ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов инженерно-технических специальностей вузов

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.143
Б90
УДК 512.8(075.8)

Бугров Я. С., Никольский С. М. **Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии:** Учебник для вузов.— 3-е изд., испр. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 224 с. ISBN 5-02-013738-3

Книга вместе с двумя другими учебниками тех же авторов — «Дифференциальное и интегральное исчисление» и «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного» — соответствует программе по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов. В ней содержатся основные сведения по теории определителей и матриц, линейных систем уравнений, элементы векторной алгебры. Рассматриваются также основные вопросы линейной алгебры: линейные операторы, самосопряженные операторы, квадратичные формы. В книгу включены элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

2-е изд.— 1984 г.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Рецензент
кафедра высшей математики Московского инженерно-физического института (заведующий кафедрой — профессор *А. И. Прилепко*)

Б $\frac{1702040000-036}{053(02)-88}$ 66-88

ISBN 5-02-013738-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Второе и третье издания отличаются от первого рядом изменений и дополнений, которые вызваны замечаниями и пожеланиями отдельных лиц, организаций и рецензентов.

При изложении аналитической геометрии в двумерной плоскости и в трехмерном пространстве мы заменили обозначения x_1, x_2, x_3 на традиционные x, y, z. Мы продолжаем придавать большое значение уравнениям прямой и плоскости в нормальном виде. Обобщение этих понятий на n-мерный случай создает по аналогии нужную геометрическую интуицию в n-мерном пространстве.

Мы теперь рассматриваем комплексные матрицы наряду с действительными. Однако доказательство, как правило, излагаем отдельно в действительном и комплексном случаях, чтобы комплексный случай при необходимости можно было опустить. В связи с этим пришлось изменить обозначения транспонированной и сопряженной матриц.

Элементарные преобразования (см. § 4) теперь получили обоснование. Ранее этот вопрос был изложен только на примерах. Впрочем, мы думаем, что этого было бы достаточно.

Некоторые параграфы подразделены на пункты, снабженные названиями.

Произведены некоторые дополнения по теории матриц и операторов.

Во втором издании добавлены § 27, 28, посвященные плоскости в n-мерном пространстве и различным задачам.

В третьем издании § 28 заменен. Основная цель, которую мы ставили перед собой при написании § 28, заключается в ознакомлении с элементами теории линейного программирования в минимальном объеме и методами решения простейших задач, в частности с симплекс-методом. При изложении материала мы использовали учебное пособие А. С. Солодовникова «Введение в линейную алгебру и линейное программирование».

Выражаем благодарность секции технических вузов Научно-методического совета по математике при Минвузе СССР под руководством профессора Л. Д. Кудрявцева и кафедре высшей математики № 2 Ленинградского политехнического института за обсуждение наших учебников и ценные замечания и предложения, которые, несомненно, способствовали улучшению их содержания.

Мы также выражаем благодарность Ю. И. Волкову, М. Ш. Коссу, Я. М. Тобольцеву и ряду других читателей за ценные конструктивные предложения, которые мы старались учесть при работе над вторым изданием.

В 1984 г. комплекс наших учебников по высшей математике удостоен премии МВ и ССО СССР и ЦИК профсоюзов работников просвещения, высшей школы и научных учреждений, в 1986 г. — диплома почета ВДНХ СССР, а в 1987 г. — Государственной премии СССР.

Авторы выражают благодарность профессору А. И. Прилепко и руководимой им кафедре высшей математики Московского инженерно-физического института за тщательное рассмотрение комплекса учебников и ценные замечания.

Данный комплекс находит широкое применение в технических вузах страны. В настоящее время он переведен на английский, французский, испанский и португальский языки.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Данная книга является первой частью нашего учебника «Высшая математика». Здесь излагаются основные вопросы теории определителей, элементы теории матриц, теория систем линейных уравнений, векторная алгебра. Рассмотрены также основные разделы линейной алгебры: линейные операторы, ортогональные преобразования, самосопряженные операторы, квадратичная форма и приведение ее к каноническому виду.

Включены элементы аналитической геометрии: прямая линия, плоскость, прямая в пространстве, кривые и поверхности второго порядка.

Рассуждения, как правило, ведутся с полными доказательствами. Однако изложение ведется так, что доказательства в общем n-мерном случае могут быть опущены, но останется не только формулировка утверждения, но и детальное разъяснение того, как в соответствующем случае обстоит дело в двух- и трехмерных случаях.

Канонические виды кривых и поверхностей второго порядка изложены в этой книге весьма кратко, так как предполагается, что они дополнительно будут изучаться в виде задач методами математического анализа. Квадратичная форма изучается методами математического анализа или, если угодно, функционального анализа.

Хотя мы и называем эту книгу первой в нашей серии, на самом деле материал этой и второй книги (посвященной дифференциальному и интегральному исчислению) тесно переплетается. Хорошо известно, в какой последовательности следует излагать материал, содержащийся в этих книгах.

В книге изложены все вопросы, предусмотренные программами для высших технических учебных заведений (объемом 400—500 часов).

§ 1. Определители второго порядка

Пусть заданы числа a_1, a_2, b_1, b_2 (действительные или комплексные). Они определяют число $a_1b_2-a_2b_1$, которое называется *определителем* или *детерминантом второго порядка* и записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1. \tag{1}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами определителя* (детерминанта). В определителе (1) различают *первую строку* a_1, a_2 и *вторую строку* b_1, b_2, *первый столбец* a_1, b_1 и *второй столбец* a_2, b_2.

Легко проверяются следующие *свойства определителя. Величина определителя*:

а) *не меняется, если у него заменить строки соответствующими столбцами*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

б) *меняет знак, если у него переменить местами строки* (*столбцы*):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix};$$

в) *умножается на число k (действительное или комплексное), если элементы какого-либо его столбца или строки умножить на k*, например:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е. *общий множитель, присутствующий в строке или столбце, можно выносить за знак определителя*;

г) *равна нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю*, например:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0b_2 - 0b_1 = 0;$$

д) *равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны*, например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.$$

В дальнейшем вводятся определители третьего и вообще n-го порядка. Для них свойства а), б), в), г), д) сохраняются.

§ 2. Определители третьего и n-го порядка

2.1. Определители третьего порядка. Число

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \quad (1)$$

записываемое в форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), называется *определителем* или *детерминантом третьего порядка*.

В определителе (2) различают первую, вторую и третью строки, так же как первый, второй и третий столбцы. Число a_{kl} называется *элементом* определителя; при этом первый индекс k указывает номер строки, а второй индекс l — номер столбца, к которому принадлежит данный элемент. Будем также говорить, что элемент a_{kl} находится на пересечении k-й строки и l-го столбца. Элементы определителя a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} — *побочную*. Можно также говорить, что диагональ, на которой расположены элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, называется главной диагональю определителя (2).

Структура выражения (1) довольно проста. Это есть число, вычисляемое по элементам a_{kl} по следующему наглядному правилу (Саррюса): составим таблицу (Саррюса), полученную из элементов определителя (2), если приписать к ним первый и второй столбцы определителя (рис. 1). Мы видим, что надо взять всевозможные произведения элементов, зачеркнутых прямыми; при этом три произведения, соответствующие прямым, параллельным главной диагонали, надо взять со знаком плюс, а остальные три произведения, соответствующие прямым, параллельным побочной диагонали, надо взять со знаком минус.

Каждое произведение с указанным знаком называется *членом определителя* (2). Среди входящих в произведения

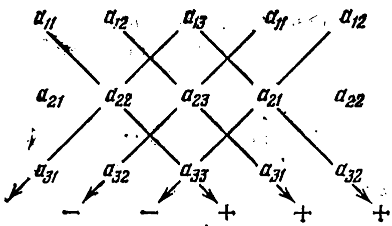

Рис. 1.

элементов имеются представители от каждой строки и от каждого столбца. Эти элементы можно в каждом члене расположить в порядке возрастания первого индекса, т. е. номеров строк, к которым они принадлежат. Это и сделано в сумме (1). Что же касается номеров столбцов, к которым принадлежат эти элементы, то их расположения даются ниже:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3, \\ 2 & 3 & 1, \\ 3 & 1 & 2, \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{matrix} 3 & 2 & 1, \\ 1 & 3 & 2, \\ 2 & 1 & 3. \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

Это всевозможные перестановки из чисел 1, 2, 3. Перестановку

$$1,\ 2,\ 3 \qquad (5)$$

из чисел 1, 2, 3 назовем *основной*.

Говорят, что в перестановке произведена *транспозиция двух определенных ее элементов*, если эти элементы заменены местами. После транспозиции перестановка переходит в другую перестановку. В этой последней можно сделать в свою очередь транспозицию, в результате получится третья перестановка (но не исключено, что и первая).

Например, перестановка

$$3,\ 2,\ 1 \tag{6}$$

получена транспозицией первого и третьего элементов перестановки (5), а перестановка

$$2,\ 3,\ 1 \tag{7}$$

транспозицией первого и второго элементов перестановки (6).

Важно отметить, что, если некоторая перестановка получена из основной посредством N транспозиций и если эта же перестановка получена из основной каким-либо другим путем посредством N_1 транспозиций, то оба числа N и N_1 одновременно либо четные, либо нечетные. Перестановка чисел 1, 2, 3 называется *четной (нечетной)*, если она получается из основной перестановки при помощи четного (нечетного) числа транспозиций.

Пусть дана перестановка $j=(j_1,\ j_2,\ j_3)$, где $j_1,\ j_2,\ j_3$ это числа 1, 2, 3, взятые в некотором порядке. *Число транспозиций*, с помощью которых можно получить эту перестановку из основной перестановки, обозначим через $t(j)$. Тогда перестановка j является четной (нечетной), если $t(j)$ — четное (нечетное) число.

Перестановки (3) — четные, а (4) — нечетные.

После сказанного можно дать другое эквивалентное определение определителя 3-го порядка.

Определителем или *детерминантом 3-го порядка* (2) называется число Δ, равное сумме

$$\Delta=\sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \tag{8}$$

произведений вида $(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, где $j=(j_1,\ j_2,\ j_3)$ — всевозможные различные перестановки основной перестановки 1, 2, 3.

Это определение обобщается на определители или детерминанты n-го порядка ($n=1,\ 2,\ 3,\dots$).

2.2. Определители n-го порядка. *Определителем* или *детерминантом n-го порядка* называется число, записываемое в виде

$$\Delta=|a_{ik}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

и вычисляемое по данным числам a_{ik} (действительным или комплексным) — элементам определителя — по следующему закону: Δ есть сумма

$$\Delta=\sum_{j}(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

распространенная на всевозможные различные перестановки $j=(j_1, \dots, j_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$. Число $t(j)$ равно *числу транспозиций*, которые нужно сделать, чтобы перейти от основной перестановки $1, 2, \dots, n$ к перестановке $j=(j_1, \dots, j_n)$. Произведение $(-1)^{t(j)}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}$ называется *членом определителя.*

Определители n-го порядка удовлетворяют свойствам а), б), в), г), д), *перечисленным в предыдущем параграфе.*

Доказательство. а) После замены у определителя соответствующих строк столбцами теперь уже номера строк будут обозначаться вторыми индексами. Например, для определителя третьего порядка (2) будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}=\Delta.$$

В общем случае общий член нового определителя запишется

$$(-1)^{t(j)}a_{j_11}a_{j_22}\dots a_{j_nn}.$$

Упорядочим множители произведения $a_{j_11}a_{j_22}\dots a_{j_nn}$ по первому индексу, т. е. мы переходим от перестановки $j=(j_1, \dots, j_n)$ к основной перестановке $1, 2, \dots, n$. При этом мы должны совершить $t(j)$ транспозиций. Тогда основная перестановка вторых индексов перейдет в некоторую перестановку $i=(i_1, \dots, i_n)$ и число $t(i)$ будет той же четности, что и число $t(j)$. Таким образом,

$$(-1)^{t(j)}a_{j_11}\dots a_{j_nn}=(-1)^{t(i)}a_{1i_1}\dots a_{ni_n}.$$

Нетрудно видеть, что разным перестановкам $j_1, \dots, j_n$ соответствуют разные перестановки $i_1, \dots, i_n$. Но тогда

$$\sum_{j}(-1)^{t(j)}a_{j_11}\dots a_{j_nn}=\sum_{i}(-1)^{t(i)}a_{1i_1}\dots a_{ni_n}=\Delta.$$

б) Поменяем местами, например, первую и третью строки определителя третьего порядка (2). Тогда получим определитель, который обозначим через Δ', он будет равен

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \sum_{j} (-1)^{t(j)} a_{3j_1} a_{2j_2} a_{1j_3} =$$

$$= \sum_{j} (-1)^{t(j)} a_{1j_3} a_{2j_2} a_{3j_1} = - \sum_{j'=(j_3,\, j_2,\, j_1)} (-1)^{t(j')} a_{1j_3} a_{2j_2} a_{3j_1} = -\Delta,$$

так как перестановка $j=(j_1, j_2, j_3)$ отличается от перестановки $j'=(j_3, j_2, j_1)$ одной транспозицией.

Будем говорить, что число k умножается на строку (столбец) определителя, если на самом деле k умножается на все элементы строки (столбца).

в) Умножение на число k какой-либо строки (столбца) определителя сводится к умножению всех его членов на k, потому что каждый член содержит один элемент указанной строки (столбца). Но тогда величина суммы членов умножится на k.

г) Определитель, у которого элементы какого-либо столбца или строки равны нулю, равен нулю, потому что все его члены, очевидно, равны нулю.

д) Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца. Это следует из свойства б) ($\Delta' = -\Delta$, $\Delta' = \Delta$, откуда $\Delta = 0$).

Вычеркнем из определителя (9) n-го порядка i-ю строку и k-й столбец. Оставшееся выражение порождает определитель $(n-1)$-го порядка M_{ik}, называемый *минором элемента* a_{ik}. Величина же

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

называется *алгебраическим дополнением* или *адъюнктом* элемента a_{ik}.

Свойство е) *Сумма произведений элементов* a_{ik} *некоторой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения этих элементов равна величине определителя*:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{10'}$$

Докажем это свойство для определителя третьего порядка в случае третьей строки. Имеем

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=$$
$$=a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=$$
$$=a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})+a_{32}(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23})+$$
$$+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\Delta.$$

Сумму (10) называют *разложением определителя по элементам i-й строки*, а сумму (10′) — *разложением определителя по элементам k-го столбца.*

Пример 1. Если в определителе Δ (см. (9)) $a_{21}=a_{31}=\ldots=a_{n1}=0$, то $\Delta=a_{11}A_{11}$, т. е. вычисление этого определителя сводится к вычислению одного его адъюнкта, т. е. определителя $(n-1)$-го порядка.

Пример 2. Если все элементы Δ, стоящие ниже (выше) главной диагонали Δ, равны нулю ($a_{kl}=0$, если $k>l$ ($k<l$)), то $\Delta=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. Это следует из предыдущего примера.

Свойство ж) *Сумма произведений элементов a_{ik} некоторой строки (столбца) определителя на соответствующие адъюнкты элементов другой строки (столбца) равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \tag{11}$$

$(i\neq j;\ i, j=1, \ldots, n)$.

В самом деле, зафиксируем наше внимание на первой сумме. Эта сумма не зависит от элементов j-й строки. Заменим в нашем определителе элементы j-й строки на соответствующие элементы i-й строки. От этого рассматриваемая сумма не изменится. Между тем теперь ее можно рассматривать как разложение нового определителя по элементам j-й строки, но тогда она равна величине нового определителя. Но последний равен нулю на основании свойства д), потому что он имеет одинаковые строки — i-ю и j-ю.

Свойство з) *Пусть даны два определителя n-го порядка Δ_1 и Δ_2, у которых все строки (столбцы) одинаковы, кроме определенной одной (одного). Сумма таких определителей равна определителю Δ n-го порядка, у которого указанная строка (столбец) состоит из суммы соответствующих элементов этой строки (столбца)* *определителей* Δ_1 *и* Δ_2. Например,

$$\Delta_1+\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & (a_{nn}+b_{nn})\end{vmatrix}=\Delta.$$

В самом деле, разлагая данные определители по элементам n-го столбца, получим

$$\Delta_1+\Delta_2=\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kn}+\sum_{k=1}^{n} b_{kn}A_{kn}=\sum_{k=1}^{n}(a_{kn}+b_{kn})A_{kn}=\Delta.$$

Свойство и) *Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число* k. Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+ka_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+ka_{n1}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n1}\end{vmatrix}=|a_{kl}|+k\cdot 0=|a_{kl}|,$$

в силу свойств з), в), д).

Надлежащее применение этого свойства приводит вычисление данного определителя к вычислению определителя более низкого порядка.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -31 & -39\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -31 & -39\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 31 & 39\end{vmatrix}=5\cdot 39-9\cdot 31=-84.$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -7 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 2\end{vmatrix}=17.$$

Пример 5. Определитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

порожденный числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *степенным* или *определителем Вандермонда*[1]).

Этот определитель равен нулю, если какие-либо два числа a_j и a_k равны между собой. Если все a_j различны, то

$$\begin{aligned}\Delta_n = &(a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\ldots(a_2 - a_1)\cdot\\ &\cdot(a_n - a_2)(a_{n-1} - a_2)\ldots(a_3 - a_2)\cdot\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\cdot(a_n - a_{n-2})(a_{n-1} - a_{n-2})\cdot\\ &\cdot(a_n - a_{n-1}).\end{aligned} \tag{12}$$

В самом деле, при $n=2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

т. е. формула (12) верна. Допустим, что формула (12) верна при $n=k-1$, и докажем, что она верна при $n=k$. Будем использовать свойства и), в) определителя. Умножим $k-1$-й столбец в определителе Δ_k на a_1 и вычтем из k-го, $k-2$-й столбец умножим также на a_1 и вычтем из $k-1$-го и т. д.; тогда получим

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \ldots & a_2^{k-2}(a_2 - a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_k - a_1 & a_k(a_k - a_1) & \ldots & a_k^{k-2}(a_k - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_k - a_1)(a_{k-1} - a_1)\ldots(a_2 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_2^{k-2} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_k & \ldots & a_k^{k-2} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть также определитель Вандермонда порядка $(k-1)$, порожденный числами $a_2, \ldots, a_k$, поэтому, по предположению, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_k = &(a_k - a_1)(a_{k-1} - a_1)\ldots(a_2 - a_1)\cdot\\ &\cdot(a_k - a_2)(a_{k-1} - a_2)\ldots(a_3 - a_2)\cdot\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\cdot(a_k - a_{k-2})(a_{k-1} - a_{k-2})\cdot\\ &\cdot(a_k - a_{k-1}).\end{aligned}$$

---

[1]) А. Т. Вандермонд (1735—1796) — французский математик.

Таким образом, в силу метода математической индукции формула (12) верна при любом $n \geqslant 2$.

Свойство к) *Пусть*

$$\Delta_1 = |b_{kl}|, \quad \Delta_2 = |a_{kl}|.$$

Произведение двух определителей n-го порядка с элементами b_{kl}, a_{kl} есть в свою очередь определитель n-го порядка с элементами

$$\gamma_{kl} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{jl},$$

т. е.

$$\Delta_1\Delta_2 = \left|\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{jl}\right| = \Delta.$$

Таким образом, элемент γ_{kl}, принадлежащий к k-й строке и l-му столбцу определителя Δ, равен, как говорят, *произведению k-й строки определителя Δ_1 на l-й столбец определителя Δ_2*. На самом деле это есть *сумма произведений* элементов k-й строки определителя Δ_1 на соответствующие элементы l-го столбца определителя Δ_2.

Так как в определителях Δ_1 и Δ_2 можно менять строки со столбцами, то, очевидно, элементы γ_{kl} произведения Δ можно строить также, беря произведение k-й строки Δ_1 на l-ю строку Δ_2 или произведение k-го столбца Δ_1 на l-й столбец Δ_2 или k-го столбца на l-ю строку.

Доказательство. Убедимся в справедливости свойства на примере определителей второго порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$\gamma_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}, \quad \gamma_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22},$$
$$\gamma_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}, \quad \gamma_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}.$$

В силу свойств з), в), д)

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{12}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{11} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} + a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{21}a_{22}\begin{vmatrix} b_{12} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdot 0 + a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} -$$
$$- a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{21}a_{22}\cdot 0 = a_{11}a_{22}\Delta_1 - a_{12}a_{21}\Delta_1 =$$
$$= \Delta_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \Delta_1\Delta_2.$$

В общем случае определителей n-го порядка можно записать:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sum_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_11} & \sum_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_12} & \ldots & \sum_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_1n} \\ \sum_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_21} & \sum_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_22} & \ldots & \sum_{s_2=1}^{n} a_{2s_2}b_{s_2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_n1} & \sum_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_n2} & \ldots & \sum_{s_n=1}^{n} a_{ns_n}b_{s_nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}\ldots\sum_{s_n=1}^{n} a_{1s_1}a_{2s_2}\ldots a_{ns_n}\begin{vmatrix} b_{s_11} & b_{s_12} & \ldots & b_{s_1n} \\ b_{s_21} & b_{s_22} & \ldots & b_{s_2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s_n1} & b_{s_n2} & \ldots & b_{s_nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{s=(s_1,\,s_2,\,\ldots,\,s_n)} a_{1s_1}a_{2s_2}\ldots a_{ns_n}\,(-1)^{t(s)}\,\Delta_1=\Delta_2\Delta_1.$$

При вычислении отдельных элементов Δ мы вправе выбирать любой индекс суммирования s $\left(\gamma_{kl}=\sum_{s=1}^{n} a_{ks}b_{sl}\right)$, но для дальнейшего удобно для первой строки Δ взять в качестве такого индекс s_1, для второй — s_2 и т. д. Второе равенство имеет место на основании свойств з) и в); при этом кратная сумма $\sum_{s_1=1}^{n}\sum_{s_2=1}^{n}\ldots\sum_{s_n=1}^{n}$ распространяется на всевозможные перестановки $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где $1\leqslant s_j\leqslant n$. Однако если в какой-либо системе $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ две компоненты s_i и s_j равны между собой $(s_i=s_j,\ i\neq j)$, то определитель $|b_{s_kl}|=0$. Поэтому на самом деле в кратной сумме можно оставить только члены, соответствующие разным перестановкам $(s_1, \ldots, s_n)$ из натуральных чисел $(1, \ldots, n)$. При этом, очевидно, окажется, что определитель

$$|b_{s_kl}|=(-1)^{t(s)}\Delta_1.$$

§ 3. Матрицы

Таблица чисел α_{ij} (действительных или комплексных) вида

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}=\|\alpha_{ij}\|=(\alpha_{ij}), \qquad (1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей*. Числа α_{ij} называются ее *элементами*. Это прямоугольная матрица. При $m=n$ она называется *квадратной матрицей* n-го порядка.

Если задана вторая матрица $B=\|\beta_{ij}\|$ с элементами β_{ij}, тоже состоящая из m строк и n столбцов, то она считается *равной* матрице A тогда и только тогда, когда соответствующие элементы обеих матриц равны ($\alpha_{ij}=\beta_{ij}$). В этом случае пишут $A=B$. Матрица $\|\alpha_{ij}\|$ не есть число — это таблица. Однако для квадратной матрицы можно рассматривать число $|\alpha_{ij}|$ — *определитель, порожденный этой матрицей.*

Пусть k — натуральное число, не превышающее m и n ($k\leqslant m, n$). Зачеркнем в таблице (1) какие-либо k столбцов и k строк. Элементы α_{js}, находящиеся на пересечении зачеркнутых столбцов и строк, образуют квадратную матрицу, которая порождает определитель k-го порядка. Полученный определитель называется *определителем k-го порядка, порожденным матрицей A.*

Рангом матрицы A называется наибольшее натуральное число k, для которого существует не равный нулю определитель k-го порядка, порождаемый матрицей A (см. § 4).

Если в матрице A сделать ее строки столбцами с тем же самым номером, то получим матрицу

$$A'=\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{mn}\end{matrix}\right\|, \qquad (2)$$

называемую *транспонированной к A матрицей.*

Если в матрице A ее элементы α_{kl} заменить на им комплексно сопряженные, то получим матрицу

$$\overline{A}=\left\|\begin{matrix}\overline{\alpha}_{11} & \dots & \overline{\alpha}_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \overline{\alpha}_{n1} & \dots & \overline{\alpha}_{nn}\end{matrix}\right\|=\|\overline{\alpha}_{kl}\|,$$

называемую *комплексно сопряженной с A матрицей.*

Далее матрица

$$\overline{A}'=(\overline{A})'=\left\|\begin{matrix}\overline{\alpha}_{11} & \dots & \overline{\alpha}_{n1}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \overline{\alpha}_{1n} & \dots & \overline{\alpha}_{nn}\end{matrix}\right\|=A^*$$

называется *сопряженной с A матрицей.*

Если A — действительная матрица, т. е. имеющая действительные элементы ($\overline{\alpha}_{kl}=\alpha_{kl}$), то, очевидно,

$$A=\overline{A}, \quad A'=A^*.$$

Матрицы одного и того же размера, т. е. состоящие из одинакового числа строк и столбцов, можно складывать.

Суммой двух таких матриц $A=\|\alpha_{ij}\|$ и $B=\|\beta_{ij}\|$ называется матрица $C=\|\gamma_{ij}\|$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$. Символически этот факт будем записывать так:

$$A+B=C.$$

Легко видеть, что

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Произведением числа λ на матрицу A (или произведением матрицы A на число λ) будем называть матрицу, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A. Таким образом, $\lambda A=A\lambda$.

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\lambda A+\mu B$.

На основании определения суммы матриц и умножения матрицы на число имеем

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2\lambda\\ 2\lambda & 3\lambda & \lambda\end{pmatrix},\quad \mu B=\begin{pmatrix}2\mu & 0 & \mu\\ 2\mu & \mu & \mu\end{pmatrix},$$

$$\lambda A+\mu B=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0 & 2\lambda+\mu\\ 2\lambda+2\mu & 3\lambda+\mu & \lambda+\mu\end{pmatrix}.$$

§ 4. Система линейных уравнений. Теория Кронекера — Капелли[1]

4.1. Система из n линейных уравнений с n неизвестными. Будем называть произвольную систему из n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ *n-мерным вектором* и обозначать его также одной (жирной) буквой $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n).$$

Числа x_j (действительные или комплексные) называют *компонентами* вектора $\boldsymbol{x}$. Вектор

$$0=(0, \ldots, 0)$$

называется *нулевым вектором*.

[1] Л. Кронекер (1823—1891) — немецкий математик, А. Капелли (1855—1910) — итальянский математик.

Зададим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=y_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Числа a_{kl} (действительные или комплексные), называемые *коэффициентами системы* (1), заданы. Будем еще говорить, что система (1) определяется матрицей

$$A=\|a_{kl}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

ее коэффициентов.

Нас будет интересовать вопрос о разрешимости системы (1) для каждого вектора (системы чисел)

$$\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n).$$

Система чисел (вектор)

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$$

называется *решением системы уравнений* (1), если числа x_j удовлетворяют этим уравнениям.

4.2. Формулы Крамера.

Теорема 1. *Если определитель системы* (1) *не равен нулю:*

$$\Delta=|a_{kl}|\neq 0,$$

то система (1) *имеет единственное решение для любого вектора* $\boldsymbol{y}$, *вычисляемое по формулам (Крамера*[1]*)*

$$x_j=\Delta^j/\Delta \qquad (j=1, \ldots, n), \qquad (3)$$

где Δ^j — *определитель, получаемый из определителя* Δ, *если в нем заменить числа* j*-го столбца соответственно на числа* $y_1, \ldots, y_n$*:*

$$\Delta^j=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & y_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & y_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Таким образом,

$$x_j=\frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n} A_{sj}y_s \qquad (j=1, \ldots, n), \qquad (3')$$

где A_{sj} *есть адъюнкт элемента* a_{sj} *в определителе* Δ.

[1]) Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

Доказательство. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ есть решение системы (1). Чтобы найти неизвестное число x_1, умножим первое уравнение системы (1) на адъюнкт A_{11}, второе — на A_{21}, . ., n-е — на A_{n1} и сложим все уравнения системы. Тогда, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k1} x_1 A_{k1} = x_1 \sum_{k=1}^{n} a_{k1} A_{k1} = x_1 \Delta$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_j A_{k1} = x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{k1} = x_j \cdot 0 = 0 \quad (j \neq 1),$$

получаем $x_1 \Delta = \Delta^1$, где

$$\Delta^1 = \sum_{s=1}^{n} y_s A_{s1} = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, так как по условию $\Delta \neq 0$, то $x_1 = \Delta^1/\Delta$.

В общем случае при произвольном j умножаем первое уравнение системы (1) на A_{1j}, второе — на A_{2j}, ..., n-е — на A_{nj}, складываем эти уравнения и получаем на основании свойств определителей е), ж) равенство

$$x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} y_k A_{kj},$$

т. е.

$$x_j \Delta = \Delta^j,$$

где

$$\Delta^j = \sum_{k=1}^{n} y_k A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,\, j-1} & y_1 & a_{1,\, j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,\, j-1} & y_n & a_{n,\, j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отсюда в силу того, что $\Delta \neq 0$, следует равенство (3).

Мы доказали, что если $(x_1, \ldots, x_n)$ есть решение системы (1), то числа x_j определяются формулами (3′).

Обратно, совокупность чисел $x_j = \Delta^j/\Delta$ $(j = 1, \ldots, n)$ является решением системы (1). В самом деле, подставляя x_j $(j = 1, \ldots, n)$ в левую часть k-го уравнения $(k = 1, \ldots, n)$ системы (1), на основании свойств е), ж) определителя, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{\Delta^j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \sum_{s=1}^{n} y_s A_{sj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} y_s \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{sj} = \frac{1}{\Delta} y_k \Delta = y_k.$$

Таким образом, числа (3′) действительно являются решением системы (1).

4.3. Однородная система. Система уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

называется *однородной*. Она является частным случаем системы (1) при $y_1=\ldots=y_n=0$. Ясно, что нулевой вектор

$$x_1=0,\ \ldots,\ x_n=0$$

удовлетворяет однородной системе (5). Но может случиться, что однородная система (5) удовлетворяется не нулевым вектором $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, т. е. вектором, имеющим хотя бы одну компоненту $x_i\neq 0$. Его называют *нетривиальным решением однородной системы* (5), а нулевой вектор поэтому называют *тривиальным решением однородной системы* (5).

Теорема 2. *Если определитель Δ однородной системы* (5) *не равен нулю* ($\Delta\neq 0$), *то эта система имеет только тривиальное решение.*

В самом деле, в силу свойства г) все определители $\Delta^j=0$ (см. (4)), поэтому в силу равенств (3) $x_j=0$ ($j=1,\ldots,n$).

Теорема 3. *Если система уравнений* (5) *имеет нетривиальное решение, то ее определитель Δ необходимо равен нулю* ($\Delta=0$).

В самом деле, если бы $\Delta\neq 0$, то по теореме 2 система (5) имела бы только одно тривиальное решение.

Выше мы исследовали линейную систему (1) в случае, когда ее определитель $\Delta\neq 0$. В этом случае было показано (теорема 1), что система (1) имеет для любой правой части $\boldsymbol{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ единственное решение, вычисляемое по формулам (3).

4.4. Правило решения системы линейных уравнений. Теперь мы переходим к исследованию системы (1) в случае, когда ее определитель $\Delta=0$. Будем предполагать, что хотя бы один элемент матрицы A (см. (2)) не равен нулю и обозначим ранг A через k ($k=$ ранг A). Таким образом, $1\leqslant k<n$.

Нашей целью будет доказать следующие правила (явным образом они сформулированы и доказаны Кронекером и Капелли).

Если мы хотим решить систему (1), для которой известно, что ранг матрицы A ее коэффициентов равен k, то мы должны узнать ранг *расширенной матрицы*

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \end{Vmatrix},$$

полученной присоединением к A столбца

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

1) Если ранг B больше ранга A (ранг $B >$ ранг $A = k$), то система (1) вовсе не имеет решений. Она *противоречива* — не существует вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющего одновременно всем уравнениям (1).

2) Если ранг B равен рангу A (ранг $B =$ ранг $A = k$), то система (1) имеет решения. Чтобы найти их, мы должны выбрать из системы (1) какие-нибудь k уравнений, матрица коэффициентов которых имеет ранг k, и решить эти k уравнений. Решений у этой системы из k уравнений будет бесконечно много, но их можно записать в обозримом виде.

При этом любое решение взятых нами k уравнений автоматически является решением остальных $n-k$ уравнений системы (1).

Правила 1) и 2) исчерпывают возможные ситуации, потому что ранг B не может быть меньшим k.

Ведь матрица A по условию порождает не равный нулю определитель k-го порядка, который порождается также и матрицей B.

4.5. Примеры приложения правил.

Пример 1. Система

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

и потому имеет единственное решение, которое можно вычислить по формулам

$$x = \Delta^1/\Delta, \quad y = \Delta^2/\Delta,$$

где

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

т. е.

$$x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1,\\ x+y&=2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

имеет определитель, равный нулю. Матрица

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$$

имеет ранг $A=1$. А матрица

$$B=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{Vmatrix}$$

имеет ранг $B=2$. Так как ранг $B>$ ранг A, то система (6) не имеет решений. Это видно, впрочем, и без нашей теории: одно и то же число не может равняться и 1 и 2.

Пример 3. Система

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y&=2,\\ 3x+3y&=3 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

имеем определитель $\Delta=0$. Матрица

$$A=\begin{Vmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{Vmatrix}$$

имеет ранг $A=1$. Расширенная матрица

$$B=\begin{Vmatrix}2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{Vmatrix}$$

тоже имеет ранг $B=1$. Так как ранг $A=$ ранг $B=1$, то берем одно уравнение

$$2x+2y=2. \tag{8}$$

Коэффициент при y не равен нулю, поэтому это уравнение можно решить относительно y:

$$y=\frac{2-2x}{2}=1-x. \tag{9}$$

Формула (9) дает все решения уравнения (8). Мы можем задать любое значение x $(-\infty<x<\infty)$ и вычислить значение y по формуле (9). Получим систему (вектор) (x, y), удовлетворяющую уравнению (8). Множество всех систем

$(x, \ 1-x)$, где $x \in (-\infty, \infty)$, образует множество всех решений уравнения (8). Эти решения автоматически являются решениями и второго уравнения системы (7), потому что ранг $A =$ ранг B. В данном случае этот результат очевиден без применения теории о рангах матриц. Коэффициенты уравнений (7) вместе с их правыми частями соответственно пропорциональны, поэтому ясно, что всякое решение одного из этих уравнений является также решением другого.

Пример 4. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ 2x+y+2z&=1,\\ x+y+3z&=2 \end{aligned}\right\}$$

имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

и поэтому имеет единственное решение, которое можно вычислить по формулам

$$x = \frac{\Delta^1}{\Delta} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta^2}{\Delta} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta^3}{\Delta} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ x+y+3z&=2 \end{aligned}\right\}$$

имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг $A = 2$, так как $\Delta = 0$, но имеется определитель второго порядка, порожденный матрицей A, не равный нулю. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матрица

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг $B = 3$, так как определитель, порожденный этой матрицей,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Так как ранг $B >$ ранг A, то система не имеет решения.

Пример 6. Система

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + 2z &= 1, \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Легко подсчитать, что матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$$

имеют равные ранги, причем ранг $A =$ ранг $B = 2$. Выберем из системы (10) два уравнения так, чтобы ранг матрицы A' из коэффициентов этих уравнений был равен 2. В данном случае можно взять первое и второе уравнения или первое и третье. Итак, рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + 2z &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Перенесем в правые части этих уравнений одно из неизвестных так, чтобы коэффициенты при оставшихся неизвестных образовывали матрицу A'', у которой ранг $A'' = 2$. В данном случае можно перенести или x или y.

Итак, неоднородная система

$$\left.\begin{aligned} x+\ \ z&=1-y,\\ x+2z&=1-y \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

имеет определитель

$$\Delta''=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

поэтому она имеет единственное решение при любой правой части:

$$x=\frac{1}{\Delta''}\begin{vmatrix}1-y & 1\\ 1-y & 2\end{vmatrix}=1-y,\quad z=\frac{1}{\Delta''}\begin{vmatrix}1 & 1-y\\ 1 & 1-y\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, тройки чисел $(1-y,\ y,\ 0)$ при всяком $y\in(-\infty,\ \infty)$ дают все решения системы (12) и автоматически решения третьего уравнения системы (10) (это уравнение получается из второго умножением на 2).

4.6. Обоснование правил.

Теорема 4. *Если система* (1) *совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение* x, *то необходимо* ранг $B=$ ранг A.

Теорема 4 дает обоснование правилу 1) (см. стр. 23) потому, что если ранг $B>$ ранг A, то не выполняется необходимое условие совместности (непротиворечивости) системы (1).

Доказательство теоремы 4. Пусть система (1) имеет решение и ранг $A=k$. Нам надо доказать, что ранг $B=k$. Так как по условию ранг $A=k$, то существует не равный нулю определитель k-го порядка, порождаемый матрицей A, следовательно и матрицей B. Поэтому ранг $B\geqslant k$. Остается доказать, что всякий определитель $(k+1)$-го порядка, порождаемый матрицей B, равен нулю. Если такой определитель состоит только из элементов a_{ij}, то он заведомо равен нулю, потому что он порождается также и матрицей A, которая по условию имеет ранг k. Таким образом, нужно доказать, что любой определитель $(k+1)$-го порядка, порождаемый матрицей B и содержащей в себе столбец из чисел y_j, равен нулю. Не нарушая общности, можно считать, что это определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & y_1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & y_{k+1}\end{vmatrix}.$$

К этому можно свести любой случай, перенумеровывая соответствующим образом уравнения и неизвестные x_j. По условию система (1) совместна, т. е. существует вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \dots,\ x_n)$, удовлетворяющий уравнениям этой системы. Но тогда $\boldsymbol{x}$, в частности, удовлетворяет первым $k+1$ уравнениям заново перенумерованной системы. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1&+\dots+a_{1k}x_k+\lambda_1=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{k+1,1}x_1&+\dots+a_{k+1,k}x_k+\lambda_{k+1}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \;\; = a_{1,\,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n - y_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_{k+1} = a_{k+1,\,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n - y_{k+1}.\end{array}\right\} \tag{14}$$

Составим систему с неизвестными $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}z_1 + \ldots + a_{1k}z_k \qquad + \lambda_1 z_{k+1} \;\;= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k+1,\,1}z_1 + \ldots + a_{k+1,\,k}z_k + \lambda_{k+1}z_{k+1} = 0.\end{array}\right\} \tag{15}$$

На основании (13) и (14) эта система удовлетворяется числами $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$, 1, среди которых во всяком случае одно не равно нулю. Но тогда определитель однородной системы (15) равен нулю (см. теорему 3), т. е.

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,\,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n - y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,\,1} & \ldots & a_{k+1,\,k} & a_{k+1,\,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,\,n}x_n - y_{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{s=k+1}^{n} x_s \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,\,k} & a_{k+1,\,s} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,\,k} & y_{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1,\,1} & \ldots & a_{k+1,k} & y_{k+1} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

потому что определители ($(k+1)$-го порядка!), входящие в сумму $\sum\limits_s$, равны нулю — ведь ранг матрицы A равен k.

Мы доказали, что любой определитель $(k+1)$-го порядка, порождаемый матрицей B, равен нулю, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к обоснованию правила 2) (стр. 23). Так как ранг матрицы A равен k (ранг $A = k$), то система (1) содержит k уравнений, матрица коэффициентов которых порождает не равный нулю определитель k-го порядка. Перенумеровывая заново уравнения и неизвестные, можно достигнуть того, что первые k уравнений системы (1)

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = y_k\end{array}\right\} \tag{1'}$$

будут иметь определитель

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Перенумерованную систему (1′) перепишем еще так:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k \;= y_1 - a_{1,\,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k = y_k - a_{k,\,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n.\end{array}\right\} \tag{17}$$

В силу того, что определитель $\sigma \neq 0$, любой системе чисел $x_{k+1}, \ldots, x_n$ соответствует единственная система чисел $x_1, \ldots, x_k$, которые, очевидно, можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sigma^1}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{s=1}^{k}(y_s-a_{s,\,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{sn}x_n)\,A_{s1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k=\dfrac{\sigma^k}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{s=1}^{k}(y_s-a_{s,\,k+1}x_{k+1}-\ldots-a_{sn}x_n)\,A_{sk}, \end{array}\right\} \qquad (18)$$

где A_{sl} — адъюнкты элементов a_{sl} в определителе σ. Следовательно, все решения системы (17) записаны по формуле (18). Числам $x_{k+1}, \ldots, x_n$ можно придавать любые значения, а числа $x_1, \ldots, x_k$ будут вычисляться по формулам (18). Отсюда мы видим, что система (17) имеет бесконечное множество решений.

Мы хотим обосновать, что, если ранг $A =$ ранг $B = k$, то любое найденное нами решение $\boldsymbol{x}$ первых k уравнений системы (1) автоматически является решением остальных уравнений этой системы. Для определенности докажем, что оно является решением $(k+1)$-го уравнения. Итак, рассмотрим первые $(k+1)$ уравнений системы (1), которые мы запишем в виде (13). Надо доказать, что всякое решение $\boldsymbol{x}$ первых k уравнений (13) автоматически является решением $(k+1)$-го уравнения в (13). Пусть $\boldsymbol{x}$ есть вектор, удовлетворяющий первым k уравнениям в (13). Составим уравнения (15) относительно неизвестных $z_1, \ldots, z_{k+1}$, где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ вычисляются по формулам (14) через компоненты $x_{k+1}, \ldots, x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$. Определитель системы (15) равен нулю. Это видно из равенств (16), которые надо читать справа налево. По условию определитель справа равен нулю. Но тогда система (15) имеет нетривиальное решение $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$. Здесь число $z_{k+1} \neq 0$, потому что, если допустить, что система (15) имеет решение вида $z_1, \ldots, z_k, 0$, то числа $z_1, \ldots, z_k$ должны обратиться в нули, потому что определитель $\sigma \neq 0$. Но тогда $z_1 = \ldots = z_k = z_{k+1} = 0$ и система $z_1, \ldots, z_{k+1}$ была бы тривиальной. Вследствие однородности системы (15) не только числа $z_1, \ldots, z_{k+1}$ удовлетворяют этой системе, но и числа $(z_{k+1} \neq 0)$

$$z_1' = z_1/z_{k+1}, \ \ldots, \ z_k' = z_k/z_{k+1}, \ 1$$

обладают тем же свойством. Но тогда числа $z_1', \ldots, z_k'$ удовлетворяют системе первых k уравнений (13), имеющей определитель $\sigma \neq 0$. Мы уже знаем, что эта последняя система имеет решения $x_1, \ldots, x_k$ и в силу единственности

$$z_1' = x_1, \ \ldots, \ z_k' = x_k.$$

Обращаясь к последнему уравнению (15), мы видим, что оно удовлетворяется числами $(x_1, \ldots, x_k, 1)$, т. е. числа $(x_1, \ldots, x_k)$ удовлетворяют $(k+1)$-му уравнению системы (13), и в силу (14) рассматриваемый нами вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ удовлетворяет $(k+1)$-му уравнению системы (1). Этим утверждение 2) доказано.

4.7. Метод решения системы путем исключения неизвестных. Можно рекомендовать следующий метод решения систем линейных уравнений, который является *методом исключения неизвестных* (или методом Гаусса[1])). Пусть дана система

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (1'')$$

Если мы умножим какое-либо уравнение системы (1″) на постоянное число и прибавим его к другому уравнению системы, то получим новую систему, эквивалентную прежней. Новая система уравнений будет иметь свою матрицу B', соответствующим образом преобразованную из матрицы B ($B \Rightarrow B'$). Преобразование заключается в том, что некоторая строка матрицы B видоизменяется прибавлением к ней другой строки, умноженной на соответствующее число.

Подобным образом, если умножить какое-либо из уравнений системы на число $k \neq 0$, оставив остальные уравнения прежними, то получим новую систему, очевидно, эквивалентную исходной. Новая система будет иметь свою матрицу B', соответствующим образом преобразованную из матрицы B ($B \Rightarrow B'$). На этот раз преобразование заключается в том, что строка, соответствующая указанному уравнению, умножается на k.

Появляется также необходимость переставлять местами два уравнения системы (1″), получив, таким образом, формально новую, но эквивалентную исходной систему. В этом случае преобразование $B \Rightarrow B'$ сводится к перестановке местами двух строк матрицы B.

Указанные три преобразования $B \Rightarrow B'$ называют *элементарными преобразованиями матрицы.*

Технически, вместо того чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что пишут только соответствующую ей матрицу B'. Всегда можно, применяя подходящим образом элементарные операции над системой уравнений или, что все равно, над матрицей B, добиться либо решения заданной системы (1″), либо прийти к явно противоречивой системе. Так как последняя эквивалентна системе (1″), то это докажет противоречивость системы (1″).

Ниже приводятся примеры применения этого метода.

---

[1]) К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

Операция $B \Rightarrow B'$ обозначает, что B' получается из B посредством одной или нескольких элементарных преобразований.

Пример 7. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Конечно, согласно теореме 1, мы могли бы просчитать все пять определителей четвертого порядка и найти x_1, x_2, x_3, x_4. Здесь было бы много повторяющихся вычислений.

Составим матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

где, как мы видим, последний столбец состоит из правых частей нашей системы. Умножая первую строку на (—1) и прибавляя ее к третьей и четвертой строкам, получим матрицу

$$B_1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

В матрице B_1' элементы третьей строки, являющиеся коэффициентами при неизвестных, кроме одного, равны нулю. Переместим эту строку на место второй строки. Тогда элемент, не равный нулю, окажется на главной диагонали:

$$B_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку можно еще умножить на (—1), чтобы запись была проще:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие преобразования матриц очевидны:

$$B_1 \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5/2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_5 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 15/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_4 = 2$, $x_3 = -13/4$, $x_2 = 3/2$, $x_1 = 15/4$. Чтобы не допустить ошибки, рекомендуется осуществить проверку, подставив полученные значения в исходные уравнения системы.

Рассмотрим с этой точки зрения пример 5:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2, \end{aligned}\right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 &= 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

В последней строке свободный член равен единице, а коэффициенты при неизвестных равны нулю, поэтому система несовместна.

Наконец, в примере 6

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 = 1,$$

т. е. система имеет бесконечное множество решений:

$$x_1 = x_1, \ x_2 = 1 - x_1, \ x_3 = 0,$$

где x_1 — любое число $(-\infty < x_1 < \infty)$.

4.8. Нахождение ранга матрицы. Если нас интересует только вопрос о ранге матрицы B, то указанные выше элементарные операции $B \Rightarrow B'$ распространим не только на строки, но и на столбцы матрицы. При этом, если в процессе этих преобразований в матрице появляются строка или столбец, целиком состоящие из нулей, то их надо удалить из матрицы, т. е. рассматривать далее матрицу меньшего размера.

Следующие примеры иллюстрируют этот метод.

Пример 8. Найти ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг матрицы B не больше 4. В данном случае $a_{11} = 1 \neq 0$. Умножая первую строку на (-1) и прибавляя ее к третьей строке, получаем

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь, умножая первый столбец на соответствующие числа и прибавляя его к остальным столбцам, получим матрицу

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец уже состоит из нулей, кроме элемента $a_{22} = 1 \neq 0$. Умножая второй столбец на (-1) и прибавляя его к 4, 6, 7 столбцам, получим

$$B_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-2&-2&-4&-4&-6\\0&0&0&0&0&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow B_4=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow B_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_6=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&4&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_7=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Определитель четвертого порядка матрицы B_7 не равен нулю, следовательно, ранг $B=$ ранг $B_7=4$.

Пример 9. Найти ранг матрицы

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_1=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow B_2=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow B_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_4=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

т. е. ранг матрицы B равен двум.

Рассуждения в примерах 8 и 9 основаны на следующем общем утверждении: *при элементарном преобразовании $B\Rightarrow B'$ ранг матрицы сохраняется, т. е. выполняется равенство*

$$\text{ранг}\,B=\text{ранг}\,B'.$$

Это утверждение очевидно, если элементарное преобразование сводится к замене местами строк или столбцов матрицы или к выкидыванию из матрицы ее строки или столбца, состоящих из нулей.

Остается еще один случай, который мы выразим в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть матрица B подвергнута преобразованию $B\Rightarrow B'$, заключающемуся в том, что к некоторой ее строке (столбцу) прибавляется другая какая-либо строка (столбец), умноженная на число C.*

Тогда ранги матриц B и B' равны.

