, что $\angle O = \angle O_1$.

Отметим на сторонах угла O какие-нибудь точки A и B и отложим на соответственных сторонах угла O_1 отрезки $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 25).

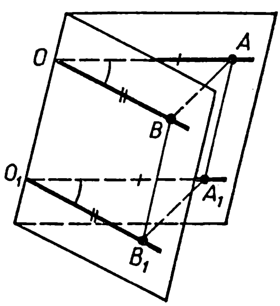
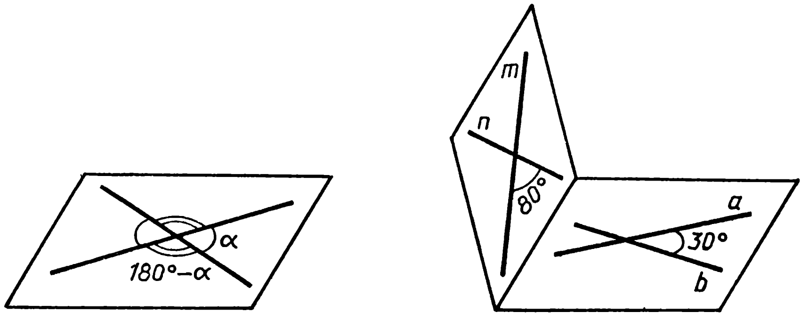


Рис. 25.

Четырехугольник OO_1A_1A является параллелограммом, так как противоположные стороны OA и O_1A_1 параллельны и равны. Отсюда следует, что $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$. Аналогично четырехугольник OO_1B_1B является параллелограммом, поэтому $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$. Так как $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, то по теореме о трех параллельных прямых $AA_1 \parallel BB_1$. Кроме того, $AA_1 = BB_1$, поскольку каждый из этих отрезков равен OO_1. Таким образом, в четырехугольнике ABB_1A_1 про-



а) б)

Рис. 26.

тивоположные стороны AA_1 и BB_1 параллельны и равны. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм, и, значит, $AB = A_1B_1$.

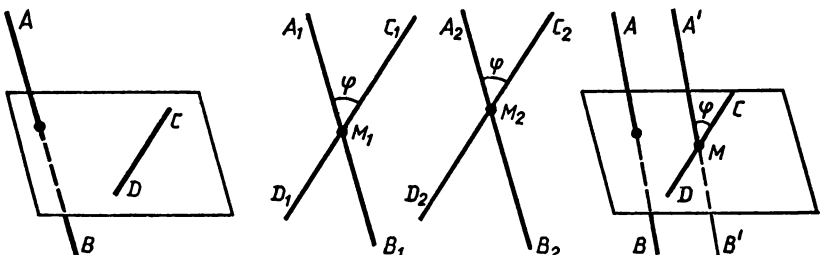
Сравним теперь треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Они равны по трем сторонам, и поэтому $\angle O = \angle O_1$. Теорема доказана.

9. Угол между прямыми. Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26, *а*). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любой из трех остальных углов. Тогда говорят, что *угол между пересекающимися прямыми равен* α.

Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$. На рисунке 26, *б* угол между прямыми a и b равен 30°, а угол между прямыми m и n равен 80°.

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть AB и CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, *а*). Возьмем произвольную точку M_1 пространства и проведем через нее прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD.

Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что *угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен* φ.



а) б)

Рис. 27.

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1. Действительно, возьмем любую другую точку M_2 и проведем через нее прямые A_2B_2 и C_2D_2, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. 27, *а*). Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (объясните почему), то стороны углов с вершинами M_1 и M_2 попарно сонаправлены (на рис. 27, *а* такими углами являются $\angle A_1M_1C_1$ и $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ и т. д.). Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_2B_2 и C_2D_2 также равен φ.

В качестве точки M_1 можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27, *б* на прямой CD отмечена точка M и через нее проведена прямая $A'B'$, параллельная AB. Угол между прямыми $A'B'$ и CD также равен φ.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

34. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

35. Через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Докажите, что по крайней мере одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися прямыми.

36. Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые.

37. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых m и BC, если: а) прямая m лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком AC; б) прямая m не лежит в плоскости ABC?

38. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые a и CD пересекаются; б) a и b скрещивающиеся прямые.

39. Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.

40. На скрещивающихся прямых a и b отмечены соответственно точки M и N. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. а) Лежит ли прямая b в плоскости α? б) Пересекаются ли плоскости α и β? При положительном ответе укажите прямую, по которой они пересекаются.

41. Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой? Ответ обоснуйте.

42. Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. б) Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность и $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см.

43. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника* являются вершинами параллелограмма.

44. Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если: а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$.

45. Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен: а) 50°; б) 121°.

46. Прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что: а) m и AC — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними; б) m и AD — скрещивающиеся прямые — и найдите угол между ними, если $\angle ABC = 128°$.

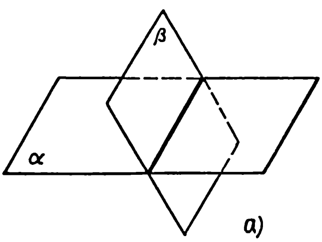
47. В пространственном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

10. Параллельные плоскости. Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой (рис. 28, *а*), либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки (рис. 28, *б*).

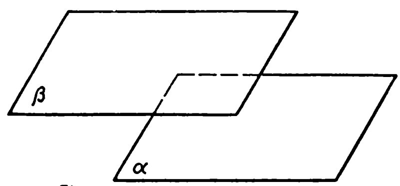
О п р е д е л е н и е. *Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены, поверхность стола и плоскость пола.



а)

Плоскости α и β пересекаются.



б)

Плоскости α и β параллельны.

Рис. 28.

---

* Четырехугольник называется *пространственным*, если его вершины не лежат в одной плоскости.

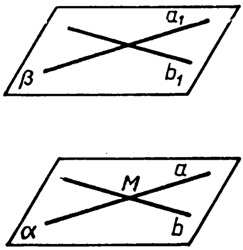


Рис. 29.

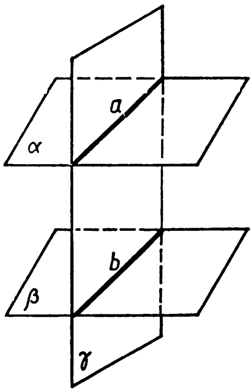


Рис. 30.

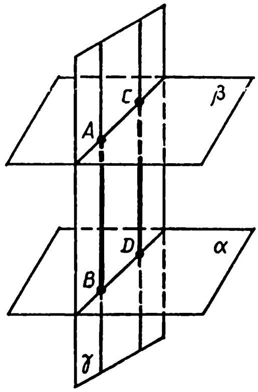


Рис. 31.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

Теорема. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***

Доказательство. Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что $a \parallel c$.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно и $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

11. Свойства параллельных плоскостей. Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1^0. *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*

Наглядным подтверждением этого факта слýжат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты — эти линии параллельны. Для доказательства данного свойства рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ (рис. 30). Докажем, что $a \parallel b$. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости γ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как $\alpha \parallel \beta$. Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. $a \parallel b$.

2^0. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.*

Для доказательства этого свойства рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β (рис. 31). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым AC и BD (свойство 1^0). Таким образом, в четырехугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $AB = CD$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

48. Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки.

49. Прямая m пересекает плоскость α в точке B. Существует ли плоскость, проходящая через прямую m и параллельная плоскости α?

50. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

51. Докажите, что плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые m и n плоскости α параллельны плоскости β.

52. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

53. Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

54. Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно. а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны. б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

55. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную плоскости α.

Решение. Рассмотрим произвольную плоскость β, параллельную плоскости α. Через какую-нибудь точку B плоскости β проведем прямую b, параллельную прямой a. Так как прямая a пересекает плоскость α, то прямая b также пересекает эту плоскость. Следовательно, прямая b пересекает плоскость β (а не лежит в ней). Поэтому прямая a также пересекает плоскость β.

56. Плоскости α и β параллельны, A — точка плоскости α. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β, лежит в плоскости α.

57. Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a либо параллельна другой плоскости, либо лежит в ней.

58. Докажите, что если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей α и β, то она пересекает и другую плоскость.

Решение. Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a. Докажем, что плоскость γ пересекает также плоскость β. Проведем в плоскости γ прямую b, пересекающую прямую a. Прямая b пересекает плоскость α, поэтому она пересекает и параллельную ей плоскость β (задача 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая b, пересекает плоскость β.

59. Докажите, что через точку A, не лежащую в плоскости α, проходит плоскость, параллельная плоскости α, и притом только одна.

Решение. Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые a и b, а через точку A проведем прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a_1 и b_1. Плоскость β — искомая, так как она проходит через точку A и по признаку параллельности двух плоскостей параллельна плоскости α.

Докажем теперь, что β — единственная плоскость, проходящая через точку A и параллельная плоскости α. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через точку A, пересекает плоскость β, поэтому пересекает и параллельную ей плоскость α (задача 58).

60. Две плоскости α и β параллельны плоскости γ. Докажите, что плоскости α и β параллельны.

61. Даны пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая в плоскости этих прямых. Докажите, что через точку A проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и притом только одна.

62. Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых. Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

63. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите: а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2=2A_1A$, $A_1A_2=12$ см, $AB_1=5$ см; б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1=18$ см, $AA_1=24$ см, $AA_2=\frac{3}{2}A_1A_2$.

64. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскос-

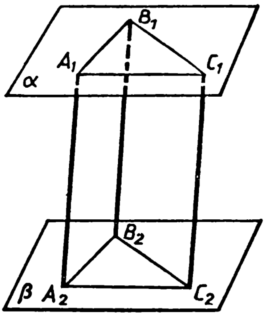


Рис. 32.

тей в точках A_1, B_1 и C_1, а другую — в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

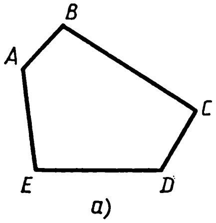
65. Параллельные отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 32). а) Определите вид четырехугольников $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$. б) Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

§ 4. ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

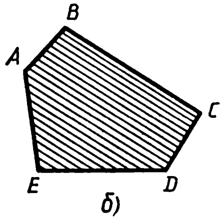
12. Тетраэдр. Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но уже теперь, до подробного изучения многогранников, мы познакомимся с двумя из них — *тетраэдром* и *параллелепипедом*. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.

Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 33, *б*). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

Перейдем теперь к определению тетраэдра.



Многоугольник *ABCDE* — фигура, составленная из отрезков.



Многоугольник *ABCDE* — часть плоскости, ограниченная линией *ABCDE*.

Рис. 33.

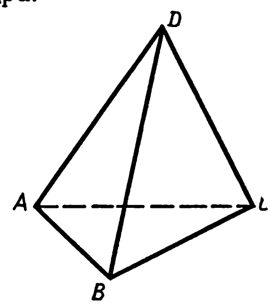


Рис. 34.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA. Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется *тетраэдром* и обозначается так: $DABC$ (рис. 34).

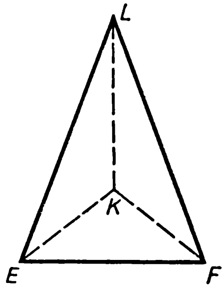


Рис. 35.

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами тетраэдра*. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*. На рисунке 34 противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее *основанием*, а три другие — *боковыми гранями*.

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырехугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются невидимые ребра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 — ребра EK, KF и KL.

13. Параллелепипед. Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны (рис. 36, *а*).

Четырехугольники

$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (например, в четырехугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 1^0, п. 11)). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов

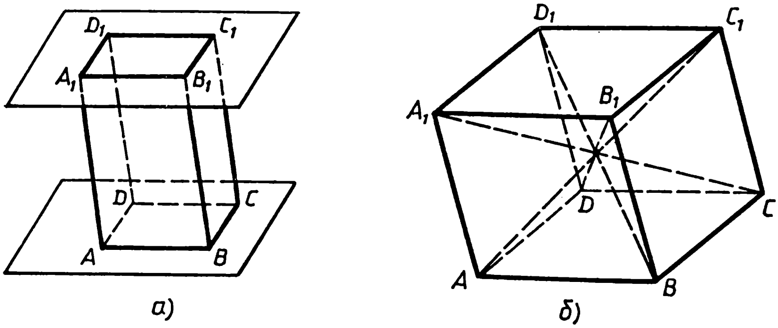


Рис. 36. Параллелепипед.

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырех параллелограммов (1), называется *параллелепипедом* и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины параллелограммов — *вершинами параллелепипеда*. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются *смежными*, а не имеющие общих ребер — *противоположными*. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются *противоположными*. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется *диагональю параллелепипеда*. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, *б* диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их *основаниями*, а остальные грани — *боковыми гранями параллелепипеда*. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются *боковыми ребрами*. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми ребрами — отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, *б*. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые ребра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями*.

Рассмотрим два свойства параллелепипеда.

1^0. *Противоположные грани параллелепипеда параллельны*** *и равны.*

Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 36, *б*). Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то $AB = DC$ и $AA_1 = DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между

* Более подробно об изображении пространственных фигур на плоскости, в частности параллелепипеда, рассказано в приложении 1.

** Две грани параллелепипеда называются *параллельными*, если их плоскости параллельны.

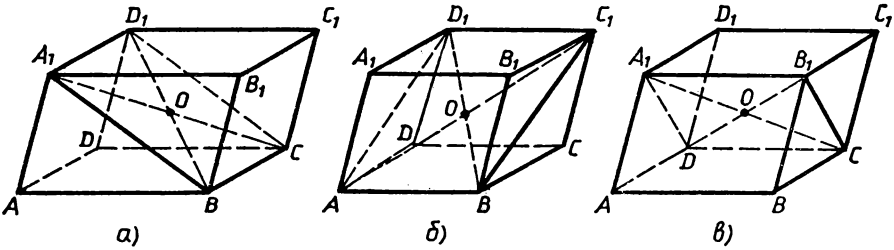


Рис. 37.

ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.

2^0. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырехугольник A_1D_1CB, диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37, *а*). Так как $A_1D_1 \| BC$ и $A_1D_1 = BC$ (объясните почему), то A_1D_1CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

Далее рассмотрим четырехугольник AD_1C_1B (рис. 37, *б*). Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырехугольник A_1B_1CD (рис. 37, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

14. Задачи на построение сечений. Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их *сечения* различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем *секущей плоскостью* тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется *сечением тетраэдра (параллелепипеда)*. Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники (рис. 39, *а*), пятиугольники (рис. 39, *б*) и шестиугольники (рис. 39, *в*).

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две

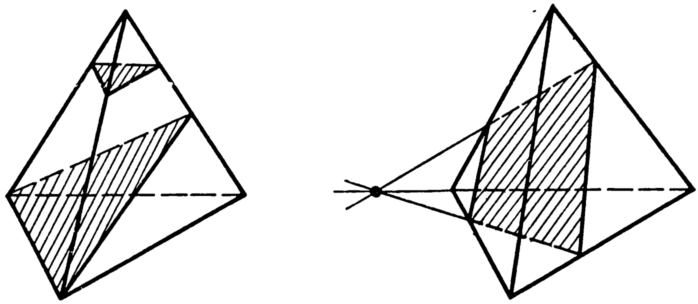


Рис. 38.

противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1^0, п. 11). Так, на рисунке 39, *б* секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) — по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \parallel CD$ и $AE \parallel BC$. По той же причине на рисунке 39, *в* $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

Рассмотрим примеры построения сечений.

Задача 1. *На ребрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P* (рис. 40, *а*). *Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.*

Решение. Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по

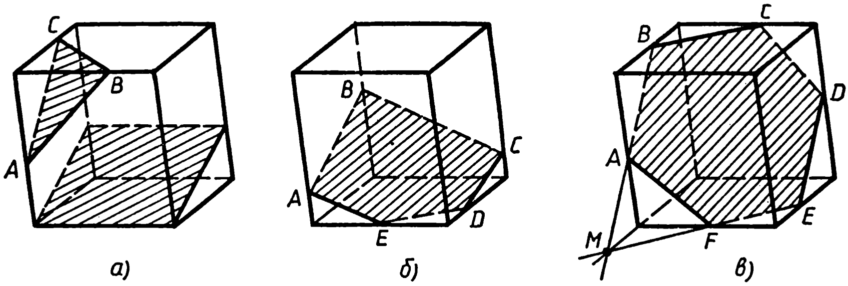


Рис. 39.

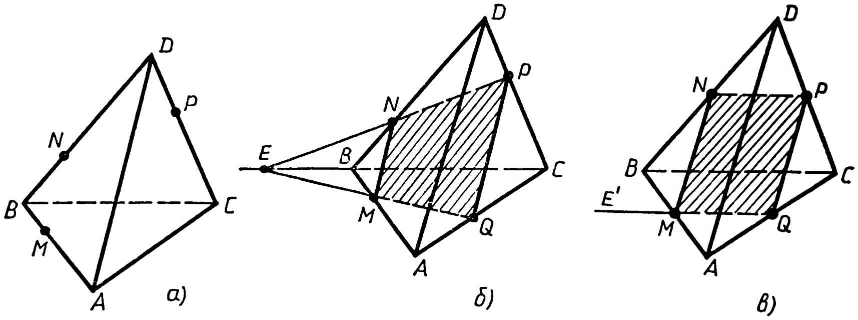


Рис. 40.

прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, *в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.

З а д а ч а 2. ***Точка** M **лежит на боковой грани** ADB **тетраэдра** $DABC$* (рис. 41, *а*). ***Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку** M **параллельно основанию** ABC.*

Р е ш е н и е. Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC (п. 6, утверждение 1^0). Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведем через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми ребрами DA и DB (рис. 41, *б*). Затем через точку P проведем прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR — искомое сечение.

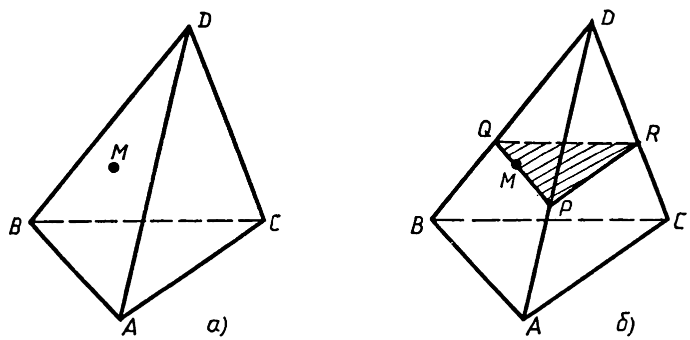


Рис. 41.

З а д а ч а 3. *На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.*

Р е ш е н и е. Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. В самом простом случае, когда эти точки лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, *а*), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение — треугольник ABC. Если три данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *б*, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с ребрами нижней грани дают точки E и D. Остается провести отрезок ED, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *в*. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведем прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

ЗАДАЧИ

66. Назовите все пары скрещивающихся (т. е: принадлежащих скрещивающимся прямым) ребер тетраэдра $ABCD$. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?

67. В тетраэдре $DABC$ дано: $\angle ADB=54°$, $\angle BDC=72°$, $\angle CDA=90°$, $DA=20$ см, $BD=18$ см, $DC=21$ см. Найдите: а) ребра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.

68. Точки M и N — середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

69. Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

70. Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости BCD.

71. Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

72. Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC, если: а) точка M является серединой ребра AD; б) точка M лежит внутри грани ABD.

73. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и P являются серединами ребер AB, BC и CD, $AC=10$ см, $BD=12$ см. Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD, и найдите периметр четырехугольника, полученного при пересечении тетраэдра плоскостью MNP.

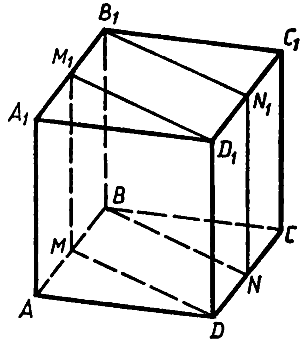


Рис. 42.

74. Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC. а) Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC. б) Найдите отношение площадей сечения и треугольника ABC.

75. Изобразите тетраэдр $KLMN$. а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN. б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

76. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$ и $BD \parallel B_1D_1$.

77. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если известно, что $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1}=\frac{5}{6}$.

78. На рисунке 42 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на ребрах которого отмечены точки M, N, M_1 и N_1 так, что $AM=CN=A_1M_1=C_1N_1$. Докажите, что $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

79. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1. Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

80. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

81. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на ребрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

82. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани AA_1B_1B. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M параллельно: а) плоскости основания $ABCD$; б) грани BB_1C_1C; в) плоскости BDD_1.

83. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D; б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

84. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

85. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где K — середина ребра AA_1, а L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

86. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно диагонали BD_1. Докажите, что если основание параллелепипеда — ромб и углы ABB_1 и CBB_1 прямые, то построенное сечение — равнобедренный треугольник.

87. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ I

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?
2. Точка M не лежит на прямой a. Сколько прямых, не пересекающих прямую a, проходит через точку M? Сколько из этих прямых параллельны прямой a?
3. Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?
4. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая: а) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α; б) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α; в) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?
5. Прямая a параллельна плоскости α. Сколько прямых, лежащих в плоскости α, параллельны прямой a? Параллельны ли друг другу эти прямые, лежащие в плоскости α?
6. Прямая a пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная a?
7. Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

8. Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?
9. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые: а) пересекаться? б) быть скрещивающимися?
10. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c?
11. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость трапеции?
12. Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость параллелограмма?
13. Могут ли быть равны два непараллельных отрезка, заключенные между параллельными плоскостями?
14. Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые?
15. Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань — прямоугольник; б) только две смежные грани — ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?
16. Какие многоугольники могут получиться в сечении: а) тетраэдра; б) параллелепипеда?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

88. Параллельные прямые AC и BD пересекают плоскость α соответственно в точках A и B. Точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, $AC=8$ см, $BD=6$ см, $AB=4$ см. а) Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. б) Найдите отрезок BE.
89. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны.
90. Вершины A и B трапеции $ABCD$ лежат в плоскости α, а вершины C и D не лежат в этой плоскости. Как расположена прямая CD относительно плоскости α, если отрезок AB является: а) основанием трапеции; б) боковой стороной трапеции?
91. Через каждую из двух параллельных прямых a и b и точку M, не лежащую в плоскости этих прямых, проведена плоскость. Докажите, что эти плоскости пересекаются по прямой, параллельной прямым a и b.
92. Плоскость α и прямая a параллельны прямой b. Докажите, что прямая a либо параллельна плоскости α, либо лежит в ней.
93. Прямые a и b параллельны. Через точку M прямой a проведена прямая MN, отличная от прямой a и не пересекающая прямую b. Каково взаимное расположение прямых MN и b?

2 Заказ 106

94. Даны две скрещивающиеся прямые и точка B, не лежащая на этих прямых. Пересекаются ли плоскости, каждая из которых проходит через одну из прямых и точку B? Ответ обоснуйте.

95. Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что если плоскость β пересекает прямую a, то она пересекает и плоскость α.

96. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между плоскостью и параллельной ей прямой, равны.

97. Докажите, что два угла с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°.

98. Прямая a параллельна плоскости α. Существует ли плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α? Если существует, то сколько таких плоскостей? Ответ обоснуйте.

99. Докажите, что три параллельные плоскости отсекают на любых двух пересекающих эти плоскости прямых пропорциональные отрезки.

100. Даны две скрещивающиеся прямые и точка A. Докажите, что через точку A проходит, и притом только одна, плоскость, которая либо параллельна данным прямым, либо проходит через одну из них и параллельна другой.

101. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

102. Докажите, что плоскость α, проходящая через середины двух ребер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую основанию, параллельна третьему ребру основания. Найдите периметр и площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если длины всех ребер тетраэдра равны 20 см.

103. На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отмечены точки M, N и P так, что $DM:MA=DN:NB=DP:PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна 10 см^2 и $DM:MA=2:1$.

104. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD.

105. Изобразите тетраэдр $DABC$ и отметьте точки M и N на ребрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

106. Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точку K на ребре DC и точки M и N граней ABC и ACD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

107. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BDC.

108*. В тетраэдре $DABC$ биссектрисы трех углов при вершине D пересекают отрезки BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

109. Две плоскости, каждая из которых содержит два боковых ребра параллелепипеда, не принадлежащих одной грани, пересекаются по прямой a. Докажите, что прямая a параллельна боковым ребрам параллелепипеда и пересекает все его диагонали.

110. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость A_1DB параллельна плоскости D_1CB_1.

111. Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трех ребер, имеющих общую вершину.

112. Докажите, что сумма квадратов четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его ребер.

113. По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

114. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте на ребре AB точку M. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости ACC_1.

115. Точка M лежит на ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1.

Глава II

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

15. Перпендикулярные прямые в пространстве. Две прямые в пространстве называются *перпендикулярными* (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся.

Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

Лемма. ***Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.***

Доказательство. Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию леммы $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Таким образом, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана.

16. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости.

Определение. *Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

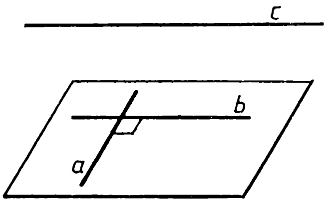


Рис. 43.

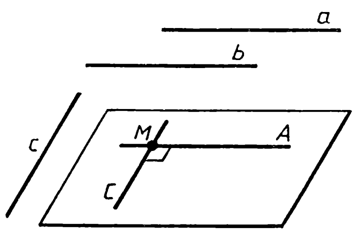


Рис. 44.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что *плоскость α перпендикулярна к прямой a.*

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема. ***Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.***

Доказательство. Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема. ***Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.***

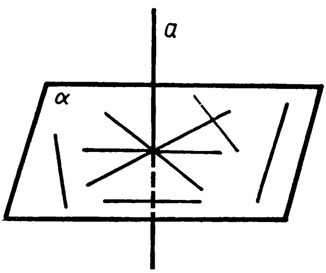


Рис. 45.

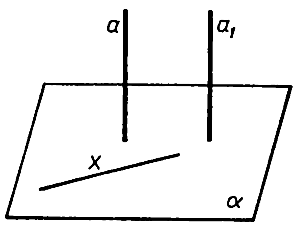


Рис. 46.

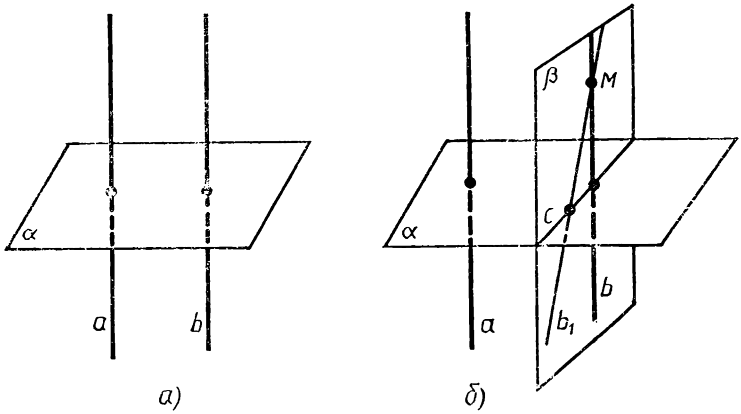


Рис. 47.

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 47, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 47, *б*). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.

17. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Как проверить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение, например, при установке мачт, колонн зданий и т. д., которые нужно поставить прямо, т. е. перпендикулярно к той плоскости, на которую они ставятся. Оказывается, что для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой, как о том говорится в определении, а достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. ***Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.***

Доказательство. Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 48, *а*). Докажем, что $a \perp \alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α.

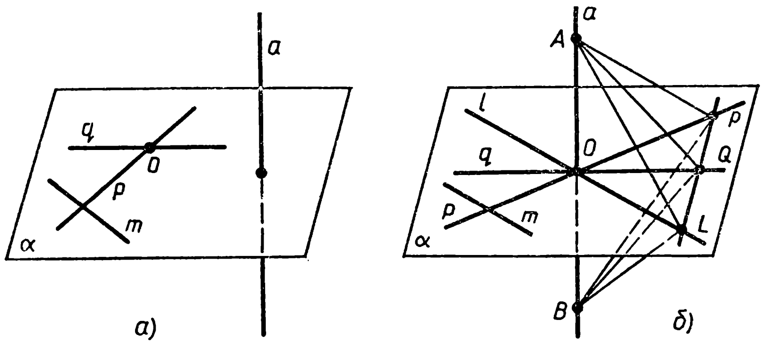


Рис. 48.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, *б*). Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой m (если прямая m проходит через точку O, то в качестве l возьмем саму прямую m). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определенности, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, *б*).

Так как прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то $AP=BP$ и $AQ=BQ$. Следовательно, $\triangle APQ=\triangle BPQ$ по трем сторонам. Поэтому $\angle APQ=\angle BPQ$.

Сравним теперь треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP=BP$, PL — общая сторона, $\angle APL=\angle BPL$), поэтому $AL=BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. $l\perp a$. Так как $l\parallel m$ и $l\perp a$, то $m\perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т. е. $a\perp\alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме $a_1\perp p$ и $a_1\perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1\perp\alpha$. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что $a\perp\alpha$. Теорема доказана.

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задачи.

Задача. *Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.*

Решение. Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

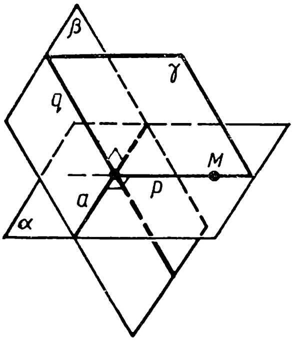


Рис. 49.

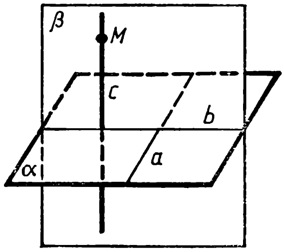


Рис. 50.

Проведем через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$ (рис. 49)*. В плоскости α через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведем прямую q, перпендикулярную к прямой a. Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что γ — единственная плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a (задача 133).

18. Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости.

Т е о р е м а. ***Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что:

1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α;

2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку M проведем прямую c, перпендикулярную к прямой b. Прямая c и есть искомая прямая. Она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp a$).

* На рисунке 49 изображен тот случай, когда точка M не лежит на прямой a. Однако приведенное решение задачи пригодно и для того случая, когда точка M лежит на прямой a.

2) Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая (обозначим ее через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 16) $c_1 \parallel c$, что невозможно, так как прямые c_1 и c пересекаются в точке M. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

116. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что: а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90°$; б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

117. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC.

118. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

119. Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что: а) $AB = DB$; б) $AB = AC$, если $OB = OC$; в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

120. Через точку O пересечения диагоналей квадрата со стороной a проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK = b$.

121. В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем $CK = 12$ см. Найдите KM.

122. Прямая CD перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Найдите расстояния от точек D и K до вершин A и B треугольника.

123. Докажите, что если две плоскости α и β перпендикулярны к прямой a, то они параллельны.

Решение. Проведем какую-нибудь прямую, параллельную прямой a, так, чтобы она пересекала плоскости α и β в различных точках A и B. По первой теореме п. 16 плоскости α и β перпендикулярны к прямой AB.

Если допустить, что плоскости α и β не параллельны, т. е. имеют хотя бы одну общую точку M, то получим треугольник ABM с двумя прямыми углами при вершинах A и B, что невозможно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

124. Прямая PQ параллельна плоскости α. Через точки P и Q проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

125. Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ=15$ см, $PP_1=21{,}5$ см, $QQ_1=33{,}5$ см.

126. Прямая MB перпендикулярна к сторонам AB и BC треугольника ABC. Определите вид треугольника MBD, где D — произвольная точка прямой AC.

127. В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90°. Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что $CD \perp AC$.

128. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что $MA=MC$, $MB=MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

129. Прямая AM перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что: а) прямая BD перпендикулярна к плоскости AMO; б) $MO \perp BD$.

130. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BM. Известно, что $\angle MBA = \angle MBC = 90°$, $MB=m$, $AB=n$. Найдите расстояния от точки M до: а) вершин квадрата; б) прямых AC и BD.

131. В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC, $AB=AC$, $DB=DC$. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.

132. Докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к прямой, то и другая плоскость перпендикулярна к этой прямой.

133. Докажите, что через любую точку пространства проходит только одна плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение. Согласно задаче п. 17 через данную точку M проходит плоскость α, перпендикулярная к данной прямой a. Предположим, что через точку M проходит еще одна плоскость α_1, перпендикулярная к этой прямой. Тогда плоскости α и α_1 параллельны (см. задачу 123). Но это невозможно, так как эти плоскости имеют общую точку M. Следовательно, наше предположение неверно, и через точку M проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

134. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой a.

135. Прямая a перпендикулярна к плоскости α и перпендикулярна к прямой b, не лежащей в этой плоскости. Докажите, что $b \parallel \alpha$.

136. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к прямой AB.

137. Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.

§ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

19. Расстояние от точки до плоскости. Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51) Отрезок AH называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α, а точка H — основанием перпендикуляра.* Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется *наклонной, проведенной из точки A к плоскости α, а точка M — основанием наклонной.* Отрезок HM называется *проекцией наклонной* на плоскость α. Сравним перпендикуляр AH и наклонную AM: в прямоугольном треугольнике AMH сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Итак, *перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.*

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется *расстоянием от точки A до плоскости α.* Когда мы говорим, что некоторый предмет, например лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем, 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

З а м е ч а н и я. 1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В са-

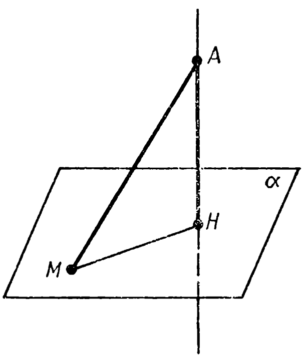


Рис. 51.

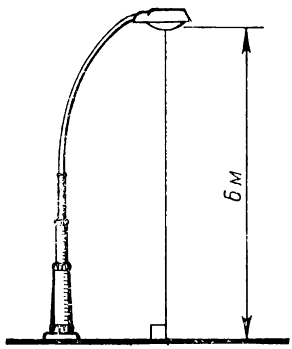


Рис. 52.

мом деле, рассмотрим перпендикуляры AA_0 и MM_0, проведенные из двух произвольных точек A и M плоскости α к параллельной ей плоскости β. Так как $AA_0 \perp \beta$ и $MM_0 \perp \beta$, то $AA_0 \| MM_0$. Отсюда следует, что $MM_0 = AA_0$ (свойство 2^0, п. 11), т. е. расстояние от любой точки M плоскости α до плоскости β равно длине отрезка AA_0. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется *расстоянием между параллельными плоскостями.*

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (задача 144). В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется *расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.*

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми.*

20. Теорема о трех перпендикулярах.

Теорема. ***Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.***

Доказательство. Обратимся к рисунку 53, на котором отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции HM наклонной. Докажем, что $a \perp AM$.

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и MH ($a \perp HM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp AM$. Теорема доказана.

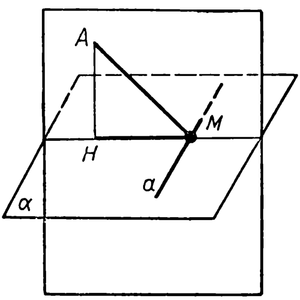


Рис. 53.

Эта теорема называется *теоремой о трех перпендикулярах*, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также обратная теорема: *прямая, проведенная в*

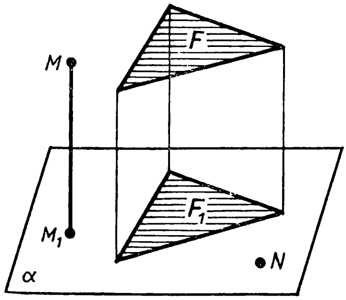


Рис. 54.

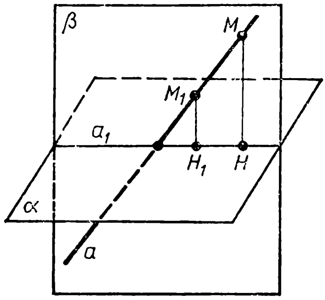


Рис. 55.

плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции. По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно (задача 153).

21. Угол между прямой и плоскостью. В п. 19 было дано определение проекции наклонной на плоскость. Введем теперь понятие проекции* произвольной фигуры. *Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.* На рисунке 54 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется *проекцией фигуры F* на данную плоскость. На рисунке 54 треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α.

Докажем, что *проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.*

Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости α,— буквой a (рис. 55). Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через a и MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой a и проведем в плоскости β прямую M_1H_1, параллельную прямой MH (H_1 — точка пересечения прямых M_1H_1 и a). По первой теореме п. 16 $M_1H_1 \perp \alpha$ и, значит, точка H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α. Мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1. Аналогично

* В данном пункте речь идет о прямоугольной проекции фигуры. Более общее понятие параллельной проекции фигуры рассматривается в приложении 1.

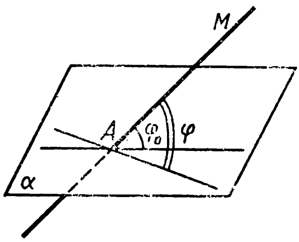


Рис. 56.

доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a. Следовательно, a_1 — проекция прямой a на плоскость α.

Из доказанного утверждения следует, что проекцией отрезка AB, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек A и B. Поэтому определение проекции наклонной (п. 19) полностью согласуется с общим определением проекции фигуры.

Используя понятие проекции прямой на плоскость, дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение. *Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.*

Можно доказать, что угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α (рис. 56) является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A (задача 162).

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.

Если данная прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае понятие угла между прямой и плоскостью мы не вводим. (Иногда договариваются считать, что угол между параллельными прямой и плоскостью равен 0°.)

ЗАДАЧИ

138. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. а) Найдите наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d. б) Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

139. Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные. Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные; в) если наклонные не равны, то бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию.

140. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

141. Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

142. Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

143. Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB=6$ см.

144. Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что все точки прямой a равноудалены от плоскости α.

Решение. Через какую-нибудь точку прямой a проведем плоскость β, параллельную плоскости α (задача 59). Прямая a лежит в плоскости β, так как в противном случае она пересекает плоскость β, а значит, пересекает и плоскость α (задача 55), что невозможно. Все точки плоскости β равноудалены от плоскости α, поэтому и все точки прямой a, лежащей в плоскости β, равноудалены от плоскости α, что и требовалось доказать.

145. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный. б) Найдите BD, если $BC=a$, $DC=b$.

146. Прямая a пересекает плоскость α в точке M и не перпендикулярна к этой плоскости. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная к прямой a, и притом только одна.

147. Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и MCD прямоугольные.

148. Прямая AK перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, M — середина стороны BC. Докажите, что $MK \perp BC$.

149. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=AC=5$ см, $BC=6$ см, $AD=12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

150. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD=6$ см, $KB=7$ см, $KC=9$ см. Найдите: а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми AK и CD.

151. Прямая CD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) треугольник ABC является проекцией треугольника ABD на плоскость ABC; б) если CH — высота треугольника ABC, то DH — высота треугольника ABD.

152. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если $BF=8$ дм, $AB=4$ дм.

153. Докажите, что прямая a, проведенная в плоскости α через основание M наклонной AM перпендикулярно к ней, перпендикулярна к ее проекции HM (см. рис. 53).

Решение. Прямая a перпендикулярна к плоскости AMH, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($a \perp AM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp HM$, что и требовалось доказать.

154. Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что $BD=9$ см, $AC=10$ см, $BC=BA=$ $=13$ см. Найдите: а) расстояние от точки D до прямой AC; б) площадь треугольника ACD.

155. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AC=4$ см, а $CM=2\sqrt{7}$ см.

156. Один из катетов прямоугольного треугольника ABC равен m, а острый угол, прилежащий к этому катету, равен φ. Через вершину прямого угла C проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника, $CD=n$. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

157. Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. а) Докажите, что расстояния от точки K до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны. б) Найдите это расстояние, если $OK=4{,}5$ дм, $AC=6$ дм, $BD=8$ дм.

158. Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB=25$ см, $\angle BAD=60°$, $BM=12{,}5$ см.

159. Прямая BM перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM, перпендикулярна к плоскости ABM.

160. Концы отрезка AB лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно d, причем $d<AB$. Докажите, что проекции отрезка AB на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если $AB=13$ см, $d=5$ см.

161. Луч BA не лежит в плоскости неразвернутого угла CBD. Докажите, что если $\angle ABC=\angle ABD$, причем $\angle ABC<90°$, то проекцией луча BA на плоскость CBD является биссектриса угла CBD.

162. Прямая MA проходит через точку A плоскости α и образует с этой плоскостью угол $\varphi_0 \neq 90°$. Докажите, что φ_0 является наименьшим из всех углов, которые прямая MA образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

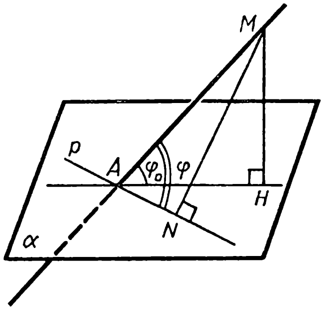


Рис. 57.

Решение. Обозначим буквой H основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости α, и рассмотрим произвольную прямую p в плоскости α, проходящую через точку A и отличную от прямой AH (рис. 57). Угол между прямыми AM и p обозначим через φ и докажем, что $\varphi > \varphi_0$.

Из точки M проведем перпендикуляр MN к прямой p. Если точка N совпадает с точкой A, то $\varphi = 90°$ и поэтому $\varphi > \varphi_0$. Рассмотрим случай, когда точки A и N не совпадают (см. рис. 57). Отрезок AM — общая гипотенуза прямоугольных треугольников ANM и AHM, поэтому $\sin\varphi = \frac{MN}{AM}$, $\sin\varphi_0 = \frac{MH}{AM}$. Так как $MN > MH$ (MN — наклонная, MH — перпендикуляр), то из двух этих равенств следует, что $\sin\varphi > \sin\varphi_0$ и поэтому $\varphi > \varphi_0$.

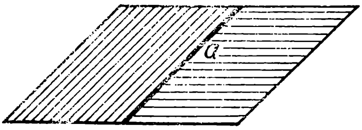
163. Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен: а) 45°; б) 60°; в) 30°?

164. Под углом φ к плоскости α проведена наклонная. Найдите φ, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.

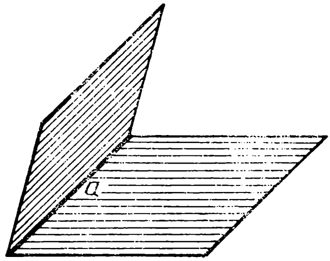
165. Из точки A, удаленной от плоскости γ на расстояние d, проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в 120°. Найдите BC.

§ 3. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

22. Двугранный угол. Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается еще один вид углов — *двугранные углы*. Чтобы ввести понятие двугранного угла, напомним, что любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости (рис. 58, *а*).



а)
Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости.



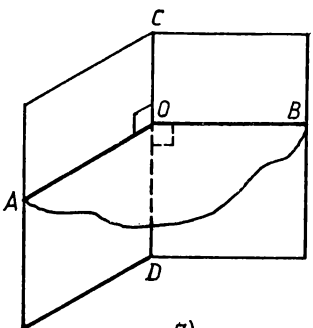
б)
Двугранный угол.

Рис. 58.

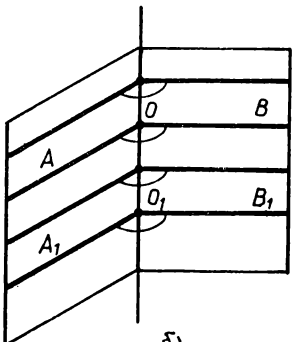
Представим себе, что мы перегнули плоскость по прямой a так, что две полуплоскости с границей a оказались уже не лежащими в одной плоскости (рис. 58, *б*). Полученная фигура и есть двугранный угол. Таким образом, можно дать такое определение двугранного угла: ***двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, не принадлежащими одной плоскости.*** Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его ***гранями.*** У двугранного угла две грани, отсюда и название — двугранный угол. Прямая a — общая граница полуплоскостей — называется *ребром* двугранного угла.

В обыденной жизни мы встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла. Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом и т. д.

Мы знаем, что углы на плоскости (обычные углы) измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы? Это делается следующим образом. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называет-



а)



б)

Рис. 59. Линейный угол двугранного угла.

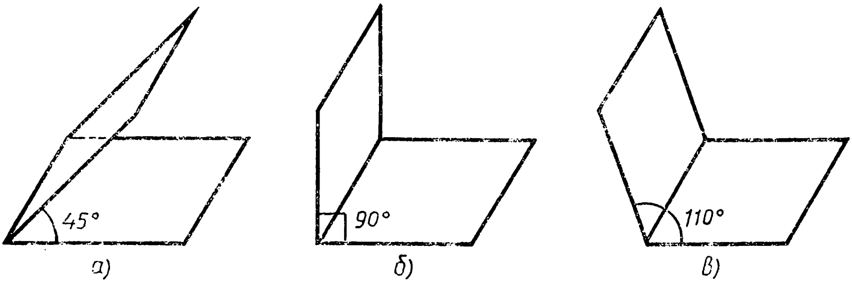


Рис. 60.

ся *линейным углом двугранного угла.* На рисунке 59, *а* угол AOB — линейный угол двугранного угла с ребром CD. Так как $OA \perp CD$ и $OB \perp CD$, то плоскость AOB перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов (рис. 59, *б*).

Докажем, что *все линейные углы двугранного угла равны друг другу.* Рассмотрим два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 59, *б*). Лучи OA и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O_1B_1. Поэтому $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (как углы с сонаправленными сторонами).

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 60, *а* градусная мера двугранного угла равна 45°. Обычно говорят коротко: «Двугранный угол равен 45°».

Двугранный угол называется *прямым (острым, тупым)*, если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°). Двугранный угол, изображенный на рисунке 60, *б*, прямой, на рисунке 60, *а* — острый, а на рисунке 60, *в* — тупой.

23. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 61, *а*). Если один из этих двугранных углов равен φ, то другие три угла равны соответственно $180° - \varphi$, φ и $180° - \varphi$

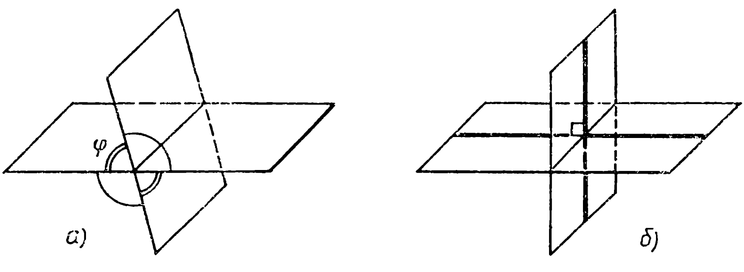


Рис. 61.

(объясните почему). В частности, если один из углов прямой ($\varphi=90°$), то и остальные три угла прямые. Если φ — тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что угол между пересекающимися плоскостями равен φ. Очевидно, $0°<\varphi\leqslant 90°$.

Определение. *Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°* (рис. 61, *б*).

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола, стены и потолка комнаты.

Ясно, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. ***Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.***

Доказательство. Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A (рис. 62). Докажем, что $\alpha\perp\beta$. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причем $AB\perp AC$, так как по условию $AB\perp\beta$, и, значит, прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведем в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но $\angle BAD=90°$ (так как $AB\perp\beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен 90°, т. е. $\alpha\perp\beta$. Теорема доказана.

Следствие. *Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей* (рис. 63).

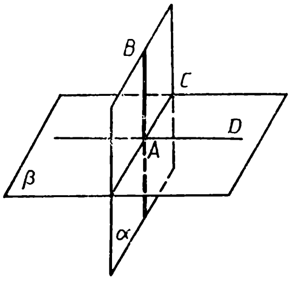


Рис. 62.

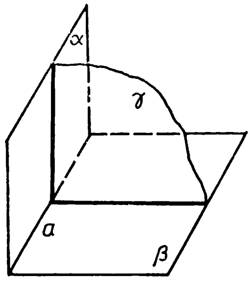


Рис. 63. Если $\gamma\perp a$, то $\gamma\perp\alpha$ и $\gamma\perp\beta$.

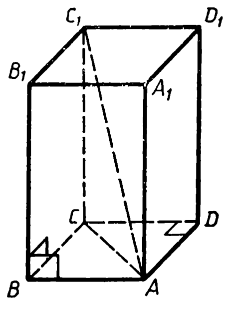


Рис. 64. Прямоугольный параллелепипед.

24. Прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед называется *прямоугольным*, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют многие предметы: коробки, ящики, комнаты и т. д. На рисунке 64 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основаниями служат прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AB$, т. е. боковая грань AA_1B_1B — прямоугольник. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях. Таким образом, мы обосновали следующее свойство прямоугольного параллелепипеда:

1^0. *В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.*

Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются *двугранными углами параллелепипеда.*

Докажите самостоятельно еще одно свойство:

2^0. *Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.*

Перейдем теперь к рассмотрению одного из самых замечательных свойств прямоугольного параллелепипеда.

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, назовем *измерениями* прямоугольного параллелепипеда. Например, у параллелепипеда, изображенного на рисунке 64, в качестве измерений можно взять длины ребер AB, AD и AA_1.

В обыденной практике, говоря о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вместо слова «измерения» используют обычно слова «длина», «ширина» и «высота» комнаты. Ясно, что длина, ширина и высота комнаты — это и есть ее измерения.

Прежде чем сформулировать свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями, вспомним, что в прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов смежных сторон. Длины смежных сторон можно назвать измерениями прямоугольника и поэтому можно сказать, что *квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.* Оказывается, аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед.

Теорема. ***Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.***

Доказательство. Обратимся к рисунку 64, на котором изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2. \qquad (1)$$

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1 прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = AA_1$. Следовательно

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.*

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется *кубом*. Все грани куба — равные друг другу квадраты.

ЗАДАЧИ*

166. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $AMNC$.

167. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.

168. Двугранный угол равен φ. На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

169. Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180°.

170. Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150°$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45°.

171. Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

172. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями

---

* В задачах этого параграфа двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, для краткости будем называть так: двугранный угол $CABD$.

α и ABC равен 60°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC=5$ см, $AB=13$ см.

173. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB=BC=AC=6$, $BD=3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

174. Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC=CB=5$, $DB=5\sqrt{5}$.

175. Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

176. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен 60°. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD=45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

177. Докажите, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

178. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Докажите, что любая прямая плоскости α, перпендикулярная к прямой c, перпендикулярна к плоскости β.

Решение. Проведем в плоскости α произвольную прямую AC, перпендикулярную к прямой c, $C \in c$. Докажем, что $CA \perp \beta$.

В плоскости β через точку C проведем прямую CB, перпендикулярную к прямой c. Так как $CA \perp c$ и $CB \perp c$, то $\angle ACB$ — линейный угол одного из двугранных углов, образованных плоскостями α и β. По условию задачи $\alpha \perp \beta$, поэтому $\angle ACB$ — прямой, т. е. $CA \perp CB$. Таким образом, прямая CA перпендикулярна к двум пересекающимся прямым c и CB плоскости β, поэтому $CA \perp \beta$.

179. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Через некоторую точку плоскости α проведена прямая, перпендикулярная к плоскости β. Докажите, что эта прямая лежит в плоскости α.

180. Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

181. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB соответственно к плоскостям α и β. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Докажите, что $MC \perp a$.

182. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. а) Докажите, что четырехугольник $ACBM$ является прямоугольником. б) Найдите расстояние от точки M до прямой a, если $AM=m$, $BM=n$.

183. Плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны к плоскости γ. Докажите, что прямая a перпендикулярна к плоскости γ.

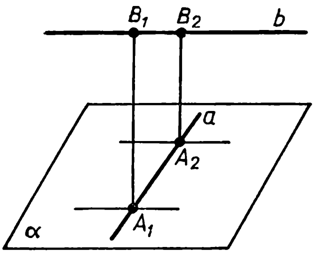


Рис. 65.

184. Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если треугольники: а) равносторонние; б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

185. Прямая a не перпендикулярна к плоскости α. Докажите, что существует плоскость, проходящая через прямую a и перпендикулярная к плоскости α.

Решение. Через произвольную точку M прямой a проведем прямую p, перпендикулярную к плоскости α, и рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a и p. Плоскость β является искомой, так как она проходит через прямую a и по признаку перпендикулярности двух плоскостей перпендикулярна к плоскости α.

186. Докажите, что существует, и притом только одна, прямая, пересекающая две данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярная к каждой из них.

Решение. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямую a и параллельную прямой b. Через прямые a и b проведем плоскости β и γ так, чтобы $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$ (задача 185). Докажите самостоятельно, что прямая p, по которой пересекаются плоскости β и γ, является искомой.

Докажем, что p — единственная прямая, удовлетворяющая условию задачи. Предположим, что существуют две прямые A_1B_1 и A_2B_2, пересекающие данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярные к каждой из них (рис. 65). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 перпендикулярны к плоскости α (объясните почему), поэтому они параллельны. Отсюда следует, что скрещивающиеся прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых.

187. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

188. Ребро куба равно a. Найдите диагональ куба.

189. Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если: а) диагональ грани куба равна m; б) диагональ куба равна d.

190. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите следующие двугранные углы: а) ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K, где K — середина ребра A_1D_1.

191. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны.

192. Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

193. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $D_1B=d$, $AC=m$, $AB=n$. Найдите расстояние между: а) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC; б) плоскостями ABB_1 и DCC_1; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

194. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и ребро куба; б) диагональ куба и диагональ грани куба.

195. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1=12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в 30°, а с ребром DD_1 — угол в 45°.

196. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости BB_1D_1; б) ребро AB и перпендикулярной к плоскости CDA_1.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ II

1. Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то эти прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?

2. Параллельные прямые b и c лежат в плоскости α, а прямая a перпендикулярна к прямой b. Верно ли утверждение: а) прямая a перпендикулярна к прямой c; б) прямая a пересекает плоскость α?

3. Прямая a перпендикулярна к плоскости α, а прямая b не перпендикулярна к этой плоскости. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

4. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Верно ли утверждение, что прямые a и b взаимно перпендикулярны?

5. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Существует ли прямая, перпендикулярная к прямым a и b?

6. Верно ли утверждение, что все прямые, перпендикулярные к данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости?

7. Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна к третьей плоскости, быть: а) параллельными плоскостями; б) перпендикулярными плоскостями?

8. Можно ли через точку пространства провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны?

9. Диагональ квадрата перпендикулярна к некоторой плоскости. Как расположена другая диагональ квадрата по отношению к этой плоскости?

10. Сколько двугранных углов имеет: а) тетраэдр; б) параллелепипед?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

197. Отрезок BM перпендикулярен к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD перпендикулярна к плоскости MBC.

198. Точка A лежит в плоскости α, а точка B удалена от этой плоскости на расстояние 9 см. Точка M делит отрезок AB в отношении $4:5$, считая от точки A. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

199. Точка S равноудалена от вершин прямоугольного треугольника и не лежит в плоскости этого треугольника. Докажите, что прямая SM, где M — середина гипотенузы, перпендикулярна к плоскости треугольника.

200. Докажите, что любая точка прямой, которая проходит через центр окружности, описанной около многоугольника, и перпендикулярна к плоскости многоугольника, равноудалена от вершин этого многоугольника.

201. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если точки P и Q равноудалены от концов отрезка AB.

202. Точка удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника на расстояние 10 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится эта точка, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 5 см?

203. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до сторон треугольника, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $OK = 4$ см.

204. Прямая OM перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC и проходит через центр O этого треугольника, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. Найдите: а) расстояние от точки M до каждой из вершин треугольника ABC и до прямых AB, BC и CA; б) длину окружности, описанной около треугольника ABC; в) площадь треугольника ABC.

205. Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Найдите площадь треугольника ABD, если $CA = 3$ дм, $CB = 2$ дм, $CD = 1$ дм.

206. Стороны треугольника равны 17 см, 15 см и 8 см. Через вершину A меньшего угла треугольника проведена прямая AM, перпендикулярная к его плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, если известно, что $AM = 20$ см.

207. В треугольнике ABC дано: $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Точка M удалена от прямых AB, BC и AC на $8\frac{2}{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если ее проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.

208. Из точки K, удаленной от плоскости α на 9 см, проведены к плоскости α наклонные KL и KM, образующие между собой прямой угол, а с плоскостью α — углы в $45°$ и $30°$ соответственно. Найдите отрезок LM.

209. Углы между равными отрезками AB и AC и плоскостью α, проходящей через точку A, равны соответственно $40°$ и $50°$. Сравните расстояния от точек B и C до плоскости α.

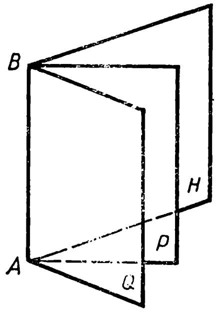


Рис. 66.

210. На рисунке 66 двугранные углы $HABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABH и ABQ.

211. Плоскости правильного треугольника KDM и квадрата $KMNP$ взаимно перпендикулярны. Найдите DN, если $KM=a$.

212. Точка C является проекцией точки D на плоскость треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника ABD равна $\frac{S}{\cos\alpha}$, где S — площадь треугольника ABC, а α — угол между плоскостями ABC и ABD.

213. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Вычислите угол между плоскостями этих треугольников.

214. Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость α является квадрат ABC_1D_1. Вычислите угол φ между плоскостью α и плоскостью прямоугольника $ABCD$, если $AB:BC=1:2$.

215. Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного $60°$. Точки A и D удалены от ребра двугранного угла соответственно на 8 см и 6,5 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

216. Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного $120°$. Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Найдите отрезок CD, если $AB=AC=BD=a$.

217. Сумма площадей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его ребра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

Глава III

МНОГОГРАННИКИ

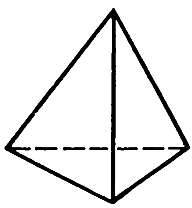
§ 1. ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА. ПРИЗМА

25. Понятие многогранника. В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырех треугольников (рис. 67, *а*), параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 67, *б*). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или *многогранником*. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников. На рисунке 68 изображен еще один многогранник — *октаэдр*. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.

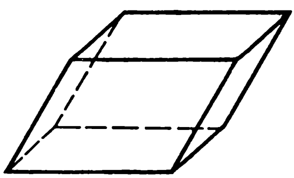
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его *гранями**. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 67, *а* и 68), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 67, *б*). Стороны граней называются *ребрами*, а концы ребер — *вершинами* многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

Многогранники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону



а)

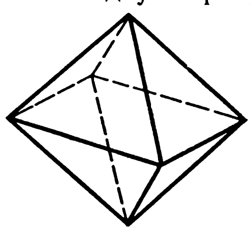
Тетраэдр.



б)

Параллелепипед.

Рис. 67.



Октаэдр.

Рис. 68.

* При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости.

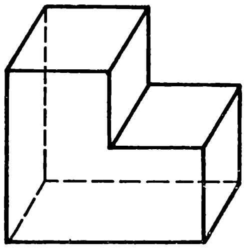


Рис. 69. Невыпуклый многогранник.

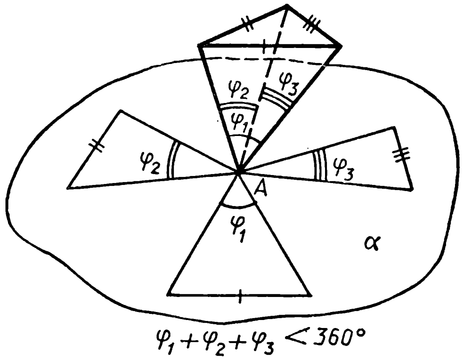


Рис. 70. $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360°$.

от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр — выпуклые многогранники. На рисунке 69 изображен невыпуклый многогранник, составленный из восьми многоугольников.

Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Можно доказать, что в *выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°*. Рисунок 70 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль ребер и все его грани с общей вершиной A развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е. $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$, меньше 360°.

26*. Геометрическое тело. Мы отметили, что многогранник ограничивает некоторое геометрическое тело. Уточним это понятие.

Точка M называется *граничной* точкой данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая ее саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется ее *границей*. Так, например, границей шара является сфера.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется *внутренней* точкой фигуры. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре. Так, любая точка шара, не лежащая на сфере — его границе, является внутренней точкой шара.

Фигура называется *ограниченной*, если ее можно заключить в какую-нибудь сферу. Очевидно, шар, тетраэдр, параллелепи-

---

* Этот пункт не является обязательным для изучения.

пед — ограниченные фигуры, а прямая и плоскость — неограниченные.

Фигура называется *связной*, если любые две ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Примерами связных фигур являются тетраэдр (см. рис. 67, *а*), параллелепипед (см. рис. 67, *б*), октаэдр (см. рис. 68), плоскость. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическим телом (или просто *телом*) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причем сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его *поверхностью* и говорят, что поверхность *ограничивает* тело.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется *секущей плоскостью*. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется *сечением* тела.

27. Призма. Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 71). Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью (п. 11).

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плос-

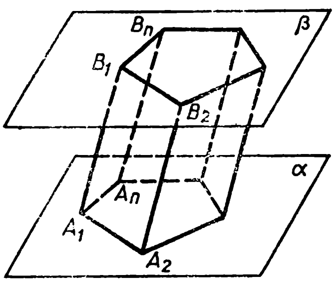


Рис. 71. Призма. Многоугольники $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани.

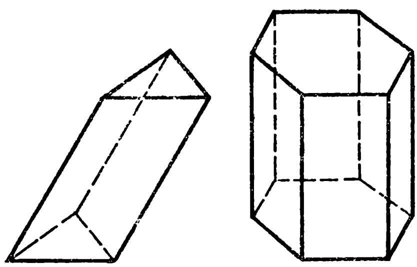


Рис. 72.

костях, и n параллелограммов (1), называется *призмой* (см. рис. 71).

Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются *основаниями*, а параллелограммы (1) — *боковыми гранями* призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются *боковыми ребрами* призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Призму с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают $A_1A_2 ... A_nB_1B_2...B_n$ и называют *n-угольной призмой.* На рисунке 72 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 67, *б* — четырехугольная призма, т. е. параллелепипед.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой* призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, в противном случае — *наклонной.* Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 72 изображена правильная шестиугольная призма.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а *площадью боковой поверхности призмы* — сумма площадей ее боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема. ***Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.***

Доказательство. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак, $S_{\text{бок}} = Ph$. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

218. Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

219. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

221. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

222. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

223. Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

224. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см.

225. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

226. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а ее высота равна 4 см.

227. Основание призмы — правильный треугольник ABC. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что: а) $BC \perp AA_1$; б) CC_1B_1B — прямоугольник.

228. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC=AB=13$ см, $BC=10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

229. В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площадь боковой и полной поверхностей призмы, если: а) $n=3$, $a=10$ см, $h=15$ см; б) $n=4$, $a=12$ дм, $h=8$ дм; в) $n=6$, $a=23$ см, $h=5$ дм; г) $n=5$, $a=0{,}4$ м, $h=10$ см.

230. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом, равным 120°, между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

231. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений* равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

232. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с меньшей боковой гранью — угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

233. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1D_1D, перпендикулярное к плоскости грани AA_1C_1C. Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см.

234. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

235. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через катет, противолежащий этому углу, и через противоположную этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол θ с плоскостью основания. Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади сечения.

236. Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения** на боковое ребро.

237. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

238. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, отстоящее от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см, равно 24 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

§ 2. ПИРАМИДА

28. Пирамида. Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 73):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ ...,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и n треугольников (1), называется *пирамидой*. Многоугольник $A_1A_2...A_n$

---

* Сечение параллелепипеда называется диагональным, если оно содержит какую-нибудь его диагональ и боковое ребро.

** Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их.

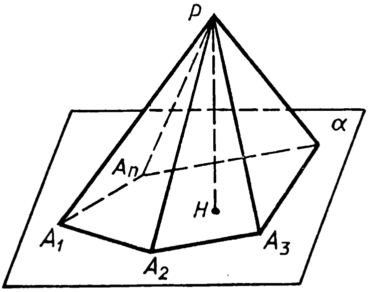


Рис. 73. Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3...A_n$ — основание пирамиды. Треугольники A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — боковые грани, P — вершина пирамиды.

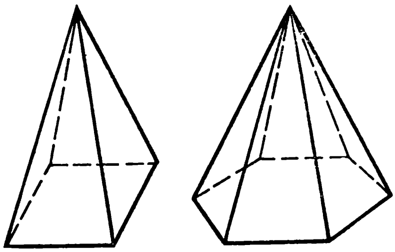


Рис. 74.

называется *основанием*, а треугольники (1) — *боковыми гранями* пирамиды. Точка P называется *вершиной* пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — ее *боковыми ребрами*. Пирамиду с основанием $A_1A_2...A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2...A_n$ — и называют n-угольной пирамидой. На рисунке 74 изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется *высотой* пирамиды. На рисунке 73 отрезок PH — высота пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т. е. основания и боковых граней), а *площадью боковой поверхности пирамиды* — сумма площадей ее боковых граней.

Очевидно,

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}. \qquad (2)$$

29. Правильная пирамида. Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания*, является ее высотой (рис. 75).

Докажем, что *все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.*

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ (рис. 75). Сначала докажем, что все боковые ребра этой пирамиды равны.

* Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него (или описанной около него) окружности.

Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP=h$, $OA_1=R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2+R^2}$, поэтому $PA_1=$ $=PA_2=...=PA_n$.

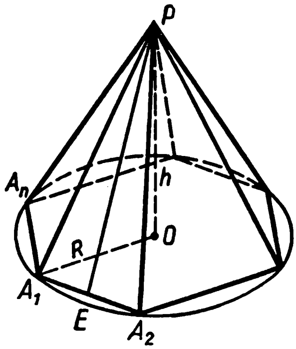


Рис. 75.

Мы доказали, что боковые ребра правильной пирамиды $PA_1A_2...A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*. На рисунке 75 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Т е о р е м а. ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

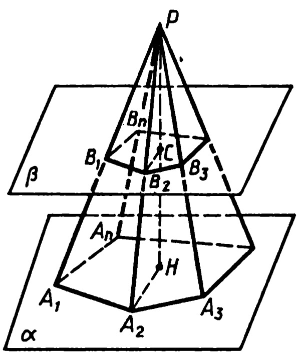


Рис. 76. Усеченная пирамида.

30. Усеченная пирамида. Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках B_1, B_2, ..., B_n (рис. 76). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники

$A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2..B_n$ (*нижнее* и *верхнее основания*), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (*боковые грани*), называется *усеченной пирамидой*. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются *боковыми ребрами* усеченной пирамиды.

Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают так: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой* усеченной пирамиды. На рисунке 76 отрезок CH — высота усеченной пирамиды.

Докажем, что *боковые грани усеченной пирамиды — трапеции*. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 76). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются *апофемами*.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Докажите самостоятельно следующую теорему:

Теорема. ***Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.***

ЗАДАЧИ

239. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

240. Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

241. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

242. Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

243. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

244. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, катет AC равен 21 см. Ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

245. Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

246. Высота треугольной пирамиды равна 40 см, а высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, равна 41 см. а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание. б) Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 42 см.

247. Двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание; б) высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны; в) площадь боковой поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведенную из вершины.

248. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

249. В пирамиде все боковые ребра равны между собой. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания; б) все боковые ребра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.

250. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120°. Боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

251. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC = 10$ см.

252. Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC$, $BC=6$ см, высота AH равна 9 см. Известно также, что $DA=DB=DC=13$ см. Найдите высоту пирамиды.

253. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите ее высоту.

254. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна H. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

255. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту пирамиды.

256. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α. Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро; в) угол между боковой гранью и плоскостью основания; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

257. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне основания равен 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

258. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.

259. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

260. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро DC и высоту DO пирамиды проведена плоскость α. Докажите, что: а) ребро AB перпендикулярно к плоскости α; б) перпендикуляр, проведенный из вершины C к апофеме грани ADB, является перпендикуляром к плоскости ADB.

261. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

262. Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

263. В правильной пирамиде $MABCD$ точки K, L и N лежат на ребрах BC, MC и AD, $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLN и определите вид сечения. б) Докажите, что плоскость KLN параллельна плоскости AMB.

264. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведен-

ного через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

265. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Через сторону основания проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 12 см.

266. Основанием пирамиды, высота которой равна 2 дм, а боковые ребра равны друг другу, является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ основания параллельно боковому ребру.

267. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Докажите, что боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части.

268. Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь ее полной поверхности равна 186 дм^2. Найдите высоту усеченной пирамиды.

269. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

270. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

31. Симметрия в пространстве. В планиметрии мы рассматривали фигуры, симметричные относительно точки и относительно прямой. В стереометрии рассматривают симметрию относительно точки, прямой и плоскости.

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O (центр симметрии)*, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 77, *а*). Точка O считается симметричной самой себе.

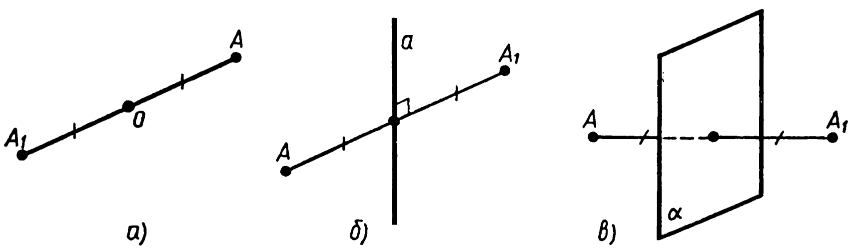


Рис. 77.

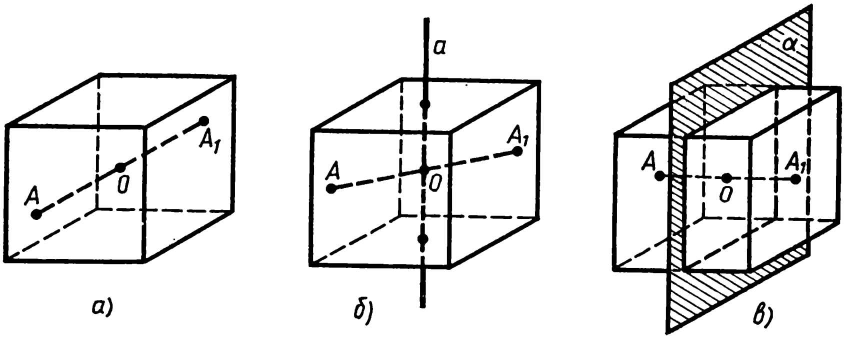


Рис. 78.

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой a (ось симметрии)*, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 77, *б*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии)*, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 77, *в*). Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

Введем понятия центра, оси и плоскости симметрии фигуры. *Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.*

На рисунке 78, *а, б, в* показаны центр O, ось a и плоскость α симметрии прямоугольного параллелепипеда. Фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей симметрии, плоскостей симметрии). Например, куб имеет только один центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Существу-

Рис. 79.

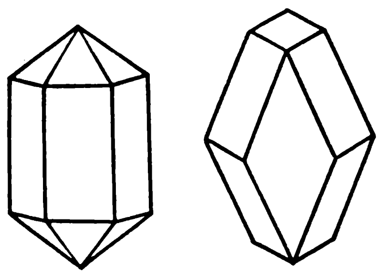


Рис. 80.

ют фигуры, имеющие бесконечно много центров, осей или плоскостей симметрии. Простейшими из таких фигур являются прямая и плоскость. Любая точка плоскости является ее центром симметрии. Любая прямая (плоскость), перпендикулярная к данной плоскости, является ее осью (плоскостью) симметрии. С другой стороны, существуют фигуры, не имеющие центров, осей или плоскостей симметрии. Например, тетраэдр не имеет ни одного центра симметрии.

С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту. Так, многие здания симметричны относительно плоскости (рис. 79), некоторые виды деталей имеют ось симметрии. Почти все кристаллы, встречающиеся в природе, имеют центр, ось или плоскость симметрии (рис. 80). В геометрии центр, оси и плоскости симметрии многогранника называются *элементами симметрии* этого многогранника.

32. Понятие правильного многогранника. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники и, кроме того, в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб. Все его грани — равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

Очевидно, все ребра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны также все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.

Докажем, что *не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n \geqslant 6$.* В самом деле, угол правильного n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$ (объясните почему). С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани — правильные n-угольники при $n \geqslant 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120° \cdot 3 = 360°$. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше $360°$ (п. 25).

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

В соответствии с этим получаем следующие правильные многогранники:

*Правильный тетраэдр** (рис. 81) составлен из четырех равно-

* Мы различаем правильный тетраэдр и правильную треугольную пирамиду. В отличие от правильного тетраэдра, все ребра которого равны, в правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны друг другу, но они могут быть не равны ребрам основания пирамиды.

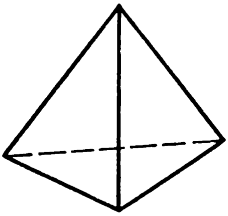


Рис. 81.

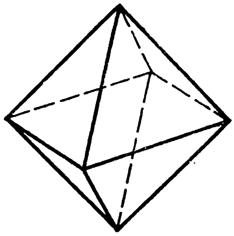


Рис. 82.

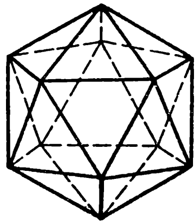


Рис. 83.

сторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.

Правильный октаэдр (рис. 82) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 240°.

Правильный икосаэдр (рис. 83) составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 300°.

Куб (рис. 84) составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270°.

Правильный додекаэдр (рис. 85) составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°.

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

33. Элементы симметрии правильных многогранников. Рассмотрим элементы симметрии правильных многогранников.

П р а в и л ь н ы й т е т р а э д р не имеет центра симметрии. Прямая, проходящая через середины двух противоположных

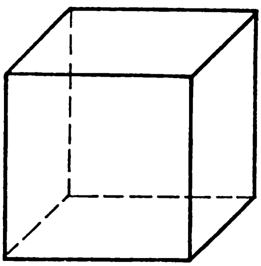


Рис. 84.

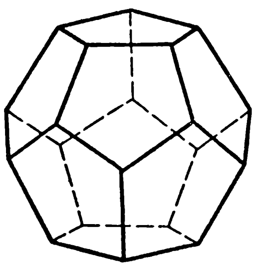


Рис. 85.

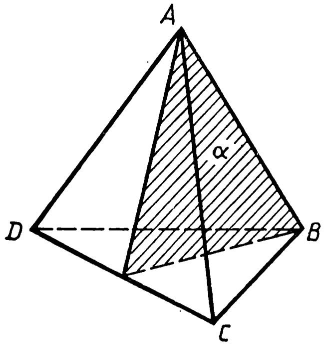


Рис. 86.

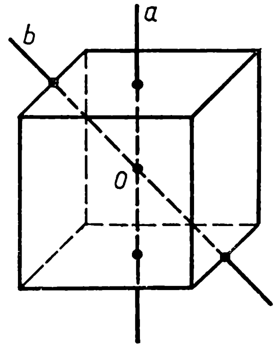


Рис. 87.

ребер, является его осью симметрии. Плоскость α, проходящая через ребро AB перпендикулярно к противоположному ребру CD правильного тетраэдра $ABCD$, является плоскостью симметрии (рис. 86). Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.

Куб имеет один центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Прямые a и b, проходящие соответственно через центры противоположных граней и середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани, являются его осями симметрии (рис. 87). Куб имеет девять осей симметрии. Все оси симметрии проходят через центр симметрии. Плоскостью симметрии куба является плоскость, проходящая через любые две оси симметрии. Куб имеет девять плоскостей симметрии.

Правильный октаэдр (см. рис. 82), правильный икосаэдр (см. рис. 83) и правильный додекаэдр (см. рис. 85) имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Попробуйте подсчитать их число.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

271. На рисунке 88 изображена развертка правильного тетраэдра. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее тетраэдр*.

272. На рисунке 89 изображена развертка куба. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее куб.

273. На рисунке 90 изображена развертка правильного октаэдра. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее октаэдр.

---

* При вырезании развертки сделайте необходимые припуски для склеивания.

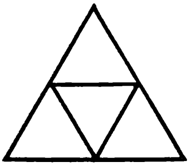


Рис. 88.

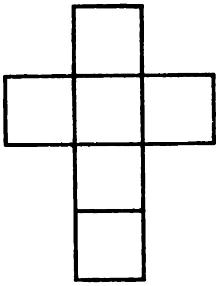


Рис. 89.

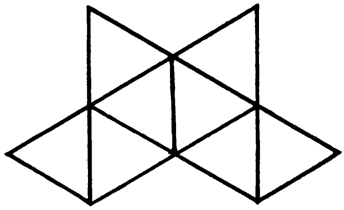


Рис. 90.

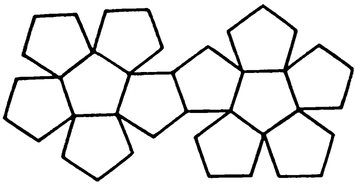


Рис. 91.

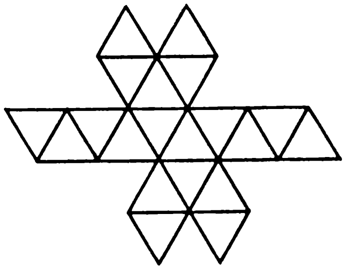


Рис. 92.

274. На рисунке 91 изображена развертка правильного додекаэдра. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее додекаэдр.

275. На рисунке 92 изображена развертка правильного икосаэдра. Перерисуйте ее на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее икосаэдр.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

276. Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?

277. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?

278. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырехугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырехугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

279. Найдите угол между двумя диагоналями граней куба, имеющими общий конец.

280. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагонали двух его граней.

281. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины D_1 проведены диагонали граней D_1A, D_1C и D_1B_1 и концы их соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1AB_1C — правильный тетраэдр. Найдите отношение площадей поверхностей куба и тетраэдра.

282. Найдите угол между двумя ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину, но не принадлежат одной грани (см. рис. 82).

283. В правильном тетраэдре $DABC$ ребро равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через центр грани ABC: а) параллельно грани BDC; б) перпендикулярно к ребру AD.

284*. От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают правильный тетраэдр с ребром 1. Какая фигура получится в результате?

285. Докажите, что в правильном тетраэдре отрезки, соединяющие центры граней, равны друг другу.

286. В правильном тетраэдре h — высота, m — ребро, а n — расстояние между центрами его граней. Выразите: а) m через h; б) n через m.

287. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между: а) двумя его противоположными вершинами; б) центрами двух смежных граней; в) противоположными гранями.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ III

1. Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?

2. Призма имеет n граней. Какой многоугольник лежит в ее основании?

3. Является ли призма прямой, если две ее смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?

4. В какой призме боковые ребра параллельны ее высоте?

5. Является ли призма правильной, если все ее ребра равны друг другу?

6. Может ли высота одной из боковых граней наклонной призмы являться и высотой призмы?

7. Существует ли призма, у которой: а) боковое ребро перпендикулярно только одному ребру основания; б) только одна боковая грань перпендикулярна к основанию?

8. Правильная треугольная призма разбивается плоскостью, проходящей через средние линии оснований, на две призмы. Как относятся площади боковых поверхностей этих призм?

9. Будет ли пирамида правильной, если ее боковыми гранями являются правильные треугольники?

10. Сколько граней, перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида?

11. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

12. Могут ли все грани треугольной пирамиды быть прямоугольными треугольниками?
13. Можно ли из куска проволоки длиной 66 см изготовить каркасную модель правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 10 см?
14. На какие многогранники рассекается треугольная призма плоскостью, проходящей через вершину верхнего основания и противолежащую ей сторону нижнего основания?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

288. Докажите, что число вершин любой призмы четно, а число ребер кратно 3.
289. Докажите, что площадь полной поверхности куба равна $2d^2$, где d — диагональ куба.
290. Угол между диагональю основания прямоугольного параллелепипеда, равной l, и одной из сторон основания равен φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности данного параллелепипеда.
291. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон основания — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
292. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.
293. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между диагоналями A_1C и B_1D призмы равен 60°.
294. Правильная четырехугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две ее диагонали. Площадь полученного сечения равна S_0, а сторона основания равна a. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.
295. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб. Боковое ребро CC_1 составляет равные углы со сторонами основания CD и CB. Докажите, что: а) $CC_1 \perp BD$; б) BB_1D_1D — прямоугольник; в) $BD \perp AA_1C_1$; г) плоскости AA_1C_1 и BB_1D_1 взаимно перпендикулярны.
296. Высота правильной треугольной призмы равна h. Плоскость α, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол φ. Найдите площадь сечения, образованного плоскостью α.

297. Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC, BD — высота этого треугольника, а вершина A_1 проектируется в его центр. Докажите, что: а) $A_1BD \perp AA_1C_1$; б) $AA_1O \perp BB_1C$; в) грань BB_1C_1C — прямоугольник.

298. Основанием параллелепипеда с боковым ребром b является квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

299. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна m, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

300. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, F и P — середины сторон BC, AB и AD. Определите вид сечения, проходящего через эти точки, и найдите его площадь, если сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b.

301. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды $DABC$ равен 120°. Расстояние от вершины B до бокового ребра DA равно 16 см. Найдите апофему пирамиды.

302. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и одной из диагоналей 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

303. Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол в 120°, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 30°. Найдите площадь поверхности пирамиды, если ее высота равна 12 см.

304. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°. Докажите, что двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды вдвое меньше двугранного угла при боковом ребре.

305. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

306. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и составляет угол φ с плоскостью боковой грани. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

307. В правильной пирамиде $MABCD$ $AM=b$, $AD=a$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через диагональ BD основания параллельно ребру MA, и найдите площадь сечения. б) Докажите, что точки M и C равноудалены от плоскости α.

308. Основанием пирамиды является ромб со стороной 5 см и меньшей диагональю 6 см. Высота пирамиды, равная 3,2 см, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите высоты граней пирамиды.

309. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Высота пирамиды равна 6 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через меньшую сторону и середину высоты.

310. В пирамиде $DABC$ ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB=AC=25$ см, $BC=40$ см, $AH=8$ см, где AH — высота пирамиды.

311. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник со сторонами $AC=13$ см, $AB=15$ см, $CB=14$ см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. а) Найдите площадь полной поверхности пирамиды. б) Докажите, что основание перпендикуляра, проведенного из вершины A к плоскости грани BDC, лежит на высоте этой грани, и найдите длину этого перпендикуляра.

312. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковым ребром.

313. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 12 дм и 6 дм, а ее высота 1 дм. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

314. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7:3. Найдите стороны оснований пирамиды.

315. Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.

316. Докажите, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра.

317. Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

318. Докажите, что сумма двугранного угла правильного тетраэдра и двугранного угла правильного октаэдра равна 180°.

319. Сколько плоскостей симметрии, проходящих через данную вершину, имеет правильный тетраэдр?

Глава IV
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

34. Понятие вектора. В курсе планиметрии мы познакомились с векторами на плоскости и действиями над ними. Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется вектором. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется *нулевым*. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 93, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{TT}$, а на рисунке 93, *б* — ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *со-*

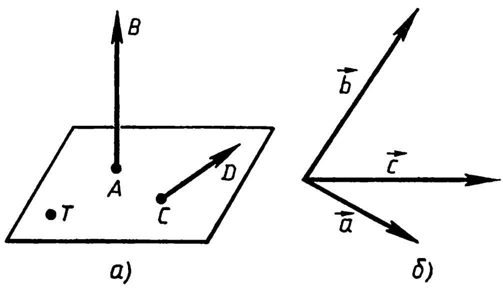


Рис. 93.

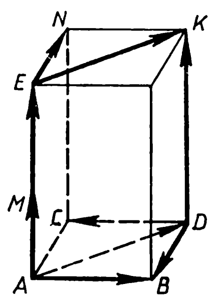


Рис. 94.

направленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными*. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ обозначает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а запись $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$ — что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. На рисунке 94 изображен параллелепипед. На этом рисунке $\overrightarrow{AM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{DC}$; векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$ не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными, так как они не коллинеарны.

Изучая векторы на плоскости, мы отмечали, что многие физические величины, например сила, перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин. Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля. На рисунке 95, *а* изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Электрический ток, т. е. направленное движение зарядов, создает в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции. На рисунке 95, *б* изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.

35. Равенство векторов. *Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.* На рисунке 94 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{DC}$.

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что *вектор $\vec{a}$ отложен от точки A*. Нетрудно доказать, что *от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.* В самом деле, пусть $\vec{a}$ — данный вектор, M — данная точка (рис. 96). Проведем через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M

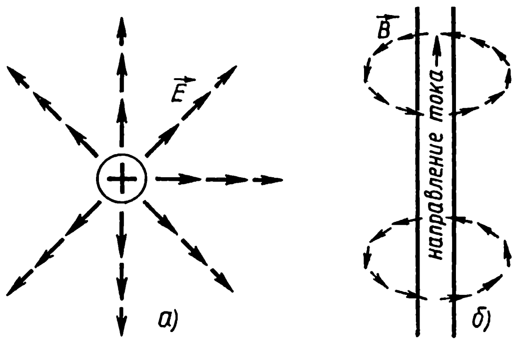


Рис. 95.

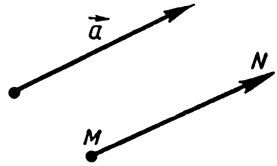


Рис. 96.

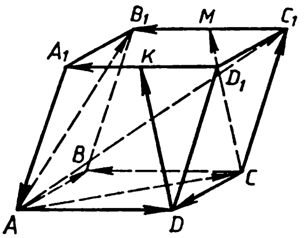


Рис. 97.

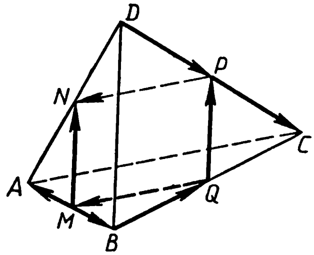


Рис. 98.

плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MN}$ искомый. Из построения ясно также, что $\overrightarrow{MN}$ — единственный вектор с началом M, равный вектору $\vec{a}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

320. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины ребер AC, BC и CD соответственно, $AB=3$ см, $BC=4$ см, $BD=5$ см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$; б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$.

321. Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таковы: $AD=8$ см, $AB=9$ см и $AA_1=12$ см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$.

322. На рисунке 97 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Укажите на этом рисунке все пары: а) сонаправленных векторов; б) противоположно направленных векторов; в) равных векторов.

323. На рисунке 98 изображен тетраэдр $ABCD$, ребра которого равны. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, AD, DC, BC. а) Выпишите все пары равных векторов, изображенных на этом рисунке. б) Определите вид четырехугольника $MNPQ$.

324. Справедливо ли утверждение: а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой; б) два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены; в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены?

325. Известно, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Как расположены по отношению друг к другу: а) прямые AB и A_1B_1; б) прямая AB и плоскость, проходящая через точки A_1 и B_1; в) плоскости, одна из которых проходит через точки A и B, а другая проходит через точки A_1 и B_1?

326. На рисунке 97 изображен параллелепипед, точки M и K — середины ребер B_1C_1 и A_1D_1. Назовите вектор, который получится, если отложить: а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$; б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$; в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$; г) от точки C_1 вектор, равный $\overrightarrow{CB}$; д) от точки M вектор, равный $\overrightarrow{KA_1}$.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

36. Сложение и вычитание векторов. Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 99). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Рисунок 99, *а* поясняет это название. Отметим, что по этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника. Рисунки 99, *б, в* иллюстрируют сложение коллинеарных векторов.

Точно так же, как в планиметрии, доказывается, что *сумма* $\vec{a}+\vec{b}$ *не зависит от выбора точки* A, *от которой при сложении откладывается вектор* $\vec{a}$. Иными словами, если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника точку A заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 100). Докажите это утверждение самостоятельно.

Правило треугольника можно сформулировать в такой форме: *для любых трех точек A, B и C имеет место равенство*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма, известным из курса планиметрии. Это правило пояснено на рисунке 101.

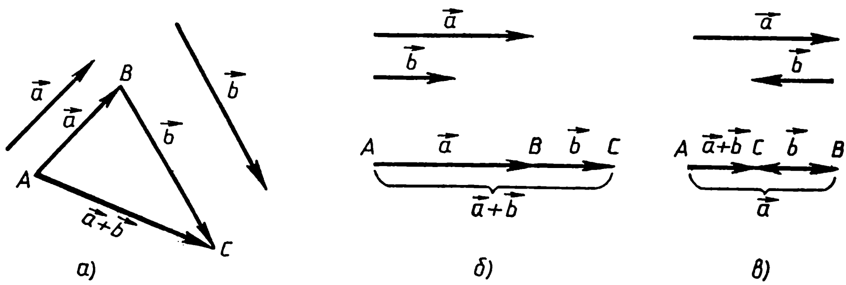


Рис. 99.

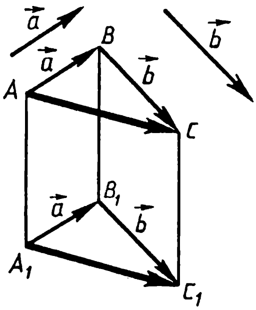


Рис. 100.

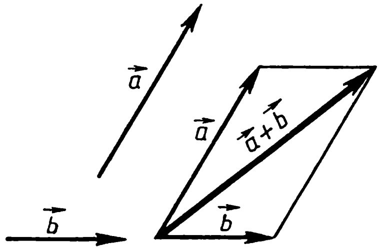


Рис. 101. Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов.

Свойства сложения векторов, изученные в планиметрии, имеют место и для векторов в пространстве. Напомним их.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *справедливы равенства*:
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(переместительный закон);*
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(сочетательный закон).*

Два ненулевых вектора называются *противоположными,* если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ (рис. 102).

Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор, сумма которого с вектором* $\vec{b}$ *равна вектору* $\vec{a}$. *Разность* $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}), \qquad (1)$$

где $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

На рисунке 103 представлены два способа построения разности двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

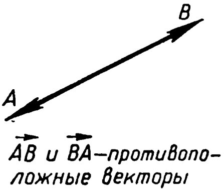


Рис. 102.

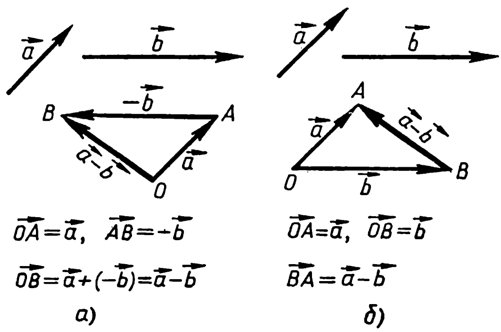


Рис. 103.

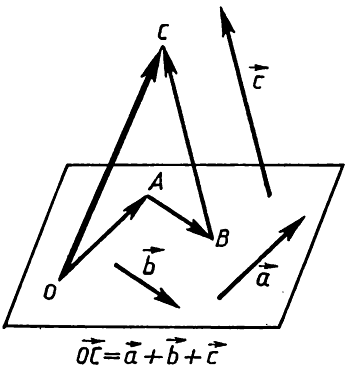


Рис. 104.

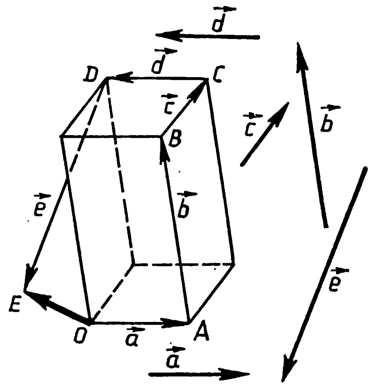


Рис. 105.

Доказательства законов сложения и равенства (1) для векторов в пространстве ничем не отличаются от доказательств для векторов на плоскости.

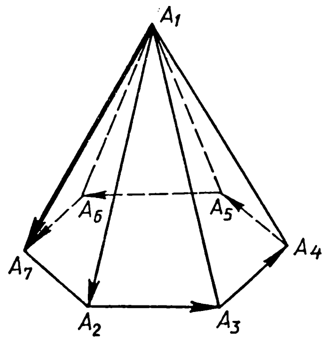
37. Сумма нескольких векторов. Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что *сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.*

На рисунке 104 показано построение суммы трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: от произвольной точки O отложен вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, затем от точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, и, наконец, от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{OC}$, равный $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Аналогично можно построить сумму любого числа векторов. На рисунке 105 построена сумма $\overrightarrow{OE}$ пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Это правило построения суммы нескольких векторов называется *правилом многоугольника.* Заметим, однако, что в отличие от случая векторов на плоскости «многоугольник», который получается при построении суммы векторов в пространстве, может оказаться пространственным, т. е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости. Таковым является, например, «четырехугольник» $OABC$ на рисунке 104, с помощью которого построен вектор $\overrightarrow{OC}$.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки, то

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$



$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_7}=\overrightarrow{A_1A_7}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_1}=\vec{0}$$

Рис. 106.

В частности, если точки A_1 и A_n, т. е. начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору (рис. 106).

38. Умножение вектора на число. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k\geqslant 0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.*

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.* Из этого определения следует также, что *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.*

Напомним основные свойства умножения вектора на число, известные нам для векторов на плоскости. Они имеют место и для векторов в пространстве. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:*

$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ *(сочетательный закон);*

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ *(первый распределительный закон);*

$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ *(второй распределительный закон).*

Отметим, что $(-1)\vec{a}$ является вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, т. е. $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$. Действительно, длины векторов $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ равны: $|(-1)\vec{a}|=|-1|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|$. Кроме того, если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то векторы $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

Точно так же, как в планиметрии, можно доказать, что *если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$.*

ЗАДАЧИ

327. На рисунке 97 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}$.

328. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

329. Назовите все векторы, образованные ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$.

330. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$; д) $\vec{c}-\vec{a}$.

331. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$.

332. На рисунке 97 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Представьте векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DK}$ в виде разности двух векторов, начала и концы которых совпадают с отмеченными на рисунке точками.

333. В пространстве даны четыре точки A, B, C и D. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}$.

334. Дан прямоугольный параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Докажите, что: а) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}|$; б) $|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}|=|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}|$; в) $|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}|=|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}|$.

335. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}$; в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$.

336. Даны точки A, B, C и D. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$.

337. Упростите выражение: а) $\vec{OP}-\vec{EP}+\vec{KD}-\vec{KA}$; б) $\vec{AD}+\vec{MP}+\vec{EK}-\vec{EP}-\vec{MD}$; в) $\vec{AC}-\vec{BC}-\vec{PM}-\vec{AP}+\vec{BM}$.

338. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\vec{OA}+\vec{OC_1}=\vec{OC}+\vec{OA_1}$, где O — произвольная точка пространства.

339. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, такой, что: а) $\vec{DC}+\vec{D_1A_1}+\vec{CD_1}+\vec{x}+\vec{A_1C_1}=\vec{DB}$; б) $\vec{DA}+\vec{x}+\vec{D_1B}+\vec{AD_1}+\vec{BA}=\vec{DC}$.

340. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что: а) $\vec{AA_1}+\vec{B_1C}-\vec{x}=\vec{BA}$; б) $\vec{AC_1}-\vec{BB_1}+\vec{x}=\vec{AB}$; в) $\vec{AB_1}+\vec{x}=\vec{AC}-\vec{x}+\vec{BC_1}$.

341. Основанием четырехугольной пирамиды с вершиной P является трапеция $ABCD$. Точка O — середина средней линии трапеции. Докажите, что $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=4\,\vec{PO}$.

342. Точка P — вершина правильной шестиугольной пирамиды. Докажите, что сумма всех векторов с началом в точке P, образованных боковыми ребрами пирамиды, равна сумме всех векторов с началом в точке P, образованных апофемами.

343. Известно, что $\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AB}$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно точки O.

344. Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите число k такое, что: а) $\vec{AB}=k\cdot\vec{CD}$; б) $\vec{AC_1}=k\cdot\vec{AO}$; в) $\vec{OB_1}=k\cdot\vec{B_1D}$.

345. Точки E и F — середины оснований AB и BC параллелограмма $ABCD$, а O — произвольная точка пространства. Выразите: а) вектор $\vec{OA}-\vec{OC}$ через вектор $\vec{EF}$; б) вектор $\vec{OA}-\vec{OE}$ через вектор $\vec{DC}$.

346. Точки M и N — середины оснований AB и CD трапеции $ABCD$, а O — произвольная точка пространства. Выразите вектор $\vec{OM}-\vec{ON}$ через векторы $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$.

347. Упростите выражение: а) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}$; б) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})$.

348. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\vec{AC_1}+\vec{B_1D}=2\vec{BC}$.

349. Три точки A, B и M удовлетворяют условию $\vec{AM}=\lambda\cdot\vec{MB}$, где $\lambda\neq-1$. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой и для

любой точки O пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM}=$
$=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

Решение. Из равенства $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$ следует, что векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, поэтому прямые AM и MB либо параллельны, либо совпадают. Так как эти прямые имеют общую точку M, то они совпадают, и, следовательно, точки A, B и M лежат на одной прямой. Поскольку $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$, то из равенства $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$ имеем $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$, или $(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}$. Отсюда, разделив на $1+\lambda$, получаем искомое равенство.

350. Известно, что $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, причем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно не сонаправлены. Докажите, что $|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

351. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Докажите, что коллинеарны векторы: а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

352. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

353. Векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

354. Докажите, что если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны.

§ 3. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

39. Компланарные векторы. Векторы называются *компланарными*, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Ясно, что любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны (объясните почему), а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке 107 изображен параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны, так как если отложить от точки O вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в одной плоскости OCE. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB. Рассмотрим признак компланарности трех векторов.

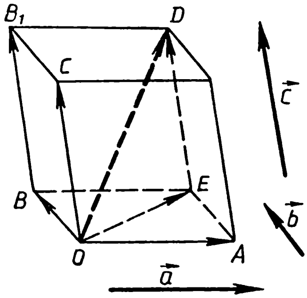


Рис. 107.

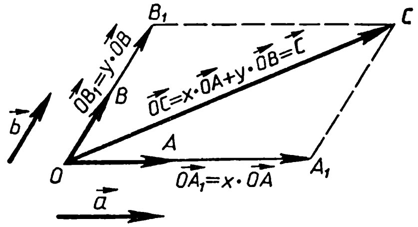


Рис. 108.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и *$\vec{b}$, т. е. представить в виде*

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}, \qquad (1)$$

где x и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Докажем этот признак. Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна). Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 108). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB. Очевидно, в этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA_1}=x\cdot\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB_1}=y\cdot\overrightarrow{OB}$, а следовательно, и их сумма — вектор $\overrightarrow{OC}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$. Итак, векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ лежат в одной плоскости, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Справедливо и обратное утверждение: *если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$* (т. е. представить в виде (1)), *причем коэффициенты разложения* (т. е. числа x, y в формуле (1)) *определяются единственным образом.* Пользуясь теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, известной из курса планиметрии, докажите это утверждение самостоятельно.

40. Правило параллелепипеда. Для сложения трех некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым *правилом параллелепипеда.* Опишем его.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его ребрами (см. рис. 107). Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Действительно, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

41. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}, \qquad (1)$$

где x, y и z — некоторые числа, то говорят, что *вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.* Числа x, y, z называются *коэффициентами разложения.*

Докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема. ***Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.***

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — данные некомпланарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде (1).

Отметим произвольную точку O и отложим от этой точки векторы (рис. 109):

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},\ \overrightarrow{OP}=\vec{p}. \qquad (2)$$

Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB (если $P\in OC$, то в качестве точки P_1 возьмем точку O). Затем через точку P_1 проведем прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через P_2 точку пересечения этой прямой с прямой OA (если $P_1\in OB$, то в качестве точки P_2 возьмем точку O). По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{P_2P_1}+\overrightarrow{P_1P}. \qquad (3)$$

Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, поэтому существуют числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OP_2}=x\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}=y\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}=z\cdot\overrightarrow{OC}$. Подставив эти выражения в равенство (3), получим

$$\overrightarrow{OP}=y\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}+z\cdot\overrightarrow{OC}.$$

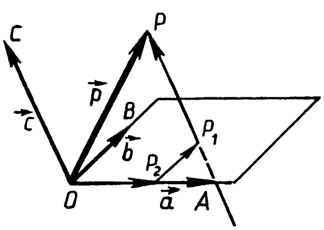


Рис. 109.

Отсюда, учитывая равенства (2), приходим к равенству (1).

Докажем теперь, что коэффициенты разложения в формуле (1) определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением (1) имеется другое разложение вектора $\vec{p}$: $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$. Вычитая это равенство из равенства (1) и используя свойства действий над векторами, получим

$$\vec{0}=(x-x_1)\vec{a}+(y-y_1)\vec{b}+(z-z_1)\vec{c}.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$. В самом деле, если предположить, например, что $z-z_1\neq 0$, то из этого равенства находим:

$$\vec{c}=-\frac{x-x_1}{z-z_1}\vec{a}-\frac{y-y_1}{z-z_1}\vec{b},$$

откуда следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно, и $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения (1) определяются единственным образом. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

355. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие из следующих трех векторов компланарны: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$?

356. Отрезок EF соединяет середины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

357. Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

358. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$.

359. В вершинах A_1, B и D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, помещены точечные заряды q. а) Выразите результирующую напряженность* создаваемого ими электрического поля в точках A и C_1 через вектор $\overrightarrow{AC_1}$. б) Найдите абсолютную величину результирующей напряженности в точках C, B_1, в центре грани $A_1B_1C_1D_1$ и в центре куба.

---

* Если в точке O находится точечный заряд q, то напряженность $\vec{E}$ создаваемого им электрического поля в точке M выражается формулой $\vec{E}=\frac{kq}{OM^3}\cdot\overrightarrow{OM}$, где коэффициент k зависит от выбора системы единиц.

360. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. б) Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

361. Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Разложите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

362. Точка K — середина ребра BC тетраэдра $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.

Решение. Так как точка K — середина отрезка BC, то $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$. Но $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+$ $+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$. Поэтому

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

363. Основанием пирамиды с вершиной O является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Разложите векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

364. Точка K — середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.

365. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Точка M — середина AB, а точка K — середина MD. Разложите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

366. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \tag{4}$$

Решение. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MA_1}$, где AA_1 — медиана треугольника ABC (рис. 110). Согласно задаче 349

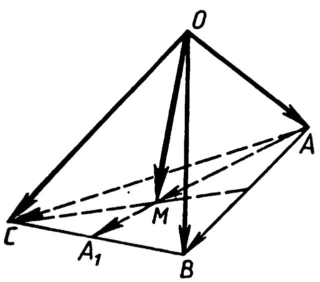


Рис. 110.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{1+2}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{3}.$$

Но $\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (объясните почему), поэтому $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

367. В тетраэдре $ABCD$ медиана AA_1 грани ABC делится точкой K так, что $AK:KA_1=3:7$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

368. Точки M и N являются серединами ребер AB и A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите, если это возможно, по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CM}$; в) $\overrightarrow{C_1N}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1N}$; е) $\overrightarrow{AN}$; ж) $\overrightarrow{MD}$.

369. Медианы грани ABC тетраэдра $OABC$ пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$.

370. Высоты AM и DN правильного тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке K. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ вектор: а) $\overrightarrow{DN}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{AM}$; г) $\overrightarrow{MK}$.

371. В тетраэдре $ABCD$ медианы грани BCD пересекаются в точке O. Докажите, что длина отрезка AO меньше одной трети суммы длин ребер с общей вершиной A.

372. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится этими точками на три равных отрезка (рис. 111).

Решение. Обозначим через M_1 точку пересечения медиан треугольника A_1BD. Применив формулу (4) к тетраэдру AA_1BD, получим $\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC_1}$, поэтому $\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Отсюда следует, что точка M_1 принадлежит диагонали AC_1 и $AM_1=\frac{1}{3}AC_1$.

Точно так же можно доказать, что точка M_2 пересечения медиан треугольника CB_1D_1 принадлежит диагонали AC_1 и $C_1M_2=\frac{1}{3}AC_1$.

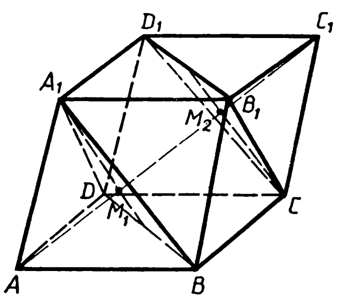


Рис. 111.

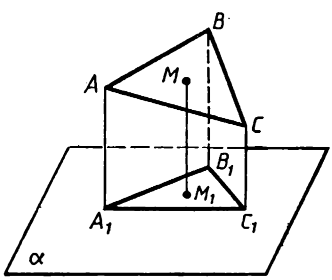


Рис. 112.

Из равенств $AM_1=\frac{1}{3}AC_1$ и $C_1M_2=\frac{1}{3}AC_1$ следует, что точки M_1 и M_2 делят диагональ AC_1 параллелепипеда на три равных отрезка AM_1, M_1M_2 и M_2C_1.

373. Точки A_1, B_1, C_1 и M_1 — основания перпендикуляров, проведенных к плоскости α из вершин треугольника ABC и из точки M пересечения медиан этого треугольника (рис. 112). Докажите, что $MM_1=\frac{1}{3}(AA_1+BB_1+CC_1)$. Останется ли верным равенство, если какие-то стороны треугольника ABC пересекаются с плоскостью α?

374. Отрезки AB и CD не лежат в одной плоскости, точки M и N — середины этих отрезков. Докажите, что

$$MN<\frac{1}{2}(AC+BD).$$

375. В тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины ребер AB и CD. Докажите, что середины отрезков KC, KD, MA и MB являются вершинами некоторого параллелограмма.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ IV

1. Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$; е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

2. Точки A и C симметричны относительно точки O и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Симметричны ли точки B и D относительно точки O?

3. Точки A и C симметричны относительно прямой a и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Могут ли точки B и D быть: а) симметричными относительно прямой a; б) несимметричными относительно прямой a?

4. Точки A и C, а также точки B и D симметричны относительно плоскости α. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ быть: а) равными; неравными?

5. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

6. Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

7. Может ли длина суммы нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

8. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

9. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной разности длин этих векторов?

10. Может ли длина суммы двух ненулевых векторов быть равна длине разности этих векторов?

11. На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям: а) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $|\vec{b}|=|\vec{a}|$; б) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $|\vec{b}|=3\,|\vec{a}|$; в) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $|\vec{b}|=k\,|\vec{a}|$; г) $\vec{b}=\vec{0}$?

12. Известно, что $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$, причем точки A, B и C не лежат на одной прямой. При каком значении k прямые AC и BD являются: а) параллельными; б) пересекающимися? Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?

13. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$; б) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$?

14. Известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{c}$, $2\vec{b}-3\vec{c}$?

15. Точки A, B и C лежат на окружности, а точка O не лежит в плоскости этой окружности. Могут ли векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ быть компланарными?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

376. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{M_1Q_1}=\overrightarrow{N_1P_1}+\overrightarrow{NP}$; б) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP_1}=\overrightarrow{NQ_1}$; в) $\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{QQ_1}=\overrightarrow{QP_1}$.

377. На рисунке 113 изображен правильный октаэдр. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AF}$.

378. Докажите, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

379. Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

380. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1A}$; в) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

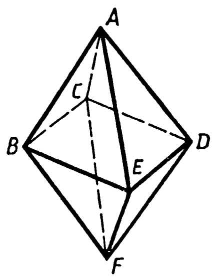


Рис. 113.

381. Даны треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и две точки O и P пространства. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}$. Докажите, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и параллельны сторонам треугольника ABC.

382. При каких значениях k в равенстве $\vec{a}=k\vec{b}$, где $\vec{b}\neq\vec{0}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) являются противоположными?

383. Числа k и l не равны друг другу. Докажите, что если векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ не коллинеарны при любых неравных числах k_1 и l_1.

384. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

385. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке M. Точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

386. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что для любой точки M пространства справедливо неравенство $MO<\frac{1}{4}(MA+MB+MC+MD)$.

387. Три точки M, N и P лежат на одной прямой, а точка O не лежит на этой прямой. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, если: а) $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; в) $\overrightarrow{MP}=k\cdot\overrightarrow{MN}$, где k — данное число.

388. Докажите, что векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, если: а) один из данных векторов нулевой; б) два из данных векторов коллинеарны.

389. На двух скрещивающихся прямых отмечены по три точки: A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3, причем $\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 параллельны некоторой плоскости.

390. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=AD=a$, $AA_1=2a$. В вершинах B_1 и D_1 помещены заряды q, а в вершине A — заряд $2q$. Найдите абсолютную величину результирующей напряженности электрического поля: а) в точке A_1; б) в точке C; в) в центре грани $A_1B_1C_1D_1$; г) в центре грани $ABCD$.

391. В тетраэдре $ABCD$ точка K — середина медианы BB_1 грани BCD. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.

392. На трех некомпланарных векторах $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AA_1}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, образованные диагоналями этого параллелепипеда.

393. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра CC_1. Разложите вектор: а) $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$.

394. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани DCC_1D_1 пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

395. Докажите, что если точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости.

396. В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC. Выразите через векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DM}$.

397. В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются соответственно точками пересечения медиан граней ADB и BDC. Докажите, что $MN \| AC$, и найдите отношение длин этих отрезков.

398. Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены так, что точки A, B, C являются серединами отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.

399. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан боковых граней тетраэдра, подобен основанию тетраэдра.

11 класс

Глава V

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

42. Прямоугольная система координат в пространстве. Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков*, то говорят, что задана *прямоугольная система координат* в пространстве (рис. 114). Прямые с выбранными на них направлениями называются *осями координат*, а их общая точка — *началом координат*. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Три плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется *положительной полуосью*, а другой луч — *отрицательной полуосью*.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее *координатами*. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные

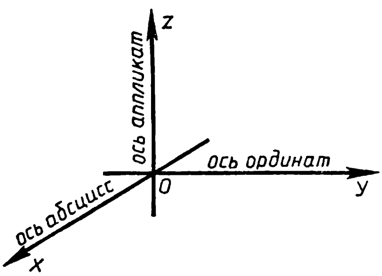


Рис. 114.

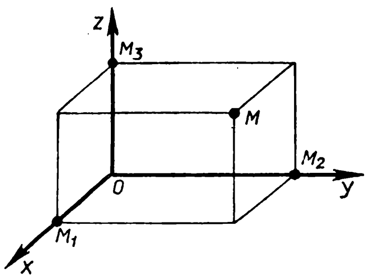


Рис. 115.

* Напомним, что при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В данной главе под длиной отрезка подразумевается это число.

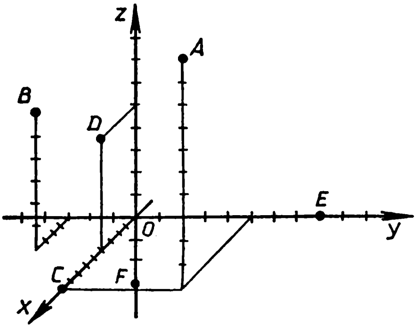


Рис. 116.

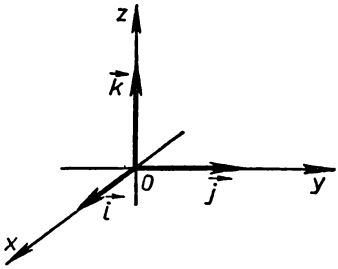


Рис. 117.

к осям координат, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 115). Первая координата точки M (она называется *абсциссой* и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки M_2 определяется вторая координата *(ордината)* y точки M, а с помощью точки M_3 — третья координата *(аппликата)* z точки M. Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: $M(x;\ y;\ z)$, причем первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 116 изображены точки $A(9;\ 5;\ 10)$, $B(4;\ -3;\ 6)$, $C(9;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 5)$, $E(0;\ 8;\ 0)$, $F(0;\ 0;\ -3)$.

Если точка $M(x;\ y;\ z)$ лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки M равна нулю: $z = 0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y = 0$, а если $M \in Oyz$, то $x = 0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки M равны нулю: $y = 0$ и $z = 0$ (например, у точки C на рисунке 116). Если $M \in Oy$, то $x = 0$ и $z = 0$; если $M \in Oz$, то $x = 0$ и $y = 0$. Все три координаты начала координат равны нулю: $O(0;\ 0;\ 0)$.

43. Координаты вектора. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат *единичный* вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 117). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем *координатными векторами.* Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому *любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде*

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (1)$$

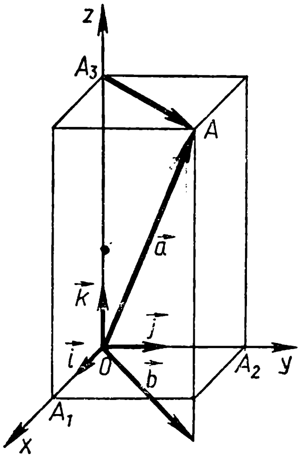


Рис. 118.

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются *координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.* Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$. На рисунке 118 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1=2$, $OA_2=3$, $OA_3=5$. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\{2;\ 3;\ 5\}$, $\vec{b}\{2;\ 3;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\{2;\ 3;\ 0\}$, $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\{0;\ 0;\ 1\}$.

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$, то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, *координаты равных векторов соответственно равны*, т. е. если векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ равны, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ (объясните почему).

Рассмотрим правила, позволяющие по координатам данных векторов найти координаты их суммы, разности и произведения вектора на данное число.

1° *Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.*

Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$.

2°. *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.*

Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2\}$.

3°. *Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.*

Другими словами, если $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z\}$.

Утверждения 1° — 3° доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

З а д а ч а. Найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ 3;\ -6\}$, $\vec{c}\{-2;\ 3;\ 1\}$.

Решение. По правилу 3° вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4;\ 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0;\ -1;\ 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x;\ y;\ z\}$ можно вычислить по правилу 1°: $x = 2+0-2=0$, $y = -4-1+3=-2$, $z = 0+2+1=3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2;\ 3\}$.

44. Связь между координатами векторов и координатами точек. Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется *радиус-вектором* данной точки. Докажем, что *координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.*

Обозначим координаты данной точки M через $(x;\ y;\ z)$. Пусть M_1, M_2, M_3 — точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 119). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{2}$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. В самом деле, если точка M_1 лежит на положительной полуоси абсцисс, как на рисунке 119, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если точка M_1 лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если точка M_1 совпадает с точкой O, то $x=0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Поэтому $x\vec{i} = \vec{0}$, и снова справедливо равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$.

Подставив эти выражения в равенство (2), получим

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Отсюда следует, что координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\ y;\ z\}$, т. е. координаты точки M равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, что и требовалось доказать.

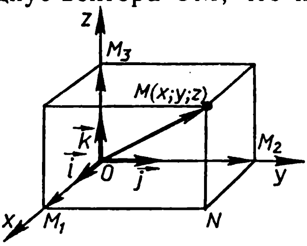


Рис. 119.

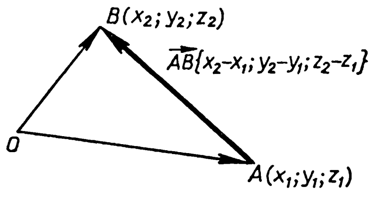


Рис. 120.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 120), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Но координаты векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек B и A: $\overrightarrow{OB}\ \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$.

Итак, *каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.*

45. Простейшие задачи в координатах.

а) Координаты середины отрезка. В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и точку B с координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Выразим координаты $(x;\ y;\ z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 121).

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

(Справедливость этого равенства доказана в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\ \{x;\ y;\ z\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\ \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. Записав равенство (1) в координатах, получим

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2). \qquad (2)$$

Таким образом, *каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что длина вектора $\vec{a}\ \{x;\ y;\ z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (3)$$

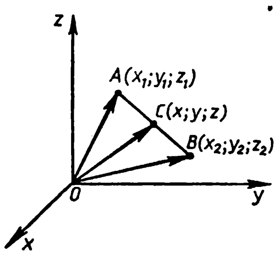


Рис. 121.

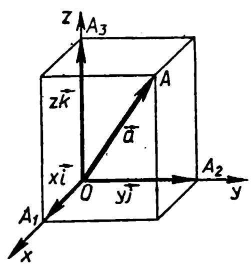


Рис. 122.

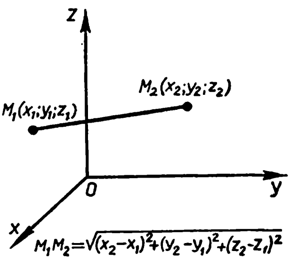


Рис. 123.

