

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
инженерно-технических специальностей вузов*

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.1
Б 90
УДК 51(075.8)

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник: Учеб. пособие для вузов — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 256 с.

Задачник составлен применительно к учебникам тех же авторов «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Ил. 108.

Рецензент

кафедра общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Б $\frac{1702010000-001}{053(02)-87}$ 56-87

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1982; с изменениями, 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание отличается от первого рядом изменений.

Добавлено приложение, содержащее задачи повышенной трудности. Последовательность расположения задач в нем, как правило, иная, чем в основном тексте, поэтому читателю необходимо приложить некоторые усилия, чтобы распознать тип задачи и уяснить, какую теорию данной главы надо привлечь для успешного ее решения. Авторы считают, что задачи и примеры в приложении можно использовать для работы со студентами, успешно занимающимися высшей математикой.

Авторы выражают благодарность С. Г. Кальнею, Ю. П. Лисовцу и другим читателям за отмеченные опечатки и ценные конструктивные предложения, которые способствовали улучшению задачника.

Авторы выражают также глубокую благодарность рецензентам задачника профессору В. А. Ильину и руководимой им кафедре за тщательное рассмотрение пособия и ценные замечания.

В 1983 г. первое издание задачника удостоено Диплома почета ВДНХ СССР, а в 1984 г. комплекс учебников по высшей математике, состоящий из трех книг (учебников) и данного задачника, удостоен премии МВ и ССО СССР и ЦК профсоюзов работников просвещения, высшей школы и научных учреждений.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Задачник составлен применительно к нашим учебникам по высшей математике. При этом принято следующее обозначение учебников:

[1] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление».

[2] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».

[3] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

В начале каждого параграфа задачника указаны глава и параграф из названных выше учебников, где можно найти соответствующий теоретический материал.

Как правило, число задач по разделу минимально и соответствует числу учебных часов, отведенных на изучение данного материала. Можно рекомендовать задачи с нечетными номерами решать в аудитории, а задачи с четными номерами давать студентам для самостоятельного решения.

На практических занятиях можно также использовать задачи, вошедшие в учебники [1]—[3]. В задачник эти задачи не включены.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Действительные числа. Множества

Применяя метод математической индукции, доказать следующие соотношения:

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$.
2. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
3. $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x > -1$.
4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Для решения нижеследующих задач необходимо изучить главу 1 из [1].

5. Пусть множество A состоит из юношей данной группы, а B — из девушек той же группы. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда A или B — пустые множества.

6. Пусть $A = \{2n\}$, $B = \{2n+1\}$. Найти $A+B$, AB , $A \setminus B$ (n — натуральное).

7. Какое число больше, a или b :

$$a = 1, (1234512), \quad b = 1, (12345);$$

$$a = 1, (12302), \quad b = 1, (123);$$

$$a = 1, (123412), \quad b = 1, (1234).$$

8. Выяснить, к какому числу a стабилизируется последовательность действительных чисел:

$$a_1 = 0,10101010\dots,$$

$$a_2 = 0,1100110011\dots,$$

$$a_3 = 0,111000111000\dots,$$

$$a_4 = 0,111100001111\dots,$$

$$a_n = 0, \underbrace{11\dots1}_{n \text{ раз}} \underbrace{00\dots0}_{n \text{ раз}} 01\dots10\dots0\dots$$

.....

9. Найти сумму действительных чисел $a = 0,(12)$ и $b = 0,(13)$.

10. Даны множества $A = [2, 5]$, $B = (3, 6]$. Найти $A + B$, AB , $A \setminus B$.

11. Решить неравенства:

а) $|x + 3| < 0,1$; б) $|x - 3| \geq 10$;

в) $|x| > |x + 3|$; г) $|3x - 1| < |x - 1|$;

д) $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$.

12. Какое из чисел больше: a или $(-a)$?

13. Пусть $a \geq 0$. Для каких чисел b имеют место соотношения:

а) $|a + b| = |a| + |b|$; б) $|a - b| = |a| + |b|$;

в) $|a + b| < |a| + |b|$; г) $|a - b| < |a| + |b|$.

14. Найти модуль числа: а) $\ln(1/e)$; б) $\sin(3\pi/2)$; в) $\cos(7\pi/4)$.

§ 2. Предел последовательности (см. [1], глава 2)

15. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

и определить для каждого $\varepsilon > 0$ число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ если } n > n_0.$$

Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,001	0,00001	...
n_0				

Найти пределы:

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^6 n}{n^2 + 1}$. 17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha \sin(n!)}{n+1}$ ($0 \leq \alpha < 1$).

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$.

20. Доказать, что переменная α_n есть бесконечно малая, если

$$\alpha_n = \frac{n}{n^3 + 1}; \quad \alpha_n = \frac{1}{n!}; \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

21. Доказать, что переменная β_n является бесконечно большой, если

$$\beta_n = (-1)^n n^2; \quad \beta_n = 2\sqrt{n}; \quad \beta_n = \ln(n + 1).$$

22. Будет ли последовательность

$$x_n = n^{(-1)^{n/2}}$$

бесконечно большой?

Доказать равенства:

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n + 10} - \sqrt{3n}) = 0.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{3}{2}.$$

Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$25. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$26. x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{n+1}{2n-1}.$$

27. Найти наибольший элемент последовательностей:

$$x_n = \frac{n^2}{2^n}; \quad x_n = \frac{\sqrt{n+1}}{10+n}.$$

28. Найти наименьший элемент последовательностей:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad x_n = n^2 - 9n - 10.$$

29. Найти $\inf x_n, \sup x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lim x_n, \overline{\lim} x_n$, если

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{2 + (-1)^n}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

30. Какие числа являются частичными пределами последовательности

$$1, \frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{4}, -1, 1, \dots$$

Под *частичным пределом* произвольной ограниченной последовательности мы понимаем предел ее сходящейся подпоследовательности. Существование таких подпоследовательностей у ограниченной последовательности вытекает из теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимости последовательностей:

$$31. x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2}{2^n} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\sin k^2}{2^k}.$$

$$32. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \quad 33. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kl}{k(k+1)}.$$

§ 3. Функция. Предел функции (см. [1], глава 3)

Найти область E задания функции $y = f(x)$ и образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f :

$$34. y = \frac{1}{1+x^2}. \quad 35. y = \sqrt{2+3x-x^2}.$$

36. Найти $f(0)$, $f(x+2)$, $f(1/x)$, $f(x)+1$, $1/f(x)$, если

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Построить графики функций:

$$37. y = 8x - 2x^2. \quad 38. y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$39. y = -x^2 + 2x - 1. \quad 40. y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$41. y = \frac{3x+4}{4x-3}.$$

42. Определить нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$, если

$$f(x) = x^2 \text{ на } [-2, 5]; \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{x} \text{ на } (0, 3].$$

У к а з а н и е. На множестве $(0, 3]$ $\varphi(x) \geq 2$.

43. Построить графики функций:

$$f(x) = \sup_{0 \leq t \leq x} \{\sin t\}; \quad \varphi(x) = \inf_{0 \leq t \leq x} \{\sin t\}.$$

Найти пределы функций:

$$44. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + 3x^3};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 4} \right)^x;$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}].$$

$$45. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}.$$

$$47. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$48. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

Исследовать на непрерывность, изобразить графически функции и определить характер точек разрыва:

$$49. f(x) = |x - 1|. \quad 50. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$$

$$51. f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3). \quad 52. y = \frac{1+x}{1+x^3}.$$

$$53. y = \frac{x}{1+x}. \quad 54. y = \operatorname{sign}(\cos x).$$

$$55. y = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$56. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a+x, & x > 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ (не зависящее от точек промежутка) такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

как только

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

Доказать, что функции $f(x)$ равномерно непрерывны на $[a, b]$:

$$57. f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 20 - 8x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$58. f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

59. Найти обратную функцию для функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Пусть $x \rightarrow 0$. Выделить главный член вида Ax^m ;

$$60. f(x) = 3x + x^4. \quad 61. f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}.$$

§ 4. Производная

(см. [1], глава 4)

$$62. \text{Найти } f'(0), f'(2), \text{ если } f(x) = 2 - 2x + x^3.$$

$$63. \text{Найти } f'(0), f'(1), \text{ если } f(x) = x \arcsin \frac{x}{x+1}.$$

Найти производные функций:

$$64. y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$65. \text{ а) } y = x + \sqrt[3]{x}; \quad \text{ б) } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{ в) } y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}; \quad \text{ г) } y = x \sqrt{1+x^2};$$

$$\text{ д) } y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \text{ е) } y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$\text{ ж) } y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}; \quad \text{ з) } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$\text{ и) } y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}; \quad \text{ к) } y = \frac{1}{\cos^n x};$$

$$\text{ л) } y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}; \quad \text{ м) } y = e^{e^x} + e^{ee^x};$$

$$\text{ н) } y = x^{a^a} + a^{x^a} \quad (a > 0);$$

$$\text{ о) } y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad \text{ п) } y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$66. y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x. \quad 67. y = e^{-x^2}.$$

$$68. \text{ а) } y = \sin x^2; \quad \text{ б) } y = \sin^2 x; \quad \text{ в) } y = \sin^3 x^7; \\ \text{ г) } y = \cos(\sin x); \quad \text{ д) } y = \cos x^2; \quad \text{ е) } y = \cos^2 x^4.$$

$$69. \text{ а) } y = \arcsin(x/a); \quad \text{ б) } y = \operatorname{arctg}(x/a); \\ \text{ в) } y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}); \quad \text{ г) } y = \arcsin(\sin x);$$

$$\text{ д) } y = \arccos(x/a); \quad \text{ е) } y = e^{x^3+x}.$$

$$70. y = \ln \operatorname{tg}(x/2).$$

$$71. \text{ а) } y = x \operatorname{arctg} x; \quad \text{ б) } y = \ln^3 x^2;$$

$$\text{ в) } y = \ln(\ln(\ln x)); \quad \text{ г) } y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$\text{ д) } y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1});$$

$$\text{ е) } y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{ ж) } y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6);$$

$$\text{ з) } y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2});$$

$$\text{ и) } y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}; \quad \text{ к) } y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x};$$

$$\text{ л) } y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1};$$

$$\text{ м) } y = \frac{x^5}{1+x^{12}} + \operatorname{arctg} x^6; \quad \text{ н) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x);$$

$$\text{ о) } y = x \operatorname{arctg} x - 0,5 \ln(1+x^2) - 0,5 (\operatorname{arctg} x)^2;$$

$$\text{ п) } y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2}).$$

р) Имеет место формула

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1}(x) & \dots & a_{k-1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1}(x) & \dots & a_{k+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1}(x) & \dots & a_{k-1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1}(x) & \dots & a_{k+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где элементы определителя $a_{ij}(x)$ — дифференцируемые функции. Таким образом, производная определителя n -го порядка равна сумме n определителей n -го порядка, каждый из которых отличается от исходного определителя тем, что в нем соответствующая строка заменена строкой из производных элементов этой строки.

Доказать формулу дифференцирования для определителей второго и третьего порядков.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

$$72. y = \begin{cases} 1 - x, & -2 < x < 1. \\ (1 - x)(2 - x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2 - x), & 2 < x < 4. \end{cases}$$

$$73. y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1 + x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти логарифмические производные (т. е. y'/y) функций y :

$$74. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$75. y = \operatorname{ch}^2 x.$$

Найти производные от гиперболических функций:

$$76. \text{ а) } y = \operatorname{sh}(x^2 + 1); \quad \text{ б) } y = \operatorname{sh}^3 x^6.$$

$$77. y = \operatorname{ch}^2(x^2 + x + 1).$$

$$78. \text{ а) } y = \operatorname{th}^2 x; \quad \text{ б) } y = \operatorname{th} x^2.$$

$$79. \text{ а) } y = \operatorname{th}(\ln x + 1); \quad \text{ б) } y = \operatorname{Arsh} x;$$

$$\text{ в) } y = \operatorname{Arsh}(x + \sqrt{1 + x^2}); \quad \text{ г) } y = \ln \operatorname{sh} x;$$

$$\text{ д) } y = \operatorname{ch} \ln x; \quad \text{ е) } y = e^{\operatorname{th} x};$$

$$\text{ ж) } y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x} \quad (x > 0);$$

$$\text{ з) } y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}; \quad \text{ и) } y = \operatorname{th} \frac{x}{2} - \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

80. Для функции $f(x) = x^2 + x + 1$ определить дифференциал и приращение в точке $x = 1$ для $\Delta x = 0,1$.

Найти дифференциалы функций:

$$81. d(xe^x). \quad 82. d(\operatorname{sh} x).$$

$$83. d(\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x). \quad 84. d(\ln(1 - x^2)).$$

85. Найти производные второго порядка от следующих функций:

$$\text{ а) } y = e^{-x^2} \equiv \exp(-x^2); \quad \text{ б) } y = x \sqrt{1 + x^2}.$$

86. Пусть дан определитель (Вронского)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

где функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ непрерывны на (a, b) вместе со своими производными до n -го порядка включительно.

Доказать, что

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

87. $y = x^5$, найти d^4y . 88. $y = e^x \ln x$, найти d^3y .

Найти производные y'_x и y''_{x^2} от функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

89. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

90. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

91. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

92. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

93. а) Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = 2 + x - x^3$$

в точке $A = (2, -4)$.

б) Выяснить, имеют ли общую касательную графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \ln(1+2x)$ в точке $(0, 0)$.

Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их точке пересечения с абсциссой $x = x_0$ называется угол φ между касательными к этим кривым в этой точке.

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \\ &= \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}, \end{aligned}$$

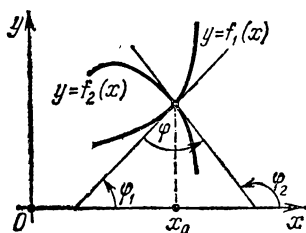


Рис. 1

где φ_1, φ_2 — углы, образованные указанными касательными с осью x (рис. 1).

94. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ($0 < x < \pi$)?

95. Под каким углом пересекаются кривые $y = x^\alpha$ и $y = x^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ ($0 < \alpha < 1$) в точке $(1, 1)$?

96. Под каким углом кривая $y = \ln(1 + (x/\sqrt{3}))$ пересекает ось x ?

97. а) Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = (x-1)(x-2)$ на $[1, 2]$.

б) Многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корень $x = 1$. Доказать, что многочлен $\frac{d}{dx}P_4(x)$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

в) Доказать, что все корни многочлена $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$ действительны и принадлежат интервалу $(-1, 1)$.