Доказательство. Будем доказывать эту теорему для строк (для столбцов рассуждения аналогичны).

Пусть k есть номер строки матрицы $B=(b_{kl})$, умножаемой на число C и прибавляемой к другой строке B, которую будем считать имеющей номер l (таким образом, l-я строка матрицы B' состоит из элементов $Cb_{kj}+b_{lj}$, $j=1, \ldots, n$). Пусть

$$\text{ранг}\, B=r, \quad \text{ранг}\, B'=r'.$$

Достаточно показать, что $r'\leqslant r$, потому что по аналогии доказывается также, что $r\leqslant r'$, откуда $r=r'$.

Если $r=0$, то все элементы матрицы B равны нулю и, следовательно, равны нулю все элементы матрицы B', откуда $r=r'=0$.

Пусть теперь $r>0$. Тогда существует матрица A порядка r, порождаемая матрицей B, с неравным нулю определителем ($|A|\neq 0$), а все матрицы A, порождаемые B, порядка, большего r, имеют определители, равные нулю. При преобразовании $B\Rightarrow B'$ матрица A преобразуется в некоторую матрицу A' ($A\Rightarrow A'$). Пусть матрица A имеет порядок, больший r.

Если l-я строка матрицы B не участвует в образовании A, то, очевидно, $A=A'$ и $0=|A|=|A'|$.

Если в образовании A участвуют обе строки B с номерами k и l, то $0=|A|=|A'|$. Ведь чтобы получить определитель $|A'|$, надо к некоторой строке определителя $|A|$ прибавить определенную другую его строку, умноженную на число C, от чего величина определителя не меняется.

Наконец, пусть в образовании матрицы A участвует l-я строка, но не участвует k-я строка. Очевидно (см. свойство з) определителя),

$$|A'|=|A|+C|\Lambda|, \tag{19}$$

где Λ — матрица порядка, большего r, получаемая из A заменой элементов l-й строки на соответствующие элементы k-й строки матрицы B. Но такая замена не меняет ранг B и так как $|A|=0$, то $|\Lambda|=0$.

Из (19) получаем $|A'|=0+C\cdot 0=0$.

Мы пересмотрели все случаи, когда матрица A' имеет порядок, больший чем r, и всякий раз оказывалось, что $|A'|=0$. Это показывает, что

$$r'=\text{ранг}\, B'\leqslant r,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Трехмерное пространство. Векторы. Декартова система координат[1])

5.1. Понятие вектора. В этом параграфе мы будем рассматривать реальное пространство. Понятие вектора в реальном пространстве читателю известно из элементарной геометрии.

Вектором (в реальном пространстве) называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B, который можно передвигать параллельно самому себе. Таким образом, считается, что два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, имеющие равные длины ($|AB| = |A_1B_1|$) и одно и то же направление, определяют один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$, и в этом смысле пишут $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2).

Длиной $|\overrightarrow{AB}| = |\boldsymbol{a}|$ *вектора* $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ называется число (неотрицательное), равное длине отрезка AB, соединяющего точки A и B. Будем также писать $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Если точки A и B совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ считают тоже вектором — *нулевым вектором*. Его длина равна нулю ($|\mathbf{0}| = 0$), а направление для него не имеет смысла.

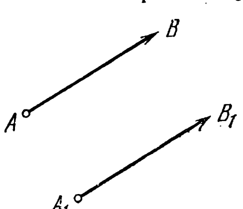

Рис. 2.

В геометрии рассматривают сложение и вычитание векторов и умножение их на действительные числа. По определению произведение $\boldsymbol{a}\alpha = \alpha\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число α или числа α на вектор $\boldsymbol{a}$ есть вектор, длина которого равна $|\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, или противоположно $\boldsymbol{a}$, если $\alpha < 0$. При $\alpha = 0$ длина $|\alpha\boldsymbol{a}|$ равна нулю и вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ превращается в нулевой вектор (точку), не имеющий направления.

Вектор $\boldsymbol{e}$ называется *единичным*, если его длина равна 1, т. е. $|\boldsymbol{e}| = 1$. Если $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, то

[1]) Отметим, что в данной книге сначала излагается скалярное произведение векторов, затем аналитическая геометрия прямой и плоскости и после этого в §§ 11—13 излагаются понятия векторного и смешанного произведений векторов. При желании эти параграфы могут быть изложены непосредственно после § 6.

$|\boldsymbol{b}| = |\alpha|$, потому что

$$|\boldsymbol{b}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{e}| = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha|.$$

По определению векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ..., взятые в конечном числе, складываются по правилу замыкания цепочки этих векторов. Рис. 3 и 4 напоминают нам, как это

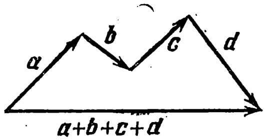

Рис. 3.

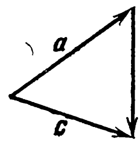

Рис. 4.

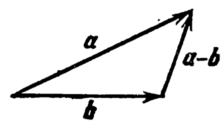

Рис. 5.

делается. На рис. 5 показано, кроме того, как вычитаются векторы.

5.2. Проекция вектора. Проекцией точки A на прямую L (рис. 6) называется точка A', в которой

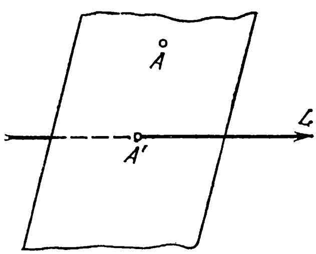

Рис. 6.

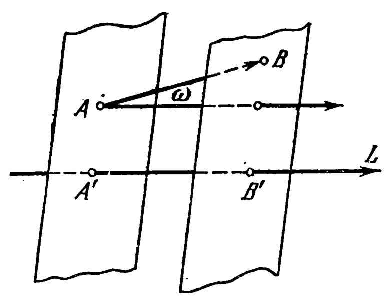

Рис. 7.

пересекаются прямая L с плоскостью, перпендикулярной к L, проходящей через точку A.

Зададим направленную прямую L (рис. 7) и вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. *Проекцией вектора* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ на направленную прямую L называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где A', B' — соответственно проекции точек A, B на L (см. рис. 7).

Проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на направленную прямую L будем обозначать символом $\overrightarrow{\text{пр}_L\, \boldsymbol{a}}$.

При данной направленной прямой L проекции $\overrightarrow{A'B'}$ любых векторов $\overrightarrow{AB}$ на L лежат в L и направлены, как L, либо — в противоположную сторону.

Впрочем, если вектор $\overrightarrow{AB}$ нулевой или перпендикулярен к L, то его проекция на L есть, очевидно, нулевой вектор, не имеющий направления.

Наряду с проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на направленную прямую L, которая представляет собой вектор, введем еще новое понятие — *числовую проекцию вектора* $\boldsymbol{a}$ *на направленную прямую* L. Это есть число, обозначаемое нами символом $\text{пр}_L \boldsymbol{a}$ (без стрелки) и определяемое следующим образом.

Числовой проекцией вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ *на направленную прямую* L *называется произведение длины вектора* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ *на косинус угла* ω *между вектором* $\boldsymbol{a}$ *и направлением* L:

$$\text{пр}_L \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\boldsymbol{a}, L) = |\boldsymbol{a}| \cos\omega \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant \pi).$$

Отметим следующие случаи: если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ или если $\omega = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_L \boldsymbol{a} = 0$; если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и $0 \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$, то числовая проекция положительна ($\text{пр}_L \boldsymbol{a} > 0$) и равна, очевидно, длине вектора $\overrightarrow{A'B'}$: $\text{пр}_L \boldsymbol{a} = |\overrightarrow{AB}| \cos\omega = |\overrightarrow{A'B'}|$; при этом сам вектор $\overrightarrow{A'B'}$ направлен так же, как L; если же $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и $\frac{\pi}{2} < \omega \leqslant \pi$, то числовая проекция отрицательна ($\text{пр}_L \boldsymbol{a} < 0$) и равна, очевидно, длине вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятой со знаком минус:

$$\text{пр}_L \boldsymbol{a} = |\overrightarrow{AB}| \cos\omega = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|A'B'|,$$

при этом сам вектор $\overrightarrow{A'B'}$ направлен в сторону, противоположную L.

Справедливо очевидное равенство, выражающее связь между проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на направление L и его числовой проекцией на L:

$$\overrightarrow{\text{пр}_L \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}\, \text{пр}_L \boldsymbol{a}.$$

Здесь $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный, как L.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат на направленной прямой L, то их можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный так же, как L, а α и β — числа. Эти числа могут быть положительными, отрицательными или нулем.

Справедливы очевидные равенства

$$\alpha \boldsymbol{e} \pm \beta \boldsymbol{e} = (\alpha \pm \beta)\, \boldsymbol{e}, \tag{1}$$

показывающие, что сложение и вычитание указанных векторов сводится к сложению или вычитанию соответствующих чисел α, β.

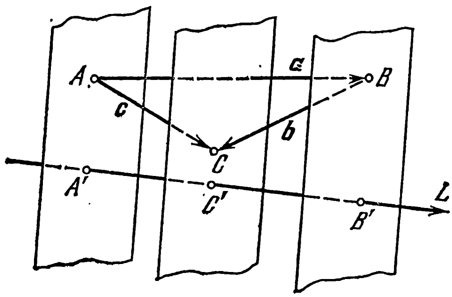

Рис. 8.

5.3. Свойства проекций векторов. Числовые проекции векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ на данное направление L обладают следующими свойствами:

$$\text{пр}_L\, \boldsymbol{a} + \text{пр}_L\, \boldsymbol{b} = \text{пр}_L\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \tag{2}$$

$$\text{пр}_L\, (\alpha \boldsymbol{a}) = \alpha\, \text{пр}_L\, \boldsymbol{a}. \tag{3}$$

Свойство (2) усматривается на рис. 8:

$$\overrightarrow{\text{пр}_L\, \boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\text{пр}_L\, \boldsymbol{b}} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{\text{пр}_L\, \boldsymbol{c}} = \overrightarrow{\text{пр}_L\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}.$$

Но тогда

$$\boldsymbol{e}\, \text{пр}_L\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}\, \text{пр}_L\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}\, \text{пр}\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$

откуда следует (2) (см. (1)).

Так как $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}$ (см. рис. 5), то

$$\text{пр}_L\, (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \text{пр}_L\, \boldsymbol{b} = \text{пр}_L\, \boldsymbol{a},$$

и, следовательно,

$$\text{пр}_L\, \boldsymbol{a} - \text{пр}_L\, \boldsymbol{b} = \text{пр}_L\, (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}). \tag{2'}$$

Докажем (3). Считая, что угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и направлением L равен ω, имеем

при $\alpha > 0$:

$$\text{пр}_L\, (\alpha \boldsymbol{a}) = |\alpha \boldsymbol{a}| \cos \omega = \alpha\, |\boldsymbol{a}| \cos \omega = \alpha\, \text{пр}_L\, \boldsymbol{a};$$

при $\alpha < 0$:

$$\text{пр}_L(\alpha\boldsymbol{a}) = |\alpha\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\omega) = -\alpha|\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\omega) = \\ = \alpha|\boldsymbol{a}|\cos\omega = \alpha\,\text{пр}_L\,\boldsymbol{a}.$$

Ведь при $\alpha < 0$ вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ направлен в сторону, противоположную направлению $\boldsymbol{a}$, и если $\boldsymbol{a}$ образует с L угол ω, то $\alpha\boldsymbol{a}$ образует с L угол $\pi-\omega$.

При $\alpha=0$ левая и правая части (3) обращаются в нуль.

5.4. Скалярное произведение векторов. Назовем *скалярным произведением двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, равное произведению длин этих векторов, помноженному на косинус угла ω между ними:

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\omega. \tag{4}$$

Очевидно, можно еще сказать, что *скалярное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *есть произведение длины вектора* $|\boldsymbol{b}|$ *на числовую проекцию вектора* $\boldsymbol{a}$ *на направление* $\boldsymbol{b}$ *или произведение длины* $|\boldsymbol{a}|$ *на числовую проекцию* $\boldsymbol{b}$ *на направление* $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_b\,\boldsymbol{a}.$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{7}$$

Равенство (5) непосредственно вытекает из определения скалярного произведения.

Равенство (6) доказывается так:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{c} = \\ = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}).$$

Равенство (7) доказывается следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a(\alpha\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,\alpha\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Из (6) и (7), учитывая (5), следует

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \tag{6'}$$

$$(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{7'}$$

Пример (из физики). Если тело под действием силы $\boldsymbol{a}$ передвинулось прямолинейно вдоль вектора $\boldsymbol{b}$, то работа W, выполненная силой $\boldsymbol{a}$, как известно из физики, равна произведению величины силы $|\boldsymbol{a}|$ на путь $|\boldsymbol{b}|$ и еще на косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$W=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Но тогда

$$W=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

т. е. указанная работа равна скалярному произведению векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

5.5. Прямоугольная система координат. Теперь мы переходим к аналитическому описанию векторов и точек пространства — при помощи чисел. Введем в пространстве *прямоугольную систему координат* x, y, z, т. е. три взаимно перпендикулярные направленные прямые, проходящие через некоторую точку O, называемые *осями координат* x, y, z (рис. 9). Предполагается, что для данной системы координат выбран единичный отрезок, при помощи которого измеряются все прочие отрезки. Точка O называется *началом координат*.

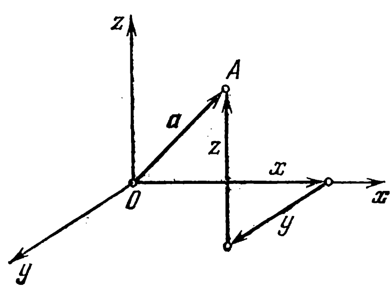

Рис. 9.

Зададим произвольную точку A трехмерного пространства. Направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором точки* A. Радиус-вектор в свою очередь определяет вектор $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$), который можно переносить в пространстве параллельно самому себе. Числовые проекции радиус-вектора $\boldsymbol{a}$ на оси x, y, z обозначим соответственно x, y, z. Это *координаты* точки A; при этом координата x называется *абсциссой*, координата y — *ординатой* и координата z — *аппликатой* точки A.

Между точками A пространства и их радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$ или, что все равно, тройками чисел (x, y, z), являющимися координатами точки A или проекциями $\overrightarrow{OA}$ на оси, имеется взаимно однозначное соответствие. В силу сказанного не будет путаницы, если мы будем называть тройку чисел (x, y, z) точкой A, имеющей эти числа своими координатами или радиус-вектором $\boldsymbol{a}$, имеющим эти числа своими проекциями.

Мы будем писать $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ и говорить, что $\boldsymbol{a}$ или (x, y, z) есть вектор, равный радиус-вектору точки A, имеющий координаты x, y, z. Но, конечно, можно считать, что вектор $\boldsymbol{a}$ равен какому-либо другому направленному отрезку $\overrightarrow{CD}$, равному $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}$), т. е. имеющему то же направление и ту же длину, что и $\overrightarrow{OA}$. В этом случае проекции $\boldsymbol{a}$ на оси координат часто обозначают символами a_x, a_y, a_z и пишут $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$.

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ равны тогда и только тогда, если выполняются одновременно равенства: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$. Справедливы равенства

$$(x, y, z)\pm(x', y', z')=(x\pm x', y\pm y', z\pm z'), \tag{8}$$

$$\alpha(x, y, z)=(\alpha x, \alpha y, \alpha z). \tag{9}$$

Равенство (8) следует из того, что проекция суммы или разности векторов (на ось x или y или z) равна сумме или разности проекций слагаемых.

Равенство же (9) следует из того, что проекция вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ (на ось x или y или z) равна произведению α на проекцию $\boldsymbol{a}$.

Обозначим через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ единичные (имеющие длину, равную 1) векторы, имеющие соответственно то же направление, что и оси x, y, z. Векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ называют *ортами* осей x, y, z. Произвольный вектор (x, y, z) может быть записан в виде

$$(x, y, z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{10}$$

В самом деле,

$$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j}=(0, 1, 0), \quad \boldsymbol{k}=(0, 0, 1).$$

Поэтому в силу (8) и (9)

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1)=$$
$$=(x, 0, 0)+(0, y, 0)+(0, 0, z)=(x, y, z).$$

Отметим равенства, имеющие место для скалярных произведений ортов осей

$$\boldsymbol{ii}=\boldsymbol{jj}=\boldsymbol{kk}=1, \quad \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{jk}=0.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$, $\boldsymbol{b}=(x', y', z')$. Тогда

$$\boldsymbol{ab}=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=xx'+yy'+zz'. \tag{11}$$

В самом деле, на основании (6), (7), (6′), (7′)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})(x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}) = \\ = xx'\boldsymbol{ii} + xy'\boldsymbol{ij} + xz'\boldsymbol{ik} + yx'\boldsymbol{ji} + yy'\boldsymbol{jj} + yz'\boldsymbol{jk} + \\ + zx'\boldsymbol{ki} + zy'\boldsymbol{kj} + zz'\boldsymbol{kk} = xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

В частности, положив в этой формуле $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, получим, что

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{aa} = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда длина вектора $\boldsymbol{a}$ равна

$$|\boldsymbol{a}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отсюда расстояние между точками $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ и $\boldsymbol{b} = (x', y', z')$ равно (рис. 10)

$$|AB| = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| = +\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Для дальнейшего будет важно подвести итог сказанному. Для этого введем несколько иное наименование координат. Именно, введем в пространстве прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3. В силу этого каждая точка пространства представлена тройкой чисел

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

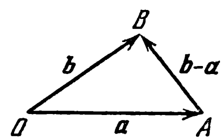

Рис. 10.

Эту точку мы обозначили жирной буквой $\boldsymbol{x}$ и назвали также вектором $\boldsymbol{x}$ с компонентами x_1, x_2, x_3.

Мы доказали, что сложение и вычитание векторов и умножение их на числа выражаются на языке троек (x_1, x_2, x_3) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \pm (x_1', x_2', x_3') = \\ = (x_1 \pm x_1', x_2 \pm x_2', x_3 \pm x_3'), \\ \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ выражается через координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ по формуле

$$\boldsymbol{xx}' = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'. \tag{13}$$

Длина вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть неотрицательное число, равное

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{14}$$

Наконец, расстояние между точками $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{x}'= =(x_1', x_2', x_3')$ равно

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+(x_3'-x_3)^2}. \tag{15}$$

Реальное пространство, геометрию которого мы здесь изучали, называется *трехмерным пространством*, потому что его точки естественным образом представляются тройками действительных чисел. Мы будем его обозначать через R_3.

Произвольную плоскость естественно обозначить через R_2. В R_2 можно задать прямоугольную систему координат x_1, x_2, с помощью которой любую точку R_2 или ее радиус-вектор можно представить парой чисел (x_1, x_2). Операции сложения и вычитания и умножения на число для векторов, принадлежащих к плоскости, очевидно, подчиняются выведенным нами условиям (12), где в скобках надо только всюду выбросить третьи компоненты. Скалярное произведение векторов, принадлежащих к нашей плоскости, тоже выражается формулой (13), где в правой части надо выбросить третий член. То же самое относится и к формулам (14) и (15).

Обобщением пространств R_2 и R_3 является пространство R_n, где n — произвольное натуральное число.

Пространство R_n при $n>3$ является математической выдумкой. Впрочем, весьма гениальной выдумкой, которая помогает математически разбираться в сложных явлениях.

ЗАДАЧИ

1. Найти длину векторов (1, 1, 1), (1, —1, 1), (1, 2, 3).
2. Найти угол между векторами (1, 0, 1), (1, 2, 3).
3. Дан единичный куб (с длиной ребра, равной 1). Найти угол между выходящими из его вершины: а) главной диагональю и диагональю грани; б) между двумя диагоналями двух граней.

§ 6. n-мерное евклидово пространство. Скалярное произведение

6.1. n-мерное пространство. Множество всевозможных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ действительных (комплексных) чисел называется *n-мерным действительным* (комплексным) *пространством* и обозначается через R_n. Каждую систему мы будем обозначать одной (жирной) буквой без индекса:

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$$

и называть *точкой* или *вектором* R_n. Числа $x_1, \ldots, x_n$ называют *координатами* точки (вектора) $\boldsymbol{x}$ или еще *компонентами* вектора $\boldsymbol{x}$.

Две точки

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$$

считаются равными, если их соответствующие координаты равны

$$x_j = x'_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В других случаях $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ различны ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$).

Системы (векторы) $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ можно складывать, вычитать и умножать на числа $\alpha, \beta, \ldots$ — действительные, если R_n есть действительное пространство, и комплексные, если R_n — комплексное пространство[1]).

По определению *суммой векторов* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется вектор

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{1}$$

а разностью — вектор

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n). \tag{2}$$

Произведением же *числа* α *на вектор* $\boldsymbol{x}$ или вектора $\boldsymbol{x}$ на число α называется вектор

$$\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\alpha = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Наконец, вектор $-\boldsymbol{x}$ определяется равенством

$$-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

Вводится еще понятие нулевого вектора, компоненты которого равны нулю: $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$.

Очевидно, выполняются свойства:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$,
2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$,
3) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y}$,
4) $\alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$,
5) $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{x}$,
6) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$,
7) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
8) $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$,

где α, β — числа, а $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R_n$.

---

[1]) О комплексных числах см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 5.3.

Пространство R_n называется *линейным пространством*, потому что для него выполняются перечисленные выше свойства 1)—8), см. ниже замечание 1.

Число (неотрицательное)

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \qquad (3)$$

называется *длиной* или *нормой вектора* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в действительном пространстве R_n.

Расстояние между точками $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ действительного пространства R_n определяется по формуле

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}. \qquad (4)$$

6.2. Скалярное произведение в действительном пространстве R_n. *Скалярным произведением двух векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в действительном пространстве R_n (числа x_i, y_i действительные) называется число

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad (5)$$

Скалярное произведение в действительном пространстве R_n обладает свойствами:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$; при этом равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$,

б) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,

в) $(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

В самом деле,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geqslant 0,$$

и равенство может быть лишь, если $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Далее,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

и

$$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\sum_{j=1}^{n}(\alpha x_j+\beta y_j)z_j=$$
$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}x_jz_j+\beta\sum_{j=1}^{n}y_jz_j=\alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}).$$

6.3. Скалярное произведение в комплексном пространстве R_n. *Скалярным произведением двух векторов* $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ в комплексном пространстве R_n называется число

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j, \tag{5'}$$

где $\bar{y}_j$ есть комплексное число, сопряженное к числу y_j (по определению, если $z=\alpha+\beta i$, где α и β действительные, то $\bar{z}=\alpha-\beta i$).

Скалярное произведение в комплексном пространстве обладает свойствами:

а′) $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\geqslant 0$; при этом равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=(0,\ \ldots,\ 0)$,

б′) $\overline{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}=(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$,

в′) $(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$.

В самом деле,

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{x}_j=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\geqslant 0,$$

и равенство может быть, лишь если $x_1=\ldots=x_n=0$. Далее,

$$\overline{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}=\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j\right)}=\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_jy_j=\sum_{j=1}^{n}y_j\bar{x}_j=(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}).$$

Здесь мы воспользовались свойствами операции сопряжения $\overline{z+z_1}=\bar{z}+\bar{z}_1$ и $\overline{zz_1}=\bar{z}\cdot\bar{z}_1$. Наконец,

$$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\sum_{j=1}^{n}(\alpha x_j+\beta y_j)\bar{z}_j=$$
$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{z}_j+\beta\sum_{j=1}^{n}y_j\bar{z}_j=\alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}).$$

В комплексном пространстве R_n длина вектора $\boldsymbol{x}$ определяется при помощи равенства

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{x}_j}, \tag{3'}$$

а расстояние между точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определяется при помощи равенства

$$|x-y|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2}. \tag{4'}$$

Легко видеть, что при действительных x_j, y_j выражения (3) и (4) являются частными случаями выражений (3′), (4′).

Пространство R_n (действительное или комплексное), в котором введено понятие скалярного произведения по формуле (5) (соответственно (5′)), называется *евклидовым n-мерным пространством*.

6.4. Неравенства Буняковского. Для скалярного произведения в комплексном пространстве справедливо *неравенство* (*Буняковского*[1]))

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \tag{6}$$

Докажем его только в действительном случае. В самом деле, для любого действительного числа λ

$$\begin{aligned}0 \leqslant (x+\lambda y,\ x+\lambda y) &= \\ &= (x, x)+\lambda(y, x)+\lambda(x, y)+\lambda^2(y, y)= \\ &= (x, x)+2(x, y)\lambda+(y, y)\lambda^2=a+2b\lambda+c\lambda^2,\end{aligned}$$

где $a=(x, x)$, $b=(x, y)$, $c=(y, y)$. Мы видим, что квадратный многочлен

$$a+2b\lambda+c\lambda^2 \geqslant 0 \quad (-\infty<\lambda<\infty)$$

неотрицателен для любого действительного λ. Поэтому весь его график лежит выше оси λ, а это может быть, только если дискриминант многочлена отрицателен или равен нулю, т. е. если $b^2-ac \leqslant 0$ или $b^2 \leqslant ac$, и мы получили неравенство Буняковского (6).

На языке компонент векторов x и y неравенство (6) можно записать так:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}. \tag{7}$$

Таким образом, каковы бы ни были действительные числа x_j, y_j, выполняется неравенство (7).

В силу (3) неравенство Буняковского можно написать так:

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y|.$$

[1]) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик.

Но тогда существует и притом единственное число λ, удовлетворяющее неравенствам $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, для которого имеет место точное равенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda |\boldsymbol{x}| |\boldsymbol{y}|.$$

Отметим, что на $[0, \pi]$ функция $\cos t$ имеет однозначную строго убывающую обратную функцию, с областью значений на $[-1, 1]$. Поэтому для каждого λ $(-1 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ существует единственный угол ω $(0 \leqslant \omega \leqslant \pi)$ такой, что $\lambda = \cos \omega$. Таким образом, мы доказали равенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| |\boldsymbol{y}| \cos \omega. \tag{8}$$

Число ω называется *углом между n-мерными векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, хотя на самом деле при $n > 3$ векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются вовсе не реальными отрезками, а математическими абстракциями.

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются *ортогональными*, если скалярное их произведение равно нулю

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0.$$

Из (8) следует, что *для того, чтобы ненулевые векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы угол между ними $\omega = \pi/2$.*

6.5. Неравенство Минковского. Отметим важное *неравенство* (*Минковского*[1])

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \tag{9}$$

или на языке компонент

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}. \tag{10}$$

Его можно доказать так:

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Используя неравенство Буняковского (6), имеем

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \\ = \left(\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} + \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}\right)^2,$$

откуда следует (9). Из (9) следует неравенство

$$||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \tag{11}$$

[1]) Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик.

потому что

$$|\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|,$$
$$|\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{x}|.$$

Задача. Найти угол между векторами (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1).

Замечание 1. Произвольное множество E, состоящее из элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... любой природы, называется *линейным пространством*, если существует закон, в силу которого для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in E$ определены элементы $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in E$ и $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in E$, называемые соответственно суммой, разностью $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, и для любого действительного или комплексного числа α и элемента $\boldsymbol{x}\in E$ определен элемент $\alpha\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\alpha\in E$, называемый произведением α на $\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{x}$ на α, так что выполняются перечисленные выше в этом параграфе свойства 1)—8), где $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{x}$, $\forall\boldsymbol{x}\in E$.

R_n можно рассматривать как пример линейного пространства, но существуют и другие интересные примеры. Например, совокупность C непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f, φ, ψ, ..., если считать, что $f+\varphi$, $f-\varphi$, αf определены соответственно как $f(x)+\varphi(x)$, $f(x)-\varphi(x)$, $\alpha f(x)$, есть линейное пространство.

Линейное пространство с умножением его элементов на действительные (комплексные) числа называется *действительным* (*комплексным*) *линейным пространством*.

Замечание 2. Если в каком-либо линейном пространстве E каждым двум его элементам $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ приведено в соответствие число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, удовлетворяющее сформулированным выше свойствам а), б), в) в действительном случае и а′), б′), в′) в комплексном случае, то говорят, что в E введено скалярное произведение.

Выше было дано определение n-мерного евклидова пространства—это пространство R_n, в котором определено скалярное произведение по формулам соответственно (5) или (5′).

§ 7. Отрезок. Деление отрезка в данном отношении

Зададим произвольные точки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in R_n$ и введем множество точек (векторов):

$$\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}\qquad(\lambda,\ \mu\geqslant 0,\ \lambda+\mu=1),\tag{1}$$

определяемых неотрицательными числами λ, μ, сумма которых равна 1. Имеем

$$z=(1-\mu)\,x+\mu y=x+\mu\,(y-x) \qquad (0\leqslant\mu\leqslant 1) \tag{2}$$

или

$$z=y+\lambda\,(x-y) \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant 1). \tag{2'}$$

Из равенства (2) видно, что в трехмерном пространстве точки z заполняют отрезок, соединяющий x и y. Ведь радиус-вектор z есть сумма вектора x и вектора $\mu\,(y-x)$, коллинеарного с $y-x$ (рис. 11). Таким образом, множество точек (1) представляет собой отрезок $[x,\ y]$ в R_3, соединяющий точки x и y. При $\mu=0$ $z=x$, при $\lambda=0$ $z=y$, для любого $\lambda>0$ $(\mu=1-\lambda>0)$ z есть произвольная точка $[x,\ y]$.

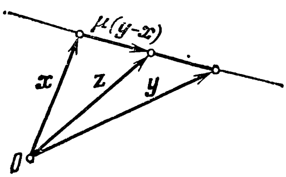

Рис. 11.

По определению *отрезком* $[x,\ y]$, *соединяющим точки* $x,\ y\in R_n$, называется множество всех точек z вида (1). Справедлива

Теорема 1. *Точка*

$$z=\lambda x+\mu y \qquad (\lambda,\ \mu\geqslant 0,\ \lambda+\mu=1)$$

делит отрезок $[x,\ y]$, *соединяющий точки* $x,\ y\in R_n$ *на отрезки с длинами, находящимися в отношении* $\mu:\lambda$.

Доказательство. Из (2) следует, что $z-x=\mu\,(y-x)$, и потому расстояние между точками x и z равно

$$|z-x|=\mu\,|y-x|. \tag{3}$$

Далее, из (2′) $z-y=\lambda\,(x-y)$, и потому расстояние между точками z и y равно

$$|z-y|=\lambda\,|x-y|. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$|z-x|:|z-y|=\mu:\lambda,$$

что и требовалось доказать.

Задача. Требуется найти на отрезке $[x,\ y]$, соединяющем точки $x,\ y\in R_n$, точку z, делящую этот отрезок в отношении $p:q$ $(p>0,\ q>0)$.

Решение. Возьмем числа

$$\lambda=\frac{q}{p+q}, \quad \mu=\frac{p}{p+q}.$$

Они удовлетворяют свойствам $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda+\mu=1$, $\mu/\lambda = p/q$. Поэтому на основании теоремы 1 искомая точка

$$\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}=\frac{q\boldsymbol{x}+p\boldsymbol{y}}{p+q}. \tag{5}$$

Ее координаты $\boldsymbol{z}=(z_1, \ldots, z_n)$ выражаются через координаты $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ при помощи равенств

$$z_j=\frac{qx_j+py_j}{p+q} \quad (j=1, \ldots, n). \tag{5'}$$

В частности, середина отрезка получается при $p=q=1$, т. е. $\lambda=\mu=1/2$.

Отметим, что, как доказывается в механике, точка $\boldsymbol{z}$, определяемая равенством (5) или (5′), есть центр тяжести системы точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, в которых сконцентрированы массы соответственно q и p.

Отметим, что в R_3 множество точек

$$\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}, \quad \lambda+\mu=1,$$

где λ и μ любого знака, представляет собой прямую, проходящую через точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Это видно из равенства (2′).

В пространстве же R_n $(n>3)$ это множество называют прямой по определению.

Пример 1. Найти координаты центра тяжести системы материальных точек $\boldsymbol{x}^k=(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$ соответственно с массами p_k $(k=1, \ldots, M)$. Применяя формулы (5′) для точек $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, найдем центр тяжести $\boldsymbol{z}^1$ точек $\boldsymbol{x}^1$ и $\boldsymbol{x}^2$. Затем находим центр тяжести $\boldsymbol{z}^2$ точек $\boldsymbol{z}^1$ и $\boldsymbol{x}^3$ соответственно с массами p_1+p_2 и p_3. Продолжая этот процесс на $(M-1)$-м шаге, получаем

$$z_j^{M-1}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_M}\sum_{k=1}^{M} p_k x_j^k \quad (j=1, 2, 3).$$

§ 8. Прямая линия

Понятие прямой является первичным в геометрии. Из аксиом геометрии мы знаем, что через две точки проходит единственная прямая и через точку, лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.

В плоскости зададим прямоугольную систему координат x, y и прямую L, не параллельную оси y (рис. 12).

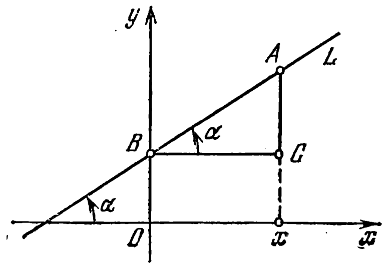

Рис. 12.

Из школьного курса мы знаем, что уравнение прямой L имеет вид

$$y = kx + l, \tag{1}$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ и α — угол, образованный прямой L с положительным направлением оси x, а l — ордината точки пересечения L с осью y ($l = OB$).

Когда говорят, что уравнение (1) есть уравнение прямой L, этим хотят выразить, что L есть геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению (1). Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рис. 12. Точка A есть произвольная (текущая) точка прямой L, имеющая координаты (x, y), $BC = x$, $AC = y - l$ и

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - l}{x}, \tag{1'}$$

откуда следует (1). Обратно, равенство (1) эквивалентно равенству (1′) а последнее выражает, очевидно, тот факт, что точка (x, y) лежит на прямой L. На рис. 12 угол α острый. В случае тупого угла α можно провести подобные рассуждения.

Зададим уравнение

$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

где A, B, C — заданные числа и к тому же A и B одновременно не равны нулю.

Если $B \neq 0$, то уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \tag{2'}$$

или, полагая

$$k=-\frac{A}{B}, \quad l=-\frac{C}{B}$$

в виде (1). Так как уравнения (2) и (2′) эквивалентны — любая точка (x, y), удовлетворяющая одному из них, удовлетворяет и другому, — то равенство (2) при $B \neq 0$ есть уравнение прямой, наклоненной к положительному направлению оси x под углом α, тангенс которого равен $-A/B$ ($\operatorname{tg}\alpha = -A/B$), и пересекающей ось y в точке, имеющей ординату $-C/B$ ($l=-C/B$). При $B=0$ уравнение (2) принимает вид

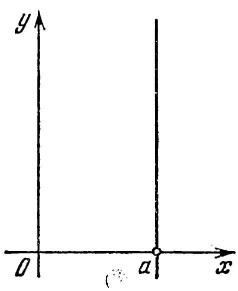

Рис. 13.

$$Ax+C=0 \qquad (A \neq 0!),$$

или

$$x=a \qquad (a=-C/A).$$

Это тоже уравнение прямой, но только параллельной оси y. Именно, это есть геометрическое место точек (x, y), абсциссы x которых равны одному и тому же числу a. На рис. 13 изображена такая прямая при $a>0$.

Из сказанного следует, что уравнение (2), где A, B, C — заданные числа и при этом A и B одновременно не равны нулю, есть уравнение некоторой прямой. При $B \neq 0$ эта прямая не параллельна оси y. В частности, при $A=0$ она параллельна оси x ($y=-C/B$). В случае же, если $B=0$, то она параллельна оси y. Отметим, что ось x имеет, очевидно, уравнение $y=0$, а ось y имеет уравнение $x=0$.

Уравнение (2) называется *уравнением прямой в общем виде*. Любая прямая, как угодно расположенная по отношению к системе координат, может быть описана уравнением вида (2) при подходящих постоянных числах A, B, C. Подчеркнем, что *числа A и B в уравнении* (2) *прямой одновременно не равны нулю.* Отметим, что число k в уравнении (1) называют *угловым коэффициентом прямой.*

Решим несколько важных задач.

Задача 1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным числу k, проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Решение. Прямая с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + l, \tag{3}$$

где l может быть любым числом. Так как точка (x_0, y_0) должна находиться на данной прямой, то должно выполняться равенство

$$y_0 = kx_0 + l. \tag{4}$$

Вычитая (4) из (3), получим искомое уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{5}$$

прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k.

Задача 2. Написать уравнение прямой, проходящей через заданные две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Предполагается, что эти точки разные.

Решение. Пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда, очевидно, искомая прямая не параллельна оси y и потому может быть записана в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{6}$$

где k — некоторое число. Уравнение (6) уже выражает, что прямая проходит через точку (x_1, y_1). Чтобы она проходила также через точку (x_2, y_2), надо чтобы выполнялось равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \tag{7}$$

Деля (6) на (7) (т. е. деля левую часть (6) на левую часть (7), а правую часть (6) на правую часть (7)), получим

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{8}$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Замечание 1. Могло случиться, что $y_2 - y_1 = 0$, тогда формально мы получили бы равенство

$$\frac{y-y_1}{0} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Несмотря на бессмысленность этого равенства, так пишут — считают удобным. Если освободиться от знаменателей, то получим верное равенство

$$y - y_1 = 0 \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = 0$$

или

$$y = y_1. \qquad (9)$$

Случай $x_1 = x_2 = c$ приводит к решению $x = c$.

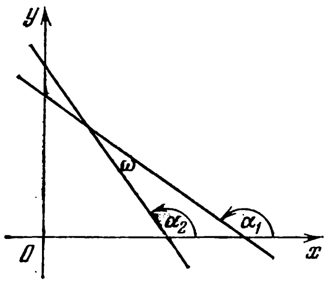

Рис. 14.

Задача 3. Найти угол ω между прямыми

$$y = k_1 x + l_1, \qquad y = k_2 x + l_2.$$

Решение. Имеем $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, где α_1, α_2 — соответственно углы, образованные данными прямыми с положительным направлением оси x. Имеем (рис. 14)

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \qquad (10)$$

и мы получили *формулу угла между прямыми*.

Случай $1 + k_1 k_2 = 0$ или

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad (11)$$

выражает *условие перпендикулярности прямых*. *Условие параллельности прямых* ($\operatorname{tg} \omega = 0$), запишется так

$$k_1 = k_2. \qquad (12)$$

Зададим уравнение прямой в общем виде:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

При $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ уравнение (2) можно записать в форме

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \left(a = \frac{-C}{A},\ b = \frac{-C}{B}\right). \qquad (13)$$

Уравнение (13) называется *уравнением прямой в отрезках.* Эта прямая пересекает ось x (прямую $y=0$) в точке $(a, 0)$ и ось y в точке $(0, b)$.

Если прямая, удовлетворяющая уравнению (2), проходит через точку (x^0, y^0), то

$$Ax^0+By^0+C=0. \tag{14}$$

Вычитая (14) из (2), получим

$$A(x-x^0)+B(y-y^0)=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) называется *уравнением прямой, проходящей через точку* (x^0, y^0).

Если ввести в рассмотрение векторы $\boldsymbol{N}=(A,B)$, $\rho=(x, y)$, $\rho^0=(x^0, y^0)$, то левую часть (15) можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\boldsymbol{N}$ на вектор $\rho-\rho^0$. Поэтому уравнение (15) в векторной форме имеет вид

$$\boldsymbol{N}(\rho-\rho^0)=0. \tag{15$'$}$$

Вектор $\rho-\rho^0$ принадлежит прямой L (рис. 15). Таким образом, из (15′) видно, что вектор $\boldsymbol{N}=(A, B)$ ортогонален

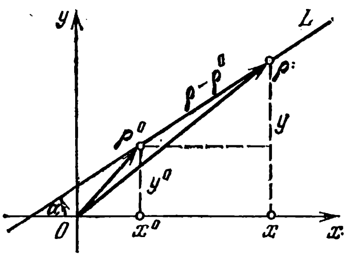

Рис. 15.

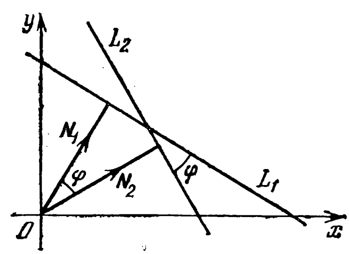

Рис. 16.

(перпендикулярен) данной прямой, и тем самым мы выяснили геометрический смысл коэффициентов A и B.

Рассмотрим две прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad (L_1), \tag{16}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \quad (L_2). \tag{17}$$

Так как векторы $\boldsymbol{N}_1=(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{N}_2=(A_2, B_2)$ перпендикулярны к прямым (16) и (17) соответственно, то угол φ между прямыми (16) и (17) равен углу между векторами $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ (рис. 16). Угол φ можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{|\boldsymbol{N}_1|\cdot|\boldsymbol{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{18}$$

Замечание 2. Если φ — угол между прямыми, то $\pi-\varphi$ также является углом между этими прямыми. Число (18) может быть положительным и отрицательным. Одно из них соответствует углу φ, а другое — углу $\pi-\varphi$.

Из (18) получаем *условие перпендикулярности* L_1 и L_2 $\left(\varphi=\frac{\pi}{2},\ \cos\varphi=0\right)$:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{19}$$

Если прямые L_1 и L_2 *параллельны*, то векторы $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ коллинеарны и $\boldsymbol{N}_1=\lambda\boldsymbol{N}_2$, где λ — некоторое действительное число. Отсюда условие параллельности прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \tag{20}$$

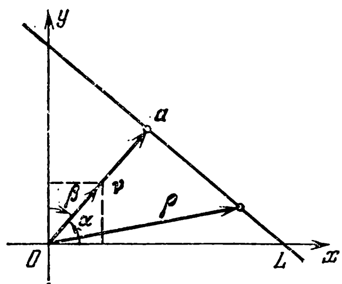

Рис. 17.

Пусть дана произвольная прямая L в прямоугольной системе координат (рис. 17), не проходящая через начало координат, и пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, выходящий из начала координат и перпендикулярный к прямой L с концом, лежащим на прямой. Вектор $\boldsymbol{a}$ полностью определяет прямую L (через конец вектора $\boldsymbol{a}$ проходит единственная прямая, перпендикулярная к нему). Пусть p есть длина $\boldsymbol{a}$ ($p=|\boldsymbol{a}|$), $\boldsymbol{\nu}=(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ есть единичный вектор, направленный в ту же сторону, что и $\boldsymbol{a}$. Здесь α, β — углы между $\boldsymbol{a}$ (или $\boldsymbol{\nu}$) и соответственно положительным направлением оси x и оси y; $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ ($\cos\beta=\sin\alpha$). Обозначим через $\boldsymbol{\rho}=(x,\ y)$ радиус-вектор произвольной (текущей) точки прямой L. Проекция вектора $\boldsymbol{\rho}$ на единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$, очевидно, равна p, т. е. скалярное произведение радиус-вектора произвольной точки $\boldsymbol{\rho}$ прямой L на вектор $\boldsymbol{\nu}$ равно p:

$$(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\nu})=|\boldsymbol{\nu}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\rho}=p. \tag{21}$$

Итак, мы получили векторное уравнение L, потому что, и обратно, если радиус-вектор точки удовлетворяет уравнению (21), то точка лежит на L (точка, не лежащая на L, имеет проекцию на $\boldsymbol{\nu}$, отличную от p).

Если прямая L проходит через начало координат, то ее уравнение можно записать тоже в виде (21), где $\mathbf{v}$ — единичный перпендикулярный к ней вектор и $p=0$.

В координатной форме уравнение (21) имеет вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p \qquad (p\geqslant 0) \tag{21'}$$

или

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \qquad (p\geqslant 0). \tag{21''}$$

Уравнение (21′) (или (21″)) называется *уравнением прямой в нормальном виде.*

Если прямая L задана общим уравнением

$$Ax+By+C=0,$$

то его можно привести к нормальному виду, умножив на число

$$M=\pm 1/\sqrt{A^2+B^2}, \tag{22}$$

где надо выбрать знак, противоположный знаку C ($p=-MC\geqslant 0$). Число M называется *нормирующим множителем.* Так как

$$(MA)^2+(MB)^2=1,$$

то существует и притом единственный угол α, удовлетворяющий неравенствам $0\leqslant\alpha<2\pi$, для которого

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\sin\alpha. \tag{23}$$

В результате мы получаем уравнение (21), где $p=-MC\geqslant 0$. Отметим еще раз, что число p равно расстоянию от начала координат до прямой.

Задача 4. Найти расстояние d от точки до прямой L, определяемой уравнением

$$Ax+By+C=0. \tag{24}$$

Решение. Пусть

$$(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{v})-p=0 \tag{25}$$

есть нормальное уравнение прямой (24). Таким образом, если $C\neq 0$, то p ($p>0$) есть длина вектора $\overrightarrow{OP}$, опущенного из начала координат O на L (перпендикулярно к L), а $\mathbf{v}$ — единичный вектор, направленный как $\overrightarrow{OP}$ ($p=|\overrightarrow{OP}|$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{OP}/p$ (рис. 18)). Пусть $\boldsymbol{\rho}=(x,\ y)$ есть радиус-вектор произвольной точки L. Тогда, очевидно, чтобы найти расстояние от точки Q^0, имеющей радиус-вектор $\rho^0=(x^0, y^0)$ до L, надо спроектировать вектор $\rho-\rho^0$ на направление вектора $\mathbf{v}$ и взять абсолютную величину проекции:

$$d=|\text{пр}_{\mathbf{v}}(\rho-\rho^0)|=|(\rho-\rho^0, \mathbf{v})|=$$
$$=|(\rho, \mathbf{v})-(\rho^0, \mathbf{v})|=|p-(\rho^0, \mathbf{v})|=|(\rho^0, \mathbf{v})-p|.$$

Мы получили формулу

$$d=|(\rho^0, \mathbf{v})-p|. \tag{26}$$

Таким образом, чтобы получить расстояние d, надо привести уравнение (24) к нормальному виду, перенести p

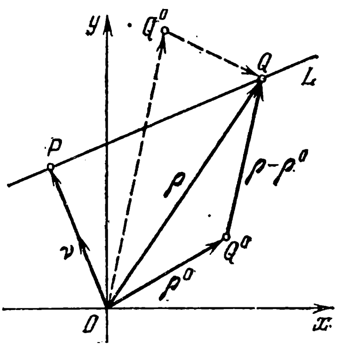

Рис. 18.

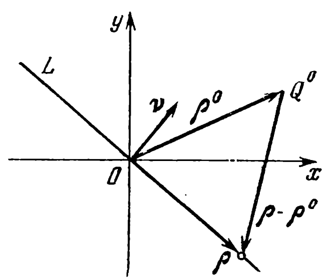

Рис. 19.

в левую часть, подставить в левую часть вместо x, y соответствующие координаты x^0, y^0 точки Q^0 и взять абсолютную величину полученного выражения.

На языке коэффициентов A, B, C равенство (26) выглядит так:

$$d=|Ax^0+By^0+C|/\sqrt{A^2+B^2}. \tag{26'}$$

При $C=0$ формула (26), а следовательно и (26′), остается тоже верной. В этом случае $p=0$, $\mathbf{v}$ — один из двух единичных векторов, перпендикулярных к L (рис. 19). Теперь

$$d=|\text{пр}_{\mathbf{v}}(\rho-\rho^0)|=|(\rho-\rho^0, \mathbf{v})|=|(\rho, \mathbf{v})-(\rho^0, \mathbf{v})|=|(\rho^0, \mathbf{v})|$$

или

$$d=|Ax^0+By^0|/\sqrt{A^2+B^2},$$

т. е. формула (26′) верна при $C=0$.

Замечание 3. Из рис. 18 видно, что: а) если начало O и точка Q^0 находятся по одну сторону от L, то угол между $\mathbf{v}$ и

$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}^0$ острый и $d=p-(\boldsymbol{\rho}^0, \boldsymbol{\nu})$; б) если же O и Q^0 находятся по разные стороны от L, то угол между $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}^0$ и $\boldsymbol{\nu}$ тупой и $d=(\boldsymbol{\rho}^0, \boldsymbol{\nu})-p$.