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3}=z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\vec{a}$ (рис. 122). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2+|\overrightarrow{OA_2}|^2+|\overrightarrow{OA_3}|^2} \qquad (4)$$

В самом деле, если точка A не лежит на координатных плоскостях (рис. 122), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда: $OA^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2$. Во всех других случаях расположения точки A (точка A лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}|=|x\vec{i}|=|x|$, $|\overrightarrow{OA_2}|=|y|$, $|\overrightarrow{OA_3}|=|z|$ и $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}|=\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

в) Расстояние между двумя точками. Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1 с координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и точку M_2 с координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 123). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$. Следовательно по формуле (3) $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Но $d=|\overrightarrow{M_1M_2}|$. Таким образом, *расстояние между точками* M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и* M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *вычисляется по формуле*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (5)$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

400. Даны точки $A\ (3;\ -1;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ -7)$, $C\ (2;\ 0;\ 0)$, $D\ (-4;\ 0;\ 3)$, $E\ (0;\ -1;\ 0)$, $F\ (1;\ 2;\ 3)$, $G\ (0;\ 5;\ -7)$, $H\ (-\sqrt{5};\ \sqrt{3};\ 0)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy; д) плоскости Oyz; е) плоскости Oxz?

401. Найдите координаты проекций точек $A\ (2;\ -3;\ 5)$, $B\left(3;\ -5;\ \frac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ на: а) координатные плоскости Oxz, Oxy и Oyz; б) оси координат Ox, Oy и Oz.

402. Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

403. Запишите координаты векторов: $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$, $\vec{n}=0{,}7\vec{k}$

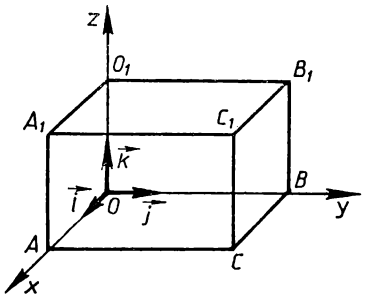


Рис. 124.

404. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

405. На рисунке 124 изображен прямоугольный параллелепипед, у которого $OA=4$, $OB=6$, $OO_1=5$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ в системе координат $Oxyz$.

406. Докажите, что каждая координата суммы (разности) двух векторов равна сумме (разности) соответствующих координат этих векторов.

407. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -5;\ 2\}$, $\vec{b}\{0;\ 7;\ -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};\ 0;\ 0\right\}$ и $\vec{d}\{-2{,}7;\ 3{,}1;\ 0{,}5\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{d}+\vec{b}$; д) $\vec{d}+\vec{a}$; е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

408. По данным рисунка 125 найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, если $OA=3$, $OB=7$, $OC=2$, а M, N и P — середины ребер AC, OC и CB.

409. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ 0{,}2;\ 0\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{5};\ -\frac{1}{7}\right\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{a}-\vec{c}$; г) $\vec{d}-\vec{a}$; д) $\vec{c}-\vec{d}$; е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0{,}2\vec{b}$.

410. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ -5;\ -2\}$ и $\vec{c}\{2;\ 1;\ -3\}$. Найдите координаты векторов

$$\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c} \text{ и } \vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}.$$

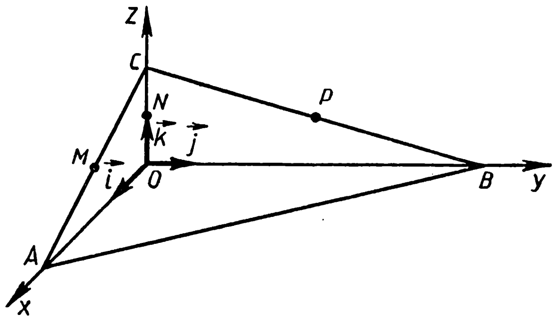


Рис. 125.

411. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\{-2;\ 1;\ -2\}$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; б) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}$; в) $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d}$; г) $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$.

412. Найдите координаты векторов, противоположных следующим векторам: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}\{-3;\ 5;\ -7\}$, $\vec{c}\{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\}$.

413. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ и $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$; б) $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$; в) $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$; г) $\vec{m}\{0;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{n}\{5;\ 7;\ -3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};\ -1;\ 5\right\}$ и $\vec{q}\{-1;\ -3;\ -15\}$?

Решение. а) Координаты вектора $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$: $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{12}=k$, где $k=\frac{1}{2}$. Поэтому $\vec{a}=k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$, например $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$. Поэтому векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны. В самом деле, если предположить, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\vec{c}=k\vec{d}$. Но тогда координаты вектора $\vec{c}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{d}$, что противоречит условию задачи.

414. Найдите значения m и n, при которых следующие векторы коллинеарны: а) $\vec{a}\{15;\ m;\ 1\}$ и $\vec{b}\{18;\ 12;\ n\}$; б) $\vec{c}\{m;\ 0{,}4;\ -1\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2};\ n;\ 5\right\}$.

415. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-3;\ -3;\ 0\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; б) $\vec{b}\{2;\ 0;\ -3\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; в) $\vec{c}\{1;\ 0;\ -2\}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$; г) $\vec{d}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{e}\{-2;\ 0;\ 1\}$ и $\vec{f}\{5;\ -1;\ 0\}$; д) $\vec{m}\{1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{n}\{1;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{p}\{-1;\ 2;\ 4\}$; е) $\vec{q}\{0;\ 5;\ 3\}$, $\vec{r}\{3;\ 3;\ 3\}$ и $\vec{s}\{1;\ 1;\ 4\}$?

Решение. г) Векторы $\vec{d}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{e}\{-2;\ 0;\ 1\}$ не коллинеарны, так как координаты одного не пропорциональны координатам другого. Если вектор $\vec{f}\{5;\ -1;\ 0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. Если же вектор $\vec{f}$ нельзя разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны (в противном случае вектор $\vec{f}$ можно было бы разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$). Таким образом, для решения задачи нужно установить, можно ли вектор $\vec{f}$ разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, т. е. существуют ли числа x и y такие, что

$$\vec{f}=x\vec{d}+y\vec{e}.$$

Записывая это равенство в координатах, получим

$$5=x-2y,$$
$$-1=-x,$$
$$0=2x+y.$$

Если эта система уравнений имеет решение относительно x и y, то вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, а если не имеет решения, то вектор $\vec{f}$ нельзя разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$. В данном случае система имеет решение: $x=1$, $y=-2$. Поэтому вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, и, значит, векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны.

416. Даны векторы

$$\overrightarrow{OA}\{3;\ 2;\ 1\},\quad \overrightarrow{OB}\{1;\ -3;\ 5\}\ \text{и}\ \overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3};\ 0{,}75;\ -2\frac{3}{4}\right\}.$$

Запишите координаты точек A, B и C, если точка O — начало координат.

417. Даны точки $A\,(2;\ -3;\ 0)$, $B\,(7;\ -12;\ 18)$ и $C\,(-8;\ 0;\ 5)$. Запишите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если точка O — начало координат.

418. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A\,(3;\ -1;\ 2)$, $B\,(2;\ -1;\ 4)$; б) $A\,(-2;\ 6;\ -2)$, $B\,(3;\ -1;\ 0)$; в) $A\left(1;\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$.

419. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A\,(1;\ 6;\ 2)$, $B\,(2;\ 3;\ -1)$, $C\,(-3;\ 4;\ 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

420. Даны точки $A\,(3;\ -1;\ 5)$, $B\,(2;\ 3;\ -4)$, $C\,(7;\ 0;\ -1)$ и $D\,(8;\ -4;\ 8)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

421. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если: а) $A\,(3;\ -7;\ 8)$, $B\,(-5;\ 4;\ 1)$, $C\,(27;\ -40;\ 29)$; б) $A\,(-5;\ 7;\ 12)$, $B\,(4;\ -8;\ 3)$, $C\,(13;\ -23;\ -6)$; в) $A\,(-4;\ 8;\ -2)$, $B\,(-3;\ -1;\ 7)$, $C\,(-2;\ -10;\ -16)$?

Решение. а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A, B и C лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки A, B и C не лежат на одной прямой. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{-8;\ 11;\ -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24;\ -33;\ 21\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, следовательно, точки A, B и C лежат на одной прямой.

422. Лежат ли точки A, B, C и D в одной плоскости, если: а) $A\,(-2;\ -13;\ 3)$, $B\,(1;\ 4;\ 1)$, $C\,(-1;\ -1;\ -4)$, $D\,(0;\ 0;\ 0)$;

б) $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(3;\ 4;\ -1)$, $C(-2;\ -3;\ 0)$, $D(2;\ 0;\ 3)$;
в) $A(5;\ -1;\ 0)$, $B(-2;\ 7;\ 1)$, $C(12;\ -15;\ -7)$, $D(1;\ 1;\ -2)$?

423. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ имеет координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

424. Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты: а) точки M, если $A(0;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 2;\ 0)$; б) точки B, если $A(14;\ -8;\ 5)$, $M(3;\ -2;\ -7)$; в) точки A, если $B(0;\ 0;\ 2)$, $M(-12;\ 4;\ 15)$.

425. Середина отрезка AB лежит на оси Ox. Найдите m и n, если: а) $A(-3;\ m;\ 5)$, $B(2;\ -2;\ n)$; б) $A(1;\ 0{,}5;\ -4)$, $B(1;\ m;\ 2n)$; в) $A(0;\ m;\ n+1)$, $B(1;\ n;\ -m+1)$; г) $A(7;\ 2m+n;\ -n)$, $B(-5;\ -3;\ m-3)$.

426. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ -2;\ 3)$; б) $A(-35;\ -17;\ 20)$, $B(-34;\ -5;\ 8)$.

427. Найдите длины векторов: $\vec{a}\{5;\ -1;\ 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$.

428. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 3;\ 1\}$ и $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 1\}$. Найдите: а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.

429. Даны точки $M(-4;\ 7;\ 0)$ и $N(0;\ -1;\ 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN.

430. Даны точки $A\left(\frac{3}{2};\ 1;\ -2\right)$, $B(2;\ 2;\ -3)$ и $C(2;\ 0;\ -1)$. Найдите: а) периметр треугольника ABC; б) медианы треугольника ABC.

431. Определите вид треугольника ABC, если: а) $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$; б) $A(3;\ 7;\ -4)$, $B(5;\ -3;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -10)$; в) $A(5;\ -5;\ -1)$, $B(5;\ -3;\ -1)$, $C(4;\ -3;\ 0)$; г) $A(-5;\ 2;\ 0)$, $B(-4;\ 3;\ 0)$, $C(-5;\ 2;\ -2)$.

432. Найдите расстояние от точки $A(-3;\ 4;\ -4)$ до: а) координатных плоскостей; б) осей координат.

433. На каждой из координатных плоскостей найдите такую точку, расстояние от которой до точки $A(-1;\ 2;\ -3)$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой координатной плоскости до точки A.

434. На каждой из осей координат найдите такую точку, расстояние от которой до точки $B(3;\ -4;\ \sqrt{7})$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой оси до точки B.

435. Даны точки $A(1;\ 0;\ k)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$. При каких значениях k треугольник ABC является равнобедренным?

436. Даны точки $A(4;\ 4;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ 4)$ и $D(1;\ 4;\ 4)$. Докажите, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

437. Найдите точку, равноудаленную от точек $A(-2;\ 3;\ 5)$ и $B(3;\ 2;\ -3)$ и расположенную на оси: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

438. Даны точки $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 1;\ 2)$ и $C(0;\ -1;\ 1)$. Найдите точку, равноудаленную от этих точек и расположенную на координатной плоскости: а) Oxy; б) Oyz; в) Ozx.

439. Даны точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 6;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. Найдите: а) координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника AOB; б) координаты точки, равноудаленной от вершин тетраэдра $OABC$.

440. Отрезок CD длины m перпендикулярен к плоскости прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=b$ и $BC=a$. Введите подходящую систему координат и с помощью формулы расстояния между двумя точками найдите расстояние от точки D до середины гипотенузы этого треугольника.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

46. Угол между векторами. Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 126). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что *угол между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *равен* α. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен $0°$. Если угол между векторами равен $90°$, то векторы называются *перпендикулярными*. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.

На рисунке 127 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{c}}=180°$. На этом рисунке $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.

47. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.* Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$.

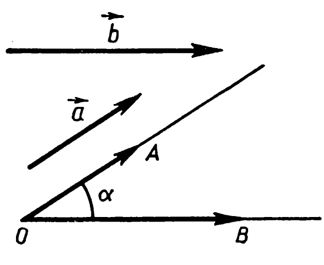


Рис. 126.

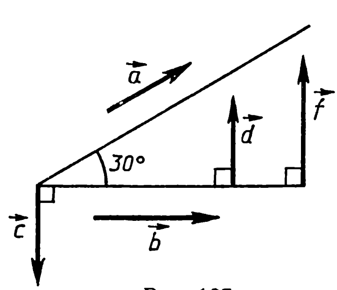


Рис. 127.

Как и в планиметрии, справедливы утверждения:

скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;

скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: *скалярное произведение векторов* $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (1)$$

В самом деле, так как $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, то $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Подставив сюда выражения для $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (1).

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и любого числа* k *справедливы равенства:*

1⁰. $\vec{a}^2\geqslant 0$, причем $\vec{a}^2>0$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$.

2⁰. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ *(переместительный закон).*

3⁰. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ *(распределительный закон).*

4⁰. $k(\vec{a}\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}$ *(сочетательный закон).*

Утверждения 1^0—4^0 доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$ (см. задачу 458).

48. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Для вычисления угла между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью во многих случаях удобно использовать скалярное произведение. Прежде чем рассмотреть две такие задачи на вычисление углов, введем понятие направляющего вектора прямой.

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой a, если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной a. На рисунке 128 вектор $\overrightarrow{AB}$ является направляющим вектором прямой *a*.

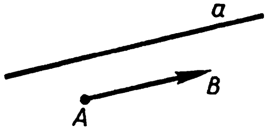


Рис. 128.

Задача 1. *Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.*

Решение. Пусть $\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющие векторы прямых a и b. Обозначим буквой φ искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$, так как значение $\cos\varphi$ позволяет найти угол φ.

Введем обозначение: $\theta = \widehat{\vec{p}\,\vec{q}}$. Тогда либо $\varphi=\theta$, если $\theta\leqslant 90°$ (рис. 129, *а*), либо $\varphi=180°-\theta$, если $\theta>90°$ (рис. 129, *б*). Поэтому либо $\cos\varphi=\cos\theta$, либо $\cos\varphi=-\cos\theta$. В любом случае $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, а так как $\varphi\leqslant 90°$, то $\cos\varphi\geqslant 0$, и, следовательно, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. Используя формулу (1) п. 47, получаем

$$\cos\varphi=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (2)$$

Задача 2. *Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.*

Решение. Пусть $\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — направляющий вектор прямой a, $\vec{n}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости α. Это означает, что прямая, на которой лежит вектор $\vec{n}$, перпендикулярна к плоскости α. Обозначим буквой φ искомый угол между прямой a и плоскостью α, а буквой θ — угол $\widehat{\vec{p}\,\vec{n}}$.

Пользуясь рисунком 130, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что $\sin\varphi=|\cos\theta|$. Поэтому для $\sin\varphi$ получается такое же выражение, как и в правой части равенства (2). Зная $\sin\varphi$ и учитывая, что $\varphi\leqslant 90°$, можно найти угол φ.

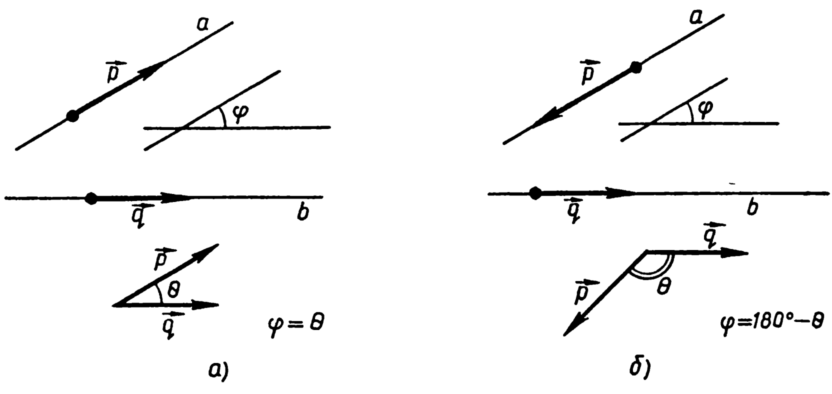


Рис. 129.

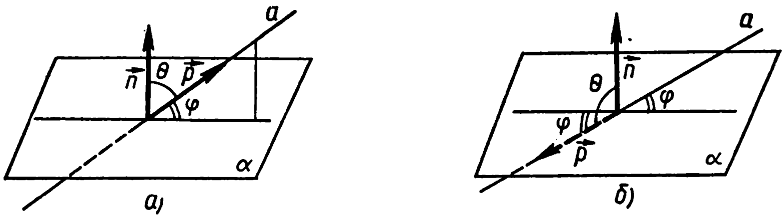


Рис. 130.

ЗАДАЧИ

441. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\vec{B_1B}$ и $\vec{B_1C}$; б) $\vec{DA}$ и $\vec{B_1D_1}$; в) $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1B}$; г) $\vec{BC}$ и $\vec{AC}$; д) $\vec{BB_1}$ и $\vec{AC}$; е) $\vec{B_1C}$ и $\vec{AD_1}$; ж) $\vec{A_1D_1}$ и $\vec{BC}$; з) $\vec{AA_1}$ и $\vec{C_1C}$.

442. Угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равен φ. Найдите углы $\widehat{\vec{BA}\,\vec{DC}}$, $\widehat{\vec{BA}\,\vec{CD}}$, $\widehat{\vec{AB}\,\vec{DC}}$.

443. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\vec{AD}$ и $\vec{B_1C_1}$; б) $\vec{AC}$ и $\vec{C_1A_1}$; в) $\vec{D_1B}$ и $\vec{AC}$; г) $\vec{BA_1}$ и $\vec{BC_1}$; д) $\vec{A_1O_1}$ и $\vec{A_1C_1}$; е) $\vec{D_1O_1}$ и $\vec{B_1O_1}$; ж) $\vec{BO_1}$ и $\vec{C_1B}$.

444. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$ и $\vec{c}\{5;\ 6;\ 2\}$. Вычислите $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$.

445. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}-5\vec{k}$. Вычислите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{i}$; в) $\vec{b}\vec{j}$; г) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})$.

446. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-5;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{c}\{-1;\ -2;\ 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

447. Дан вектор $\vec{a}\{3;\ -5;\ 0\}$. Докажите, что: а) $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}<90^\circ$; б) $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}>90^\circ$; в) $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}=90^\circ$.

448. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$ и $\vec{b}\{5;\ x;\ -1\}$. При каком значении x выполняется условие: а) $\vec{a}\vec{b}=3$; б) $\vec{a}\vec{b}=-1$; в) $\vec{a}\perp\vec{b}$?

449. Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

450. Даны точки $A\,(0;\ 1;\ 2)$, $B\,(\sqrt{2};\ 1;\ 2)$, $C\,(\sqrt{2};\ 2;\ 1)$ и $D\,(0;\ 2;\ 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

451. Вычислите угол между векторами: а) $\vec{a}\{2;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\}$ и $\vec{b}\{-3;\ -3;\ 0\}$; в) $\vec{a}\{0;\ 5;\ 0\}$ и

$\vec{b}\{0;\ -\sqrt{3};\ 1\}$; г) $\vec{a}\{-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\}$;
д) $\vec{a}\{-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -2\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -1\right\}$.

452. Вычислите углы между вектором $\vec{a}\{2;\ 1;\ 2\}$ и координатными векторами.

453. Даны точки $A\,(1;\ 3;\ 0)$, $B\,(2;\ 3;\ -1)$ и $C\,(1;\ 2;\ -1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

454. Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A\,(1;\ -1;\ 3;)$, $B\,(3;\ -1;\ 1)$ и $C\,(-1;\ 1;\ 3)$.

455. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите косинус угла между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

456. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=1$, $BC=CC_1=2$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

457. Известно, что $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}$.

458. Докажите справедливость равенства

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}.$$

Решение. Запишем сумму трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Пользуясь распределительным законом скалярного произведения векторов, получаем $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})\,\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{d}+\vec{c}\vec{d}=(\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d})+\vec{c}\vec{d}=$ $=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$.

459. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны к вектору $\vec{c}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=120°$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$. Вычислите: а) скалярные произведения $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})$ и $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$.

460. Докажите, что координаты ненулевого вектора в прямоугольной системе координат равны $\{|\vec{a}|\cos\varphi_1;\ |\vec{a}|\cos\varphi_2;$ $|\vec{a}|\cos\varphi_3\}$, где $\varphi_1=\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}$, $\varphi_2=\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}$, $\varphi_3=\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}$.

Решение. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y;\ z\}$, то $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Умножив это равенство скалярно на $\vec{i}$ и используя свойства скалярного произведения, получим $\vec{a}\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\,\vec{i}=x\,(\vec{i}\vec{i})+y\,(\vec{j}\vec{i})+z\,(\vec{k}\vec{i})$. Так как $\vec{i}\vec{i}=1$, $\vec{j}\vec{i}=0$, $\vec{k}\vec{i}=0$, то $\vec{a}\vec{i}=x$. С другой стороны, по определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{i}=|\vec{a}|\,|\vec{i}|\cos\varphi_1=|\vec{a}|\cos\varphi_1$. Таким образом, $x=|\vec{a}|\cos\varphi_1$. Аналогично получаем равенства $y=|\vec{a}|\cos\varphi_2$, $z=|\vec{a}|\cos\varphi_3$.

461. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N —

середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{AD}=$ $=\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{BC}=0$.

462. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1=AB=AD=1$, $\angle DAB=60°$, $\angle A_1AD=\angle A_1AB=90°$. Вычислите:

а) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}$; в) $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$; г) $|\overrightarrow{DB_1}|$;

д) $|\overrightarrow{A_1C}|$; е) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})$; ж) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})$.

463. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра AD и BC, а также BD и AC перпендикулярны. Докажите, что противоположные ребра CD и AB также перпендикулярны.

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ (рис. 131). Тогда $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. По условию $AD\perp BC$ и $BD\perp AC$, поэтому $\vec{a}\perp(\vec{c}-\vec{b})$ и $\vec{b}\perp(\vec{c}-\vec{a})$. Следовательно, $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0$ и $\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})=0$. Отсюда получаем $\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$ и $\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{a}$. Из этих двух равенств следует, что $\vec{a}\vec{c}=$ $=\vec{b}\vec{c}$, или $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=0$. Но $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$, поэтому $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}=0$, и, значит, $AB\perp CD$, что и требовалось доказать.

464. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если:
а) $A(3;\ -2;\ 4)$, $B(4;\ -1;\ 2)$, $C(6;\ -3;\ 2)$, $D(7;\ -3;\ 1)$; б) $A(5;\ -8;\ -1)$, $B(6;\ -8;\ -2)$, $C(7;\ -5;\ -11)$, $D(7;\ -7;\ -9)$; в) $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ -2;\ -4)$, $D(-2;\ -4;\ 0)$; г) $A(-6;\ -15;\ 7)$, $B(-7;\ -15;\ 8)$, $C(14;\ -10;\ 9)$, $D(14;\ -10;\ 7)$.

465. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1=\sqrt{2}AB$ (рис. 132,*а*). Найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.

Решение. Пусть $AB=a$, тогда $AA_1=\sqrt{2}a$. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке

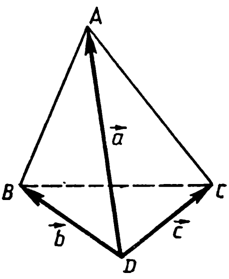


Рис. 131.

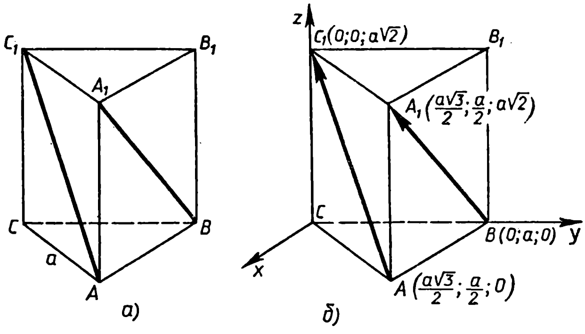


Рис. 132.

132,*б*. Вершины A, B, A_1, C_1 имеют следующие координаты (объясните почему): $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$, $C_1\ (0;\ 0;\ a\sqrt{2})$.

Отсюда находим координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$:

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right\},\ \overrightarrow{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right\}.$$

Векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ являются направляющими векторами прямых AC_1 и A_1B. Искомый угол φ между ними можно найти по формуле (2):

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}}=\frac{1}{2},$$

откуда $\varphi=60°$.

466. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM:MA_1=3:1$, а точка N — середина ребра BC. Вычислите косинус угла между прямыми: а) MN и DD_1; б) MN и BD; в) MN и B_1D; г) MN и A_1C.

467. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=BC=\frac{1}{2}AA_1$. Найдите угол между прямыми: а) BD и CD_1; б) AC и AC_1.

468. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=1$, $BC=2$, $BB_1=3$. Вычислите косинус угла между прямыми: а) AC и D_1B; б) AB_1 и BC_1; в) A_1D и AC_1.

469. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке N, а точка M лежит на ребре A_1D_1, причем $A_1M:MD_1=1:4$. Вычислите синус угла между прямой MN и плоскостью грани: а) $ABCD$; б) DD_1C_1C; в) AA_1D_1D.

470. В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABD=\angle ABC=\angle DBC=90°$, $AB=BD=2$, $BC=1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины ребер AD и BC, и плоскостью грани: а) ABD; б) DBC; в) ABC.

471. Докажите, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен 90°.

472. Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что прямая PM_1 перпендикулярна к плоскостям MN_1Q_1 и QNP_1.

473. Лучи OA, OB и OC образуют три прямых угла AOB, AOC и BOC. Найдите угол между биссектрисами углов COA и AOB.

474. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC_1=\angle DAC_1=60°$. Найдите $\varphi=\angle A_1AC_1$.

Решение. Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на рисунке 133, и рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AC_1}$. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{\cos 60°; \cos 60°; \cos \varphi\}$, или $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cos\varphi\right\}$. Так как $|\vec{a}|=1$, то $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2 \varphi=1$.

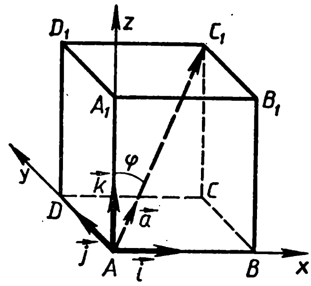


Рис. 133.

Отсюда получаем $\cos^2 \varphi=\frac{1}{2}$, или $\cos \varphi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как угол φ острый, то $\cos \varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi=45°$.

475. В тетраэдре $DABC$ $DA=5$ см, $AB=4$ см, $AC=3$ см, $\angle BAC=90°$, $\angle DAB=60°$, $\angle DAC=45°$. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения медиан треугольника DBC.

476. Угол между диагональю AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и каждым из ребер AB и AD равен 60°. Найдите $\angle CAC_1$.

477. Проекция точки K на плоскость квадрата $ABCD$ совпадает с центром этого квадрата. Докажите, что угол между прямыми AK и BD равен 90°.

§ 3. ДВИЖЕНИЯ

49. Центральная симметрия. В курсе планиметрии мы познакомились с движениями плоскости, т. е. отображениями плоскости на себя, сохраняющими расстояния между точками. Введем теперь понятие движения пространства. Предварительно разъясним, что понимается под словами *отображение пространства на себя.* Допустим, что каждой точке M пространства поставлена в соответствие некоторая точка M_1, причем любая точка M_1 пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке M. Тогда говорят, что задано *отображение пространства на себя.* Говорят также, что при данном отображении *точка M переходит (отображается) в точку M_1.* Под *движением пространства* понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в какие-то точки A_1 и B_1 так, что $A_1B_1=AB$. Иными словами, *движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками.* Примером движения может служить *центральная симметрия* — отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно данного центра O.

Докажем, что *центральная симметрия является движением.* Обозначим буквой O центр симметрии и введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке O. Установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно точки O. Если точка M не совпадает с центром O, то O — середина отрезка MM_1. По формулам для координат середины отрезка получаем

$$\frac{x+x_1}{2}=0, \quad \frac{y+y_1}{2}=0, \quad \frac{z+z_1}{2}=0,$$

откуда $x_1=-x$, $y_1=-y$, $z_1=-z$. Эти формулы верны и в том случае, когда точки M и O совпадают (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB. Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}$. Из этих соотношений ясно, что $AB=A_1B_1$, что и требовалось доказать.

50. Осевая симметрия. *Осевой симметрией* с осью a называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси a.

Докажем, что *осевая симметрия является движением.* Для этого введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно оси Oz. Если точка M не лежит на оси Oz, то ось Oz: 1) проходит через середину отрезка MM_1 и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x+x_1}{2}=0$ и $\frac{y+y_1}{2}=0$, откуда $x_1=-x$ и $y_1=-y$. Второе условие означает, что аппликаты точек M и M_1 равны: $z_1=z$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка M лежит на оси Oz (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB. Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A(-x_1; -y_1; z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A_1B_1=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Из этих соотношений ясно, что $AB=A_1B_1$, что и требовалось доказать.

51. Зеркальная симметрия. *Зеркальной симметрией* (симметрией относительно плоскости α) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M_1.

Докажем, что *зеркальная симметрия является движением.*

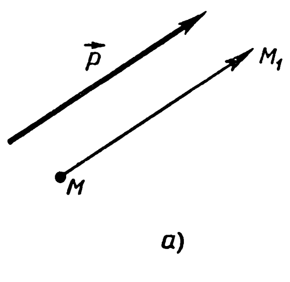
Для этого введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно плоскости Oxy. Если точка M не лежит в плоскости Oxy, то эта плоскость: 1) проходит через середину отрезка MM_1 и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем $\frac{z+z_1}{2}=0$, откуда $z_1=-z$. Второе условие означает, что отрезок MM_1 параллелен оси Oz, и, следовательно, $x_1=x$, $y_1=y$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка M лежит в плоскости Oxy (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками A_1 и B_1 равно AB. Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(x_1; y_1; -z_1)$ и $B_1(x_2; y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A_1B_1=$ $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}$. Из этих соотношений ясно, что $AB=A_1B_1$, что и требовалось доказать.

52. Параллельный перенос. Приведем еще один пример движения пространства. Возьмем какой-нибудь вектор $\vec{p}$. *Параллельным переносом* на вектор $\vec{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1}=\vec{p}$ (рис. 134,*а*).

Докажем, что *параллельный перенос является движением.* При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ любые две точки A и B переходят в точки A_1 и B_1 такие, что $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{BB_1}=\vec{p}$. Требуется доказать, что $A_1B_1=AB$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$ (рис. 134,*б*). Из этих двух равенств получаем $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$, или $\vec{p}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\vec{p}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$. Из последнего равенства следует, что $A_1B_1=$ $=AB$, что и требовалось доказать.

Можно доказать (это делается так же, как и в планиметрии),



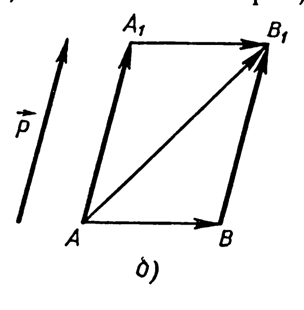


Рис. 134.

что при любом движении отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую, плоскость — в плоскость. Можно доказать также, что понятие наложения, с помощью которого в нашем курсе вводится равенство фигур (см. приложение 2), совпадает с понятием движения, т. е. любое наложение является движением и, обратно, любое движение является наложением. Это утверждение доказывается аналогично тому, как это делалось в планиметрии.

ЗАДАЧИ

478. Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(1;\ 0;\ -2)$ при: а) центральной симметрии относительно начала координат; б) осевой симметрии относительно координатных осей; в) зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.

479. Докажите, что при центральной симметрии: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

480. Докажите, что при центральной симметрии: а) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

481. Докажите, что при осевой симметрии: а) прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси; б) прямая, образующая с осью угол φ, отображается на прямую, также образующую с осью угол φ.

482. При зеркальной симметрии прямая a отображается на прямую a_1. Докажите, что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости.

483. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если: а) $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$; б) $\beta \perp \alpha$, то β_1 совпадает с β.

484. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$, где $\vec{p} \neq \vec{0}$: а) прямая, не параллельная вектору $\vec{p}$ и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, параллельная вектору $\vec{p}$ или содержащая этот вектор, отображается на себя.

485. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен параллельным переносом треугольника ABC на вектор $\vec{p}$. Точки M_1 и M — соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка M переходит в точку M_1.

486. Докажите, что при движении: а) прямая отображается на прямую; б) плоскость отображается на плоскость.

487. Докажите, что при движении: а) отрезок отображается на отрезок; б) угол отображается на равный ему угол.

488. Докажите, что при движении: а) параллельные прямые отображаются на параллельные прямые; б) параллельные плоскости отображаются на параллельные плоскости.

489. Докажите, что при движении: а) окружность отображается на окружность того же радиуса; б) прямоугольный параллелепипед отображается на прямоугольный параллелепипед с теми же измерениями.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ V

1. Как расположена точка относительно прямоугольной системы координат, если: а) одна ее координата равна нулю; б) две ее координаты равны нулю?
2. Объясните, почему все точки, лежащие на прямой, параллельной плоскости Oxy, имеют одну и ту же аппликату.
3. Даны точки A (2; 4; 5), B (3; x; y), C (0; 4; z) и D (5; t; u). При каких значениях x, y, z, t и u эти точки лежат: а) в плоскости, параллельной плоскости Oxy; б) в плоскости, параллельной плоскости Oxz; в) на прямой, параллельной оси Ox?
4. Какие координаты имеет вектор $\overrightarrow{CA}$, если $\overrightarrow{AB}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\overrightarrow{BC}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$?
5. Первая и вторая координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ равны нулю. Как расположен вектор $\vec{a}$ по отношению к оси: а) Oz; б) Ox; в) Oy?
6. Первая координата ненулевого вектора $\vec{a}$ равна нулю. Как расположен вектор $\vec{a}$ по отношению: а) к координатной плоскости Oxz; б) к оси Ox?
7. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-5;\ 3;\ -1\}$ и $\vec{b}\{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\{-2;\ 3;\ 7\}$ и $\vec{b}\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$?
8. Длина радиус-вектора точки M равна 1. Может ли абсцисса точки M равняться: а) 1; б) 2?
9. Длина вектора $\vec{a}$ равна 3. Может ли одна из координат вектора $\vec{a}$ равняться: а) 3; б) 5?
10. Абсцисса точки M_1 равна 3, а абсцисса точки M_2 равна 6. а) Может ли длина отрезка M_1M_2 быть равной 2? б) Как расположен отрезок M_1M_2 по отношению к оси Ox, если его длина равна 3?
11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют длины a и b. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены; в) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны; г) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°; д) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°?
12. При каком условии скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю?

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перпендикулярны ли векторы: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$; д) $\overrightarrow{BB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

14. Первые координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 1 и 2. Может ли скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ быть: а) меньше 2; б) равно 2; больше 2?

15. Какие координаты имеет точка A, если при центральной симметрии с центром A точка $B\,(1;\ 0;\ 2)$ переходит в точку $C\,(2;\ -1;\ 4)$?

16. Как расположена плоскость по отношению к осям координат Ox и Oz, если при зеркальной симметрии относительно этой плоскости точка $M\,(2;\ 1;\ 3)$ переходит в точку $M_1\,(2;\ -2;\ 3)$?

17. В какую перчатку (правую или левую) переходит правая перчатка при зеркальной симметрии? осевой симметрии? центральной симметрии?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

490. Даны векторы $\vec{a}\,\{-5;\ 0;\ 5\}$, $\vec{b}\,\{-5;\ 5;\ 0\}$ и $\vec{c}\,\{1;\ -2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора: а) $3\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{c}$; б) $-0{,}1\vec{c}+$ $+0{,}8\vec{a}-0{,}5\vec{b}$.

491. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\,\{-5;\ 3;\ -1\}$ и $\vec{b}\,\{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\,\{-2;\ 3;\ 7\}$ и $\vec{b}\,\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$; в) $\vec{a}\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{5}{9};\ -1\right\}$ и $\vec{b}\,\{6;\ -5;\ 9\}$; г) $\vec{a}\,\{0{,}7;\ -1{,}2;\ -5{,}2\}$ и $\vec{b}\,\{-2{,}8;\ 4{,}8;\ -20{,}8\}$?

492. Даны точки $A\,(-5;\ 7;\ 3)$ и $B\,(3;\ -11;\ 1)$. а) На оси Ox найдите точку, ближайшую к середине отрезка AB. б) Найдите точки, обладающие аналогичным свойством, на осях Oy и Oz.

493. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\,\{-1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{k}$; б) $\vec{b}\,\{2;\ 1;\ 1{,}5\}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}\,\{1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\,\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{c}\,\{2;\ 3;\ -1\}$?

494. Даны точки $A\,(3;\ 5;\ 4)$, $B\,(4;\ 6;\ 5)$, $C\,(6;\ -2;\ 1)$ и $D\,(5;\ -3;\ 0)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

495. Даны точки $A\,(2;\ 0;\ 1)$, $B\,(3;\ 2;\ 2)$ и $C\,(2;\ 3;\ 6)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

496. Даны координаты четырех вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\,(3;\ 0;\ 2)$, $B\,(2;\ 4;\ 5)$, $A_1\,(5;\ 3;\ 1)$, $D\,(7;\ 1;\ 2)$. Найдите координаты остальных вершин.

497. Середина отрезка AB лежит в плоскости Oxy. Найдите k, если: а) $A\,(2;\ 3;\ -1)$, $B\,(5;\ 7;\ k)$; б) $A\,(0;\ 4;\ k)$, $B\,(3;\ -8;\ 2)$; в) $A\,(5;\ 3;\ k)$, $B\,(3;\ -5;\ 3k)$.

498. Найдите координаты единичных векторов, сонаправленных соответственно с векторами $\vec{a}\,\{2;\ 1;\ -2\}$ и $\vec{b}\,\{1;\ 3;\ 0\}$.

499. Длина вектора $\vec{a}\,\{x;\ y;\ z\}$ равна 5. Найдите ординату вектора $\vec{a}$, если $x=2$, $z=-\sqrt{5}$.

500. Даны точки $M(2;\ -1;\ 3)$, $N(-4;\ 1;\ -1)$, $P(-3;\ 1;\ 2)$ и $Q(1;\ 1;\ 0)$. Вычислите расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

501. Найдите расстояние от точки $B(-2;\ 5;\ \sqrt{3})$ до осей координат.

502. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $A(13;\ 2;\ -1)$ и $B(-15;\ 7;\ -18)$.