98. Проверить справедливость теоремы Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ для функций:

а) $y = 1 + x + x^3$;

б) $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, A, B, C — действительные числа;

в) $f(x) = Ax^3 + Bx + C$;

на $[0, 1]$. Найти точку c .

99. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на (a, b) ($|f'(x)| \leq M$), то:

а) $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b) .

б) Если a и b — конечные числа, то $f(x)$ ограничена на (a, b) .

У к а з а н и е. Пусть x — произвольная точка, а x_0 — фиксированная точка (a, b) . Тогда

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| = |f'(c)| |x - x_0| + |f(x_0)|, \end{aligned}$$

где c находится между точками x и x_0 .

в) Если интервал (a, b) бесконечный, то функция $f(x)$ может быть неограниченной. Рассмотреть функцию $f(x) = \ln x$ на $(1, \infty)$.

100. Определить промежутки монотонности у функций:

а) $y = 3 + x - x^2$; б) $y = 4x - x^4$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (отрицательную) производную на (a, b) , то она возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Этот факт можно использовать при доказательстве неравенств.

Например, функция $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ непрерывна на $[0, \infty)$. Она возрастает на $[0, \infty)$, так как $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$ на $(0, \infty)$. Далее $\varphi(0) = 0$, поэтому $\forall x \in (0, \infty)$

$$e^x - 1 - x > 0.$$

На $(-\infty, 0)$ функция $\varphi(x)$ убывает, поэтому $e^x - 1 - x > \varphi(0) = 0$. Таким образом, $\forall x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Доказать неравенства:

$$101. x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0).$$

$$102. \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0).$$

Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

$$103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}. \quad 104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}.$$

$$105. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

$$106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}. \quad 107. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{4x^2 + 1}.$$

$$108. \lim_{x \rightarrow +0} x^x. \quad 109. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x - x}{x - \operatorname{sh} x};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x; \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x;$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{1/x^2}; \quad \text{н) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0);$$

$$\text{о) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n - \text{целое число});$$

$$\text{п) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m, n - \text{целые числа});$$

$$\text{р) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1};$$

$$\text{с) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right). \text{ Указание. Умножить и разделить на сопряженное выражение;}$$

$$\text{т) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \text{у) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

110. Выяснить возможность применения правила Лопиталья в примере

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

Написать разложения следующих функций по степеням x :

111. $f(x) = \operatorname{tg} x$ до члена x^5 .

112. $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена x^3 .

113. $y = \ln \cos x$ до члена x^4 .

114. $y = \sin(\sin x)$ до члена x^3 .

Найти пределы, применяя разложение по формуле Тейлора:

115. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}$. **116.** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

117. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{x^3}$. **118.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} x^2}{x^4}$.

119. С помощью формулы Тейлора вычислить:

а) число e с точностью до 10^{-6} ;

б) число $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-6} ;

в) число $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-3} ;

г) числа $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5} (см. [1], § 9.14, (8)).

120. Исследовать на локальный экстремум функции:

а) $y = 2 - x - x^2$; б) $y = |x|$; в) $y = 2x^2 - x^4$;

г) $y = x + \frac{1}{x}$; д) $y = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$);

е) $y = 1/(4 + x^2)$; ж) $y = x/(1 + 4x^2)$;

з) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; и) $y = \cos x + 0,5 \cos 2x$;

к) $y = \sin x + 0,5 \sin 2x$.

121. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 2^x$ на $[0, 5]$; б) $y = x + \frac{1}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$.

122. Найти расстояние от кривой $y = x^2$ до прямой $y - x + 2 = 0$.

123. Найти \sup и \inf следующих функций:

а) $y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$

б) $y = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ на $(0, \infty)$.

124. Найти промежутки вогнутости и точки перегиба следующих функций:

а) $y = 3x^2 - x^3$; б) $y = \exp(-x^2)$.

125. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = e^{1/x}$;

в) $y = \exp(-x^2)$; г) $y = \ln(1 + e^x)$.

126. Построить графики функций, проведя полное исследование их поведения (экстремум, перегиб, нули функции, направление вогнутости, асимптоты):

а) $y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y = \frac{e^x}{1+x}$.

127. Построить графики функций, заданных в параметрическом виде (см. [1], § 4.22):

а) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$; б) $x = \frac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t^3}{1+t^2}$.

128. а) В эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, наибольшей площади (рис. 2).

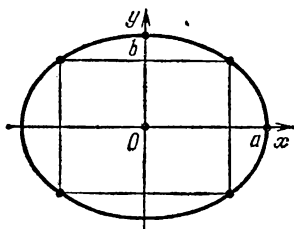


Рис. 2

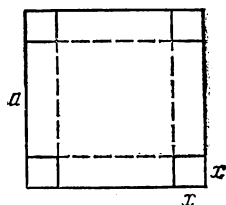


Рис. 3

б) Дан квадратный лист жести со стороной a . Из него в его углах вырезаются одинаковые квадраты (рис. 3) со стороной x и, загибая лист по штриховым линиям, делают прямоугольную коробку. При каких размерах квадратов объем коробки будет наибольший?

в) Корабль K (рис. 4) стоит в 9 км от ближайшей точки B прямолинейного берега. С корабля нужно послать курьера в лагерь L , находящийся на берегу и расположенный в 15 км (считая по берегу) от точки B . В каком пункте P берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время,

если он идет пешком 5 км в час, а на веслах — 4 км в час?

г) Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a

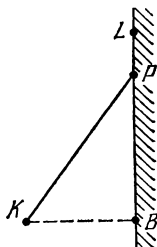


Рис. 4

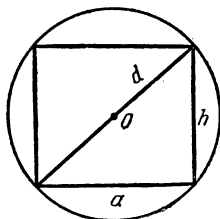


Рис. 5

и высотой h (рис. 5). При каких значениях a и h прочность балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2 ?

129. В параболу, заданную уравнением $y = 3 - x^2$, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на оси x , а две вершины на параболе (рис. 6).

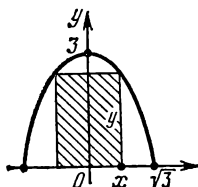


Рис. 6

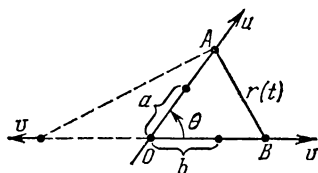


Рис. 7

130. Два корабля A и B плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент времени расстояния их от пересечения путей были соответственно равны a и b (рис. 7).

131. Определить радиус кривизны кривых:

а) $y^2 = 2px$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

в) $y = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$, $x = \frac{1}{2}(t - \sin t)$ (циклоида).

132. Составить уравнение эволюты циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Неопределенный интеграл

(см. [1], глава 5)

Применяя табличные интегралы, найти:

$$133. \int x^2 (5 - x)^4 dx. \quad 134. \int (1 - x^2)^2 dx.$$

$$135. \int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}. \quad 136. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$137. \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx. \quad 138. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$139. \int \operatorname{th}^2 x dx. \quad 140. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$141. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx. \quad 142. \int (2x - 3)^{99} dx.$$

$$143. \text{ а) } \int \frac{dx}{2 + 3x^2}; \quad \text{ б) } \int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx;$$

$$\text{ в) } \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx; \quad \text{ г) } \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$\text{ д) } \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^3 dx; \quad \text{ е) } \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{ ж) } \int \frac{x^3}{1+x^4} dx;$$

$$\text{ з) } \int \frac{x^2}{1-x^2} dx; \quad \text{ и) } \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx; \quad \text{ к) } \int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$\text{ л) } \int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx; \quad \text{ м) } \int (2x - 9)^{10} dx;$$

$$\text{ н) } \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}; \quad \text{ о) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}};$$

$$\text{ п) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}; \quad \text{ р) } \int (e^{-2x} + e^{-3x}) dx.$$

Преобразовывая надлежащим образом подынтегральное выражение или применяя подходящие подстановки, найти:

$$144. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 145. \int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$$

$$146. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}. \quad 147. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\begin{aligned}
 148. & \int \operatorname{tg} x \, dx. & 149. & \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}. \\
 150. & \int x \sqrt{2-5x} \, dx. & 151. & \int \frac{2^x 3^x dx}{9^x - 4^x}. \\
 152. & \text{а) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}; & \text{б) } & \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} \, dx; \\
 & \text{в) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}; & \text{г) } & \int \frac{x^3 dx}{x^8-2}; & \text{д) } & \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \\
 & \text{е) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}; & \text{ж) } & \int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx; & \text{з) } & \int \operatorname{ctg} x \, dx; \\
 & \text{и) } \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}; & \text{к) } & \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}; & \text{л) } & \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx; \\
 & \text{м) } \int \operatorname{sh}^2 x \, dx; & \text{н) } & \int \operatorname{ch}^2 x \, dx; & \text{о) } & \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}; \\
 & \text{п) } \int \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{1-3x}}; & \text{р) } & \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} \, dx; & \text{с) } & \int \frac{dx}{1+e^x}.
 \end{aligned}$$

Применяя метод интегрирования по частям, найти:

$$\begin{aligned}
 153. & \int \operatorname{arctg} x \, dx. & 154. & \int x e^{-x} \, dx. & 155. & \int x \operatorname{sh} x \, dx. \\
 156. & \int x \sin x \, dx. & 157. & \int \arcsin x \, dx. \\
 158. & \int x \cos x \, dx. & 159. & \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx. \\
 160. & \text{а) } \int x^2 \sin 2x \, dx; & \text{б) } & \int x \operatorname{arctg} x \, dx; \\
 & \text{в) } \int x^2 e^{-2x} \, dx; & \text{г) } & \int x^3 e^{-x^2} \, dx; & \text{д) } & \int \ln x \, dx; \\
 & \text{е) } \int x^n \ln x \, dx \quad (n \neq -1); & \text{ж) } & \int x^3 \operatorname{ch} 3x \, dx; \\
 & \text{з) } \int x^2 \operatorname{sh} x \, dx; & \text{и) } & \int \sin x \ln (\operatorname{tg} x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти интегралы от рациональных функций:

$$\begin{aligned}
 161. & \text{а) } \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx; & \text{б) } & \int \frac{2x+1}{(x-2)^3(x+5)} \, dx. \\
 162. & \text{а) } \int \frac{dx}{x^2-2x+2}; & \text{б) } & \int \frac{dx}{x^2-2x+1}; \\
 & \text{в) } \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \, dx.
 \end{aligned}$$

$$163. \text{ а) } \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}; \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+2)}.$$

$$164. \text{ а) } \int \frac{dx}{(x+1)(1-x)^2}; \quad \text{ б) } \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$$

$$\text{ в) } \int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}; \quad \text{ г) } \int \frac{dx}{x^3+1}; \quad \text{ д) } \int \frac{x dx}{x^3-1};$$

$$\text{ е) } \int \frac{dx}{x^4-1}; \quad \text{ ж) } \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей:

$$165. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$166. \text{ а) } \int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2 \sqrt{x}}; \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})};$$

$$\text{ в) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}; \quad \text{ г) } \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx;$$

$$\text{ д) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}};$$

$$\text{ е) } \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1} \cdot (x-b)^{n-1}}} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

лю).

Найти интегралы от квадратичных иррациональностей:

$$167. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}. \quad 168. \int \sqrt{x^2-2x+2} dx.$$

Интегрирование тригонометрических функций:

$$169. \text{ а) } \int \sin^4 x dx; \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{\sin 2x}.$$

$$170. \text{ а) } \int \cos^3 x dx; \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{\cos 2x}.$$

$$171. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x - 1} \quad (t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}).$$

$$172. \text{ а) } \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (t = \operatorname{tg} x);$$

$$\text{ б) } \int \frac{dx}{1+\cos x}; \quad \text{ в) } \int \frac{dx}{1-\cos x}; \quad \text{ г) } \int \frac{dx}{1+\sin x};$$

$$\text{ д) } \int [\operatorname{th}(2x+1) + \operatorname{cth}(2x-1)] dx.$$

§ 2. Определенный интеграл
(см. [1], глава 6)

173. Доказать, что функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 0, & x - \text{иррационально,} \\ 1, & x - \text{рационально} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке $[a, b]^1$.

174. Не вычисляя интегралы, выяснить, какой из них больше:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} \, dx$;

б) $\int_0^1 e^x \, dx$; $\int_0^1 (1+x) \, dx$.

Вычислить определенные интегралы при помощи формулы Ньютона — Лейбница:

175. а) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$;

в) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$; г) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$; д) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; ж) $\int_0^2 |1-x| \, dx$; з) $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

176. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a, b > 0)$.

177. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$. 178. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx$. 179. $\int_0^1 x f''(x) \, dx$.

180. Доказать, что при натуральных k и l :

а) $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ \pi, & \text{если } k = l; \end{cases}$

б) $\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ \pi, & \text{если } k = l; \end{cases}$

$$\text{в)} \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0 \quad \forall k, l.$$

У к а з а н и е. Преобразовать подынтегральное выражение в сумму тригонометрических функций.

181. Найти производные от интегралов:

$$\text{а)} \frac{d}{dx} \int_a^x \sin t^2 \, dt; \quad \text{б)} \frac{d}{da} \int_a^b \sqrt{1+t^2} \, dt;$$

$$\text{в)} \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 \, dx.$$

182. Проверить выполнение теоремы о среднем

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b-a)$$

для функции $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$.

183. Вычислить определенный интеграл от функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

§ 3. Приложения определенного интеграла

(см. [1], глава 7)

Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

$$184. y = x^2, y = 2 - x.$$

$$185. y = h \left(1 - \frac{4x^2}{b^2} \right), y = 0 \quad (h > 0, b > 0) \quad (\text{рис. 8}).$$

$$186. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

187. $r = a(1 + \cos \varphi)$, r, φ — полярные координаты (рис. 9).

188. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \quad (1 \leq x \leq e).$$

189. Найти длину дуги астроида (рис. 10)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

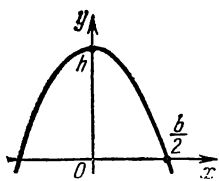


Рис. 8

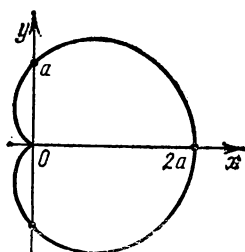


Рис. 9

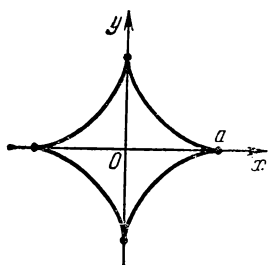


Рис. 10

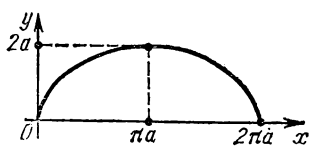


Рис. 11

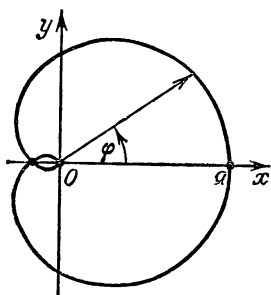


Рис. 12

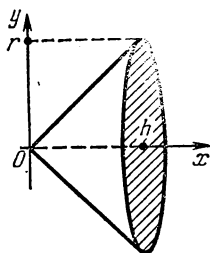


Рис. 13

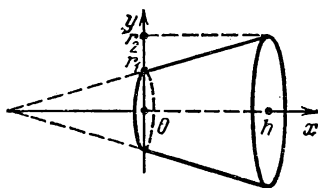


Рис. 14

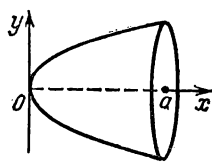


Рис. 15

190. Найти длину дуги одной арки циклоиды (рис. 11)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

191. Вывести формулу длины дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$.

192. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением (рис. 12)

$$r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$$

в полярных координатах.

193. Найти длину дуги кардиониды (см. рис. 9)

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

194. Найти объем:

а) конуса (рис. 13) с образующей

$$y = \frac{r}{h} x \quad (0 \leq x \leq h);$$

б) конической бочки с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h (рис. 14);

в) тела, образованного вращением одной арки синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$);

г) тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси x ($0 \leq x \leq a$) (рис. 15).

195. Вычислить площади поверхностей, образованных вращением кривых:

а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) вокруг оси симметрии кривой;

б) $9y^2 = x(3 - x)^2$ ($0 \leq x \leq 3$) вокруг оси Ox ;

в) $y = x^3$ ($0 \leq x \leq 1$) вокруг оси Ox ;

г) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (астроида) вокруг оси Ox .

196. Вычислить интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и оценить погрешность:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8); \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12).$$

197. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени для функции $f(x)$, если $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=0$.

§ 4. Несобственные интегралы

(см. [1], глава 6)

198. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0);$$

$$\text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г) } \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

199. Исследовать сходимость интегралов, применяя признак сравнения:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$\text{в) } \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

200. Вычислить интегралы, используя метод интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} x e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0);$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

201. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^p} \quad (p \geq 0); \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^p + x^q} \quad (p, q \geq 0);$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{1+x^n} \quad (n \geq 0).$$

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Определители и матрицы

(см. [2], § 1—3)

Вычислить определители:

$$202. \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}. \quad 203. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad 204. \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$205. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}. \quad 206. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

$$207. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}. \quad 208. \begin{vmatrix} \frac{x}{1+x} & \frac{2x+1}{1+x} \\ \frac{-1}{1+x} & \frac{x}{1+x} \end{vmatrix}.$$

$$209. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 210. \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix}.$$

211. Выяснить четность или нечетность перестановок:

а) 1, 2, 4, 3, 5; б) 5, 1, 2, 3, 4;

в) 1, 3, 2, 5, 4; г) 1, 4, 3, 2, 5.

212. Найти адьюнкты всех элементов определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

и проверить, что

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 a_{1k} A_{1k}.$$

213. Вычислить определители путем накопления нулей в строке или столбце:

$$а) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

214. Вычислить определители Вандермонда:

$$а) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

215. Перемножить определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

всеми четырьмя возможными способами (т. е. умножением строк или столбцов Δ_1 на строки или столбцы Δ_2). Проверить, что во всех случаях произведение определителей $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$ равно 35.

216. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = \lambda A + \mu B$, если:

а) $\lambda = 1, \mu = 2$; б) $\lambda = -5, \mu = 2$.

217. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

найти сопряженную с ней матрицу A^* и определить ранг A .

§ 2. Системы линейных уравнений

(см. [2], § 4)

Решить системы уравнений по правилу Крамера:

$$218. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases} \quad 219. \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$$

$$220. \begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases} \quad 221. \begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

$$222. \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

223. Путем преобразования расширенной матрицы B выяснить, разрешима ли система

$$\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 5, \\ x + 3y + 5z - 2t = 3, \\ x + 5y - 9z + 8t = 1, \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12. \end{cases}$$

224. Найти ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

путем преобразования строк и столбцов матриц (накапливая нули).

§ 3. Векторы

(см. [2], § 5)

225. а) Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = (1, 4)$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{b} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

б) Вычислить проекции x, y, z вектора \mathbf{a} на оси координат, если $|\mathbf{a}| = 2$, $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = 2\pi/3$, где α, β, γ — углы, которые составляет вектор \mathbf{a} с осями x, y, z соответственно.

в) Найти проекции вектора \mathbf{a} из пункта б) на направленную прямую L с единичным ортом $\mathbf{b} = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

226. Пусть даны векторы $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$. Найти модули этих векторов, расстояние между точками \mathbf{a} и \mathbf{b} (если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} отложены из начала координат) и скалярное произведение $\mathbf{a}\mathbf{b}$.

227. Найти косинус угла между векторами:

а) $\mathbf{a} = (2, -4, 4)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 6)$;

б) $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$;

в) $\mathbf{a} = (1, 3, \sqrt{6})$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$.

228. Может ли вектор $\mathbf{a} = (x, y, z)$ составлять с осями координат углы $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$?

229. Найти координаты вектора \mathbf{a} , если $|\mathbf{a}| = 3$, $\alpha = \beta = \gamma$.

230. Даны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} такие, что $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$. Найти $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

231. Даны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} такие, что $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 30$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

232. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0, 1)$.

233. Пусть векторы \mathbf{a} и $\mathbf{b} \neq 0$ ортогональны. При каком значении параметра λ вектор $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ ортогонален к вектору $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?

§ 4. Деление отрезка в данном отношении

(см. [2], § 7)

234. Найти на отрезке, соединяющем точки $O = (0, 0, 0)$ и $A = (1, 2, 2)$ трехмерного пространства R_3 , точку $M = (x, y, z)$, делящую этот отрезок в отношении $2:3$.

235. Найти координаты центра масс $M = (x, y)$ системы двух материальных точек $A = (3, -5)$, $B = (-1, 1)$, в которых сконцентрированы массы $q = p = 1$.

236. В условиях задачи 235 пусть $q = 3$, $p = 5$. Найти координаты центра масс.

237. Отрезок с концами $A = (1, -5)$, $B = (4, 3)$ разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

§ 5. Прямая линия

(см. [2], § 8)

238. Выяснить, какие из точек $M_1 = (3, 1)$, $M_2 = (2, 3)$, $M_3 = (-2, 1)$ лежат на прямой $2x + 3y - 13 = 0$.

239. Записать уравнение прямой $2x + 3y - 13 = 0$ как уравнение прямой с угловым коэффициентом и как уравнение прямой, проходящей через некоторую точку в данном направлении.

240. Дана прямая $x + 2y + 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (2, 1)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

241. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$$2x - 3y + 5 = 0, \quad 3x + 2y - 7 = 0$$

и одна из его вершин $O = (0, 0)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

242. Привести уравнения прямых: а) $2x + 5y + 4 = 0$; б) $x + y - 1 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$ к нормальному виду.

243. Найти расстояние от точки $A = (1, 2)$ до прямых: а) $2x + 4y - 5 = 0$; б) $2x + 8y + 1 = 0$; в) $x + y = 0$.

§ 6. Плоскость

(см. [2], § 9)

244. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (1, 2, -3)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$.

245. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 3)$.

246. Написать уравнение плоскостей, проходящих через точку $(1, 1, 1)$: а) перпендикулярно и б) параллельно плоскости

$$2x + 4y + z - 5 = 0.$$

247. Какие из плоскостей параллельны друг другу:

а) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y - 2z - 1 = 0$;

б) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$;

в) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $4x - 6y + 10z - 14 = 0$;

г) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $4x - 3y + 10z - 14 = 0$.

248. Привести уравнения плоскостей:

а) $2x - 3y + 6z - 7 = 0$, б) $4x - y + 8z - 14 = 0$ к нормальному виду.

249. Найти расстояния от точки $A = (1, 2, 1)$ до плоскостей:

а) $2x - 3y + 6z - 7 = 0$, б) $2x + y - 2z - 1 = 0$.

250. Найти угол между плоскостями задачи 248.

251. Написать уравнение шаровой поверхности с центром в начале координат, касающейся плоскости $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

252. Записать уравнение $2x + y - 5z - 6 = 0$ как уравнение плоскости в отрезках.

253. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2, -1, 1)$ перпендикулярно плоскостям:

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + z = 0.$$

254. Определить углы α , β , γ , которые составляет нормаль к плоскостям с осями координат:

а) $x + y\sqrt{2} + z - 1 = 0$; б) $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$.

255. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

а) $x - 2y - 2z - 1 = 0$; б) $2x - 3y + 6z - 1 = 0$,
 $x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 6y + 12z + 1 = 0$.

§ 7. Прямая в пространстве

(см. [2], § 10)

256. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

257. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

для того чтобы она: а) пересекала ось абсцисс и б) совпадала с ней.

258. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(1, 0, -1)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (2, -3, 5)$.

259. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(1, -1, -3)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (2, 1, 5)$.

260. Составить канонические уравнения прямых:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

261. Найти угол φ между прямыми

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

262. Даны прямые

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

При каком значении l они пересекаются?

263. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1, -1, 0)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 4y + z = 3$.

§ 8. Ориентация системы векторов.

Векторное и смешанное произведение векторов

(см. [2], §§ 10—13)

264. Заданы векторы:

а) $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 5)$; б) $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 7)$.

Выяснить их ориентацию относительно системы xOy .

265. Пусть векторы a и b образуют угол $\omega = \pi/6$, кроме того, $|a| = 7$, $|b| = 6$. Найти $|a \times b|$.

266. Выяснить, коллинеарны ли векторы $a = (1, 0, 3)$ и $b = (2, 0, 6)$.

267. Какому условию должны удовлетворять векторы a , b , чтобы векторы $a + b$ и $a - b$ были коллинеарны?

268. Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$a \times b = b \times c = c \times a.$$

269. Вычислить синус угла, образованного векторами $a = (-2, 2, 1)$ и $b = (6, 3, 2)$.

270. Найти площадь S параллелограмма, построенного на плоских векторах $a = (1, 2)$, $b = (3, 4)$.

З а м е ч а н и е 1. Если в плоскости xOy задан треугольник с вершинами $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, то площадь этого треугольника, очевидно, равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Таким образом, площадь треугольника ABC равна

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Это равенство можно также записать в виде

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Последний определитель третьего порядка равен определителю второго порядка, записанному выше. Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить первую строку определителя третьего порядка на (-1) и сложить со второй и третьей строками и затем разложить определитель по элементам третьего столбца. В качестве примера вычислить площадь треугольника ABC с вершинами $A = (1, 2)$, $B = (2, -1)$, $C = (0, 1)$.

271. Проверить, компланарны ли векторы:

а) $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, 3)$, $c = (1, 9, -11)$;

б) $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 1, 1)$.

272. Доказать, что четыре точки $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 5)$, $C = (-1, 2, 1)$, $D = (2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

✓ **Замечание 2.** Взаимное расположение прямых.

Зададим две прямые L_1 и L_2 :

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \quad (L_1)$$

$$\frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}, \quad (L_2)$$

где $\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$ ($i = 1, 2$). Введем (единичные) векторы $\mathbf{a}^1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\mathbf{a}^2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, и точки $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Расстоянием d между прямыми L_1 и L_2 называют минимум расстояний между произвольными точками $A \in L_1$ и $B \in L_2$.

Может быть три случая расположения прямых L_1 и L_2 .

I. Прямые L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке. В этом случае, очевидно, $d = 0$.

II. Прямые L_1 и L_2 скрещивающиеся, т. е. они не пересекаются и не параллельны между собой. В этом случае векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 не коллинеарны и расстояние d между L_1 и L_2 вычисляется по формуле

$$d = \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \frac{(\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2)}{|\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2|} \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\|. \quad (1)$$

В самом деле, пусть Π_1 есть плоскость, проходящая через прямую L_1 параллельно прямой L_2 , и Π_2 — плоскость, проходящая через L_2 параллельно L_1 . Очевидно, что плоскости Π_1 и Π_2 параллельны между собой и перпендикулярны вектору $\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2$. Поэтому расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию между плоскостями Π_1 и Π_2 . Так как точка $A_1 \in L_1 \subset \Pi_1$, а точка $A_2 \in L_2 \subset \Pi_2$, то расстояние d между Π_1 и Π_2 , очевидно, равно абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{A_1 A_2}$ на вектор $\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2$:

$$d = |\text{пр}_{\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2} \overrightarrow{A_1 A_2}|,$$

что равно правой части (1) (см. [2], § 5, с. 37).

III. Прямые L_1 и L_2 параллельны. В этом случае можно считать (изменив, если нужно знак в уравне-

ниях прямой L_2), что $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^2$. Расстояние d между L_1 и L_2 вычисляется по формуле (рис. 16)

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{A_1 A_2}|^2 - (\text{пр}_{\mathbf{a}^1} \overrightarrow{A_1 A_2})^2} = \sqrt{|\overrightarrow{A_1 A_2}|^2 - (\overrightarrow{A_1 A_2}, \mathbf{a}^1)^2} = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - [(x_2 - x_1)\alpha_1 + \dots + \\ \dots + (y_2 - y_1)\beta_1 + (z_2 - z_1)\gamma_1]^2} \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1).$$

Замечание 3. Принадлежность двух прямых к одной плоскости.

Покажем, что для того, чтобы две прямые L_1 и L_2 принадлежали к некоторой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

В самом деле, это равенство можно записать в векторной форме следующим образом:

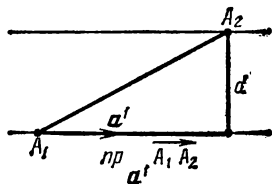


Рис. 16

$\overrightarrow{A_1 A_2}(\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2) = 0$. Но это есть условие принадлежности трех векторов $\overrightarrow{A_1 A_2}$, \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 к одной плоскости (см. [2], § 13), а следовательно, и условие принадлежности прямых L_1 и L_2 к одной плоскости.

Замечание 4. В случаях I и III прямые L_1 и L_2 , очевидно, находятся в одной плоскости. Поэтому для них выполняется равенство (2). В случае же II прямые L_1 и L_2 заведомо не принадлежат ни к какой одной плоскости, и поэтому для них в этом случае равенство (2) не выполняется.