Задача 5. Найти расстояние от точки (1, 1) до прямой

$$2x+\sqrt{5}y-\sqrt{5}=0.$$

§ 9. Уравнение плоскости

9.1. Уравнение плоскости в нормальном виде. В пространстве R_3, где введена прямоугольная система координат x, y, z, зададим вектор $\boldsymbol{a}$, выпущенный из начала O. Через конец $\boldsymbol{a}$ проведем плоскость П перпендикулярно к $\boldsymbol{a}$ (рис. 20). Произвольную (текущую) точку плоскости П обозначим через $Q=(x, y, z)$. Буква $\boldsymbol{\rho}$ обозначает радиус-вектор точки Q.

Пусть $p=|\boldsymbol{a}|$ — длина вектора $\boldsymbol{a}$ и

$$\boldsymbol{\nu}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— единичный вектор, направленный в ту же сторону, что и $\boldsymbol{a}$. Здесь α, β, γ — углы, образуемые вектором $\boldsymbol{\nu}$ соответственно с положительными направлениями осей x, y, z. Проекция любой точки $Q\in П$ на вектор $\boldsymbol{\nu}$ есть, очевидно, величина постоянная, равная p:

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nu})=p \qquad (p\geqslant 0). \qquad (1)$$

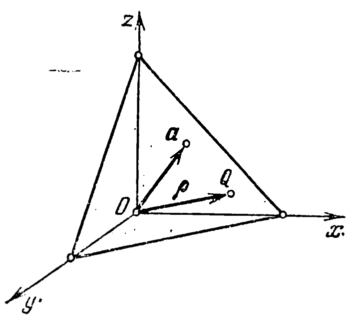

Рис. 20.

Уравнение (1) имеет смысл и при $p=0$. В этом случае плоскость П проходит через начало координат O $(\boldsymbol{a}=0)$ и $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, выпущенный из O перпендикулярно к П, неважно в каком направлении, т. е. вектор $\boldsymbol{\nu}$ определяется с точностью до знака. Уравнение (1) есть *уравнение плоскости* П *в векторной форме*. В координатах оно записывается так:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \qquad (p\geqslant 0) \qquad (1')$$

и называется *уравнением плоскости в нормальном виде*.

9.2. Уравнение плоскости в общем виде. Если уравнение (1′) умножить на какое-либо не равное нулю число, то получим эквивалентное ему уравнение виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

определяющее ту же плоскость. Здесь числа A, B, C не равны нулю одновременно. Уравнение (2), где числа A, B, C не все равны нулю, называется *уравнением плоскости в общем виде.*

Произвольное уравнение вида (2), где числа A, B, C одновременно не равны нулю, можно привести к нормальному виду, умножив его на число

$$M=\pm 1/\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

где знак берется противоположным знаку числа D. Тогда число $p=-MD$ будет неотрицательным, а уравнение (2) преобразуется в следующее, ему эквивалентное,

$$MAx+MBy+MCz=p \qquad (p\geqslant 0). \tag{3}$$

Здесь

$$(MA)^2+(MB)^2+(MC)^2=1.$$

Это показывает, что вектор

$$\mathbf{v}=(MA,\ MB,\ MC)$$

единичный ($|\mathbf{v}|=1$). Его проекции на оси координат равны

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\cos\beta, \quad MC=\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\mathbf{v}$ соответственно с положительными направлениями осей x, y, z. В силу введенных обозначений уравнение (3) имеет вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \qquad (p\geqslant 0), \tag{3'}$$

т. е. мы получили уравнение плоскости (2) в нормальном виде.

Если задано уравнение плоскости в общем виде (2) и надо узнать ее расположение относительно системы координат, то достаточно уравнение (2) привести к нормальному виду, умножив его на нормирующий множитель M.

Из самого же уравнения (2) без каких-либо вычислений можно заключить только следующие два факта: 1) если $D=0$, то плоскость проходит через начало координат, а если $D\neq 0$, то она не проходит через начало координат; 2) вектор $\mathbf{N}=(A,\ B,\ C)$ перпендикулярен плоскости, ведь он коллинеарен единичному вектору $\mathbf{v}=(MA, MB, MC)=$ $=M\mathbf{N}$, перпендикулярному к данной плоскости.

Уравнение

$$Ax+By+D=0 \tag{4}$$

есть частный случай уравнения (2). В плоскости (x, y) уравнение (4) определяет прямую, а в пространстве (x, y, z) оно есть уравнение плоскости П, перпендикулярной к координатной плоскости (x, y) и проходящей через эту прямую. Какова бы ни была точка (x, y, z), принадлежащая к плоскости П, ее координаты x, y удовлетворяют уравнению (4) независимо от того, какую она имеет третью координату z. Уравнение

$$Ax+D=0 \quad (A \neq 0) \tag{5}$$

есть частный случай уравнения (4). Его можно записать еще в виде

$$x=C \quad (C=-D/A). \tag{5'}$$

Уравнение (5') в пространстве (x, y, z) есть геометрическое место точек (x, y, z), имеющих первую координату, равную числу C. Координаты же y, z могут быть любыми.

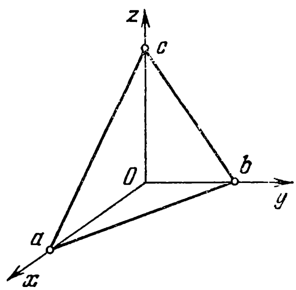

Рис. 21.

Ясно, что (5') определяет плоскость, параллельную координатной плоскости (y, z) (или перпендикулярную оси x).

9.3. Уравнение плоскости в отрезках. Если числа A, B, C, D не равны нулю, то уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{6}$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$.

Уравнение (6) называется *уравнением плоскости в отрезках*. Эта плоскость (рис. 21) пересекает ось x в точке $(a, 0, 0)$, ось y — в точке $(0, b, 0)$, ось z — в точке $(0, 0, c)$. По уравнению (6) легко представить себе расположение плоскости относительно системы координат.

9.4. Уравнение плоскости, проходящей через точку. Если точка (x_0, y_0, z_0) лежит на плоскости (2), то ее координаты удовлетворяют уравнению (2):

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (2), получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) называется *уравнением плоскости, проходящей через точку* (x_0, y_0, z_0). В векторной форме уравнение (8) имеет вид

$$N(\rho-\rho^0)=0, \tag{8'}$$

где N, ρ, ρ^0 — векторы, определяемые равенствами

$$N=(A, B, C), \quad \rho=(x, y, z), \quad \rho^0=(x_0, y_0, z_0).$$

Здесь N — вектор, перпендикулярный к плоскости (2), ρ — радиус-вектор текущей ее точки, ρ^0 — радиус-вектор заданной ее точки. Так как вектор $\rho-\rho^0$, приложенный к точке (x_0, y_0, z_0), принадлежит плоскости (2), то равенство (8) говорит о том, что вектор N ортогонален плоскости (2), что мы установили ранее из других соображений.

9.5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Даны три точки

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3),$$

не лежащие на одной прямой. Требуется написать уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Из геометрии известно, что такая плоскость существует и единственная. Так как она проходит через точку (x_1, y_1, z_1), то ее уравнение имеет вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \tag{9}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю. Так как она проходит еще через точки (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), то должны выполняться условия

$$\left.\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,\\ A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Составим однородную линейную систему уравнений относительно неизвестных u, v, w:

$$\left.\begin{aligned} (x-x_1)u+(y-y_1)v+(z-z_1)w=0,\\ (x_2-x_1)u+(y_2-y_1)v+(z_2-z_1)w=0,\\ (x_3-x_1)u+(y_3-y_1)v+(z_3-z_1)w=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь (x, y, z) есть произвольная точка, удовлетворяющая уравнению плоскости (9). В силу (9) и (10) системе (11) удовлетворяет нетривиальный вектор $N=(A, B, C)$, поэтому определитель этой системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Мы получили уравнение вида (9), т. е. уравнение плоскости, в чем легко убедиться, разложив полученный определитель по элементам первой строки. При этом эта плоскость проходит через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), что вытекает из свойств определителя. Наша задача решена.

Уравнение (12) можно еще написать и в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Если из первой, третьей и четвертой строк определителя в (13) вычесть вторую строку, то он не изменится. Разлагая результат по элементам четвертого столбца, получим уравнение (12).

9.6. Угол между двумя плоскостями. Зададим две плоскости

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'&=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Мы знаем, что векторы $\boldsymbol{N}=(A, B, C)$ и $\boldsymbol{N}'=(A', B', C')$ перпендикулярны соответственно данным плоскостям, поэтому угол φ между $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}'$ равен углу (двугранному) между данными плоскостями. Но скалярное произведение

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}'=|\boldsymbol{N}||\boldsymbol{N}'|\cos\varphi,$$

поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}'}{|\boldsymbol{N}||\boldsymbol{N}'|}=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{(A')^2+(B')^2+(C')^2}}. \tag{15}$$

Достаточно считать, что $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

Отметим, что две пересекающиеся плоскости на самом деле образуют два двугранных угла φ_1 и φ_2. Их сумма равна π $(\varphi_1+\varphi_2=\pi)$, а их косинусы равны по абсолютной величине, но отличаются знаками $(\cos\varphi_1=-\cos\varphi_2)$. Если заменить в первом уравнении (14) числа A, B, C соответственно на числа $-A$, $-B$, $-C$, то полученное уравнение будет определять ту же плоскость, но угол φ в (15) заменится на $\pi-\varphi$.

Две плоскости (14) *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда $\cos\varphi=0$, т. е.

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}'=AA'+BB'+CC'=0. \tag{16}$$

Две плоскости (14) *параллельны* тогда и только тогда, когда (перпендикулярные к ним) векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}'$ коллинеарны, т. е. выполняются условия пропорциональности

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}. \tag{17}$$

Если дополнительно к этому выполняются расширенные условия пропорциональности

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}, \tag{18}$$

то это говорит о том, что плоскости (14) совпадают, т. е. оба уравнения (14) определяют одну и ту же плоскость.

Хотя на нуль делить нельзя, но удобно писать символические пропорции (17) или (18) с нулями в знаменателях. Но тогда, если, например, $B'=0$, то надо считать, что и $B=0$. Или если $D'=0$, то $D=0$.

Пример 1. Уравнения

$$\begin{gathered}2x+4y+1=0,\\ x+2y+5=0\end{gathered}$$

определяют пару параллельных плоскостей, а уравнения

$$\begin{gathered}2x+4y+2=0,\\ x+2y+1=0\end{gathered}$$

— пару совпадающих плоскостей.

9.7. Расстояние от точки до плоскости. Требуется найти расстояние от точки $(x_0, y_0, z_0)=Q^0$ до плоскости Π, определяемой уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Для этого приведем уравнение Π к нормальному виду:

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nu})=p \quad (p\geqslant 0).$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}=(x, y, z)$ — радиус-вектор текущей точки Q плоскости Π, p — длина перпендикуляра $\boldsymbol{a}$ к Π, выпущенного из нулевой точки, и $\mathbf{v}$ — единичный вектор, направленный как $\boldsymbol{a}$. Из рис. 22 видно, что разность $\rho - \rho^0$ радиус-вектора произвольной точки $Q = (x, y, z)$ плоскости П и радиус-вектора точки $Q^0 = (x_0, y_0, z_0)$ есть такой вектор, что

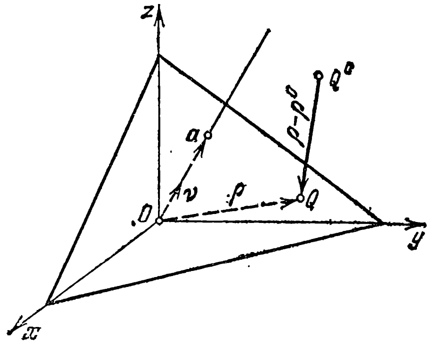

Рис. 22.

абсолютная величина его проекции на $\mathbf{v}$ равна искомому расстоянию d от $Q^0 = (x_0, y_0, z_0)$ до П:

$$d = |(\rho - \rho^0, \mathbf{v})|,$$

но

$$(\rho - \rho^0, \mathbf{v}) = (\rho, \mathbf{v}) - (\rho^0, \mathbf{v}) = p - (\rho^0, \mathbf{v}).$$

Следовательно,

$$d = |(\rho^0, \mathbf{v}) - p|.$$

Мы видим, что, для того чтобы вычислить расстояние d от точки Q^0 до плоскости П, надо записать уравнение плоскости П в нормальном виде, перенести p в левую часть и подставить в последнюю (x_0, y_0, z_0) вместо (x, y, z). Абсолютная величина полученного выражения и есть искомое число d.

На языке параметров плоскости, очевидно,

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Легко видеть, что если точка Q^0 и начало координат находятся по разные стороны от плоскости П (как на рис. 22), то вектор $\rho - \rho^0$ образует с $\mathbf{v}$ тупой угол, и поэтому

$$d = -(\rho - \rho^0, \mathbf{v}) = (\rho^0, \mathbf{v}) - p > 0.$$

Если же точка Q^0 и начало координат находятся по одну сторону от П, то указанный угол острый, и тогда

$$d = (\rho - \rho^0, \mathbf{v}) = p - (\rho^0, \mathbf{v}) > 0.$$

Следовательно, в первом случае $(\rho^0, \mathbf{v}) > p$, а во втором $(\rho^0, \mathbf{v}) < p$.

Пример 2. Расстояние d от точки (1, 1, 1) до плоскости П

$$x+2y+z=3$$

равно

$$d=\left|\frac{x+2y+z-3}{\sqrt{1+4+1}}\right|_{x=1,\ y=1,\ z=1}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

В данном случае точка (1, 1, 1) и начало координат находятся по разные стороны от плоскости П, так как $M>0$ и

$$[x+2y+z-3]_{x=1,\ y=1,\ z=1}=1>0.$$

ЗАДАЧИ

1. Привести уравнения плоскостей

$$x-y+z=2,\ 2x-y+\sqrt{20}\,z=10$$

к нормальному виду.

2. Найти угол между плоскостями

$$x+y+z=1 \text{ и } y=0;$$
$$x-y+z=2 \text{ и } x+y+z=3.$$

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0).

4. Написать уравнение шаровой поверхности с центром в начале координат, касающейся плоскости $2x-6y+7z=2$.

§ 10. Прямая в пространстве

10.1. Уравнения прямой в каноническом виде. Рассмотрим в пространстве произвольную прямую L. Отметим на ней точку (x_0, y_0, z_0), определяющую радиус, вектор $\rho^0=(x_0, y_0, z_0)$ и лежащий на ней вектор $a=(a_1, a_2, a_3)\neq 0$, приложенный к точке $Q^0=(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 23). Произвольную текущую точку прямой L обозначим через $Q=(x, y, z)$ и ее радиус-вектор через $\rho=(x, y, z)$. Вектор $\rho-\rho^0$ можно записать в виде $\rho-\rho^0=ta$, где t — некоторое число (скаляр). Если действительная переменная t пробегает интервал $(-\infty, \infty)$, то конец вектора $\rho=\rho^0+ta$ пробегает всю прямую L. Поэтому говорят, что равенство

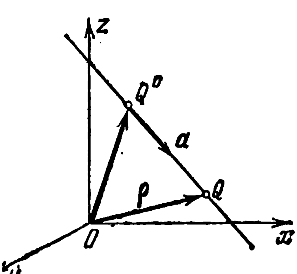

Рис. 23.

$$\rho-\rho^0=ta \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{1}$$

есть *векторное уравнение прямой, проходящей через точку* $Q^0=(x_0, y_0, z_0)$ *и направленной в сторону вектора* $\mathbf{a}$.

На языке координат уравнение (1) распадается на три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=ta_1,\\ y-y_0&=ta_2,\\ z-z_0&=ta_3.\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Исключая из них параметр t, получим уравнения прямой (систему из двух уравнений)

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \qquad (1'')$$

где числа a_1, a_2, a_3 одновременно не равны нулю. Уравнения (1″) называются *уравнениями прямой в каноническом виде*.

Замечание. Может случиться, что одно или два из чисел a_1, a_2, a_3 равно нулю. Тогда все же принято писать равенства (1″) с нулем или двумя нулями в знаменателях. Такая запись становится тогда символической, но она удобна.

Пример 1. Уравнения

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{2} \qquad (2)$$

определяют прямую в пространстве, проходящую через точку (1, 2, 3) в направлении вектора (1, 0, 2).

Эти уравнения можно заменить на следующие им эквивалентные:

$$y-2=0\cdot(x-1),\ 2(x-1)=z-3,$$

т. е.

$$y=2,\ z=2x+1. \qquad (2')$$

Таким образом, рассматриваемая прямая есть пересечение двух плоскостей, определяемых уравнениями (2′).

Пример 2. Уравнения прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{0}$$

эквивалентны следующим:

$$y-2=0,\quad z-3=0.$$

10.2. Расположение двух плоскостей. Пу заданы уравнения двух плоскостей

$$\begin{gathered} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Если коэффициенты первого из них соответственно пропорциональны коэффициентам второго ($A:B:C=A':B':C'$), то плоскости (3) и (4) параллельны или даже совпадают (при условии $A:B:C:D=A':B':C':D'$) (см. § 9, (17) и (18)). В противном случае плоскости (3) и (4) пересекаются по прямой. В этом случае один из определителей

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Для определенности будем считать, что первый

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5)$$

Тогда уравнения (3), (4) можно решить относительно x и y, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha z+\mu, \\ y&=\beta z+\nu, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где α, β, μ, ν — некоторые числа. Уравнения (6) эквивалентны следующим:

$$\frac{x-\mu}{\alpha}=\frac{y-\nu}{\beta}=\frac{z}{1}. \qquad (7)$$

Мы видим, что при условии (5) уравнения двух плоскостей (3), (4) определяют прямую (7), т. е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям (3), (4). Она проходит через точку (μ, ν, 0) и имеет направление вектора (α, β, 1). Числа α, β или одно из них могут быть равными нулю, тогда уравнения (7) будут иметь символический характер.

Пример 3. Прямая, определяемая уравнениями $x=0$, $y=0$, есть, очевидно, координатная ось z. К этому результату можно прийти и формально. Имеем

$$x=0\cdot z, \quad y=0\cdot z,$$

откуда

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1},$$

е. мы получили уравнения прямой, проходящей через чало координат (0, 0, 0) в направлении вектора (0, 0, 1). но, что эта прямая есть ось z.

Пример 4. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}, \tag{8}$$

$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}. \tag{9}$$

Векторы $\boldsymbol{r}_1=(a_1, b_1, c_1)$, $\boldsymbol{r}_2=(a_2, b_2, c_2)$ лежат на наших прямых и, как мы условились, они приложены соответственно к точкам (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). Поэтому угол φ между этими векторами и будет углом между прямыми (8) и (9):

$$\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_2|}.$$

ЗАДАЧИ

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (2, -1, 0) перпендикулярно к плоскости $2x+z-4y=7$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (1, -1, 2) и перпендикулярной к прямой, определяемой уравнениями $2x+3y=1$, $3x-z=1$.

§ 11. Ориентация прямоугольных систем координат

11.1. Двумерная система координат. На рис. 24 и 25 изображены системы координат x, y. Они различны — про них говорят, что они *ориентированы противоположно*. В случае рис. 24 поворотом оси x вокруг точки

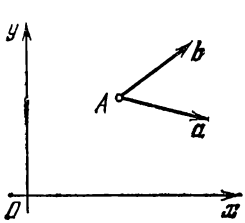

Рис. 24.

Рис. 25.

O на угол $\pi/2$ можно совместить направление осей x и y, лишь если этот поворот совершить против часовой стрелки. В случае же рис. 25 этой цели можно достичь, лишь поворачивая ось x по часовой стрелке. Невозможно систему координат, изображенную на рис. 24, передвигая ее в рассматриваемой плоскости (!) как твердое тело, совместить с системой, изображенной на рис. 25, так, чтобы направления соответствующих осей совпали.

На рис. 24, так же как на рис. 25, изображена пара неколлинеарных, выходящих из некоторой точки A векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Передвигая эту пару как твердое тело в плоскости, достигнем того, чтобы точка A совпала с началом координат O. Поставим себе задачу путем вращения каждого из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вокруг точки O достигнуть того, чтобы вектор $\boldsymbol{a}$ принял направление оси x, а вектор $\boldsymbol{b}$ оказался лежащим на оси y. При этом мы требуем, чтобы во время этого процесса векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ все время находились в рассматриваемой плоскости и чтобы угол между ними не был равен 0 и π. Очевидно, всегда можно достигнуть этой цели. Вначале мы вращаем систему векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ как твердое тело около точки O до совпадения вектора $\boldsymbol{a}$ с положительным направлением оси x. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то вектор $\boldsymbol{b}$ окажется в верхней или нижней полуплоскости. Затем вектор $\boldsymbol{b}$ поворачиваем на необходимый угол, чтобы он оказался на оси y, при этом не разрешается, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ попадал на ось x. Поэтому может случиться, что направление вектора $\boldsymbol{b}$ совпадает с направлением оси y (это возможно, когда вектор $\boldsymbol{b}$ был в верхней полуплоскости) или же

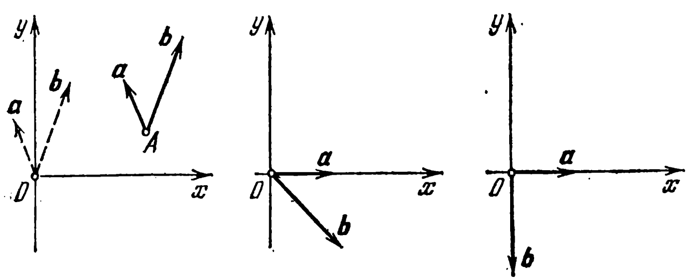

Рис. 26.

вектор $\boldsymbol{b}$ окажется направленным в сторону отрицательного направления оси y (см. рис. 26, где показана динамика процесса). В первом случае мы будем говорить, что *пара векторов* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *ориентирована как система координат* x, y, а во втором, что *пара* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *ориентирована противоположно ориентации* x, y.

11.2. Трехмерная система координат. Прямоугольные системы координат x, y, z в пространстве, изображенные на рис. 27 и 28, тоже различны. Рассматривая систему координат рис. 27 как твердое тело, можно после соответствующего его передвижения совместить оси x и y обеих систем координат. Но положительное направление оси z первой системы не совпадает с положительным направлением оси z второй системы. Мы говорим, что

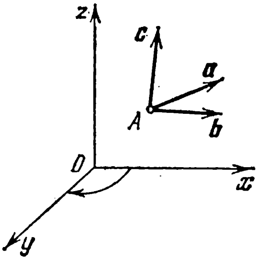

Рис. 27.

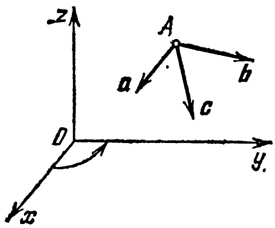

Рис. 28.

системы рис. 27 и 28 *ориентированы противоположно*. Система рис. 27 называется *левой системой координат*, а система рис. 28 — *правой системой координат*. Если винт с правой (левой) нарезкой ввинчивать по направлению оси z, поворачивая его по стрелке рис. 28 (рис. 27), то он будет двигаться поступательно в этом направлении. Можно также распознавать систему координат по следующему правилу. Если смотреть из какой-либо точки положительной полуоси Oz на положительную полуось Oy, то положительная полуось Ox может быть направлена влево или вправо. В первом случае система координат называется *левой* (рис. 27), а во втором — *правой* (рис. 28).

Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или же находятся в параллельных плоскостях.

Возьмем систему некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, приложенных к некоторой точке A. Будем вращать в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{b}$ вокруг точки A до тех пор, пока $\mathbf{b}$ не окажется перпендикулярным $\mathbf{a}$. Во время движения будем следить, чтобы угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ все время не равнялся нулю и π. После этого будем вращать вектор $\mathbf{c}$ около A с целью придать ему направление, перпендикулярное векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. При этом будем следить за тем, чтобы вектор $\mathbf{c}$ ни на один момент не совпал с плоскостью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. В результате векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ окажутся перпендикулярными. Теперь перенесем эту тройку как твердое тело в точку O и будем ее вращать вокруг точки O с целью, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получили соответственно направления осей x, y. Может оказаться два случая: 1) вектор $\boldsymbol{c}$ будет направлен как положительная ось z, 2) он будет направлен в противоположную сторону. В первом случае будем говорить, что система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *ориентирована как система координат* x, y, z, а во втором—она *ориентирована противоположным образом* (см. соответственно рис. 27 и 28).

§ 12. Векторное произведение

12.1. Два определения векторного произведения. Зададим в некоторой прямоугольной системе координат трехмерного действительного пространства векторы

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$

и назовем *векторным произведением* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вектор

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=&\\ =(a_yb_z-a_zb_y)\,\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\boldsymbol{k}&=\\ =\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}&. \qquad (1)\end{aligned}$$

В качестве последнего члена этой цепи написан «обобщенный определитель», первая строка которого состоит из векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (ортов системы координат). Во втором члене показано, как этот обобщенный определитель понимать (определитель третьего порядка мы разлагаем по элементам первой строки так, как если бы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ были числами).

Очевидно, что $[\boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{b})]=-[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$.

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно также определить следующим образом:

1) если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору;

2) если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то вектор $\boldsymbol{c}$ направлен перпендикулярно к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и притом так, что система $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ориентирована так же, как данная система координат. Длина же вектора $\boldsymbol{c}$ равна

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\omega\qquad(0\leqslant\omega\leqslant\pi),\qquad(2)$$

где ω есть угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. длина $\boldsymbol{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 29).

Докажем эквивалентность сформулированных двух определений.

Если вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, то из (1) следует, что компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пропорциональны

$$a_x : a_y : a_z = b_x : b_y : b_z,$$

т. е. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, но тогда векторное произведение и по второму определению равно нулевому вектору.

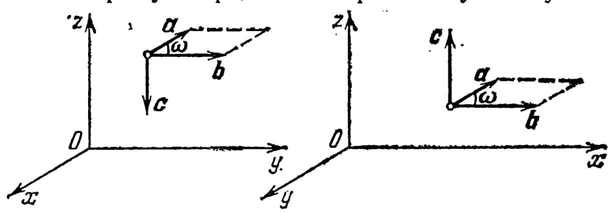

Рис. 29.

Обратно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то по второму определению $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. Так как компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при этом пропорциональны, то, согласно первому определению, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы и $\boldsymbol{c}$ — их векторное произведение согласно (1). Очевидно, что

$$(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) = (a_y b_z - a_z b_y)\, a_x + (a_z b_x - a_x b_z)\, a_y + \\ + (a_x b_y - a_y b_x)\, a_z = 0$$

и аналогично

$$(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) = 0.$$

Итак вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Докажем, что система векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ориентирована так же, как система координат x, y, z. Будем непрерывно вращать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вокруг точки O, каждый раз вычисляя по ним вектор $\boldsymbol{c}$, но так, чтобы все время $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ были неколлинеарными. Но тогда вектор $\boldsymbol{c}$ все время будет ненулевым ($\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$) и система $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ все время будет некомпланарной. Совершим такие повороты, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получили направления соответственно осей x и y, т. е. чтобы они имели вид $\boldsymbol{a}=(|\boldsymbol{a}|,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{b}=(0,\ |\boldsymbol{b}|,\ 0)$. Этого всегда можно достигнуть, потому что в данном случае плоскость векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ может вращаться в пространстве. Но тогда вектор $\boldsymbol{c}$, вычисленный по формуле (1), имеет вид $\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)$. Мы видим, что векторы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ в последний момент нашего процесса ориентированы так же, как оси (x, y, z). Но тогда, согласно определению ориентации (см. § 11) и исходная система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ориентирована так же, как система координат x, y, z.

Итак, векторное произведение $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, определенное по формуле (1), есть вектор, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и система векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ориентирована так же, как рассматриваемая система координат x, y, z.

Нам еще надо доказать формулу (2). Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют с осями координат углы, соответственно равные α, β, γ и α', β', γ'. Так как

$$\begin{aligned}
a_x&=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, & a_y&=|\boldsymbol{a}|\cos\beta, & a_z&=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,\\
b_x&=|\boldsymbol{b}|\cos\alpha', & b_y&=|\boldsymbol{b}|\cos\beta', & b_z&=|\boldsymbol{b}|\cos\gamma',
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2&=(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2=\\
&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2[(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')^2+\\
&\quad+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma')^2+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha')^2]=\\
&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2[(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\times\\
&\quad\times(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')-\\
&\quad-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')^2]=\\
&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2[1\cdot 1-\cos^2\omega]=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\omega,
\end{aligned}$$

где ω — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $(\cos\omega=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')$.

Итак, мы доказали (2).

Таким образом, мы полностью доказали, что из определения векторного произведения по формуле (1) следует второе его определение.

Обратно, если вектор подчиняется второму определению, тогда он единственный, потому что может быть только один вектор, перпендикулярный к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и притом такой, что система $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ориентирована так же, как система x, y, z. Но тогда это есть вектор $\boldsymbol{c}$, определенный по формуле (1), потому что последний, как мы убедились, обладает указанными свойствами.

Отметим еще раз, что условие $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ есть *необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

12.2. Геометрический смысл определителя второго порядка. Рассмотрим теперь специально два ненулевых плоских вектора

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y),\ \boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y) \tag{3}$$

в некоторой прямоугольной системе координат x, y (рис. 30, 31). Будем считать, что рассматриваемая плоскость находится в пространстве и добавим к осям x, y

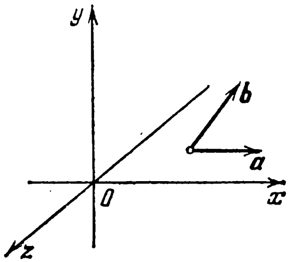

Рис. 30.

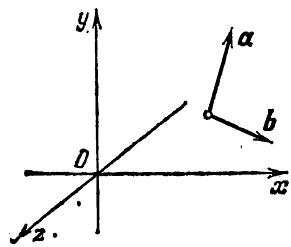

Рис. 31.

перпендикулярную к ним ось z. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ будут теперь иметь координаты

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ 0),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ 0).$$

Векторное произведение их равно

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{k}$ — орт оси z. По определению векторного произведения система $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ ориентирована, как система координат x, y, z. Поэтому, очевидно, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}>0,$$

то система векторов $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ должна быть ориентирована, как оси координат $(x,\ y)$. Если же определитель

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}<0,$$

то система $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ ориентирована противоположно ориентации x, y. На рис. 30 изображена первая ситуация расположения векторов $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, а на рис. 31 — вторая. Мы знаем также, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна (см. (4))

$$S=|\boldsymbol{c}|=\left\|\begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{matrix}\right\|,$$

т. е. абсолютной величине определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Итак, мы доказали, что: 1) абсолютная величина определителя (5) равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y)$; 2) знак определителя (5) зависит от расположения этих векторов относительно прямоугольной системы координат x, y. Знаку $+$ соответствует система $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, ориентированная, как x, y, а знаку $-$ соответствует система $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, ориентированная противоположным образом.

12.3. Свойства векторного произведения. Справедливы свойства

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}], \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{b})=\alpha[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}], \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}], \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, α — скаляр.

Если векторные произведения, входящие в равенства (6), (7), (8), выразить по формуле (1) через компоненты векторов

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z), \quad \boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z), \quad \boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z),$$

то легко получить эти равенства.

Формулы (6) и (7) легко следуют также из геометрических соображений. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы. Если в векторном произведении заменить местами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и перпендикуляр к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не изменятся. Изменится лишь направление $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ на противоположное, что влечет изменение ориентации $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

Умножение на положительное число α вектора $\boldsymbol{b}$ увеличивает лишь в α раз площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а направление векторного произведения останется прежним. Если же $\alpha<0$, то

$$\boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(-|\alpha|\boldsymbol{b})=|\alpha|[\boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{b})]= \\ =-|\alpha|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\alpha[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}].$$

Заметим еще, что из (6) и (7) следует также, что

$$(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = -[\boldsymbol{b} \times (\alpha \boldsymbol{a})] = -\alpha [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}] = \alpha [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}].$$

Пример 1. Определить угол A треугольника ABC с вершинами $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (1, 2, 4)$.

Обозначим искомый угол через ω. Таким образом, ω это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Из второго определения векторного произведения имеем

$$\sin \omega = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|},$$

где $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 1$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{j}.$$

Отсюда

$$\sin \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega = \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

Так как $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 2)$ и $|\overrightarrow{BC}|^2 = 5 > |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = 1 + 2 = 3$, то необходимо взять $\omega = 3\pi/4$.

Замечание. Если в треугольнике ABC угол A прямой, то $|\overrightarrow{BC}|^2 = BC^2 = AC^2 + AB^2$; если A — тупой угол, то $BC^2 > AC^2 + AB^2$; если A — острый угол, то $BC^2 < AC^2 + AB^2$.

Пример 2 (из механики). Пусть заданы две точки A и B. К точке B приложена сила, определенная вектором $\boldsymbol{F}$. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. *Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки A называется* векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}$$

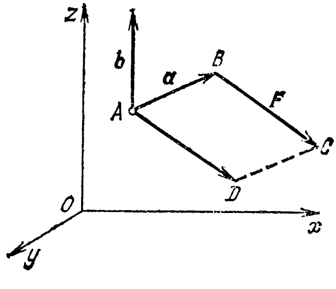

Рис. 32.

(см. рис. 32, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Вектор $\boldsymbol{b}$ (момент силы $\boldsymbol{F}$) перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{F}$ и имеет длину, равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{F}$. Направление же вектора $\boldsymbol{b}$ зависит от той прямоугольной системы координат, которая задана в этом вопросе.

На рис. 32 взята левая система координат. Направление $\boldsymbol{b}$ взято так, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{b}$ тоже образовали левую систему.

§ 13. Смешанное (векторно-скалярное) произведение

Векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (в трехмерном действительном пространстве) называется скаляр, равный скалярному произведению вектора $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=(a_yb_z-a_zb_y)c_x+(a_zb_x-a_xb_z)c_y+$$
$$+(a_xb_y-a_yb_x)c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

В силу определения скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}=(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\omega)\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.$$

Поэтому можно еще, очевидно, сказать, что смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ориентирована как система координат x, y, z или противоположным образом. Отметим, что $|\text{пр}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}|$ равна высоте параллелепипеда.

Имеют место равенства

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}, \quad (2)$$

которые легко следуют из свойств определителя (1).

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат в одной плоскости, то

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=0,$$

так как $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}$. Обратно, если $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=0$, то вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и, следовательно, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или в плоскости, параллельной этой плоскости.

Таким образом, условие

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=0$$

есть *необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Пример 1. Найти условие принадлежности четырех точек к одной плоскости.

Пусть даны четыре точки $A_j=(x_j, y_j, z_j)$ $(j=1, 2, 3, 4)$. Если эти точки лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ также лежат в этой плоскости, и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3})\,\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Это и есть условие принадлежности четырех точек одной плоскости (ср. § 9, (12)).

§ 14. Линейно независимая система векторов

Зададим в R_n (действительном или комплексном) систему из k векторов

$$a^s=(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}) \quad (s=1, \ldots, k). \tag{1}$$

По определению *система* (1) *линейно независима*, если из векторного равенства

$$\lambda_1 a^1+\lambda_2 a^2+\ldots+\lambda_k a^k=0, \tag{2}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — числа (соответственно действительные или комплексные), следует, что

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0.$$

Система векторов (1) называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, одновременно не равные нулю, для которых выполняется равенство (2). Если для определенности считать, что $\lambda_k\neq 0$, то из (2) следует, что

$$a^k=\mu_1 a^1+\ldots+\mu_{k-1}a^{k-1}, \tag{3}$$

где

$$\mu_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}, \quad \ldots, \quad \mu_{k-1}=-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}.$$

Таким образом, *если система из k векторов линейно зависима, то один из них есть*, как говорят, *линейная комбинация остальных*, или, как еще говорят, *зависит от остальных*.

Так как все время будет идти речь о *линейной* зависимости, то термин *линейный* будем позволять *себе* иногда опускать. Будем также говорить *зависимые* или *независимые векторы* вместо *зависимая* или *независимая система векторов*.

Один вектор $\boldsymbol{a}^1$ тоже образует систему — линейно независимую, если $\boldsymbol{a}^1 \neq \boldsymbol{0}$, и зависимую, если $\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{0}$.

Если система векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ линейно независима, то любая часть этой системы $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^s$ $(s < k)$ тем более линейно независима. Иначе нашлась бы нетривиальная система чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, для которой выполнялось бы

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}^1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}^s = \boldsymbol{0},$$

но тогда для системы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k-s \text{ раз}}$, которая тоже нетривиальна, имело бы место

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}^1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}^s + 0 \cdot \boldsymbol{a}^{s+1} + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{0}.$$

Из сказанного следует, что если система векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^s$ линейно зависима, то любая пополненная система

$$\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{a}^{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}^k$$

обладает тем же свойством. В частности, система векторов, содержащая в себе нулевой вектор, всегда линейно зависима.

Составим матрицу, определяемую векторами системы (1):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{Vmatrix}.$$

Теорема 1. *Если* ранг $A = k$, *т. е.* ранг A *равен числу векторов, то система* (1) *линейно независима.*

Если же ранг $A < k$, *то система* (1) *линейно зависима.*

Пример 1. Два вектора $\boldsymbol{a}^1 = (a_{11}, a_{12})$, $\boldsymbol{a}^2 = (a_{21}, a_{22})$ в действительном пространстве R_2 образуют линейно независимую систему, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

потому что векторное уравнение

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

эквивалентно двум уравнениям для соответствующих компонент

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 &= 0, \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но если $\Delta \neq 0$, то система (5) имеет единственное тривиальное решение

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \tag{6}$$

Если же $\Delta = 0$, то уравнениям (5) удовлетворяет некоторая нетривиальная система (λ_1, λ_2), т. е. при $\Delta = 0$ система векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ линейно зависима.

Очевидно, сказать, что в действительном пространстве R_2 векторы $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ коллинеарны или линейно зависимы — это все равно. Но тогда сказать, что векторы $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ не коллинеарны или линейно независимы — это тоже все равно.

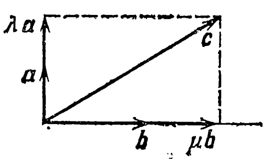

Рис. 33.

Пример 2. Система векторов $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ $(k \geqslant 3)$ в действительном пространстве R_2 всегда линейно зависима. Геометрически это ясно из рис. 33: если $\boldsymbol{c}$ — произвольный вектор и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы, то всегда можно указать такие числа λ, μ, что

$$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}.$$

Это показывает, что система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима. Если же $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — коллинеарные векторы, то они линейно зависимы. Тем более линейно зависимы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

По теореме 1, чтобы исследовать пару векторов $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, мы должны записать матрицу из их координат

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

В даннном случае $k = 2$.

а) Если ранг $A = 1 < 2 = k$, то теорема утверждает, что векторы $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ линейно зависимы.

б) Если же ранг $A = 2 = k$, то векторы $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ линейно независимы.

Это совпадает с приведенными выводами, потому что в случае а) $\Delta = 0$ и б) $\Delta \neq 0$.

Тот факт, что три произвольных вектора $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ в R_2 линейно зависимы, тоже предусмотрен теоремой — ведь

$$\text{ранг } A \leqslant 2 < 3 = k.$$

Пример 3. В трехмерном действительном пространстве R_3 два вектора

$$\boldsymbol{a}^1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \qquad \boldsymbol{a}^2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

В самом деле, пусть a^1, a^2 коллинеарны. Если один из данных векторов нулевой, то они линейно зависимы. Если же a^1 и a^2 коллинеарны и не нулевые, то

$$a^1 = \lambda a^2,$$

где λ — некоторое число. Последнее означает, что a^1, a^2 линейно зависимы.

Обратно, если a^1, a^2 линейно зависимы, то один из них зависит от другого, например

$$a^2 = \mu a^1,$$

т. е. векторы коллинеарны.

Если в этом случае рассмотреть матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix},$$

то элементы строк матрицы пропорциональны, и поэтому

$$\text{ранг } A = 1 < 2 = k,$$

т. е. наше утверждение согласуется с теоремой 1.

Пример 4. Рассмотрим теперь три вектора в R_3:

$$\begin{aligned} a^1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \\ a^2 &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \\ a^3 &= (a_{31}, a_{32}, a_{33}). \end{aligned}$$

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Векторному уравнению

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 = 0 \tag{7}$$

эквивалентна система из трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 = 0, \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 = 0, \\ a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (7′) имеет единственное тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Но тогда и уравнение (7) имеет единственное тривиальное решение и система векторов a^1, a^2, a^3 линейно независима.

Если $\Delta = 0$, то система (7'), следовательно, и уравнение (7) имеют нетривиальное решение (λ_1, λ_2, λ_3). Но тогда система векторов ($\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$) линейно зависима. Но здесь можно различать детали:

1) Пусть ранг $A = 1$, где

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Тогда по крайней мере одна из строк A, пусть для определенности первая, имеет хотя бы один элемент, не равный нулю. Рассмотрим матрицу

$$A' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Она имеет ранг 1, поэтому все порождаемые ею определители второго порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Но тогда, очевидно, компоненты векторов $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ пропорциональны

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = \lambda,$$

т. е.

$$a_{21} = a_{11}\lambda, \quad a_{22} = a_{12}\lambda, \quad a_{23} = a_{13}\lambda$$

или

$$\boldsymbol{a}^2 = \lambda \boldsymbol{a}^1.$$

Аналогично, учитывая, что в матрице

$$A'' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

тоже все определители второго порядка равны нулю, получим, что

$$\boldsymbol{a}^3 = \mu \boldsymbol{a}^1,$$

где μ — некоторое число. Таким образом, в этом случае векторы $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ коллинеарны.

2) Пусть теперь ранг $A = 2$. Тогда одна из матриц, состоящих из двух строк матрицы A, имеет ранг 2. Пусть для определенности это есть матрица A' (см. (8)). На основании примера 3 векторы $\boldsymbol{a}^1$ и $\boldsymbol{a}^2$ линейно независимы. Но система $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ зависима, т. е. для некоторой

нетривиальной тройки чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 = 0. \tag{9}$$

Здесь $\lambda_3 \neq 0$, потому что иначе $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 = 0$, и в силу независимости системы a^1, a^2 было бы $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Но тогда равенство (9) можно разрешить относительно a^3:

$$a^3 = \mu_1 a^1 + \mu_2 a^2, \quad \mu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad \mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Таким образом, если $\Delta = 0$, а ранг $A' = 2$ (см. (8)), то векторы a^1 и a^2 неколлинеарны, а вектор a^3 принадлежит к плоскости этих векторов.

Приведенные рассуждения не противоречат теореме 1. В самом деле, если $\Delta \neq 0$, то ранг $A = 3 = k$ и по теореме 1 система векторов a^1, a^2, a^3 линейно независима. Если же $\Delta = 0$, то ранг $A < 3$ и система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима.

Доказательство теоремы 1. Векторное равенство (2) эквивалентно следующим n уравнениям для компонент векторов:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_k a_{k2} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} = 0. \end{array}\right\} \tag{2'}$$

Пусть ранг $A = k$. Тогда, очевидно, $k \leqslant n$. Существует не равный нулю определитель k-го порядка, порождаемый матрицей A. Не ограничивая общности, можно считать, что это определитель из коэффициентов первых k уравнений системы (2'):

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 a_{1k} + \ldots + \lambda_k a_{kk} = 0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{k1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как однородная система (10) имеет определитель, отличный от нуля, то она имеет только тривиальное решение:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

и система векторов (1) линейно независима. Утверждение теоремы в этом случае доказано.

Пусть теперь ранг $A=s<k$. Перенумеруем переменные λ_j и коэффициенты a_{ij} системы (2') так, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1s} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему первых s уравнений можно записать так:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1+\dots+a_{s1}\lambda_s=-a_{s+1,1}\lambda_{s+1}-\dots-a_{k1}\lambda_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1s}\lambda_1+\dots+a_{ss}\lambda_s=-a_{s+1,s}\lambda_{s+1}-\dots-a_{ks}\lambda_k. \end{array}\right\}$$

Если положить $\lambda_{s+1}=\dots=\lambda_k=1$, то данную систему можно решить относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. В результате получим нетривиальное решение

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \tag{11}$$

первых s уравнений (2'). Теперь мы можем присоединить к этим s уравнениям любые другие $k-s$ уравнений (2'), и полученная система все равно будет иметь найденную нетривиальную систему в качестве решения. Чтобы объяснить это утверждение, запишем формально систему (2') следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_{11}+\dots+\lambda_k a_{k1}+\lambda_{k+1}\cdot 0+\dots+\lambda_n\cdot 0=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1n}+\dots+\lambda_k a_{kn}+\lambda_{k+1}\cdot 0+\dots+\lambda_n\cdot 0=0. \end{array}\right\} \tag{2'}$$

Матрица из коэффициентов полученных уравнений все равно имеет ранг s, так же как и расширенная (справа нулями!) матрица. Первые s уравнений системы (2') удовлетворяются найденными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (см. (11)) и произвольными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. На основании утверждения 2) § 4 (правила решения систем) числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют и остальным уравнениям системы (2'), т. е. числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (не все равные нулю) удовлетворяют остальным уравнениям системы (2').

Таким образом, векторы $a^1, \dots, a^k$ линейно зависимы, и теорема доказана и в этом случае.

§ 15. Линейные операторы

Зададим произвольную квадратную матрицу

$$A=\|a_{kl}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Матрицу A можно рассматривать как *оператор*, приводящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}=(x_1, \dots, x_n)\in R_n$ вектор $\boldsymbol{y}=(y_1, \dots, y_n)\in R_n$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

или, короче,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2'}$$

Говорят, что i-я координата вектора $\boldsymbol{y}$ записывается с помощью i-й строки A. Этот оператор коротко будем записывать так:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R_n). \tag{2''}$$

Замечание 1. Если a_{kl} и далее b_{kl} — комплексные числа, то R_n надо считать комплексным пространством. Если же a_{kl}, b_{kl} — действительные числа, то R_n может быть и действительным и комплексным пространством.

В случае одномерного пространства R_1 векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ суть числа, и оператор (2″) превращается в функцию

$$\boldsymbol{y} = a_{11}\boldsymbol{x}.$$

Оператор (2″) *линейный*. Это значит, что он удовлетворяет условию

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}') = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{x}'$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in R_n$ и чисел α, β. В самом деле,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha x_j + \beta x_j') = \alpha\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Если матрицы $A = \|a_{kl}\|$ и $B = \|b_{kl}\|$ равны, т. е. имеют равные соответствующие элементы $a_{kl} = b_{kl}$, то они определяют тождественно равные операторы:

$$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in R_n. \tag{3}$$

Обратно, из равенства (3) вытекает, что

$$a_{kl} = b_{kl} \qquad (k, l = 1, \ldots, n),$$

т. е. равенство матриц A и B $(A = B)$. В этом легко убедиться, если положить в (3)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

где 1 стоит на l-м месте $(l = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, различным матрицам A соответствуют различные операторы—если две матрицы A_1 и A_2 отличаются хотя бы одним элементом, то обязательно существует вектор $\boldsymbol{x}$, для которого

$$A_1\boldsymbol{x} \neq A_2\boldsymbol{x}.$$

Пусть, кроме A, задан еще другой оператор B, определяемый квадратной матрицей n-го порядка

$$B = \| b_{kl} \|.$$

Каждому $\boldsymbol{x} \in R_n$ соответствует при помощи оператора A вектор $\boldsymbol{y} \in R_n$, которому при помощи оператора B соответствует вектор $\boldsymbol{z}$ с компонентами, вычисляемыми по формулам

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} y_i \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

В результате получим сложный линейный оператор

$$\boldsymbol{z} = BA\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in R_n), \tag{4}$$

где

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} y_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} x_j$$

с матрицей $\|\gamma_{kj}\|$, называемой *произведением матриц* B и A и обозначаемой так:

$$BA = \|\gamma_{kj}\|, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \qquad (k, \ j = \overline{1, \ldots, n}), \tag{6}$$

т. е. чтобы получить элемент γ_{kj} матрицы BA (принадлежащий к ее k-й строке и j-му столбцу), надо элементы k-й строки матрицы B умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A и результат сложить.

Определитель матрицы BA равен произведению определителей матриц B и A:

$$|BA| = |B|\,|A|. \tag{7}$$

Это свойство вытекает из формулы для произведения определителей (см. § 2, свойство к)).