503*. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;\ 2;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 1)$, $C(2;\ 2;\ 2)$.

504. Вершины треугольника ABC расположены по одну сторону от плоскости α и находятся от этой плоскости на расстояниях 4 дм, 5 дм и 9 дм. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до плоскости α.

505*. *Медианой тетраэдра* называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины.

506. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 5;\ 3\}$, $\vec{b}\{3;\ 0;\ 2\}$, $\vec{c}\left\{\frac{1}{2};\ -3;\ 4\right\}$ и $\vec{d}\{2;\ 1;\ 0\}$. Вычислите скалярное произведение: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{c}$; в) $\vec{d}\vec{d}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})$.

507. В тетраэдре $DABC$ $DA=DB=DC$, $\angle ADB=45°$, $\angle BDC=60°$. Вычислите угол между векторами: а) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA}$.

508. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу, D_1 — проекция точки D на плоскость ABC. Перпендикулярны ли векторы: а) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{D_1D}$; б) $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{DC}$?

509. Вычислите косинус угла между прямыми AB и CD, если: а) $A(7;\ -8;\ 15)$, $B(8;\ -7;\ 13)$, $C(2;\ -3;\ 5)$, $D(-1;\ 0;\ 4)$; б) $A(8;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(5;\ -2;\ 0)$, $D(7;\ 0;\ -2)$.

510. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани BB_1C_1C. Вычислите угол между векторами: а) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

511. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAA_1=\angle BAD=\angle DAA_1=60°$, $AB=AA_1=AD=1$. Вычислите длины векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

512. Проекция точки M на плоскость ромба $ABCD$ совпадает с точкой O пересечения его диагоналей. Точка N — середина стороны BC, $AC=8$, $DB=MO=6$. Вычислите косинус угла между прямой MN и прямой: а) BC; б) DC; в) AC; г) DB.

513. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM:MB_1=3:2$, а точка N лежит на ребре AD, причем $AN:ND=2:3$. Вычислите синус угла между прямой MN и плоскостью грани: а) DD_1C_1C; б) $A_1B_1C_1D_1$.

514. Лучи OA, OB, OC и OM расположены так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$, $\angle AOM = \varphi_1$, $\angle BOM = \varphi_2$, $\angle COM = \varphi_3$. Докажите, что

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

515. Лучи OA, OB и OC расположены так, что $\angle BOC = \angle BOA = 45°$, $\angle AOC = 60°$. Прямая OH перпендикулярна к плоскости AOB. Найдите угол между прямыми OH и OC.

516. Дан двугранный угол $CABD$, равный φ ($\varphi < 90°$). Известно, что $AC \perp AB$ и $\angle DAB = \theta$. Найдите $\cos \angle CAD$.

517. Отрезки CA и DB перпендикулярны к ребру двугранного угла $CABD$, равного $120°$. Известно, что $AB = m$, $CA = n$, $BD = p$. Найдите CD.

518. При движении прямая a отображается на прямую a_1, а плоскость α — на плоскость α_1. Докажите, что: а) если $a \parallel \alpha$, то $a_1 \parallel \alpha_1$; б) если $a \perp \alpha$, то $a_1 \perp \alpha_1$.

519. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если плоскость β образует с плоскостью α угол φ, то и плоскость β_1 образует с плоскостью α угол φ.

520. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$: а) плоскость, не параллельная вектору $\vec{p}$ и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, параллельная вектору $\vec{p}$ или содержащая этот вектор, отображается на себя.

Глава VI
ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

§ 1. ЦИЛИНДР

53. Понятие цилиндра. Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и окружность L с центром O радиуса r, расположенную в плоскости α (рис. 135). Через каждую точку окружности L проведем прямую, перпендикулярную к плоскости α. Отрезки этих прямых, заключенные между плоскостями α и β, образуют *цилиндрическую поверхность*. Сами отрезки называются *образующими цилиндрической поверхности* (на рисунке 135 изображены образующие AA_1, MM_1 и др.).

По построению концы образующих, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же образующих, расположенные в плоскости β, заполняют окружность L_1 с центром O_1 радиуса r, где O_1 — точка пересечения плоскости β с прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости α.

Справедливость этого утверждения следует из того, что множество концов образующих, лежащих в плоскости β, получается из окружности L параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Параллельный перенос является движением и, значит, наложением, а при наложении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Следовательно, при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ окружность L перейдет в равную ей окружность L_1 радиуса r с центром в точке O_1.

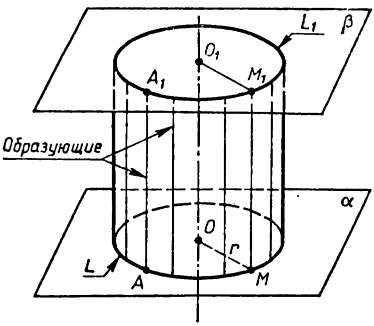


Рис. 135. Цилиндрическая поверхность.

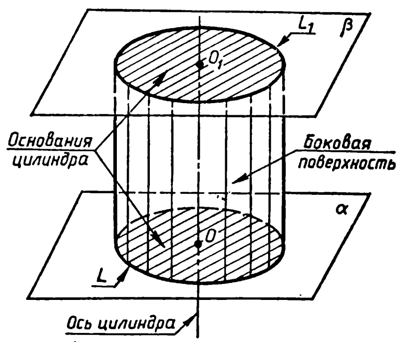


Рис. 136. Цилиндр.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется цилиндром (рис. 136). Цилиндрическая поверхность называется *боковой поверхностью цилиндра*, а круги — *основаниями цилиндра*. Образующие цилиндрической поверхности называются *образующими цилиндра*, прямая OO_1 — *осью цилиндра*.

Все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β. Длина образующей называется *высотой цилиндра*, а радиус основания — *радиусом цилиндра*.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 137 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания — вращением сторон BC и AD.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой *прямоугольник* (рис. 138,*а*), две стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется *осевым*.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является *кругом*. В самом деле, если γ — такая секущая плоскость (рис. 138,*б*), то она отсекает от рассматриваемого цилиндра тело, также представляющее собой цилиндр (объясните почему). Основаниями этого цилиндра служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.

З а м е ч а н и е. На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров. На рисунке 139,*а* изображен цилиндр, каждое основание которого представляет собой фигуру, ограниченную частью параболы и отрезком. На рисунке 139,*б* изображен цилиндр, основаниями которого являются

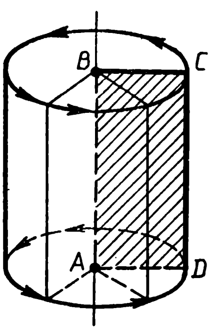
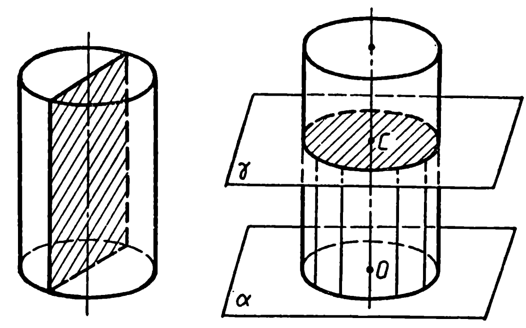


Рис. 137. Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB.



а) Осевое сечение цилиндра.

б) Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси.

Рис. 138.

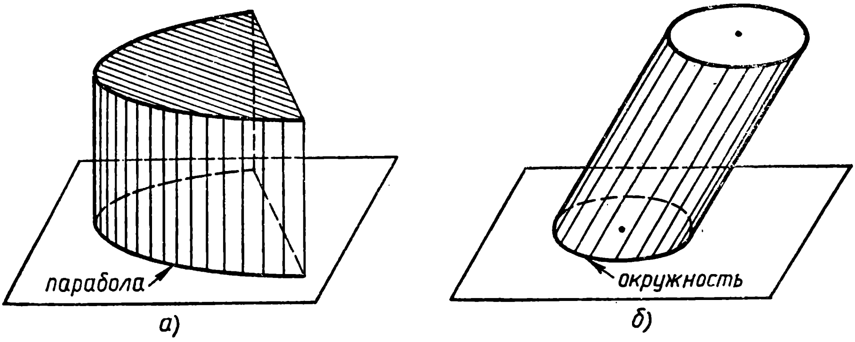


Рис. 139.

круги, но образующие цилиндра не перпендикулярны к плоскостям оснований (наклонный цилиндр). Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндры, которые были определены в этом пункте. Их называют иногда *прямыми круговыми цилиндрами.*

54. Площадь поверхности цилиндра. На рисунке 140,*а* изображен цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (рис. 140,*б*). В результате в плоскости α получится прямоугольник $ABB'A'$. Стороны AB и $A'B'$ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей AB. Этот прямоугольник называется *разверткой боковой поверхности цилиндра.* Основание AA' прямоугольника является разверткой окружности основания цилиндра, а высота AB — образующей цилиндра, поэтому $AA'=2\pi r$, $AB=h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки. Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh. \qquad (1)$$

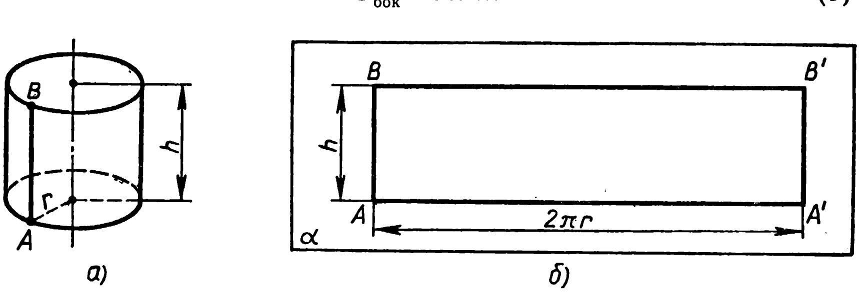


Рис. 140.

Итак, *площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.*

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу

$$S_{цил}=2\pi r\,(r+h).$$

ЗАДАЧИ

521. Докажите, что осевое сечение цилиндра является прямоугольником, две противоположные стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Найдите диагональ осевого сечения, если радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота — 4 м.

522. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь основания цилиндра.

523. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

524. Осевые сечения двух цилиндров равны. Равны ли высоты этих цилиндров?

525. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания — 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

526. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\sqrt{3}\pi:4$. Найдите: а) угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания; б) угол между диагоналями осевого сечения.

527. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота — h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найдите: а) h, если $r=10$ дм, $d=8$ дм, $AB=13$ дм; б) d, если $h=6$ см, $r=5$ см, $AB=10$ см.

528. Докажите, что если секущая плоскость параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра меньше его радиуса, то сечение цилиндра представляет собой прямоугольник, две противоположные стороны которого — образующие цилиндра.

529. Высота цилиндра равна 8 см, радиус равен 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.

530. Высота цилиндра равна 12 см, а радиус основания равен 10 см. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной его оси, так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

531. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на 9 дм от нее, равна 240 дм^2. Найдите радиус цилиндра.

532. Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ.

533. Высота цилиндра равна h, а площадь осевого сечения равна S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между осью цилиндра и плоскостью сечения равно d.

534. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна h, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно d.

535. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60°. Образующая цилиндра равна $10\sqrt{3}$ см, расстояние от оси до секущей плоскости равно 2 см. Найдите площадь сечения.

536. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

537. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

538. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

539. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?

540. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

541. Сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади ее боковой поверхности?

542. Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен φ, площадь основания цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

543. Угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра равен φ, диагональ равна d. Найдите площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

544. Из квадрата, диагональ которого равна d, свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания цилиндра.

545. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите площадь: а) осевого сечения цилиндра; б) боковой поверхности цилиндра; в) полной поверхности цилиндра.

546. Один цилиндр получен вращением в пространстве прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр — вращением того же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB=a$, $BC=b$.

§ 2. КОНУС

55. Понятие конуса. Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим отрезком с точкой P. Поверхность, образованная этими отрезками, называется *конической поверхностью* (рис. 141), а сами отрезки — *образующими конической поверхности.*

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется конусом (рис. 142). Коническая поверхность называется *боковой поверхностью конуса*, а круг — *основанием конуса*. Точка P называется *вершиной* конуса, а образующие конической поверхности — *образующими* конуса (на рисунке 142 изображены образующие PA, PB и др.). Все образующие конуса равны друг другу (объясните почему). Прямая OP, проходящая через центр основания и вершину, называется *осью конуса.* Ось конуса перпендикулярна к плоскости основания. Отрезок OP называется *высотой конуса.*

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке 143 изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольни-

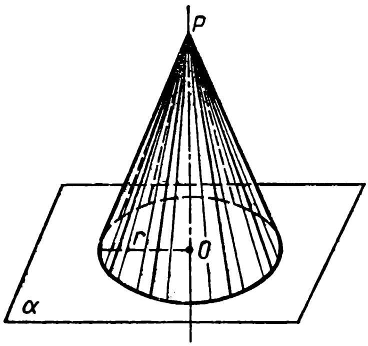


Рис. 141. Коническая поверхность.

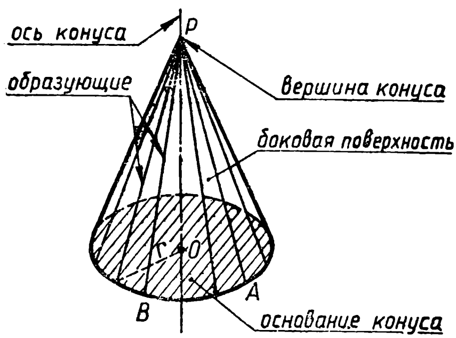


Рис. 142. Конус.

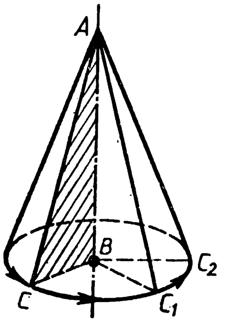


Рис. 143. Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB.

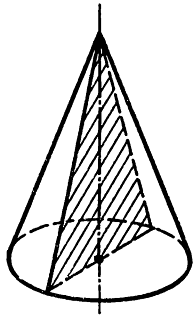


Рис. 144. Осевое сечение конуса.

ка ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC, а основание — вращением катета BC.

Рассмотрим сечение конуса различными плоскостями.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса (рис. 144), то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса. Это сечение называется *осевым.*

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса (рис. 145), то сечение конуса представляет собой *круг* с центром O_1, расположенным на оси конуса. Радиус r_1 этого круга равен

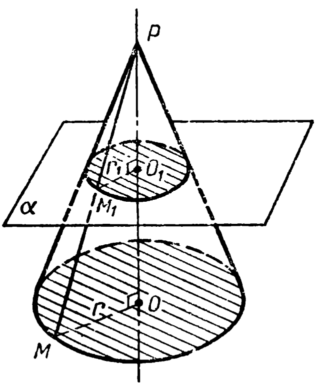


Рис. 145. Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к его оси,— круг с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$.

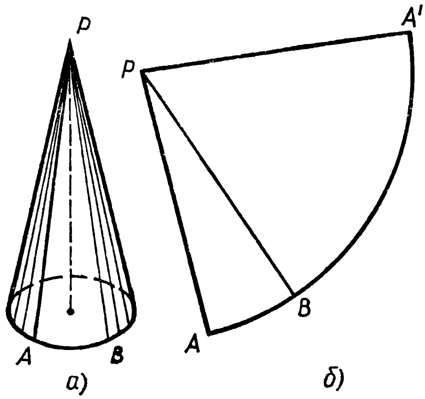


Рис. 146.

$\frac{PO_1}{PO}r$, где r — радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1M_1. Доказательство этого факта приведено в решении задачи 556.

56. Площадь поверхности конуса. Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих (рис. 146,*а,б*). Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (см. рис. 146,*б*), радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора — длине окружности основания конуса.

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса через его образующую l и радиус основания r. Площадь кругового сектора — развертки боковой поверхности конуса (рис. 146,*б*) — равна $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$, где α — градусная мера дуги ABA', поэтому

$$S_{бок}=\frac{\pi l^2}{360}\alpha. \qquad (1)$$

Выразим α через l и r. Так как длина дуги ABA' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r=\frac{\pi l}{180}\alpha$, откуда $\alpha=\frac{360r}{l}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{бок}=\pi rl. \qquad (2)$$

Таким образом, *площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.*

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{кон}$ полной поверхности конуса получается формула

$$S_{кон}=\pi r\,(l+r). \qquad (3)$$

57. Усеченный конус. Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется *усеченным конусом* (рис. 147). Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются *основаниями* усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, — *высотой* усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его *боковой поверхностью*, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются *образующими* усеченного конуса. Все образующие усеченного конуса равны друг другу (докажите это самостоятельно).

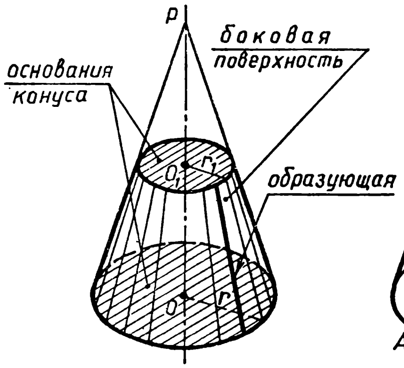


Рис. 147. Усеченный конус.

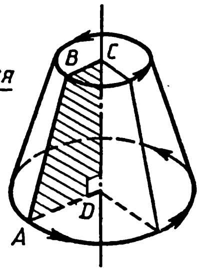


Рис. 148. Усеченный конус получен вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD.

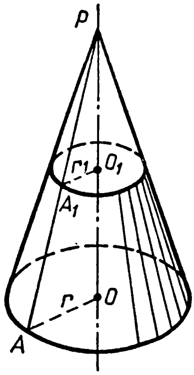


Рис. 149.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям. На рисунке 148 изображен усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD. При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны AB, а основания усеченного конуса — вращением оснований CB и DA трапеции.

Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности усеченного конуса через его образующую l и радиусы r и r_1 оснований ($r > r_1$).

Пусть P — вершина конуса, из которого получен усеченный конус, AA_1 — одна из образующих усеченного конуса, O и O_1 — центры оснований (рис. 149). Используя формулу (2), получаем $S_{бок} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 PA_1 = \pi r (PA_1 + AA_1) - \pi r_1 \cdot PA_1$. Отсюда, учитывая, что $AA_1 = l$, находим:

$$S_{бок} = \pi r l + \pi (r - r_1) PA_1. \qquad (4)$$

Выразим PA_1 через l, r и r_1. Прямоугольные треугольники PO_1A_1 и POA подобны, так как имеют общий острый угол P, поэтому $\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}$, или $\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$. Отсюда получаем

$$PA_1 = \frac{l r_1}{r - r_1}.$$

Подставив это выражение в формулу (4), приходим к формуле

$$S_{бок} = \pi (r + r_1) l.$$

Таким образом, *площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.*

ЗАДАЧИ

547. Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.

548. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, если: а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$.

549. Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна: а) половине площади основания; б) четверти площади основания?

550. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

551. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2r$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

552. Высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей конуса равен 60°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

553. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6 дм^2, а площадь основания равна 8 дм^2.

554. Образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу: а) в 60°; б) в 90°.

555. Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

556. Основанием конуса с вершиной P является круг радиуса r с центром O. Докажите, что если секущая плоскость α перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1 радиуса r_1, где O_1 — точка пересечения плоскости α с осью PO, а $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ (см. рис. 145).

Решение. Докажем сначала, что любая точка M_1, лежащая в плоскости α на окружности радиуса r_1 с центром O_1, лежит на некоторой образующей конуса, т. е. является точкой рассматриваемого сечения. Обозначим буквой M точку пересечения луча PM_1 с плоскостью основания конуса. Из подобия прямоугольных треугольников PO_1M_1 и POM (они подобны, так как имеют общий острый угол P) находим: $OM = \frac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1} r_1 = r$, т. е. точка M лежит на окружности основания конуса. Следовательно, отрезок PM, на котором лежит точка M_1, является образующей конуса.

Докажем теперь, что любая точка M_1, лежащая как в плоскости α, так и на боковой поверхности конуса, лежит на окружности радиуса r_1 с центром O_1. Действительно, из подобия треугольников PO_1M_1 и POM (PM — образующая, проходящая через точку M_1) имеем

$$O_1M_1=\frac{PO_1}{PO}\cdot OM=\frac{PO_1}{PO}\cdot r=r_1.$$

Таким образом, окружность радиуса r_1 с центром O_1 является сечением боковой поверхности конуса плоскостью α, поэтому круг, границей которого является эта окружность, представляет собой сечение конуса плоскостью α.

557. Две секущие плоскости перпендикулярны к оси конуса. Докажите, что площади сечений конуса этими плоскостями относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей.

558. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой α. Найдите α, если высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см.

559. Найдите дугу сектора, представляющего собой развертку боковой поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°.

560. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной: а) 180°; б) 90°; в) 60°.

561. Вычислите площадь основания и высоту конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а дуга равна 120°.

562. Угол между образующей и осью конуса равен 45°, образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

563. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

564. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

565. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

566. Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, получаемого при вращении треугольника.

567. Найдите образующую усеченного конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.

568. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите: а) высоту усеченного конуса; б) площадь осевого сечения.

569. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, где $R > r$, а образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь осевого сечения.

570. Площадь боковой поверхности конуса равна 80 см^2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося при этом усеченного конуса.

571. Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB.

572. Ведро имеет форму усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно взять для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких ведер, если на 1 м^2 требуется 150 г краски? (Толщину стенок ведер в расчет не принимать.)

§ 3. СФЕРА

58. Сфера и шар.

Определение. *Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки* (рис. 150).

Данная точка называется *центром* сферы (точка O на рисунке 150), а данное расстояние — *радиусом* сф ры. Радиус сферы часто обозначают буквой R.

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется *диаметром* сферы. Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра (рис. 151).

Тело, ограниченное сферой, называется *шаром*. Центр, радиус и диаметр сферы называются также *центром*, *радиусом* и *диаметром* шара. Очевидно, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и точку O), и не содержит других точек.

59. Уравнение сферы. Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и дана некоторая поверхность F, например плоскость или сфера. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется *уравнением поверхности* F, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют

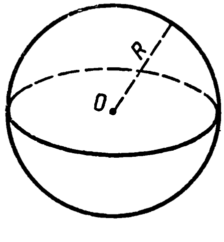


Рис. 150.

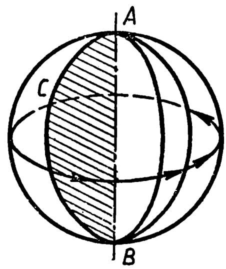


Рис. 151. Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB.

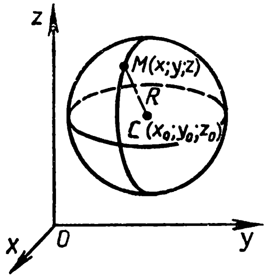


Рис. 152.

координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности. Отметим, что понятие уравнения поверхности аналогично понятию уравнения линии, которое было введено в курсе планиметрии.

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром C $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 152).

Расстояние от произвольной точки M $(x;\ y;\ z)$ до точки C вычисляется по формуле $MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Если точка M лежит на данной сфере, то $MC=R$, или $MC^2=R^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (1)$$

Если же точка M $(x;\ y;\ z)$ не лежит на данной сфере, то $MC^2 \neq R^2$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, в *прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

60. Взаимное расположение сферы и плоскости. Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от ее центра до плоскости.

Обозначим радиус сферы буквой R, а расстояние от ее центра до плоскости α — буквой d. Введем систему координат так, как показано на рисунке 153: плоскость Oxy совпадает с плоскостью α, а центр C сферы лежит на положительной полуоси Oz. В этой системе координат точка C имеет координаты $(0;\ 0;\ d)$, поэтому сфера имеет уравнение $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$. Плоскость α совпадает с координатной плоскостью Oxy, и поэтому ее уравнение имеет вид $z=0$ (объясните почему).

Если координаты какой-нибудь точки M $(x;\ y;\ z)$ удовлетворяют обоим уравнениям, то точка M лежит как в плоскости α, так и на сфере, т. е. является общей точкой плоскости и сферы. Если же система этих двух уравнений не имеет решений, то сфера и плоскость не имеют общих точек. Таким образом, вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости сводится к исследованию системы уравнений

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2. \end{cases}$$

Подставив $z=0$ во второе уравнение, получим

$$x^2+y^2=R^2-d^2. \qquad (2)$$

Возможны три случая.

1) $d<R$. Тогда $R^2-d^2>0$, и уравнение (2) является уравнением окружности радиуса $r=\sqrt{R^2-d^2}$ с центром в точке O на плоскости Oxy. Координаты любой точки $M(x;\ y;\ 0)$ этой окружности удовлетворяют как уравнению плоскости α, так и уравнению сферы, т. е. все точки этой окружности являются общими точками плоскости и сферы (рис. 153, *а*). Таким образом, в данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности. Итак, *если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность.*

Ясно, что *сечение шара плоскостью есть круг.* Если секущая плоскость проходит через центр шара, то $d=0$ и в сечении получается круг радиуса R, т. е. круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом шара* (рис. 154). Если секущая плоскость не проходит через центр шара, то $d>0$ и радиус сечения $r=\sqrt{R^2-d^2}$, очевидно, меньше радиуса шара (см. рис. 153, *а*).

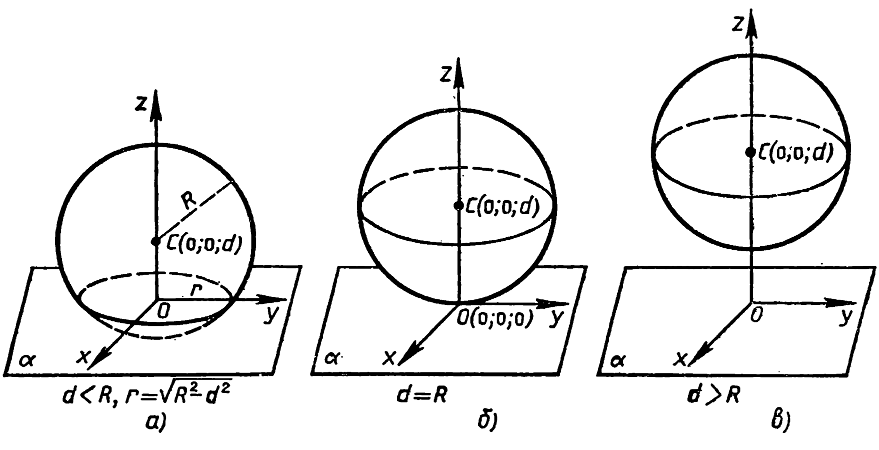


Рис. 153.

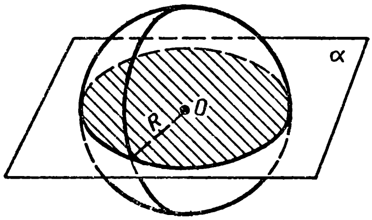


Рис. 154.

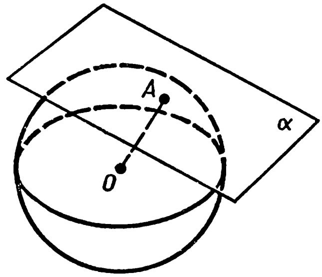


Рис. 155.

2) $d=R$. Тогда $R^2-d^2=0$, и уравнению (2) удовлетворяют только значения $x=0$, $y=0$. Следовательно, только координаты точки $O\,(0;\ 0;\ 0)$ удовлетворяют обоим уравнениям, т. е. O — единственная общая точка сферы и плоскости (см. рис. 153, *б*). Итак, *если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.*

3) $d>R$. Тогда $R^2-d^2<0$, и уравнению (2) не удовлетворяют координаты никакой точки. Следовательно, *если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек* (см. рис. 153, *в*).

61. Касательная плоскость к сфере. Рассмотрим более подробно случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере*, а их общая точка называется *точкой касания* плоскости и сферы. На рисунке 155 плоскость α — касательная к сфере с центром O, A — точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

Теорема. ***Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.***

Доказательство. Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A (рис. 155). Докажем, что $OA\perp\alpha$.

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α — касательная, т. е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что $OA\perp\alpha$. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема. ***Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.***

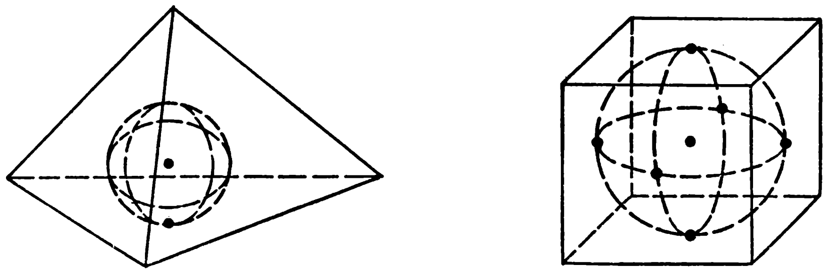


Рис. 156.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Это и означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

62. Площадь сферы. В отличие от боковой поверхности цилиндра или конуса сферу нельзя развернуть на плоскость, и, следовательно, для нее непригоден способ определения и вычисления площади поверхности с помощью развертки. Для определения площади сферы воспользуемся понятием описанного многогранника. Многогранник называется *описанным около сферы* (шара), если сфера касается всех его граней*. При этом сфера называется *вписанной в многогранник.* На рисунке 156 изображены описанные около сферы тетраэдр и куб.

Пусть описанный около сферы многогранник имеет n граней. Будем неограниченно увеличивать n таким образом, чтобы наибольший размер каждой грани** описанных многогранников стремился к нулю. *За площадь сферы примем предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.* В п. 73 мы докажем, что этот предел существует, и получим следующую формулу для вычисления площади сферы радиуса R:

$$S = 4\pi R^2.$$

* Говорят, что сфера касается грани многогранника, если плоскость грани является касательной к сфере и точка касания принадлежит грани.

** Наибольшим размером грани мы называем наибольшее расстояние между двумя точками грани. Так, например, если грань является прямоугольником, то ее наибольший размер равен диагонали.

ЗАДАЧИ

573. Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что: а) если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$; б) если $OM \perp AB$, то M — середина отрезка AB.

574. Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите: а) OM, если $R=50$ см, $AB=40$ см; б) OM, если $R=15$ мм, $AB=18$ мм; в) AB, если $R=10$ дм, $OM=60$ см; г) AM, если $R=a$, $OM=b$.

575. Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сфера до прямой AB, если $AB=m$.

576. Найдите уравнение сферы радиуса R с центром A, если: а) $A\,(2;\ -4;\ 7)$, $R=3$; б) $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $R=\sqrt{2}$; в) $A\,(2;\ 0;\ 0)$, $R=4$.

577. Напишите уравнение сферы с центром A, проходящей через точку N, если: а) $A\,(-2;\ 2;\ 0)$, $N\,(5;\ 0;\ -1)$; б) $A\,(-2;\ 2;\ 0)$, $N\,(0;\ 0;\ 0)$; в) $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $N\,(5;\ 3;\ 1)$.

578. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2+y^2+z^2=49$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=2$.

579. Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы. Найдите координаты центра и радиус этой сферы: а) $x^2-4x+y^2+z^2=0$; б) $x^2+y^2+z^2-2y=24$; в) $x^2+2x+y^2+z^2=3$; г) $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$.

580. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

581. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB=6$ см, $BC=8$ см, $AC=10$ см.

582. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

583. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

584. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB=13$ см, $BC=14$ см, $CA=15$ см.

585. Все стороны ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, касаются сферы радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

586. Отрезок OH — высота тетраэдра $OABC$. Выясните взаимное расположение сферы радиуса R с центром O и плоскости ABC, если: а) $R=6$ дм, $OH=60$ см; б) $R=3$ м, $OH=95$ см; в) $R=5$ дм, $OA=45$ см; г) $R=3{,}5$ дм, $OH=40$ см.

587. Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите: а) площадь S сечения, если $R=12$ см, $d=8$ см; б) R, если площадь сечения равна 12 см^2, $d=2$ см.

588. Через точку, делящую радиус сферы пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная к этому радиусу. Радиус сферы равен R. Найдите: а) радиус получившегося сечения; б) площадь боковой поверхности конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.

589. Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если: а) $R=2$ см, $\alpha=30°$; б) $R=5$ м, $\alpha=45°$.

590. Через точку сферы радиуса R, которая является границей данного шара, проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом φ к касательной плоскости. Найдите площадь сечения данного шара.

591. Сфера касается граней двугранного угла в 120°. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a.

592. Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

593. Найдите площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

594. Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр, равна 9 м^2. Найдите площадь сферы.

595. Площадь сферы равна 324 см^2. Найдите радиус сферы.

596. Используя формулу площади сферы, докажите, что площади двух сфер пропорциональны квадратам их радиусов.

597. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

598. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найдите площадь сферы.

599. Радиусы сечений сферы двумя взаимно перпендикулярными плоскостями равны r_1 и r_2. Найдите площадь сферы, если сечения имеют единственную общую точку.

600. Используя формулу площади сферы, докажите, что площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг одной из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ VI

1. Чему равен угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью, проходящей через образующую цилиндра?
2. Что представляет собой сечение цилиндра плоскостью, параллельной его образующей?
3. На основаниях цилиндра взяты две не параллельные друг другу хорды. Может ли кратчайшее расстояние между точками этих хорд быть: а) равным высоте цилиндра; б) больше высоты цилиндра; в) меньше высоты цилиндра?
4. Две цилиндрические детали покрываются слоем никеля одинаковой толщины. Высота первой детали в два раза больше высоты второй, но радиус ее основания в два раза меньше радиуса основания второй детали. На какую из деталей расходуется больше никеля?
5. Равны ли друг другу углы между образующими конуса и: а) плоскостью основания; б) его осью?
6. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину?
7. Точки A и B принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка AB?
8. Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{5}$ см?
9. Могут ли две сферы с общим центром и с неравными радиусами иметь общую касательную плоскость?
10. Что представляет собой множество всех точек пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

601. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через середину радиуса основания перпендикулярно к этому радиусу.

602. Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины C и D — на окружности другого основания. Вычислите радиус цилиндра, если его образующая равна a, $AB = a$, а угол между прямой BC и плоскостью основания равен 60°.

603. Докажите, что если плоскость параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью равно радиусу цилиндра, то плоскость содержит образующую цилиндра, и притом только одну. (В этом случае плоскость называется *касательной плоскостью* к цилиндру.)

604. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, площади полных поверхностей которых равны S_1 и S_2. Найдите диагональ прямоугольника.

605. Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади боковой поверхности, если осевое сечение цилиндра представляет собой: а) квадрат; б) прямоугольник $ABCD$, в котором $AB:AD=1:2$.

606. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади круга, описанного около его осевого сечения. Найдите отношение радиуса цилиндра к его высоте.

607. Найдите высоту и радиус цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$.

608. Толщина боковой стенки и дна стакана цилиндрической формы равна 1 см, высота стакана равна 16 см, а внутренний радиус равен 5 см. Вычислите площадь полной поверхности стакана.

609. Четверть круга свернута в коническую поверхность. Докажите, что образующая конуса в четыре раза больше радиуса основания.

610. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, имеющего три попарно перпендикулярные образующие.

611. Площадь основания конуса равна S_1, а площадь боковой поверхности равна S_0. Найдите площадь осевого сечения конуса.

612. Отношение площадей боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{7}{8}$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

613. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в $120°$, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите площадь сечения, если радиус основания равен 4 см.

614. Найдите угол между образующей и высотой конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой $270°$.

615. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности полученного тела.

616. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 см и 10 см, а острый угол $60°$, вращается вокруг большего основания. Вычислите площадь поверхности полученного тела.

617. Высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см. Вычислите площадь полной поверхности правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус*, если: а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

618. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны. Одно из оснований осевого сечения равно 40 см, а его

---

* Пирамида называется *вписанной в конус*, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса.

площадь равна 36 дм^2. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса.

619. Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

620. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 1,8 см и 2,4 см лежат на сфере. а) Докажите, что если радиус сферы равен 1,5 см, то центр сферы лежит в плоскости треугольника. б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 6,5 см.

621. Расстояние от центра сферы радиуса R до данной прямой равно d. Докажите, что: а) если $d<R$, то прямая пересекает сферу в двух точках; б) если $d=R$, то прямая имеет только одну общую точку со сферой; в) если $d>R$, то прямая не имеет со сферой ни одной общей точки.

622. Найдите координаты точек пересечения сферы, заданной уравнением $(x-3)^2+y^2+(z+5)^2=25$, с осями координат.

623. Найдите радиус сечения сферы $x^2+y^2+z^2=36$ плоскостью, проходящей через точку $M\,(2;\ 4;\ 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс.

624. Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.

625. Расстояние между центрами двух равных сфер меньше их диаметра. а) Докажите, что пересечением этих сфер является окружность. б) Найдите радиус этой окружности, если радиусы сфер равны R, а расстояние между их центрами равно $1{,}6R$.

626. Точки A, B, C и D лежат на сфере радиуса R, причем $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=2\varphi$, $AD=BD=CD$. Найдите: а) AB и AD; б) площадь сечения сферы плоскостью ABC.

627. Радиус сферы равен 10 см. Вне сферы дана точка M на расстоянии 16 см от ближайшей точки сферы. Найдите длину такой окружности на сфере, все точки которой удалены от точки M на расстояние 24 см.

628. Тело ограничено двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь его сечения плоскостью, проходящей через центры сфер, равна площади сечения плоскостью, касательной к внутренней сфере.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГОГРАННИКИ, ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

Поясним некоторые термины, которые встречаются в задачах этого раздела. Напомним, что многогранник называется *описанным около сферы*, если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется *вписанной в многогранник*. Многогранник называется *вписанным в сферу*, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется *описанной около многогранника*.

629. Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы* проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны.

630. В конус высотой 12 см вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса.

631. В усеченный конус вписана правильная усеченная n-угольная пирамида (т. е. основания пирамиды вписаны в основания усеченного конуса). Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см, а высота равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды при: а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

632. Докажите, что если в правильную призму можно вписать сферу, то центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы.

633. Докажите, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды.

634. Радиус сферы равен R. Найдите площадь полной поверхности описанного около сферы многогранника, если этот многогранник является: а) кубом; б) правильной шестиугольной призмой; в) правильным тетраэдром.

635. Около сферы радиуса R описана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен α. а) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. б) Вычислите эту площадь при $R=5$ см, $\alpha=60°$.

636. Докажите, что если в правильную усеченную четырехугольную пирамиду можно вписать сферу, то апофема пирамиды равна полусумме сторон оснований ее боковой грани.

637. Докажите, что центр сферы, описанной около: а) правильной призмы, лежит в середине отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы; б) правильной пирамиды, лежит на высоте этой пирамиды или ее продолжении.