В качестве упражнения найти расстояние между следующими прямыми:

а) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-6}{4}$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{3}$;

б) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-6}{4}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$;

в) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{3}$, $\frac{x-5}{8} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+1}{6}$;

г) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{6}$;

$$д) \frac{x}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{1};$$

$$е) \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$$

(ответы: а) 0; б) $3/\sqrt{2}$; в) $\sqrt{33/2}$; г) $\sqrt{3/14}$; д) $7/\sqrt{2}$; е) 0).

Приведем решение задачи б). В данном примере $A_1=(1, 2, 6)$, $A_2=(0, 1, 2)$. Векторы $(4, 5, 4)$ и $(1, 2, 1)$ не являются единичными. Умножая уравнения прямых на модули этих векторов, получим уравнения прямых в требуемом для нас виде:

$$\frac{x-1}{4/\sqrt{57}} = \frac{y-2}{5/\sqrt{57}} = \frac{z-6}{4/\sqrt{57}}, \quad \frac{x}{1/\sqrt{6}} = \frac{y-1}{2/\sqrt{6}} = \frac{z-2}{1/\sqrt{6}},$$

т. е. $\alpha_1=4/\sqrt{57}$, $\beta_1=5/\sqrt{57}$, $\gamma_1=4/\sqrt{57}$; $\alpha_2=1/\sqrt{6}$, $\beta_2=2/\sqrt{6}$, $\gamma_2=1/\sqrt{6}$. Легко проверить, что условие (2) не выполняется, т. е. наши прямые скрещиваются. Поэтому искомое расстояние будем находить по формуле (1). Найдем векторное произведение единичных векторов $a^1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma)$, $a^2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$:

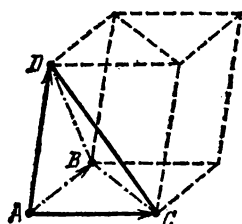


Рис. 17

$$a^1 \times a^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 57}} [-3i + 3k].$$

Отсюда $|a^1 \times a^2| = 1/\sqrt{19}$. Теперь по формуле (1) получаем

$$d = \left| \sqrt{19} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{57 \cdot 6}} \right| = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Замечание 5. Объем тетраэдра.

Пусть в пространстве задан тетраэдр (треугольная пирамида) $ABCD$ с вершинами $A=(x_1, y_1, z_1)$, $B=(x_2, y_2, z_2)$, $C=(x_3, y_3, z_3)$, $D=(x_4, y_4, z_4)$. Требуется найти объем этого тетраэдра (рис. 17).

Из рисунка видно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} . Но нам известно (см. [2], § 13), что объем этого параллелепипеда равен абсо-

лютой величине векторно-скалярного (смешанного) произведения векторов \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} . Поэтому объем V треугольной пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \left| \frac{1}{6} (\vec{AB} \times \vec{AC}) \vec{AD} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Задачи. Найти объем тетраэдра, заданного вершинами:

а) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (2, 1, 0)$, $D = (0, 0, 6)$;

б) $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (0, 0, 8)$ (ответы: а) 1; б) 4).

§ 9. Зависимые и независимые системы векторов (см. [2], § 14)

273. Выяснить, будут ли векторы:

а) $\alpha^1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha^2 = (1, 2, 1, 2)$,

$\alpha^3 = (3, 1, 3, 1)$, $\alpha^4 = (0, 1, 1, 0)$;

б) $\alpha^1 = (1, 0, 1)$, $\alpha^2 = (1, 1, 2)$, $\alpha^3 = (2, 1, 2)$

линейно зависимы или линейно независимы.

274. Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

275. Найти все значения λ , при которых вектор $b = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\alpha^1 = (2, 3, 5)$, $\alpha^2 = (3, 7, 8)$, $\alpha^3 = (1, -6, 1)$.

§ 10. Линейные операторы. Базис (см. [2], § 15—17)

276. Вычислить произведение матриц AB и BA :

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

277. Вычислить выражения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ($n > 3$).

278. Найти все матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, перестановочные (коммутирующие) с матрицей A :

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

279. Найти матрицы, обратные данным:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

280. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Умножая слева обе части уравнения на A^{-1} , получаем ($A^{-1}A = E$)

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

281. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице A , можно решить систему $y = Ax$ относительно x . Пусть $x = By$. Тогда $A^{-1} = B$, потому что $AB y = Ax = y$, т. е. $AB = E$; $BAx = By = x$, т. е. $BA = E$, где E — единичная матрица, т. е. $AB = BA = E$.

Найдем этим способом обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Составим линейную систему

$$Ax = y \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= -2y_1 + y_2, \\ x_2 &= \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

282. Найти A^{-1} указанным способом для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

283. Выяснить, какие из преобразований (операторов) Ax являются линейными и для линейных операторов найти их матрицу:

а) $Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;

б) $Ax = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 1)$.

284. Пусть в базисе i^1, i^2, i^3 заданы линейно независимые векторы a^1, a^2, a^3 . Найти линейное преобразование, переводящее векторы a^1, a^2, a^3 соответственно в b^1, b^2, b^3 , если

$$a^1 = (2, 3, 5), \quad a^2 = (0, 1, 2), \quad a^3 = (1, 0, 0);$$

$$b^1 = (1, 1, 1), \quad b^2 = (1, 1, -1), \quad b^3 = (2, 1, 2).$$

Указание (см. [2], § 16). Если заданы системы векторов

$$a^1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \quad a^2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}), \quad a^3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33});$$

$$b^1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}), \quad b^2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}), \quad b^3 = (b_{13}, b_{23}, b_{33}),$$

то линейный оператор, порожденный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

отображает базис i^1, i^2, i^3 соответственно в a^1, a^2, a^3 . Следовательно, A^{-1} отображает a^1, a^2, a^3 соответственно в i^1, i^2, i^3 . Далее, оператор B , порожденный матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

отображает i^1, i^2, i^3 соответственно в b^1, b^2, b^3 . Следовательно, BA^{-1} отображает a^1, a^2, a^3 соответственно в b^1, b^2, b^3 .

285. Найти линейное преобразование, переводящее векторы

$$a^1 = (2, 0, 3), \quad a^2 = (4, 1, 5), \quad a^3 = (3, 1, 2)$$

соответственно в векторы

$$b^1 = (1, 2, -1), \quad b^2 = (4, 5, -2), \quad b^3 = (1, -1, 1).$$

286. Линейное преобразование A в базисе i^1, i^2, i^3, i^4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе:

а) i^1, i^3, i^2, i^4 ; б) $i^1, i^1 + i^2, i^1 + i^2 + i^3, i^1 + i^2 + i^3 + i^4$.

287. Линейное преобразование A в базисе $a^1 = (1, 2), a^2 = (-1, 1)$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $b^1 = (1, -2), b^2 = (3, -1)$.

288. Пусть преобразование A в базисе a^1, a^2 (см. задачу 287) имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе b^1, b^2 .

289. Проверить, какие из пар векторов ортогональны:

а) $x = (1, 2, 3), y = (0, -3, 2)$;

б) $x = (1, 2, 1), y = (0, 1, 2)$;

в) $x = (1, 0, 1), y = (0, 2, 1)$.

290. Показать, что система векторов

$$e^1 = (1, 2, 3), \quad e^2 = (0, -3, 2), \quad e^3 = (13, -2, -3)$$

есть ортогональный базис в R_3 . Найти координаты вектора $x = (1, 0, 0)$ в этом базисе.

291. Пополнить ортонормированную систему векторов

$$x = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), \quad y = (0, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

до ортонормированного базиса в R_4 векторами z и t .

292. Выяснить ориентацию ортогонального базиса по отношению к основному базису $i^1 = (1, 0, 0)$, $i^2 = (0, 1, 0)$, $i^3 = (0, 0, 1)$:

$$\text{а) } a^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad a^2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$a^3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$\text{б) } a^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$a^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

293. Пусть новый ортогональный базис b^1, b^2 задается ортогональной матрицей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Записать формулы, связывающие координаты (x_1, x_2) вектора a в старом базисе с его координатами (x'_1, x'_2) в новом базисе.

294. Пусть базис a^1, a^2 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать формулы перехода от координат вектора a в старом базисе к координатам в новом базисе и наоборот.

§ 11. Линейные подпространства

(см. [2], § 20)

295. Является ли линейным подпространством совокупность векторов:

- а) имеющих нечетные целые координаты;
- б) имеющих четные целые координаты;
- в) лежащих на прямой, проходящей через начало координат;
- г) лежащих на оси x или оси y ;
- д) концы которых лежат в первой четверти системы координат (начало вектора предполагается совпадающим с началом координат);
- е) концы которых лежат на данной прямой;
- ж) концы и начало которых лежат на данной прямой;

3) являющихся всевозможными линейными комбинациями векторов x^1, x^2, \dots, x^k в R_n ($k \leq n$)?

296. Перечислить все линейные подпространства R_3 .

297. Пусть L — подпространство R_2 (т. е. совокупность векторов, лежащих на прямой $x_2 = kx_1$). Найти ортогональное к нему подпространство L' .

298. Найти размерность и базис линейных подпространств, являющихся линейными комбинациями векторов (или, как говорят, *натянутых на данную систему векторов*):

а) $a^1 = (1, 0, 0, -1)$, $a^2 = (2, 1, 1, 0)$, $a^3 = (1, 1, 1, 1)$, $a^4 = (1, 2, 3, 4)$, $a^5 = (0, 1, 2, 3)$;

б) $a^1 = (1, 0, 1)$, $a^2 = (1, 1, 1)$, $a^3 = (2, 1, 2)$, $a^4 = (3, 2, 3)$.

299. Пусть L — подпространство в R_4 , натянутое на векторы

$$a^1 = (1, 0, 0, -1), \quad a^2 = (2, 1, 1, 0).$$

Найти подпространство L' , ортогональное к L . Пусть вектор a ортогонален к L' . Доказать, что он есть линейная комбинация векторов a^1, a^2 ($a = \alpha a^1 + \beta a^2$).

300. Пусть e^1, e^2 — ортонормированный базис плоскости и линейный оператор A в базисе $f^1 = e^1, f^2 = e^1 + e^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе f^1, f^2 .

Решение. В базисе e^1, e^2 матрица оператора A^* является сопряженной к матрице оператора A .

Найдем сначала матрицу оператора A в базисе e^1, e^2 . Имеем

$$A(e^1) = A(f^1) = f^1 + f^2 = 2e^1 + e^2;$$

$$A(e^2) = A(f^2 - f^1) = A(f^2) - A(f^1) = f^1 - 2f^2 = \\ = -e^1 - 2e^2.$$

Таким образом, матрица оператора A в базисе e^1, e^2 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь значение оператора A^* на векторах f^1, f^2 :

$$A^*f^1 = A^*e^1 = 2e^1 - e^2 = 3f^1 - f^2,$$

$$A^*f^2 = A^*(e^1 + e^2) = A^*e^1 + A^*e^2 = \\ = 3f^1 - f^2 + e^1 - 2e^2 = 6f^1 - 3f^2.$$

Таким образом, матрица A^* в базисе f^1, f^2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

301. Пусть в задаче 300 матрица оператора A в базисе f^1, f^2 равна $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^* в том же базисе.

302. Линейный оператор A в базисе

$$f^1 = (1, 2, 1), \quad f^2 = (1, 1, 2), \quad f^3 = (1, 1, 0)$$

задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* в том же базисе, считая, что координаты векторов даны в некотором ортонормированном базисе (например, $f^1 = e^1 + 2e^2 + e^3$).

§ 12. Самосопряженные операторы.

Квадратичные формы

(см. [2], § 22, 23)

303. Найти наибольшее собственное значение самосопряженного оператора, определяемого матрицей:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

304. Пользуясь теоремой Сильвестра, выяснить, будет ли квадратичная форма строго положительной:

$$\text{а) } x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$\text{б) } 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4;$$

$$\text{в) } 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

305. Находя собственные значения, выяснить тип квадратичной формы:

$$\text{а) } f = x^2 + 4xy - y^2;$$

$$\text{б) } f = x^2 + 26y^2 + 10xy;$$

$$\text{в) } f = x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy.$$

306. Привести квадратичную форму к каноническому виду:

$$\text{а) } 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$$

$$\text{б) } 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

307. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

а) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

б) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

§ 13. Кривые второго порядка (см. [2], § 24)

Общее уравнение кривой второго порядка записывается:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

где A, B, C одновременно не равны нулю.

Считаем, что $B \geq 0$. Иначе к этому можно свести уравнение (1), полагая $x = x', y = -y'$. Соответствующее ортогональное преобразование приводит уравнение (1) к виду

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2d\xi + 2e\eta + g = 0, \quad (2)$$

где λ_1, λ_2 — собственные значения линейного самосопряженного оператора, порожденного квадратичной формой

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad (3)$$

и d, e, g — некоторые числа. При $B = 0$ уравнение (1) имеет вид (2). Поэтому считаем далее $B > 0$.

Координаты ξ, η рассматриваются в новой прямоугольной системе (новом ортонормированном базисе), единичными осями которой являются собственные векторы указанного самосопряженного оператора. При этом, если первый собственный вектор x^1 (единичный), соответствующий собственному значению λ_1 , имеет координаты (x_0, y_0) , то за второй собственный вектор (при $B > 0$) берем вектор $(-y_0, x_0)$ или $(y_0, -x_0)$. Отметим, что векторы (x_0, y_0) , $(-y_0, x_0)$ ориентированы так же, как исходный базис $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$. Векторы же (x_0, y_0) , $(y_0, -x_0)$ ориентированы противоположным образом ($\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & -x_0 \end{vmatrix} = -x_0^2 - y_0^2 = -1 < 0$).

Итак, если $B > 0$, то преобразование координат имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0\xi \mp y_0\eta, \\ y = y_0\xi \pm x_0\eta. \end{cases}$$

В двумерном случае собственные значения и собственные векторы можно вычислять по формулам, которые были получены в [2], § 24:

$$\lambda_1 = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A-C)^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A-C)^2},$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A-C}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}},$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{A-C}{2\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}}.$$

Конечно, можно каждый раз находить собственные числа как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а координаты собственного вектора x^1 как решение системы

$$\begin{cases} (A - \lambda_1) x_0 + B y_0 = 0, \\ B x_0 + (C - \lambda_1) y_0 = 0. \end{cases}$$

Уравнение (2), если оба числа λ_1 и λ_2 не равны нулю, можно записать так:

$$\lambda_1 (\xi - \alpha)^2 + \lambda_2 (\eta - \beta)^2 = \gamma, \quad \alpha = -\frac{d}{\lambda_1}, \quad \beta = -\frac{e}{\lambda_2}, \quad (4)$$

где γ — постоянная, откуда, полагая $u = \xi - \alpha$, $v = \eta - \beta$, получим

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = \gamma. \quad (5)$$

Если $AC - B^2 > 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ и из (5) непосредственно получается каноническое уравнение эллипса (действительного или мнимого) или точки.