Пусть матрица оператора A (см. (1)) имеет определитель, не равный нулю:

$$\Delta = |a_{kl}| \neq 0.$$

В этом случае (см. § 4, теорема 1) система уравнений (2), или, что все равно, операторное уравнение $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x} \in R_n$ при любом заданном $\boldsymbol{y} \in R_n$. При этом формулы, по которым находится $\boldsymbol{x}$ для заданного $\boldsymbol{y} \in R_n$, имеют вид

$$x_j = \sum_{s=1}^{n} b_{js} y_s \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Здесь

$$b_{js} = A_{sj}/\Delta \qquad (s, j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

(см. § 4, (3′)), где A_{sj} — алгебраическое дополнение элемента a_{sj} в определителе Δ.

Впрочем, для нас сейчас важно только отметить, что числа b_{js} являются элементами матрицы

$$B = \| b_{js} \|,$$

обладающей следующими замечательными свойствами:

$$BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in R_n, \tag{10}$$

$$AB\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \qquad \forall \boldsymbol{y} \in R_n. \tag{11}$$

В самом деле, произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in R_n$ переходит посредством оператора A в некоторый вектор $\boldsymbol{y}$, который переходит посредством оператора B обратно в $\boldsymbol{x}$. С другой стороны, каждому $\boldsymbol{y} \in R_n$ соответствует при помощи оператора B (см. (8)) некоторый $\boldsymbol{x}$ и притом такой, что $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

В равенстве (11) можно, очевидно, вместо $\boldsymbol{y}$ поставить другую букву, поэтому мы получили тождества

$$BA\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x}.$$

Оператор $\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x}$ $(\forall \boldsymbol{x} \in R_n)$ называется *единичным оператором*. Матрица, ему соответствующая, имеет вид

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

и называется *единичной*. Мы доказали, что

$$AB = BA = E.$$

Оператор B, обладающий этим свойством, называется *обратным* к оператору A и обозначается через A^{-1}. Соответственно его матрица называется *обратной матрицей* к матрице A и обозначается тоже через A^{-1}. Элементы матрицы A^{-1} находятся по элементам матрицы A с помощью формул (9).

Мы доказали, что *если определитель $|A|$ квадратной матрицы A не равен нулю, то она имеет обратную матрицу A^{-1}*. Для A^{-1}, таким образом, выполняются свойства

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Если определитель матрицы A равен нулю ($|A| = 0$), то она не имеет обратной матрицы. Достаточно сказать, что уравнение $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ имеет решение не для всякого $\boldsymbol{y}$. Между тем свойство $AA^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$, если оно выполняется, утверждает, что *каждому* $\boldsymbol{y} \in R_n$ соответствует (при помощи оператора A^{-1}) такой $\boldsymbol{x}$, что он есть решение уравнения $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

З а м е ч а н и е. Операцию умножения матриц можно распространить и на неквадратные матрицы B и A, лишь бы число столбцов матрицы B совпадало с числом строк матрицы A. Тогда умножение матриц производим по формулам, подобным (6). Например, если

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение AB в данном случае рассматривать нельзя, так как у матрицы A два столбца, а у матрицы B три строки.

Для квадратных матриц A и B произведения AB и BA имеют смысл, но далеко не всегда AB равно BA. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $AB \neq BA$.

Легко проверить, что $(AB)C = A(BC)$.

Если A — линейный оператор, то запись $A\boldsymbol{x}$ можно рассматривать как произведение матрицы A на одностолбцовую матрицу

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть заданы линейные операторы A и B. *Суммой* их называется оператор $A+B$, определяемый равенством

$$(A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in R_n.$$

Очевидно, матрица оператора $A+B$ совпадает с матрицей, равной сумме матриц операторов A и B.

Легко проверить, что

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Пример 1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A определяет линейный оператор $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, приводящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ вектор $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ при помощи равенств

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2, \\ y_2 &= x_2 + \ \ x_3, \\ y_3 &= x_1 + \ \ x_2. \end{aligned}$$

Эти равенства можно рассматривать также как линейную систему трех уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3. Определитель этой системы не равен нулю. Но тогда ее можно решить при любых заданных y_1, y_2, y_3. В результате получим равенства

$$\begin{aligned} x_1 &= -y_1 + 2y_3, \\ x_2 &= y_1 - y_3, \\ x_3 &= -y_1 + y_2 + y_3, \end{aligned}$$

определяющие оператор $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$, обратный к оператору A. Матрица этого оператора

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица, обратная к матрице A.

Элементы матрицы A^{-1} можно получить путем вычислений по формулам (9).

Обозначим элементы обратной матрицы A^{-1} через b_{js}. Имеем $\Delta=1$, $b_{js}=A_{sj}$,

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

Таким образом,

$$\begin{array}{lll} b_{11}=A_{11}=-1, & b_{12}=A_{21}=0, & b_{13}=A_{31}=2,\\ b_{21}=A_{12}=1, & b_{22}=A_{22}=0, & b_{23}=A_{32}=-1,\\ b_{31}=A_{13}=-1, & b_{32}=A_{23}=1, & b_{33}=A_{33}=1. \end{array}$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить произведение матриц BA, где

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

Вычисление можно произвести по формулам (5), (6), но можно рассуждать и следующим образом.

Матрица A определяет оператор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$, приводящий в соответствие векторам $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ векторы $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)$ при помощи равенств

$$\begin{aligned} y_1&=x_1+x_3,\\ y_2&=x_2+2x_3,\\ y_3&=x_1+x_2+x_3. \end{aligned}$$

Матрица же B определяет оператор $\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{y}$, приводящий в соответствие векторам $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)$ векторы $\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)$ при помощи равенств

$$\begin{aligned} z_1&=2y_1,\\ z_2&=3y_2+2y_3,\\ z_3&=2y_1+y_2-y_3. \end{aligned}$$

Но тогда оператор

$$z = BAx$$

определяется равенствами

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2(x_1 + x_3) &&= 2x_1 \quad\quad + 2x_3,\\
z_2 &= 3(x_2 + 2x_3) + 2(x_1 + x_2 + x_3) &&= 2x_1 + 5x_2 + 8x_3,\\
z_3 &= 2(x_1 + x_3) + (x_2 + 2x_3) - (x_1 + x_2 + x_3) &&= x_1 \quad\quad\;\; + 3x_3.
\end{aligned}$$

Следовательно, произведение BA матриц B и A есть матрица

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 16. Базисы в R_n

В пространстве R_n (действительном или комплексном) введем n векторов:

$$\left.\begin{aligned}
i^1 &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
i^2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
i^n &= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1),
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

называемых *ортами осей пространства* R_n.

Осью x_k пространства R_n называется множество точек вида $(0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0)$, где x_k стоит на k-м месте и пробегает все действительные (комплексные) значения, а вектор i^k называется *ортом оси* x_k.

Если $a = (x_1, \ldots, x_n)$ есть произвольный вектор (действительный в действительном R_n или комплексный в комплексном R_n), то его можно, очевидно, записать в виде линейной комбинации из векторов (1) следующим образом:

$$a = x_1 i^1 + x_2 i^2 + \ldots + x_n i^n. \tag{2}$$

Так как из равенства $a = (x_1, \ldots, x_n) = 0$ следует, что $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то система $(i^1, \ldots, i^n)$ линейно независима.

Зададим произвольную систему из n линейно независимых векторов

$$\left.\begin{aligned}
a^1 &= (a_{11}, \ldots, a_{1n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a^n &= (a_{n1}, \ldots, a_{nn}).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Как мы знаем (см. § 14, теорема 1), система (3) линейно независима, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Если же $\Delta = 0$, то система (3) линейно зависима.

Согласно теореме 1 § 14 любые $n+1$ векторов в пространстве R_n линейно зависимы, так как ранг матрицы из компонент этих векторов не превышает n. Поэтому, если $\boldsymbol{a} = (x_1, \dots, x_n)$ — произвольный вектор и система векторов (3) линейно независима ($\Delta \neq 0$), то система векторов $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n, \boldsymbol{a}$ линейно зависима, т. е. существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}^1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a}^n + \lambda_{n+1} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

где $\lambda_{n+1} \neq 0$ (иначе система (3) была бы линейно зависимой). Отсюда

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \boldsymbol{a}^k, \tag{5}$$

где $x'_k = \frac{-\lambda_k}{\lambda_{n+1}}$ $(k = 1, \dots, n)$. Выразим сумму (5) через орты $\boldsymbol{i}^k$ (см. (2)):

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \boldsymbol{i}^l \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kl} x'_k \right) \boldsymbol{i}^l.$$

С другой стороны, по (2)

$$\boldsymbol{a} = \sum_{l=1}^{n} x_l \boldsymbol{i}^l.$$

В силу линейной независимости системы $\boldsymbol{i}^1, \dots, \boldsymbol{i}^n$ коэффициенты при одинаковых векторах $\boldsymbol{i}^l$ должны быть равны

$$x_l = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} x'_k \qquad (l = 1, \dots, n). \tag{6}$$

Таким образом, если компоненты x_l вектора $\boldsymbol{a}$ по системе $\boldsymbol{i}^1, \dots, \boldsymbol{i}^n$ известны, то компоненты x'_k этого вектора по системе $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n$ находятся из (6) и притом единственным образом, так как определитель системы (6) есть $\Delta \neq 0$.

Мы доказали, что, *какова бы ни была линейно независимая система векторов* $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n$, *любой вектор* $\boldsymbol{a} \in R_n$

можно разложить по этой системе, т. е. представить в виде суммы (5), *где* $x'_1, \ldots, x'_n$ — *некоторые числа, определяемые из* (6) *и притом единственным образом.*

В этом смысле систему векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ называют *базисом* в R_n, желая этим сказать, что любой вектор $\boldsymbol{a} \in R_n$ можно представить в виде линейной комбинации (5) из этих векторов и притом единственным образом. Мы доказали, что *произвольная линейно независимая система из n векторов в R_n есть базис в R_n.*

Линейно независимая система из m векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^1 &= (a_{11}, \ldots, a_{1m}, a_{1,m+1}, \ldots, a_{1n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}^m &= (a_{m1}, \ldots, a_{mm}, a_{m,m+1}, \ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

где $m < n$, не есть базис в R_n. В самом деле, ранг матрицы компонент этих векторов равен m. Будем считать, что первые m столбцов этой матрицы образуют определитель, не равный нулю. Расширим эту матрицу, приписав к ней внизу строку

$$\boldsymbol{a}^{m+1} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

где 1 стоит на $(m+1)$-м месте. Расширенная матрица имеет ранг $m+1$, и, следовательно, система векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m, \boldsymbol{a}^{m+1}$ линейно независима. Но тогда вектор $\boldsymbol{a}^{m+1}$ не может быть линейной комбинацией из векторов системы $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$, и эта система не есть базис в R_n.

Обозначим через

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрицу векторов $(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$ [1]).

Переход от базиса $(\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n)$ к базису $(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$ осуществляется при помощи матрицы A:

$$\boldsymbol{a}^k = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \boldsymbol{i}^s \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{a}^k$ выражается через векторы $\boldsymbol{i}^s$ с помощью k-й строки матрицы A. Обратный переход от $(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$ к $(\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n)$ происходит при помощи обратной матрицы A^{-1} (см. § 15, (9))

$$\boldsymbol{i}^s = \sum_{l=1}^{n} b_{sl} \boldsymbol{a}^l \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

---

[1]) Хотя ниже текст дан мелким шрифтом, ознакомьтесь с ним. На (9) мы ссылаемся в § 17.

элементы которой вычисляются по формулам $b_{sl}=\frac{A_{ls}}{\Delta}$, где A_{ls} — адъюнкт элемента a_{ls} в определителе Δ (обратим внимание, что элемент b_{sl}, принадлежащий s-й строке и l-му столбцу, выражается через адъюнкт A_{ls} элемента a_{ls}, принадлежащего l-й строке и s-му столбцу). Отметим еще, что

$$a=\sum_{l=1}^{n} x_l' a^l=\sum_{s=1}^{n} x_s i^s=\sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{l=1}^{n} b_{sl} a^l=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{sl} x_s\right) a^l,$$

откуда

$$x_l'=\sum_{s=1}^{n} b_{sl} x_s, \tag{9}$$

т. е. переход от координат $(x_1, \ldots, x_n)$ к $(x_1', \ldots, x_n')$ происходит при помощи матрицы (см. § 3)

$$(A^{-1})'=(A')^{-1}.$$

Из (9) видно, что x_l' выражается через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью l-го столбца матрицы A^{-1} или l-й строки матрицы $(A^{-1})'$, транспонированной к A^{-1}.

Далее по формуле (6)

$$x_s=\sum_{l=1}^{n} a_{ls} x_l' \qquad (s=1, \ldots, n)$$

видно, что переход от $(x_1', \ldots, x_n')$ к $(x_1, \ldots, x_n)$ совершается при помощи матрицы A' транспонированной к A, т. е. x_s выражается через $x_1', \ldots, x_n'$ с помощью s-й строки матрицы A' или s-го столбца матрицы A.

З а м е ч а н и е. В § 15 было установлено, что произвольная квадратная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

определяет линейный оператор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in R_n, \boldsymbol{y} \in R_n)$, задаваемый по формулам

$$y_k=\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \qquad (k=1, \ldots, n). \tag{11}$$

Но имеет место и обратное утверждение: каков бы ни был линейный оператор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in R_n, \boldsymbol{y} \in R_n)$, он определяется некоторой матрицей (10) так, что вектор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ вычисляется по вектору $\boldsymbol{x}$ по формулам (11).

В самом деле, пусть задан произвольный линейный оператор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in R_n, \boldsymbol{y} \in R_n)$. Обозначим образы ортов $\boldsymbol{i}^s$ при его помощи следующим образом:

$$A(\boldsymbol{i}^s)=(a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{ns})=\sum_{k=1}^{n} a_{ks} \boldsymbol{i}^k \qquad (s=1, \ldots, n).$$

Тогда в силу линейности A любой вектор

$$x = x_1 i^1 + \ldots + x_n i^n = \sum_{s=1}^{n} x_s i^s$$

отображается при помощи A в вектор y, определяемый равенствами

$$y = Ax = A\left(\sum_{s=1}^{n} x_s i^s\right) = \sum_{s=1}^{n} x_s A(i^s) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{k=1}^{n} a_{ks} i^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{ks} x_s\right) i^k,$$

откуда следует, что k-я компонента y определяется по формуле (11). Таким образом, оператор A порождает матрицу (10), у которой в столбцах стоят координаты образов базисных векторов (ортов) при помощи оператора A.

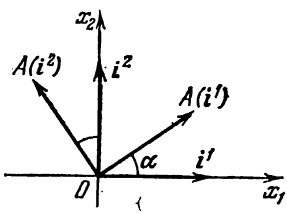

Рис. 34.

Пример 1. Найти матрицу линейного оператора (преобразования) A, заключающегося в повороте векторов плоскости R_2, выходящих из начала, на угол α ($0 < \alpha < \pi/2$) против часовой стрелки.

Возьмем за базис векторы $i^1 = (1, 0)$, $i^2 = (0, 1)$. Тогда, очевидно, что (рис. 34)

$$A(i^1) = (\cos\alpha, \ \sin\alpha),$$
$$A(i^2) = (-\sin\alpha, \ \cos\alpha).$$

Поэтому матрица нашего оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

§ 17. Ортогональные базисы в R_n

Говорят, что два ненулевых вектора x, $y \in R_n$, имеют *одинаковое* (*одно и то же*) *направление*, если существует *положительное* число λ такое, что $x = \lambda y$.

Произвольный ненулевой вектор $x \in R_n$ можно, как говорят, *нормировать*, заменив его на единичный вектор

$$y = \frac{1}{|x|} x \qquad (|y| = 1),$$

имеющий то же направление, что и вектор x.

Единичный (имеющий норму (длину), равную 1) вектор называют *нормальным*.

Два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в пространстве R_n называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$.

Здесь R_n может быть действительным или комплексным. В случае комплексного R_n скалярное произведение определяется, как в § 6, (5′).

Система векторов

$$\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu \in R_n \tag{1}$$

называется *ортогональной*, если любые два ее вектора ортогональны. Система векторов (1) называется *ортогональной* и *нормальной* или ортонормированной, если

$$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^l)=\delta_{kl}=\begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases} \quad (k, l=1, \ldots, \nu),$$

т. е. все векторы системы нормальны и попарно ортогональны. Если система векторов (1) ортогональна и ни один вектор системы не равен нулевому, то, нормируя их, получим, очевидно, ортонормированную систему. *Ортонормированная система* (1) *линейно независима*. В самом деле, пусть

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^1+\lambda_2\boldsymbol{x}^2+\ldots+\lambda_\nu\boldsymbol{x}^\nu=0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ — числа. Умножив это равенство скалярно на $\boldsymbol{x}^s$, получим, очевидно,

$$\lambda_s(\boldsymbol{x}^s, \boldsymbol{x}^s)=\lambda_s=0 \quad (s=1, \ldots, \nu).$$

Но тогда ортонормированная система из n векторов в R_n есть базис и, следовательно, каждый вектор $\boldsymbol{a}\in R_n$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{x}^k. \tag{2}$$

Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{x}^s$, получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^s)=\lambda_s \quad (s=1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^k)\,\boldsymbol{x}^k, \quad \forall\boldsymbol{a}\in R_n.$$

Число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^k)$ $(|\boldsymbol{x}^k|=1!)$ называется *проекцией вектора* $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{x}^k$.

В реальном действительном пространстве R_3 величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^k)$ есть обычная числовая проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{x}^k$.

Теорема 1. *Ортонормированную систему векторов*

$$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu \quad (\nu < n)$$

можно пополнить до ортонормированного базиса в R_n. Иначе говоря, можно указать векторы $\boldsymbol{x}^{\nu+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ такие, что система

$$\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{x}^{\nu+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^n \tag{3}$$

будет ортонормированной и, следовательно, будет базисом в R_n.

Доказательство. Так как $\nu < n$, то в R_n существует вектор $\boldsymbol{a}$, не зависящий линейно от $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu$. Но тогда

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{\nu} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^k)\, \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{y},$$

где $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Вектор $\boldsymbol{y}$ ортогонален ко всем векторам $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu$. В самом деле,

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^s) = \left(\boldsymbol{a} - \sum_{k=1}^{\nu} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^k)\, \boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}^s\right) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^s) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^s) = 0 \tag{4}$$
$$(s = 1, \ldots, \nu).$$

Пронормировав $\boldsymbol{y}$, получим вектор

$$\boldsymbol{x}^{\nu+1} = \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{y} \quad (|\boldsymbol{x}^{\nu+1}| = 1),$$

и система

$$\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^\nu, \boldsymbol{x}^{\nu+1}$$

будет ортонормирована. Если $\nu + 1 = n$, то мы получили базис в R_n. Если нет, то этот процесс продолжаем. На $(n-\nu)$-м этапе получим базис (3) в R_n.

Система ортов осей в R_n

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}^1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ \boldsymbol{i}^2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{i}^n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

может служить примером ортонормированного базиса в R_n.

Произвольный вектор $\boldsymbol{a}=(x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ разлагается по ортам следующим образом:

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}^1+\ldots+x_n\boldsymbol{i}^n=\sum_{k=1}^n x_k\boldsymbol{i}^k, \tag{5}$$

где $x_k=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}^k)$ $(k=1, \ldots, n)$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление орта $\boldsymbol{i}^k$.

Пусть задана некоторая определенная ортонормированная система из n векторов

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}^1=(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \boldsymbol{a}^n=(a_{n1}, \ldots, a_{nn}), \end{array}\right\} \tag{6}$$

или

$$\boldsymbol{a}^k=\sum_{s=1}^n a_{ks}\boldsymbol{i}^s \qquad (k=1, \ldots, n). \tag{7}$$

Переход от векторов $(\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n)$ к $(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$ здесь осуществляется при помощи матрицы

$$\Lambda=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{a}^k$ выражается через $\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n$ с помощью k-й строки матрицы Λ.

В дальнейшем мы считаем пространство R_n и матрицу Λ действительными (см. далее замечание 2).

Матрица Λ *ортогональна*, т. е. обладает следующим свойством:

$$\sum_{s=1}^n a_{ks}a_{ls}=\delta_{kl} \quad (k, l=1, \ldots, n). \tag{9}$$

В самом деле, так как в данном случае система $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ ортонормирована, то

$$\delta_{kl}=(\boldsymbol{a}^k, \boldsymbol{a}^l)=\left(\sum_{s=1}^n a_{ks}\boldsymbol{i}^s, \sum_{r=1}^n a_{lr}\boldsymbol{i}^r\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^n\sum_{r=1}^n a_{ks}a_{lr}(\boldsymbol{i}^s, \boldsymbol{i}^r)=\sum_{s=1}^n\sum_{r=1}^n a_{ks}a_{lr}\delta_{sr}=\sum_{s=1}^n a_{ks}a_{ls}. \tag{10}$$

Мы видим, что и, обратно, ортогональность матрицы (8) влечет за собой ортонормируемость системы векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n$, определенных по формулам (7).

Это показывает, что *формулы* (7), *где* $\|a_{ks}\|$ — *произвольные ортогональные матрицы, определяют все возможные ортонормированные базисы в* R_n.

Помножим вектор $\boldsymbol{i}^l$ на вектор $\boldsymbol{a}^k$ скалярно:

$$(\boldsymbol{i}^l, \boldsymbol{a}^k) = a_{kl}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{i}^l = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{i}^l, \boldsymbol{a}^k)\, \boldsymbol{a}^k = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}\boldsymbol{a}^k. \tag{11}$$

Таким образом, переход от базиса $(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n)$ к базису $(\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n)$ осуществляется при помощи матрицы Λ', транспонированной к Λ. Так как преобразования (11) обратны преобразованиям (7) (см. § 15), то мы попутно доказали, что ортогональная матрица Λ обладает следующим замечательным свойством:

$$\Lambda^{-1} = \Lambda'.$$

Из (11) следует

$$\delta_{kl} = (\boldsymbol{i}^k, \boldsymbol{i}^l) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{sk}\boldsymbol{a}^s, \ \sum_{r=1}^{n} a_{rl}\boldsymbol{a}^r\right) = \\ = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{sk}a_{rl}\,(\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{a}^r) = \sum_{s=1}^{n} a_{sk}a_{sl}. \tag{12}$$

Ортогональная матрица была определена нами как такая матрица, у которой строки (векторы, представляющие их) нормальны, а разные строки ортогональны. Из этого определения, как это видно из (12), автоматически следует, что у ортогональной матрицы и столбцы нормальны, а разные столбцы ортогональны.

Переход от $(x_1, \ldots, x_n)$ к $(x'_1, \ldots, x'_n)$ совершается при помощи матрицы (см. (9) § 16, $\boldsymbol{x}' = \Lambda\boldsymbol{x}$)

$$(\Lambda')^{-1} = \Lambda'' = \Lambda,$$

т. е. $\left(\text{считая, что } \boldsymbol{a} = \sum_{l=1}^{n} x'_l\boldsymbol{a}^l = \sum_{s=1}^{n} x_s\boldsymbol{i}^s\right)$

$$x'_l = \sum_{s=1}^{n} a_{ls}x_s. \tag{13}$$

Переход же от $(x'_1, \ldots, x'_n)$ к $(x_1, \ldots, x_n)$ совершается при помощи (см. (6) § 16) матрицы Λ' транспонированной к Λ, т. е.

$$x_s = \sum_{l=1}^{n} a_{ls} x'_l.$$

Отметим, что определитель произвольной ортогональной матрицы Λ (см. (6)) по абсолютной величине равен 1: $||\Lambda||=||a_{kl}||=1$.

Это следует из того, что

$$|\Lambda|^2 = |a_{kl}|\cdot|a_{lj}| = \left|\sum_{s=1}^{n} a_{ks} a_{is}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Здесь мы считаем, что элемент γ_{kl} произведения определителей равен сумме произведений элементов k-й строки на соответствующие элементы i-й строки (см. § 2, свойство к)).

Отметим еще, что определитель из компонент векторов базиса $i^1, \ldots, i^n$ равен 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Если ортогональный базис $a^1, \ldots, a^n$ имеет определитель $|\Lambda|=1$ (см. (6)), то говорят, что этот *базис ориентирован так же, как базис* $i^1, \ldots, i^n$. Если же $|\Lambda|=-1$, то — *противоположным образом.* Эти определения согласуются с соответствующими определениями в двумерном и трехмерном случаях, сделанными в § 11 и в § 12.

Замечание 1. Если бы мы в матрице Λ (см. (8)) координаты вектора a^k в базисе $(i^1, \ldots, i^n)$ поставили в k-столбец $(k=1, \ldots, n)$, то переход от координат вектора x' к координатам вектора x осуществлялся бы с помощью строк матрицы Λ. Переход же от x к x' в формуле (13) происходил бы с помощью матрицы Λ'.

Замечание 2. В комплексном пространстве R_n матрица (8), где a_{kl} комплексные, называется *ортогональной,* если

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks} \bar{a}_{ls} = \delta_{ks} \qquad (k,\ l=1, \ldots, n). \tag{9'}$$

Покажем, что ортонормированная система векторов (6) в комплексном R_n порождает ортогональную матрицу Λ (см. (8)). В самом деле, в комплексном R_n скалярное произведение векторов x, y подчиняется свойствам (см. § 6, б'), в'))

$$\overline{(x, y)} = (y, x), \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z),$$

где α, β — комплексные числа. Поэтому

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{(\alpha y, x)} + \overline{(\beta z, x)} =$$
$$= \overline{\alpha (y, x)} + \overline{\beta (z, x)} = \bar{\alpha} (x, y) + \bar{\beta} (x, z).$$

Но тогда для ортонормированной системы векторов $a^1, \ldots, a^n$ имеет место

$$\delta_{kl} = (a^k, a^l) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{ks} i^s, \sum_{r=1}^{n} a_{lr} i^r \right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ks} \bar{a}_{lr} (i^s, i^r) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ks} \bar{a}_{lr} \delta_{sr} =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \bar{a}_{ls}, \qquad (10')$$

т. е. матрица Λ ортогональна. Мы видим, что и, обратно, ортогональность Λ влечет ортонормированность векторов $a^1, \ldots, a^n$, определенных по формулам (7).

Помножим вектор i^l на a^k скалярно (см. (7)):

$$(i^l, a^k) = \left(i^l, \sum_{s=1}^{n} a_{ks} i^s \right) = \sum_{s=1}^{n} \bar{a}_{ks} (i^l, i^s) = \bar{a}_{kl}.$$

Отсюда

$$i^l = \sum_{k=1}^{n} (i^l, a^k) a^k = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kl}} a^k. \qquad (11')$$

Таким образом, переход от базиса $(a^1, \ldots, a^n)$ к базису $(i^1, \ldots, i^n)$ осуществляется при помощи матрицы

$$\Lambda^* = \left\| \begin{matrix} \overline{a_{11}} & \ldots & \overline{a_{n1}} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \overline{a_{1n}} & \ldots & \overline{a_{nn}} \end{matrix} \right\|.$$

Так как преобразования (11') обратны преобразованиям (7), то попутно показано, что ортогональная матрица Λ обладает следующим замечательным свойством:

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^*, \quad (\Lambda')^{-1} = (\Lambda')^* = \overline{(\Lambda'')} = \bar{\Lambda}. \qquad (14)$$

Из (11′) следует

$$\delta_{kl}=(i^k,\ i^l)=\left(\sum_{s=1}^{n}\overline{a_{sk}}a^s,\ \sum_{r=1}^{n}\overline{a_{rl}}a^r\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\overline{a_{sk}}a_{rl}\delta_{sr}=\sum_{s=1}^{n}\overline{a_{sk}}a_{sl}.$$

Следовательно, равенства

$$\delta_{kl}=\sum_{s=1}^{n}\overline{a_{sk}}a_{sl}\qquad (k,\ l=\overline{1,\ \ldots,\ n})$$

(так же, как (9′)) могут служить определением ортогональной матрицы Λ.

На основании (14) и общих фактов, полученных в § 16 (петит), отметим матрицы, осуществляющие нижеследующие ортогональные отображения:

$$\Lambda:\ (i^1,\ \ldots,\ i^n)\rightarrow(a^1,\ \ldots,\ a^n)\ (\text{см. }(7));$$
$$\Lambda^*:\ (a^1,\ \ldots,\ a^n)\rightarrow(i^1,\ \ldots,\ i^n)\ (\text{см. }(14));$$
$$\Lambda':\ (x_1',\ \ldots,\ x_n')\rightarrow(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ (\text{см. }(6)\ \S\ 16);$$
$$\overline{\Lambda}:\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)\rightarrow(x_1',\ \ldots,\ x_n')\ (\text{см. }(14)),$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_1', \ldots, x_n')$ — координаты произвольного вектора в комплексном пространстве R_n относительно базиса $(i^1, \ldots, i^n)$ и ортонормированного базиса $(a^1, \ldots, a^n)$.

Наконец, равенство $||\Lambda||=1$ в комплексном случае доказывается так:

$$|\Lambda|^2=|a_{kl}||\overline{a}_{ij}|=\left|\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\overline{a}_{is}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1.$$

Ортогональные матрицы называют еще *унитарными*.

§ 18. Инвариантные свойства скалярного и векторного произведений

Замечание. В трехмерном действительном пространстве пусть заданы две прямоугольные системы координат $x_1,\ x_2,\ x_3$ и $y_1,\ y_2,\ y_3$ с системами ортов соответственно

(i^1, i^2, i^3) и (j^1, j^2, j^3). Пусть

$$j^k = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ks} i^s \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

(ср. (7) и (13) § 17). Тогда матрица (действительная!)

$$A = \| \alpha_{ks} \|$$

ортогональна и (ср. (13) § 17)

$$y_l = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} x_s \qquad (l = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Одна и та же точка (вектор) пространства имеет в первой системе (координат) координаты (компоненты) (x_1, x_2, x_3), а во второй—координаты (y_1, y_2, y_3). При этом формулы преобразования координат (перехода (x_1, x_2, x_3) к (y_1, y_2, y_3)) в точности такие же, как формулы преобразования системы ортов (i^1, i^2, i^3) в систему ортов (j^1, j^2, j^3). В обоих случаях применяется одна и та же ортогональная матрица (см. (13) и (7) § 17)

$$A = \| \alpha_{kl} \|.$$

В первом случае матрица A применяется к системе чисел (x_1, x_2, x_3), чтобы получить систему чисел (y_1, y_2, y_3), а во втором та же матрица A применяется к ортам (i^1, i^2, i^3), чтобы получить орты (j^1, j^2, j^3).

Дадим общее определение вектора, принятое в тензорном исчислении.

Вектором в трехмерном пространстве называется вещь, выражаемая в каждой прямоугольной системе координат некоторой тройкой чисел, которые преобразуются так же (при помощи той же матрицы), как тройки ортов соответствующих систем координат.

Подобная терминология употребляется и в случае n-мерных пространств.

Пусть a и b—векторы трехмерного пространства (действительного!), определяемые в системах координат с ортами (i^1, i^2, i^3) и (j^1, j^2, j^3) следующим образом:

$$a = a_{x_1} i^1 + a_{x_2} i^2 + a_{x_3} i^3 = a_{y_1} j^1 + a_{y_2} j^2 + a_{y_3} j^3,$$
$$b = b_{x_1} i^1 + b_{x_2} i^2 + b_{x_3} i^3 = b_{y_1} j^1 + b_{y_2} j^2 + b_{y_3} j^3.$$

Имеет место равенство

$$ab = \sum_{s=1}^{3} a_{x_s} b_{x_s} = \sum_{r=1}^{3} a_{y_r} b_{y_r},$$

показывающее, что *скалярное произведение инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат.*

В самом деле, так как системы векторов $(\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3)$ и $(\boldsymbol{j}^1, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{j}^3)$ ортонормированы, то они преобразуются по формулам (1), где $\|\alpha_{kl}\|$ — некоторая ортогональная матрица. Компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ $(a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3})$ преобразуются в компоненты $(a_{y_1}, a_{y_2}, a_{y_3})$ при помощи той же матрицы (см. (2)). Поэтому

$$\sum_{r=1}^{3} a_{y_r} b_{y_r} = \sum_{r=1}^{3}\left(\sum_{s=1}^{3} \alpha_{rs} a_{x_s}; \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_{r\nu} b_{x_\nu}\right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} a_{x_s} b_{x_\nu}\left(\sum_{r=1}^{3} \alpha_{rs}\alpha_{r\nu}\right) = \sum_{s=1}^{3} a_{x_s} b_{x_s} = \boldsymbol{ab}. \tag{3}$$

Мы доказали инвариантность скалярного произведения $\boldsymbol{ab}$ вычислительным путем. Впрочем, из другого, геометрического определения скалярного произведения векторов (направленных отрезков), в силу которого $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}|\cdot \text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, непосредственно видно, что это число есть инвариант — ведь это определение не связано ни с какой системой координат.

Что касается векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, то оно инвариантно относительно прямоугольных систем координат с одинаковой ориентацией. В системах, имеющих орты $(\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3)$ и $(\boldsymbol{j}^1, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{j}^3)$, векторные произведения выражаются следующим образом:

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}^1 & \boldsymbol{i}^2 & \boldsymbol{i}^3 \\ a_{x_1} & a_{x_2} & a_{x_3} \\ b_{x_1} & b_{x_2} & b_{x_3} \end{vmatrix},$$
$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{j}^1, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{j}^3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{j}^1 & \boldsymbol{j}^2 & \boldsymbol{j}^3 \\ a_{y_1} & a_{y_2} & a_{y_3} \\ b_{y_1} & b_{y_2} & b_{y_3} \end{vmatrix}.$$

В силу формул (1) и (2)

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{j}^1, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{j}^3} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{1s}\boldsymbol{i}^s & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{2s}\boldsymbol{i}^s & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{3s}\boldsymbol{i}^s \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{1s}a_{x_s} & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{2s}a_{x_s} & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{3s}a_{x_s} \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{1s}b_{x_s} & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{2s}b_{x_s} & \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{3s}b_{x_s} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}^1 & \boldsymbol{i}^2 & \boldsymbol{i}^3 \\ a_{x_1} & a_{x_2} & a_{x_3} \\ b_{x_1} & b_{x_2} & b_{x_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}^1 & \boldsymbol{i}^2 & \boldsymbol{i}^3 \\ a_{x_1} & a_{x_2} & a_{x_3} \\ b_{x_1} & b_{x_2} & b_{x_3} \end{vmatrix} =$$
$$= \pm [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_{\boldsymbol{i}^1, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3}, \tag{4}$$

где надо поставить знак $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли определитель $|\alpha_{ik}|$ равен $+1$ или -1, что все равно, меняет или нет рассматриваемое преобразование координат ориентацию.

При перемножении определителей мы в данном случае пользовались следующим правилом: элемент γ_{ik} матрицы произведения $\|\gamma_{ik}\|$ определяется как произведение i-й строки первого определителя на k-ю строку второго (см. § 2, свойство к)).

Итак, мы доказали вычислительным путем, что *векторное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, не изменяющих их ориентацию.*

Преобразования (3), (4) интересны тем, что они обобщаются на случай, когда роль вектора $\boldsymbol{a}$ играет важный в математическом анализе символический вектор $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

§ 19. Преобразование прямоугольных координат в плоскости

Рассмотрим плоскость R_2, где задана прямоугольная система координат x_1, x_2. Пусть

$$\boldsymbol{i}^1=(1,\ 0),\quad \boldsymbol{i}^2=(0,\ 1)$$

— орты осей x_1, x_2. Орты $\boldsymbol{i}^1$, $\boldsymbol{i}^2$ образуют ортонормированный базис в R_2.

Произвольный единичный (нормальный) вектор $\boldsymbol{b}^1$ может быть записан следующим образом:

$$\boldsymbol{b}^1=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\qquad (0\leqslant\alpha<2\pi).$$

Единичный ортогональный (перпендикулярный) к $\boldsymbol{b}^1$ вектор, который мы обозначим через $\boldsymbol{b}^2$, может соответствовать только либо углу $\alpha+\frac{\pi}{2}$, либо $\alpha-\frac{\pi}{2}$. Так как

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,\quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha,\quad \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha,$$

то всевозможные ортонормированные системы $\boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{b}^2$ в R_2 определяются либо равенствами (рис. 35)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{b}^1&=\boldsymbol{i}^1\cos\alpha+\boldsymbol{i}^2\sin\alpha,\\ \boldsymbol{b}^2&=-\boldsymbol{i}^1\sin\alpha+\boldsymbol{i}^2\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad (0\leqslant\alpha<2\pi),\qquad (1')$$

соответствующими вращению осей около начала на угол α и сохранению ориентации, либо равенствами (рис. 36)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{b}^1&=\boldsymbol{i}^1\cos\alpha+\boldsymbol{i}^2\sin\alpha,\\ \boldsymbol{b}^2&=\boldsymbol{i}^1\sin\alpha-\boldsymbol{i}^2\cos\alpha,\end{aligned}\right\}\qquad (1'')$$

соответствующими вращению осей около начала на угол α и изменению ориентации.

Оба преобразования объединяются в следующей формуле:

$$\begin{aligned} b^1 &= \alpha_{11} i^1 + \alpha_{12} i^2, \\ b^2 &= \alpha_{21} i^1 + \alpha_{22} i^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где матрица преобразования

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

ортогональна (сумма квадратов элементов каждой из ее строк или столбцов равна 1, а скалярное произведение двух разных строк или столбцов равно 0).

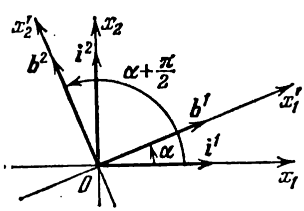

Рис. 35.

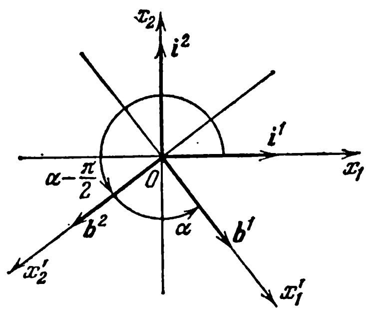

Рис. 36.

Любое определенное ортогональное преобразование (1) есть на самом деле одно из преобразований (1′), (1″) при некотором α.

Из (1) в силу ортогональности матрицы (2) следует, что

$$\left.\begin{aligned} i^1 &= \alpha_{11} b^1 + \alpha_{21} b^2, \\ i^2 &= \alpha_{12} b^1 + \alpha_{22} b^2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и мы получили преобразование, обратное преобразованию (1), с матрицей

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \Lambda^t,$$

сопряженной к Λ.

Зададим в плоскости произвольный вектор (точку) a. Пусть он имеет в старой и новой системе координаты (x_1, x_2) и (x_1', x_2'). Тогда

$$a = x_1 i^1 + x_2 i^2 = x_1' b^1 + x_2' b^2. \tag{4}$$

В силу формул (3) и (4)

$$x_1'\boldsymbol{b}^1 + x_2'\boldsymbol{b}^2 = x_1(\alpha_{11}\boldsymbol{b}^1 + \alpha_{21}\boldsymbol{b}^2) + x_2(\alpha_{12}\boldsymbol{b}^1 + \alpha_{22}\boldsymbol{b}^2) = \\ = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)\,\boldsymbol{b}^1 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)\,\boldsymbol{b}^2.$$

Поэтому, приравнивая компоненты при одинаковых ортах $\boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{b}^2$, получим

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В силу же формул (1) и (4)

$$x_1\boldsymbol{i}^1 + x_2\boldsymbol{i}^2 = x_1'(\alpha_{11}\boldsymbol{i}^1 + \alpha_{12}\boldsymbol{i}^2) + x_2'(\alpha_{21}\boldsymbol{i}^1 + \alpha_{22}\boldsymbol{i}^2) = \\ = (\alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2')\,\boldsymbol{i}^1 + (\alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2')\,\boldsymbol{i}^2,$$

откуда, приравнивая компоненты при $\boldsymbol{i}^1$ и $\boldsymbol{i}^2$, получим формулы, обратные к (5):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2', \\ x_2 &= \alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если наряду с преобразованием (6) перенести еще начало осей x_1', x_2' в точку O', имеющую координаты $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, то формулы (6) усложнятся, очевидно, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2', \\ x_2 &= x_2^0 + \alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Итак, произвольное преобразование прямоугольных координат (x_1, x_2) в прямоугольные координаты (x_1', x_2') с переносом начала системы (x_1, x_2) в точку $O' = (x_1^0, x_2^0)$ выражается формулами (7), где матрица

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$$

ортогональная.

Соответствующее преобразование, сохраняющее ориентацию системы координат, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1'\cos\alpha - x_2'\sin\alpha, \\ x_2 &= x_2^0 + x_1'\sin\alpha + x_2'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

и преобразование, меняющее ориентацию, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1'\cos\alpha + x_2'\sin\alpha, \\ x_2 &= x_2^0 + x_1'\sin\alpha - x_2'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7''}$$

(матрицы коэффициентов при x_1' и x_2' в (7') и (7'') соответственно транспонируют (1') и (1'')).

§ 20. Линейные подпространства в R_n

Множество L в R_n ($L \subset R_n$) называется *линейным подпространством пространства* R_n или, короче, подпространством в R_n, если из того, что два каких-либо вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ принадлежат к L ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$), автоматически следует, что вектор $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ тоже принадлежит к L ($\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} \in L$), где α, β — числа. *Подпространство* L *называется* m-*мерным*, если в нем имеется линейно независимая система $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$, состоящая из m векторов, и нет системы, состоящей из $m+1$ линейно независимых векторов.

Таким образом, если $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор в L ($\boldsymbol{a} \in L$), то система $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m, \boldsymbol{a}$ линейно зависима, т. е. существует нетривиальная система чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ такая, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}^1+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{a}^m+\lambda_{m+1}\boldsymbol{a}=0. \tag{1}$$

Здесь $\lambda_{m+1} \neq 0$, иначе было бы

$$\lambda_1\boldsymbol{a}^1+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{a}^m=0,$$

и вследствие линейной независимости системы $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ было бы $\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$, и вся система $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ была бы тривиальной. Тогда уравнение (1) можно решить относительно $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}=\mu_1\boldsymbol{a}^1+\ldots+\mu_m\boldsymbol{a}^m \qquad (\mu_s=-\lambda_s/\lambda_{m+1}), \tag{2}$$

т. е. представить в виде линейной комбинации из векторов $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$. С другой стороны, линейная комбинация вида (2) принадлежит к L, потому что L — подпространство. В этом смысле говорят, что система $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ есть *базис* в L. Очевидно, любая другая линейно независимая система векторов $\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^m$, принадлежащих к L, есть базис в L.

Если разложить векторы $\boldsymbol{b}^i$ по векторам $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$, то получим

$$\boldsymbol{b}^k=\sum_{s=1}^{m} b_{ks}\boldsymbol{a}^s \qquad (k=1, \ldots, m).$$

По аналогии с тем, как мы рассуждали в § 16 для R_n (где теперь надо заменить $\boldsymbol{i}^s$ и $\boldsymbol{a}^k$ соответственно на $\boldsymbol{a}^s$, $\boldsymbol{b}^k$), можно получить, что система $\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^m$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель $|b_{ks}| \neq 0$, и что любая независимая система, состоящая из $l < m$ векторов, уже не может быть базисом в L.

Пространство R_n можно рассматривать как подпространство R_n, имеющее n измерений.

Множество, состоящее из одного нулевого вектора $\mathbf{0}$ есть линейное подпространство ($\alpha\mathbf{0}+\beta\mathbf{0}=\mathbf{0}$). Про него говорят, что оно имеет 0 измерений. Вектор $\mathbf{0}$ не образует линейно независимой системы — из равенства $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$, где λ — число, не обязательно следует, что λ есть нуль.

Если вектор $\boldsymbol{x}^0 \neq \mathbf{0}$, то множество векторов вида $\lambda\boldsymbol{x}^0$, где λ — произвольное число, есть *одномерное подпространство*. В качестве базиса в нем можно взять вектор $\boldsymbol{x}^0$.

Пусть L есть линейное подпространство в R_n. Будем говорить, что вектор $\boldsymbol{v} \in R_n$ *ортогонален к* L, если он ортогонален к любому вектору $\boldsymbol{u} \in L$. Обозначим через L' множество всех векторов, ортогональных к L. L' есть подпространство. В самом деле, пусть $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}' \in L'$, т. е.

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})=0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in L;$$
$$(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{u})=0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in L.$$

Тогда для любых чисел α, β

$$(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}', \boldsymbol{u})=\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})+\beta(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{u})=0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in L,$$

т. е. $\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}' \in L'$.

По определению *подпространство $L' \subset R_n$ называется ортогональным к данному подпространству $L \subset R_n$*, если L' есть множество всех векторов, каждый из которых ортогонален к L.

Ниже доказывается теорема, выясняющая структуру произвольного подпространства $L \subset R_n$ и ему ортогонального подпространства $L' \subset R_n$. В частности, из нее следует, что *если L' ортогонально к L, то и, обратно, L ортогонально к L'*.

Теорема 1. *Пусть L есть линейное подпространство, отличное от R_n и нулевого подпространства. Тогда:*

а) *существует целое число m, удовлетворяющее неравенствам*

$$1 \leqslant m < n, \tag{3}$$

и ортонормированный базис

$$\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m \tag{4}$$

в L; если этот базис продолжить любым способом до ортонормированного базиса в R_n:

$$\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m, \quad \boldsymbol{a}^{m+1}, \ldots, \boldsymbol{a}^n, \tag{5}$$

то линейное подпространство L' с базисом

$$a^{m+1}, \ldots, a^n \tag{6}$$

обладает следующими свойствами:

б) *L' есть подпространство, ортогональное к L;*

в) *L есть подпространство, ортогональное к L';*

г) *любой вектор $a \in R_n$ можно представить в виде суммы*

$$a = u + v,$$

где $u \in L$, $v \in L'$ и при этом единственным образом.

Доказательство. По условию L отлично от нулевого подпространства, следовательно, в L существует вектор x, отличный от 0. Нормируя x, получим нормальный вектор

$$a^1 = \frac{1}{|x|} x.$$

Обозначим через a^2 любой, принадлежащий к L нормальный вектор, ортогональный к a^1 ($|a^2| = 1$, $(a^2, a^1) = 0$), если такой существует. Далее, обозначим через a^3 принадлежащий к L нормальный вектор, ортогональный к a^1 и a^2 ($|a^3| = 1$, $(a^3, a^1) = (a^3, a^2) = 0$), если такой существует. Этот процесс закончится на некотором m-м этапе, где m удовлетворяет неравенствам (3), т. е. найдется ортонормированная система векторов (4), принадлежащих к L, но уже не будет в L единичного вектора, ортогонального к векторам $a^1, \ldots, a^m$. В самом деле, $m \geqslant 1$, потому что заведомо $a^1 \in L$. С другой стороны, m не может быть равным n. В противном случае векторы $a^1, \ldots, a^n$ принадлежали бы к L и вместе с ними принадлежали бы к подпространству L все линейные комбинации $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a^k$, и тогда получилось бы, что L совпадает с R_n, но L отлично от R_n. Полученная ортонормированная система $a^1, \ldots, a^m$ есть базис в L. В самом деле, вместе с векторами $a^1, \ldots, a^m$ принадлежат к L и все их линейные комбинации $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a^k$. Но больше в L других векторов нет, потому что, если допустить, что некоторый вектор $a \in L$ не есть такая линейная комбинация, то a можно было бы записать в виде суммы

$$a = \sum_{k=1}^{m} (a, a^k) a^k + y, \tag{7}$$

где $y \neq 0$. Так как векторы a и a^k принадлежат к подпространству L, то пришлось бы заключить, что вектор

$$y = a - \sum_{k=1}^{m} (a, a^k) a^k$$

тоже принадлежит к L. Но вектор y ортогонален ко всем a^s $(s = 1, \ldots, m)$ (см. § 17, (4)). Пронормированный вектор

$$b = \frac{1}{|y|} y \tag{8}$$

тоже принадлежал бы к L и был бы ортогональным ко всем a^k $(k = 1, \ldots, m)$. Но это невозможно в силу максимального свойства числа m. Этим доказано утверждение а) теоремы.

Дополнение ортонормированной системы (4) до ортонормированного базиса (5) осуществляется на основании теоремы 1 § 17. Обозначим через L' подпространство всех линейных комбинаций $v = \sum_{k=m+1}^{n} \mu_k a^k$ из векторов системы (6). Каждый такой вектор, очевидно, ортогонален к любому вектору $u \in L$, который представляется в виде суммы $u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a^k$. С другой стороны, если $a \in R_n$ есть произвольный вектор, ортогональный ко всем векторам $u \in L$, в частности к $a^1, \ldots, a^m$, то его разложение по базису (5) имеет вид

$$a = \sum_{k=1}^{n} (a, a^k) a^k = \sum_{k=m+1}^{n} (a, a^k) a^k,$$

т. е. $a \in L'$. Мы доказали утверждение б) теоремы.