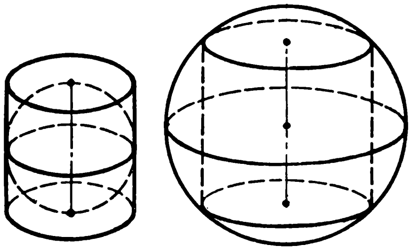
638. Докажите, что: а) около любого тетраэдра можно описать сферу; б) в любой тетраэдр можно вписать сферу.

639. Радиус сферы равен R. Найдите площадь полной поверхности: а) вписанного в сферу куба; б) вписанной правильной шестиугольной призмы, высота которой равна R; в) вписанного правильного тетраэдра.

640. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро равно $2a$. Найдите радиусы вписанной и описанной сфер.

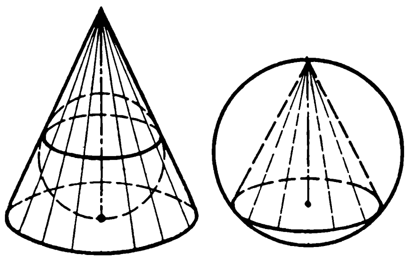
---

* Призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основания вписаны в основания цилиндра.



а) б)

Рис. 157.



а) б)

Рис. 158.

641. В правильной четырехугольной пирамиде радиусы вписанной и описанной сфер равны 2 см и 5 см. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

642. Сфера вписана в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей, рис. 157, *а*). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра.

643. В конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписана сфера радиуса R (т. е. сфера касается основания конуса и каждой его образующей, рис. 158, *а*). Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R=1$ см, $r=\sqrt{3}$ см.

644. В конус вписана сфера радиуса r. Найдите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и основанием конуса равен α.

645. Цилиндр вписан в сферу (т. е. основания цилиндра являются сечениями сферы, рис. 157, *б*). Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади сферы, если высота цилиндра равна диаметру основания.

646. Конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан в сферу радиуса R (т. е. вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы, рис. 158, *б*). Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R=2r$.

Глава VII

ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 1. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

63. Понятие объема. Понятие объема тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Из курса планиметрии известно, что каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют *кубическим сантиметром* и обозначают см^3.

Аналогично определяются *кубический метр* (м^3), *кубический миллиметр* (мм^3) и т. д. Процедура измерения объемов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объем тела, зависит от выбора единицы измерения объемов, и поэтому единица измерения объемов указывается после этого числа. Например, если в качестве единицы измерения объемов взят см^3 и при этом объем V некоторого тела оказался равным 2, то пишут $V=2$ см^3.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объемов и ее частей, сколько и другое тело, т. е. имеет место следующее свойство объемов:

1^0. *Равные тела имеют равные объемы.*

З а м е ч а н и е. Равенство двух фигур, в частности двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии: два тела называются равными, если их можно совместить наложением. Примерами равных тел являются два прямоугольных параллелепипеда с соответственно равными измерениями (рис. 159, *а*), две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами, две правильные пирамиды, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 159, *б*). В каждом из указанных случаев равенство двух тел можно доказать на основе аксиом наложения и равенства фигур (см. приложение 2).

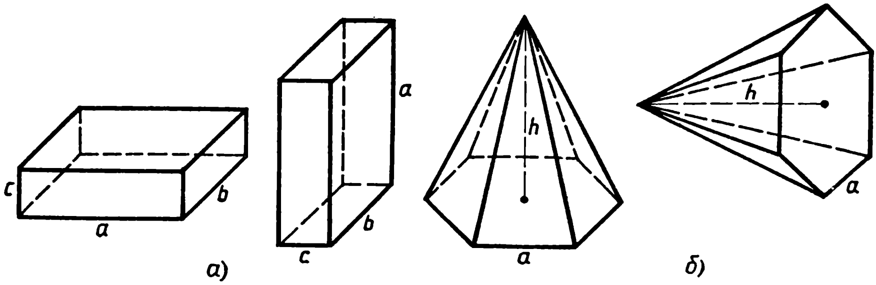


Рис. 159.

Рассмотрим еще одно свойство объемов. Пусть тело составлено из нескольких тел. При этом мы предполагаем, что любые два из этих тел не имеют общих внутренних точек, но могут иметь общие граничные точки (см. рисунок 160, на котором цилиндр Q и конус F имеют общие граничные точки — точки их общего основания). Ясно, что объем всего тела складывается из объемов составляющих его тел. Итак,

2^0. *Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.*

Свойства 1^0 и 2^0 называют *основными свойствами объемов.* Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников. В дальнейшем на основе этих свойств мы выведем формулы для вычисления объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

Предварительно отметим одно следствие из свойств 1^0 и 2^0. Рассмотрим куб, принятый за единицу измерения объемов. Его ребро равно единице измерения отрезков. Разобьем каждое ребро этого куба на n равных частей (n — произвольное целое число) и проведем через точки разбиения плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Куб разобьется на n^3 равных маленьких кубов с ребром $\frac{1}{n}$. Так как сумма объемов всех маленьких кубов равна объему всего куба (свойство 2^0), т. е. равна 1, то объем каждого из маленьких кубов равен $\frac{1}{n^3}$ (объемы маленьких кубов равны друг другу по свойству 1^0). Итак,

объем куба с ребром $\frac{1}{n}$ *равен* $\frac{1}{n^3}$.

Этот факт нам понадобится в следующем пункте при выводе формулы объема прямоугольного параллелепипеда.

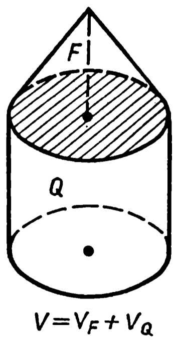


Рис. 160.

64. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Теорема. ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.***

Доказательство*. Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объем буквой V и докажем, что $V=abc$.

Могут представиться два случая.

1) Измерения a, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что $n \geqslant 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьется на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$. Так как объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (см. п. 63), то объем всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Итак, $V=abc$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-й. Очевидно, $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим

$$a_n b_n c_n \leqslant abc \leqslant a'_n b'_n c'_n, \qquad (1)$$

где $b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}$, $c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}$.

По доказанному в первом случае левая часть (1) представляет собой объем V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть — объем V'_n прямоугольного параллелепипеда P'_n с измерениями a'_n, b'_n, c'_n. Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P'_n (рис. 161), то объем V параллелепипеда P заключен между $V_n = a_n b_n c_n$ и $V'_n = a'_n b'_n c'_n$, т. е.

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$. Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V=abc$, что и требовалось доказать.

---

* Доказательство этой теоремы не является обязательным для изучения.

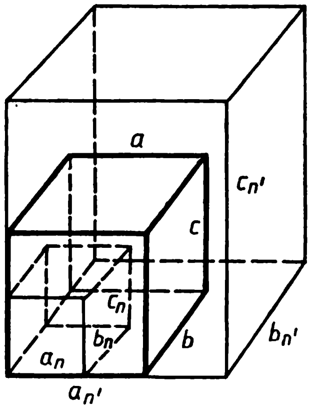


Рис. 161.

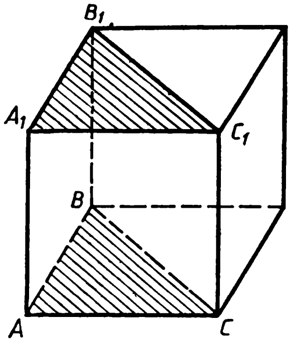


Рис. 162.

С л е д с т в и е 1. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.*

В самом деле, примем грань с ребрами a и b за основание. Тогда площадь S основания равна ab, а высота h параллелепипеда равна c. Следовательно, $V=abc=Sh$.

С л е д с т в и е 2. *Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.*

Для доказательства этого утверждения дополним прямую треугольную призму с основанием ABC ($\angle A$ прямой) до прямоугольного параллелепипеда, как показано на рисунке 162. В силу следствия 1 объем этого параллелепипеда равен $2S_{ABC}\cdot h$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC, h — высота призмы. Плоскость B_1BC разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы, одна из которых — данная. (Эти призмы равны, так как имеют равные основания и равные высоты.) Следовательно, объем V данной призмы равен половине объема параллелепипеда, т. е.

$$V=\frac{1}{2}(2S_{ABC}\cdot h)=S_{ABC}\cdot h,$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

647. Тело R состоит из тел P и Q, имеющих соответственно объемы V_1 и V_2. Выразите объем V тела R через V_1 и V_2, если: а) тела P и Q не имеют общих внутренних точек; б) тела P и Q имеют общую часть, объем которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

648. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если:

а) $a=11$, $b=12$, $h=15$; б) $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{5}$, $h=10\sqrt{10}$; в) $a=18$, $b=5\sqrt{3}$, $h=13$; г) $a=3\frac{1}{3}$, $b=\sqrt{5}$, $h=0{,}96$.

649. Найдите объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC=12$ см; б) $AC_1=3\sqrt{2}$; в) $DE=1$ см, где E — середина ребра AB.

650. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда.

651. Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см^3. Найдите его массу.

652. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1=13$ см, $BD=12$ см и $BC_1=11$ см.

653. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани и угол в 45° с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.

654. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна h.

655. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью, содержащей сторону основания, равную b, угол в 30°. Найдите объем параллелепипеда.

656. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D составляет с плоскостью основания угол в 45°, а двугранный угол A_1B_1BD равен 60°. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см.

657. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC_1=1$ м, $\angle C_1AC=45°$, $\angle C_1AB=60°$; б) $AC_1=24$ см, $\angle C_1AA_1=45°$, AC_1 составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани.

658. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 90°$, $BC=37$ см, $AB=35$ см, $AA_1=1{,}1$ дм.

§ 2. ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА

65. Объем прямой призмы.

Теорема. ***Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.***

Доказательство. Сначала докажем теорему для треугольной прямой призмы, а затем — для произвольной прямой призмы.

1. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объемом V и высотой h. Проведем такую высоту треугольника ABC (отрезок BD на рисунке 163), которая разделяет этот треугольник на два треугольника (по крайней мере одна высота треуголь-

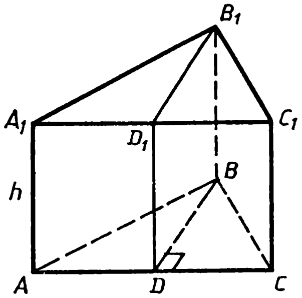


Рис. 163.

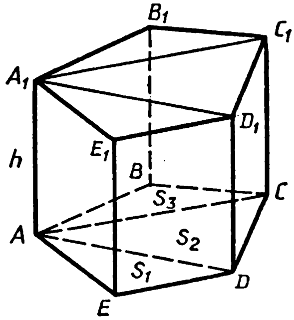


Рис. 164.

ника этому условию удовлетворяет). Плоскость BB_1D разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC. Поэтому объемы V_1 и V_2 этих призм соответственно равны $S_{ABD}\cdot h$ и $S_{BDC}\cdot h$. По свойству 2^0 объемов $V=V_1+V_2$, т. е.

$$V=S_{ABD}\cdot h+S_{BDC}\cdot h=(S_{ABD}+S_{BDC})\cdot h.$$

Таким образом,

$$V=S_{ABC}\cdot h. \qquad (1)$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h. Например, на рисунке 164 изображена пятиугольная призма, которая разбита на три прямые треугольные призмы. Выразим объем каждой треугольной призмы по формуле (1) и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен произведению $S\cdot h$. Теорема доказана.

66. Объем цилиндра. Говорят, что призма *вписана в цилиндр*, если ее основания вписаны в основания цилиндра (рис. 165), и призма *описана около цилиндра*, если ее основания описаны около оснований цилиндра (рис. 166). Ясно, что высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра.

Теорема. ***Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

Доказательство. Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму F_n (рис. 167), а в эту призму впишем цилиндр P_n (основания этого цилиндра на рисунке 167 заштрихованы). Обозначим через V и V_n объемы цилиндров P и P_n, через r_n — радиус цилиндра P_n. Так как объем

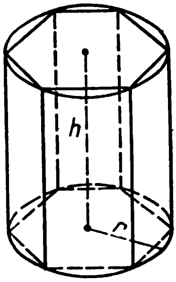


Рис. 165. Призма, вписанная в цилиндр.

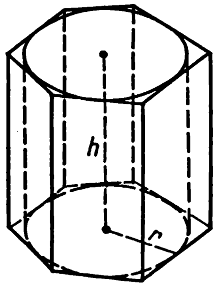


Рис. 166. Призма, описанная около цилиндра.

призмы F_n равен $S_n \cdot h$, где S_n — площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр P_n, то

$$V_n < S_n \cdot h < V. \tag{1}$$

Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P $\left(r_n = r\cos\frac{180°}{n} \to r \text{ при } n \to \infty\right)$. Поэтому объем цилиндра P_n стремится к объему цилиндра P: $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$. Из неравенств (1) сле-

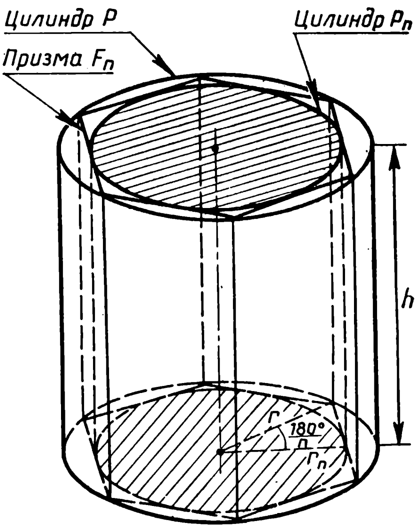


Рис. 167.

дует, что и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (2)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (2) получаем

$$V = S \cdot h.$$

Теорема доказана.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

659. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если: а) $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2; б) $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$ и двугранный угол с ребром BB_1 прямой.

660. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ и $BB_1 = BD$, где BD — высота треугольника ABC.

661. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, диагональ A_1C равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

662. Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объем призмы.

663. Найдите объем правильной n-угольной призмы, у которой каждое ребро равно a, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

664. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую ей вершину верхнего основания проведено сечение, составляющее угол в 60° с плоскостью основания. Найдите объем призмы, если сторона основания равна a.

665. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30°. Найдите объем призмы.

666. Пусть V, r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите: а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см; б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см; в) h, если $r = h$, $V = 8\pi$ см^3

667. Алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6 г/см^3).

668. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметра 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

669. Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения равна S. Найдите объем цилиндра.

670. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25 м?

671. В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, если: а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$; г) $n=8$; д) n произвольное целое число.

672. В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Найдите объем цилиндра, если высота призмы равна h.

§ 3. ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ, ПИРАМИДЫ И КОНУСА

67. Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла. Рассмотрим способ вычисления объемов тел, основанный на понятии интеграла, которое известно из курса алгебры и начал анализа.

Пусть тело T, объем которого нужно вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями α и β (рис. 168). Введем систему координат так, чтобы ось Ox была перпендикулярна к плоскостям α и β, и обозначим буквами a и b абсциссы точек пересечения оси Ox с этими плоскостями ($a<b$). Будем считать, что тело таково, что его сечение $\Phi(x)$ плоскостью, проходящей через точку с абсциссой x и перпендикулярной к оси Ox, является либо кругом, либо многоугольником для любого $x \in [a; b]$ (при $x=a$ и $x=b$ сечение может вырождаться в точку, как, например, при $x=a$ на рисунке 168). Обозначим площадь фигуры $\Phi(x)$ через $S(x)$ и предположим, что $S(x)$ — непрерывная функция на числовом отрезке $[a; b]$.

Разобьем числовой отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков точками $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n=b$ и через точки с абсциссами x_i проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox (рис. 169). Эти плоскости разбивают тело T на n тел: $T_1, T_2, ..., T_n$. Если сечение $\Phi(x_i)$ — круг, то объем тела T_i (заштрихованного на рисунке 169) приближенно равен объему цилиндра с основанием $\Phi(x_i)$ и вы-

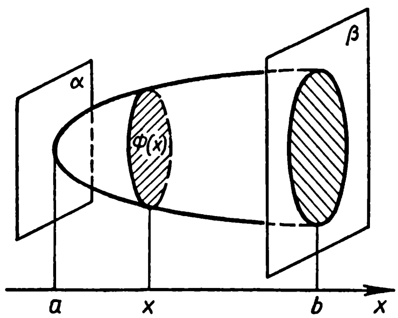


Рис. 168.

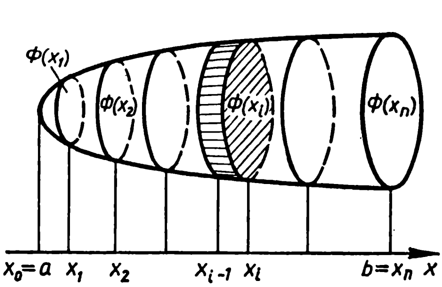


Рис. 169.

сотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Если $\Phi(x_i)$ — многоугольник, то объем тела T_i приближенно равен объему прямой призмы с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой Δx_i. И в том и в другом случае объем тела T_i приближенно равен $S(x_i) \cdot \Delta x_i$, а объем V всего тела T можно приближенно вычислить по формуле

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\, \Delta x_i. \qquad (1)$$

Приближенное значение V_n объема тела T тем точнее, чем больше n и, следовательно, меньше Δx_i. Примем без доказательства, что $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ равен объему тела, т. е. $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$. С другой стороны, сумма V_n является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на числовом отрезке $[a;\ b]$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \int\limits_a^b S(x)\, dx$. Таким образом, мы получили формулу для вычисления объема тела с помощью интеграла:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx. \qquad (2)$$

Назовем ее *основной формулой* для вычисления объемов тел.

Пользуясь этой формулой, вычислим объемы некоторых тел, изученных нами в главах III и VI.

68. Объем наклонной призмы.

Теорема. ***Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.***

Доказательство. Докажем сначала теорему для треугольной призмы, а затем — для произвольной призмы.

1. Рассмотрим треугольную призму с объемом V, площадью основания S и высотой h. Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям (рис. 170, *а*). Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь сечения. Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC (основание призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм (отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны), поэтому $A_1B_1 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1 = BC$ и $A_1C_1 = AC$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трем сторонам. Следовательно, $S(x) = S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$ и $b = h$, получаем

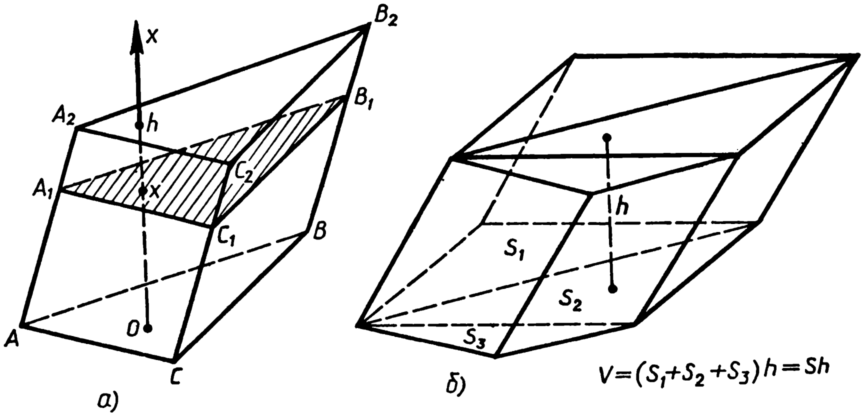


Рис. 170.

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h S\,dx=S\int_0^h dx=S\cdot x\Big|_0^h=S\cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на треугольные призмы с общей высотой h (на рисунке 170, *б* показано разбиение для пятиугольной призмы). Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен $S\cdot h$. Теорема доказана.

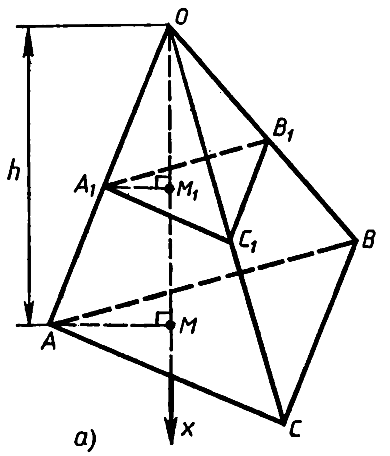
Замечание. Для наклонной призмы существует и другой способ вычисления объема, а именно: объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их. Коротко говорят так: *объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения* (см. задачу 682).

69. Объем пирамиды.

Теорема. ***Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Доказательство. Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объемом V, площадью основания S и высотой h. Проведем ось Ox (рис. 171, *а*, где OM — высота пирамиды), и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через x абсциссу точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через



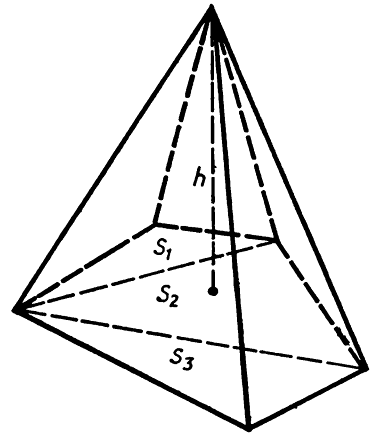


Рис. 171.

$S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \| AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OAB$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OM_1}{OM}=\frac{x}{h}$. Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{x}{h}$ и $\frac{C_1A_1}{CA}=\frac{x}{h}$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$. Следовательно, $\frac{S(x)}{S}=\left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$.

Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}S\cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной пирамиды с высотой h и площадью основания S. Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой h (на рисунке 171, *б* показано разбиение для пятиугольной пирамиды). Выразим объем каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований

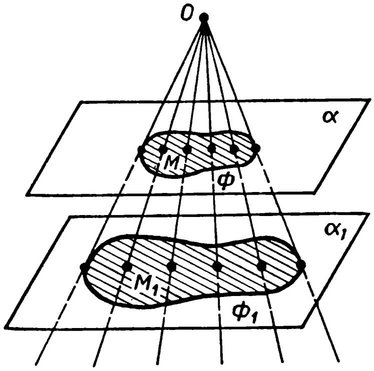


Рис. 172.

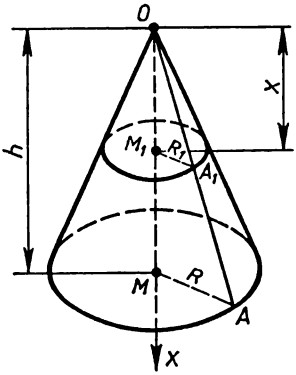


Рис. 173.

треугольных пирамид, т. е. площадь S основания исходной пирамиды. Таким образом, объем исходной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Объем V усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле*

$$V=\frac{1}{3}h\,(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1}). \tag{3}$$

Пользуясь тем, что усеченная пирамида получается из обычной пирамиды путем отсечения от нее меньшей пирамиды и, следовательно, объем усеченной пирамиды равен разности объемов данной пирамиды и отсеченной, выведите эту формулу самостоятельно.

З а м е ч а н и е. В ходе доказательства теоремы об объеме пирамиды мы установили, что в сечении треугольной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания, получается треугольник, подобный основанию. Оказывается, имеет место и более общее свойство. Рассмотрим какую-нибудь фигуру Ф, лежащую в плоскости α, и точку O, не лежащую в этой плоскости. Проведем через каждую точку M фигуры Ф прямую OM и рассмотрим множество $Ф_1$ точек пересечения этих прямых с плоскостью α_1, параллельной плоскости α (рис. 172). Можно доказать, что фигура $Ф_1$ подобна фигуре Ф.

Это свойство широко используется на практике. Например, на нем основано устройство кинопроектора, фотоаппарата, телескопа и других оптических приборов.

70. Объем конуса.

Теорема. ***Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Доказательство. Рассмотрим конус с объемом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введем ось Ox так, как показано на рисунке 173 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 55). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — абсцисса точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что $\frac{OM_1}{OM}=\frac{R_1}{R}$, или $\frac{x}{h}=\frac{R_1}{R}$, откуда $R_1=\frac{xR}{h}$.

Так как $S(x)=\pi R_1^2$, то $S(x)=\frac{\pi R^2}{h^2}x^2$.

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V=\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана.

Следствие. *Объем V усеченного конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле*

$$V=\frac{1}{3}h\left(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1}\right). \qquad (4)$$

Пользуясь рисунком 174, выведите эту формулу самостоятельно.

ЗАДАЧИ

673. Сечение тела, изображенного на рисунке 175, плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку с абсциссой x, является квадратом, сторона которого равна $\frac{1}{x}$. Найдите объем этого тела.

674. Фигура, заштрихованная на рисунке 176, вращается вокруг оси Ox. Найдите объем полученного тела.

675. Фигура, заштрихованная на рисунке 177, вращается вокруг оси Oy. Найдите объем полученного тела.

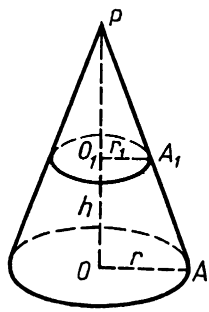


Рис. 174.

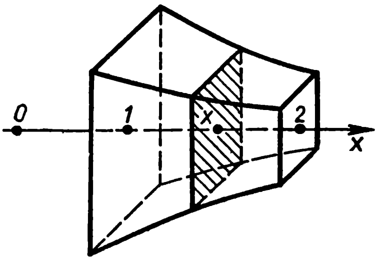


Рис. 175.

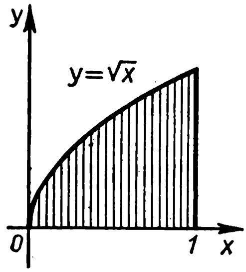


Рис. 176.

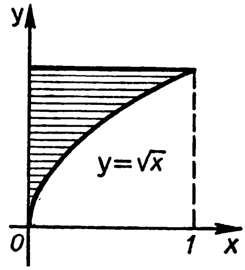


Рис. 177.

676. Найдите объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60°.

677. Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB=$ $=BC=CA=a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1<BA_1$, $AB_1=b$, двугранный угол с ребром AB прямой.

678. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной m. Вершина A_1 проектируется в центр этого основания, а ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

679. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=7$ см и $AC=24$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите объем призмы, если ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°.

680. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ. Найдите объем параллелепипеда.

681. Все грани параллелепипеда — равные ромбы, диагонали которых равны 6 см и 8 см. Найдите объем параллелепипеда.

682. Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их.

683. Найдите объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2.

684. Найдите объем пирамиды с высотой h, если: а) $h=2$ м, а основанием служит квадрат со стороной 3 м; б) $h=2{,}2$ м, а основанием служит треугольник ABC, в котором $AB=20$ см, $BC=13{,}5$ см, $\angle ABC=30°$.

685. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

686. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром l, если: а) боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ; б) боковое ребро составляет с прилежащей стороной основания угол α; в) плоский угол при вершине равен β.

687. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен φ, а сторона основания равна a. Найдите объем пирамиды.

688. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если: а) ее высота равна H, а двугранный угол при основании равен β; б) сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α.

689. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем пирамиды.

690. Найдите объем и площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 13 см, а диаметр круга, вписанного в основание, равен 6 см.

691. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC=13$ см, $AC=10$ см. Каждое боковое ребро пирамиды образует с ее высотой угол в 30°. Вычислите объем пирамиды.

692. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и b. Каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

693. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю b и углом α между диагоналями. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите этот угол, если объем пирамиды равен V.

694. Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см. Каждый из двугранных углов при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 1,5 см.

695. Найдите объем треугольной пирамиды $SABC$, если: а) $\angle CAB = 90°$, $BC=c$, $\angle ABC=\varphi$ и каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол θ; б) $AB=12$ см, $BC=CA=10$ см и двугранные углы при основании равны 45°; в) боковые ребра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c.

696. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник, в котором $AB=20$ см, $AC=29$ см, $BC=21$ см. Грани DAB и DAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол в 60°. Найдите объем пирамиды.

697. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны a и $0{,}5a$, апофема боковой грани равна a. Найдите объем усеченной пирамиды.

698. Основания усеченной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n $(m>n)$. Две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол φ. Найдите объем усеченной пирамиды.

699. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 дм и 18 дм. Каждое боковое ребро равно 25 дм. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания и делящей боковое ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды.

700. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 4 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 15 см^2. Найдите объем усеченной пирамиды.

701. Пусть h, r и V — соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите: а) V, если $h=3$ см, $r=1{,}5$ см; б) h, если $r=4$ см, $V=48\pi$ см^3; в) r, если $h=m$, $V=p$.

702. Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

703. Найдите объем конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P.

704. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

705. Найдите объем конуса, если его образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения равна 60 см^2.

706. Высота конуса равна 12 см, а его объем равен 324π см^3. Найдите угол сектора, который получится, если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость.

707. Площадь полной поверхности конуса равна 45π дм^2. Развернутая на плоскость боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом в 60°. Найдите объем конуса.

708. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем усеченного конуса.

709. В усеченном конусе известны высота h, образующая l и площадь S боковой поверхности. Найдите площадь осевого сечения и объем усеченного конуса.

§ 4. ОБЪЕМ ШАРА И ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

71. Объем шара.

Теорема. ***Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.***

Доказательство. Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 178). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$,

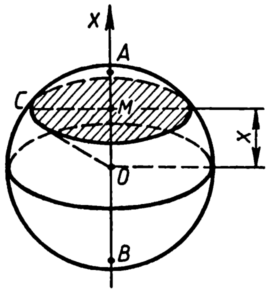


Рис. 178.

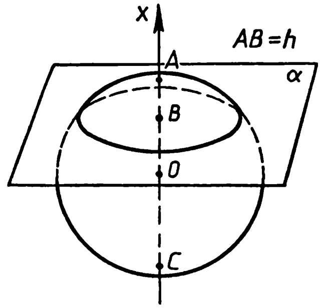


Рис. 179. Шаровой сегмент.

где x — абсцисса точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим:

$$r=\sqrt{OC^2-OM^2}=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Так как $S(x)=\pi r^2$, то

$$S(x)=\pi(R^2-x^2). \qquad (1)$$

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R\leqslant x\leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=-R$, $b=R$, получим

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx=\pi R^2\int_{-R}^{R}dx-\pi\int_{-R}^{R}x^2dx=$$
$$=\pi R^2x\Big|_{-R}^{R}-\frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорема доказана.

72. Объем шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

а) *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. На рисунке 179 секущая плоскость α, проходящая через точку B, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется *основанием* каждого из этих сегментов, а длины отрезков AB и BC диаметра AC, перпендикулярного к секущей плоскости, называются *высотами* сегментов.

Если радиус шара равен R, а высота сегмента равна h (на рисунке 179 $h=AB$), то объем V шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right). \qquad (2)$$

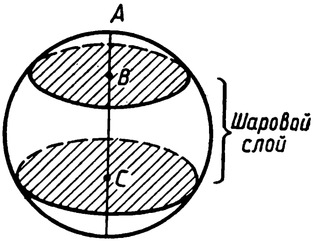


Рис. 180.

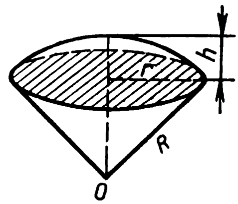


Рис. 181. Шаровой сектор.

Действительно, проведем ось Ox перпендикулярно к плоскости α (рис. 179). Тогда площадь $S(x)$ произвольного сечения шарового сегмента плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, выражается формулой (1) при $R-h \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=R-h$, $b=R$, получим

$$V=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right).$$

б) *Шаровым слоем* называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 180). Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются *основаниями* шарового слоя, а расстояние между плоскостями — *высотой* шарового слоя.

Объем шарового слоя можно вычислить как разность объемов двух шаровых сегментов. (Так, на рисунке 180 объем шарового слоя равен разности объемов шаровых сегментов, высоты которых равны AC и AB.)

в) *Шаровым сектором* называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис. 181). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен R, а высота шарового сегмента равна h, то объем V шарового сектора вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2h. \qquad (3)$$

Выведите эту формулу самостоятельно.

73. Площадь сферы. В п. 62 мы привели без доказательства формулу для вычисления площади S сферы радиуса R:

$$S=4\pi R^2. \qquad (4)$$

Выведем эту формулу, пользуясь формулой для объема шара.

Рассмотрим сферу радиуса R с центром в точке O и описанный около нее многогранник, имеющий n граней. Занумеруем грани в произвольном порядке и обозначим через S_i площадь i-й грани ($i=1, 2, ..., n$). Соединив центр O сферы отрезками со всеми вершинами многогранника, получим n пирамид с общей вершиной O, основаниями которых являются грани многогранника, а высотами — радиусы сферы, проведенные в точки касания граней многогранника со сферой. Следовательно, объем i-й пирамиды равен $\frac{1}{3}S_iR$, а объем V_n всего описанного многогранника равен:

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}S_iR=\frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n}S_i=\frac{1}{3}RP_n,$$

где $P_n=\sum\limits_{i=1}^{n}S_i$ — площадь поверхности многогранника. Отсюда получаем

$$P_n=\frac{3V_n}{R}. \qquad (5)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать n таким образом, чтобы наибольший размер каждой грани описанного многогранника стремился к нулю. При этом объем V_n описанного многогранника будет стремиться к объему шара. В самом деле, если наибольший размер каждой грани описанного многогранника не превосходит δ, то описанный многогранник содержится в шаре радиуса $R+\delta$ с центром в точке O. С другой стороны, описанный многогранник содержит исходный шар радиуса R. Поэтому

$$\frac{4}{3}\pi R^3<V_n<\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3.$$

Так как $\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3\to\frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta\to 0$, то и

$$V_n\to\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ при } \delta\to 0 \ (n\to\infty).$$

Переходя к пределу в равенстве (5), получим

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3V_n}{R}=\frac{3}{R}\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{3}{R}\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^2.$$

По определению площади сферы $S=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$, следовательно,

$$S=4\pi R^2.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

710. Пусть V — объем шара радиуса R, а S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V, если $R=4$ см; б) R и S, если $V=113{,}04$ см^3; в) R и V, если $S=64\pi$ см^2.

711. Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли, считая их шарами.

712. Шар и цилиндр имеют равные объемы, а диаметр шара равен диаметру основания цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

713. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

714. В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 4 равных металлических шарика диаметром 1 см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?

715. Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см?

716. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему одного шара?

717. Найдите объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

718. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к диаметру. Найдите объем получившегося шарового слоя, если радиус шара равен R.

719. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части 6 см и 12 см. Найдите объемы двух полученных частей шара.

720. Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности основания соответствующего шарового сегмента равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

721. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.

722. Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным 6375 км.)

723. Сколько кожи пойдет на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см? (На швы добавить 8% от площади поверхности мяча.)

724. Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ VII

1. Каким соотношением связаны объемы V_1 и V_2 тел P_1 и P_2, если: а) тело P_1 содержится в теле P_2; б) каждое из тел P_1 и P_2 составлено из n кубов с ребром 1 см?
2. Какую часть объема данной прямой треугольной призмы составляет объем треугольной призмы, отсеченной от данной плоскостью, проходящей через средние линии оснований?
3. Изменится ли объем цилиндра, если диаметр его основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 4 раза?
4. Как изменится объем правильной пирамиды, если ее высоту увеличить в n раз, а сторону основания уменьшить в n раз?
5. Основаниями двух пирамид с равными высотами являются четырехугольники с соответственно равными сторонами. Равны ли объемы этих пирамид?
6. Как относятся объемы двух конусов, если их высоты равны, а отношение радиусов оснований равно 2?
7. Из каких тел состоит тело, полученное вращением равнобедренной трапеции вокруг большего основания?
8. Один конус получен вращением неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов, а другой конус — вращением вокруг другого катета. Равны ли объемы этих конусов?
9. Диаметр одного шара равен радиусу другого. Чему равно отношение: а) радиусов этих шаров; б) объемов шаров?
10. Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?
11. Во сколько раз объем шара, описанного около куба, больше объема шара, вписанного в этот же куб?
12. Как изменится площадь сферы, если ее радиус: а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза?
13. Отношение объемов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?
14. В каком отношении находятся объемы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как $m^2 : n^2$?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

725. Площади трех попарно смежных граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2 и S_3. Выразите объем этого параллелепипеда через S_1, S_2, S_3 и вычислите его при $S_1 = 6$ дм^2, $S_2 = 12$ дм^2, $S_3 = 18$ дм^2.

726. В прямоугольном параллелепипеде диагонали трех граней, выходящие из одной вершины, равны 7 см, 8 см и 9 см. Найдите объем параллелепипеда.

727. Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равно a. Сечение, проведенное через две стороны разных оснований, является квадратом с площадью Q. Найдите объем параллелепипеда.

728. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол основания равен 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол в 45° с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.

729. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали BD_1 и A_1C взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см, $AB = 3$ см. Найдите объем параллелепипеда.

730. В прямой призме, основанием которой является прямоугольный треугольник, пять ребер равны a, а остальные четыре ребра равны друг другу. Найдите объем призмы.

731. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен 3 м^3, а наименьшая и наибольшая из площадей боковых граней равны 3 м^2 и $3\sqrt{5}$ м^2. Найдите длины ребер призмы.

732. Диагональ боковой грани правильной труугольной призмы равна d и составляет угол φ с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

733. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

734. На трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что объем призмы, боковыми ребрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

735. Площади боковых граней наклонной треугольной призмы пропорциональны числам 20, 37, 51. Боковое ребро равно 0,5 дм, а площадь боковой поверхности равна 10,8 дм^2. Найдите объем призмы.

736. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ, а не лежащая в этой грани вершина основания находится на расстоянии m от нее.

737. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с основанием угол φ, а середина этого ребра удалена от основания пирамиды на расстояние, равное m. Найдите объем пирамиды.

738. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол, ребром которого является боковое ребро пирамиды, равен 2φ. Найдите объем пирамиды.

739. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а сторона основания равна a. Найдите объем пирамиды.

740. Основанием пирамиды является треугольник, два угла которого равны φ_1 и φ_2. Высота пирамиды равна h, а каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ_3. Найдите объем пирамиды.

741. Основанием четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, является параллелограмм. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом α. Попарно равные противоположные боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы β и γ. Найдите объем пирамиды.

742. Основанием пирамиды является ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют тупой двугранный угол φ. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания двугранные углы θ. Найдите объем пирамиды.

743. Два ребра тетраэдра равны b, а остальные четыре ребра равны a. Найдите объем тетраэдра, если ребра длины b: а) имеют общие точки; б) не имеют общих точек.

744. В усеченной пирамиде соответственные стороны оснований относятся как 2:5. В каком отношении делится ее объем плоскостью, проходящей через середину высоты этой пирамиды параллельно основаниям?

745. Найдите объем цилиндра, если: а) площадь боковой поверхности равна S, а площадь основания равна Q; б) осевое сечение является квадратом, а высота равна h; в) осевое сечение является квадратом, а площадь полной поверхности равна S.

746. Докажите, что объемы двух цилиндров, у которых площади боковых поверхностей равны, относятся как их радиусы.

747. Конический бак имеет глубину 3 м, а его круглый верх имеет радиус 1,5 м. Сколько литров жидкости он вмещает?

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГОГРАННИКИ, ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

748. В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна a, а острый угол между его диагоналями равен φ_1. Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания двугранный угол φ_2. Найдите объем конуса.

749. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом φ. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол θ. Найдите объем конуса.

750. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объемов цилиндра и шара.

751. Найдите объем конуса, если радиус его основания равен 6 дм, а радиус вписанной в конус сферы равен 3 дм.

752. В конус, радиус основания которого равен r, а образующая равна l, вписана сфера. Найдите длину линии, по которой сфера касается боковой поверхности конуса.

753. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны r и r_1, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

754. В правильную треугольную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан шар объема V. Найдите объем пирамиды.

755. В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, вписан шар. Найдите объем шара, если каждая боковая грань пирамиды составляет с основанием угол β.

756. В сферу радиуса R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого составляет с основанием угол α. Найдите объем цилиндра.

757. В шар вписан цилиндр, в котором угол между диагоналями осевого сечения равен α. Образующая цилиндра равна l. Найдите объем шара.

758. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, а высота равна H. Найдите площадь поверхности и объем шара.

759. В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите площадь поверхности и объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α.

760. В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол β. Найдите площадь поверхности и объем шара.

761. Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которой присоединены равные шаровые сегменты. Радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота сегмента равна 0,5 м. Какой длины должна быть образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны равнялась 50 м^3?

762. Куб, шар, цилиндр и конус (у двух последних тел диаметры оснований равны высоте) имеют равные площади поверхностей. Какое из этих тел имеет наибольший объем и какое — наименьший?

763. Будет ли плавать в воде полый медный шар, диаметр которого равен 10 см, а толщина стенки: а) 2 мм; б) 1,5 мм? (Плотность меди 8,9 г/см^3.)

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

764. Даны две скрещивающиеся прямые, угол между которыми равен 90°. Найдите множество середин всех отрезков данной длины d, концы которых лежат на этих прямых.

765. Дан тетраэдр, все ребра которого равны. Докажите, что периметры фигур, которые получаются при пересечении этого тетраэдра плоскостями, параллельными двум противоположным ребрам, равны.

766. Докажите, что сумма квадратов двух противоположных ребер тетраэдра вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих соответственно середины остальных противоположных ребер.

767. Известно, что из любого равностороннего треугольника можно склеить тетраэдр, перегибая его по трем средним линиям и склеивая соответствующие части его сторон (см. рис. 88). Какому условию должны удовлетворять углы произвольного треугольника, чтобы из него указанным способом можно было склеить тетраэдр?

768. Найдите множество оснований всех перпендикуляров, проведенных из данной точки A, не лежащей на прямой BC, к плоскостям, проходящим через эту прямую.

769. Докажите, что если одна из высот тетраэдра проходит через точку пересечения высот противоположной грани, то и остальные высоты этого тетраэдра проходят через точки пересечения высот противоположных граней.

770. Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O равны 90°. Докажите, что площадь треугольника AOB равна среднему геометрическому площадей треугольников ABC и O_1AB, где O_1 — проекция точки O на плоскость ABC.

771. Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).

772. Сколько существует плоскостей, каждая из которых равноудалена от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости?

773. Докажите, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения равноудалены от ребра.

774. Докажите, что сечением куба может быть правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник, но не может быть правильный пятиугольник и правильный многоугольник с числом сторон более шести.

775. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.

776. Разбейте куб на шесть равных тетраэдров.

777. Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удаленных от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

778. Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же и даже больших размеров.

779. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и параллельной плоскости боковой грани.

780. Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см?

781. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что пересечение тетраэдров AB_1CD_1 и C_1BA_1D есть правильный октаэдр.

782. Докажите, что из конечного числа попарно различных кубов нельзя составить прямоугольный параллелепипед.

783. Внутри куба с ребром 1 см расположена ломаная, причем любая плоскость, параллельная любой грани куба, пересекает ее не более чем в одной точке. Докажите, что длина ломаной меньше 3 см. Докажите также, что можно построить ломаную, обладающую указанным свойством, длина которой сколь угодно мало отличается от 3 см.

784. Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма числа граней и вершин больше числа ребер на 2 (теорема Эйлера).

785. Докажите, что центры граней правильного додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра.

786. Докажите, что центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

787. В правильном треугольнике ABC сторона равна a. Отрезок AS длины a перпендикулярен к плоскости ABC. Найдите расстояние и угол между прямыми AB и SC.

788. В правильном треугольнике ABC сторона равна a. На сонаправленных лучах BD и CE, перпендикулярных к плоскости ABC, взяты точки D и E так, что $BD=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $CE=a\sqrt{2}$. Докажите, что треугольник ADE прямоугольный, и найдите угол между плоскостями ABC и ADE.

789. Используя векторы, докажите, что сумма квадратов четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его ребер.

790. Основание ABC тетраэдра $OABC$ прозрачное, а все остальные грани зеркальные. Все плоские углы при вершине O прямые. Докажите, что луч света, вошедший в тетраэдр через основание ABC под произвольным углом к нему, отразившись от граней, выйдет в противоположном направлении по отношению к входящему лучу. (На этом свойстве основано устройство уголкового отражателя, который, в частности, был запущен на Луну для измерения расстояния до нее с помощью лазера.)

791. Из точки A исходят четыре луча AB, AC, AD и AE так, что $\angle BAC=60°$, $\angle BAD=\angle DAC=45°$, а луч AE перпендикулярен к плоскости ABD. Найдите угол CAE.

792. Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны.

793. Три боковые ребра тетраэдра равны друг другу. Докажите, что прямая, образующая равные углы с этими ребрами, перпендикулярна к плоскости основания.

794. Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O прямые. Докажите, что проекция вершины O на плоскость ABC есть точка пересечения высот треугольника ABC.

795. Из точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды. Докажите, что сумма их квадратов не зависит от положения этих хорд.

796. Найдите множество центров всех сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую, не пересекающую шар.

797. Найдите множество всех точек, из которых можно провести к данной сфере три попарно перпендикулярные касательные прямые.

798. В тетраэдр с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар радиуса R. Докажите, что $\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.

799. Какому условию должны удовлетворять радиусы трех шаров, попарно касающихся друг друга, чтобы к ним можно было провести общую касательную плоскость?

800. На плоскости лежат четыре шара радиуса R, причем три из них попарно касаются друг друга, а четвертый касается двух из них. На эти шары положены сверху два шара меньшего радиуса r, касающиеся друг друга, причем каждый из них касается трех больших шаров. Найдите радиус маленьких шаров.

801. На плоскости лежат три шара радиуса R, попарно касающиеся друг друга. Основание конуса лежит в указанной плоскости, а данные шары касаются его извне. Высота конуса равна λR. Найдите радиус его основания.

802. Плоскости AB_1C_1 и A_1BC разбивают правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите отношение объемов этих частей.

803. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где a и b — противоположные ребра, а φ и c — соответственно угол и расстояние между ними.

804. Докажите, что плоскость, проходящая через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра, разделяет его на две части, объемы которых равны.

805. Основанием пирамиды $OABCD$ является параллелограмм $ABCD$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через прямую AB и среднюю линию грани OCD?

806. Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них взят отрезок AB, а на двух других — точки C и D соответственно. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ не зависит от выбора точек C и D.

807. Точки E и F — середины ребер DC и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 см. Найдите объем тетраэдра AD_1EF.

808. В двух параллельных плоскостях взяты два многоугольника. Их вершины соединены отрезками так, что у полученного многогранника все боковые грани — трапеции, треугольники и параллелограммы. Докажите, что

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S_3),$$

где V — объем многогранника, h — его высота, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения плоскостью, параллельной плоскостям оснований и равноудаленной от них.

809. Два равных цилиндра, высоты которых больше их диаметров, расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом и точка пересечения осей равноудалена от оснований цилиндров. Найдите объем общей части этих цилиндров, если радиус каждого из них равен 1 см.

810. Вокруг данного шара описан конус с углом α при вершине осевого сечения. При каком значении α конус имеет наименьший объем?

811. В конус вписан шар. Докажите, что отношение объемов конуса и шара равно отношению площадей полной поверхности конуса и сферы, являющейся границей шара.

812. Правильная четырехугольная пирамида, у которой сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину параллельно стороне основания. Найдите объем полученного тела вращения.

813. Шар образован вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр. При этом поверхность, образованная вращением некоторой хорды, один конец которой совпадает с концом данного диаметра, разбивает шар на две равные по объему части. Найдите косинус угла между этой хордой и диаметром.

814. Все высоты тетраэдра пересекаются в точке H. Докажите, что точка H, центр O описанной сферы и точка G пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками пересечения медиан противоположных граней тетраэдра, лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем точки O и H симметричны относительно точки G.

815. Дан тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения медиан всех граней, основания высот тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, в отношении 2:1, считая от вершины, лежат на одной сфере, центр которой расположен на прямой Эйлера (сфера Эйлера).

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

При изучении стереометрии важное значение имеет изображение пространственных фигур на чертеже. Мы познакомимся здесь с некоторыми правилами построения изображений. С этой целью введем сначала понятие параллельной проекции фигуры, а затем с его помощью понятие изображения фигур и рассмотрим примеры изображений плоских и пространственных фигур.

1. Параллельная проекция фигуры. Пусть π — некоторая плоскость, а l — пересекающая эту плоскость прямая. Отметим произвольную точку A_0 пространства. Если точка A_0 не лежит на прямой l, то проведем через A_0 прямую, параллельную прямой l, и обозначим через A точку пересечения этой прямой с плоскостью π (рис. 182). Если же A_0 — точка прямой l, то обозначим через A точку пересечения прямой l с плоскостью π. Точка A называется *проекцией точки* A_0 *на плоскость* π *при проектировании параллельно прямой* l. Обычно предполагается, что плоскость π и прямая l заданы, поэтому точку A кратко называют *параллельной проекцией точки* A_0.

Пусть F_0 — плоская или пространственная фигура. Параллельные проекции всех точек фигуры F_0 образуют некоторую фигуру F на плоскости π (см. рис. 182). Фигура F называется *параллельной проекцией фигуры* F_0. Говорт также, что фигура F получена из фигуры F_0 *параллельным проектированием*.

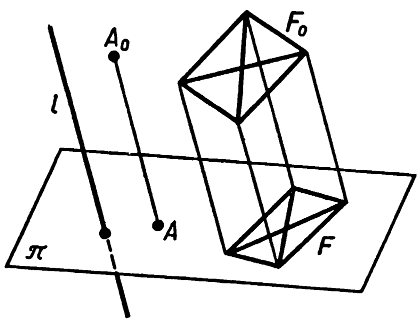


Рис. 182.

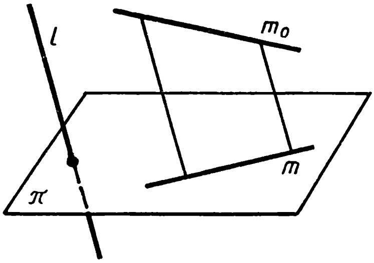


Рис. 183. Проекция прямой m_0 есть прямая m.

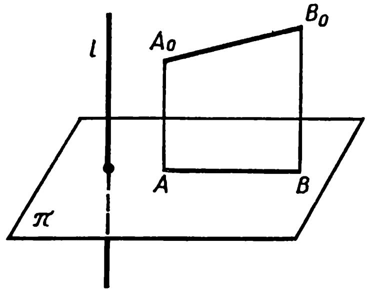


Рис. 184. Проекция отрезка A_0B_0 есть отрезок AB.

Сформулируем основные свойства параллельного проектирования при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны прямой l.

1^0. *Проекция прямой есть прямая* (рис. 183).

2^0. *Проекция отрезка есть отрезок* (рис. 184).

3^0. *Проекции параллельных отрезков — параллельные отрезки* (рис. 185) *или отрезки, принадлежащие одной прямой.*

4^0. *Проекции параллельных отрезков, а также проекции отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам* (рис. 186).

Из свойства 4^0 следует, что *проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.*

2. Изображение фигуры. Выберем некоторую плоскость π и назовем ее *плоскостью изображений.* Затем возьмем прямую l, пересекающую плоскость π, и спроектируем данную фигуру F_0 на плоскость π параллельно прямой l. Полученную плоскую фигуру F' или любую ей подобную фигуру F на плоскости π будем называть *изображением фигуры* F_0 (рис. 187). Построенное таким образом изображение фигуры соответствует зрительному восприя-

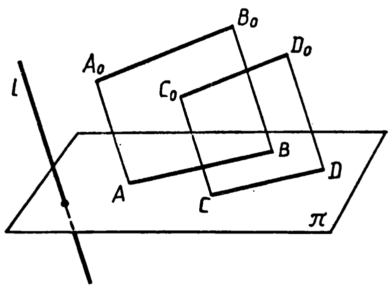


Рис. 185. Проекции параллельных отрезков A_0B_0 и C_0D_0 есть параллельные отрезки AB и CD.

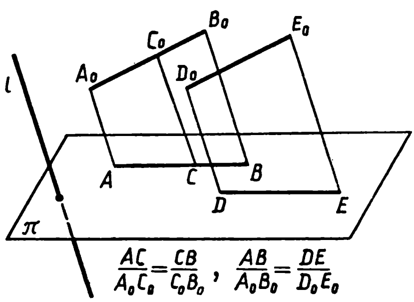


Рис. 186.

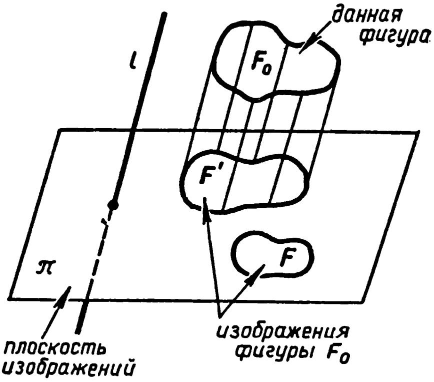


Рис. 187.

тию фигуры при рассмотрении ее из точки, расположенной далеко от нее.

Выбирая различные плоскости изображений и различные направления проектирования (т. е. различные прямые l), будем получать различные изображения данной фигуры. Обычно берется такое изображение фигуры, которое является наиболее наглядным и удобным для выполнения на нем дополнительных построений. Это изображение и воспроизводится на чертеже.

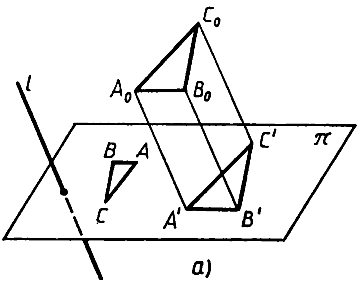
3. Изображение плоских фигур. Построение изображений фигур основано на свойствах параллельного проектирования, сформулированных в п. 1. Рассмотрим некоторые примеры изображений плоских фигур.

Отрезок. По свойству 2^0 проекция отрезка есть отрезок, поэтому изображением отрезка является отрезок. Ясно, что *произвольный отрезок на чертеже можно считать изображением данного отрезка.*

При рассмотрении изображений треугольника, параллелограмма и т. д. будем считать, что плоскости этих фигур не параллельны направлению проектирования (прямой l).

Треугольник.Пусть $A_0B_0C_0$ — треугольник, расположенный в пространстве, A', B' и C' — проекции точек A_0, B_0 и C_0 на плоскость π (рис. 188, *а*). Так как проекция отрезка есть отрезок, то треугольник $A'B'C'$ (а также любой треугольник ABC, подобный треугольнику $A'B'C'$) является изображением треугольника $A_0B_0C_0$. *В качестве изображения данного треугольника на чертеже можно брать произвольный треугольник.* Например, на рисунке 188, *б* изображением прямоугольного равнобедренного треугольника $A_0B_0C_0$ служит разносторонний треугольник ABC.

Параллелограмм. Так как проекциями равных параллельных отрезков являются равные параллельные отрезки (свойства 3^0 и 4^0 п. 1), то изображением параллелограмма является параллело-



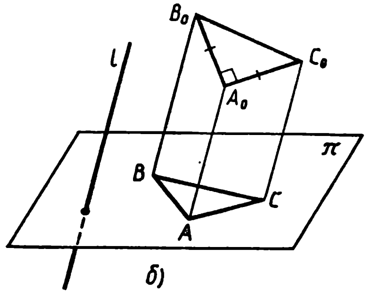


Рис. 188.

грамм. Как и в случае треугольника, произвольный параллелограмм на чертеже можно считать изображением данного параллелограмма, в частности изображением данного прямоугольника, ромба, квадрата (рис. 189).

Трапеция. Нетрудно видеть, что изображением трапеции $A_0B_0C_0D_0$ с основаниями A_0B_0 и C_0D_0 является трапеция $ABCD$, причем по свойству 4^0 п. 1

$$\frac{AB}{A_0B_0}=\frac{CD}{C_0D_0}, \tag{1}$$

т. е. основания изображения трапеции пропорциональны основаниям самой трапеции. Поэтому не любую трапецию можно считать изображением данной трапеции. Укажем способ построения изображения данной трапеции $A_0B_0C_0D_0$. С этой целью рассмотрим вспомогательный отрезок C_0E_0, параллельный отрезку A_0D_0 и разбивающий трапецию на параллелограмм $A_0D_0C_0E_0$ и треугольник $B_0C_0E_0$ (рис. 190, *а*). В качестве изображения параллелограмма $A_0D_0C_0E_0$ возьмем произвольный параллелограмм $ADCE$ (рис. 190, *б*). Так как $AE=DC$, то пропорцию (1) можно записать так:

$$\frac{AB}{A_0B_0}=\frac{AE}{C_0D_0}. \tag{2}$$

Используя пропорцию (2), нетрудно построить теперь точку B — изображение точки B_0. Это построение выполнено на рисунке 190, *б*, где $AA_2=C_0D_0$, $AA_1=A_0B_0$. Построенная трапеция $ABCD$ является изображением трапеции $A_0B_0C_0D_0$ (для нее выполнена пропорция (1)).

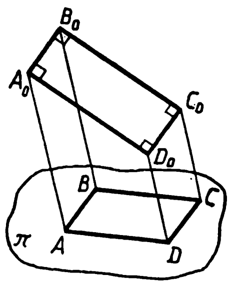


Рис. 189. $A_0B_0C_0D_0$ — прямоугольник. $ABCD$ — параллелограмм.

Отметим, что изображением равнобедренной трапеции $A_0B_0C_0D_0$ может быть и неравнобедренная трапеция $ABCD$. При этом изображением оси симметрии

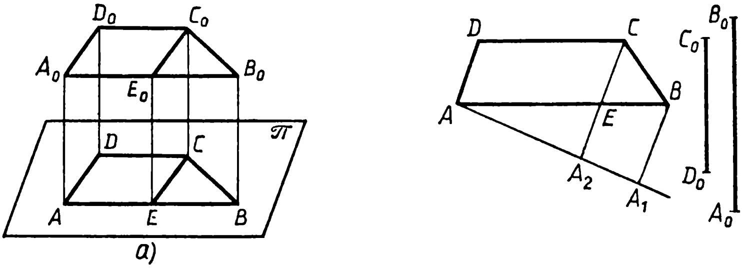


Рис. 190.

равнобедренной трапеции является прямая EF, проходящая через середины оснований AD и BC, и, следовательно, отрезок EF является изображением высоты равнобедренной трапеции (рис. 191).

Окружность. Параллельная проекция окружности называется *эллипсом* (рис. 192). Окружность является частным случаем эллипса, поскольку ее проекция на плоскость, параллельную плоскости окружности, есть окружность, равная данной (объясните почему). Из свойств параллельного проектирования следует, что проекция центра O данной окружности является центром симметрии эллипса (точка O' на рисунке 192). Эту точку называют *центром эллипса.*

Таким образом, изображением окружности является эллипс, причем изображением центра окружности является центр эллипса.

Эллипс используется при изображении на плоскости цилиндров, конусов, усеченных конусов и сфер (см. главы VI и VII). Эллипс часто встречается и в различных вопросах естествознания. Например, движение планет вокруг Солнца происходит по орбитам, близким к эллипсам.

4. Изображение пространственных фигур. Рассмотрим теперь изображения на плоскости некоторых многогранников при условии, что ни одна из плоскостей граней не параллельна направлению проектирования. При этом под изображением многогранника будем понимать фигуру, состоящую из проекций всех его ребер.

Тетраэдр. Пусть $A_0B_0C_0D_0$ — произвольный тетраэдр, A, B, C и D — параллельные проекции его вершин на плоскость изображений (рис. 193). Отрезки AB, BC, CA, AD, BD, CD служат сторонами и диагоналями четырехугольника $ABCD$. Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.

Можно доказать, что фигура, состоящая из сторон и диагоналей лю-

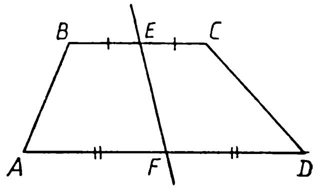


Рис. 191.

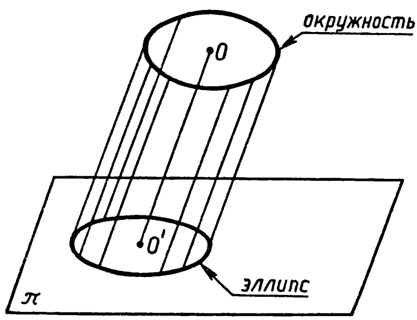


Рис. 192.

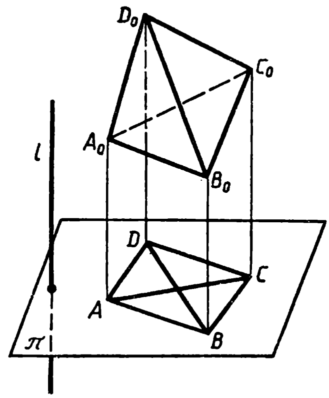


Рис. 193.

бого (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования (рис. 194, *а, б, в*). (На этих рисунках невидимые ребра изображены штриховыми линиями.)

Параллелепипед. Для построения изображения произвольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ заметим, что точки A_0, B_0, D_0 и A_0' являются вершинами тетраэдра $A_0B_0D_0A_0'$ (рис. 195). Поэтому в качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырехугольника $ABDA'$. Другими словами, любые три отрезка AB, AD и AA' плоскости изображения с общим концом A, никакие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением ребер A_0B_0, A_0D_0 и A_0A_0' параллелепипеда. Но тогда изображения остальных ребер строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами, и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами. На рисунке 195 параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ является изображением параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$.

Пирамида. Изображение основания пирамиды строят по описанным в п. 3 правилам, а за изображение вершины можно при-

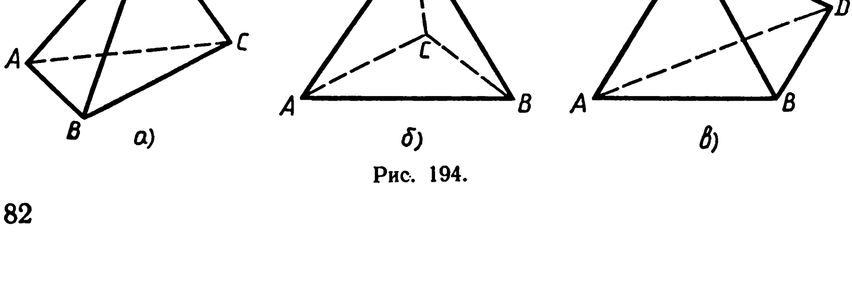


Рис. 194.

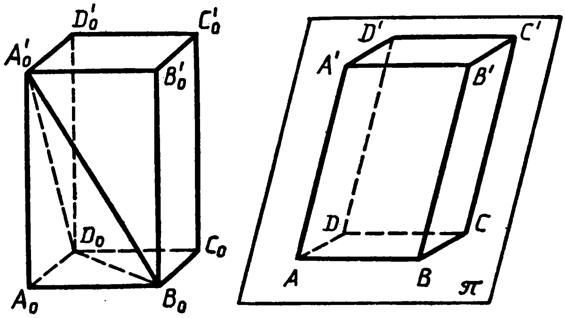


Рис. 195.

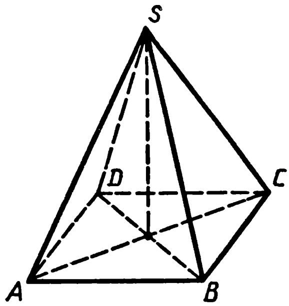


Рис. 196.

нять любую точку, не принадлежащую сторонам изображения основания. На рисунке 196 дано изображение правильной пирамиды $S_0A_0B_0C_0D_0$, основанием которой служит квадрат $A_0B_0C_0D_0$. Изображением основания является параллелограмм $ABCD$.

З а м е ч а н и е. Частным случаем параллельной проекции фигуры является прямоугольная проекция (см. п. 21). Прямоугольные проекции широко используются в техническом черчении. Какая-либо деталь обычно проектируется на две плоскости — горизонтальную и вертикальную, и обе проекции изображаются в плоскости чертежа. На рисунке 197 изображены две проекции цилиндрической втулки.

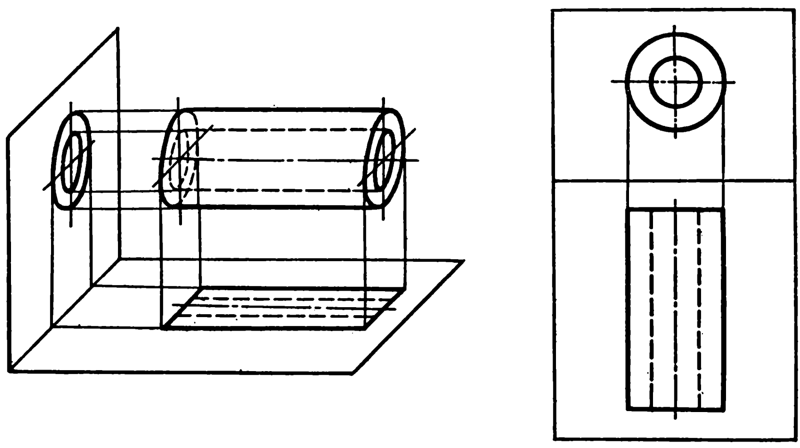


Рис. 197.

ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ

Аксиомы геометрии представляют собой исходные положения, на основе которых строится вся геометрия, т. е. путем логических рассуждений устанавливаются свойства геометрических фигур. В аксиомах выражены свойства основных геометрических понятий. К таковым в нашем курсе относятся понятия точки, прямой и плоскости, понятие «лежать между» для точек прямой и понятие наложения. Кроме того, в аксиомах геометрии и вытекающих из них утверждениях используются такие общематематические понятия, как «принадлежать» (или «лежать на»), «множество», «число» и т. д.

Здесь мы приведем все аксиомы геометрии, включая и те три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей, которые были сформулированы во введении, а также дадим доказательства на основе аксиом некоторых наглядно очевидных утверждений, которые использовались в курсе стереометрии.

Первая группа аксиом характеризует взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

1. *На каждой прямой и в каждой плоскости имеются точки.*
2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, и по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*
3. *Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.*
4. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*
5. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.*
6. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.*
7. *Из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.*

Иногда вместо слов «точка B лежит между точками A и C» говорят, что точки A и C лежат по разные стороны от точки B, или точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A).

8. *Каждая точка O прямой разделяет ее на две части — два луча — так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.*

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между ними. Если отрезок AB и прямая a лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a в некоторой точке, лежащей между A и B, то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

9. *Каждая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.*

Если отрезок не имеет общих точек с данной плоскостью, то говорят, что концы отрезка лежат по одну сторону от плоскости; если же отрезок пересекается с плоскостью в некоторой своей внутренней точке, то говорят, что концы отрезка лежат по разные стороны от плоскости.

10. *Каждая плоскость α разделяет пространство на две части (два полупространства) так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от плоскости α, а любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от плоскости α.*

При этом точки плоскости α не принадлежат ни одному из указанных полупространств. Плоскость α называется *границей* каждого из полупространств.

Следующая группа аксиом относится к понятиям наложения и равенства фигур.

Под наложением мы понимаем отображение пространства на себя. Однако не всякое отображение пространства на себя называется наложением. Наложения — это такие отображения пространства на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах 11—17. В формулировках этих аксиом используется понятие равенства фигур, которое определяется так: пусть Φ и Φ_1 — две фигуры; *если существует наложение, при котором фигура Φ отображается на фигуру Φ_1, то мы говорим, что фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ_1 или что фигура Φ равна фигуре Φ_1.*

11. *Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.*
12. *На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*
13. *От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*
14. *Два равных угла hk и h_1k_1, лежащие в плоскостях, являющихся границами полупространств P и P_1, можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства P и P_1, причем это можно сделать двумя способами: в одном случае совместятся лучи h и h_1, k и k_1, а в другом — лучи h и k_1, k и h_1.*

15. *Любая фигура равна самой себе.*
16. *Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ.*
17. *Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.*

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1=PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2=PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадет с точкой B либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы утверждаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

18. *При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.*

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

19. *При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.*

И наконец, последняя аксиома в стереометрии, как и в планиметрии, есть аксиома параллельных прямых.

20. *В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Как уже отмечалось во введении, из аксиом геометрии следует, что признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях. Докажем, например, первый признак равенства треугольников.

Пусть треугольник ABC расположен в плоскости α, а треугольник $A_1B_1C_1$ — в плоскости α_1 и $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, имея в виду, что под треугольником в стереометрии обычно понимают фигуру, содержащую не только три стороны, но и соответствующую внутреннюю область.

Рассмотрим наложение, при котором угол A совмещается с углом A_1 так, что луч AB совмещается с лучом A_1B_1, а луч AC — с лучом A_1C_1. Такое наложение существует в силу аксиомы 14. Так как по аксиоме 12 на луче A_1B_1 можно отложить от его начала только один отрезок, равный отрезку AB, то точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Следовательно, по аксиоме 11 совместятся отрезки AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1, т. е. совместятся стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Докажем теперь, что при указанном наложении внутренняя область треугольника ABC совместится с внутренней областью треугольника $A_1B_1C_1$. Для этого нужно доказать, что любая точка внутренней области треугольника ABC совместится с некоторой точкой внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$ и, обратно: на любую точку внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$ наложится некоторая точка внутренней области треугольника ABC. Пусть M — произвольная точка внутренней области треугольника ABC. Проведем через точку M какой-нибудь отрезок PQ с концами на сторонах AB и AC треугольника ABC. Так как сторона AB совмещается со стороной A_1B_1, то точка P совместится с некоторой точкой P_1 на стороне A_1B_1. Аналогично точка Q совместится с некоторой точкой Q_1 на стороне A_1C_1. Поэтому по аксиоме 11 отрезок PQ совместится с отрезком P_1Q_1, а значит, точка M отрезка PQ совместится с некоторой точкой M_1 отрезка P_1Q_1, т. е. наложится на точку M_1 внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$. Таким же образом можно доказать и обратное: на любую точку внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$ наложится некоторая точка внутренней области треугольника ABC. Итак, при указанном наложении треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, т. е. они равны.

В качестве еще одного примера приведем д о к а з а т е л ь с т в о р а в е н с т в а д в у х п р я м ы х т р е у г о л ь н ы х п р и з м, и м е ю щ и х р а в н ы е о с н о в а н и я и р а в н ы е в ы с о т ы.

Напомним, что равенство таких призм использовалось при рассмотрении вопроса об объеме прямой призмы (п. 64, следствие 2).

Пусть прямые призмы $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты AD и A_1D_1, причем $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle A=\angle A_1$. Полупространство, границей которого является плоскость ABC, содержащее точки D, E и F, обозначим буквой H, а полупространство, границей которого является плоскость $A_1B_1C_1$, содержащее точки D_1, E_1 и F_1, обозначим H_1.

Рассмотрим наложение, при котором угол A совмещается с углом A_1 так, что луч AB совмещается с лучом A_1B_1, луч AC — с лучом A_1C_1, а полупространство H совмещается с полупространством H_1. Такое наложение существует в силу аксиомы 14. При этом наложении, как было доказано выше, треугольник ABC (т. е. его стороны и внутренняя область) совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Далее, луч AD совместится с некоторым лучом A_1D_2, расположенным в полупространстве H_1, поэтому углы DAB и DAC совместятся соответственно с углами $D_2A_1B_1$ и $D_2A_1C_1$. Но так как углы DAB и DAC — прямые, то углы $D_2A_1B_1$ и $D_2A_1C_1$ также прямые, а, значит, луч A_1D_2 перпендикулярен к плоскости $A_1B_1C_1$ и, следовательно, совпадает с лучом A_1D_1. Итак, при указанном наложении луч AD совместится с лучом A_1D_1, а так как $AD = A_1D_1$, то точка D совместится с точкой D_1. Аналогично точки E и F совместятся соответственно с точками E_1 и F_1. Следовательно, основание DEF и боковые ребра одной призмы совместятся соответственно с основанием $D_1E_1F_1$ и боковыми ребрами другой призмы. Нетрудно доказать теперь, что при этом совместятся и соответствующие боковые грани, а также внутренние точки призмы. Это можно сделать подобно тому, как при доказательстве первого признака равенства треугольников было доказано совмещение внутренних областей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Таким образом, призмы $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ полностью совместятся, т. е. они равны.

Аналогично можно доказать равенство двух прямоугольных параллелепипедов с соответственно равными измерениями и равенство двух правильных пирамид с равными основаниями и равными высотами.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

10 класс

ВВЕДЕНИЕ

3. а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **5.** Бесконечное множество. **7.** Нет. Указание. Воспользоваться аксиомой A_2. **8.** а) Нет; б) да. **9.** Да. **10.** а) Да; б) нет. **12.** Да. **13.** а) Нет; б) нет; в) да. **14.** Три плоскости, если прямые не лежат в одной плоскости, и одна плоскость, если прямые лежат в одной плоскости.

ГЛАВА I

17. 26 см. **18.** а) 3,5 см; б) 12 см. **20.** Нет. **27.** 48 см. **28.** $8\frac{1}{3}$ см. **29.** 6 см. **33.** Указание. Пусть α, β и γ — данные плоскости, а a — линия пересечения плоскостей α и β. Рассмотреть взаимное расположение прямой a и плоскости γ. **34.** а), б) Пересекаются; в), г) параллельны; д), е) скрещивающиеся. **37.** а) Пересекаются; б) скрещивающиеся. **40.** а) Нет; б) да, прямая MN. **41.** Нет. **42.** а) Параллельны; б) 100 см. **44.** а) 40°; б) 45°; в) 90°. **45.** а) 50°; б) 59°. **46.** а) 90°; б) 64°. **49.** Нет. **54.** б) 12 см^2. **56.** Указание. Воспользоваться задачей 55. **57.** Указание. Воспользоваться задачей 56. **60.** Указание. Воспользоваться задачей 58. **63.** а) $AA_2=18$ см, $AB_2=15$ см; б) $A_2B_2=54$ см, $AA_2=72$ см. **65.** а) Параллелограммы. **66.** Три пары ребер. **67.** а) ≈ 17 см, ≈ 23 см, ≈ 29 см; б) ≈ 146 см^2, ≈ 210 см^2, ≈ 180 см^2. **72.** Указание. а) Учесть, что секущая плоскость проходит через середины ребер DB и DC тетраэдра; б) учесть, что секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по отрезкам, параллельным сторонам треугольника ABC. **73.** 22 см. **74.** б) $\frac{4}{9}$. **75.** б) 6 см^2. **77.** 8 см, 10 см, 12 см. **79.** а) Параллелограмм ABC_1D_1; б) параллелограмм ACC_1A_1. **81.** Точка пересечения прямых: а) MN и BC; б) AM и A_1B_1. **82.** Указание. Задача решается аналогично задаче 2, п. 14. **83.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань: а) AA_1D_1D; б) $ABCD$. **84.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань $ABCD$. **85.** Параллелограмм BKD_1L. **86.** Указание. Сначала построить точку пересечения секущей плоскости с ребром DD_1. **87.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает: а) грань BCC_1B_1; б) грань AA_1D_1D. **88.** б) 12 см. **90.** Прямая CD: а) параллельна плоскости α; б) пересекает плоскость α. **92.** Указание. Использовать свойство 2^0, п. 6. **93.** MN и b скрещивающиеся. **94.** Да. **95.** Указание. Использовать задачу 55. **98.** Существует только одна плоскость. **100.** Указание. Использовать вторую теорему п. 7 и задачу 59. **102.** $10(2\sqrt{3}+1)$ см и $25\sqrt{11}$ см^2. **103.** $4\frac{4}{9}$ см^2. **108.** Указание. Предварительно доказать, что плоскости ADA_1, BDB_1 и CDC_1 пересекаются по прямой. **112.** Указание. Учесть, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **113.** Прямая BD_1.

ГЛАВА II

118. $\angle AOB$, $\angle MOC$ и $\angle DOA$. **120.** $\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$. **121.** 13 см. **122.** $KA=KB=20$ см, $DA=DB=32$ см. **125.** 9 см. **126.** Прямоугольный. **130.** а) $MA=\sqrt{m^2+n^2}$; $MB=m$, $MC=\sqrt{m^2+n^2}$, $MD=\sqrt{m^2+2n^2}$; б) $\sqrt{m^2+\frac{1}{2}n^2}$, m. **136.** Указание. Воспользоваться задачей 134. **138.** а) $\frac{d}{\cos\varphi}$, $d\operatorname{tg}\varphi$; б) $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$. **140.** 3 см. **141.** 3 см. **142.** 2,5 см или 1,5 см. **143.** 2 см. **145.** б) $\sqrt{a^2+b^2}$. **146.** Указание. Воспользоваться теоремой о трех перпендикулярах и обратной к ней. **149.** 4 см и $4\sqrt{10}$ см. **150.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **152.** 8 дм, 8 дм, $4\sqrt{5}$ дм, $4\sqrt{5}$ дм, 8 дм, $6\sqrt{2}$ дм. **154.** а) 15 см; б) 75 см^2. **155.** 6 см. **156.** $\sqrt{n^2+m^2\sin^2\varphi}$. **157.** б) 5,1 дм. **158.** 12,5 см, 12,5 см, 25 см, 25 см. **160.** 12 см. **161.** Указание. Использовать перпендикуляры, проведенные из точки A к прямым BC и BD и к плоскости CBD. **163.** а) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d}{2}$; в) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **164.** 60°. **165.** $3d$. **168.** $\frac{d}{\sin\varphi}$. **170.** 1 см и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **171.** 45°. **172.** $6\sqrt{3}$ см. **173.** 90°, 45° и 60°. **174.** 60°. **175.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\approx 70°32'$. **176.** $8\sqrt{2}$. **179.** Указание. Воспользоваться задачей 178. **180.** Указание. Воспользоваться задачей 179. **182.** б) $\sqrt{m^2+n^2}$. **184.** а) $5\sqrt{6}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см. **187.** а) $\sqrt{6}$; б) 17; в) 13. **188.** $a\sqrt{3}$. **189.** а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **190.** а) 90°; б) 45°; в) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$, $\varphi\approx 26°34'$. **192.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **193.** а) $\sqrt{d^2-m^2}$; б) $\sqrt{m^2-n^2}$; в) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. **194.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **195.** 6 см, 6 см и $6\sqrt{2}$ см.