Если же $AC - B^2 < 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ и из (5) легко получается каноническое уравнение гиперболы или пары пересекающихся прямых.

Если же $AC - B^2 = 0$, то $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Однако одно из чисел λ_1 или λ_2 , пусть, например λ_1 , отлично от нуля. Тогда уравнение (2) записывается в виде

$$\lambda_1 (\xi - \alpha)^2 + \delta \eta = \omega. \quad (6)$$

Если $\delta = 0$, то уравнение (6) определяет пару прямых (действительных или мнимых). Если же $\delta \neq 0$, то, полагая $u = \xi - \alpha$, $v = \eta - \frac{\omega}{\delta}$ и, возможно, $v = -v'$, получим каноническое уравнение параболы.

308. Установить тип кривых и привести их уравнения к каноническому виду:

- а) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$;
- б) $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$;
- в) $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$;
- г) $3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 15 = 0$;
- д) $x^2 - 2y^2 + 4y - 2 = 0$;
- е) $4x - 3y^2 + 12y - 12 = 0$;
- ж) $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 22 = 0$.

309. Установить тип кривых и привести их уравнения к каноническому виду. Записать преобразования системы координат. Изобразить системы координат и кривые:

- а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
- б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
- в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

310. Дано уравнение кривой

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0.$$

Определить, при каких значениях k прямая

$$y = kx$$

- а) имеет одну общую точку с кривой;
- б) пересекает кривую в двух точках;
- в) не имеет общих точек с кривой.

311. Выяснить, при каких значениях k прямая $y = kx$ касается кривой

$$(x + y)^2 + 2 = \sqrt{2}(y - x).$$

312. Записать уравнение кривой второго порядка, проходящей через точки: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$, $(0, 3)$.

§ 14. Поверхности второго порядка (см. [2], § 25)

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2A_1x_1 + 2A_2x_2 + 2A_3x_3 + B = 0. \quad (1)$$

Если в уравнении (1) отсутствуют смешанные произведения переменных (т. е. $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$), то приведение уравнения поверхности к каноническому виду осуществляется путем образования полных квадратов относительно переменных x_1, x_2, x_3 вида

$$a_{11}(x_1 - \alpha_1)^2 + a_{22}(x_2 - \alpha_2)^2 + a_{33}(x_3 - \alpha_3)^2$$

и параллельного переноса начала координат в точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Если же смешанные произведения присутствуют, то сначала приводим к каноническому виду симметрическую квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{kl}x_kx_l.$$

Собственные значения оператора, порожденного данной квадратичной формой, находим как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а координаты собственных векторов x^k ($k = 1, 2, 3$) находим из систем

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_k)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda_k)x_3 = 0, \end{cases}$$

которые, как показано в [2], § 25, всегда имеют решения (три попарно ортогональных вектора x^1, x^2, x^3).

313. Привести к каноническому виду уравнение поверхности и указать ее название:

- $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4 = 0;$
- $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 4y - 1 = 0;$

$$\text{в)} \quad x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 4y - 1 = 0;$$

$$\text{г)} \quad x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 2z + 3 = 0;$$

$$\text{д)} \quad x^2 - 4y^2 - z^2 + 8y - 2z - 9 = 0;$$

$$\text{е)} \quad x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0.$$

314. Привести к каноническому виду уравнение поверхности и указать соответствующие преобразования координат:

$$\text{а)} \quad 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0;$$

$$\text{б)} \quad 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 1 = 0.$$

315. Найти кривую пересечения плоскости $x = 2$ с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

316. Записать каноническое уравнение однополостного гиперboloида, проходящего через точки $(1, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(1, 1, 1)$.

317. Найти уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида

$$y^2 + z^2 = x$$

плоскостью

$$x + 2y - z = 0.$$

318. Какая линия определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z, \\ x^2 - 2y + 2 = 0? \end{cases}$$

319. Найти уравнение касательной плоскости к однополостному гиперboloиду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в точке $(0, 0, c)$.

320. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

вокруг оси x .

Решение. Возьмем произвольную точку $P = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ на указанном эллипсе. При вращении эллипса вокруг оси x точка P опишет окружность радиусом \bar{y} . Пусть $M = (x, y, z)$ — любая точка на этой окружности (а следовательно, и на искомой поверхности). Ясно, что (рис. 18) $CP = |\bar{y}| = CM = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \bar{x}$. Так как точка P лежит на эллипсе, то

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Подставляя в это уравнение вместо \bar{y} и \bar{x} их значения, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Это и есть искомое уравнение поверхности.

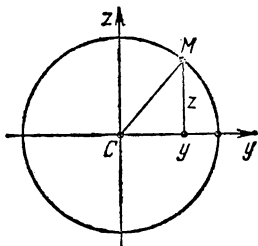


Рис. 18

Замечание 1. Кривую $f(x, y) = 0$ мы вращали около оси x , тогда в уравнении кривой координата y заменяется на $\sqrt{y^2 + z^2}$, в результате получается уравнение поверхности вращения около оси x :

$$f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

Очевидно также, что уравнение

$$f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$$

есть уравнение поверхности вращения вокруг оси y .

321. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси z .

322. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$$\text{а) } \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4};$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$$

323. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, образующие которого касаются сферы

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Решение. Данная сфера радиусом 3, ее центр имеет координаты $C = (-2, 1, 3)$. Таким образом, плоскость xOy касается шара в точке $P = (-2, 1, 0)$ (рис. 19). Луч OP является образующей. Направляющая конуса лежит на сфере и в плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно прямой OC .

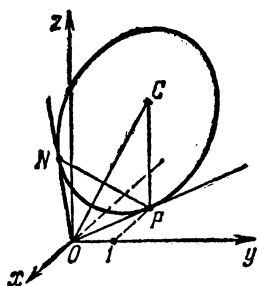


Рис. 19

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку P , перпендикулярно OC :

$$-2(x + 2) + (y - 1) + 3z = 0.$$

Поэтому направляющую конуса можно задать в виде системы

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9, \\ -2x + y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь (x, y, z) — произвольная точка на направляющей и (X, Y, Z) — произвольная точка образующей (а следовательно, и точка конуса). Уравнение образующей можно записать как уравнение прямой, проходящей через точки $(0, 0, 0)$ и (x, y, z) :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Исключая x, y, z из системы и последних трех уравнений, получим уравнение конуса. Зафиксируем $z = c$ и выразим x, y через X, Y, Z :

$$x = \frac{cX}{Z}, \quad y = \frac{cY}{Z}.$$

Подставляя эти значения в систему и исключая параметр c , получим после элементарных преобразований уравнение конуса

$$X^2 + 4Y^2 - 4Z^2 + 4XY + 12XZ - 6YZ = 0.$$

824. Составить уравнение конуса с вершиной $S = (5, 0, 0)$, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(см. [1], глава 8)

§ 1. Основные понятия

325. Найти и изобразить области существования функций:

а) $u = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$; б) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$;

в) $u = \sqrt{y^2 - 4x}$; г) $u = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

д) $u = \ln(x + y)$; е) $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

326. Найти и изобразить области существования функций трех переменных:

а) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$;

б) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$;

в) $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$;

г) $u = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$;

д) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$.

327. Найти частные значения функции

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y}{x}$$

в точках $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$.

328. Найти $f(x, y)$, если $f(x + 2y, x - 2y) = xy$.

329. *Линией уровня* функции $u = f(x, y)$ называется множество точек области ее определения, в которых она принимает заданное постоянное значение: $f(x, y) = c$. Последнее равенство, таким образом, является уравнением линии уровня.

Геометрически это означает, что мы произвели сечение поверхности определяемой функцией (ее графика) плоскостью $u = c$ и полученную в сечении линию спроектировали на плоскость xOy . Эта проекция сечения и есть линия уровня.

Найти линии уровня функций:

а) $u = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; б) $u = \frac{y}{x^2}$.

330. Найти расстояние ρ между точками $(1, 0, 1)$ и $(2, 1, 0)$ пространства R_3 .

331. Найти предел последовательности точек

$$M^k = \left(\frac{1}{1+k}, \frac{k^2}{k^2+1} \right) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

332. Пусть множество $E = \{|x| < 1, |y| \leq 1\}$. Какие точки этого множества являются внутренними?

333. Будут ли связными множества:

а) $E = \{|x| + |y| \leq 1\}$;

б) $E = \left\{ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \right\}$;

в) $E = \{x^2 + y^2 \neq 1\}$?

§ 2. Предел функции. Непрерывность (см. [1], § 8.2, 8.3)

Число A называется пределом функции f в точке x^0 , если она определена на некоторой окрестности точки x^0 , за исключением, быть может, ее самой, и если

$$\lim_{\substack{x^k \rightarrow x^0 \\ x^k \neq x^0}} f(x^k) = A,$$

какова бы ни была стремящаяся к x^0 последовательность точек x^k из указанной окрестности, отличных от x^0 .

Однако бывают случаи, когда функция f определена не на всей окрестности, а только на некотором ее подмножестве E . В этом случае возникает понятие предела функции в точке x^0 по множеству E .

Число A называется *пределом функции f в точке $x^0 \in E$* (E — замыкание E , см. [1], § 8.11) *по множеству E* , если

$$\lim_{\substack{x^k \rightarrow x^0 \\ x^k \in E, x^k \neq x^0}} f(x^k) = A,$$

какова бы ни была последовательность точек $x^k \in E$, сходящаяся к x^0 . Это определение эквивалентно следующему: число A называется пределом функции f в точке $x^0 \in E$ по множеству E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x^0) > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in E, \quad 0 < |x - x^0| < \delta.$$

Пример 1. Функция

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

определена на всей плоскости R_2 , за исключением начала координат. Очевидно, что в любой окрестности начала координат функция f удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \\ &= |x| = |x - 0| < \varepsilon \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

при условии, что $|x| < \delta = \varepsilon$. Таким образом, обычный предел функции f в точке $0 = (0, 0)$ существует и равен нулю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$$

Пример 2. Функция

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{x_1 x_2}$$

определена на множестве E , представляющем собой плоскость R_2 без координатных осей. Обычного предела в точке $0 = (0, 0)$ функция f не имеет, но предел f в этой точке по множеству E существует и равен нулю:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0 \\ (x_1, x_2) \in E}} f(x_1, x_2) = 0.$$

Задачи. Рассмотреть вопрос о существовании предела у функций:

а) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ в точке $(0, 0)$;

б) $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$ в точке $(0, 0)$;

в) $f(x, y, z) = \exp(-1/(x^2 + y^2 + z^2))/(x^4 + y^4 + z^4)$ в точке $(0, 0, 0)$.

334. Найти пределы функции:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} \quad (x \neq 0); \quad б) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$

335. При каком значении c функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}, & x^2 + 4y^2 \leq 1, \\ c, & x^2 + 4y^2 > 1 \end{cases}$$

будет непрерывной на всей плоскости x, y ?

336. Выяснить: а) будет ли непрерывной в точке $(0, 0)$ функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

б) будет ли она непрерывной на луче в направлении любого вектора $\omega \neq 0$, выходящего из начала координат.

337. Доказать, что множество точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $1 - x^2 - y^2 > c$, открыто.

§ 3. Частные производные. Дифференциалы

(см. [1], § 8.4, 8.5, 8.8)

Найти частные производные функций и их полные дифференциалы:

338. $u = x^3 + y^2 - 2xy$. 339. $u = x^2y^3$.

340. $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

341. а) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; б) $u = xy + \frac{x}{y}$; в) $u = x^y$;

г) $u = \operatorname{sh}(x + y)$; д) $u = \operatorname{ch}(x^2y + \operatorname{sh} y)$.

342. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

если: а) $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$; б) $x = r^2 + \varphi$, $y = r + \varphi^2$.

343. Найти частные производные от сложных функций по переменным t и τ :

а) $u = \sqrt{x + y}$, где $x = e^{t+\tau}$, $y = \ln t$;

б) $u = xy$, где $x = \cos(t + \tau)$, $y = \sin(t - \tau)$.

344. Найти и построить градиент функций в точке $P = (1, 1)$:

а) $u = x^2y$; б) $u = 2x^2 - 3y^2$.

345. Найти в точке $P = (1, 1)$ производные функций u по направлению вектора $n = (\sqrt{3}/2, 1/2)$:

а) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $u = 2x^2 - 3y^2$.

346. Найти производную от функции $u = 2x^2 - 3y^2$ в точке $P = (1, 1)$ в направлении градиента.

347. Найти углы, которые составляет градиент функции в точке $P = (1, 1)$ с осями координат:

а) $u = x\sqrt{3} + y$; б) $u = x + y\sqrt{3}$.

§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

(см. [1], § 8.4, 8.5, 8.9)

348. Найти частные производные и дифференциалы второго порядка от функций:

а) $u = \ln(x^2 + y)$; б) $u = \sqrt{2xy + y^2}$.

349. Показать, что функции

а) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$; б) $u = -\ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ удовлетворяют уравнению (Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

350. Показать, что функция

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где φ, ψ имеют производные до второго порядка, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

351. Найти производные и дифференциалы второго порядка от сложных функций (x, y — независимые переменные):

а) $u = f(\xi, \eta)$, $\xi = ax$, $\eta = by$;

б) $u = f(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Предполагается, что $f(\xi, \eta)$ имеет производные до второго порядка включительно по всем переменным.

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

(см. [1], § 8.7)

352. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхностям в указанных точках:

а) к параболоиду вращения $u = x^2 + y^2$ в точке $(1, 2, 5)$;

б) к поверхности $u = \frac{x^2}{2} - y^2$ в точке $(2, -1, 1)$.

§ 6. Формула Тейлора

(см. [1], § 8.10)

353. Найти приращение, получаемое функцией:

а) $u = x^2 - y^2 + xy$ при переходе от значений $x=1$, $y=2$ к значениям $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$;

б) $u = x^2 y$ при переходе от $x=1$, $y=1$ к значениям $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 1 + k$.

354. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$ до членов третьего порядка включительно функцию

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

355. Разложить функцию $f(x, y) = \exp(x + y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, -1)$ до членов третьего порядка включительно.