Далее, любой вектор $u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a^k \in L$ ортогонален ко всем векторам $v = \sum_{k=m+1}^{n} \mu_k a^k \in L'$ и, если известно, что какой-либо вектор $a = \sum_{k=1}^{n} (a, a^k) a^k$ ортогонален ко всем векторам из L', в частности к $a^{m+1}, \ldots, a^n$, то $a = \sum_{k=1}^{m} (a, a^k) a^k$, т. е. $a \in L$. Мы доказали утверждение в).

Наконец, если $a \in R_n$ — произвольный вектор, то его единственным образом можно представить в виде суммы

$$a = \sum_{k=1}^{n} (a, a^k) a^k = u + v,$$

где

$$u = \sum_{k=1}^{m} (a, a^k) a^k \in L, \quad v = \sum_{k=m+1}^{n} (a, a^k) a^k \in L'.$$

Этим теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть L есть подпространство m измерений в R_n. Тогда подпространство $L' \subset R_n$, ортогональное к L, имеет $n-m$ измерений и при этом L есть в свою очередь подпространство, ортогональное к L'.*

Доказательство. Если L отлично от R_n и от нулевого подпространства, то данная теорема содержится, очевидно, в теореме 1.

Пусть L есть нулевое подпространство. Так как любой вектор $a \in R_n$ ортогонален к $\mathbf{0}$, то $L' = R_n$ и измерение R_n равно $n - 0 = n$. Обратно, вектор $\mathbf{0}$ ортогонален ко всем векторам $a \in R_n = L'$. Других векторов, ортогональных ко всем векторам R_n, нет, потому что всякий отличный от $\mathbf{0}$ вектор уже не ортогонален к самому себе. Мы доказали, что L ортогонально к L'.

Если $L = R_n$, то рассуждаем подобным образом.

Следствие 1. *Пусть задана система векторов*

$$x^1, \ldots, x^m, \tag{9}$$

и пусть L' есть подпространство векторов v, каждый из которых ортогонален к векторам этой системы:

$$(v, x^k) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Пусть, далее, дан вектор a, ортогональный ко всем указанным векторам v, т. е. ортогональный к подпространству L'. Тогда a есть некоторая линейная комбинация из векторов заданной системы (9)

$$a = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x^k.$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство L, состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов системы (9), т. е. всякий вектор $u \in L$ есть некоторая линейная комбинация

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \boldsymbol{x}^k.$$

В этом случае будем также говорить, что подпространство L натянуто на векторы системы (9).

Так как всякий вектор $\boldsymbol{v} \in L'$ ортогонален к векторам системы (9), то он, очевидно, ортогонален к любому вектору $\boldsymbol{u} \in L$. Это показывает, что подпространство L' ортогонально к подпространству L. Но тогда по теореме 2 и L ортогонально к L', т. е. L состоит из *всех* векторов $\boldsymbol{u}$, ортогональных к L'. По условию $\boldsymbol{a}$ есть один из таких векторов $\boldsymbol{u}$, следовательно, $\boldsymbol{a}$ есть некоторая линейная комбинация из векторов системы (9).

§ 21. Теоремы фредгольмова типа

В этом параграфе излагается теория линейных уравнений, параллельная теории, изложенной в § 4.

Это бездетерминантная теория. В ее формулировки определитель системы уравнений явно не входит. Преимущество ее заключается в том, что она послужила основой и аналогом для многих обобщений в математическом анализе. Первые такие важные обобщения принадлежат Фредгольму[1]).

Мы снова рассматриваем линейный оператор (см. § 15) A:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in R_n), \tag{1}$$

приводящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in R_n$ вектор $\boldsymbol{y} \in R_n$ при помощи равенств

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Здесь

$$A = \| a_{is} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

— заданная квадратная матрица. Оператору A соответствует *сопряженный* ему оператор

$$\boldsymbol{y} = A^*\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in R_n), \tag{1*}$$

[1]) Э. И. Фредгольм (1867—1927) — шведский математик.

определяемый сопряженной к (3) матрицей

$$A^* = \begin{Vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3*}$$

При помощи компонент векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ он записывается в виде

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_i \qquad (j = 1, \dots, n), \tag{2*}$$

т. е компонента y_j выражается через координаты вектора $\boldsymbol{x}$ с помощью j-й строки матрицы A^* или j-го столбца матрицы $\bar{A}$.

Справедливо равенство

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{z}) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R_n, \tag{4}$$

верное для всех $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} \in R_n$. В самом деле, для действительных R_n и a_{is}

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s \right) z_i = \\ = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{is} z_i \right) x_s = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A^*z}).$$

В комплексном случае

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{z}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js} x_s \right) \bar{z}_j = \\ = \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{j=1}^{n} a_{js} \bar{z}_j = \sum_{s=1}^{n} x_s \overline{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{js} z_j} = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{z}).$$

Равенство (4) характерно для сопряженного оператора, потому что, если для некоторого линейного оператора B выполняется равенство

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{z}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R_n, \tag{5}$$

то необходимо $B = A^*$. Действительно, $(B = \| b_{ik} \|)$, для действительных a_{is}, b_{is}, R_n

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s z_i,$$

$$(\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{z}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{si} z_i x_s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{si} x_s z_i.$$

Из (5) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s z_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} b_{si} x_s z_i \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R_n, \tag{6}$$

откуда $a_{is} = b_{si}$ $(i, s = 1, \ldots, n)$, в чем можно убедиться, если положить в (6) $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и $\boldsymbol{z} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где у $\boldsymbol{x}$ единица стоит на s-м месте, а у $\boldsymbol{z}$ на i-м месте. В комплексном случае

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{js} x_s \bar{z}_j,$$

$$(\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{z}) = \sum_{s=1}^{n} x_s \overline{\sum_{j=1}^{n} b_{sj} z_j} = \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{sj} \bar{z}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \bar{b}_{sj} x_s \bar{z}_j,$$

откуда $a_{js} = \bar{b}_{sj}$ или $b_{sj} = \bar{a}_{js}$.

Таким образом, *сопряженный оператор A^* к линейному оператору A можно также определить как такой линейный оператор, для которого выполняется равенство* (4).

Равенства (1) и (1*) можно рассматривать как уравнения — задан вектор $\boldsymbol{y} \in R_n$, и мы ищем $\boldsymbol{x} \in R_n$, для которого выполняется равенство (1) или (1*).

Соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$A\boldsymbol{x} = 0 \tag{1_0}$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2_0}$$

и

$$A^*\boldsymbol{z} = 0 \tag{1_0^*}$$

или

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj} z_l = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{2_0^*}$$

Обозначим через L образ пространства R_n *при помощи оператора* A:

$$L = A(R_n)$$

— и через L' *подпространство всех векторов* $\boldsymbol{z}$, *удовлетворяющих однородному сопряженному уравнению* (1_0^*).

Мы назвали L' подпространством, потому что вместе с $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'$ к нему принадлежат также $\alpha\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{z}'$, где α и β — числа:

$$A^*(\alpha\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{z}') = \alpha A^*\boldsymbol{z} + \beta A^*\boldsymbol{z}' = 0.$$

L есть тоже подпространство, потому что, если $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}' \in L$, то существуют векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in R_n$ такие, что $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}'$, и, следовательно,

$$\alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{y}' = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{x}' = A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}'),$$

т. е. $\alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{y}' \in L$.

Справедлива лемма (см. § 20, теорема 2).

Лемма 1. *Подпространства L и L' взаимно ортогональны, т. е. L' есть множество всех векторов $\boldsymbol{z}$, каждый из которых ортогонален к L, а L в свою очередь есть множество всех векторов $\boldsymbol{y}$, каждый из которых ортогонален к L'. Если L имеет k измерений, то L' имеет $n-k$ измерений.*

Доказательство. Обратимся к равенству

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{z}), \tag{7}$$

верному для всех $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} \in R_n$. Пусть $\boldsymbol{z}$ есть вектор, ортогональный к L, тогда для него левая часть (7) равна нулю для всех $\boldsymbol{x} \in R_n$, но тогда и правая часть равна нулю для всех $\boldsymbol{x} \in R_n$, в частности для $\boldsymbol{x} = A^*\boldsymbol{z}$:

$$(A^*\boldsymbol{z}, A^*\boldsymbol{z}) = 0.$$

Следовательно, $A^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Мы доказали, что если вектор $\boldsymbol{z}$ ортогонален к L, то он удовлетворяет уравнению $A^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ (т. е. $\boldsymbol{z} \in L'$).

Обратно, пусть вектор $\boldsymbol{z}$ удовлетворяет уравнению $A^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Для такого $\boldsymbol{z}$ правая часть (7) равна нулю при любых $\boldsymbol{x}$, но тогда и левая равна нулю, т. е. $\boldsymbol{z}$ ортогонален ко всем векторам вида $A\boldsymbol{x}$, т. е. ко всем векторам $\boldsymbol{y} \in L$. Другими словами, $\boldsymbol{z}$ ортогонален к L.

Мы доказали, что L' есть множество *всех* векторов $\boldsymbol{z}$, ортогональных к подпространству L. Но тогда на основании теоремы 2 § 20 и, обратно, L есть множество *всех* векторов $\boldsymbol{y}$, ортогональных к L', и сумма измерений L и L' равна n. Лемма доказана.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение*

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \tag{1'}$$

имело решение для данного вектора $\boldsymbol{y} \in R_n$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{y}$ был ортогональным ко всем векторам $\boldsymbol{z}$, удовлетворяющим однородному сопряженному уравнению

$$A^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}. \tag{1_0^*}$$

Решение x уравнения (1), *если оно существует, можно записать в виде суммы*

$$x = x^0 + u,$$

где x^0 — какое-либо частное решение уравнения (1), *а u — произвольное решение однородного уравнения*

$$Au = 0. \tag{1_0}$$

Любая указанная сумма есть решение (1′).

Доказательство. В силу леммы 1, если $L = A(R_n)$, а L' есть множество всех z, удовлетворяющих уравнению $A^*z = 0$, то L и L' суть подпространства, ортогональные взаимно. Но тогда, если для y существует решение уравнения (1), то $y \in L$ и необходимо все $z \in L'$ ортогональны к y. Если же вектор y ортогонален ко всем $z \in L'$, то $y \in L$, т. е. существует x, для которого $y = Ax$.

Пусть теперь для вектора y существует решение уравнения (1′). Обозначим его через x^0:

$$y = Ax^0.$$

Тогда, очевидно, сумма $x^0 + u$, где $Au = 0$, есть тоже решение уравнения (1′):

$$A(x^0 + u) = Ax^0 + Au = y + 0 = y.$$

Обратно, если x есть произвольное решение уравнения (1′), а x^0 — определенное частное решение, то

$$y = Ax, \quad y = Ax^0,$$

и, следовательно,

$$0 = Ax - Ax^0 = A(x - x^0) = Au,$$

где $u = x - x^0$, т. е. $x = x^0 + u$, где u удовлетворяет уравнению $Au = 0$.

Замечание. Поясним на примере действительного пространства R_2 связь теоремы 1 с теорией Кронекера — Капелли. Пусть вектор $y = (y_1, y_2)$ ортогонален ко всем решениям системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 = 0, \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Покажем, что тогда ранги матрицы A и расширенной матрицы

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \end{Vmatrix}$$

равны между собой. Если ранг $A=2$, то, очевидно, ранг $B=2$. Пусть ранг $A=1$. Всегда ранг $B \geqslant$ ранг $A=1$. Поэтому нам необходимо доказать, что

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{12} & y_1 \\ a_{22} & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

В самом деле, так как y ортогонален к решениям системы (8) (нетривиальным), то $y_1z_1+y_2z_2=0$. Поэтому, считая, что $z_1 \neq 0$,

$$\Delta_1=a_{11}y_2-a_{21}y_1=$$
$$=a_{11}y_2+a_{21}\frac{y_2z_2}{z_1}=\frac{y_2}{z_1}(a_{11}z_1+a_{21}z_2)=0,$$
$$\Delta_2=a_{12}y_2-a_{22}y_1=$$
$$=a_{12}y_2+a_{22}\frac{y_2z_2}{z_1}=\frac{y_2}{z_1}(a_{12}z_1+a_{22}z_2)=0.$$

Отсюда следует, что ранг $B=$ ранг $A=1$.

Обратно, пусть вектор $y=(y_1, y_2)$ таков, что ранг $B=$ $=$ранг A, тогда (1) имеет некоторое решение (x_1, x_2). Докажем, что y ортогонален к решениям $z=(z_1, z_2)$ системы (8). В самом деле,

$$y_1z_1+y_2z_2=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)z_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)z_2=$$
$$=(a_{11}z_1+a_{21}z_2)x_1+(a_{12}z_1+a_{22}z_2)x_2=0\cdot x_1+0\cdot x_2=0.$$

Теорема 2. *Однородные уравнения*

$$Ax=0 \tag{1_0}$$

и

$$A^*x=0 \tag{1_0^*}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений.

В частности, если одно из этих уравнений имеет только тривиальное решение 0, *т. е. имеет нуль независимых решений, то это верно и для другого.*

Замечание. В последнем случае уравнение (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Матрицы A и A^* имеют один и тот же ранг, который обозначим через k. Они имеют также один и тот же определитель Δ.

Если $k=n$, то $\Delta \neq 0$ и уравнения (1_0) и (1_0^*) имеют только тривиальные решения 0. В этом случае, согласно теореме 1, уравнение (1) имеет единственное решение при любых $y \in R_n$.

Пусть теперь $1 \leqslant k < n$. После соответствующей перенумерации уравнений и компонент определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Первые k уравнений (1^0) теперь запишем в виде

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = -a_{1,\,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = -a_{k,\,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Ниже приводится таблица $n-k$ векторов

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_k^1, 1, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_k^2, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{x}^{n-k} = (x_1^{n-k}, \dots, x_k^{n-k}, 0, \dots, 0, 1). \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Чтобы получить первый вектор, подставляем в систему (9)

$$x_{k+1} = 1, \ x_{k+2} = 0, \ \dots, \ x_n = 0$$

и решаем ее относительно $x_1, \dots, x_k$. Единственные решения, которые здесь получаются, обозначим через $x_1^1, \dots, x_k^1$. Чтобы получить второй вектор, подставляем в (9)

$$x_{k+1} = 0, \quad x_{k+2} = 1, \quad x_{k+3} = 0, \ \dots, \ x_n = 0$$

и находим числа $x_1^2, \dots, x_k^2$ и т. д. Векторы (10) обладают следующими свойствами.

1) Система векторов (10) линейно независима, потому что ранг матрицы этих векторов равен числу этих векторов $\mu = n-k$.

2) Каждый вектор системы (10) есть решение (любых!) уравнений (2_0) или $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

3) Всевозможные решения уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ имеют вид

$$\lambda_1\boldsymbol{x}^1 + \dots + \lambda_{n-k}\boldsymbol{x}^{n-k},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ — произвольные числа.

Обычно эти три утверждения заменяют словами: уравнение (1_0) имеет $n-k$ линейно независимых решений.

Подобными рассуждениями, учитывая, что ранг $A =$ ранг A^*, доказываем, что уравнение $A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ тоже имеет $n-k$ линейно независимых решений. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если одно из однородных уравнений* (1_0) *или* (1_0^*) *имеет* k *линейно независимых решений, то и* *другое имеет k линейно независимых решений; образы же $L = A(R_n)$ и $L^* = A^*(R_n)$ пространства R_n, получаемые при помощи операторов A и A^*, суть подпространства $n-k$ измерений.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы о равенстве количеств линейно независимых решений однородных уравнений (1_0) и (1_0^*) есть теорема 2, а второе — есть лемма 1, в силу которой измерение подпространства L равно $n-k$, где k — измерение подпространства L' векторов $\boldsymbol{z}$, удовлетворяющих уравнению $A^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Аналогично измерение L^* равно $n-k$, где k — количество измерений подпространства векторов $\boldsymbol{u}$, удовлетворяющих уравнению $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

§ 22. Самосопряженный оператор. Квадратичная форма

Линейный оператор

$$y_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

или, коротко,

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in R_n,\ \boldsymbol{y} \in R_n) \tag{2}$$

называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному ($A = A^*$), т. е. если

$$A\boldsymbol{x} = A^*\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in R_n, \tag{3}$$

иначе говоря, если матрица A симметрическая:

$$a_{kl} = a_{lk} \qquad (k,\ l = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

(см. (3) и (3*) § 21). Мы считаем a_{kl} и R_n действительными (см. ниже замечание 1).

Для самосопряженного оператора имеет место характерное равенство

$$(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{z}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in R_n$$

(см. § 21, (4)). Очевидно,

$$(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l \qquad (a_{kl} = a_{lk}). \tag{4'}$$

Выражение справа в (4′) называется *квадратичной формой n-го порядка.* Это непрерывная функция от вектора $\boldsymbol{x}$ или, что все равно, от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Будем рассматривать эту функцию на множестве S значений $\boldsymbol{x}$, имеющих единичную норму ($|\boldsymbol{x}|=1$). Множество S есть сфера в R_n радиуса 1 с центром в точке 0. S — ограниченное множество. Кроме того, оно замкнуто[1]): если точки последовательности $\{\boldsymbol{x}^\nu\}$ ($\nu=1, 2, \ldots$) принадлежат к S (т. е. $|\boldsymbol{x}^\nu|=1$, $\nu=1, 2, \ldots$) и эта последовательность стремится к некоторой точке $\boldsymbol{x}^0 \in R_n$ ($\boldsymbol{x}^\nu \to \boldsymbol{x}^0$, $\nu \to \infty$), то неминуемо $\boldsymbol{x}^0 \in S$, т. е. $|\boldsymbol{x}^0|=1$, потому что $|1-|\boldsymbol{x}^0||=||\boldsymbol{x}^\nu|-|\boldsymbol{x}^0|| \leqslant |\boldsymbol{x}^\nu-\boldsymbol{x}^0| \to 0$, откуда $|\boldsymbol{x}^0|=1$.

Найдем максимум квадратичной формы (4′) на сфере S. Так как форма (4′) есть непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве, то максимум ее на S достигается для некоторого единичного вектора $\boldsymbol{x}^1$ ($|\boldsymbol{x}^1|=1$). Обозначим этот максимум через λ_1:

$$\lambda_1=(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1) \geqslant (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x}|=1. \tag{5}$$

Введем подпространство L', ортогональное к вектору $\boldsymbol{x}^1$, т. е. множество всех векторов $\boldsymbol{v}$, каждый из которых ортогонален к $\boldsymbol{x}^1$. В L' возьмем произвольный единичный вектор $\boldsymbol{v}^0$ ($|\boldsymbol{v}^0|=1$). Вектор

$$\cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0$$

зависит от α и имеет единичную норму

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0\,| &= \\ &=(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0,\ \cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0)^{1/2}= \\ &=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^{1/2}=1.\end{aligned}$$

При $\alpha=0$ этот вектор обращается в $\boldsymbol{x}^1$. Но тогда функция

$$\psi(\alpha)=(A(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0),\ \cos\alpha\cdot\boldsymbol{x}^1+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{v}^0)$$

достигает своего максимума в точке $\alpha=0$ ($\psi(0)=(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1)$) и в силу необходимого условия экстремума

$$\psi'(0)=0.$$

Вычислим эту производную. Имеем

$$\psi(\alpha)=\cos^2\alpha\,(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1)+\sin 2\alpha\,(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{v}^0)+\sin^2\alpha\,(A\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}^0).$$

---

[1]) См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 8.12.

Следовательно,

$$\psi'(\alpha) = -\sin 2\alpha\,(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1) + 2\cos 2\alpha\,(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{v}^0) + \\ + \sin 2\alpha\,(A\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}^0)$$

и

$$\psi'(0) = 2\,(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{v}^0) = 0.$$

Мы получили, что вектор $A\boldsymbol{x}^1$ ортогонален ко всем единичным векторам $\boldsymbol{v}^0 \in L'$, следовательно, и к любым векторам $\boldsymbol{v} \in L'$. Но тогда $A\boldsymbol{x}^1$ отличается от $\boldsymbol{x}^1$ лишь множителем (см. следствие 1 в конце § 20), т. е.

$$A\boldsymbol{x}^1 = \lambda \boldsymbol{x}^1,$$

где λ — некоторое число.

Из первого соотношения (равенства) в (5), учитывая, что $|\boldsymbol{x}^1| = 1$, следует

$$\lambda_1 = (\lambda \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1) = \lambda.$$

Таким образом, мы доказали, что максимум квадратичной формы (4′) на единичной сфере $|\boldsymbol{x}| = 1$ достигается в некоторой точке $\boldsymbol{x}^1$,

$$\max_{|\boldsymbol{x}|=1} (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^1) = \lambda_1.$$

При этом

$$A\boldsymbol{x}^1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}^1, \quad |\boldsymbol{x}^1| = 1.$$

Мы видим, что нетривиальный (не равный нулю) вектор $\boldsymbol{x}^1$ отображается при помощи оператора A в вектор $\lambda_1 \boldsymbol{x}^1$, ему коллинеарный.

Такой вектор называется *собственным вектором оператора* A, а число λ_1 — *принадлежащим этому вектору собственным значением*.

Будем теперь рассматривать оператор A на подпространстве R^1, определяемом как множество векторов $\boldsymbol{x}$ ($\in R_n$), ортогональных к вектору $\boldsymbol{x}^1$ (выше мы его обозначали через L'). R^1 есть $(n-1)$-мерное подпространство — в нем имеются ортонормированные базисы, состоящие из $n-1$ векторов. Цель наша заключается в подыскании одного такого базиса, как мы увидим, естественно связанного с оператором A.

Важно подчеркнуть, что образ $A(R^1)$ подпространства R^1 при помощи оператора A принадлежит к R^1, потому что, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1)=0$, то

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1)=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}^1)=(\boldsymbol{x}, \lambda_1\boldsymbol{x}^1)=\lambda_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1)=0,$$

т. е. $A\boldsymbol{x}\in R^1$.

Самосопряженность оператора A на R^1 тривиальным образом сохраняется, потому что равенство

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$$

верное для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in R_n$, верно также для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in R^1$.

Итак, мы теперь рассматриваем самосопряженный линейный оператор A на линейном подпространстве R^1 измерения $n-1$. К нему можно применить приведенные выше рассуждения и обнаружить в R^1 существование единичного вектора $\boldsymbol{x}^2$ такого, что

$$\max_{\substack{|\boldsymbol{x}|=1\\(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1)=0}}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\underset{\substack{|\boldsymbol{x}^2|=1\\(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1)=0}}{(A\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^2)}=\lambda_2\leqslant\lambda_1.$$

Дело в том, что единичная сфера S^1 в R^1 определяется, очевидно, как множество единичных векторов $\boldsymbol{x}$, ортогональных к $\boldsymbol{x}^1$. При этом

$$A\boldsymbol{x}^2=\lambda_2\boldsymbol{x}^2.$$

Мы нашли второй собственный вектор оператора A — вектор $\boldsymbol{x}^2$ и принадлежащее к нему собственное значение λ_2, очевидно, не превышающее λ_1 (при уменьшении области рассмотрения максимум может только уменьшиться). При этом $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=0$.

Подобным образом можно ввести подпространство R^2, измерения $n-2$, ортогональное к векторам $\boldsymbol{x}^1$ и $\boldsymbol{x}^2$, показать, что оператор A отображает R^2 в R^2 и определить третий единичный вектор $\boldsymbol{x}^3$, ортогональный к $\boldsymbol{x}^1$ и к $\boldsymbol{x}^2$ такой, что для него имеет место

$$\max_{\substack{|\boldsymbol{x}|=1\\(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1)=0,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2)=0}}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^3)=\lambda_3$$

и

$$A\boldsymbol{x}^3=\lambda_3\boldsymbol{x}^3 \quad (\lambda_3\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1).$$

Продолжив этот процесс по индукции до n-го вектора $\boldsymbol{x}^n$, мы получим ортонормированную систему векторов

$$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n \qquad (6)$$

и систему действительных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \tag{7}$$

обладающих свойствами

$$\left.\begin{array}{l} Ax^k = \lambda_k x^k \qquad (k = 1, \ldots, n), \\ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Мы получили *полную систему собственных векторов оператора* A и принадлежащих им собственных значений. Так как ортонормированная система (6) принадлежит к R_n и состоит из n векторов, то она есть базис в R_n (см. § 17). Поэтому произвольный вектор $x \in R_n$ можно разложить по этой системе:

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, x^k)\, x^k. \tag{9}$$

Тогда наш самосопряженный оператор A может быть записан следующим образом:

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} (x, x^k)\, x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} (x, x^k)\, Ax^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x^k)\, x^k. \tag{10}$$

Мы доказали теорему.

Теорема 1. *Самосопряженному оператору A в пространстве R_n соответствует ортогональная система векторов $x^1, \ldots, x^n$ (базис R_n) и система действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что Ax для любого $x \in R_n$ представляется в виде суммы* (10).

Квадратичная форма (4′) соответственно записывается следующим образом:

$$(x, Ax) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x, x^k)\, x^k,\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s (x, x^s)\, x^s\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s (x, x^s)^2. \tag{4″}$$

На практике часто мы исходим из некоторой квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l \qquad (a_{kl} = a_{lk}). \tag{4′}$$

Чтобы применить к ней полученные результаты, можно определить в связи с ней линейный оператор

$$y = Ax,$$

определяемый равенствами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

В силу условия $a_{kl} = a_{lk}$ это самосопряженный оператор, и к нему применима теорема 1. На языке квадратичной формы теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2. *Пусть задана квадратичная форма* (4′) *в некоторой n-мерной системе координат* $x_1, \ldots, x_n$ *пространства* R_n *с ортами* $\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n$ $\left(\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{i}^k\right)$. *Существует прямоугольная система координат* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *с ортами* $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$, *образующими ортогональный базис* $\left(\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{x}^k\right)$, *и система действительных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *такие, что квадратичная форма* (4′) *в этой системе есть сумма квадратов координат* ξ_s *вектора* $\boldsymbol{x}$, *помноженных соответственно на числа* λ_s:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \xi_s^2. \qquad (4''')$$

Переход от левой части (4‴) к правой можно осуществить, если известны разложения векторов $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ по ортам $\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n$. Пусть

$$\boldsymbol{x}^j = \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \boldsymbol{i}^s$$

(см. § 17, (7), где надо заменить a_{js}, $\boldsymbol{a}^k$ соответственно на β_{js}, $\boldsymbol{x}^j$). Так как $\boldsymbol{i}^1, \ldots, \boldsymbol{i}^n$ и $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ — ортонормированные базисы в R_n, то матрица

$$\Lambda = \|\beta_{js}\|$$

ортогональная. Мы считаем, что она известна. Один и тот же вектор $\boldsymbol{x}$ можно разложить по двум базисам:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{s=1}^{n} x_s \boldsymbol{i}^s = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \boldsymbol{x}^j.$$

Но тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j x^j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} i^s = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{js} \xi_j \right) i^s$$

и в силу линейной независимости системы $i^1, \ldots, i^n$ получим

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} \beta_{js} \xi_j \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Таким образом, переход от координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ к координатам $x_1, \ldots, x_n$ осуществляется посредством матрицы Λ', транспонированной к Λ (т. е. с помощью строк матрицы Λ' или столбцов матрицы Λ).

Если подставить выражения (11) для x_s в левую часть ($4'''$), то должны получить правую. Запишем это равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \xi_j \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \beta_{il} \right) \xi_j \xi_i =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \xi_s^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} \lambda_i \xi_j \xi_i,$$

где $\delta_{ji} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i, \end{cases}$ — символ Кронекера.

Если приравнять коэффициенты при одинаковых $\xi_j \xi_i$, то получим равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \beta_{il} \right) = \delta_{ji} \lambda_i \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

которые можно трактовать следующим образом (см. § 15, (6)). Для матрицы

$$A = \| a_{kl} \| \qquad (a_{kl} = a_{lk})$$

самосопряженного оператора A существует ортогональная матрица

$$\Lambda = \| \beta_{js} \|$$

такая, что

$$\Lambda \cdot A \cdot \Lambda^{-1} = \mathfrak{A}, \tag{12}$$

где $\mathfrak{A}$ — некоторая диагональная матрица

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix} \tag{13}$$

(λ_i — действительные числа), называемая *канонической*.

Отметим, что для ортогональной действительной матрицы Λ

$$\Lambda^{-1} = \Lambda'.$$

Так как определители ортогональных матриц $|\Lambda| = |\Lambda^{-1}| = \pm 1$, то из (12) следует

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = |\mathfrak{A}| = |\Lambda| \cdot |A| \cdot |\Lambda^{-1}| = |A|. \qquad (14)$$

Мы доказали, в частности, следующую теорему.

Теорема 3. *Если определитель $|A|$ самосопряженной матрицы A не равен нулю ($|A| \neq 0$), то все ее собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не равны нулю ($\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$).*

Из теоремы 2 следует, что

1) Если $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$, то квадратичная форма положительная для любых векторов $\xi \neq 0$, а следовательно, и любых векторов $x \neq 0$. В этом случае она называется *строго положительной*.

2) Если $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, то форма отрицательная для любых $\xi \neq 0$, следовательно, и любых $x \neq 0$. В этом случае она называется *строго отрицательной*.

3) Если $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ и $\lambda_n = 0$, то форма неотрицательная. Существует направление, (ось ξ_n), вдоль которого она равна нулю. Это *положительная форма, но не строго*.

4) Если $\lambda_1 = 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, то *форма отрицательная не строго*.

5) Если $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_n < 0$, то *форма неопределенна*. Если исключить нулевую точку, то вдоль оси ξ_1 она положительная, вдоль же оси ξ_n — отрицательная.

Оказывается, что по виду матрицы $\|A\|$, по знаку некоторых порождаемых ею определителей можно узнать, будут ли ее собственные числа все положительные, все отрицательные или среди них есть как положительные, так и отрицательные. В этом заключается *теорема Сильвестра* [1]).

Составим ряд главных миноров квадратичной формы (Ax, x):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме Сильвестра, которую мы не доказываем, имеют место следующие утверждения:

---

[1]) Дж. Дж. Сильвестр (1814—1897) — английский математик.

1. Если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то форма строго положительна (случай 1)).

2. Если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$, то форма строго отрицательная (случай 2)).

3. Если $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0, \ldots, \Delta_n \geqslant 0$ или

$$\Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \geqslant 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n \geqslant 0$$

и имеется j, при котором $\Delta_j = 0$, то форма заведомо не строго определенна.

4. Во всех остальных случаях квадратическая форма неопределенна.

Замечание 1. Если R_n—комплексное пространство, а $a_{kl} = a_{lk}$—по-прежнему действительные числа, то рассуждения, приведенные выше, мало отличаются. Формула (4′) теперь записывается так:

$$(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\bar{x}_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k \bar{x}_l.$$

Число $(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})$ остается действительным, потому что

$$\overline{(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\bar{x}_k x_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lk} x_k \bar{x}_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k \bar{x}_l = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}).$$

Это показывает, что приведенные выше факты (формулы (4′)—(10)) остаются неизменными, в частности числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и в случае комплексного R_n действительны. Теорема 1 полностью сохраняется для комплексного R_n. Формула (4″) теперь имеет вид

$$(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \,|(x, x^s)|^2,$$

т. е. теперь уже квадраты чисел $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^s)$ надо заменить на квадраты их модулей. Формула (4‴) теперь уже выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k \bar{x}_l = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \,|\xi_s|^2,$$

а в остальном теорема 2 остается в силе.

Замечание 2. Отметим, что действительность собственных значений самосопряженного линейного оператора

A в R_n (действительном или комплексном) можно доказать следующим образом. Пусть λ — собственное значение оператора A и x^0 ($|x^0|=1$) — принадлежащий к нему собственный вектор. Так как $Ax^0=\lambda x^0$, то

$$\lambda=\lambda(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^0)=(\lambda\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^0)=(A\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^0)=(\boldsymbol{x}^0, A\boldsymbol{x}^0)=$$
$$=(\boldsymbol{x}^0, \lambda\boldsymbol{x}^0)=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^0)=\bar{\lambda}.$$

Ортогональность собственных векторов оператора, принадлежащих разным собственным значениям, тоже можно доказать непосредственно.

В самом деле,

$$A\boldsymbol{x}^1=\lambda_1\boldsymbol{x}^1, \quad A\boldsymbol{x}^2=\lambda_2\boldsymbol{x}^2$$
$$(|\boldsymbol{x}^1|=1, \quad |\boldsymbol{x}^2|=1, \quad \lambda_1\neq\lambda_2),$$

тогда

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=(\lambda_1\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=(A\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=(\boldsymbol{x}^1, A\boldsymbol{x}^2)=(\boldsymbol{x}^1, \lambda_2\boldsymbol{x}^2)=$$
$$=\bar{\lambda}_2(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=\lambda_2(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2).$$

Так как $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)=0$.

§ 23. Квадратичная форма в двумерном пространстве

При $n=2$ квадратичная форма имеет вид

$$a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2, \qquad (1)$$

так как $a_{12}=a_{21}$ (мы считаем a_{kl} действительными).

Чтобы привести форму (1) к сумме квадратов координат вектора (ξ_1, ξ_2) в некотором базисе $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$, надо (см. § 22) найти базисные орты $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ — собственные векторы самосопряженного оператора A, порожденного симметрической матрицей

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Укажем способ нахождения собственных значений (чисел) и собственных векторов оператора A, отличный от метода § 22.

Итак, если λ_0 — собственное число оператора A и $\boldsymbol{x}^0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})\neq\mathbf{0}$ — соответствующий ему собственный вектор, то

$$A\boldsymbol{x}^0=\lambda_0\boldsymbol{x}^0.$$

Перепишем это уравнение в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_0)\,x_1^{(0)}+\qquad a_{12}x_2^{(0)}&=0,\\ a_{21}x_1^{(0)}+(a_{22}-\lambda_0)\,x_2^{(0)}&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

или в операторной форме:

$$(A-\lambda_0E)\,\boldsymbol{x}^0=0,\qquad(2')$$

где E — тождественный оператор.

Таким образом, однородная система (2) имеет ненулевое решение $\boldsymbol{x}^0$, что может быть, если определитель системы (2) или (2′) равен нулю:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_0 & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda_0\end{vmatrix}=|A-\lambda_0E|=0.$$

Итак, собственное число λ_0 является корнем уравнения

$$|A-\lambda_0E|=0,\qquad(3)$$

которое называется *характеристическим уравнением* оператора A (или квадратичной формы $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$).

Верно и обратное утверждение. Если λ_0 является корнем уравнения (3), то нетривиальное решение системы

$$(A-\lambda_0E)\,\boldsymbol{x}=0\qquad(4)$$

будет собственным вектором самосопряженного оператора A.

Следовательно, собственные числа оператора A находятся в данном случае как корни квадратного уравнения (3):

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2=0,$$
$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\,\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}+\sqrt{4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2}\right],\\ \lambda_2&=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}-\sqrt{4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Отсюда видно, что $\lambda_1\geqslant\lambda_2$, при этом $\lambda_1=\lambda_2$ в случае $a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$. Будем для определенности считать, что $a_{11}\geqslant a_{22}$ (иначе меняем x_1 на x_2 и x_2 на x_1). Тогда $\lambda_1\geqslant a_{11}\left(\lambda_1-a_{11}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2}-(a_{11}-a_{22})\right]\geqslant0\right)$.

Из (5) следует, что *собственные значения оператора A (самосопряженного) — действительные числа.*

Теперь по известным собственным числам λ_1 и λ_2 найдем собственные единичные векторы, как решения системы (4). Так как $|A-\lambda_1 E|=0$, то

$$\text{ранг } (A-\lambda_1 E) \leqslant 1.$$

Если $\lambda_1=\lambda_2$, то в этом случае матрица $A-\lambda_1 E$ состоит из одних нулей ($\lambda_1=\lambda_2=a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$), т. е. ее ранг равен нулю. В этом случае квадратичная форма уже приведена к сумме квадратов ($a_{12}=a_{21}=0$). Системе (4) удовлетворяет любой вектор $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$. Поэтому за собственные векторы можно взять орты системы координат $\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{i}=(1, 0)$, $\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{j}=(0, 1)$. Любая другая система $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$ ортонормальных векторов обладает тем свойством, что в этой системе квадратичная форма по-прежнему состоит из одних квадратов.

Теперь, если $\lambda_1>\lambda_2$, то либо $a_{12}\neq 0$, либо $a_{12}=0$, $a_{11}\neq a_{22}$. Второй случай можно не рассматривать, так как форма (1) уже приведена к сумме квадратов. Итак, пусть $a_{12}\neq 0$. Тогда

$$\text{ранг } (A-\lambda_1 E)=1.$$

Поэтому достаточно рассмотреть одно уравнение системы (4):

$$(a_{11}-\lambda_1)\,x_1+a_{12}x_2=0.$$

Отсюда имеем ($a_{12}\neq 0$)

$$x_2=[(-a_{11}+\lambda_1)/a_{12}]\,x_1.$$

Вектор

$$\boldsymbol{y}^1=\left(x_1,\ \frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\,x_1\right)$$

является решением системы (4). Нормируя этот вектор, получим собственный вектор

$$\boldsymbol{x}^1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})=\frac{\boldsymbol{y}^1}{|\boldsymbol{y}^1|}=$$
$$=\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\right)^2}},\ \frac{\pm(\lambda_1-a_{11})}{a_{12}\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\right)^2}}\right).$$

Проводя элементарные преобразования, можно получить равенства

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(a_{11}-a_{22})/\sqrt{4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2}},\\ x_2^{(1)} &= \pm\frac{\operatorname{sign} a_{12}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-(a_{11}-a_{22})/\sqrt{4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

В дальнейшем достаточно брать в формулах (6) знак $+$.

Совершенно аналогично по собственному числу λ_2 найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^2$. Оказывается, что

$$\boldsymbol{x}^2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (-x_2^{(1)}, x_1^{(1)}).$$

Составим теперь матрицу оператора (ортогонального преобразования) Λ, переводящего орты $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ в орты $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ -x_2^{(1)} & x_1^{(1)} \end{Vmatrix}$$

(в строках стоят координаты образов базисных ортов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ при помощи Λ, т. е. $\boldsymbol{x}^1 = x_1^{(1)}\boldsymbol{i} + x_2^{(1)}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{x}^2 = -x_2^{(1)}\boldsymbol{i} + x_1^{(1)}\boldsymbol{j}$). Тогда координаты вектора (x_1, x_2) в системе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ связаны с координатами (ξ_1, ξ_2) этого вектора в системе $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$ с помощью столбцов матрицы Λ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)}\xi_1 - x_2^{(1)}\xi_2, \\ x_2 &= x_2^{(1)}\xi_1 + x_1^{(1)}\xi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Подставляя эти значения в квадратичную форму (1) и учитывая формулы (5) и (6), получим

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2. \qquad (8)$$

Правая часть этого равенства называется *каноническим видом квадратичной формы.*

Если числа λ_1 и λ_2 одного знака, то будем говорить, что квадратичная форма принадлежит *эллиптическому типу*; если λ_1 и λ_2 разных знаков, то *гиперболическому типу*; если же одно из чисел λ_1 или λ_2 равно нулю, то *параболическому типу.*

Из (5) видно, что $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Поэтому тип формы (1) можно определить по знаку выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Квадратичная форма будет *эллиптической, гиперболической или параболической*, если выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ соответственно больше, меньше или равно нулю.

Пример 1. Привести к каноническому виду форму

$$x_1^2 - \sqrt{3}\,x_1x_2 + 2x_2^2.$$

В данном случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{22} = 2$. Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} > 0$, то форма будет эллиптической. Найдем собственные векторы и их собственные значения по формулам (5), (6):

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{2},\ x_2^{(1)}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \boldsymbol{x}^1=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \lambda_1=\frac{5}{2}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{x}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

В системе ($\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$) наша квадратичная форма имеет вид

$$\frac{5}{2}\xi_1^2+\frac{1}{2}\xi_2^2.$$

Так как $x_1^{(1)}=\frac{1}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $x_2^{(1)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, то преобразование с помощью матрицы

$$\Lambda=\begin{Vmatrix} x_1^{(1)} & -x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} & x_1^{(1)} \end{Vmatrix} \qquad (\boldsymbol{x}^1=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}),\ \boldsymbol{x}^2=(-x_2^{(1)},\ x_1^{(1)}))$$

означает поворот системы x_1, x_2 на угол $\alpha=\pi/3$ около начала координат по часовой стрелке (см. пример 1 в конце § 16).

§ 24. Кривая второго порядка

24.1. Общее уравнение кривой второго порядка. В плоскости, в некоторой прямоугольной системе координат x, y, пусть задана кривая, определяемая неявно уравнением второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E, F — заданные действительные числа. При этом числа A, B, C одновременно не равны нулю. Эта кривая называется *кривой второго порядка*. На самом деле может случиться, что нет вовсе точек (x, y) с действительными координатами, удовлетворяющих уравнению (1). В этом случае говорят, что уравнение (1) определяет *мнимую кривую второго порядка*. Мы не будем изучать мнимые кривые. Уравнение

$$x^2+y^2=-1$$

может служить примером уравнения второй степени, определяющего мнимую кривую.

24.2. Важные случаи общего уравнения кривой второго порядка. Перечислим шесть важнейших частных случаев общего уравнения (1):

1) Уравнение *эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\geqslant b>0)$$

с полуосями длины a и b. В частности, при $a=b$ уравнение *окружности*

$$x^2+y^2=a^2$$

с центром в начале координат и радиусом a.

2) Уравнение *гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\geqslant b>0)$$

с полуосями a и b.

3) Уравнение *параболы*

$$y^2=2px \quad (p>0).$$

4) Уравнение *пары пересекающихся прямых*

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \quad (0<a,\ b).$$

5) Уравнение *пары параллельных* или *совпадающих прямых*

$$x^2-a^2=0 \quad (a\geqslant 0).$$

6) Уравнение, определяющее *точку*,

$$x^2+y^2=0.$$

Остановимся вкратце на перечисленных кривых.

Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\geqslant b>0). \qquad (2)$$

При $a=b$ эллипс (2) обращается в окружность радиуса a с центром в начале координат, т. е. геометрическое место точек, отстоящих от начала на расстоянии a.

Пусть $a>b$. Положим $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Отметим на оси x точки F_1, F_2, имеющие абсциссы $x=-c$ и $x=c$. Это *фокусы эллипса*. Эллипс (2) можно определить как геометрическое место точек, сумма расстояний которых до фокусов F_1, F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

В самом деле (рис. 37),

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$2a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

откуда

$$2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и

$$4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=(x-c)^2+y^2,$$
$$4a^2+4cx=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[x^2+2cx+c^2+y^2\right],$$
$$-b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2,$$
$$a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2,$$

откуда следует уравнение (2). Если проследить эти выкладки в обратном порядке, то получим, что если точка (x, y) удовлетворяет уравнению (2), то сумма ее расстояний до F_1 и F_2 равна $2a$.

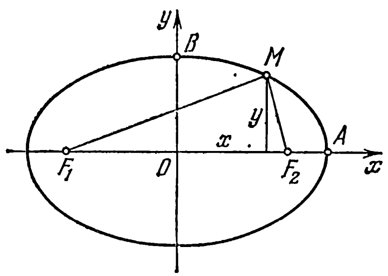

Рис. 37.

Если в уравнении (2) заменить x на $-x$, то оно не изменится — это показывает, что эллипс (2) есть кривая, симметричная относительно оси y. Аналогично эллипс (2) симметричен относительно оси x, потому что его уравнение не изменяется при замене y на $-y$. Но тогда достаточно изучить его уравнение в первой четверти (системы координат), т. е. для $x, y \geqslant 0$. Часть эллипса, находящаяся в первой четверти, определяется уравнением

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (0\leqslant x\leqslant a).$$

Из этого уравнения видим, что наш эллипс проходит через точки $(0, b)$ и $(a, 0)$. При этом его ордината y при непрерывном возрастании x на отрезке $[0, a]$ непрерывно убывает.

Эллипс — ограниченная кривая. Он находится внутри круга радиуса a с центром в начале координат (для координат любой точки эллипса (x, y) имеет место неравенство $x^2+y^2\leqslant a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2$).

Из рис. 37 мы видим, что эллипс есть непрерывная замкнутая кривая. В первой четверти это выпуклая вверх кривая. В любой ее точке можно провести касательную[1]. Все эти свойства и многие другие могут быть с успехом изучены методами математического анализа, который к тому же дает средства для точного определения высказанных выше понятий — непрерывность, выпуклость и т. д.

Уравнение эллипса можно записать еще в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta, \\ y &= b\sin\theta, \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < \theta < \infty). \tag{3}$$

В самом деле

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

т. е. точка (x, y), определяемая равенствами (3) при любом θ принадлежит эллипсу (2). Если θ непрерывно

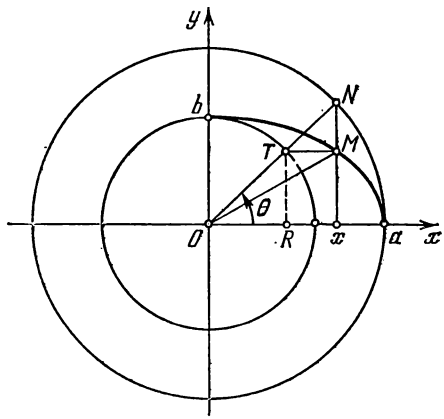

Рис. 38.

пробегает полуинтервал $[0, 2\pi)$, то точка (x, y) описывает полный эллипс. При дальнейшем возрастании θ движение периодически повторяется.

Выясним смысл параметра θ и попутно укажем способ построения эллипса (рис. 38). Проведем две концентрических окружности радиусов b и a $(b < a)$ с центром в точке O. Затем проведем ради-

[1] См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 4.2.

ус-вектор под углом θ к оси x и обозначим его точки пересечения с окружностями радиуса b и a соответственно T и N. Из точки N проведем прямую, параллельную оси y, а из точки T — прямую, параллельную оси x. Точка пересечения этих прямых M принадлежит эллипсу. В самом деле, пусть x — абсцисса точки M, а y — ордината этой точки. Тогда (см. рис. 38)

$$x = ON \cdot \cos\theta = a\cos\theta,$$
$$y = TR = OT \cdot \sin\theta = b\sin\theta,$$

т. е. точка M действительно находится на эллипсе (3) и параметр θ есть угол между осью x и лучом ON. Отметим, что θ не является полярным углом φ, который образует радиус-вектор OM с осью x $\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right)$. Например, если $\varphi = \pi/4$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, то $\theta = \pi/3$; если $\varphi = 0$, то $\theta = 0$; если $\varphi = \pi/2$, то $\theta = \pi/2$.

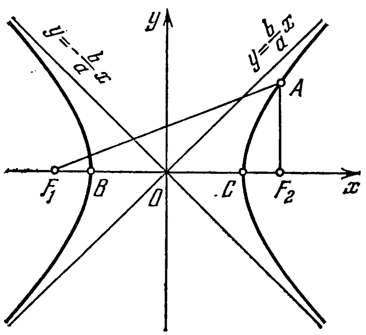

Рис. 39.

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < a, b). \tag{4}$$

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и отметим на оси x точки F_1 и F_2 — *фокусы гиперболы* (4), имеющие абсциссы $x = -c$ и $x = c$ (рис. 39).

Гипербола (4) может быть определена также как геометрическое место точек $A = (x, y)$, разность расстояний которых до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Имеем (см. рис. 39)

$$AF_1 - AF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a,$$
$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

откуда следует уравнение (4).

Мы получили правую ветвь гиперболы (см. рис. 39). Чтобы получить левую ветвь, надо исходить из равенства

$$AF_2 - AF_1 = 2a.$$

Рассуждениями, проведенными в обратном порядке, можно заключить, отправляясь от уравнения (4), что точки (x, y), ему удовлетворяющие, принадлежат к указанному выше геометрическому месту.

По виду уравнения (4) заключаем, что гипербола (4) симметрична относительно оси x и оси y. Часть гиперболы (4), находящаяся в первой четверти, имеет уравнение

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad (a\leqslant x<\infty). \tag{5}$$

Мы видим, что наша гипербола проходит через точку $(a, 0)$ и при возрастании x на полуинтервале $[a, \infty)$ ордината y возрастает и стремится к бесконечности. Точки $B=(-a, 0)$ и $C=(a, 0)$, в которых гипербола пересекает ось x, называются *вершинами гиперболы*.

На рис. 39 нарисованы две прямые:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Это *асимптоты* нашей гиперболы.