198. 4 см. **199.** Указание. Пусть точка O — проекция точки S на плоскость треугольника. Доказать, что точка O совпадает с точкой M. **201.** 90°. **202.** $5\sqrt{3}$ см. Указание. Воспользоваться задачей 199. **203.** 5 см. **204.** а) $\frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\varphi}$; б) $\frac{2\pi a}{\operatorname{tg}\varphi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi}$. **205.** 3,5 дм^2. **206.** 25 см. **207.** 8 см. **208.** $9\sqrt{6}$ см. **209.** Расстояние от точки B до плоскости α меньше расстояния от точки C до этой плоскости. **211.** $a\sqrt{2}$. **213.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$, $\varphi\approx 70°33'$. **214.** 60°. **215.** $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ см. **216.** $2a$. **217.** $2\sqrt{122}$ дм.

ГЛАВА III

219. 13 см. **220.** 26 см. **221.** $8\sqrt{21}$ см^2. **222.** 45°, 135°, 45°, 135°. **223.** 8 см и $8\sqrt{3}$ см. **224.** $16\sqrt{7}$ см^2. **225.** 45°. **226.** $2\sqrt{3}$ см^2. **228.** $80\sqrt{2}$ см^2. **229.** а) 450 см^2 и ≈ 536 см^2; б) 384 дм^2 и 672 дм^2; в) 69 дм^2 и ≈ 97 дм^2; г) 0,2 м^2 и $\approx 0{,}8$ м^2 **230.** 75 см^2. **231.** $20(23+6\sqrt{3})$ см^2. **232.** $2d^2\sin\varphi\,(\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}+\sin\alpha)$.

233. 180 см^2. **234.** 580 см^2. **235.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **236.** Указание. Учесть, что боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами. **237.** 240 см^2. Указание. Воспользоваться задачей 236. **238.** 2016 см^2. **239.** $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см. **240.** 768 см^2. **241.** $(2\sqrt{34}+22)$ м^2. **242.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48(\sqrt{2}+1)$ см^2. **243.** 192 см^2. **244.** 790 см^2. **245.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2. **246.** б) 189 см^2. **248.** $48\sqrt{2}$ см^2. **250.** $64\sqrt{3}$ см^2. **251.** 13 см. **252.** 12 см. **253.** 12 см. **254.** а) $\dfrac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3}$; б) $2\arcsin\dfrac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}H}{a}$; г) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}H}{a}$; д) $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}$. **255.** $\dfrac{4}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$. **256.** а) $\dfrac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$. **257.** $3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})h^2$. **258.** $72(1+\sqrt{7})$ см^2.

259. $3\sqrt{5}$ см. **263.** а) Трапеция. **264.** $3a^2$. **265.** 54 см^2. **266.** 13 дм^2. **268.** $\sqrt{7}$ дм. **269.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ дм, $\sqrt{3}$ дм. **270.** 16 см^2. **276.** а) Один; б) не имеет; в) не имеет; г) один. **277.** а) Бесконечное множество; б) три; в) девять. **278.** а) Пять; б) четыре; в) три или шесть. **279.** 60°. **280.** Площадь сечения, проходящего через диагонали смежных граней, равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Площадь сечения, проходящего через диагонали противоположных граней, равна $a^2\sqrt{2}$. **281.** $\sqrt{3}$. **282.** 90°. **283.** а) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{9}$ **284.** Правильный октаэдр. **286.** а) $m=\frac{\sqrt{6}}{2}h$; б) $n=\frac{1}{3}m$. **287.** а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$; в) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **290.** $2\sqrt{2}l^2\dfrac{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta}\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}$. **291.** $2d^2\sin\varphi\,(\cos\theta+\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)})$. **292.** 4,8 см. **294.** $4\sqrt{S_0^2-a^4}$ или $2\sqrt{2}S_0$. **296.** $\dfrac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ Указание. Учесть, что искомое сечение является трапецией. **298.** $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$. **299.** $0{,}5m$. **300.** Прямоугольник, $S=\frac{ab}{4}$. **301.** $4\sqrt{6}$ см.

302. 5 см, 5 см, 6 см, 6 см. **303.** $288(3+\sqrt{3})$ см^2. **305.** $2h^2 \operatorname{tg} \alpha$. **306.** $4h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \times \times\left(1+\frac{1}{\sin \varphi}\right)$ **307.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4} ab$ **308.** 4 см, 4 см, 4 см, 4 см. **309.** $\frac{80}{3}$ дм^2. **310.** 540 см^2. **311.** а) 315 см^2; б) 7,2 см. **312.** $\operatorname{tg} \varphi \cos \frac{180°}{n}$ **313.** 54 дм^2. **314.** 56 см, 24 см. **319.** Три.

ГЛАВА IV

320. а) 3 см, 4 см, 5 см, 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) 4 см, 3 см, 5 см, 2 см, 2,5 см. **321.** а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 15 см, $\sqrt{145}$ см, 17 см. **323.** а) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}$; б) квадрат. **324.** а) Да; б) да; в) нет. **325.** а) Параллельны или совпадают; б) прямая параллельна плоскости или лежит в ней; в) плоскости параллельны, пересекаются или совпадают. **326.** а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$; г) $\overrightarrow{C_1B_1}$, д) $\overrightarrow{MB_1}$. **327.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$. **329.** а) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; г) $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ **333.** а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{DB}$. **335.** а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CP}$; г) $\vec{0}$. **336.** а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$; в) $-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})$. **337.** а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OE}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\vec{0}$ **338.** Указание. Учесть, что $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$. **339.** а) $\overrightarrow{C_1B}$; б) $\overrightarrow{AC}$ **340.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}$. **344.** а) -1; б) 2; в) $-\frac{1}{2}$. **345.** а) $-2\overrightarrow{EF}$; б) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. **346.** $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. **347.** а) $5\vec{n}-9\vec{m}$; б) $2\vec{p}-13\vec{m}-3\vec{n}$. **355.** а), в). **356.** Да. **358.** а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{BD_1}$. **359.** а) $-\frac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$, $\frac{\sqrt{2}kq}{2a^3}\overrightarrow{AC_1}$; б) $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{2kq}{9a^2}\sqrt{105}$, $\frac{4kq}{3a^2}$ **360.** а) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}$. **361.** $\overrightarrow{CD}=0\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1O}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **363.** $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **364.** $\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $|\overrightarrow{AK}|=\frac{3}{2}m$. **365.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **367.** $\overrightarrow{DK}=0{,}7\overrightarrow{DA}+0{,}15\overrightarrow{DB}+0{,}15\overrightarrow{DC}$. **368.** а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{C_1N}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{A_1N}=0\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; ж) $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **369.** $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. **370.** а) $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; б) $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$; в) $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; г) $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$. **371.** Указание. Воспользоваться задачами 350 и 366. **373.** Нет Указание. Сначала доказать, что M_1 — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, а затем воспользоваться задачей 366. **379.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$;

в) $\vec{0}$. **380.** а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$. **381.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C_1A_1}$. **382.** а) k — любое; б) $k\geqslant 0$; в) $k<0$; г) $k=-1$. **386.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. **387.** а) $3\overrightarrow{ON}-2\overrightarrow{OM}$; б) $2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$; в) $k\overrightarrow{ON}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$. **389.** Сначала доказать компланарность векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$. **390.** а) $\frac{3}{2a^2}kq$; б) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}kq$; в) $\frac{4}{9a^2}kq$; г) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}kq$. **391.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$. **392.** $\overrightarrow{AC_1}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{CA_1}=-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{BD_1}=\vec{q}-\vec{p}+\vec{r}$; $\overrightarrow{DB_1}=-\vec{q}+\vec{p}+\vec{r}$. **393.** а) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD_1}$. **394.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **395.** Указание. Сначала доказать компланарность векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. **396.** $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}$, $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$. **397.** $\frac{1}{3}$. **398.** Указание. Воспользоваться задачей 366. **399.** Указание. Воспользоваться задачей 397

ГЛАВА V

400. а) C; б) E; в) B; г) A, C, E, H; д) B, E, G; е) B, C, D. **402** $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $D_1(1;\ 1;\ 0)$. **403.** $\vec{a}\{3;\ 2;\ -5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 3;\ -1\}$, $\vec{c}\{1;\ -1;\ 0\}$, $d\{0;\ 1;\ 1\}$, $\vec{m}\{-1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{n}\{0;\ 0;\ 0{,}7\}$. **409.** а) $\{7;\ -2;\ 1\}$; б) $\{-7;\ 2;\ -1\}$; в) $\{5;\ -1{,}2;\ 1\}$; г) $\left\{-5\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{5};\ -1\frac{1}{7}\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{3};\ -2{,}2;\ \frac{1}{7}\right\}$; е) $\{7;\ -1{,}8;\ 1\}$; ж) $\{7;\ -2{,}2;\ 1\}$; з) $\{10;\ -2;\ 2\}$; и) $\{6;\ -3;\ 0\}$; к) $\{0;\ -1{,}2;\ 0\}$; л) $\left\{\frac{1}{9};\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{21}\right\}$; м) $\{-0{,}4;\ 0{,}2;\ 0\}$. **410.** $\vec{p}\{4;\ -18;\ -9\}$, $\vec{q}\{5;\ 15;\ -5\}$. **411.** а) $\{0;\ 5;\ -1\}$; б) $\{-3;\ 2;\ 1\}$; в) $\{7{,}8;\ 2{,}5;\ 4{,}1\}$; г) $\{-3;\ 9;\ -3\}$. **412.** $-\vec{i}\{-1;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{j}\{0;\ -1;\ 0\}$; $-\vec{k}\{0;\ 0;\ -1\}$, $-\vec{a}\{-2;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{b}\{3;\ -5;\ 7\}$, $-\vec{c}\{0{,}3;\ 0;\ -1{,}75\}$. **413.** в) Нет; г) да; д) нет. **414.** а) $m=10$, $n=1\frac{1}{5}$; б) $m=0{,}1$, $n=-2$. **415.** а) Да; б) нет; в) да; д) нет; е) нет. **418.** а) $\{-1;\ 0;\ 2\}$; б) $\{5;\ -7;\ 2\}$; в) $\left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right\}$. **419.** $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, $\overrightarrow{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. **420.** Да. **421.** б) Да; в) нет. **422.** а) Да; б) нет; в) да. **423.** Указание. Воспользоваться задачей 366. **424.** а) $M(-1;\ 2{,}5;\ -2)$; б) $B(-8;\ 4;\ -19)$; в) $A(-24;\ 8;\ 28)$. **425.** а) $m=2$, $n=-5$; б) $m=-0{,}5$, $n=2$; в) $m=1$, $n=-1$; г) $m=2$, $n=-1$. **426.** а) 3; б) 17. **427.** $|\vec{a}|=5\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=\sqrt{3}$, $|\vec{d}|=2$, $|\vec{m}|=\sqrt{5}$. **428.** а) $\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{14}$; в) 0; г) $5\sqrt{2}$; д) $3\sqrt{14}$; е) 14; ж) $\sqrt{326}$. **429.** $\sqrt{14}$. **430.** а) $3+2\sqrt{2}$; б) 0,5; $\frac{\sqrt{73}}{4}$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$. **431.** а) Правильный; б) прямоугольный разносторонний;

в) прямоугольный разносторонний; г) прямоугольный равнобедренный. **432.** а) 4, 4, 3; б) $4\sqrt{2}$, 5, 5. **433.** (0; 2; −3), (−1; 2; 0), (−1; 0; −3). **434.** (3; 0; 0), (0; −4; 0), (0; 0; $\sqrt{7}$). **435.** 3,75; 2; 4; $1-2\sqrt{2}$ и $1+2\sqrt{2}$. **436.** Указание. Доказать, что: а) точки A, B и C не лежат на одной прямой; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — неравные сонаправленные векторы; в) $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$. **437.** а) (−1,6; 0; 0); б) (0; 8; 0); в) (0; 0; 1). **438.** а) $\left(\frac{3}{8};\ \frac{17}{8};\ 0\right)$; б) $\left(0;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{17}{6}\right)$. **439.** а) (2; 3; 0), $\sqrt{13}$; б) (2; 3; −1). **440.** $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+m^2}$.

441. а) 45°; б) 135°; в) 60°; г) 45°; д) 90°; е) 90°; ж) 0°; з) 180°. **442.** $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}=\varphi$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}=\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}=180°-\varphi$. **443.** а) a^2; б) $-2a^2$; в) 0; г) a^2; д) a^2; е) $-\frac{a^2}{2}$; ж) $-\frac{3}{2}a^2$. **444.** $\vec{a}\vec{c}=3$, $\vec{a}\vec{b}=0$, $\vec{b}\vec{c}=3$, $\vec{a}\vec{a}=6$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}=\sqrt{3}$. **445.** а) −10; б) 3; в) 1; г) −4; д) 28. **446.** а) Тупой; б) острый; в) прямой. **448.** а) 5,5; б) 3,5; в) 4. **449.** $m=4$. **450.** Указание. Доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}=0$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$. **451.** а) 60°; б) 135°; в) 150°; г) 45°; д) 90°. **452.** $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}\approx 50°46'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}\approx 63°26'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}\approx 50°46'$. **453.** 60°.

454. $\angle A=120°$, $\angle B=\angle C=30°$, $P=2\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})$, $S=2\sqrt{3}$. **455.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0. **456.** 90°. **457.** 3. **459.** а) 1, $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. **461.** Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. **462.** а) −1; б) −1,5; в) 4; г) $\sqrt{2}$; д) 2; е) $-\frac{1}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **464.** а) 30°; б) 60°; в) 0°; г) 45°. **466.** а) $\frac{3}{\sqrt{29}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{87}}$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$. **467.** а) $\approx 71°34'$; б) $\approx 59°44'$. **468.** а) $\frac{3}{\sqrt{70}}$; б) $\frac{9}{\sqrt{130}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{182}}$. **469.** а) $\frac{10}{\sqrt{134}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{134}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{134}}$. **470.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$. **471.** Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб. Требуется, например, доказать, что $AC_1 \perp A_1B$. Разложить векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ и доказать, что $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$. **473.** 60°. **475.** $\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$. **476.** 45°. **477.** Указание. Доказать, что $\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{BD}=0$.

479. Указание. Рассмотреть плоскость, проходящую через центр симметрии и данную прямую, и свести задачу к задаче 1149 «Геометрия 7—9». **481.** Указание. Воспользоваться следующими свойствами движений: при движении прямая отображается на прямую, параллельные прямые — на параллельные прямые, а угол — на равный ему угол. **484.** Указание. Учесть, что параллельный перенос есть движение, поэтому при параллельном переносе прямая отображается на прямую. **485.** Указание. Доказать, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$. **487.** Указание. Утверждение доказывается точно так же, как: а) теорема п. 114 «Геометрия 7—9»; б) решается задача 1150 «Геометрия 7—9». **488.** Указа-

ние. а), б) Доказательство провести методом от противного. **490.** а) $\{3;\ 9;\ -24\}$; б) $\{-1{,}6;\ -2{,}3;\ 4{,}3\}$. **491.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **492.** а) $(-1;\ 0;\ 0)$; б) $(0;\ -2;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 2)$. **493.** а) Да; б) да; в) нет. **494.** Указание. Доказать, что: а) точки A, B и C не лежат на одной прямой; б) середины отрезков AC и BD совпадают. **495.** $\left(\frac{7}{3};\ \frac{5}{3};\ 3\right)$. **496.** $C\,(6;\ 5;\ 5)$, $D_1\,(9;\ 4;\ 1)$, $B_1\,(4;\ 7;\ 4)$, $C_1\,(8;\ 8;\ 4)$. **497.** а) 1; б) -2; в) 0. **498.** $\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{3}{\sqrt{10}};\ 0\right\}$. **499.** 4 или -4. **500.** 1. **501.** $2\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{29}$. **502.** $(0;\ 42{,}4;\ 0)$. **503.** $(1;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. Указание. Учесть, что $\angle ACB=90°$. **504.** 6 дм. **505.** Указание. Ввести систему координат и обозначить координаты вершин данного тетраэдра $ABCD$ так: $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\,(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D\,(x_4;\ y_4;\ z_4)$. Учесть, что точка пересечения медиан имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\ \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$. **506.** а) 3; б) $-3{,}5$; в) 5; г) 7; д) -10. **507.** а) 135°; б) 60°; в) 67°30′. **508.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **509.** а) $\frac{2}{\sqrt{114}}$; б) $\frac{5}{9}$. **510.** а) 90°; б) $\approx 114°06'$. **511.** а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}$. **512.** а) $\frac{7}{65}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{4}{13}$; г) $\frac{3}{13}$. **513.** а) $\frac{2}{\sqrt{38}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{38}}$. **515.** 45°. **516.** $\sin\theta\cos\varphi$. **517.** $\sqrt{n^2+m^2+p^2+pn}$. **518.** Указание. а) Доказать методом от противного; б) пусть M — точка пересечения прямой a с плоскостью α, A — точка на прямой a, B и C — точки в плоскости α, отличные от точки M. К треугольникам AMB и AMC применить теорему Пифагора. **519.** Указание. Рассмотреть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями α и β, α и β_1. **520.** Указание. Взять на плоскости α две пересекающиеся прямые и воспользоваться задачей 484.

ГЛАВА VI

521. 5 м. **522.** а) 24 см; б) $12\sqrt{3}$ см; в) 432π см^2. **523.** а) $10\sqrt{2}$ см; б) 50π см^2. **524.** Нет. **525.** $\sqrt{5\pi}$ м. **526.** а) 30°; б) 60°. **527.** а) 5 дм; б) 3 см. **529.** 64 см^2. **530.** 8 см. **531.** 15 дм. **532.** $\frac{1}{\cos\varphi}$. **533.** $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$. **534.** $2\sqrt{3dh}$. **535.** 40 см^2. **536.** $S\sqrt{2}$. **537.** π^2 м^2. **538.** $\frac{S}{\pi}$. **539.** $1{,}125\pi$ кг. **540.** 6 см, 18 см. **541.** $0{,}82\pi\approx 2{,}58$ м^2. **542.** $4S\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. **543.** $S_{бок}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $S_{цил}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi+\frac{1}{2\pi}d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ или $S_{цил}=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi+\frac{1}{2\pi}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. **544.** $\frac{d^2}{8\pi}$. **545.** а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$; в) $4\pi a^2$. **546.** б) $\frac{b}{a}$. **547.** 17 см. **548.** а) 108π см^2; б) 72π см^2; в) 36π см^2. **549.** а) $4\sqrt{2}$ дм; б) 4 дм. **550.** 25 см^2. **551.** а) r^2; б) $r^2\sqrt{2}$; в) $r^2\sqrt{3}$. **552.** $2h^2$. **553.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ дм. **554.** а) $\frac{r\sqrt{4l^2-r^2}}{4}$; б) $\frac{r\sqrt{2l^2-r^2}}{2}$. **555.** а) 200 см^2; б) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ см^2; в) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ см^2. **558.** $\alpha=216°$. **559.** 180°. **560.** а) 60°; б) $2\arcsin\frac{1}{4}$; в) $2\arcsin\frac{1}{6}$. **561.** 9π см^2,

$6\sqrt{2}$ см. **562.** $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ см^2. **563.** $0{,}9\pi$ см^2. **564.** $\frac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$. **565.** $S_{бок}=80\pi$ см^2, $S_{кон}=144\pi$ см^2. **566.** $2\pi m^2\sin\varphi$. **567.** 5 см. **568.** а) 8 см; б) 128 см^2. **569.** R^2-r^2. **570.** 60 см^2. **571.** $33\sqrt{2}\pi$ см^2, $(33\sqrt{2}+65)\,\pi$ см^2. **572.** $2{,}55\pi\approx 8{,}011$ кг. **574.** а) $10\sqrt{21}$ см; б) 12 мм; в) 16 дм; г) $\sqrt{a^2-b^2}$. **575.** $\frac{\sqrt{4R^2-m^2}}{2}$. **576.** а) $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=9$; б) $x^2+y^2+z^2=2$; в) $(x-2)^2+y^2+z^2=16$. **577.** а) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=54$; б) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=8$; в) $x^2+y^2+z^2=35$. **578.** а) (0; 0; 0), 7; б) (3; −2; 0), $\sqrt{2}$. **579.** а) (2; 0; 0), 2; б) (0; 1; 0), 5; в) (−1; 0; 0), 2; г) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2};\ 1\right)$, $\sqrt{6}$. **580.** 1600π дм^2. **581.** 12 см. **582.** 6 см. **583.** 4 см. **584.** 3 см. **585.** 8 см. **586.** а) Плоскость является касательной к сфере; б), в) плоскость пересекает сферу; г) плоскость и сфера не имеют общих точек. **587.** а) 80π см^2; б) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ см. **588.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}R^2$. **589.** а) $2\sqrt{3}\pi$ см; б) $5\sqrt{2}\pi$ м. **590.** $\pi R^2\sin^2\varphi$. **591.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **592.** 1 см. **593.** а) 144π см^2; б) 16π дм^2; в) 8π м^2; г) 48π см^2. **594.** 36 м^2. **595.** $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ см. **597.** 10 м. **598.** 900π см^2. **599.** $4\pi\,(r_1^2+r_2^2)$. **601.** $\frac{\sqrt{3}\,S}{2}$. **602.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **604.** $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi\,(S_1+S_2)}}$. **605.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2 или $\frac{5}{4}$. **606.** $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **607.** $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{4}$. **608.** 414π см^2. **610.** $-\frac{1}{3}$. **611.** $\frac{\sqrt{S_0^2-S_1^2}}{\pi}$. **612.** $\arccos\frac{1}{7}$. **613.** $4\sqrt{6}$ см^2. **614.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **615.** $\frac{\pi ab\,(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **616.** $40\sqrt{3}\pi$ см^2. **617.** а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}(\sqrt{73}+3)$ см^2; б) $(18+6\sqrt{41})$ см^2; в) $\frac{9}{2}(\sqrt{91}+3\sqrt{3})$ см^2. **618.** $12\sqrt{10}\pi$ дм^2, $4\,(3\sqrt{10}+5)\,\pi$ дм^2. **620.** а) Указание. Доказать, что диаметр сферы равен гипотенузе треугольника; б) $2\sqrt{10}$ см. **622.** (3; 0; 0), (0; 0; −9), (0; 0; −1). **623.** $4\sqrt{2}$. **625.** б) $0{,}6R$. **626.** а) $2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$, $4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$; б) $\frac{16}{9}\pi R^2\sin^2\varphi\,(3-4\sin^2\varphi)$. **627.** $\frac{240}{13}\pi$ см. **630.** $\frac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$. **631.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}(29+7\sqrt{73})$ см^2; б) $(58+14\sqrt{41})$ см^2; в) $\frac{21\sqrt{91}+87\sqrt{3}}{2}$ см^2. **634.** а) $24R^2$; б) $12\sqrt{3}R^2$; в) $24\sqrt{3}R^2$. **635.** а) $\frac{4R^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; б) $100\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$ см^2. **636.** Указание. Рассмотреть сечение данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания перпендикулярно к ней. **639.** а) $8R^2$; б) $\frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$; в) $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$. **640.** $\frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}}a$, $\frac{2\sqrt{33}}{11}a$. **641.** $4\sqrt{3}$ см, 6 см или $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **642.** $\frac{2}{3}$. **643.** а) $R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)$;

б) $r \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)$; в) 60°. **644.** $\dfrac{2\pi r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}$. **645.** $\frac{3}{4}$. **646.** а) $R \sin \varphi$; б) $\frac{r}{\sin \varphi}$; в) 30° или 150°.

ГЛАВА VII

647. а) $V=V_1+V_2$; б) $V=\frac{2}{3}V_1+V_2$. **648.** а) 1980; б) 300; в) $1170\sqrt{3}$; г) $3{,}2\sqrt{5}$. **649.** а) $432\sqrt{2}$ см³; б) $6\sqrt{6}$ м³; в) $0{,}32\sqrt{5}$ см³. **650.** 12 см. **651.** 3,51 кг. **652.** $240\sqrt{2}$ см³. **653.** $729\sqrt{2}$ см³. **654.** $\dfrac{h^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \beta}$. **655.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$ **656.** $432\sqrt{3}$ см³. **657.** а) $\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}$ м³; б) $1728\sqrt{2}$ см³. **658.** 2310 см³. **659.** а) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см³; б) $1{,}5\sqrt{2}$. **660.** $0{,}5m^3 \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2}$. **661.** $\dfrac{l^3 \sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. **662.** $\dfrac{Q^2 \sin 2\beta}{2a}$

663. а) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$; б) a^3; в) $1{,}5\sqrt{3}a^3$; г) $\dfrac{2a^3}{\operatorname{tg} 22°30'}$. **664.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **665.** 72 см³. **666.** а) 24π см³; б) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; в) 2 см. **667.** ≈ 208 м. **668.** ≈ 1513 т. **669.** $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$. **670.** ≈ 61 кг. **671.** а) $3\sqrt{3}:4\pi$; б) $2:\pi$; в) $3\sqrt{3}:2\pi$; г) $2\sqrt{2}:\pi$; д) $\left(\frac{1}{2}n\cdot\sin\frac{360°}{n}\right):\pi$ **672.** $\dfrac{\pi a^2 h}{4\cos^2 \alpha}$. **673.** 0,5. **674.** $\frac{\pi}{2}$. **675.** $\frac{\pi}{5}$. **676.** $192\sqrt{3}$ см³. **677.** $\dfrac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **678.** $\frac{1}{4}m^3 \operatorname{tg} \varphi$. **679.** 1050 см³. **680.** $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$. **681.** $V=18\sqrt{39}$ см³. **683.** 1080 см³. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **684.** а) 6 м³; б) 4950 см³. **685.** $169\sqrt{3}$ см³. **686.** а) $\frac{\sqrt{3}}{8}l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi$; б) $\frac{1}{3}l^3 \cos^2 \alpha \sqrt{3-4\cos^2 \alpha}$; в) $\frac{1}{3}l^3 \sin^2 \frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **687.** $\dfrac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24 \sin \frac{\varphi}{2}}$. **688.** а) $\dfrac{4H^3}{3\operatorname{tg}^2 \beta}$; б) $\dfrac{m^3\sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}$. **689.** $\frac{2}{3}m^3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi$. **690.** $6\sqrt{471}$ см³, $6\sqrt{498}$ см².

691. $\frac{845\sqrt{3}}{6}$ см³. **692.** $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{tg} \varphi$. **693.** $\operatorname{arctg} \dfrac{12V}{b^3 \sin \alpha}$. **694.** 9 см³. **695.** а) $\frac{1}{24}c^3 \sin 2\varphi \operatorname{tg} \theta$; б) 48 см³; в) $\frac{1}{6}abc$. **696.** $1400\sqrt{3}$ см³. **697.** $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$. **698.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3) \operatorname{tg} \varphi$. **699.** 1260 дм³. **700.** $38\sqrt{2}$ см³. **701.** а) $2{,}25\pi$ см³; б) 9 см; в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. **702.** 375 см³. **703.** $\dfrac{\sqrt{\pi Q}(P^2-Q^2)}{3\pi}$. **704.** $\frac{1}{12}\pi H^3$. **705.** 240π см³ или

100π см³. **706.** $216°$. **707.** $\frac{225\pi}{7}$ дм³. **708.** 84π м³. **709.** $\frac{Sh}{\pi l}$, $\frac{1}{12}\pi h\left(l^2-h^2+\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}\right)$.
710. а) 64π см², $\frac{256}{3}\pi$ см³; б) ≈ 3 см, $\approx 36\pi$ см²; в) 4 см, $\frac{256}{3}\pi$ см³
711. Объем Земли в 64 раза больше объема Луны. **712.** $H=\frac{4}{3}R$, где H — высота цилиндра, R — радиус шара. **713.** Нет. **714.** Уровень воды повысится на $\frac{32}{75}$ см.
715. $\frac{942}{125}\pi$ м³. **716.** 5:16. **717.** $58\,500\pi$ см³ или $504\,000\pi$ см³. **718.** $\frac{52}{81}\pi R^3$.
719. 252π см³ и 720π см³. **720.** $112\,500\pi$ см³. **721.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$. **722.** $6375^2\pi\approx$ $\approx 1{,}28\cdot 10^8$ км² $=128\cdot 10^6$ км². **723.** $432\pi\approx 1357$ см². **725.** $\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$, 36 дм³.
726. $48\sqrt{11}$ см³. **727.** $a\sqrt{Q^2-Qa^2}$. **728.** 105 см³. **729.** $16\sqrt{11}$ см³. **730.** $\frac{a^3}{4}$. **731.** 1 м, 2 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м, 3 м, 3 м. **732.** $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$ или $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$.
733. Указание. Достроить треугольную призму до параллелепипеда. **734.** Указание. Воспользоваться задачей 733. **735.** 6,12 дм³. Указание. Воспользоваться задачей 682. **736.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **737.** $\frac{16m^3}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi}$. **738.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\times$ $\times(3\,\mathrm{tg}^2\varphi-1)$. **739.** $\frac{a^3n}{24\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{180°}{n}}}$.
740. $\frac{2h^3\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi_3}$. **741.** $\frac{2H^3\sin\alpha}{3\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\,\gamma}$. **742.** $\frac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$.
743. а) $\frac{a}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$; б) $\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$. **744.** 31:73. **745.** а) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; б) $\frac{\pi h^3}{4}$; в) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **747.** ≈ 7065 л. **748.** $\frac{\pi a^3\,\mathrm{tg}\,\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2}}$. **749.** $\frac{a^3\pi}{24}\sin^3\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$. **750.** $\frac{3}{2}$.
751. 96π дм³. **752.** $2\pi r\frac{l-r}{l}$. **753.** $\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$. **754.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot V$.
755. $\frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}$. **756.** $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **757.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **758.** $\frac{\pi}{H^2}(H^2+r^2)^2$, $\frac{\pi}{6H^3}(H^2+r^2)^3$. **759.** $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ см², $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ см³. **760.** $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ см², $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см³
761. $\approx 6{,}56$ м. **762.** Наибольший объем имеет шар, наименьший объем имеет конус. **763.** а) Нет; б) да. Указание. Сравнить плотность шара, считая его однородным, с плотностью воды.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

764. Окружность, расположенная в плоскости, параллельной данным прямым. Радиус окружности равен $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, где h — расстояние между данными скрещивающимися прямыми, а центр находится на расстоянии $\frac{h}{2}$ от каждой из данных прямых. **765.** Указание. Доказать, что все эти сечения представляют собой параллелограммы с периметрами, равными удвоенной длине ребра. **766.** Указание. Доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах противоположных ребер — параллелограмм, и воспользоваться формулой, связывающей длины сторон и диагоналей параллелограмма. **767.** Все углы треугольника должны быть острыми. **768.** Окружность, расположенная в плоскости, перпендикулярной к прямой BC, построенная на перпендикуляре AD к BC как на диаметре, без точки A. **769.** Указание. Допустим, что вершина тетраэдра проектируется в точку пересечения высот основания. Тогда любое ребро тетраэдра перпендикулярно к противоположному ребру. Затем применить обратную теорему о трех перпендикулярах. **770.** Указание. Учесть, что O_1 — точка пересечения высот треугольника ABC. **771.** Указание. Воспользоваться задачей 770. **772.** Семь. **773.** Указание. Через биссектрису линейного угла данного двугранного угла и его ребро провести плоскость и спроектировать точку пересечения данной прямой с этой плоскостью на грани. Затем воспользоваться равенством полученных треугольников. **775.** Указание. Пусть A — произвольная вершина, O — центр куба, A_1 — проекция точки A на данную прямую. Тогда $AA_1 = OA \cdot \sin \varphi$, где φ — угол между OA и OA_1. Записать сумму квадратов расстояний от прямой OA_1 до вершин куба и воспользоваться теоремой косинусов. **776.** Указание. Указанные тетраэдры имеют общую вершину, а их основания — равнобедренные прямоугольные треугольники, катеты которых равны ребру куба. **777.** Указание. Рассмотреть развертку куба. **778.** Указание. Взять в качестве оси отверстия диагональ куба. **779.** $\frac{25}{16}S$. **780.** $\sqrt{2}$ см. Указание. Воспользоваться тем, что тетраэдр должен находиться внутри сферы, описанной около куба. **781.** Указание. Доказать, что все вершины полученного многогранника — середины граней куба. **782.** Указание. Взять какую-нибудь грань параллелепипеда, выбрать наименьший куб, примыкающий к этой грани, и выяснить, как к нему могут быть приставлены остальные кубы. **783.** Указание. Спроектировать вершины ломаной на три ребра куба с общей вершиной и воспользоваться соотношениями между сторонами треугольника. **784.** Указание. Отделив от поверхности данного многогранника, имеющего f граней, k ребер и e вершин, внутреннюю область одной из граней, получим многогранную поверхность P_1. Отделив затем одну из тех граней поверхности P_1, которая имеет граничное ребро (т. е. ребро, являющееся стороной только этой грани), получим многогранную поверхность P_2. В P_2 сохранены те вершины и ребра удаленной грани, которые принадлежат другим граням. Продолжая этот процесс, через s шагов (где $1<s<f$) получим поверхность P_s. Доказать методом математической индукции по числу граней, что $f_s+e_s-k_s=1$, где $f_s=f-s$, k_s и e_s — числа граней, ребер и вершин поверхности P_s. При этом учесть, что это равенство при $f_s=1$, т. е. когда $s=f-1$, очевидно, так как в этом случае $k_s=e_s$. При $s=1$ получается искомое равенство $(f-1)+e-k=1$. **785.** Указание. Воспользоваться симметрией. **786.** Указание. Воспользоваться симметрией. **787.** $\sqrt{\frac{3}{7}}a$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **788.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **789.** Указание. Выразить векторы, задающие диагонали, через векторы, задающие ребра.

790. У к а з а н и е. Рассмотреть векторы, определяющие направления падающего и отраженного лучей. **791.** Два решения: 45° и 135°. **792.** У к а з а н и е. Исходя из условия задачи, записать соотношения для векторов, задающих три ребра тетраэдра с общим концом. **793.** У к а з а н и е. Рассмотреть вектор, образующий равные углы с боковыми ребрами, и доказать, что он перпендикулярен к векторам, задающим два ребра основания. **794.** У к а з а н и е. Пусть O_1 — проекция O на плоскость ABC. Доказать, что $\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CO_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. **795.** У к а з а н и е. Доказать, что эта величина равна квадрату диаметра шара. **796.** Дуга окружности, расположенная внутри шара, диаметр которой равен расстоянию от центра шара до данной прямой, а плоскость окружности перпендикулярна к данной прямой. **797.** Сфера, центр которой совпадает с центром данной сферы, а радиус равен $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, где R — радиус данной сферы. **799.** $r_3 \geqslant \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$, где r_3 — радиус меньшего из шаров. **800.** $r=\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **801.** $\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)-\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}R$ при $\lambda\neq 2$ и $\frac{\sqrt{3}}{6}R$ при $\lambda=2$. **802.** $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$ и $\frac{5}{12}V$, где V — объем призмы. **803.** У к а з а н и е. Достроить тетраэдр до треугольной призмы и воспользоваться задачей 733. **804.** У к а з а н и е. Доказать, что полученные тетраэдры имеют общее основание и равные высоты. **805.** 5:3. **806.** У к а з а н и е. Взяв за основание какую-нибудь грань с ребром AB, заметить, что ни ее площадь, ни высота тетраэдра не зависят от положения точек C и D. **807.** $\frac{5}{24}$ см^3. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 803. **808.** У к а з а н и е. Взять точку A внутри сечения и разбить многогранник на пирамиды с общей вершиной A. **809.** $\frac{16}{3}$ см^3. У к а з а н и е. Рассмотреть сечение фигуры плоскостями, параллельными осям цилиндров. **810.** $2\arcsin\frac{1}{3}$. **812.** $\frac{\pi a^3}{12}\left(3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. **813.** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. **814.** У к а з а н и е. Ввести радиус-векторы вершин тетраэдра, приняв за начало точку H. **815.** У к а з а н и е. Применить векторы и воспользоваться задачей 814.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Кадомцев Сергей Борисович
Киселева Людмила Сергеевна
Позняк Эдуард Генрихович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10—11 классов средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Младший редактор *Т. Ю. Федорова*
Художник *Е. П. Титков,*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректоры *И. А. Корогодина, Г. И. Мосякина*

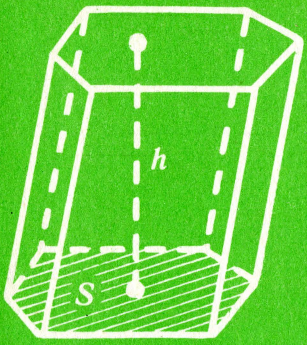
ИБ № 13903

Сдано в набор 17.07.91. Подписано к печати 09.01.92. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 13,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 13,69. Уч.-изд. л. 12,57+0,34 форз. Тираж 1 877 000 экз. Заказ 106.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации Российской Федерации. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

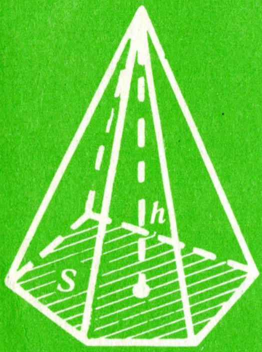
Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ



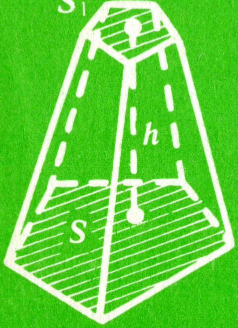
Призма

$$V = Sh$$



Пирамида

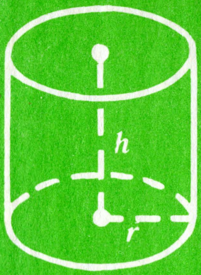
$$V = \frac{1}{3} Sh$$



Усеченная пирамида

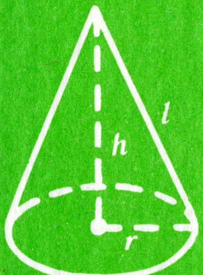
$$V = \frac{1}{3} h \left(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\right)$$

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ ВРАЩЕНИЯ



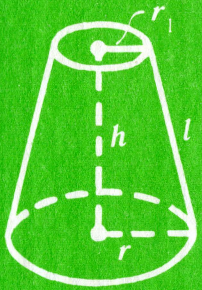
Цилиндр

$$S_{бок} = 2\pi r h$$
$$V = \pi r^2 h$$



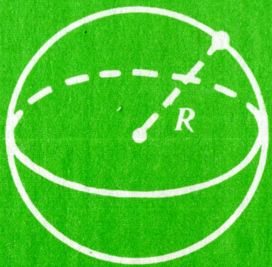
Конус

$$S_{бок} = \pi r l$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Усеченный конус

$$S_{бок} = \pi (r + r_1) l$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + r_1^2 + r r_1)$$



Сфера и шар

$$S = 4\pi R^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$