356. Найти значение параметра θ в формуле Лагранжа для функций двух переменных (см. [1], § 8.10):

$$f(x) - f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{x^0 + \theta(x - x^0)} (x_1 - x_1^0) + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{x^0 + \theta(x - x^0)} (x_2 - x_2^0) \quad (0 < \theta < 1);$$

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ относительно точек $x^0 = (0, 0)$, $x = (1, 1)$;

б) $f(x) = x_1^2 + x_2^3$ относительно тех же точек.

§ 7. Экстремумы

(см. [1], § 8.13)

Исследовать на экстремум функции:

357. $z = (x - 2)^2 + 2y^2$. 358. $z = (x - 2)^2 - 2y^2$.

359. $z = x^4 + 4xy - 2y^2$.

360. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

361. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

362. Выяснить, имеют ли функции наибольшее значение; если имеют, то найти его:

$$\text{а) } z = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 2(2-y), & 0 \leq x \leq 1, 1 < y \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } z = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + 1} \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1).$$

§ 8. Неявные функции. Условный экстремум
(см. [1], § 8.15—8.17)

363. Найти производные y'_x, y''_{x^2} от неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

364. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1.$$

365. $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

366. Функции u, v переменных x, y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x - \varphi(u, v) = 0, \\ y - \psi(u, v) = 0. \end{cases}$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

367. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$.

368. Написать уравнение касательной плоскости к поверхностям:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ в точке $(\sqrt{3}, 0, 6)$;

б) к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в его точке (x_0, y_0, z_0) .

369. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

370. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3xyz - z^3 = a^3$ в ее точке $(0, a, -a)$.

371. Найти прямоугольник наибольшей площади, имеющий заданный периметр l .

372. Найти оси эллипса

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

373. Из всех треугольников данного периметра 2l найти тот, который имеет наибольшую площадь.

ГЛАВА 5

РЯДЫ

(см. [1], глава 9)

§ 1. Числовые ряды

(см. [1], § 9.1—9.7)

374. Пользуясь определением, выяснить сходимость рядов и найти их суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$

б) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

375. Доказать расходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

пользуясь интегральным признаком и критерием Коши.

376. Используя интегральный признак сходимости ряда, выяснить, при каких $\alpha > 0$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$. Доказать, что

$$S_N^1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = O(\ln(N+1)), \quad N \geq 2; \quad (1)$$

$$S_N^\alpha = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} = O[(N+1)^{1-\alpha}], \quad 0 < \alpha < 1, \quad N \geq 1; \quad (2)$$

$$R_N^\alpha = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = O(N^{1-\alpha}), \quad \alpha > 1, \quad N \geq 1. \quad (3)$$

Решение. Так как функция $f(x) = x^{-\alpha} (\alpha > 0)$ монотонно убывает к нулю на $(0, \infty)$ при $x \rightarrow \infty$, то

ряд $\sum k^{-\alpha}$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Как известно, этот несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$, следовательно, и ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

Оценим теперь порядок роста S_N^{α} ($0 < \alpha \leq 1$). Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\ln(N+1) = \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = S_N^1$$

($N \geq 1$);

$$\begin{aligned} \ln(N+1) &= \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} = \\ &= \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = S_N^1 - 1 + \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\ln(N+1) \leq S_N^1 \leq 1 + \ln(N+1) \leq 2 \ln(N+1), \quad N \geq 2.$$

Неравенство $|S_N^1| \leq 2 \ln(N+1)$ и доказывает свойство (1).

Используя равенство ($0 < \alpha < 1$)

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

аналогичным образом получим (2). Отметим, что постоянные, входящие в символ $O(N^{1-\alpha})$, зависят от α .

Оценим теперь остаточный член R_N^{α} ($\alpha > 1$):

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} = \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \sum_{k=N}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = R_N^{\alpha};$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \geq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = R_N^{\alpha} - \frac{1}{N^{\alpha}},$$

$$R_N^{\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{1}{N^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} N^{1-\alpha} \quad (N \geq 1),$$

т. е. имеет место (3),

Отметим, что на самом деле мы доказали больше:

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \leq R_N^\alpha \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения и необходимый признак:

$$377. \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} + \dots \quad 378. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

$$379. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}; \quad \text{ б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

$$380. \text{ а) } \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right); \quad \text{ б) } \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right);$$

$$\text{ в) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

С помощью признаков Даламбера или Коши исследовать сходимость рядов:

$$381. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}.$$

$$382. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

$$383. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k. \quad 384. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака:

$$385. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n}. \quad 386. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^e k} \quad (e > 0).$$

$$387. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}.$$

388. Исследовать сходимость рядов с общим членом:

$$\text{ а) } u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2+1}; \quad \text{ б) } u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin^3 x dx}{1+x^4}.$$

Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$389. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \dots$$

$$390. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

391. Показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится абсолютно, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ сходятся.

§ 2. Функциональные ряды (см. [1], § 9.8, 9.9)

392. Найти область сходимости рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x};$$

$$в) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-2}.$$

393. Исследовать последовательности на равномерную сходимость:

$$a) f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad 0 < x < \infty;$$

$$б) f_n(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1/2;$$

$$в) f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$г) f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

394. Убедиться, что данные ряды равномерно сходятся на всей оси x :

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}; \quad б) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 [1 + (nx)^2]}.$$

395. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти сумму рядов:

$$a) x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots;$$

$$б) 1 + 2x + \dots + (n+1)x^n + \dots;$$

$$в) 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2} + \dots,$$

§ 3. Степенные ряды

(см. [1], § 9.11, 9.12)

396. Определить радиус и интервал сходимости рядов и исследовать сходимость в граничных точках интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$; в) $\sum_{n=2}^n (n-1) 3^{n-1} x^{n-1}$.

397. Написать два первых, отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x функций:

а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{th} x$; в) $\exp(\cos x)$.

398. Выразить в виде рядов интегралы:

а) $\int_0^x \exp(-t^2) dt$; б) $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$.

399. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл

$$\int_{0,1}^{0,2} e^{-x} \frac{dx}{x^3}.$$

400. Разложить функцию e^x по степеням $(x \pm 2)$.

ГЛАВА 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(см. [3], глава 1)

§ 1. Общие понятия

(см. [3], § 1.1, 1.2)

401. Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $y^2 = 2Cx$; б) $y = C_1x + C_2$; в) $y = Ce^x$;
г) $x^2 + y^2 = C^2$; д) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

402. Построить изоклины дифференциальных уравнений и нарисовать эскизы интегральных кривых:

а) $y' = x$; б) $y' = 1 + y^2$; в) $y' = -x$.

§ 2. Уравнения первого порядка

(см. [3], § 1.3)

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

403. $xy dx + (x + 1) dy = 0$,

404. $\sqrt{y^2 + 1} dx - xy dy = 0$.

405. $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. 406. $y' - xy^2 = 2xy$.

407. $y' = 3y^{2/3}$, $y(2) = 0$.

408. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = 1$.

409. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную $2/3$ абсциссы точки касания (рис. 20).

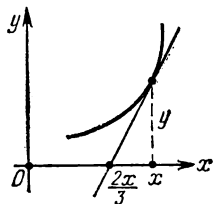


Рис. 20

410. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющейся жидкостью. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через один час?

411. Тело охлаждается за 10 минут от 100° до 60° . Температура окружающей среды поддерживается 20° . Когда тело остынет до 25° ?

Решить уравнения, приводящиеся к виду

$$y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^\alpha}\right) \quad (1)$$

(при $\alpha = 1$ — однородное уравнение):

412. $(x + 2y) dx - x dy = 0$. Указание. Замена $y = tx$.

413. $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0$.

414. $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

415. $x^4 dy = y^2 dx$. 416. $x^4 dy = \left(y^2 + \frac{9}{4} x^6\right) dx$.

417. $x dy = \left(x^2 \cos^2 \frac{y}{x^2} + 2y\right) dx$.

418. Найти кривую, касательная к которой отстоит от начала координат на величину, равную модулю абсциссы точки касания.

Уравнение вида

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

называется *уравнением Риккати*, оно в общем случае не решается в квадратурах. Некоторые из них являются уравнениями типа (1).

Решить уравнения Риккати:

419. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$.

420. а) $3y' = -y^2 - \frac{2}{x^2}$; б) $y' = \sum_{i=1}^N a_i y^{\beta_i} x^{\alpha_i - 1 - \alpha \beta_i}$.

Решить линейные уравнения:

421. $y' + 2y = 4x$.

422. $xy' - 2y = 2x^4$.

423. $x(y' - y) = e^x$.

424. $xy' + y = e^x$, $y(1) = 1$.

425. $y = x(y' - x \cos x)$.

426. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y) y' = 1$.

Решить уравнения Бернулли:

427. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

428. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y}$.

429. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$.

430. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$.

§ 3. Метрические пространства.

Сжимающие операторы.

Теорема существования решения

(см. [3], § 1.4—1.7)

431. Будет ли n -мерное пространство R_n метрическим пространством, если расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ определить равенствами:

а) $\rho(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\}$;

б) $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$

432. Выяснить, будет ли множество всех непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, метрическим пространством, если

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

433. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha, & 0 \leq x < 1/n, \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

При каких α последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю в смысле метрики задачи 432?

434. Будет ли полным метрическое пространство $M = [2, 3]$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$?

435. Будет ли оператор (функция) $F(x) = x^2$ сжимающим:

а) на полном метрическом пространстве $M = [-1/3, 1/3]$;

б) на полном метрическом пространстве $M = [-1, 1]$?

В случаях а) и б) метрика $\rho(x, y) = |x - y|$.

436. Построить итерационную последовательность для оператора $F(x) = x^2$, если $x_0 = 1/2$.

437. а) Найти неподвижные точки оператора $F(x) = 1/(1+x)$ на $[1/2, 1]$. Будет ли оператор $F(x)$ сжимающим на $[1/2, 1]$?

б) Пусть оператор $F(x)$ ($x = (x_1, x_2)$) действует в двумерном метрическом пространстве R_2 по закону

$$F(x) = (x_1, -x_2)$$

(зеркальное отображение относительно оси $x_2 = 0$). Какие точки являются неподвижными для этого оператора?

в) Пусть $F(x) = (x_1, x_2^2)$, $x \in R_2$. Какие точки плоскости R_2 являются неподвижными точками оператора F ?

438. На основании теоремы существования решения дифференциального уравнения исследовать, в каком промежутке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ гарантируется существование решения уравнения

$$y' = f(x, y),$$

если:

а) $x_0 = 1$, $y_0 = y(1) = 2$, $f(x, y) = 2xy^2$ на множестве

$$D = \left\{ \begin{array}{l} |x - 1| \leq 1 = a \\ |y - 2| \leq 1 = b \end{array} \right\};$$

б) $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$, $f(x, y) = 2xy^2$ на множестве

$$D = \left\{ \begin{array}{l} |x| \leq \sqrt{2}/4 = a \\ |y - 1| \leq 1 = b \end{array} \right\}.$$

439. Для уравнения

$$y' = \frac{1}{2}xy, \quad y(0) = 1,$$

найти приближенно $y(1)$, используя метод Эйлера. За шаг вычисления принять $h = 0,1$.

440. Методом Эйлера для уравнения $y' = x + y$ найти приближенно $y(2)$, если $y(1) = 1$. За шаг вычисления принять $h = 0,1$.

§ 4. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения
(см. [3], § 1.8—1.10)

441. Найти все решения уравнений; выделить особые решения, если они есть; дать чертеж:

- а) $y'^2 - y^2 = 0$; б) $y'^2 - 4y^3 = 0$;
в) $y^2(y'^2 + 1) = 1$; г) $y'^2 = 4y^3(1 - y)$;
д) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$; е) $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

442. Решить уравнения методом введения параметра:

- а) $x = y'^3 + y'$; б) $y = y'^2 + 2y'^3$;
в) $x = y' \sqrt{1 + y'^2}$.

443. Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где φ, ψ — некоторые функции, называется *уравнением Лагранжа*. В частности, если $\varphi(y') \equiv y'$, то уравнение называется *уравнением Клеро*. Эти уравнения также решаются введением параметра:

$$y' = p, \quad dy = p dx; \quad y = x\varphi(p) + \psi(p); \\ dy = \varphi(p) dx + x\varphi'(p) dp + \psi'(p) dp,$$

или, учитывая, что $dy = p dx$, получим

$$[p - \varphi(p)] dx = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] dp.$$

Последнее уравнение является линейным относительно x . Решать его мы умеем (если $p \neq \varphi(p)$):

$$x = Cf(p) + g(p),$$

где f, g — известные функции. Система

$$\begin{cases} x = Cf(p) + g(p), \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

дает параметрическое задание решения.

Если же $p \equiv \varphi(p)$ (в этом случае мы имеем уравнение Клеро), то

$$[x\varphi'(p) + \psi'(p)] dp = 0,$$

откуда:

1) $dp = 0$, $p = C$ и $y = x\varphi(C) + \psi(C) = xC + \psi(C)$ — общее решение уравнения Лагранжа (Клеро). Это семейство прямых. Формально общее решение получается заменой в уравнении y' на произвольную постоянную C ;

2) $x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0$. Тогда из системы

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ 0 = x\varphi'(p) + \psi'(p) \end{cases}$$

исключением параметра p получим $y = \chi(x)$. Если эта функция является решением уравнения Лагранжа и нарушена единственность решения, то она является особым решением уравнения Лагранжа (Клеро).

444. Решить уравнение Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2.$$

445. Решить уравнение

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$$

§ 5. Понижение порядка дифференциального уравнения
(см. [3], § 1.14)

446. Решить уравнения:

а) $y'' = \cos x$; б) $y''' = x$.

Решить уравнения:

447. $x^2y'' = y'^2.$

448. $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x.$

449. $y''' = y''^2.$

450. $y'' = 2yy'.$

451. $xy'' = 2yy' - y'.$

452. $yy'' + y'^2 = 1.$

453. $2yy'' = y'^2 + y^2.$

454. $yy'' = y'^3.$

455. $yy'' = y'^2 + y^2y'.$

456. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$

457. $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

**§ 6. Линейные уравнения
с постоянными коэффициентами**
(см. [3], § 1.16)

Решить уравнения:

458. $y'' - 2y' - 3y = 0$. 459. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

460. $y^{(4)} - y = 0$.

461. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

462. а) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$; б) $y'' + 3y' - 4y = 0$.