Пусть на полуинтервале $[a, \infty)$ (или $(-\infty, a]$) задана кривая $y=f(x)$. Говорят, что прямая $y=mx+n$ есть *асимптота* этой кривой при $x\to+\infty$ ($y\to-\infty$), если

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-n]=0$$

(соответственно $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx-n]=0$).

Рассмотрим кусок нашей гиперболы, определяемый равенством (5), и сравним его с прямой $y=\frac{b}{a}x$. Предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{bx}{a}-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Это показывает, что прямая $y=\frac{b}{a}x$ есть асимптота рассматриваемого куска гиперболы при $x\to+\infty$. Но тогда говорят, что прямая $y=\frac{b}{a}x$ есть асимптота (всей!) гиперболы при $x\to+\infty$. В силу симметрии нашей гиперболы относительно осей, так же как симметрии пары прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$ относительно осей, можно сказать, что обе эти прямые являются асимптотами нашей гиперболы и притом как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

Правая ветвь гиперболы (4) может быть записана в параметрическом виде

$$\left.\begin{aligned} x&=a\operatorname{ch}u=\frac{a}{2}(e^u+e^{-u}),\\ y&=b\operatorname{sh}u=\frac{b}{2}(e^u-e^{-u}),\end{aligned}\right\}\quad(-\infty<u<\infty). \tag{6}$$

В самом деле, так как

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1, \tag{7}$$

то из уравнений (6) получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1.$$

Верхняя половина правой ветви гиперболы соответствует изменению $u \in [0, \infty)$, а нижняя—изменению $u \in (-\infty, 0]$.

Выясним, как параметр u связан с параметром θ в параметрическом уравнении эллипса, и попутно укажем способ построения гиперболы с помощью циркуля и линейки. Так как наш способ построения гиперболы будет основан на способе построения эллипса, то мы изложим эти два способа построения совместно (рис. 40).

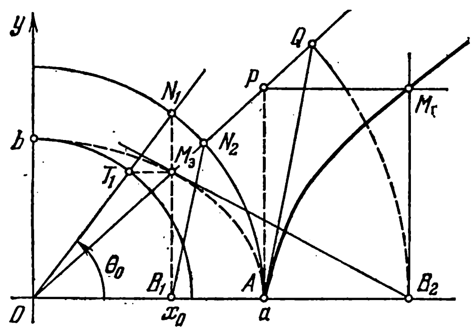

Рис. 40.

Ограничимся построением частей эллипса (2) и гиперболы (6), находящихся в первой четверти. Проведем две концентрические окружности радиуса a и b с центром в начале координат. Проведем луч, выходящий из начала координат под углом θ_0 к оси x. Пусть T_1 и N_1—точки пересечения этого луча с указанными окружностями ($OT_1 = b$, $ON_1 = a$). Проводя из точек T_1 и N_1 прямые, параллельные осям x и y соответственно, получим точку их пересечения $M_э = (x_0, y_0)$, принадлежащую эллипсу (2). Затем проводим луч $OM_э$. Пусть N_2—точка пересечения этого луча с окружностью радиуса a; P—точка пересечения этого луча с прямой, параллельной оси y и проходящей через точку эллипса $A = (a, 0)$. Уравнение луча OP можно записать:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Отсюда следует, что ордината точки P равна $Y_0 = \frac{a y_0}{x_0}$. Далее соединим точку $B_1 = (x_0, 0)$ с точкой N_2 и из точки A проведем прямую, параллельную $B_1 N_2$, которая пересечет луч OP в точке Q.

Из подобия треугольников OAQ и OB_1N_2 получим, что $OQ=a^2/x_0$. Радиусом OQ на оси x отмечаем точку $B_2=(a^2/x_0, 0)$.

Теперь из точек B_2 и P проводим прямые, параллельные осям y и x соответственно. Точка пересечения этих прямых $M_г=(X_0, Y_0)$, где $X_0=a^2/x_0$ принадлежит гиперболе (4).

В самом деле, так как точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе (2), то

$$\frac{X_0^2}{a^2}-\frac{Y_0^2}{b^2}=\frac{a^4}{a^2x_0^2}-\frac{a^2y_0^2}{x_0^2b^2}=\frac{a^2}{x_0^2}\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\frac{a^2}{x_0^2}\cdot\frac{x_0^2}{a^2}=1,$$

т. е. точка $M_г$ принадлежит гиперболе (4).

Отметим, что точка $B_2=(a^2/x_0, 0)$ является точкой пересечения касательной к эллипсу в точке $M_э$ с осью x (см. сноску на стр. 139).

Таким образом, каждой точке (x, y) эллипса (2) соответствует вполне определенная точка (X, Y) гиперболы (4) и обратно.

Теперь, если эллипс (2) задан параметрически, то

$$x=a\cos\theta, \qquad y=b\sin\theta.$$

Поэтому

$$X=\frac{a^2}{x}=\frac{a}{\cos\theta}, \qquad Y=\frac{ay}{x}=b\operatorname{tg}\theta.$$

Отсюда, учитывая (6), получаем

$$\operatorname{ch}u=\frac{1}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{sh}u=\operatorname{tg}\theta.$$

Имеют место также следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}u-1}{\operatorname{ch}u+1}}=\operatorname{tg}\frac{u}{2};$$

$$e^u=\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}u=\frac{1}{\cos\theta}+\operatorname{tg}\theta=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

т. е.

$$u=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

Парабола

$$y^2=2px \qquad (p>0). \tag{8}$$

Отметим на оси x точку F с абсциссой $x=p/2$, называемую *фокусом параболы* (8), и проведем прямую $x=-p/2$, называемую *директрисой параболы* (8) (рис. 41).

Парабола (8) может быть еще определена как геометрическое место точек $A=(x, y)$, равноудаленных от фокуса и директрисы. В самом деле (см. рис. 41)

$$AF^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,$$

$$AB^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

следовательно,

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$-px+y^2=px,$$

т. е.

$$y^2=2px.$$

Обратно, из этого уравнения следует, что точки, ему удовлетворяющие, принадлежат к указанному геометрическому месту точек.

Из уравнения (8) видно, что парабола (8) симметрична относительно оси x. Ее верхняя половина имеет уравнение

$$y=\sqrt{2px} \quad (0\leqslant x<\infty), \quad (9)$$

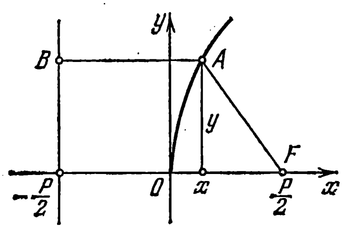

Рис. 41.

из которого видно, что когда x пробегает полуинтервал $[0, \infty)$ возрастая, ордината y возрастает от 0 до ∞.

Укажем простой способ построения параболы (9) с помощью линейки и прямого угла или с помощью циркуля и линейки. Проведем прямую $x=-2p$ (рис. 42). Возьмем на этой прямой произвольную точку $K=(-2p, y)$, $y>0$. Соединим эту точку с началом координат и проведем прямую, проходящую через начало координат, перпендикулярную к прямой OK. Далее проводим прямую через точку K параллельно оси x. Последние две прямые пересекаются в точке $M=(x, y)$, которая принадлежит параболе (9), так как $OA=y$ есть среднее геометрическое чисел $2p$ и x $(y=\sqrt{2px})$.

Парабола (8) не имеет асимптот[1]).

Пара пересекающихся прямых

$$a^2x^2-b^2y^2=(ax-by)(ax+by)=0 \qquad (0<a,\ b). \quad (10)$$

---

[1]) См. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 4.20.

Если какая-либо точка (x, y) удовлетворяет уравнению (10), то она удовлетворяет одному из уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax-by=0,\\ ax+by=0 \end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

или обоим. Обратно, если точка (x, y) удовлетворяет

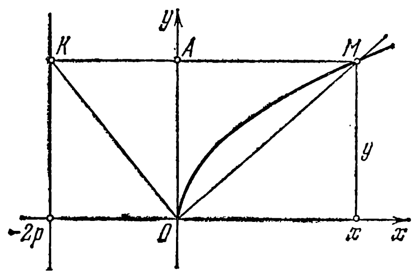

Рис. 42.

одному из уравнений (10′), то она удовлетворяет и уравнению (10). В этом смысле говорят, что (10) есть уравнение пары прямых.

24.3. Классификация кривых второго порядка.

Ниже будет доказано, что существует прямоугольная система координат такая, что в ней кривая (1), если она не мнимая, имеет одно из перечисленных выше уравнений 1)—6).

Более детально:

при $AC-B^2>0$ кривая (1) есть эллипс, точка (случаи 1), 6)) или мнимая кривая;

при $AC-B^2<0$ кривая (1) есть гипербола или пара пересекающихся (разных) прямых (случаи 2), 4));

при $AC-B^2=0$ кривая (1) есть парабола, пара параллельных или совпадающих прямых или мнимая кривая (случаи 3), 5)).

Мы позволяем себе говорить «кривая» даже и в случаях 4), 5), 6), когда речь идет о паре прямых или множестве, состоящем из одной точки.

Итак, пусть задано уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Не нарушая общности, можно считать, что $A \geqslant 0$, $A \geqslant C$, $B \geqslant 0$. К этой ситуации всегда можно прийти с помощью ортогональных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x&=\eta,\\ y&=\xi, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=-\xi,\\ y&=\eta \end{aligned}\right\}$$

и умножения левой и правой частей (1) на -1.

Если $B=0$, $A \geqslant C > 0$, то (1) можно записать в виде

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2+F-\frac{E^2}{C}-\frac{D^2}{A}=0. \quad (11)$$

Параллельный перенос

$$\xi=x+\frac{D}{A}, \qquad \eta=y+\frac{E}{C}$$

преобразует уравнение (11) следующим образом:

$$A\xi^2+C\eta^2=\frac{E^2}{C}+\frac{D^2}{A}-F. \quad (11')$$

Если число $\frac{E^2}{C}+\frac{D^2}{A}-F > 0$, то уравнение (11′) представляет собой уравнение эллипса (случай 1)) с полуосями a, b, где

$$a^2=\left(\frac{E^2}{C}+\frac{D^2}{A}-F\right)/A, \qquad b^2=\left(\frac{E^2}{C}+\frac{D^2}{A}-F\right)/C.$$

Отметим, что в данном случае $AC-B^2=AC>0$.

Если же правая часть уравнения (11′) равна нулю, то мы получаем точку (случай 6)).

При отрицательной правой части уравнение (11′) дает мнимую кривую.

Если число $C=0$, $A>0$, то (1) можно записать в виде

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+2Ey+F-\frac{D^2}{A}=0. \quad (12)$$

Пусть число $E \neq 0$, тогда параллельный перенос

$$\xi=x+\frac{D}{A}, \qquad \eta=y+\frac{F}{2E}-\frac{D^2}{2AE}$$

преобразует уравнение (12) в уравнение

$$A\xi^2+2E\eta=0, \quad (12')$$

которое (после замены, если нужно, η на $-\eta$) представляет собой уравнение параболы (случай 3)).

Если $E=0$, то в зависимости от знака числа $\frac{D^2}{A}-F$, мы получим пару параллельных прямых или мнимую кривую. Отметим, что здесь $AC-B^2=0$.

Далее, если число $C<0$, $A>0$, то уравнение (1) можно записать:

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2-|C|\left(y-\frac{E}{|C|}\right)^2+F+\frac{E^2}{|C|}-\frac{D^2}{A}=0,\quad(13)$$

анализ которого проводится так же, как в случае уравнения (11). Уравнение (13) дает гиперболу или пару пересекающихся прямых (случаи 2) и 4)). Отметим, что в данном случае $AC-B^2=AC<0$.

Случай $A=0$, $C<0$ сводится к уравнению типа (12).

Итак, при $B=0$ уравнение (1) всегда дает один из частных случаев 1)—6).

Пусть теперь $B>0$, $A\geqslant C$. Тогда, как мы знаем (см. § 23), существует ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\xi-y_1\eta,\\ y&=y_1\xi+x_1\eta,\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

где

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{A-C}{2\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}},$$

$$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{A-C}{2\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}},$$

которое приводит квадратичную форму

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

к каноническому виду.

Преобразуем уравнение (1) с помощью (14):

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+D(x_1\xi-y_1\eta)+E(y_1\xi+x_1\eta)+F=0,\quad(15)$$

где

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[A+C+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right],$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[A+C-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right]$$

($\lambda_1>\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2=AC-B^2$). Перепишем уравнение (15) в виде

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+(x_1D+y_1E)\xi+(x_1E-y_1D)\eta+F=0.\quad(15')$$

Уравнение (15′) является частным случаем уравнения (1) при $B=0$, которое мы уже исследовали.

Таким образом, мы можем сказать, что если:

1) $AC-B^2=\lambda_1\lambda_2>0$, то уравнение (1) представляет собой эллипс, точку или мнимую кривую. В этом случае будем говорить, что уравнение (1) принадлежит *эллиптическому типу*;

2) $AC-B^2=\lambda_1\lambda_2<0$, то уравнение (1) представляет собой гиперболу или пару пересекающихся прямых. В этом случае будем говорить, что уравнение (1) принадлежит *гиперболическому типу*;

3) $AC-B^2=\lambda_1\lambda_2=0$, то уравнение (1) изображает параболу, пару параллельных прямых или мнимую кривую. В этом случае будем говорить, что уравнение (1) принадлежит *параболическому типу*.

Пример 1. Выяснить характер кривой

$$2x^2+\sqrt{3}\,xy+y^2+2x+2\sqrt{3}\,y+F=0,$$

где F — произвольное действительное число.

В данном случае $A=2>C=1$, $B=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, $AC-B^2=\frac{5}{4}>0$, т. е. уравнение принадлежит эллиптическому типу. Легко подсчитать (см. пример в § 23), что

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_1=\frac{5}{2},\quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Поэтому с помощью ортогонального преобразования

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\xi-\eta),$$
$$y=\frac{1}{2}(\xi+\sqrt{3}\,\eta)$$

наше уравнение запишется

$$\frac{5}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2+(\sqrt{3}\,\xi-\eta)+\sqrt{3}(\xi+\sqrt{3}\,\eta)+F=0$$

или

$$\frac{5}{2}\left(\xi+\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{2}(\eta+2)^2=\frac{16}{5}-F.$$

Осуществим еще параллельный перенос

$$u=\xi+\frac{2}{5}\sqrt{3},$$
$$v=\eta+2,$$

тогда будем иметь

$$\frac{5}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=\frac{16}{5}-F. \tag{16}$$

Если $\frac{16}{5}-F>0$, то (16) будет уравнением эллипса с полуосями a, b, где

$$a^2=2(16-5F)/25, \quad b^2=2(16-5F)/5.$$

Если $\frac{16}{5}-F=0$, то (16) дает точку. Если $\frac{16}{5}-F<0$, то (16) представляет мнимую кривую.

§ 25. Поверхность второго порядка в трехмерном пространстве

Уравнение

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}\,x_k x_l+2\sum_{l=1}^{3} A_l x_l+B=0, \tag{1}$$

где $a_{kl}=a_{lk}$, A_l, B — заданные постоянные числа, а $x=(x_1, x_2, x_3)$ — переменная точка в R_3, определяет, вообще говоря, некоторое множество точек в R_3, называемое *поверхностью второго порядка*. Если уравнение (1) не удовлетворяется ни одной действительной точкой $x=(x_1, x_2, x_3)$, то говорят, что оно определяет *мнимую поверхность*. Нас эти случаи не будут интересовать. В некоторых случаях уравнение (1) может определять пару различных или совпадающих плоскостей или одну-единственную точку. Но и такие множества мы будем называть поверхностями.

Перечислим важнейшие частные случаи уравнения (1):

1) *Эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c>0).$$

2) *Однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c>0).$$

3) *Двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c>0).$$

4) *Эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p, q>0).$$

5) *Гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p,\ q>0).$$

6) *Конус второго порядка*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (a,\ b,\ c>0).$$

7) *Точка*

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

8) *Цилиндры второго порядка:*
цилиндр эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,\ b>0),$$

цилиндр гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,\ b>0),$$

цилиндр параболический

$$y^2=2px \qquad (p>0),$$

пара пересекающихся плоскостей

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \qquad (a,\ b>0),$$

пара параллельных или совпадающих плоскостей

$$x^2-a^2=0 \qquad (a>0),$$
$$z^2=0,$$

прямая

$$x^2+y^2=0.$$

При рассмотрении частных случаев уравнения (1) мы считали, что $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$.

Можно доказать, что для каждого частного уравнения (1), если оно не определяет мнимую поверхность, можно найти прямоугольную систему координат, в которой это уравнение имеет один из перечисленных выше восьми видов. Это следует из общей теории § 22. Само преобразование уравнения (1) производится так же, как в § 24. Нахождение собственных значений λ_1, λ_2, λ_3 сводится к решению кубического уравнения.

Укажем еще один путь нахождения собственных чисел и собственных векторов, который мы по сути дела уже рассмотрели в § 23 в двумерном случае. Собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 самосопряженного оператора A и принадлежащие им нормированные векторы $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$ ($|\boldsymbol{x}^j|=1$, $A\boldsymbol{x}^j=\lambda_j\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, 3$) можно находить следующим образом (обоснование см. ниже). Вводим определитель ($a_{kl}=a_{lk}$):

$$D(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

где E — единичная матрица. Находим корни λ_1, λ_2, λ_3 уравнения

$$|A-\lambda E|=0, \tag{2}$$

которое называется *характеристическим уравнением* оператора A ($D(\lambda_j)=0$, $j=1, 2, 3$). Это и есть собственные числа оператора A. Они действительные, причем они могут быть разными, но могут и совпадать — быть кратными. Таким образом,

$$D(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda).$$

Затем для корня λ_1 ищем нетривиальное решение $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ однородной системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_1)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0, \\ a_{12}x_1+(a_{22}-\lambda_1)x_2+a_{23}x_3&=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda_1)x_3&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или соответствующего уравнения для оператора $A-\lambda_1E$:

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}=0, \tag{3'}$$

где E — единичная матрица и векторы $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $0=(0, 0, 0)$.

Если λ_1 — простой корень (т. е. в данном случае λ_1 отлично от λ_2 и от λ_3), то ранг матрицы системы (3) необходимо будет равен двум (ранг $(A-\lambda_1E)=2$), и мы получим единственный, с точностью до знака, вектор $\boldsymbol{x}^1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, удовлетворяющий системе (3), т. е.

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}^1=0$$

или

$$A\boldsymbol{x}^1=\lambda_1\boldsymbol{x}^1.$$

Если λ_1 — корень второй кратности ($\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$), то система (3) необходимо имеет ранг, равный единице (ранг $(A-\lambda_1E)=1$), и будет иметь два ортонормированных решения x^1 и x^2 ($|x^1|=|x^2|=1$, $(x^1, x^2)=0$), которые являются собственными векторами, принадлежащими собственному значению λ_1:

$$Ax^j=\lambda_j x^j \qquad (j=1,\ 2,\ \lambda_1=\lambda_2).$$

Наконец, если λ_1—корень третьей кратности ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$), то система (3) необходимо имеет ранг, равный нулю (ранг $(A-\lambda_1 E)=0$), и будет иметь три ортонормированных решения x^1, x^2, x^3:

$$Ax^j=\lambda_j x^j \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3).$$

Любые три ортонормированных вектора в R_3 могут быть взяты в качестве собственных векторов x^1, x^2, x^3, принадлежащих собственным числам $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

Обоснуем сказанное. Мы знаем, что в R_3 существует система ортонормированных векторов x^1, x^2, x^3 и действительные числа λ_1, λ_2, λ_3 такие, что

$$Ax^j=\lambda_j x^j \qquad (j=1,\ 2,\ 3).$$

При этом можно указать ортогональную матрицу Λ такую, что (см. § 22)

$$\Lambda A\Lambda^{-1}=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{Vmatrix}.$$

Отсюда для переменного числа λ имеет место тождество

$$\Lambda(A-\lambda E)\Lambda^{-1}=\begin{Vmatrix}\lambda_1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda\end{Vmatrix} \tag{4}$$

$$(\Lambda(A-\lambda E)\Lambda^{-1}=\Lambda A\Lambda^{-1}-\Lambda\lambda E\Lambda^{-1}=$$
$$=\Lambda A\Lambda^{-1}-\lambda\Lambda\Lambda^{-1}=\Lambda A\Lambda^{-1}-\lambda E).$$

Определитель матрицы $A-\lambda E$ мы обозначили выше через $D(\lambda)$. Он, как это видно из (4), равен определителю матрицы, стоящей в правой части (4), так как

$$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)=|\Lambda(A-\lambda E)\Lambda^{-1}|=$$
$$=|\Lambda|\,|A-\lambda E|\,|\Lambda^{-1}|=|A-\lambda E|=D(\lambda).$$

Таким образом,

$$D(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda).$$

Мы получили, что корни многочлена $D(\lambda)$ совпадают с собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3 оператора A. Они, таким образом, *действительны*.

Пусть λ_1 — простой корень и, следовательно, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_3$. Тогда матрица справа в (4) при $\lambda = \lambda_1$ имеет ранг, равный двум (ранг $\Lambda(A-\lambda_1 E)\Lambda^{-1} = 2$), но тогда ранг $(A-\lambda_1 E) = 2$. Ведь решения однородной системы (3) и системы

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot z_1 + 0\cdot z_2 + 0\cdot z_3 = 0, \\ 0\cdot z_1 + (\lambda_2-\lambda_1)\, z_2 + 0\cdot z_3 = 0, \\ 0\cdot z_1 + 0\cdot z_2 + (\lambda_3-\lambda_1)\, z_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

соответствующей матрице (4), преобразуются друг в друга при помощи ортогональной матрицы (системы (3) и (5) эквивалентны). Система же (5) имеет только одно (с точностью до знака) нормированное решение $(\pm 1, 0, 0)$. Но это возможно, лишь если ранг $(A-\lambda_1 E) = 2$.

Можно дать и такое объяснение этого факта. Если предположить, что все определители второго порядка, порожденные матрицей $A-\lambda_1 E$, равны нулю, то тогда и все определители второго порядка, порожденные матрицей $\Lambda(A-\lambda_1 E)\Lambda^{-1}$, также будут равны нулю, так как эти определители являются линейными комбинациями определителей второго порядка из матрицы $A-\lambda_1 E$. Но этого не может быть, ибо определитель, порожденный матрицей $\Lambda(A-\lambda_1 E)\Lambda^{-1}$,

$$\begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если теперь $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то, рассуждая аналогично, получим, что ранг $(A-\lambda_1 E) = 1$, и тогда существует в точности два ортонормированных решения $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ системы (3), соответствующих $\lambda_1 = \lambda_2$.

Наконец, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ будет ранг $(A-\lambda_1 E) = 0$, т. е. все элементы матрицы $A-\lambda_1 E$ равны нулю. В этом случае любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ является решением системы (3). Это приводит к тому, что любые три вектора $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$, образующие ортонормированную систему, будут собственными векторами, принадлежащими собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Заметим, что в этой ситуации квадратичная форма уже приведена к сумме квадратов ($a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda_1$).

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

Здесь $a_{11}=a_{22}=a_{12}=a_{13}=a_{23}=1$, $a_{33}=0$. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$-\lambda(1-\lambda)^2+2-2(1-\lambda)+\lambda=0, \quad -\lambda(1-\lambda)^2+3\lambda=0.$$

Легко видеть, что $\lambda=0$ является корнем этого уравнения. Найдем два других корня:

$$3-(1-\lambda)^2=0, \quad (1-\lambda)^2=3, \quad 1-\lambda=\pm\sqrt{3}, \ \lambda=1\pm\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$\lambda_1=1+\sqrt{3}, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_3=1-\sqrt{3},$$

т. е. мы получили случай: $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$.

Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^1$. Для этого составим систему (3):

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{3}x_1+x_2+x_3&=0, \\ x_1-\sqrt{3}x_2+x_3&=0, \\ x_1+x_2-(1+\sqrt{3})x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Любые два уравнения этой системы линейно независимы. Решая систему из двух первых уравнений, получаем

$$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x_3, \quad x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x_3.$$

Таким образом, вектор

$$\boldsymbol{y}^1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x_3, \ \frac{1+\sqrt{3}}{2}x_3, \ x_3\right)$$

является решением системы и, нормируя его, получим собственный вектор

$$\boldsymbol{x}^1=\frac{\boldsymbol{y}^1}{|\boldsymbol{y}^1|}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\right).$$

Найдем x^2 $(\lambda_2=0)$:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+\quad x_3&=0,\\ x_1+x_2+\quad x_3&=0,\\ x_1+x_2+0\cdot x_3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая систему из двух последних уравнений (так как определитель из коэффициентов при x_2 и x_3 не равен нулю), получим $x_2=-x_1$, $x_3=0$.

Вектор $y^2=(x_1, -x_1, 0)$ является решением системы, а вектор

$$x^2=\frac{y^2}{|y^2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

— собственный единичный вектор. Легко видеть, что он ортогонален x^1 (скалярное произведение этих векторов равно нулю). Наконец, при $\lambda_3=1-\sqrt{3}$ находим, что

$$x^3=\left(\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}},\ \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}},\ -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\right)$$

— третий собственный вектор.

Ортогональная матрица перехода от координат вектора $x=(x_1, x_2, x_3)$ в системе (i, j, k) к координатам вектора $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в системе (x^1, x^2, x^3) имеет вид (см. § 17, (15))

$$\Lambda=\begin{Vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)}\\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)}\\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)}\end{Vmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1^{(1)}\xi_1+x_1^{(2)}\xi_2+x_1^{(3)}\xi_3,\\ x_2&=x_2^{(1)}\xi_1+x_2^{(2)}\xi_2+x_2^{(3)}\xi_3,\\ x_3&=x_3^{(1)}\xi_1+x_3^{(2)}\xi_2+x_3^{(3)}\xi_3.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Данное преобразование сохраняет ориентацию (так как $|\Lambda|=1>0$), т. е. система (x^1, x^2, x^3) ориентирована так же, как исходная система (i, j, k).

Подставляя в нашу квадратичную форму вместо x_ν их значения по формулам (6), получим ее канонический вид

$$(1+\sqrt{3})\xi_1^2+(1-\sqrt{3})\xi_3^2.$$

Остановимся теперь лишь на более подробном изучении уравнений и описываемых ими поверхностей, указанных выше восьми типов.

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0). \tag{7}$$

При $a=b=c$ эллипсоид (7) обращается в сферу радиуса a с центром в начале координат, т. е. геометрическое место точек, отстоящих от начала на расстоянии a.

Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*

Если в уравнении (7) заменить (одновременно или порознь) x на $-x$, y на $-y$, z на $-z$, то оно не изменится,— это показывает, что эллипсоид (7) есть поверхность, симметричная относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и начала координат. Поэтому достаточно изучить уравнение эллипсоида (7) в первом октанте (системы координат), т. е. для $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Часть эллипсоида, находящаяся в первом октанте, определяется явным уравнением, например

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

Для определенности будем считать, что $a\geqslant b\geqslant c$. Эллипсоид есть ограниченная поверхность. Он находится внутри шара радиуса a с центром в начале координат: для координат любой точки эллипсоида $(x,\ y,\ z)$ имеет место неравенство

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=a^2\cdot 1=a^2.$$

Чтобы составить более точное представление об эллипсоиде, произведем сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, пересекая эллипсоид плоскостями $z=h$ $(-c\leqslant h\leqslant c)$, получим в сечении эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Отсюда видно, что самый большой эллипс получается в сечении эллипсоида плоскостью $z=0$. Аналогичная картина будет при сечении плоскостями $x=h$ $(-a\leqslant h\leqslant a)$, $y=h$ $(-b\leqslant h\leqslant b)$.

Эллипсоид (7) имеет вид, изображенный на рис. 43.

Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ лежат на эллипсоиде (7) и называются его *вершинами*.

Если какие-либо две полуоси равны между собой, то эллипсоид (7) будет *эллипсоидом вращения*, т. е. получается от вращения эллипса относительно соответствующей оси координат.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a,\ b,\ c>0). \tag{8}$$

По виду уравнения (8) заключаем, что однополостный гиперболоид является поверхностью, симметричной относительно координатных плоскостей и начала координат. Числа a, b, c называются *полуосями однополостного гиперболоида*. Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, лежащие на поверхности (8), называются *вершинами* однополостного гиперболоида.

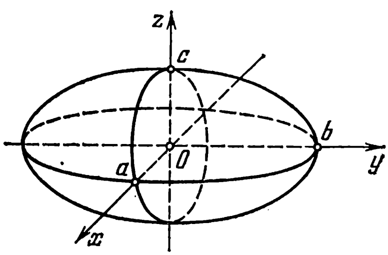

Рис. 43.

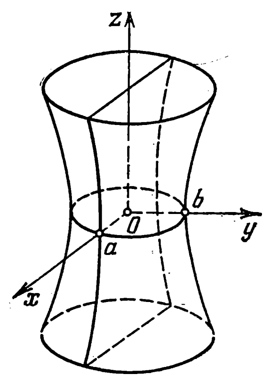

Рис. 44.

Пересечем поверхность (8) плоскостью $z=h$, тогда в сечении получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ этот эллипс описывает поверхность (8).

Если теперь пересечь поверхность (8) плоскостью $x=h$ (или $y=h$), то получим в сечении гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\right).$$

При $h = \pm a$ первая гипербола распадается на две прямые $y = \pm \frac{b}{c} z$.

Если $|h| \leqslant a$, то действительной осью симметрии соответствующей гиперболы является прямая, параллельная оси Oy, а при $|h| > a$ — прямая, параллельная оси Oz.

Действительной осью симметрии гиперболы мы называем ту из осей симметрии, которую гипербола пересекает.

Если $a = b$, то поверхность (8) в сечении плоскостями $z = h$ будет иметь окружности радиуса $a\sqrt{1 + (h^2/c^2)}$. Поверхность (8) в этом случае образуется от вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ около оси Oz. Общий вид однополостного гиперболоида изображен на рис. 44.

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a,\ b,\ c > 0). \tag{9}$$

Так как уравнение (9) содержит только квадраты переменных, то данная поверхность симметрична относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и начала координат.

Уравнение (9) запишем еще в виде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + \frac{x^2}{a^2}. \tag{9'}$$

Отсюда ясно, что, пересекая поверхность (9′) плоскостью $x = h$ ($|h| \geqslant a$), получим в сечении эллипс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + \frac{h^2}{a^2}$$

с полуосями

$$b\sqrt{(h^2/a^2) - 1}, \quad c\sqrt{(h^2/a^2) - 1}.$$

При $|h| < a$ число $(h^2/a^2) - 1 < 0$, и поэтому нет точек пересечения поверхности (9′) и плоскости $x = h$.

При сечении поверхности (9) плоскостями $z = h$ ($y = h$) получим гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}\right).$$

Точки $(\pm a,\ 0,\ 0)$ лежат на поверхности (9) и называются *вершинами двуполостного гиперболоида*. Поверхность (9) изображена на рис. 45.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p,\ q>0). \tag{10}$$

Так как в (10) присутствуют квадраты переменных x и y, то данная поверхность симметрична относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$. Далее, так как мы считаем $p,\ q>0$, то поверхность (10) расположена в полупространстве $z \geqslant 0$.

Пересекая поверхность (10) плоскостями $z=h$ ($h \geqslant 0$), в сечении будем получать эллипсы

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h$$

с полуосями

$$\sqrt{2ph}, \quad \sqrt{2qh}.$$

При изменении h от нуля до ∞ данные эллипсы описывают нашу поверхность (10).

Пересекая поверхность (10) плоскостями $x=h$ (или $y=h$), мы получим в сечении параболы

$$y^2=2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right) \quad \left(x^2=2p\left(z-\frac{h^2}{2q}\right)\right)$$

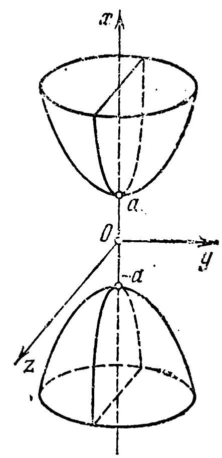

Рис. 45.

со смещенной вершиной в точке $z=\frac{h^2}{2p}$ $\left(z=\frac{h^2}{2q}\right)$.

При $p=q$ поверхность (10) будет поверхностью вращения, получающейся от вращения параболы $x^2=2pz$ около оси Oz. В этом случае поверхность (10) называют *параболоидом вращения*.

Точка $(0,0,0)$ лежит на поверхности (10) и называется *вершиной эллиптического параболоида*. Эллиптический параболоид изображен на рис. 46.

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p,\ q>0). \tag{11}$$

По виду уравнения (11) заключаем, что данная поверхность симметрична относительно плоскостей $x=0$, $y=0$. Пересекая поверхность (11) плоскостями $z=h$, мы будем получать в сечении гиперболы

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h,$$

причем при $h>0$ действительная ось симметрии гиперболы будет параллельной оси Ox, а при $h<0$ — оси Oy. При $h=0$ в сечении будут две пересекающиеся прямые.

При сечении поверхности (11) плоскостями $x=h$ или $y=h$, получим параболы, направленные ветвями вниз или вверх:

$$-\frac{y^2}{q}=2z-\frac{h^2}{p},\quad \frac{x^2}{p}=2z+\frac{h^2}{q}.$$

Поверхность (11) изображена на рис. 47.

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,\ b,\ c>0). \tag{12}$$

Ясно, что данная поверхность симметрична относительно плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и начала координат.

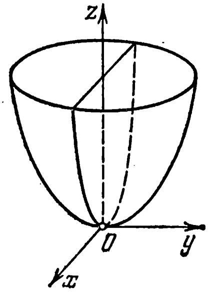

Рис. 46.

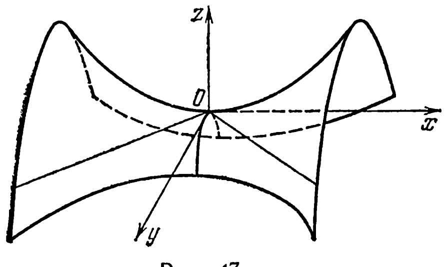

Рис. 47.

При сечении поверхности (12) плоскостями $z=h$ будем получать эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями $a|h|/c$ и $b|h|/c$.

Если же пересекать поверхность (12) плоскостями $x=h$ или $y=h$, то в сечении получим гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}\quad\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}\right).$$

Если теперь пересекать (12) плоскостями $y=hx$, то в сечении получим пару пересекающихся прямых

$$z=\pm cx\sqrt{(1/a^2)+(h^2/b^2)}.$$

Вид конуса изображен на рис. 48.

Точка

$$x^2+y^2+z^2=0. \qquad (13)$$

Уравнению (13) удовлетворяет только одна точка $x=y=z=0$.

Цилиндры второго порядка.

а) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,\ b>0). \qquad (14)$$

Уравнение (14) не содержит переменной z. На плоскости xOy уравнение (14) определяет эллипс с полуосями a и b. Если точка $(x,\ y)$ лежит на этом эллипсе, то при любом z точка $(x,\ y,\ z)$ лежит на поверхности (14). Совокупность таких точек есть поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz и пересекающей эллипс

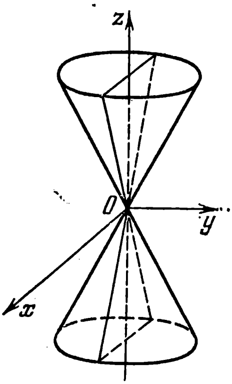

Рис. 48.

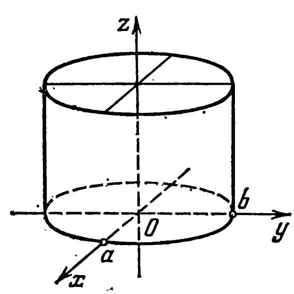

Рис. 49.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в плоскости xOy.

Эллипс (14) называют *направляющей линией* данной поверхности, а все возможные положения указанной движущейся прямой — *образующими*.

Вообще поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторому заданному направлению и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической*. Поверхность (14) изображена на рис. 49.

б) Гиперболический и параболический цилиндры

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,\ b>0), \tag{15}$$

$$y^2=2px \qquad (p>0). \tag{16}$$

В данном случае направляющими линиями поверхностей являются гипербола и парабола, а образующими — прямые, параллельные оси Oz и проходящие через гиперболу или

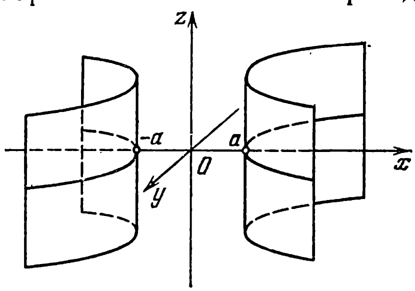

Рис. 50.

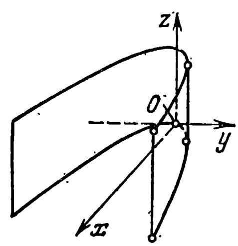

Рис. 51.

параболу в плоскости xOy. Поверхности (15) и (16) изображены на рис. 50 и 51.

в) Параллельные и пересекающиеся плоскости. Прямая.

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \qquad (a,\ b>0), \tag{17}$$

$$x^2-a^2=0 \qquad (a>0), \tag{18}$$

$$z^2=0, \tag{19}$$

$$x^2+y^2=0. \tag{20}$$

Для поверхности (17) направляющими являются прямые линии

$$y=\pm\frac{a}{b}x.$$

Поэтому поверхность (17) есть пара пересекающихся плоскостей. В уравнении поверхностей (18) и (19) отсутствуют по две координаты. Уравнение (18) в плоскости xOy есть пара прямых $x=\pm a$.

Если мы будем брать $x=\pm a$ и любые y и z, то точки $(\pm a,\ y,\ z)$ будут удовлетворять уравнению (18), поэтому поверхность (18) есть пара параллельных плоскостей.

Уравнение (19) описывает плоскость xOy, так как этому уравнению удовлетворяют любые точки вида $(x, y, 0)$, все множество которых и составляет плоскость xOy.

Можно также рассматривать $z=0$ как направляющую в какой-либо из плоскостей xOz или yOz, а образующими являются прямые, параллельные оси Oy или оси Ox и проходящие через прямую $z=0$.

Уравнению (20) удовлетворяет любая точка с $x=y=0$ и любым z. Поэтому (20) изображает прямую, а именно, ось Oz.

Линейчатые поверхности.

Некоторые поверхности второго порядка образованы движением прямой. Такими являются все цилиндрические поверхности и конус второго порядка. Однако имеются и другие поверхности, которые также образуются движением прямой.

Поверхность, образованная движением прямой, называется *линейчатой*, а целиком лежащие на ней прямые — *прямолинейными образующими.*

К линейчатым поверхностям относятся однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Уравнение однополостного гиперболоида (8) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или, разлагая левую и правую части на множители, получаем

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{21}$$

Составим систему уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где k — произвольный параметр.

При определенном значении этого параметра k мы получим прямую линию, а при изменении k — *семейство прямых.* Если мы перемножим уравнения (22) почленно, то получим уравнение (21) нашей поверхности. Поэтому любая точка (x, y, z), удовлетворяющая системе (22), находится на поверхности (21). Следовательно, каждая из прямых семейства (22) целиком лежит на поверхности однополостного гиперболоида.

Совершенно аналогично система

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=l\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

где l — параметр, также определяет семейство прямых, отличное от семейства (22), принадлежащее поверхности (21).

Через каждую точку гиперболоида (21) проходит по одной прямой каждого семейства, вообще при различных значениях параметров k и l (рис. 52).

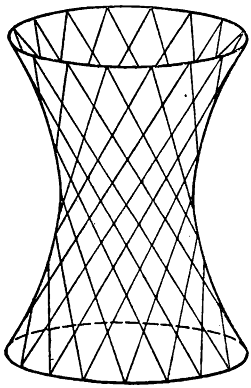

Рис. 52.

Например, через точку $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b, c\right)$ поверхности (21) проходит прямая (22) при $k=(2+\sqrt{6})/(2+\sqrt{2})$ и прямая (23) при $l=(2+\sqrt{6})/(2-\sqrt{2})$.

Отметим, что однополостные гиперболоиды нашли применение в практике строительства. Сооружение различных высотных башен с использованием прямолинейных образующих однополостного гиперболоида сочетает в себе прочность конструкции с простотой ее исполнения. Идея использования однополостного гиперболоида в строительстве принадлежит нашему соотечественнику инженеру В. Г. Шухову (1853—1939). По проекту Шухова построена телевизионная башня на Шаболовке в г. Москве, она состоит из секций однополостных гиперболоидов вращения.

Легко убедиться, что два семейства прямых

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=2kz,\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{k},\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{l},\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=2lz\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

образуют поверхность гиперболического параболоида (11).

Прямые, соответствующие семействам (24) и (25), лежат на этой поверхности и, обратно, любая точка этой поверхности есть пересечение некоторой прямой семейства (24) с некоторой прямой семейства (25).

§ 26. Общая теория поверхности второго порядка в трехмерном пространстве

Пусть задана поверхность второго порядка

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}x_k x_l + 2\sum_{l=1}^{3} A_l x_l + B = 0, \tag{1}$$

где $a_{kl} = a_{lk}, A_l$, B — постоянные числа — коэффициенты уравнения.

В § 25 было перечислено восемь видов 1) — 8) (частных случаев) уравнения (1) и была отмечена возможность доказательства того, что для каждого данного уравнения (1), если оно не определяет мнимую поверхность, можно найти прямоугольную систему координат, в которой это уравнение имеет один из указанных видов.

Ниже дается доказательство этого утверждения.

Мы начинаем с того, что рассматриваем квадратичную форму, фигурирующую в левой части уравнения (1).

На основании теоремы 2 § 22 эту форму можно привести при помощи соответствующего ортогонального преобразования

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} \beta_{is} x'_s \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}x_k x_l = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — определенные действительные числа.

Подчеркнем, что равенства (2) определяют преобразование исходной прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3 к некоторой другой прямоугольной системе x'_1, x'_2, x'_3. Точка, имеющая координаты (x_1, x_2, x_3) в исходной системе, в новой системе имеет координаты (x'_1, x'_2, x'_3), получаемые посредством обращения операции (2).

В новой прямоугольной системе наша поверхность имеет, очевидно, уравнение

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + 2 \sum_{k=1}^{3} A_k' x_k' + B = 0, \tag{3}$$

где A_k' — некоторые постоянные числа.

Рассмотрим сначала случай, когда все три числа λ_1, λ_2, λ_3 отличны от нуля ($\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$).

В этом случае перенесем систему координат x_1', x_2', x_3' так, чтобы ее начальная точка перешла в точку (a_1, a_2, a_3); тогда получим вторую прямоугольную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, где

$$x_i' = a_i + \xi_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

В ней уравнение нашей поверхности имеет вид

$$\lambda_1 (a_1 + \xi_1)^2 + \lambda_2 (a_2 + \xi_2)^2 + \lambda_3 (a_3 + \xi_3)^2 + \\ + 2 \sum_{k=1}^{3} A_k' (a_k + \xi_k) + B = 0$$

или

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + 2 \sum_{l=1}^{3} (a_l \lambda_l + A_l') \xi_l + B_1 = 0,$$

где B_1 — некоторая константа. Если положить

$$a_l = -\frac{A_l'}{\lambda_l} \quad (l = 1, 2, 3),$$

то это уравнение упростится:

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 = -B_1. \tag{4}$$

Предположим, что числа λ_1, λ_2, λ_3 одинакового знака.

Если при этом $B_1 = 0$, то уравнению (4) удовлетворяет *единственная точка*, именно нулевая точка (0, 0, 0) (см. 7) § 25).

Если $B_1 \neq 0$ и имеет знак чисел λ_1, λ_2, λ_3, то, очевидно, нет точек с действительными координатами, удовлетворяющих уравнению (4). В этом случае *поверхность* (1) *мнимая*.

Если же $B_1 \neq 0$ и имеет знак, противоположный знаку чисел λ_1, λ_2, λ_3, то уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{\xi_1^2}{-\frac{B_1}{\lambda_1}} + \frac{\xi_2^2}{-\frac{B_1}{\lambda_2}} + \frac{\xi_3^2}{-\frac{B_1}{\lambda_3}} = 1 \tag{5}$$

или, полагая

$$a^2 = -\frac{B_1}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{B_2}{\lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{B_3}{\lambda_3},$$

в виде

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0).$$

Таким образом, поверхность (1) есть *эллипсоид* (см. 1) § 25).

Пусть теперь два из чисел λ_1, λ_2, λ_3 имеют один знак, а третье — противоположный им знак.

Если при этом $B_1 = 0$, то можно считать в уравнении (4), что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, умножая (4), если это нужно, на -1 и переставляя, если это нужно, местами ξ_i. Тогда, положив

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{c^2} \quad (a, b, c > 0),$$

получим уравнение *конуса* (см. 6) § 25)

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - \frac{\xi_3^2}{c^2} = 0.$$

При $B_1 \neq 0$ воспользуемся снова формулой (5). Выделим два существенно различных случая:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1 \text{ (\textit{однополостный гиперболоид} 2) § 25)},$$

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2} - \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1 \text{ (\textit{двуполостный гиперболоид} 3) § 25)}.$$

К этим двум случаям сводятся и остальные случаи путем соответствующей замены координат ξ_i.

Пусть теперь $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$. Тогда по крайней мере одно из чисел λ_1, λ_2, λ_3 равно нулю. Будем считать, что $\lambda_3 = 0$, поменяв, если нужно, местами ξ_i.

Итак, пусть $\lambda_3 = 0$. Выделим сначала случай, когда $A_3' = 0$. Тогда уравнение (3) имеет вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + 2(A_1' x_1' + A_2' x_2') + B = 0,$$

где числа λ_1, λ_2, A_1', A_2', B могут быть любыми.

В плоскости (x_1', x_2') это есть общее уравнение кривой второго порядка. В пространстве (x_1', x_2', x_3') ему соответствует *уравнение цилиндрической поверхности* (см. 8) § 25), проходящей через *плоскую кривую второго порядка* с образующей, параллельной оси x_3' (см. 8) § 25).

Далее мы будем всегда считать, что $A_3' \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$, и тогда уравнение (3) имеет вид

$$(\lambda_1 x_1'^2 + 2A_1' x_1') + (\lambda_2 x_2'^2 + 2A_2' x_2') + 2A_3' x_3' + B = 0. \quad (3')$$

Существенно различными случаями являются следующие: а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$; в) $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 = 0$. Другие случаи сводятся к ним заменой координат или умножением на -1.

Рассматриваем случай а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Вынесем за скобки множители λ_1 и λ_2 и дополним выражения в этих скобках до полных квадратов. Тогда получим, учитывая, что λ_1, λ_2, A_3' отличны от нуля,

$$\lambda_1 (x_1' + \alpha)^2 + \lambda_2 (x_2' + \beta)^2 + 2A_3' (x_3' + \gamma) = 0,$$

где α, β, γ — соответствующие числа. Полагая

$$\xi = x_1' + \alpha, \quad \eta = x_2' + \beta, \quad \zeta = x_3' + \gamma,$$

получим

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = -2A_3' \zeta$$

или

$$\frac{\xi^2}{-\frac{A_3'}{\lambda_1}} + \frac{\eta^2}{-\frac{A_3'}{\lambda_2}} = 2\zeta. \quad (6)$$

Если $-A_3' > 0$, то уравнение (6) имеет вид

$$\frac{\xi^2}{p} + \frac{\eta^2}{q} = 2\zeta \quad (\textit{эллиптический параболоид } 4)\ \S\ 25) \quad (7)$$
$$(p,\ q > 0).$$

Если же $-A_3' < 0$, то заменяя ζ на $-\zeta$, мы снова получим уравнение вида (7), т. е. *эллиптический параболоид.*

Рассмотрим теперь случай б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $(A_3' \neq 0)$. Воспользуемся уравнением (6). Если $A_3' < 0$, то это уравнение записывается в виде

$$\frac{\xi^2}{p} - \frac{\eta^2}{q} = 2\zeta \quad (\textit{гиперболический параболоид} \text{ см. } 5)\ \S\ 25) \quad (8)$$
$$(p,\ q > 0).$$

Если же $A_3' > 0$, то после замены местами ξ и η снова получим уравнение вида (8), т. е. *гиперболический параболоид.*

Переходим теперь к случаю в) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ $(A_3' \neq 0)$. Тогда уравнение (3') сводится к следующему:

$$(\lambda_1 x_1'^2 + 2A_1' x_1') + 2(A_2' x_2' + A_3' x_3') + B = 0.$$

Вынося за первые скобки λ_1, дополняя выражение в этих скобках до полного квадрата (учитывая, что λ_1, $A'_3 \neq 0$), получим

$$\lambda_1 (x'_1 + \alpha)^2 + 2A'_2 x'_2 + 2A'_3 (x'_3 + \beta) = 0,$$

где α, β — некоторые числа. После замены

$$\xi = x'_1 + \alpha, \quad \eta = x'_2, \quad \zeta = x'_3 + \beta,$$

это уравнение превратится в следующее:

$$\lambda_1 \xi^2 + 2(A'_2 \eta + A'_3 \zeta) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим в плоскости (η, ζ) вектор $\omega = (A'_2, A'_3)$. Запишем его в виде

$$(A'_2, A'_3) = \rho (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

где $\rho > 0$ — длина ω, а $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор, направленный в сторону ω. Другой вектор $(\sin\alpha, -\cos\alpha)$ тоже единичный и перпендикулярен к первому.

Введем в плоскости (η, ζ) ортогональное преобразование

$$u = \eta\cos\alpha + \zeta\sin\alpha, \quad v = \eta\sin\alpha - \zeta\cos\alpha.$$

Этим прямоугольная система координат η, ζ заменяется на прямоугольную систему координат u, v, а прямоугольная система координат ξ, η, ζ заменяется на прямоугольную систему координат ξ, u, v. В результате уравнение (9), которое может быть записано так:

$$\lambda_1 \xi^2 + 2\rho (\eta\cos\alpha + \zeta\sin\alpha) = 0,$$

принимает следующий вид:

$$\lambda_1 \xi^2 + 2\rho u = 0,$$

или меняя u на $-u$,

$$\xi^2 = 2pu \quad (p = \rho/\lambda_1 > 0),$$

или наконец, меняя местами ξ и u,

$$u^2 = 2p\xi \quad (p > 0),$$

т. е. мы получили *уравнение параболического цилиндра* (в прямоугольных координатах (ξ, u, v)).

Мы рассмотрели все случаи, могущие иметь место для уравнения (1), и в каждом из них нашли прямоугольную систему координат, в которой уравнение (1) имеет один из видов 1) — 8) § 25. Утверждение доказано.

§ 27. Плоскость в R_n

27.1. Общие рассмотрения. В § 6 мы условились называть точкой или вектором n-мерного пространства R_n систему чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначать буквой $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n).$$

Числа x_j назывались координатами точки (вектора) или компонентами вектора $\boldsymbol{x}$.

В § 7 мы определили отрезок $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$, соединяющий точки

$$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad \boldsymbol{y}^0=(y_1^0, \ldots, y_n^0),$$

как множество точек $\boldsymbol{x} \in R_n$, которые можно представить с помощью равенства

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^0+\mu\boldsymbol{y}^0 \quad (\lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \lambda+\mu=1).$$

Точки $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$ называются концами отрезка $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$. Будем называть $\boldsymbol{x}^0$ *начальной точкой отрезка* $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$, а $\boldsymbol{y}^0$ — его *конечной точкой*. Тогда можно считать, что $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$ есть направленный отрезок с начальной точкой $\boldsymbol{x}^0$ и конечной точкой $\boldsymbol{y}^0$.

Как в случае трехмерного пространства, *направленный отрезок* $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$ *будем считать равным вектору*

$$\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{x}^0=(y_1^0-x_1^0, \ldots, y_n^0-x_n^0).$$

Если к векторам $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$ прибавить произвольный вектор

$$\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n),$$

то получим векторы

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{a},$$

для которых, очевидно,

$$\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{x}^0.$$

Это показывает, что точки $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{a}$, каков бы ни был вектор $\boldsymbol{a}$, определяют один и тот же вектор, равный $\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{x}^0$.

Направленный отрезок $[0, \boldsymbol{x}]$, начало которого есть нулевая точка 0, а конец — точка $\boldsymbol{x}$, называют *радиус-вектором точки* $\boldsymbol{x}$.

Итак,

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$$

есть точка R_n, $\boldsymbol{x}$ также есть радиус-вектор точки $\boldsymbol{x}$, т. е. направленный отрезок $[0, \boldsymbol{x}]$ и, наконец $\boldsymbol{x}$ может обозначать вектор, определяемый любым отрезком $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$, для которого $\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}$.

Пример 1. Направленные отрезки $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{y}^1]$, $[\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{y}^2]$, где

$$\boldsymbol{x}^1 = (0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{y}^1 = (1, 1, \ldots, 1),$$
$$\boldsymbol{x}^2 = (3, 3, \ldots, 3), \quad \boldsymbol{y}^2 = (4, 4, \ldots, 4)$$

равны одному и тому же вектору $\boldsymbol{a} = (1, 1, \ldots, 1)$.

27.2. Плоскость в R_n. Зададим n действительных чисел $A_1, \ldots, A_n$, одновременно не равных нулю, т. е. таких, что выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^2 > 0.$$

Зададим также действительное число B.

По определению геометрическое место точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j + B = 0, \tag{1}$$

называется *плоскостью*, а уравнение (1) называется *уравнением* этой *плоскости*.

Будем еще говорить: плоскость (1) вместо того, чтобы говорить: плоскость, определяемая уравнением (1).

При $n = 3$ плоскость (1) есть реальная плоскость.

Если умножить уравнение (1) на произвольное число $M \neq 0$, то получим уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} A'_j x_j + B' = 0 \quad (A'_j = MA_j \ (j = 1, \ldots, n), \ B' = MB), \tag{1'}$$

эквивалентное уравнению (1).

Таким образом, уравнения (1) и (1') определяют одно и то же геометрическое место точек. Учтем еще, что

$$\sum_{j=1}^{n} (A'_j)^2 = M^2 \sum_{j=1}^{n} A_j^2 > 0.$$

Но тогда уравнения (1) и (1') суть уравнения одной и той же плоскости.

Систему чисел $A_1, \ldots, A_n$ удобно мыслить как вектор

$$\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n).$$

Этот вектор заведомо ненулевой, потому что его длина положительна:

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_j^2} > 0.$$

Как мы отмечали выше, буквы $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ обозначают не только точки пространства R_n, но и радиус-векторы точек $\boldsymbol{x}$. Но тогда левую часть уравнения (1) можно записать как скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{x}$:

$$A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}),$$

а само уравнение (1) записать в виде

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}) + B = 0. \qquad (2)$$

Эквивалентное же ему уравнение (1′) запишется в виде

$$(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{x}) + B' = 0, \qquad (2')$$

где $\boldsymbol{A}' = M\boldsymbol{A}$, $M \neq 0$, $B' = MB$.

Таким образом, $\boldsymbol{A}'$ есть вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A}'$ получается из вектора $\boldsymbol{A}$ умножением его на число $M \neq 0$. Число B' тоже получается из числа B умножением последнего на это же число M.

27.3. Уравнение плоскости в нормальном виде. Среди векторов $\boldsymbol{A}'$ особый интерес представляет единичный вектор, т. е. вектор, имеющий длину 1.

Чтобы получить его, множитель M надо подобрать так, чтобы оказалось, что $|\boldsymbol{A}'| = 1$ $\left(|\boldsymbol{A}'|^2 = M^2 \sum_{j=1}^{n} A_j^2\right)$.

Отсюда ясно, что

$$M = \pm 1 \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_j^2}.$$

Будем число M всегда выбирать так, чтобы при $B \neq 0$ число $p = -MB$ было положительным. Если $B = 0$, то за число M можно брать любое из двух возможных его значений.

При таком выборе числа M вектор $A' = MA$ будет единичным, и мы его обозначим через $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, т. е.

$$v_j = MA_j \ (j = 1, \ldots, n), \quad \sum_{j=1}^{n} v_j^2 = M^2 \sum_{j=1}^{n} A_j^2 = 1.$$

В силу введенных обозначений уравнение (2') запишется:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j = p, \tag{3}$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1, \qquad p \geqslant 0. \tag{4}$$

Уравнение (3), где числа v_j и p удовлетворяют условиям (4), называется *уравнением плоскости в R_n в нормальном виде.*

Уравнение (1), где $A_1, \ldots, A_n, B$ — произвольные числа, но числа $A_1, \ldots, A_n$ одновременно не равны нулю, называется *уравнением плоскости в R_n в общем виде.*

Мы доказали, что любое уравнение плоскости в общем виде может быть приведено к нормальному виду умножением на определенное выше число M. Число M называется *нормирующим множителем.*

Очевидно и обратное, если умножить уравнение плоскости (3) в нормальном виде на произвольное не равное нулю число, то получим ему эквивалентное уравнение вида (1), где числа A_j одновременно не равны нулю.

27.4. Уравнение плоскости в векторной форме.

Уравнение (3) можно еще записать, очевидно, в виде

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = p. \tag{3'}$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{a} = p\mathbf{v} = (pv_1, \ldots, pv_n) = pMA.$$

При $p > 0$ он направлен в сторону единичного вектора $\mathbf{v}$ и имеет длину, равную p: $|\mathbf{a}| = |p\mathbf{v}| = p|\mathbf{v}| = p$.

Если $p = 0$, то $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Помножим равенство (3') на $p > 0$ и учтем, что

$$p^2 = (p\mathbf{v}, p\mathbf{v});$$

тогда получим

$$(p\mathbf{v},\ \boldsymbol{x}) = (p\mathbf{v},\ p\mathbf{v}),$$

или

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}).$$

Учитывая свойства скалярного произведения, последнее равенство можно записать в виде

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 0. \tag{5}$$

Обратными рассуждениями из (5) можно снова получить (3′). Это показывает, что равенство (5) эквивалентно уравнению плоскости (1), т. е. уравнение (5) можно считать уравнением рассматриваемой нами плоскости (1). Говорят еще, что уравнение (5) есть *уравнение плоскости* (1) *в векторной форме* при $B \neq 0$ (т. е. $p > 0$).

Таким образом, плоскость (1) — это геометрическое место точек $\boldsymbol{x}$, которые удовлетворяют уравнению (5).

Пусть теперь $p=0$ или, что все равно, $B=0$.

Тогда уравнение (3′) имеет вид

$$(\mathbf{v},\ \boldsymbol{x}) = 0. \tag{5′}$$

Уравнение (5′) и есть уравнение плоскости (1) в векторной форме при $B=0$. Оно выражает, что множество всех точек плоскости (1) состоит из всех точек $\boldsymbol{x} \in R_n$, удовлетворяющих (5′), где $\mathbf{v} = M\boldsymbol{A}$ $\left(M = \pm 1\Big/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} A_j^2}\right)$ — любой из двух возможных единичных векторов.

27.5. Геометрическая интерпретация уравнений. Условимся говорить, что вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален к отрезку $[\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{y}^0]$, если он ортогонален к вектору $\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0$, т. е. если

$$(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^0) = 0.$$

Будем также говорить, что вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален к плоскости L, если он ортогонален к любому отрезку, принадлежащему L.

Покажем, что если точки $\boldsymbol{x}^1$ и $\boldsymbol{x}^2$ принадлежат плоскости (5), то и отрезок $[\boldsymbol{x}^1,\ \boldsymbol{x}^2]$ принадлежит этой плоскости. В самом деле, по условию

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{a}) = 0, \quad (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}) = 0.$$

Далее, произвольная точка $\boldsymbol{x}$ отрезка $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$ может быть записана в виде

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^1 + \mu\boldsymbol{x}^2 \qquad (\lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1),$$

поэтому

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{x}^1 + \mu\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}) = \\ &= (\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{x}^1 + \mu\boldsymbol{x}^2 - (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}) = \\ &= (\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a})) = \\ &= (\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{a})) + (\boldsymbol{a},\ \mu(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a})) = \\ &= \lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}) = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\boldsymbol{x}$ принадлежит плоскости (5), а следовательно, и весь отрезок $[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2]$ принадлежит этой плоскости.

Из уравнения (5) видно, что точка $\boldsymbol{a}$ принадлежит к этой плоскости: $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a},\ 0) = 0$.

В силу вышесказанного плоскость (1) можно определить как геометрическое место точек $\boldsymbol{x} \in R_n$ таких, что разность $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор точки $\boldsymbol{x}$, ортогональна к вектору $\boldsymbol{a}$.

Покажем еще, что вектор

$$\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$$

ортогонален к плоскости (5).

В самом деле, в силу равенства $\boldsymbol{a} = pM\boldsymbol{A}$ $(p > 0)$ вектор $\boldsymbol{A}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ и, следовательно, он ортогонален к любому вектору $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$, принадлежащему плоскости (5), т. е. ортогонален к плоскости (5) или, что все равно, к плоскости (1).

Итак, числа $A_1, \ldots, A_n$ в уравнении плоскости (1) имеют геометрический смысл — вектор $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$, составленный из коэффициентов при x_j этого уравнения, ортогонален к плоскости (1).

Если $p = 0$ или, что все равно, $B = 0$, то рассматриваем уравнение (5′), эквивалентное уравнению (1). Уравнение (5′) выражает, что множество всех точек $\boldsymbol{x}$ плоскости (1) состоит из точек $\boldsymbol{x}$, радиус-векторы которых ортогональны к вектору $\boldsymbol{\nu} = M\boldsymbol{A}$.

В этом случае вектор $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{\nu}$, снова ортогонален к плоскости (1).

27.6. Уравнение плоскости, проходящей через n точек.

Теорема. *Пусть задано n точек*

$$x^1=(x_1^1,\ \ldots,\ x_n^1),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x^n=(x_1^n,\ \ldots,\ x_n^n),$$

определяющих матрицу

$$Q=\left\|\begin{matrix} x_1^2-x_1^1 & x_2^2-x_2^1 & \ldots & x_n^2-x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n-x_1^1 & x_2^n-x_2^1 & \ldots & x_n^n-x_n^1 \end{matrix}\right\|. \tag{6}$$

Тогда если ранг Q равен $n-1$ (ранг $Q=n-1$), *то через указанные n точек можно провести плоскость и притом единственную.*

Если же ранг матрицы Q меньше чем $n-1$ (ранг $Q<n-1$), *то через указанные n точек можно провести бесконечное множество плоскостей.*

Доказательство. Пусть ранг $Q=n-1$.

Уравнение искомой плоскости запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j + B = 0. \tag{7}$$

Так как эта плоскость должна проходить через точку x^1, то должно удовлетворяться равенство

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^1 + B = 0. \tag{8}$$

Вычитая равенство (8) из равенства (7), получим уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - x_j^1) = 0, \tag{9}$$

справедливое для всех точек x искомой плоскости.

Так как точки $x^2, \ldots, x^n$ должны принадлежать искомой плоскости, то их координаты должны удовлетворять уравнению (9), т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j^2 - x_j^1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j^n - x_j^1) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Итак числа A_j должны быть решениями однородной системы, состоящей из равенства (9) и равенств (10), где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка искомой плоскости. Но числа A_j должны быть одновременно не равны нулю. Поэтому определитель однородной системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^1 & x_2 - x_2^1 & \ldots & x_n - x_n^1 \\ x_1^2 - x_1^1 & x_2^2 - x_2^1 & \ldots & x_n^2 - x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n - x_1^1 & x_2^n - x_2^1 & \ldots & x_n^n - x_n^1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

для всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ искомой плоскости.

Уравнение (11) и есть уравнение искомой плоскости. Если определитель левой части этого уравнения разложить по элементам первой строки, то получим уравнение вида (9) с коэффициентами A_j, равными определителям $(n-1)$-го порядка, порождаемым матрицей Q с соответствующим знаком. По условию среди этих определителей есть хотя бы один, не равный нулю.

Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь ранг матрицы Q меньше $n-1$ (ранг $Q < n-1$). Тогда, рассуждая, как прежде, мы придем к тому, что любая точка x плоскости, проходящей через заданные n точек, должна удовлетворять системе, состоящей из уравнения (9) и уравнений (10) при некоторых постоянных $A_1, \ldots, A_n$.

Так как ранг $Q \leqslant n-2$, то система (10) имеет бесконечное число решений $A_1, \ldots, A_n$. При этом по крайней мере два из чисел A_j, пусть A_1 и A_2, могут быть любыми независимыми друг от друга числами — им можно придавать любые числовые значения.

Если подставить найденные числа $A_1, \ldots, A_n$ в уравнение (9), то различным не пропорциональным между собой парам A_1, A_2 будут соответствовать заведомо разные плоскости, проходящие через заданные n точек.

Второе утверждение теоремы доказано.

Уравнение (11) можно записать в форме

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27.7. Условия ортогональности и параллельности плоскостей. Угол между двумя плоскостями в R_n

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j + B = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A'_j x_j + B' = 0 \tag{13}$$

определяется по аналогии с трехмерным случаем. А именно, *углом между плоскостями* (12), (13) называется угол φ между векторами $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ и $\boldsymbol{A}' = (A'_1, \ldots, A'_n)$, которые, как мы выяснили, перпендикулярны к плоскостям (12) и (13) соответственно.

На основании формулы (8) § 6 имеем

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}'|} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_j A'_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} A_j^2}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} A_j'^2}}.$$

Плоскости (12) и (13) *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда $\cos\varphi = 0$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} A_j A'_j = 0. \tag{14}$$

Две плоскости (12), (13) *параллельны* тогда и только тогда, когда перпендикулярные к ним векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ коллинеарны ($\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A}'$), т. е. когда

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{A_2}{A'_2} = \ldots = \frac{A_n}{A'_n}. \tag{15}$$

27.8. Уравнение плоскости, проходящей через точку. Если точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0) = Q^0$ лежит на плоскости

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j + B = 0, \tag{16}$$

то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j + B = 0. \tag{17}$$

Вычитая (17) из (16), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - x_j^0) = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) называется *уравнением плоскости, проходящей через точку* $Q^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

В векторной форме уравнение можно записать так:

$$A(\rho - \rho^0) = 0, \tag{18'}$$

где

$$A = (A_1, \ldots, A_n), \quad \rho = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\rho^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Здесь, как мы знаем, вектор A перпендикулярен плоскости (16), ρ — радиус-вектор текущей ее точки, ρ^0 — радиус-вектор заданной точки Q^0.

27.9. Прямая в пространстве R_n. Уравнения прямой в пространстве R_n можно вывести по аналогии с трехмерным пространством R_3 (см. § 10).

Прямой L *в* R_n, *проходящей через точку* $Q^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *и направленной в сторону вектора* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ($|a| > 0$), называется геометрическое место точек $Q = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$, удовлетворяющих уравнениям

$$\left.\begin{array}{c} x_1 - x_1^0 = ta_1, \\ \cdots\cdots \\ x_n - x_n^0 = ta_n, \end{array}\right\} \tag{19}$$

где t — действительная переменная, пробегающая интервал $(-\infty, \infty)$. Удобно считать, что вектор a приложен к точке Q^0.

Уравнения (19) называются *параметрическими уравнениями прямой* L.

Если ввести в рассмотрение радиус-векторы точек Q и Q^0 прямой L:

$$\rho = (x_1, \ldots, x_n), \quad \rho^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

то уравнения (19) запишутся:

$$\rho - \rho^0 = ta, \tag{19'}$$

т. е. вектор $\rho - \rho^0$ коллинеарен вектору a.

Если действительная переменная (скаляр) t пробегает интервал $(-\infty, \infty)$, то конец радиус-вектора

$$\rho = \rho^0 + ta$$

пробегает всю прямую L.

Уравнение (19′) называется *уравнением прямой в векторной форме.*

Исходя из (19′), мы видим, что вектор a лежит на прямой L, потому что его начало Q^0 имеет радиус-вектор ρ^0, а конец— $\rho^0 + a$. Оба эти вектора удовлетворяют уравнению (19′) соответственно при $t=0$ и $t=1$ (см. § 7).

Если исключить параметр t из уравнений (19), то мы получим систему из $(n-1)$ уравнений:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}. \tag{19″}$$

Уравнения (19″) называются *уравнениями прямой L в канонической форме или каноническом виде.*

Пусть заданы прямые

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n} \qquad (L_1),$$

$$\frac{x_1 - y_1^0}{b_1} = \ldots = \frac{x_n - y_n^0}{b_n} \qquad (L_2).$$

Углом между прямыми L_1 и L_2 называется угол φ между векторами

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n),$$

которые, как мы показали, лежат на соответствующих прямых L_1 и L_2. Они приложены соответственно к точкам $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $Q^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и перпендикулярно прямой, определяемой уравнениями

$$\frac{x_1 - y_1^0}{b_1} = \frac{x_2 - y_2^0}{b_2} = \ldots = \frac{x_n - y_n^0}{b_n}. \tag{20}$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку Q^0, имеет вид (см. (18))

$$\sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - x_j^0) = 0. \tag{21}$$

Искомая плоскость должна быть ортогональной прямой (20), т. е. ортогональной вектору $\boldsymbol{b}=(b_1, \ldots, b_n)$.

С другой стороны, вектор $\boldsymbol{A}=(A_1, \ldots, A_n)$ ортогонален плоскости (21). Поэтому векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны: $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{b}$. Следовательно, уравнение искомой плоскости запишется:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_j-x_j^0)=0.$$

27.10. Расположение $(n-1)$ плоскостей. Пусть заданы уравнения $(n-1)$ плоскостей

$$A_1^1x_1+\ldots+A_n^1x_n+B^1 \qquad =0, \qquad (22_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1^{n-1}x_1+\ldots+A_n^{n-1}x_n+B^{n-1}=0. \qquad (22_{n-1})$$

Если коэффициенты первого уравнения пропорциональны коэффициентам второго $(A_1^1 : A_2^1 : \ldots : A_n^1 = A_1^2 : A_2^2 : \ldots : A_n^2)$, то плоскости параллельны (см. 27.7).

Если указанная пропорциональность имеет место и для коэффициентов других уравнений, то все плоскости будут параллельны между собой. В этом случае все определители $(n-1)$-го порядка, порожденные матрицей $\|A_j^k\|$ коэффициентов A_j^k уравнений (22_1)—(22_{n-1}), равны нулю.

Если хотя бы один из определителей $(n-1)$-го порядка матрицы $\|A_j^k\|$ не равен нулю, то плоскости (22_1)—(22_{n-1}) пересекаются по прямой. В самом деле, пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_{n-1}^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{n-1} & A_2^{n-1} & \ldots & A_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (23)$$

Тогда уравнения (22_1)—(22_{n-1}) можно решить относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и мы получаем

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha_1x_n+\mu_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}=\alpha_{n-1}x_n+\mu_{n-1}, \end{array}\right\} \qquad (24)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ — некоторые числа.

Уравнения (24) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{x_1-\mu_1}{\alpha_1}=\ldots=\frac{x_{n-1}-\mu_{n-1}}{\alpha_{n-1}}=\frac{x_n}{1}. \qquad (25)$$

Мы видим, что при условии (23) уравнения $(n-1)$ плоскостей (22_1)—(22_{n-1}) определяют прямую (25). Она проходит через точку $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, 0)$ и имеет направление вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$.

Пример 2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x_1-1}{1}=\frac{x_2-2}{2}=\frac{x_3-3}{3}=\frac{x_4-4}{4},$$

$$\frac{x_1-4}{4}=\frac{x_2-3}{3}=\frac{x_3-2}{2}=\frac{x_4-1}{1}.$$

Решение. Векторы $a=(1, 2, 3, 4)$, $b=(4, 3, 2, 1)$ лежат на наших прямых, расположенных в четырехмерном пространстве R_4. Поэтому угол φ между этими векторами и будет углом между прямыми:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}\,\sqrt{4^2+3^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{3}.$$

27.11. Расстояние от точки до плоскости. Пусть задана плоскость П, определяемая общим уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j+B=0 \quad \left(|A|^2=\sum_{j=1}^{n} A_j^2>0\right), \qquad (26)$$

или векторным уравнением

$$(A, \rho)+B=0, \qquad (27)$$

или же нормальным уравнением

$$(\rho, \nu)=p \quad (p\geqslant 0), \qquad (28)$$

где $A=(A_1, \ldots, A_n)$, ρ—радиус-вектор текущей точки $Q=(x_1, \ldots, x_n)$ плоскости П, $\nu=\mp\frac{A}{|A|}$, $p=\pm\frac{B}{|A|}$.

Зададим некоторую точку $Q^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Радиус-вектор точки Q^0 обозначим через ρ^0.

Расстоянием от точки Q^0 *до плоскости* П называется неотрицательное число

$$d = \min_{Q \in \Pi} |\overrightarrow{QQ^0}|.$$

Покажем, что

$$d = |(\rho - \rho^0, \ \nu)|, \tag{29}$$

т. е. расстояние d равно абсолютной величине проекции вектора $\rho - \rho^0$ на направление вектора $\nu = \mp \frac{A}{|A|}$ (ортогонального плоскости П).

Проведем прямую, проходящую через точку Q^0 и перпендикулярную плоскости П (см. 27.9, пример 1):

$$\frac{x_1 - x_1^0}{A_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{A_n}. \tag{30}$$

Найдем точку пересечения $Q^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ прямой (30) с плоскостью П (см. рис. 53).

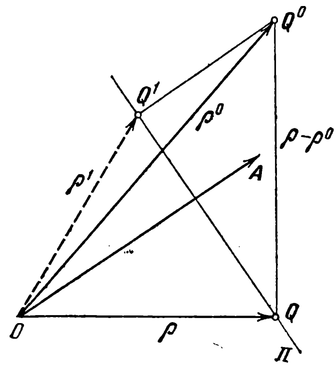

Рис. 53.

Из (30) имеем

$$x_j^1 = x_j^0 + A_j t \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Подставляя эти значения в уравнение (26), находим, что

$$t = -\frac{1}{|A|^2}[(A, \ \rho^0) + B].$$

Таким образом,

$$Q^1 = \left(x_1^0 - \frac{A_1}{|A|^2}[(A, \ \rho^0) + B], \ \ldots, \ x_n^0 - \frac{A_n}{|A|^2}[(A, \ \rho^0) + B]\right).$$

Ясно, что

$$|\rho^1 - \rho^0| = \frac{1}{|A|}|(A, \ \rho^0) + B| =$$

$$= \frac{1}{|A|}|(\rho^0, \ \mp \nu |A|) \pm p|A|| =$$

$$= |(\rho^0, \ \nu) - p| = |(\rho - \rho^0, \ \nu)|.$$

Отсюда

$$|\rho^1-\rho^0|=|(\rho-\rho^0,\ \nu)|\leqslant|\rho-\rho^0|,\ \forall\rho,\ (\rho,\ A)+B=0. \quad (31)$$

Знак равенства в (31) достигается при $\rho=\rho^1$, следовательно,

$$d=|\rho^1-\rho^0|=|(\rho-\rho^0,\ \nu)|=|(\rho^0,\ \nu)-p|.$$

Таким образом, для того чтобы вычислить расстояние d от точки Q^0 до плоскости П, надо записать уравнение плоскости П в нормальном виде (28), перенести p в левую часть и подставить в последнюю $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ вместо $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Абсолютная величина полученного выражения и есть искомое число d.

На языке параметров плоскости, очевидно,

$$d=\left|\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^0+B\right| \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_j^2}.$$

Пример 3. Найти расстояние d от точки

$$Q^0=\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

пространства R_n до плоскости

$$x_1+\sqrt{2}\,x_2+\sqrt{3}\,x_3+\ \ldots+\sqrt{n}\,x_n+1=0.$$

Решение. Согласно сказанному выше

$$d=\left|\sum_{j=1}^{n}\sqrt{j}\,\frac{1}{\sqrt{j}}+1\right| \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sqrt{j})^2}=$$

$$=|n+1| \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} j}=(n+1) \Big/ \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}=\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}.$$

27.12. Различные задачи.

Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей (1—3):

1. $1x_1+2x_2+\ \ldots+nx_n=-1$.

Ответ: $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} j\sqrt{6}\,x_j}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}=\sqrt{\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}}.$

2. $x+y+z+t=0$.

3. $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j(j+1)}}=1$.

Ответ: $\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{n+1}{nj(j+1)}}\, x_j=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

4. Найти угол φ между плоскостями в R_4:

$$(8+\sqrt{59})\, x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0,$$
$$4x_1+3x_2+2x_3+(8+\sqrt{59})\, x_4=1.$$

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

5. Найти угол φ между плоскостями в R_{2n}:

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j jx_j=0, \quad \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} x_j=1.$$

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (плоскости ортогональны).

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки пространства R_n:

$$Q_1=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$Q_2=(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_n=(0,\ \ldots,\ 0,\ 1).$$

Ответ: $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ перпендикулярно плоскости:

$$nx_1+(n-1)\, x_2+\ldots+2x_{n-1}+x_n=4.$$

Ответ: $\frac{x_1-1}{n}=\frac{x_2-2}{n-1}=\ldots=\frac{x_n-n}{1}$.

8. Написать уравнение плоскости в R_4, проходящей через точки

$$Q_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad Q_2=(1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$Q_3=(1,\ 1,\ 1,\ 0), \quad Q_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Ответ: $x_1=1$ $(1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=1)$.

§ 28. Линейное программирование

28.1. Введение. *Линейное программирование* — это раздел математики, изучающий методы нахождения максимальных или минимальных значений линейной однородной формы — линейной функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \tag{1}$$

в некоторой области G n-мерного пространства $R_n = \{-\infty < x_i < \infty, i = 1, \ldots, n\}$, где c_k — постоянные числа, не все равные нулю.

Ясно, что если $G = R_n$, то линейная функция (1) не имеет наибольшего и наименьшего значений: $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

Однако если мы будем рассматривать ограниченную замкнутую область G, то линейная функция f (непрерывная на R_n, а следовательно, и на G) достигает своих максимальных и минимальных значений на G. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n \equiv \overline{1, n})$$

и c_i одновременно не равны нулю, то линейная функция f не имеет стационарных точек. Поэтому наибольшее и наименьшее значения эта функция достигает только на границе ∂G.

Так как $\max f = -\min(-f)$, то в дальнейшем мы будем говорить только о минимуме линейной функции f на G.

28.2. Транспортная задача. Характерной задачей, приводящей к указанной выше проблеме (нахождения минимума или максимума линейной функции), является транспортная задача. Требуется наиболее экономно, в смысле транспортных затрат, перевезти потребителям заказанную ими на данных предприятиях продукцию. Характер продукции в данном случае не имеет значения. Важно, что речь идет об однотипной продукции.

Итак, пусть имеются предприятия (производители) $B_1, \ldots, B_s$, выпустившие продукцию в количестве соответственно $b_1, \ldots, b_s$ тонн. Эту продукцию надо доставить потребителям $A_1, \ldots, A_t$ в количествах $a_1, \ldots, a_t$ тонн соответственно, т. е. a_p — количество продукции, заказанное потребителем A_p.

Таким образом, надо считать, что

$$\sum_{q=1}^{s} b_q = \sum_{p=1}^{t} a_p,$$

т. е. вся произведенная продукция распределена между предприятиями. Стоимость перевозки тонны продукции от B_q к A_p обозначим через c_{qp}. Пусть количество продукции, доставленной из B_q в A_p, будет x_{qp}. Тогда стоимость перевозки продукции будет

$$S = \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=1}^{t} c_{qp} x_{qp}.$$

Требуется так составить план перевозок, чтобы сумма транспортных расходов S была *минимальной.*

Таким образом, мы пришли к следующей математической задаче.

Дана линейная функция

$$S = \sum_{q=1}^{s} \sum_{p=1}^{t} c_{qp} x_{qp}. \qquad 2)$$

Требуется найти ее минимум при ограничениях

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{t} x_{qp} = b_q \qquad (q = \overline{1, s}), \\ &\sum_{q=1}^{s} x_{qp} = a_p \qquad (p = \overline{1, t}), \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

т. е. сумма продукции, полученной потребителями $A_1, \ldots, A_t$ от производителя B_q, равна продукции b_q, выработанной этим предприятием, а сумма продукции, полученной потребителем A_p от всех производителей $B_1, \ldots, B_s$, равна потребности a_p этого потребителя.

По характеру задачи также ясно, что $x_{qp} \geqslant 0$.

Таким образом, среди неотрицательных решений $\{x_{qp}\}$ *системы* (3) *необходимо выбрать такое, при котором* S *достигает наименьшего значения* (*минимизируется*).

28.3. Общая задача линейного программирования. В общем случае задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: даны система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + b_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m \equiv \overline{1, m}) \qquad (4)$$

(где можно считать, что $b_j \geqslant 0$, изменяя, если нужно, знак в соответствующем уравнении (4)) и линейная функция

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k. \tag{1}$$

Требуется среди неотрицательных решений системы (4) $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \geqslant 0$, найти такое решение, для которого линейная функция f принимает наименьшее значение.

Уравнения (4) обычно называют *ограничениями* данной задачи. Конечно, требование, чтобы $x_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$, тоже является ограничением, но оно присутствует во всех задачах подобного типа и его не принято называть ограничением. Любое неотрицательное решение системы (4) будем называть *допустимым*, а решение, реализующее минимум, — *оптимальным*.

Отметим, что уравнения системы (4) с геометрической точки зрения представляют плоскости в R_n. Чтобы задача о минимуме f была содержательной, необходимо, чтобы число m ограничений типа равенств было меньше n.

Например, при $n = 2$ наличие двух ограничений означает, что неотрицательное решение системы должно быть точкой (x_0, y_0) пересечения прямых, представляющих уравнения системы. Тогда задача о нахождении $\min f$ сводится к вычислению f в этой точке. Если прямые параллельны, то задача теряет смысл. Если ограничений больше двух, то система или несовместна, или же все прямые принадлежат одному пучку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

В этом случае минимум f также равен $f(x_0, y_0)$.

В ряде практических задач (например, в задаче о диете) ограничения носят вид неравенств

$$b_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, m},\ x_k \geqslant 0,\ k = \overline{1, n}). \tag{5}$$

Однако от одного типа ограничений легко перейти к другому. В самом деле, если ограничения носят характер неравенств (5), то вводим новые добавочные неизвестные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ с помощью уравнений

$$x_{n+j} = b_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \qquad (j = \overline{1, m}).$$

Тогда неравенства (5) равносильны условию $x_{n+j} \geqslant 0$ $(j = \overline{1, m})$, $x_k \geqslant 0$ $(k = \overline{1, n})$, и мы пришли к ограничениям типа равенств (4), хотя и с большим числом переменных.

Обратно, пусть имеют место ограничения типа равенств (4). Тогда, решая эту систему (например, методом исключения неизвестных), мы после некоторого числа шагов или убедимся, что система несовместна, или же разрешим систему (4) относительно некоторых неизвестных:

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,\,n}x_n + \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \alpha_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,\,n}x_n + \beta_r. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь r — ранг матрицы коэффициентов системы (4).

Подставляя эти выражения $x_1, \ldots, x_r$ в функцию f, получаем

$$f = c_0' + c_{r+1}'x_{r+1} + \ldots + c_n'x_n.$$

После этого исходная задача может быть сформулирована следующим образом. Даны система

$$\begin{gathered} \alpha_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,\,n}x_n + \beta_1 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,\,n}x_n + \beta_r \geqslant 0 \end{gathered} \tag{7}$$

r линейных неравенств с $n-r$ неизвестными $x_{r+1}, \ldots$ $\ldots, x_n$ и линейная функция

$$f = c_0' + c_{r+1}'x_{r+1} + \ldots + c_n'x_n. \tag{8}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (7) найти такое, которое минимизирует f.

Эта задача эквивалентна исходной. В самом деле, если мы нашли решение задачи (7), (8) $x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$, то, находя по формулам (6) неотрицательные значения $x_1^0, \ldots, x_r^0$, мы получим систему чисел

$$x_1^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0,$$

которая служит решением задачи (1), (4).

Таким образом, задачу линейного программирования можно ставить с ограничениями типа неравенств. Из такой постановки видно, что область G, в которой мы ищем минимум f, представляет собой «многогранник» в неотрицательном угле R_n (т. е. когда $x_k \geqslant 0$, $k = \overline{1, n}$), а ее граница ∂G состоит из «плоских граней», находящихся в плоскостях пространства R_n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k + b_j = 0. \tag{9}$$

Множество $G \subset R_n$ называется *выпуклым*, если $\forall x, y \in G$ $\alpha x + \beta y \in G$, $\alpha + \beta = 1$, α, $\beta \geqslant 0$.

Из системы неравенств (7) ясно, что «многогранник» G выпуклый и G находится по одну сторону от любой из своих граней.

Слово «многогранник» мы пишем в кавычках, так как могут быть случаи, когда этот «многогранник» будет неограниченной частью неотрицательного угла R_n.

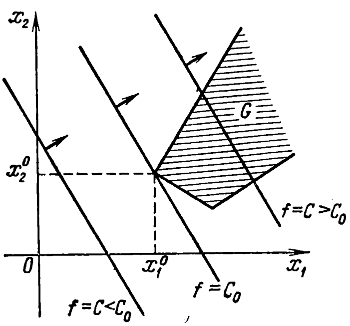

Рис. 54.

Например, при $n=2$ и при трех ограничениях типа неравенств «многоугольник» G может быть неограниченным в первой четверти R_2. На рис. 54 G — заштрихованная часть.

В дальнейшем кавычки у слова «многогранник» мы будем опускать.

При нахождении минимума линейной функции f на замкнутой области $G = G_n$ мы последовательно будем переходить на плоские грани G_n меньшей размерности. Отметим, что граница ∂G_n n-мерного многогранника состоит из нескольких $(n-1)$-мерных многогранников. Если G_n — ограниченный замкнутый многогранник, то линейная функция f достигает минимума в некоторой точке границы ∂G_n. При рассмотрении линейной функции f на этом новом многограннике меньшего числа измерений она снова будет линейной функцией, но от меньшего числа переменных и, следовательно, будет достигать минимума на границе ∂G_{n-1}, которая состоит из $(n-2)$-мерных многогранников. Продолжая этот процесс, мы придем к случаю, когда линейная функция рассматривается на одномерной грани (ребре G_n), границей которой являются точки (вершины многогранника G_n).

Таким образом ясно, что *если G_n — ограниченный замкнутый многогранник, то линейная функция достигает минимума в некоторой вершине G_n.*

Если минимальное значение достигается в двух вершинах, то это значение достигается и в любой точке ребра, соединяющего эти точки, т. е. в этой ситуации существует бесконечное множество точек, в которых линейная функция достигает минимума.

Замечание 1. Если функция $f=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k + B$, где B — постоянное число, то мы исследуем сначала линейную форму $\varphi = f - B$, и если $\min \varphi = \varphi_0$, то $\min f = \varphi_0 + B$.

Из приведенных соображений вытекает следующий *геометрический метод* решения поставленной задачи о минимуме линейной формы f.

Рассмотрим плоскости уровня функции f:

$$C=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \quad (-\infty < C < \infty). \tag{10}$$

Уравнение (10) при различных C в пространстве R_n изображает семейство параллельных плоскостей (см. § 27). Будем непрерывно и монотонно изменять C от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда плоскость (10) будет передвигаться в R_n в направлении вектора $(c_1, \ldots, c_n)$, который, как мы знаем, перпендикулярен плоскости (10). Очевидно, что если $c_n > 0$, то плоскость (10) поднимается вверх относительно оси x_n при изменении C от $-\infty$ до $+\infty$; если же $c_n < 0$, то плоскость (10) опускается вниз относительно оси x_n. При $c_n = 0$ плоскость (10) движется вправо или влево относительно оси x_{n-1} в зависимости от знака числа c_{n-1} $(c_{n-1} \neq 0)$. Если $c_n > 0$ и при всех $C < C^*$, где C^* — некоторое действительное число, плоскость (10) пересекает область G, то $\inf f = -\infty$.

Если же этого нет, то при некотором $C = C_0$ плоскость (10), двигаясь в направлении вектора $(c_1, \ldots, c_n)$, впервые встретит замкнутую область G в некоторой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда в этой точке встречи функция f и достигает минимума.

На рис. 54 при $n=2$ прямая уровня при возрастании C поднимается и при $C=C_0$ впервые встречает замкнутый многоугольник G в точке (x_1^0, x_2^0). Значит, $\min f = f(x_1^0, x_2^0)$.

Если грань многогранника G, проходящая через точку первой встречи G с плоскостью уровня, параллельна плоскости (10), то линейная функция f достигает минимума в любой точке этой грани.

Этот геометрический метод решения поставленной задачи эффективен лишь при $n=2$, т. е. когда плоскости (10) — прямые и G — многоугольник, ограниченный или нет. При $n=3$ взаимное расположение плоскостей и многоугольника G трудноуловимо, а при $n=4$ мы просто не можем прибегнуть к наглядным графическим изображениям.

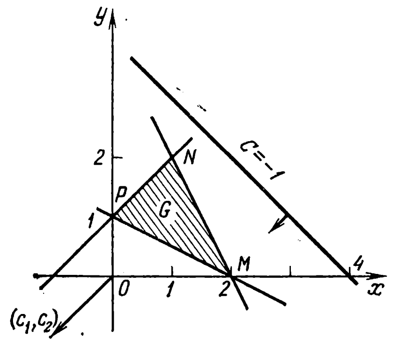

Рис. 55.

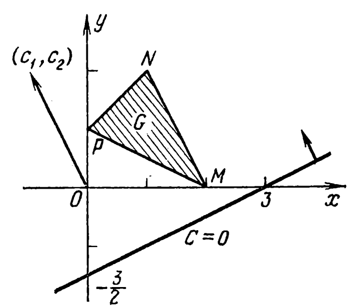

Рис. 56.

Пример 1. Найти минимум функции $f(x, y) = 3-x-y$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ при ограничениях (рис. 55)

$$G = \left\{ \begin{array}{c} x-y+1 \geqslant 0, \\ 2y+x-2 \geqslant 0, \\ 4-y-2x \geqslant 0 \end{array} \right\}.$$

Ясно, что область G есть треугольник с вершинами в точках $M=(2,\ 0)$, $N=(1,\ 2)$, $P=(0,\ 1)$. Прямая уровня функции f:

$$3-x-y=C,$$

при возрастании C от $-\infty$ до $+\infty$ опускается относительно оси y (коэффициент при y отрицателен); ее первая точка встречи с G есть вершина N. Значение функции f в этой точке равно нулю ($C=C_0=0$). Итак, решение задачи есть $x=1$, $y=2$, $f=0$.

В данном случае можно было бы просто вычислить значение f в точках M, N, P и взять наименьшее: $f(M) = f(2,\ 0)=1$, $f(N)=f(1,\ 2)=0$, $f(P)=f(0,\ 1)=2$, т. е. $\min f=f(N)=0$.

Пример 2. Найти минимум функции $f=3-x+2y$ при тех же ограничениях, что и в примере 1.

В данном случае прямая уровня функции

$$3 - x + 2y = C$$

при возрастании C от $-\infty$ до $+\infty$ поднимается (рис. 56) вверх относительно оси y ($c_2 = 2 > 0$) и ее первая точка встречи с областью G есть вершина $M = (2,\ 0)$. Значение функции f в этой точке равно 1 ($C = C_0 = 1$). Здесь тоже проще всего взять наименьшее среди чисел $f(M) = 1$, $f(N) = 6$, $f(P) = 5$.

Пример 3. Найти минимум функции $f = -x$ при ограничениях

$$G = \left\{ \begin{array}{r} x + y - 3 \geqslant 0, \\ x - y + 1 \geqslant 0, \\ -x + y + 1 \geqslant 0, \\ 2x + y \geqslant 0 \end{array} \right\}.$$

Ясно, что последнее ограничение несущественно, оно перекрывается условием $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

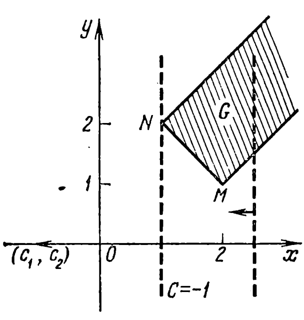

Рис. 57.

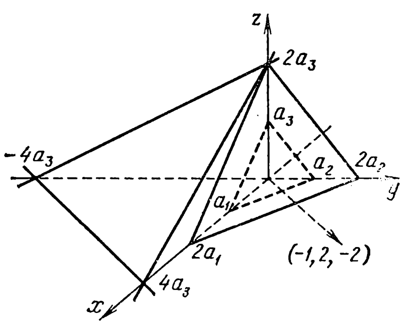

Рис. 58.

Область G неограничена и представляет собой полосу (рис. 57) между прямыми $x - y + 1 = 0$, $-x + y + 1 = 0$ и правее прямой $x + y - 3 = 0$, которая пересекает эти прямые в точках $N = (1,\ 2)$, $M = (2,\ 1)$.

При $x \to +\infty$ функция $f(x, y) = -x \to -\infty$, $(x, y) \in G$. Поэтому линейная функция f не имеет наименьшего значения ($\inf f = -\infty$).

В данном примере прямая уровня $-x = C$ при возрастании C от $-\infty$ до $+\infty$ движется влево ($c_1 = -1 < 0$) и при всяком $C < -1$ пересекает G, значит, $\inf f = -\infty$.

Пример 4. Найти минимум функции $f=4-x+y-2z$ при ограничениях

$$G=\left\{1\leqslant\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}\leqslant 2\right\},$$

где a_1, a_2, a_3 — положительные числа.

Ясно, что область G (рис. 58) есть часть пространства R_3, находящаяся в первом октанте ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$) между плоскостями

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1,\quad \frac{x}{2a_1}+\frac{y}{2a_2}+\frac{z}{2a_3}=1.$$

В данном случае многогранник G имеет шесть известных вершин

$$(a_1,\ 0,\ 0),\quad (2a_1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ a_2,\ 0),\quad (0,\ 2a_2,\ 0),$$
$$(0,\ 0,\ a_3),\quad (0,\ 0,\ 2a_3).$$

Поэтому, вычисляя функцию f в этих точках, легко находим ее минимум и максимум:

$$\min_G f=\min\{4-a_1,\ 4-2a_1,\ 4+a_2,\ 4+2a_2,\ 4-2a_3,\ 4-4a_3\}=$$
$$=\min\{4-2a_1,\ 4-4a_3\}=\begin{cases}4-2a_1, & a_1>2a_3,\\ 4-4a_3, & a_1\leqslant 2a_3;\end{cases}$$

$$\max_G f=4+2a_2.$$

28.4. Векторно-матричная форма задачи линейного программирования. Задачу линейного программирования можно сформулировать также в векторно-матричной форме. Пусть $\boldsymbol{c}=(c_1,\ \ldots,\ c_n)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\mathbf{0}=(0,\ \ldots,\ 0)$ — векторы пространства R_n; $\boldsymbol{b}=(b_1,\ \ldots,\ b_m)$ — вектор из пространства R_m;

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{Vmatrix}$$

— матрица размера $n\times m$, составленная из коэффициентов системы ограничений (4). Линейная функция $f(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}c_kx_k=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$ есть скалярное произведение векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}$.

Поэтому общую задачу линейного программирования можно записать в следующем виде: требуется минимизировать скалярное произведение $\boldsymbol{cx}$ при условии $\boldsymbol{x} \geqslant 0$ и $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

Примем столбцы матрицы A за векторы из R_m:

$$\boldsymbol{P}_1=(a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1}),\ \ldots,\ \boldsymbol{P}_n=(a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{mn}).$$

Тогда легко получаем, что

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{x} &= (a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)= \\ &= (a_{11}x_1,\ a_{21}x_1,\ \ldots,\ a_{m1}x_1)+\ldots+(a_{1n}x_n,\ \ldots,\ a_{mn}x_n)= \\ &= \boldsymbol{P}_1x_1+\boldsymbol{P}_2x_2+\ldots+\boldsymbol{P}_nx_n.\end{aligned}$$

Поэтому систему ограничений можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} P_jx_j=-\boldsymbol{b}.$$

Если ранг $A=m$, то среди векторов $\boldsymbol{P}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{P}_n$ имеется m линейно независимых, которые можно принять за базис в пространстве R_m (см. § 16). Следовательно, любой вектор $(-\boldsymbol{b}) \in R_m$ может быть разложен по элементам этого базиса. Нам необходимо выбрать такой базис, чтобы вектор $(-\boldsymbol{b})$ разлагался по векторам этого базиса с неотрицательными коэффициентами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Различных m-мерных базисов $(m<n)$ из векторов $\boldsymbol{P}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{P}_n$ конечное число. Среди них могут быть базисы, по элементам которых вектор $(-\boldsymbol{b})$ разлагается с неотрицательными коэффициентами. Тогда минимум скалярного произведения (линейной функции) достигается на конечном множестве точек $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in R_n$, где x_j — коэффициенты разложения вектора $(-\boldsymbol{b})$ по элементам некоторых базисов.