463. Доказать, что определитель Вронского

$$W(t) \equiv W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

системы решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$ уравнения

$$y^{(n)}(t) + p_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)y(t) = 0,$$

с непрерывными на (a, b) коэффициентами $p_1(t), \dots, p_n(t)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW(t)}{dt} = -p_1(t)W(t).$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому, интегрируя это уравнение в пределах от x_0 до x , получаем

$$\ln |W(t)| \Big|_{t=x_0}^x = - \int_{x_0}^x p_1(t) dt,$$

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(- \int_{x_0}^x p_1(t) dt \right).$$

Последняя формула носит название *формулы Остроградского — Лиувилля*; из нее, между прочим, следует, что если $W(x_0) \neq 0$, то определитель Вронского не равен нулю во всех точках (a, b) . В этом случае, как мы знаем, решения $y_1(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы на (a, b) .

Указание. См. задачу 86, б). Использовать тот факт, что

$$y_k^{(n)}(t) = -p_1(t)y_k^{(n-1)}(t) - \dots - p_n(t)y_k(t) \\ (k = 1, \dots, n).$$

464. Решить неоднородные уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = 2e^{3x}$; б) $f(x) = 4e^x$; в) $f(x) = 3e^{2x}$.

465. Найти частное решение уравнений

$$y^{(4)} + 2y'' + y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = \sin x$;

в) $f(x) = \sin x + \cos x$; г) $f(x) = \sin 2x$.

466. Решить уравнение $y'' + 2y' - 3y = \sin x$.

467. Написать форму частного решения неоднородных уравнений:

$$y''' - 5y'' + 6y' = f(x),$$

где

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = xe^{2x}$; в) $f(x) = \sin x$;

г) $f(x) = x^4 e^{3x}$; д) $f(x) = x^2 + x + 1$;

е) $f(x) = xe^x \sin x$.

§ 7. Уравнение Эйлера.

Уравнения с переменными коэффициентами

(см. [3], § 1.15, 1.16)

468. Выяснить, какие системы функций являются линейно независимыми на $[0, 1]$:

а) $1, \sin^2 x, \cos 2x$; б) $4 - x, 2x + 3, 6x + 8$;

в) $x + 2, (x + 2)^2$; г) x^2, x^3, x^4 .

469. Решить уравнения Эйлера:

а) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$; б) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$;

в) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$; г) $x^2 y''' - 2y' = 0$.

470. Решить уравнение (частный случай уравнения Бесселя при $\nu = 1/4$, см. [3], § 1.24)

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Решение. Введем замену $y = \alpha(x)z$ и подберем функцию $\alpha(x)$ так, чтобы исчез член с первой

производной z' . Имеем

$$\begin{aligned}y' &= \alpha' z + \alpha z', \quad y'' = \alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z''; \\x^2 \alpha z'' + z' [2\alpha' x^2 + \alpha x] + z [\alpha'' x^2 + \alpha' x + \alpha x^2 - \frac{\alpha}{4}] &= 0; \\2\alpha' + \frac{\alpha}{x} &= 0, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \alpha' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}, \\ \alpha'' &= \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}, \\x^2 \alpha'' + x\alpha' + x^2 \alpha - \frac{\alpha}{4} &= \frac{x^2}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} z'' + \frac{x^2}{\sqrt{x}} z = 0, \quad z'' + z = 0.$$

Последнее уравнение с постоянными коэффициентами, его общее решение

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

471. Решить уравнение

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0.$$

У к а з а н и е. См. задачу 470: $\alpha(x) = \exp(x^2/2)$.

472. Решить уравнение

$$x^2 y'' + xy' - y = f(x),$$

где:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^{10}$.

§ 8. Метод вариации постоянных
(см. [3], § 1.17)

473. Решить уравнения:

а) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

б) $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$; в) $y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$;

г) $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x} e^{-x}$.

§ 9. Системы дифференциальных уравнений (см. [3], § 1.19—1.22)

474. Решить систему путем сведения ее к одному дифференциальному уравнению:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + 4z = 4x, \\ \frac{dz}{dx} + y - z = x^2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} - y - z = 0, \\ -x + \frac{dy}{dt} - z = 0, \\ -x - y + \frac{dz}{dt} = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} - z = 1, \\ \frac{dz}{dx} + y = x. \end{cases} \end{array}$$

475. Решить однородные системы, не переходя к одному дифференциальному уравнению:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = 3y_1 + 4y_2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = z(t), \\ \dot{z}(t) = x(t). \end{cases} \end{array}$$

476. Решить неоднородные системы:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = x - y + 1, \\ \dot{y} = y - 4x + t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x - y + e^t, \\ \dot{y} = x - 4y + e^{3t}. \end{cases}$$

§ 10. Решение уравнений с помощью степенных рядов (см. [3], § 1.24)

477. $y'' + y' - xy^2 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

478. $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Будем искать решение $y(x)$ в виде степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Находя y' , y'' , xy и подставляя их в уравнение, мы получим ряд соотношений, связывающих коэффициенты a_i ($a_0 = 1$, $a_1 = 0$), из которых и находим значения этих коэффициентов.

Однако можно рассуждать и следующим образом. Степенной ряд является в то же время рядом Тейлора функции $y(x)$, поэтому мы можем записать:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Значения $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ известны по условию. Значение других производных от решения $y(x)$ в точке $x = 0$ мы можем найти, используя дифференциальное уравнение. Из уравнения имеем $y''(0) = -0 \times y(0) = 0$. Дифференцируя уравнение, получаем

$$y''' + y + xy' = 0,$$

откуда

$$y'''(0) = -y(0) = -1.$$

Аналогично

$$y^{(4)} + 2y' + xy'' = 0, \quad y^{(4)}(0) = -2y'(0) = 0,$$

$$y^{(5)} + 3y'' + xy''' = 0, \quad y^{(5)}(0) = -3y''(0) = 0,$$

$$y^{(6)} + 4y''' + xy^{(4)} = 0, \quad y^{(6)}(0) = -4y'''(0) = 4,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} + (n-2)y^{(n-3)} + \dots \quad y^{(n)}(0) = -(n-2)y^{(n-3)}(0), \\ + xy^{(n-2)} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Подставляя значение $y^{(n)}(0)$, получаем

$$y(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots$$

Полученный ряд сходится на всей оси равномерно и абсолютно.

479. $y'' + ye^x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

480. $y' = y + xe^y$, $y(0) = 0$. Найти первые три члена ряда.

§ 11. Устойчивость по Ляпунову

(см. [3], § 1.25, 1.26)

481. Исследовать на устойчивость с помощью функции Ляпунова нулевое решение системы:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y, \\ \dot{y} = x - y^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

З а м е ч а н и е. Если существует функция $v(x, y)$, такая, что в достаточно малой окрестности начала координат существует область, где $v > 0$, причем $v = 0$ на части границы области ($v > 0$) и $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} > 0$ в области $v > 0$, то точка покоя неустойчива (теорема Четаева).

482. Исследовать на устойчивость нулевое решение у систем с симметрической матрицей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + 4y; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 8y. \end{cases} \end{array}$$

483. Исследовать на устойчивость системы:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y; \end{cases} \\ \text{д) } \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y. \end{cases} \end{array}$$

ГЛАВА 7

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

(см. [3], глава 2)

§ 1. Интегралы, зависящие от параметра

(см. [3], § 2.4)

484. Найти область определения функции

$$F(x) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin xy}{y} dy$$

(т. е. значений x , где интеграл существует).

Исследовать ее на непрерывность и дифференцируемость.

485. Исходя из равенства

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

вычислить интеграл

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

486. Вычислить производную $F'(x)$, если

а) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy;$

б) $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy \quad (x > 0);$

в) $F(x) = \int_0^x f(y+x, y-x) dy,$

где $f(u, v)$ непрерывна вместе со своей частной производной f'_u .

487. Найти интеграл от функции $F(x)$ на $[0, 1]$, если

а) $F(x) = \int_{x^2}^1 (y-2x) dy;$ б) $F(x) = \int_x^1 (x+y) dy.$

§ 2. Кратные интегралы

(см. [3], § 2.1—2.5)

Вычислить двойные интегралы:

488. $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2},$ где $D = \{3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}.$

489. $\iint_D (x+2y) dx dy,$ где $D = \left\{ \begin{array}{l} y^2 - 4 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{array} \right\}.$

490. $\iint_D r^2 \sin^2 \varphi dr d\varphi,$ где $D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 3 \cos \varphi \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{array} \right\}.$

Вычертить области интегрирования и изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

$$491. I = \int_{-3}^2 dy \int_{(y^2-4)/4}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$492. I = \int_0^3 dx \int_{x/3}^{2x} f(x, y) dy.$$

$$493. I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x f(x, y) dy.$$

$$494. I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$495. I = \int_0^{c\sqrt{2}} dy \int_{y^2/2c^2}^{\sqrt{3-\frac{y^2}{c^2}}} f(x, y) dx.$$

Переменить порядок интегрирования и найти двойной интеграл:

$$496. I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y^2) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x + y^2) dy.$$

$$497. I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

Вычислить тройные интегралы:

$$498. \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz.$$

$$499. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz. \quad 500. \int_0^4 dz \int_D \int xyz dx dy,$$

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}.$$

501. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

где

а) V — общая часть параболоида $2az \geq x^2 + y^2$ и шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ ($a > 0$);

б) V — общая часть шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

§ 3. Замена переменных в кратном интеграле (см. [3], § 2.6—2.10)

502. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

где $S = \{x^2 + y^2 \leq a^2, y > 0\}$.

503. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz,$$

где V — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

504. Вычислить двойной интеграл

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy.$$

505. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy,$$

где S — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

506. Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

где V — шар радиусом R с центром в начале координат.

507. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} \, dz.$$

508. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_S (x^2 + y^2) \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

где S — круг радиусом R с центром в начале координат.

§ 4. Применение кратных интегралов

(см. [3], § 2.11, 2.12)

509. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параблами

$$y^2 = 10x + 25, \quad y^2 = -6x + 9,$$

и сделать рисунок.

510. Нарисовать тело, объем которого выражается двойным интегралом

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy,$$

и вычислить его объем V .

511. Найти объем V тела, ограниченного цилиндром $x^2 + z^2 = a^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ и находящегося в первом октанте. Сделать рисунок.

512. Вычислить объем V части цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, содержащийся между параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ и плоскостью $z = 0$. Сделать рисунок.

513. Найти площадь части плоскости

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

находящейся в первом октанте ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

514. Найти площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанную эллиптическим цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b < a).$$

515. Найти центр масс верхней половины эллипса

$$D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y > 0 \right\},$$

заполненного массой с плотностью $\rho \equiv 1$.

516. Найти объем:

- а) тела, образованного вращением половины эллипса D (см. задачу 515) около оси x ;
 б) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

517. В полушаре

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$$

плотность распределения масс пропорциональна расстоянию точки от центра шара: $\rho(x, y, z) = c \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти центр масс этого тела.

518. Найти центр масс однородной фигуры (рис. 21)

$$S = \{0 \leq y \leq 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2\}.$$

519. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции S (см. задачу 518) около оси x .

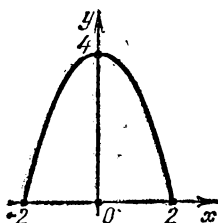


Рис. 21

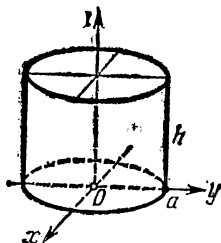


Рис. 22

520. Найти момент инерции однородного цилиндра, высота которого h и радиус основания a , относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра,

Решение. Пусть ось z направлена по оси цилиндра, основание цилиндра находится на плоскости $z = 0$ и центр основания совпадает с началом координат. Момент инерции будем искать относительно оси y (т. е. относительно плоскостей $x = 0, z = 0$) (рис. 22):

$$I_{x,z}^{(2)} = \int_a (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

где G — рассматриваемый цилиндр. Вычисляя интеграл, получаем

$$\begin{aligned}
 I_{x,z}^{(2)} &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h (x^2 + z^2) dz = \\
 &= 4h \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left(x^2 + \frac{h^2}{3} \right) dx = (x = a \sin t) = \\
 &= 4a^2 h \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{3} \right) dt = \\
 &= 4a^2 h \left\{ a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos^2 2t}{4} dt + \frac{h^2}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right\} = \\
 &= \frac{a^2 h \pi}{12} (3a^2 + 4h^2).
 \end{aligned}$$

§ 5. Несобственные интегралы

(см. [3], § 2.13)

521. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$; б) $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$;

в) $\int_0^\infty \int_0^\infty xy \exp(-x^2 - y^2) dx dy$.

Вычислить с помощью дифференцирования по параметру интегралы:

522. $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x} dx = F(y) \quad (y > -1).$

523. $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-yx^2}}{x^2} dx = F(y) \quad (y > 0).$

524. Используя равенство

$$\int_0^\infty x^y dx = \frac{1}{y+1} \quad (y > -1),$$

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x} dx \quad (\beta > -1, \alpha > -1).$$

525. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\iint_S \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

где S — круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

526. Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

$$\text{а) } F(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \quad (-\infty < y < \infty);$$

$$\text{б) } F(y) = \int_0^\infty \sqrt{y} \exp(-yx^2) dx \quad (0 \leq y < \infty).$$

ГЛАВА 8

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

(см. [3], глава 3)

§ 1. Криволинейные интегралы первого рода

(см. [3], § 3.2)

Вычислить криволинейные интегралы:

527. $\int_\Gamma \frac{ds}{x-y}$, где Γ — отрезок прямой, соединяющей точки $A = (0, -2)$ и $B = (4, 0)$.

528. $\int_\Gamma xy ds$, где Γ — контур треугольника с вершинами $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.

Решение. Уравнение прямой AB : $y=0$; прямой BC : $x+y=1$; прямой AC : $y-x=1$ (рис. 23).

$$\int_{AB} xy \, ds = 0;$$

$$\int_{BC} xy \, ds = \int_{CB} xy \, ds = \int_0^1 x(1-x) \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2}/6;$$

$$\int_{CA} xy \, ds = \int_{AC} xy \, ds = \int_{-1}^0 x(1+x) \sqrt{2} \, dx = -\sqrt{2}/6;$$

$$\int_{\Gamma} xy \, ds = \int_{AB} \dots + \int_{BC} \dots + \int_{CA} \dots = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0.$$

529. $\int_{\Gamma} xy \, ds$, где Γ — контур прямоугольника с вершинами $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,2)$, $D=(0,2)$.

530. $\int_{\Gamma} xy \, ds$, где Γ — часть эллипса, находящаяся в первом квадранте: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

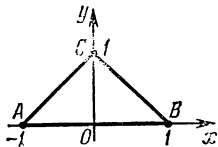


Рис. 23

531. $\int_{\Gamma} y \, ds$, где Γ — часть параболы $y=2\sqrt{x}$, находящаяся в верхней полуплоскости. $0 \leq x \leq 1$.