Если базисов указанного типа нет (вектор $(-\boldsymbol{b})$ не разлагается по элементам базисов с неотрицательными коэффициентами), то задача линейного программирования не имеет решения (неразрешима).

Таким образом, задача состоит в том, как найти базис

$$(\boldsymbol{P}_{k_1},\ \ldots,\ \boldsymbol{P}_{k_m})$$

так, чтобы

$$-\boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{m} x_{k_j}\boldsymbol{P}_{k_j},\quad x_{k_j} \geqslant 0,$$

и

$$\min f=\min_{x_j \geqslant 0} \boldsymbol{cx}=\sum_{j=1}^{m} c_{k_j}x_{k_j}.$$

28.5. Симплекс-метод. Реальные задачи линейного программирования содержат, как правило, большое число ограничений и неизвестных. Поэтому естественно, что решение таких задач связано с большим объемом вычислений. Это затруднение преодолевается с помощью быстродействующих электронно-вычислительных машин (ЭВМ). Для каждой задачи разрабатываются алгоритм и программа, и затем ЭВМ в короткий срок дает решение поставленной задачи.

Существуют и другие общие методы, позволяющие найти решение любой задачи линейного программирования в обозримое число шагов.

Таким является *симплекс-метод*. Опишем идею этого метода.

Пусть надо найти минимум линейной функции

$$f(\boldsymbol{x})=c_0'+\sum_{j=1}^{n} c_j'x_j \qquad (11)$$

среди значений $x_j \geqslant 0$ $(j=1, \ldots, n)$, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}'x_j+b_k'=0 \qquad (k=1, \ldots, m;\ m<n). \qquad (4)$$

Неотрицательные решения системы (4) $x_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1, n})$ мы условимся называть *допустимыми*, а точку $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ — *допустимой точкой*. Покажем как эту задачу можно решить, применяя симплекс-метод.

Пусть ранг матрицы $A'=(a_{ij}')$ равен $r \leqslant m$ (r-ранг A'). Будем считать, что система (4) разрешима относительно $x_1, \ldots, x_r$:

$$x_k=b_k-\sum_{j=r+1}^{n} a_{kj}x_j \qquad (k=\overline{1, r}), \qquad (12)$$

и числа b_k неотрицательны ($b_k \geqslant 0$, $k=\overline{1, r}$).

В этом случае говорят, что переменные $x_1, \ldots, x_r$ образуют базис — *базис* $B=\{x_1, \ldots, x_r\}$. Остальные переменные называются *свободными* или *небазисными*. Следует обратить внимание, что здесь понятие базиса не совпадает с понятием базиса из § 16.

Вопрос о возможности перехода от системы (4) к системе (12) будет рассмотрен ниже в п. 28.8.

Системы (4) и (12) равносильны, поэтому допустимая точка $\boldsymbol{x}$ системы (4) есть допустимая точка системы (12), и обратно.

Очевидно, точка $\boldsymbol{b}=(b_1, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$ допустимая, ее называют *базисным решением*, отвечающим базису B. Будем писать $f(b)=f_B$. В силу равенств (12) функцию f можно записать в виде линейной функции от переменных x_j $(j=r+1, \ldots, n)$:

$$f(\boldsymbol{x})=c_0-\sum_{j=r+1}^{n} c_j x_j. \tag{13}$$

Очевидно, что $f_B=c_0=c_0'+\sum\limits_{j=1}^{r} c_j' b_j$.

Первый этап симплекс-метода связан с рассмотрением функции f, определяемой равенством (13), и системы ограничений в виде равенств (12).

Рассмотрим четыре возможных случая I, II, III_+, III_0.

Случай I. Пусть $c_j \leqslant 0$ для всех $j=r+1, \ldots, n$. Тогда минимум f, определяемой равенством (13), относительно всех $x_j \geqslant 0$, $j=1, \ldots, n$, будет равен c_0:

$$\min_{\substack{x_j \geqslant 0,\\ j=1, \ldots, n}} f(\boldsymbol{x})=c_0.$$

Этот минимум остается тем же для допустимых $x_1, \ldots, x_n$. Этим задача на минимум решена.

Случай II. Пусть для некоторого j_0 $c_{j_0}>0$ и все коэффициенты a_{kj_0} матрицы $A=(a_{kj})$ неположительны:

$$a_{kj_0} \leqslant 0 \quad (k=1, \ldots, r).$$

Тогда при любом $x_{j_0} \geqslant 0$ $(r+1 \leqslant j_0 \leqslant n)$ точка

$$\boldsymbol{x}^0=(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0, x_{j_0}, 0, \ldots, 0), \tag{14}$$

где x_k $(k=1, \ldots, r)$ вычисляются по формулам (12), будет допустимой, и если ее подставить в f, то получим $f=c_0-c_{j_0}x_{j_0} \to -\infty$ при $x_{j_0} \to +\infty$. Поэтому

$$\inf_{x_j \geqslant 0} f(\boldsymbol{x})=-\infty,$$

и нашу задачу о минимуме можно считать решенной.

Случай III. Пусть для некоторого j_0 коэффициент c_{j_0} функции f положительный $(c_{j_0}>0)$ и имеются положительные коэффициенты a_{kj_0} в j_0-м столбце матрицы A:

$$a_{kj_0}>0 \quad (k \in e), \tag{15}$$

где e — множество индексов k, для которых выполняется неравенство (15).

Пусть

$$\min_{k \in e} \frac{b_k}{a_{kj_0}} = \frac{b_{k_0}}{a_{k_0 j_0}} = \delta \geqslant 0 \quad (1 \leqslant k_0 \leqslant r,\ k_0 \in e). \tag{16}$$

Элемент $a_{k_0 j_0}$ называют *разрешающим элементом*.

Рассмотрим отдельно случаи $\delta > 0$ и $\delta = 0$, которые будем обозначать через III_+ и III_0 соответственно.

Случай III_+. Точка (14) для значений x_{j_0}, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x_{j_0} \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$, допустимая. В самом деле, в силу (12) при $k \bar{\in} e$ непосредственно видно, что

$$x_k = b_k - a_{kj_0} x_{j_0} \geqslant 0 \quad (a_{kj_0} \leqslant 0),$$

а при $k \in e$ в силу соотношений (15), (16) имеем

$$x_k = b_k - a_{kj_0} x_{j_0} \geqslant b_k - a_{kj_0} \delta = b_k - a_{kj_0} \min_{k \in e} \frac{b_k}{a_{kj_0}} \geqslant$$
$$\geqslant b_k - a_{kj_0} \frac{b_k}{a_{kj_0}} = b_k - b_k = 0.$$

Если x_{j_0} непрерывно возрастает от 0 до δ, то все $x_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, r)$, а $x_{k_0} = b_{k_0} - a_{k_0 j_0} x_{j_0}$ к тому же непрерывно убывает от b_{k_0} до 0. При дальнейшем возрастании x_{j_0} переменная x_{k_0} становится отрицательной и точка (14) перестает быть допустимой.

Функция

$$f(\boldsymbol{x}^0) = c_0 - c_{j_0} x_{j_0}$$

при возрастании x_{j_0} от 0 до δ убывает от $f(\boldsymbol{b}) = c_0$ до $f(b^1) = c_0 - c_{j_0}\delta$, где

$$\boldsymbol{b}^1 = (b_1 - a_{1j_0}\delta, \ldots, b_r - a_{rj_0}\delta, 0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0) \tag{17}$$

и δ стоит на j_0-м месте.

Таким образом,

$$c_0 = f(\boldsymbol{b}) > f(\boldsymbol{b}^1) = c_0 - c_{j_0}\delta.$$

Отметим, что координата x_{k_0} $(k_0 \in e)$ в (17) равна нулю:

$$x_{k_0} = b_{k_0} - a_{k_0 j_0}\delta = b_{k_0} - a_{k_0 j_0} \frac{b_{k_0}}{a_{k_0 j_0}} = 0.$$

Так как $a_{k_0 j_0} > 0$, то k_0-е уравнение системы (12) можно решить относительно x_{j_0}:

$$x_{j_0} = \frac{b_{k_0}}{a_{k_0 j_0}} - \frac{x_{k_0}}{a_{k_0 j_0}} - \sum_{\substack{j=r+1, \\ j \neq j_0}}^{n} \frac{a_{k_0 j}}{a_{k_0 j_0}} x_j. \qquad (18)$$

Мы выразили x_{j_0} через x_{k_0} и остальные переменные x_j ($j \neq j_0$, $j \geqslant r+1$). Можно выразить через эти переменные также любую переменную x_k ($k \neq k_0$, $1 \leqslant k \leqslant r$), если подставить выражение (18) вместо x_{j_0} в равенства (12), соответствующие любым $k \neq k_0$.

Итак, в случае III_+ удается решить систему (12) относительно переменных

$$x_1, \ \ldots, \ x_{k_0-1}, \ x_{j_0}, \ x_{k_0+1}, \ \ldots, \ x_r. \qquad (19)$$

Условно запишем соответствующую систему равенств так:

$$x_k = b_k^1 - \sum_{j=r+1}^{n} a_{kj}^1 x_j \qquad (k=1, \ \ldots, \ r), \qquad (20)$$

хотя на самом деле в этих равенствах только переменные x_i ($i \neq k_0$, j_0) остались прежними, а остальные переменные x_{k_0} и x_{j_0} поменялись местами.

Покажем, что свободные члены

$$b_k^1 \geqslant 0 \qquad (k=1, \ \ldots, \ r). \qquad (21)$$

В самом деле, если $k \in e$, то ($a_{kj_0} > 0$)

$$b_k^1 = b_k - \frac{a_{kj_0}}{a_{k_0 j_0}} b_{k_0} = a_{kj_0}\left(\frac{b_k}{a_{kj_0}} - \frac{b_{k_0}}{a_{k_0 j_0}}\right) = a_{kj_0}\left(\frac{b_k}{a_{kj_0}} - \delta\right) \geqslant 0.$$

Если же $k \bar{\in} e$ ($a_{kj_0} \leqslant 0$), то

$$b_k^1 = b_k - \frac{a_{kj_0}}{a_{k_0 j_0}} b_{k_0} = b_k + \frac{|a_{kj_0}|}{a_{k_0 j_0}} b_{k_0} = b_k + |a_{kj_0}|\,\delta \geqslant 0$$

и неравенства (21) доказаны.

Итак, переменные $x_1, \ \ldots, \ x_r$ в системе (20) образуют базис — базис B_1 (см. также (19)).

Для базисного решения $\boldsymbol{b}^1 = (b_1^1, \ \ldots, \ b_r^1, \ 0, \ \ldots, \ 0)$

$$f_{B_1} = f(\boldsymbol{b}^1) = c_0 - c_{j_0}\delta < c_0 = f(\boldsymbol{b}) = f_B \qquad (c_{j_0} > 0).$$

Базис B_1 отличен от базиса B, и для него можно начать второй этап рассуждений (случай I, II, III).

Таким образом, случай III_+ рассмотрен.

Случай III_0. Пусть $c_{j_0} > 0$, $a_{kj_0} > 0$ для $k \in e$, $\delta = 0$. В этом случае $b_{k_0} = 0$ (см. (16)) и равенство с номером k_0 в (12) имеет вид

$$x_{k_0} = -\sum_{j=r+1}^{n} a_{k_0 j} x_j. \tag{22}$$

Если в равенстве (22) все коэффициенты $a_{k_0, r+1}, \ldots$ $\ldots, a_{k_0 n}$ положительные, то система (12) имеет единственное допустимое решение $x_j = 0$, $j = r+1, \ldots, n$; $x_k = b_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, r)$. Значение функции f на этом базисном решении будет: $f = c_0$. Задача на минимум функции f в этом случае решена.

Допустим, что в (22) имеются коэффициенты $a_{k_0 j} \leqslant 0$ для некоторого значения j $(j \neq j_0)$. Тогда, как и в случае III_+, переходим к новому базису B_1 (вводим в базис переменную x_{j_0} и выводим из него x_{k_0}, $a_{k_0 j_0}$ — разрешающий элемент). Отметим, что в этом случае значение $f_B = f_{B_1}$ $(b_{k_0} = 0)$.

Итак, рассматривая базис B, мы либо решим нашу задачу на минимум, либо придем к новому базису B_1 $(B_1 \neq B)$. К базису B_1 снова применяем наш метод — это приведет к решению задачи либо к новому базису B_2 $(B_2 \neq B_1)$. Продолжая этот процесс, получим цепочку базисов

$$B_0, B_1, B_2, \ldots \quad (B_0 = B). \tag{23}$$

Если для некоторого s будет иметь место случай I или II, то цепочка на этом s оборвется и задача будет решена. Иначе от базиса B_s переходим к базису B_{s+1}.

Однако может случиться *цикл*. Он заключается в том, что хотя каждый последующий базис цепочки и отличается от предыдущего, но для некоторых s и l $(l > 1)$ будет происходить совпадение базисов: $B_s = B_{s+l}$.

Разберемся, что здесь происходит. Для базиса B_{s+l-1} произошел случай III_0, т. е. оказалось, что существует j_0 $(r+1 \leqslant j_0 \leqslant n)$ и такое k_0 $(1 \leqslant k_0 \leqslant r)$, что

$$c_{j_0} > 0, \quad a_{k_0 j_0} > 0, \quad b_{k_0} = 0 \quad (\delta = 0), \tag{24}$$

и это привело к базису B_s $(B_{s+l} = B_s)$.

Но пара чисел (k_0, j_0), вообще говоря, неединственна, и какая-то другая пара (k_0', j_0), для которой выполняются свойства (24), может привести к базису, отличному от базиса B_s. Это на самом деле и имеет место, как учит теория (см. ниже теорему 1 и замечания к ней).

Таким образом, если для некоторых s и l случится цикл, то его можно устранить. В этом случае для базиса B_{s+l-1} надо перебрать всевозможные пары (k_0, j_0), обладающие свойствами (24). Каждая такая пара приводит к некоторому базису. Среди них есть отличный от базисов $B_0, B_1, \ldots, B_{s+l-1}$.

28.6. Устранение цикла. На практике циклы бывают очень редко. Все же объясним, как их можно «разорвать» (устранить).

Отметим теорему, доказательство которой будет намечено в п. 28.7.

Теорема 1. *От любого базиса B существует путь, ведущий к решению задачи на минимум, т. е. существует цепочка базисов, получаемых симплекс-методом, приводящая к минимуму (или к $-\infty$).*

Итак, пусть имеем цикл

$$B_s, B_{s+1}, \ldots, B_{s+l} \quad (B_{s+l}=B_s).$$

Тогда, очевидно,

$$f_{B_s}=f_{B_{s+1}}=\ldots=f_{B_{s+l}}.$$

Пусть s_0 — наименьшее неотрицательное целое число, для которого

$$f_{B_{s_0}}=f_{B_{s_0+1}}=\ldots=f_{B_{s_0+l}} \quad (f_{B_{s_0-1}}>f_{B_{s_0}},\ s_0\leqslant s,\ B_{s_0}=B_{s_0+l}).$$

Очевидно, для базисов

$$B_{s_0}, B_{s_0+1}, \ldots, B_{s_0+l} \tag{25}$$

имеет место случай III_0. Переход от любого из этих базисов B_s $(s_0\leqslant s\leqslant s_0+l)$ к последующему совершается посредством разрешающего элемента $a_{k_0j_0}$. Но базису B_s может соответствовать и другой разрешающий элемент, который переводит B_s в базис B'_{s+1}, отличный от B_{s+1} $(B'_{s+1}\neq B_{s+1})$.

Может случиться, что для любого s $(s=s_0, \ldots, s_0+l)$ базис B'_{s+1} содержится в цепочке (25). Тогда все базисы (25) решают задачу на минимум, т. е. $f_{B_{s_0}}=f_{B_{s_0+1}}=\ldots$ $\ldots=f_{B_{s_0+l}}=\min f$. Ведь по теореме 1 существует путь, ведущий от B_{s_0} к минимуму. Но в данном случае все пути от B_{s_0} ведут к базисам цепочки (25).

Однако может случиться, что для некоторого s разрешающий элемент базиса B_s переводит B_s в базис B'_{s+1}, не входящий в цепочку (25). Тогда мы получим новую цепочку

$$B_{s_0},\ B_{s_0+1},\ \ldots,\ B_s,\ B'_{s+1} \tag{26}$$

с новым последним базисом B'_{s+1}, который подлежит исследованию симплекс-методом.

Но указанных значений s может оказаться и много. Одна из цепочек может и не привести к нужному результату. Необходимо произвести перебор всех цепочек. Отметим, что сам перебор цепочек становится громоздким.

Если произошел цикл, то можно порекомендовать специальный метод выбора разрешающего элемента. Этот метод связан с дополнительными вычислениями, но зато последовательное его применение необходимо приводит к решению задачи без зацикливания (без образования циклов).

28.7. Выбор разрешающего элемента. Симплекс-таблицы. Условимся вектор $\boldsymbol{Q}=(q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_n)$ называть положительным (отрицательным) и писать $\boldsymbol{Q} > \boldsymbol{0}=(0,\ \ldots,\ 0)$ $(\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{0})$, если его первая не равная нулю компонента положительная (отрицательная).

Будем говорить, что вектор $\boldsymbol{Q}$ меньше вектора $\boldsymbol{D}=(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_n)$ или вектор $\boldsymbol{D}$ больше вектора $\boldsymbol{Q}$, и писать $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{D}$ или $\boldsymbol{D}>\boldsymbol{Q}$, если $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{Q}=(d_0-q_0,\ \ldots,\ d_n-q_n)>\boldsymbol{0}$.

Замечание 2. Целесообразность приведенных определений $>$, $<$ для векторов $\boldsymbol{Q}$ можно подтвердить следующими соображениями.

Каждому вектору $\boldsymbol{Q}=(q_0,\ \ldots,\ q_n)$ поставим в соответствие многочлен от переменной t вида $Q(t)=q_0+q_1t+\ldots+q_nt^n$, который является непрерывной функцией и $Q(0)=q_0$. Если $q_0>0$, то найдется окрестность нуля такая, что для всех t из этой окрестности $Q(t)>0$. Если же $q_0=\ldots=q_k=0$ и $q_{k+1}>0$, то

$$Q(t)=t^{k+1}\left[q_{k+1}+q_{k+2}t+\ldots+q_nt^{n-k+1}\right].$$

Многочлен в квадратных скобках больше нуля $(q_{k+1}>0)$ в некоторой окрестности нуля. Далее $t^{k+1}>0$ для $t>0$. Значит, $Q(t)>0$ для всех $0<t<\theta$, где θ — некоторое положительное число.

Таким образом, если вектор $\boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0}$, то соответствующий многочлен $Q(t)>0$ для $0<t<0$ при некотором $\theta>0$.

Вернемся теперь к системе ограничений (12), которую мы запишем в форме

$$x_k+\sum_{j=r+1}^{n} a_{kj}x_j=b_k \quad (b_k\geqslant 0,\ k=1,\ \ldots,\ r), \tag{12}$$

а линейную функцию (13) запишем в виде

$$f+\sum_{j=r+1}^{n} c_jx_j=c_0. \tag{13}$$

Здесь базис $B=\{x_1,\ \ldots,\ x_r\}$.

Оформим систему равенств (12) и (13) в виде таблицы 1 (матрицы).

Таблица 1

Базис	x_1 ... x_{k_0} ... x_r x_{r+1} ... x_{j_0} ... x_n	Свободные члены	Дополнительная матрица
x_1	1 ... 0 ... 0 $a_{1,\,r+1}$ ... a_{1j_0} ... a_{1n}	b_1	d_{11} ... d_{1r}
...	... ...		... ...
x_{k_0}	0 ... 1 ... 0 $a_{k_0,r+1}$ ... $\boxed{a_{k_0j_0}}$ ... a_{k_0n}	b_{k_0}	d_{k_01} ... d_{k_0r}
...	... ...		... ...
x_r	0 ... 0 ... 1 $a_{r,\,r+1}$ ... a_{rj_0} ... a_{rn}	b_r	d_{r1} ... $d_{r,r}$
форма f	0 ... 0 ... 0 c_{r+1} ... c_{j_0} ... c_n	c_0	d_1 ... d_r

Табл. 1 называется *симплекс-таблицей*. В табл. 1 мы приписали некоторую добавочную матрицу $\|d_{ij}\|$ размера $r\times r$ и добавочную строку $(d_1,\ \ldots,\ d_r)$. Введем в рассмотрение векторы

$$\boldsymbol{D}=(c_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_r),\quad \boldsymbol{D}_k=(b_k,\ d_{k1},\ \ldots,\ d_{kr}),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Базис B называется *положительным*, если все векторы $\boldsymbol{D}_k$ $(k=1,\ \ldots,\ r)$ положительные ($\boldsymbol{D}_k>0$). Например, если матрица $\|d_{ij}\|$ единичная $\left(d_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}\right)$, то базис B положительный, потому что для любого $k=1,\ \ldots,\ r$ либо

$b_k > 0$, либо первый отличный от нуля элемент k-й строки матрицы $\|d_{ij}\|$ равен $1 > 0$.

Будем считать, что числа d_{ij} подобраны так, что базис B положительный и матрица $\|d_{ij}\|$ невырожденная (т. е. определитель, порожденный матрицей, отличен от нуля). Вектор $\boldsymbol{D}$ выбираем произвольно. Можно считать, что $\boldsymbol{D} = (c_0, 0, \ldots, 0)$.

В дальнейшем при переходе от базиса B к другому базису B' записи систем ограничений (12) и линейной функции (13) будут изменяться, этому соответствует изменение табл. 1 с помощью некоторых элементарных преобразований (см. § 4.7), которые мы распространяем и на добавочную матрицу $\|d_{ij}\|$ и добавочную строку $(d_1, \ldots, d_r)$. В результате векторы $\boldsymbol{D}_k$ и $\boldsymbol{D}$ будут соответственно изменяться.

Напомним, что в случае III_0 существует j_0 $(r+1 \leqslant j_0 \leqslant n)$ такое, что $c_{j_0} > 0$ и $a_{kj_0} > 0$, $k \in e$, где e — непустое множество и, кроме того, $b_k = 0$ хотя бы для одного $k \in e$.

Индексов j_0, для которых имеет место III_0, может быть несколько. Не имеет значения, какой из них надо взять. Но, если мы остановились на некотором j_0, то индекс k_0 предлагается выбрать следующим образом:

$$\frac{1}{a_{k_0j_0}} \boldsymbol{D}_{k_0} = \min_{k \in e} \frac{1}{a_{kj_0}} \boldsymbol{D}_k. \tag{26}$$

Элемент $a_{k_0j_0}$ разрешающий. В табл. 1 мы его поместили в рамку.

Минимум в (26) достигается для одного k_0, потому что если бы нашлось $k_1 \in e$, для которого

$$\frac{1}{a_{k_1j_0}} \boldsymbol{D}_{k_1} = \frac{1}{a_{k_0j_0}} \boldsymbol{D}_{k_0},$$

то в матрице $\|d_{ij}\|$ были бы две пропорциональные строки и она была бы вырожденной.

З а м е ч а н и е. 3. Так как мы рассматриваем случай III_0, то среди $k \in e$ имеются такие, для которых $b_k = 0$, поэтому

$$\min_{k \in e} \frac{1}{a_{kj_0}} \boldsymbol{D}_k = \min_{\substack{k \in e \\ b_k = 0}} \frac{1}{a_{kj_0}} \boldsymbol{D}_k,$$

т. е. индекс k_0 находится среди таких $k \in e$, для которых $b_k = 0$.

В п. 28.5 мы брали в качестве k_0 одно из значений $k \in e$, для которых $b_k = 0$. Но таких значений может быть несколько. В данном способе среди них выбирается одно такое определенное значение, обращающее в минимум $\frac{1}{a_{kj_0}} D_k$.

Мы уже знаем, что в данном случае III_0 базис $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ можно заменить на другой базис $B' = \{x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{j_0}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r\}$, которому соответствуют система ограничений, эквивалентная системе (12):

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + a'_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1,\,j_0-1}x_{j_0-1} + a'_{1,\,k_0}x_{k_0} + \\ \qquad\qquad + a'_{1,\,j_0+1}x_{j_0+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{j_0} + a'_{j_0,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{j_0,\,j_0-1}x_{j_0-1} + a'_{j_0,\,k_0}x_{k_0} + \\ \qquad\qquad + a'_{j_0,\,j_0+1}x_{j_0+1} + \ldots + a'_{j_0n}x_n = b'_{j_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + a'_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{r,\,j_0-1}x_{j_0-1} + a'_{r,\,k_0}x_{k_0} + \\ \qquad\qquad + a'_{r,\,j_0+1}x_{j_0+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \end{array}\right. \tag{27}$$

$$b'_k \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, k_0 - 1, j_0, k_0 + 1, \ldots, r),$$

и линейная функция

$$f + c'_{r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{j_0-1}x_{j_0-1} + c'_{k_0}x_{k_0} + \\ + c'_{j_0+1}x_{j_0+1} + \ldots + c'_nx_n = c'_0. \tag{28}$$

Системе равенств (27)—(28) соответствует таблица 2. Табл. 2 получается из табл. 1 следующим образом. Делим k_0-ю строку табл. 1 на разрешающий элемент $a_{k_0j_0}$ $(\neq 0)$.

Таблица 2

Базис	x_1	…	x_{k_0}	…	x_r	x_{r+1}	…	x_{j_0}	…	x_n	Свободные члены	Дополнительная матрица
x_1	1	…	a'_{1k_0}	…	0	$a'_{1,\,r+1}$	…	0	…	$a'_{1,\,n}$	b'_1	d'_{11} … d'_{1r}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	… …
x_{j_0}	0	…	$a'_{j_0k_0}$	…	0	$a'_{j_0,\,r+1}$	…	1	…	$a'_{j_0,\,n}$	b'_{j_0}	d'_{j_01} … d'_{j_0r}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	… …
x_r	0	…	$a'_{r,\,k_0}$	…	1	$a'_{r,\,r+1}$	…	0	…	$a'_{r,\,n}$	b'_r	$d'_{r,\,1}$ … $d'_{r,\,r}$
форма f	0	…	c'_{k_0}	…	0	c'_{r+1}	…	0	…	c'_n	c'_0	d'_1 … d'_r

Этим k_0-е уравнение системы (12) остается равносильным прежнему. Добиваемся теперь, чтобы в j_0-м столбце на остальных местах ($k \neq k_0$) были нули. Для этого из k-й строки вычитаем измененную k_0-ю строку, умноженную на число a_{kj_0}. (Эту процедуру мы распространяем и на строки добавочной матрицы, в результате числа d_{kj} переходят в числа d'_{kj}.)

Этот прием соответствует замене k-го уравнения разностью между ним и видоизмененным k_0-м уравнением, умноженным на число a_{kj_0}, что приводит к системе (27), равносильной системе (12).

Посмотрим, как видоизменяются векторы $\boldsymbol{D}_k$. Так как базис B положительный и рассматривается случай III_0, то $b_{k_0}=0$ и

$$\boldsymbol{D}_{k_0}=(0,\ d_{k_0\bar{1}},\ \ldots,\ d_{k_0\bar{r}}) > \boldsymbol{0},$$

поэтому

$$\boldsymbol{D}'_{k_0}=\frac{1}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0}=\left(0,\ \frac{d_{k_0\bar{1}}}{a_{k_0j_0}},\ \ldots,\ \frac{d_{k_0\bar{r}}}{a_{k_0j_0}}\right) > \boldsymbol{0};$$

для $k \neq k_0$, $k \in e$ ($a_{kj_0} > 0$)

$$\boldsymbol{D}'_k=\boldsymbol{D}_k-\frac{a_{kj_0}}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0}=a_{kj_0}\left(\frac{1}{a_{kj_0}}\boldsymbol{D}_k-\frac{1}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0}\right) > \boldsymbol{0}$$

в силу правила выбора $k_0 \in e$ и его единственности (см. (26)); для $k \neq k_0$, $k \,\overline{\in}\, e$ ($a_{kj_0} \leqslant 0$), очевидно,

$$\boldsymbol{D}'_k=\boldsymbol{D}_k-\frac{a_{kj_0}}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0} > \boldsymbol{0}.$$

Чтобы получить последнюю строку табл. 2, надо из последней строки табл. 1 вычесть видоизмененную k_0-ю строку, умноженную на c_{j_0}. Вектор $\boldsymbol{D}=(c_0,\ d_{\bar{1}},\ \ldots,\ d_{\bar{r}})$ переходит в вектор

$$\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{D}-\frac{c_{j_0}}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0}.$$

Так как $c_{j_0} > 0$, $a_{k_0j_0} > 0$, то

$$\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}=-\frac{c_{j_0}}{a_{k_0j_0}}\boldsymbol{D}_{k_0} < \boldsymbol{0},$$

т. е. $\boldsymbol{D}' < \boldsymbol{D}$.

Новые коэффициенты линейной функции f имеют вид

$$c'_{k_0} = -\frac{1}{a_{k_0 j_0}} c_{j_0}, \quad c'_j = c_j - \frac{a_{k_0 j}}{a_{k_0 j_0}} c_{j_0}$$
$$(j = r+1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n).$$

Таким образом, мы пришли к положительному базису B'.

Чтобы табл. 2 была полностью аналогичной табл. 1, рекомендуем в табл. 2 переставить местами столбцы, отвечающие переменным x_{j_0} и x_{k_0}.

Если для базиса B' снова будет иметь место случай III_0, то к нему можно опять применить описанный прием, который приводит к новому базису B'', отличному не только от B', но и от B, потому что

$$D'' < D' < D.$$

Замечание 4. Если в процессе применения симплекс-метода мы пришли к циклу (см. (25)), то можно взять один из базисов цикла, например $B = B_{s_0+l}$, и последовательно применять к нему описанный выше способ однозначного получения нового базиса на основании правила (26) выбора разрешающего элемента. Этим гарантируется получение каждый раз базиса, отличного от всех предшествующих. Так как количество возможных базисов конечно, то мы для некоторого базиса цепи обязательно придем к случаям I, II или III_+. В последнем случае возникает базис B', для которого $f_B > f_{B'}$. Базисы, возникшие после B', отличаются от базиса B и всех ему предшествующих базисов. Они могут создавать циклы, но состоящие из новых базисов, отличных от B и ему предшествующих.

Итак, вычисления по симплекс-методу производятся следующим образом:

исследуются уравнения (12) с базисом B и функция f;

если будут иметь место случаи I или II, то задача на минимум f решена;

если будет случай III_+, то переходим к новому базису на основании (16), составляя таблицы 1 и 2 без добавочной матрицы $\|d_{ij}\|$;

если же будет случай III_0, то можно продолжать наш процесс в надежде, что не случится цикла. Практика показывает, что циклы бывают очень редко;

все же, если случится цикл, то придется, отправляясь, как правило, от базиса B_{s_0}, двигаться дальше, применив добавочную матрицу $\|d_{ij}\|$; рассуждения станут более сложными, но они имеют то преимущество, что на каждом их этапе s будут получаться все новые и новые базисы, отличные от всех предыдущих базисов;

для базиса B_{s_0} мы выбираем матрицу $\|d_{ij}\|$ и вектор $\boldsymbol{D}=(c_0, d_1, \ldots, d_r)$ произвольно, как было указано выше;

дальнейшие базисы, следуя методу, получаются определенным образом, а вместе с ними определенным образом преобразуются матрицы $\|d_{ij}\|$ и вектор $\boldsymbol{D}$;

через конечное число шагов мы выясним, что $\inf f = -\infty$, или же найдем конечный минимум f.

Проследим симплекс-метод на конкретном примере.

Пример 5. Найти минимум линейной функции

$$f=0-\left(\frac{3}{4}x_1-150x_2+\frac{1}{50}x_3-6x_4\right)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_5=0-\left(\frac{1}{2}x_1-90x_2-\frac{1}{50}x_3+3x_4\right), \\ x_6=0-\left(\frac{1}{4}x_1-60x_2-\frac{1}{25}x_3+9x_4\right), \\ x_7=1 \qquad\qquad\qquad\qquad -x_3. \end{cases}$$

Решение. Здесь базис $B=\{x_5, x_6, x_7\}$, и ограничения, и функция f записаны в форме (12)—(13). В данном случае $c_1=\frac{3}{4}>0$ и в первом столбце матрицы ограничений имеются положительные элементы $a_{51}=\frac{1}{2}$, $a_{61}=\frac{1}{4}$. Отношения $b_5/a_{51}=0$, $b_6/a_{61}=0$. Поэтому

$$\min_{k\in e} b_k/a_{k1}=\delta=0$$

и этот минимум достигается на двух элементах $k=5$, $k=6$.

Таким образом, мы имеем случай III_0 $(j_0=1)$. Чтобы избежать образования цикла, используем описанный выше способ однозначного выбора разрешающего элемента (см. (26)). Для этой цели составим таблицу 1*.

Здесь $\boldsymbol{D}_1=(0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{D}_2=(0, 0, 1, 0)$ и $2\boldsymbol{D}_1>4\boldsymbol{D}_2$. Поэтому разрешающим элементом будет $a_{61}=\frac{1}{4}$, стоящий на пересечении строки для x_6 и столбца для x_1. Эту строку и столбец мы выделяем стрелками, а разрешающий элемент обводим рамкой. Преобразуем эту таблицу в таблицу 2*.

Таблица 1*

Базис	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Добавочная матрица		
x_5	1	0	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0
x_6	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{4}}$	-60	$-\frac{1}{25}$	4	0	0	1	0
x_7	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
форма f	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0	0

Разделим строку для x_6 на $a_{6\bar{1}}=\frac{1}{4}$, т. е. умножим строку для x_6 на 4 и перенесем ее в табл. 2*.

Затем умножим вторую строку (видоизмененную) на $a_{5\bar{1}}=\frac{1}{2}$ и вычтем из первой строки. Далее умножим вторую строку на $c_{\bar{1}}=\frac{3}{4}$ и вычтем из последней строки. Строку для x_7 переносим в табл. 2* без изменений ($a_{7\bar{1}}=0$).

Кроме того, мы переставим местами столбцы для x_6 и $x_{\bar{1}}$, тогда табл. 2* будет иметь вид:

Таблица 2*

Базис	x_5	$x_{\bar{1}}$	x_7	x_6	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Добавочная матрица		
x_5	1	0	0	-2	$\boxed{30}$	$\frac{3}{50}$	-15	0	1	-2	0
$x_{\bar{1}}$	0	1	0	4	-240	$-\frac{4}{5}$	36	0	0	4	0
x_7	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
форма f	0	0	0	-3	30	$\frac{7}{50}$	-33	0	0	-3	0

Таким образом, базис $B_1=\{x_5,\ x_1,\ x_7\}$. В табл. 2* коэффициент $c_2=30>0$ (штрих мы опускаем) и в столбце для x_2 имеется один элемент $a_{52}=30>0$, который и будет разрешающим элементом (в табл. 2* мы поместили его в рамку). Проводя преобразование табл. 2*, как и выше, мы перейдем к базису $B_2=\{x_2,\ x_1,\ x_7\}$, т. е. из базиса B_1 мы выводим переменную x_5 и вводим переменную x_2.

Таблица 3* будет иметь следующий вид (после перестановки столбцов для x_2 и x_5):

Таблица 3*

Базис	x_2	x_1	x_7	x_6	x_5	x_3	x_4	Свободные члены	Добавочная матрица		
x_2	1	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\boxed{\frac{1}{500}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{15}$	0
x_1	0	1	0	—12	8	$\frac{8}{25}$	—84	0	8	—12	0
x_7	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
форма f	0	0	0	—1	—1	$\frac{2}{25}$	—18	0	—1	—1	0

В последней строке табл. 3* имеется только один положительный коэффициент $c_3=\frac{2}{25}>0$. В столбце для x_3 все элементы также положительны. В данной таблице $\boldsymbol{D}_1=\left(0,\ \frac{1}{30},\ -\frac{1}{15},\ 0\right)$, $\boldsymbol{D}_2=(0,\ 8,\ -12,\ 0)$, $\boldsymbol{D}_3=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$. Сравнивая векторы $500\boldsymbol{D}_1$, $\frac{25}{8}\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_3$, находим, что минимальным будет вектор $500\boldsymbol{D}_1$ и, следовательно, разрешающим элементом будет $a_{23}=\frac{1}{500}>0$. Минимум (16) равен нулю, т. е. мы опять имеем случай III_0. Преобразуя табл. 3*, получим таблицу 4*.

Здесь базис $B_3=\{x_3,\ x_1,\ x_7\}$, $c_6=\frac{5}{3}>0$ и в столбце для x_6 имеется только один положительный элемент $a_{76}=\frac{100}{3}>0$, который и будет разрешающим элементом. Ми-

Таблица 4*

Базис	x_3	x_1	x_7	x_6 ↓	x_5	x_2	x_4	Свободные члены	Добавочная матрица		
x_3	1	0	0	$-\frac{100}{3}$	$\frac{50}{3}$	500	-250	0	$\frac{50}{3}$	$-\frac{100}{3}$	0
x_1	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	-160	-4	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0
→ x_7	0	0	1	$\boxed{\frac{100}{3}}$	$-\frac{50}{3}$	-500	250	1	$-\frac{50}{3}$	$\frac{100}{3}$	1
форма f	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-40	2	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0

Таблица 5*

Базис	x_3	x_1	x_6	x_7	x_5	x_2	x_4	Свободные члены	Добавочная матрица		
x_3	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
x_1	0	1	0	$\frac{1}{25}$	2	-180	6	$\frac{1}{25}$	2	0	$\frac{4}{3}$
x_6	0	0	1	$\frac{3}{100}$	$-\frac{1}{2}$	-15	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{100}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{100}$
форма f	0	0	0	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{2}$	-15	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{20}$

нимум (16) равен $\frac{3}{100} > 0$, т. е. мы имеем случай III_+. Преобразуя табл. 4*, получим таблицу 5*.

В последней строке табл. 5* все коэффициенты c_j ($j = 7, 5, 2, 4$) отрицательные, следовательно, $\min f = -\frac{1}{20}$ (случай I).

Базис $B_4 = \{x_3, x_1, x_6\}$. Из табл. 5* видно, что базисное решение имеет вид $x_3 = 1$, $x_1 = \frac{1}{25}$, $x_6 = \frac{3}{100}$, $x_7 = x_5 = x_2 = x_4 = 0$.

Замечание 5. Если бы мы не следовали правилу однозначного выбора разрешающего элемента, то могли бы получить цикл, выбирая базисы в следующей последовательности:

$$B=\{x_5, x_6, x_7\} \to \overline{B}_1=\{x_1, x_6, x_7\} \to$$
$$\to \overline{B}_2=\{x_1, x_2, x_7\} \to \overline{B}_3=\{x_3, x_2, x_7\} \to \overline{B}_4=\{x_3, x_4, x_7\} \to$$
$$\to \overline{B}_5=\{x_5, x_4, x_7\} \to \overline{B}_6=\{x_5, x_6, x_7\}=B.$$

Замечание 6. Отметим, что на каждом этапе, начиная с первого, можно было бы изменять нумерацию переменных, приводя систему ограничений и функцию f к виду (12), (13).

28.8. Условия существования базиса. Поясним, как можно привести систему ограничений (4)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j=b_k \qquad (k=1, \ldots, m) \tag{4}$$

к системе вида (12)

$$x_k=\beta_k-\sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{kj}x_j \qquad (\beta_k \geqslant 0,\ k=1, \ldots, r), \tag{12}$$

т. е. выясним, когда переменные $x_1, \ldots, x_r$ образуют базис.

Как нам известно, система (4) разрешима (совместна) тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

равен рангу расширенной матрицы

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $r=$ ранг $A=$ ранг B. Тогда можно указать r таких уравнений системы (4), что всякое решение системы, состоящей из этих r уравнений, есть решение системы (4). Будем считать, что для данной системы (4) $r=m$ и, кроме того, $m<n$, потому что при $m=n$ существует только одна точка n-мерного пространства, являющаяся решением системы (4).

Кроме того, всегда можно добиться путем перенумерации переменных того, чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема 2. *Для того чтобы неизвестные* $x_1, \dots, x_m$ *из системы* (4) *образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta^k/\Delta \geqslant 0 \qquad \forall k = \overline{1, m},$$

где Δ^k — *определитель, получающийся из определителя* Δ *заменой* k*-го столбца столбцом свободных членов системы* (4).

Доказательство. Пусть $\dfrac{\Delta^k}{\Delta} \geqslant 0, \quad k = 1, \dots, m.$ Применяя правило Крамера (см. § 4.2), имеем $(k = 1, \dots, m)$
$x_k =$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1}(b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n)a_{1,k+1} \dots a_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \dots a_{m,k-1}(b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n)a_{m,k+1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Учитывая свойства определителей, получаем равенства вида (12)

$$x_k = \frac{\Delta^k}{\Delta} - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{kj} x_j \qquad (k = 1, \dots, m),$$

где число α_{kj} равно определителю, который получается из определителя Δ заменой k-го столбца соответственно на j-й столбец матрицы A $(j = m + 1, \dots, n)$, деленному на Δ. Например,

$$\alpha_{1,m+1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{1,m+1} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,m+1} & a_{m2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Обратно, пусть система $x_1, \dots, x_m$ есть базис, т. е. выполняются соотношения (12). Для матрицы равенств (12)

$$\Delta_* = 1, \quad \Delta_*^k = \beta_k, \quad \frac{\Delta_*^k}{\Delta_*} = \beta_k \geqslant 0.$$

Допустимыми элементарными преобразованиями эта матрица переходит в матрицу равенств (4). При этом определители Δ_* и Δ_*^k переходят в определители Δ и Δ^k пропорционально. Поэтому

$$\frac{\Delta^k}{\Delta} = \beta_k \geqslant 0.$$

Пример 6. Найти базисные переменные в системе ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + ax_2 - 2x_4 = 5, \end{cases}$$

где a — некоторое число.

Решение. Если $a \leqslant 0$, то система ограничений несовместна в области $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, 5)$. Поэтому будем считать $a > 0$. Выясним, при каком a элементы x_1, x_2, x_3 будут базисом. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = 2(1-a) \neq 0, \quad a \neq 1.$$

Далее,

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & a & 0 \end{vmatrix} = 4a - 10, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & a & 5 \end{vmatrix} = 22(1-a).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta^1}{\Delta} = \frac{2a-5}{1-a} \geqslant 0, \quad 1 < a \leqslant \frac{5}{2};$$

$$\frac{\Delta^2}{\Delta} = \frac{3}{a-1} > 0, \quad a > 1; \quad \frac{\Delta^3}{\Delta} = 11 > 0.$$

Таким образом, при $1 < a \leqslant \frac{5}{2}$ все отношения $\Delta^k/\Delta \geqslant 0$ $(k = 1, 2, 3)$ и $\{x_1, x_2, x_3\}$ — базис.

Для того чтобы написать систему (12), нет необходимости вычислять все нужные определители. Надо просто преобразовывать матрицу B, как мы это делали в § 4.7.

Пусть $a = 2$. Получим базис из элементов x_1, x_2, x_3. Для этой цели будем матрицу B преобразовывать так, чтобы в первых трех столбцах по главной диагонали стояли 1, а на остальных местах — 0.

Итак,

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{22}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & 0 & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & 0 & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -14 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & 0 & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{5}{2} & 11 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица определяет следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 \quad -\frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 &= 3 \\ x_3 - \frac{9}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_5 &= 11. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно проверить, при каком a переменные x_1, x_2, x_5 образуют базис.

28.9. Задачи. Найти минимум функции $f(\boldsymbol{x}) = x_4 - x_5$ при ограничениях:

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 + 3x_5 = 3, \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 + 3x_5 = 3, \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 - x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

Приведем решение первой задачи. Итак, необходимо найти минимум линейной формы $f(x)=x_4-x_5$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 2x_1+x_3-2x_4+x_5=2, \\ x_1-x_2-x_4+3x_5=3. \end{cases}$$

Согласно рассмотренной выше теории мы должны определить свободные переменные и выделить какой-либо базис, чтобы затем применить симплекс-метод для нахождения минимума функции f.

Так как в системе ограничений три уравнения, то в каждый базис входят какие-либо три переменные из x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Всего из пяти элементов можно составить десять различных комбинаций по три элемента $\left(C_5^3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}=10,\ C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)$.

В принципе, мы должны проверить все тройки элементов и убедиться, какие из них являются базисами.

Выясним, будут ли элементы x_1, x_2, x_3 образовывать базис. Определитель Δ, составленный из коэффициентов при этих неизвестных в системе ограничений, имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=4\neq0.$$

Далее,

$$\Delta^1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=6, \quad \Delta^2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-8.$$

Отношение $\frac{\Delta^2}{\Delta}=-2<0$, следовательно, согласно теореме 2 п. 28.8 элементы x_1, x_2, x_3 не образуют базиса.

Проверим тройку x_1, x_3, x_4:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq0,$$

$$\Delta^1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta^2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=8.$$

Отношение $\frac{\Delta^2}{\Delta}=-4<0$ и тройка x_1, x_3, x_4 также не образует базиса.

Исследуем тройку x_1, x_4, x_5:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-10\neq 0,\quad \Delta^1=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=-16,$$

$$\Delta^2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-10,\quad \Delta^3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-8.$$

Таким образом, в данном случае все отношения $\frac{\Delta^k}{\Delta}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ положительны и по теореме 2 п. 28.8 элементы x_1, x_4, x_5 образуют базис.

Чтобы написать систему ограничений вида (12), преобразуем матрицу B системы ограничений к необходимому виду. Предварительно переставим столбцы коэффициентов при x_4 и x_5 соответственно на второе и третье места.

Тогда

$$B=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & b_k\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 5 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -4 & 5 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 2\\ 0 & -2 & 5 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 2 & 1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -5 & 2 & 1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

Последняя матрица определяет систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{8}{5}, \\ \quad x_4 \qquad\qquad - x_3 = 1, \\ \qquad x_5 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{4}{5}. \end{cases} \tag{27}$$

Линейная форма f через свободные переменные x_2 и x_3 запишется следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_4 - x_5 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 \quad \text{или} \quad f + \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, теперь необходимо найти минимум линейной функции

$$f + \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5}$$

при ограничениях (27).

Здесь базис $B_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$, ограничения и функция f записаны в форме (12), (13), и мы можем начать применение симплекс-метода.

В данном случае $c_2 = \frac{2}{5} > 0$ и в первом столбце матрицы ограничений имеется положительный элемент $a_{12} = \frac{1}{5} > 0$.

Отношение $\frac{b_1}{a_{12}} = 8 > 0$, т. е. мы имеем случай III_+ и a_{12} — разрешающий элемент.

Составим первую симплекс-таблицу:

Таблица 6*

Базис	x_1	x_4	x_5	x_2	x_3	Свободные члены
x_1	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{5}}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_4	0	1	0	0	-1	1
x_5	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
Форма f	0	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Здесь разрешающий элемент a_{12}. Преобразуем таблицу 6* в таблицу 7*. Строку для x_1 умножим на 5 и перенесем ее в табл. 7*. Строку для x_4 перенесем в табл. 7* без изменений (так как $a_{42}=0$).

Затем умножим первую строку на 2 и прибавим результат к последней строке. Далее умножим первую строку на 2 и вычтем из строки для формы f. Кроме того, переставим местами столбцы для x_1 и x_2. В результате табл. 7* будет иметь следующий вид:

Таблица 7*

Базис	x_2	x_4	x_5	x_1	x_3	Свободные члены
x_2	1	0	0	5	—2	8
x_4	0	1	0	0	—1	1
x_5	0	0	1	2	—1	4
Форма f	0	0	0	—2	0	—3

В табл. 7* коэффициенты формы f неположительны ($c_1=-2$, $c_3=0$), поэтому при ограничениях (27)

$$\min_{\substack{x_j \geqslant 0 \\ j=1, \ldots, 5}} f=-3,$$

и задача решена.

Замечание 7. Можно было бы исследовать все десять троек из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Затем, найдя все базисы B_j ($j=1, 2, \ldots, j_0$; $j_0<10$), мы можем найти минимум f при ограничениях (27) как минимальное значение среди $f_{B_1}, \ldots, f_{B_{j_0}}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Яков Степанович Бугров

Сергей Михайлович Никольский

Высшая математика

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Т. А. Панькова*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32573

Сдано в набор 13.08.87. Подписано к печати 08.01.88. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,42. Тираж 89 000 экз. Заказ № 8—70. Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

Набор и матрицы изготовлены в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Госкомиздате СССР. 113054 Москва, Валовая, 28.

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия». 252119 Киев, Пархоменко. 38—44.

40 коп.