532. $\int_{\Gamma} (x-y) \, ds$, где Γ — окружность $x^2 + y^2 = 2ax$.

533. Найти массу m части эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, расположенной в первой четверти, если плотность в каждой его точке равна ординате этой точки.

534. Найти площадь S боковой поверхности параболического цилиндра $y = \frac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z=0$, $x=0$, $z=x$, $y=6$.

Решение. С геометрической точки зрения криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} f(x, y) \, ds,$$

где $f(x, y) \geq 0$, можно интерпретировать как площадь цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси z , основанием — контуром интегрирования Γ и высотами, равными значению функции $f(x, y)$. Поэтому искомая площадь (рис. 24)

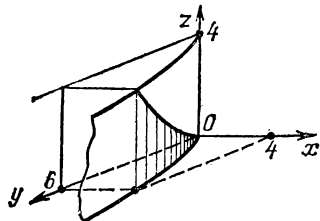


Рис. 24

где Γ — часть параболы

$y = \frac{3}{8}x^2$ ($0 \leq x \leq 4$). Вычисляя, получаем

$$S = \int_{\Gamma} x \, ds,$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} dx = \frac{1}{72} \int_0^4 \sqrt{16 + 9x^2} d(16 + 9x^2) = \\ &= \frac{1}{108} (16 + 9x^2)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

535. Найти площадь боковой поверхности кругового цилиндра, находящейся под первым витком винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и выше плоскости $z = 0$.

536. Найти координаты центра масс однородной полуарки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

537. Найти момент инерции относительно оси z (относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$) первого витка Γ винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

§ 2. Интеграл от вектора вдоль кривой (см. [3], § 3.3)

538. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\Gamma} (y^2 dx + x^2 dy),$$

где Γ — верхняя половина эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, пробегаемая по часовой стрелке (рис. 25).

Решение. При движении точки по кривой Γ в указанном направлении параметр t изменяется от π до 0.

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (y^2 dx + x^2 dy) &= \\ &= \int_{\pi}^0 [b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t] dt = \\ &= ab \int_0^{\pi} [b \sin^3 t - a \cos^3 t] dt = \\ &= ab \left[- \int_0^{\pi} b (1 - \cos^2 t) d \cos t - \int_0^{\pi} a (1 - \sin^2 t) d \sin t \right] = \\ &= \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

539. Вычислить

$$\int_{\Gamma} x dy,$$

где Γ — контур треугольника, образованного осями координат и прямой $x + y = 2$, проходимый в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

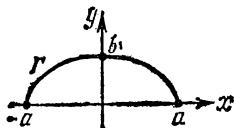


Рис. 25

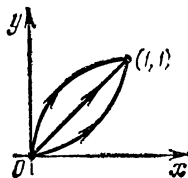


Рис. 26

540. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (y^2 dx + x^2 dy),$$

где: а) Γ — дуга параболы $y = 4 - x^2$, находящаяся в верхней полуплоскости и проходимая по часовой стрелке; б) Γ — ломаная линия, соединяющая точки $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$; в) Γ — отрезок $[-2, 2]$ оси x .

541. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (x dy + y dx),$$

где а) Γ — дуга параболы $y = \sqrt{x}$; б) Γ — отрезок прямой; в) Γ — дуга параболы $y = x^2$, соединяющие точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ в направлении, указанном стрелками (рис. 26).

§ 3. Потенциал. Ротор вектора

(см. [3], § 3.4)

542. Найти градиент функции

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 6z.$$

543. В каких точках пространства градиент поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен оси z ? б) равен нулю?

544. Найти ротор вектора $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$, т. е. радиус-вектора, точки (x, y, z) .

545. Найти ротор вектора $\mathbf{a} = \{z + y, x, y\}$.

546. Выяснить, имеют ли векторы а) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; б) $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; в) $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ потенциал во всем пространстве R_3 .

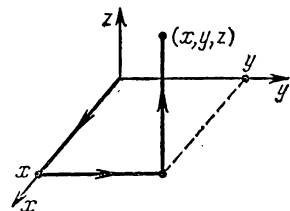


Рис. 27

547. Найти потенциальную функцию для вектора $\mathbf{a} = \{x^2, y^2, z^2\}$ в пространстве R_3 .

Решение. Ротор вектора \mathbf{a} равен нулю в R_3 . Кроме того, пространство R_3 представляет собой односвязную область. Поэтому вектор \mathbf{a} имеет потенциал, который находим по формуле

$$U(x, y, z) = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz),$$

где за кривую Γ можно принять ломаную (рис. 27), соединяющую точки $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(x, y, 0)$, (x, y, z) . Интеграл второго рода в данном случае не зависит от пути интегрирования. Вычисляя, находим

$$U(x, y, z) = \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3).$$

**§ 4. Дифференциальные уравнения
первого порядка в полных дифференциалах**
(см. [3], § 3.5)

548. Какие из уравнений являются уравнениями
в полных дифференциалах:

а) $(2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy = 0$;

б) $\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} = 0$; в) $(2 - y)dx + x dy = 0$?

Решить уравнения:

549. $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$.

550. $2xy dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

551. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

552. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$.

553. $yz dx + xz dy + xy dz = 0$.

554. $(x + z)dy + (y + z)dx + (x + y)dz = 0$.

555. $2xy dx + (x^2 + z^2)dy + 2yz dz = 0$.

§ 5. Формула Грина

(см. [3], § 3.7)

Преобразовать криволинейные интегралы по замкнутым (положительно ориентированным) контурам Γ в двойные по областям Ω , ограниченным этими контурами:

556. $\int_{\Gamma} ((1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy)$.

557. $\int_{\Gamma} ((e^{xy} + 2x \cos y)dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)dy)$.

558. Вычислить $\int_{\Gamma} ((xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy)$,

где Γ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

559. Вычислить разность между интегралами

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} ((x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy),$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} ((x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy),$$

где Γ_1 — дуга параболы $y = x^2$, а Γ_2 — отрезок прямой, соединяющие точки $(0, 0)$, $(1, 1)$.

560. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} (-x^2 y dx + xy^2 dy),$$

где Γ — окружность

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ориентированная положительно.

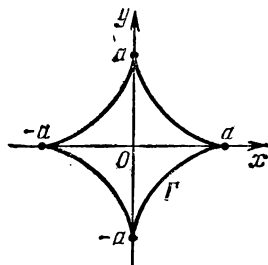


Рис. 28

561. Найти площадь фигуры Ω , ограниченную астройдой (рис. 28):

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

562. Показать, что работа силы $\mathbf{a} = \{2xy, x^2\}$ при перемещении точки массой m зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить

величину работы A при перемещении из точки $(1, 1)$ в точку $(2, 5)$.

§ 6. Интеграл по поверхности первого рода (см. [3], § 2.11, 3.8)

563. Если поверхность задана параметрически

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

где $(u, v) \in \Omega$, функции x, y, z имеют непрерывные частные производные на замыкании Ω , то площадь S этой поверхности выражается двойным интегралом

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2} du dv, \end{aligned}$$

где

$$E = |\mathbf{r}_u|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = |\mathbf{r}_v|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

В самом деле, как мы знаем (см. [3], § 2.11),

$$S = \iint_{\Omega} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv,$$

но

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

поэтому

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}.$$

Раскрывая якобианы под знаком корня, возводя их в квадрат и проводя необходимые алгебраические преобразования, получим искомую формулу.

Данная формула для вычисления площади удобна в ряде случаев, особенно когда векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v ортогональны ($(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0$).

В этом случае

$$S = \iint_{\Omega} |\mathbf{r}_u| \cdot |\mathbf{r}_v| du dv.$$

Найти площадь поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = 4v \\ (0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \pi).$$

В данном случае

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 4); \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0, \quad |\mathbf{r}_u|^2 = 1, \quad |\mathbf{r}_v|^2 = 16 + u^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega} \int 1 \cdot \sqrt{16 + u^2} du dv = \int_0^{\pi} dv \int_0^3 \sqrt{16 + u^2} du = \\ &= \pi \int_0^3 \sqrt{16 + u^2} du = \\ &= \pi \left[\frac{u}{2} \sqrt{16 + u^2} + 8 \ln(u + \sqrt{16 + u^2}) \right]_0^3 = \frac{\pi}{2} (15 + 16 \ln 2). \end{aligned}$$

564. Вычислить $\int_S (x^2 + y^2) ds$, где S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

565. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, находящейся в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), если плотность распределения масс на сфере равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

566. Вычислить $\int_S z dS$, где S — часть поверхности геликоида:

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v \\ (0 \leq u \leq a, \quad 0 \leq v \leq 2\pi). \end{aligned}$$

§ 7. Поток вектора через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода) (см. [3], § 3.12)

Поток вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через ориентированную поверхность S^*

$$\begin{aligned} \int_{S^*} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}^*) &= \int_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_S (P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)) dS \end{aligned}$$

равен поверхностному интегралу первого рода от скалярного произведения (\mathbf{a}, \mathbf{n}) , где \mathbf{n} — единичная нормаль, определяющая ориентацию S^* .

Если поверхность задана уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega),$$

то

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv, \quad \mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

поэтому

$$\int_{S^*} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}^*) = \pm \int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv.$$

Отсюда видно, что разным сторонам поверхности S отвечают поверхностные интегралы второго рода вектора \mathbf{a} , отличающиеся знаком.

Если поверхность S задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то направляющие косинусы нормали определяются по формулам

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \frac{\partial F}{\partial x} / D, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \frac{\partial F}{\partial y} / D,$$

$$\cos(\mathbf{n}, z) = \frac{\partial F}{\partial z} / D,$$

где

$$D = \pm |\operatorname{grad} F| = \pm \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности S .

Поверхностный интеграл второго рода обозначают еще символом

$$\int_{S^*} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}^*) = \int_{S^*} (P dy dz + Q dx dz + R dx dy).$$

Эта запись удобна для случая явного задания поверхности. Если поверхность S одновременно определяется уравнениями

$$x = f_1(y, z), \quad (y, z) \in \Omega_1;$$

$$y = f_2(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_2;$$

$$z = f_3(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_3,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{S^*} (P dy dz + Q dx dz + R dx dy) &= \\ &= \pm \iint_{\Omega_1} P(f_1(y, z), y, z) dy dz \pm \\ &\pm \iint_{\Omega_2} Q(x, f_2(x, z), z) dx dz \pm \iint_{\Omega_3} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

где знак берется в зависимости от ориентации поверхности (например, перед первым интегралом ставится знак $+$ или $-$ в зависимости от того, образует ли нормаль к S острый или тупой угол с осью x).

567. Вычислить $\int_{S^*} z \, dx \, dy$, где S^* — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Способ 1. Поверхность S задана явным уравнением

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Косинус острого угла внешней нормали с осью z для верхней половины эллипсоида определяется по формуле

$$\cos(n, z) = 1/\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

(а для нижней надо взять знак минус). Поэтому берем знак $+$ в соответствующей формуле для верхней половины S_1^* эллипсоида:

$$\int_{S_1^*} z \, dx \, dy = \int_{\Omega} \int c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy.$$

Аналогично для нижней половины эллипсоида S_2^*

$$\begin{aligned} \int_{S_2^*} z \, dx \, dy &= - \int_{\Omega} \int -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy = \\ &= c \int_{\Omega} \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{S^*} z \, dx \, dy = 2c \int_{\Omega} \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy,$$

где $\Omega = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Вычисляя последний интеграл, получаем

$$\int_{S^*} z \, dx \, dy = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Способ 2. Перейдем к параметрическому заданию эллипсоида:

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = b \cos u \sin v, \\ z = c \sin u, \end{cases} \quad \Delta = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq v \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \{-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u\}, \\ \mathbf{r}_v &= \{-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0\}. \end{aligned}$$

В правой системе координат внешняя нормаль к эллипсоиду определяется равенством

$$\mathbf{n} = - \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Для примера возьмем точку $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ на эллипсоиде. Эта точка соответствует параметрам $u = v = 0$. В этой точке $\mathbf{r}_u = \{0, 0, c\}$, $\mathbf{r}_v = \{0, b, 0\}$ (рис. 29). Векторное произведение

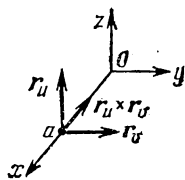


Рис. 29

$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ совместно с векторами \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v должно образовывать правую тройку (быть ориентированным так же, как система координат), т. е. вектор $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ направлен в сторону отрицательной оси x (см. рис. 29). Итак,

$$\begin{aligned} \int_{S^*} z \, dx \, dy &= - \iint_{\Delta} (a, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, du \, dv = \\ &= - \iint_{\Delta} z \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \, du \, dv = - \iint_{\Delta} z \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \, du \, dv = \\ &= abc \iint_{\Delta} \sin^2 u \cos u \, du \, dv = 2\pi abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 u \cos u \, du = \\ &= 4\pi abc \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, d \sin u = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

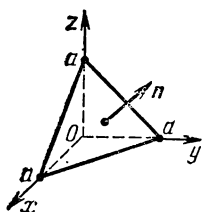


Рис. 30

568. Вычислить

$$\int_{S^*} (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy),$$

где S^* — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

569. Вычислить

$$\int_{S^*} (yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy),$$

где S^* — внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ (рис. 30).

§ 8. Формула Гаусса — Остроградского

(см. [3], § 3.13)

570. Найти дивергенцию вектора $\mathbf{a} = (x^3, y^3, z^3)$.

571. Найти дивергенцию вектора $\mathbf{a} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, f — дифференцируемая функция.

572. Пусть $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти $\text{div}(\text{grad } u)$.

573. Вычислить $\text{rot } \mathbf{a}$, если: а) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{c}$, где $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}| = |xi + yj + zk|$.

574. Пользуясь формулой Гаусса — Остроградского

$$\iiint_G \text{div } \mathbf{a} dG = \int_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , являющейся границей тела G , преобразовать поверхностные интегралы второго рода:

а) $\int_S (xy dx dy + yz dy dz + xz dx dz);$

б) $\int_S (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy);$

в) $\int_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS;$

$$г) \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

С помощью формулы Гаусса — Остроградского вычислить поверхностные интегралы:

575. $\int_S (x dy dz + y dx dz + z dx dy)$, где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

576. $\int_S z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

577. $\int_S z^4 dx dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида из задачи 576.

§ 9. Формула Стокса

(см. [3], § 3.15)

Формулу Стокса, устанавливающую связь между циркуляцией вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ по контуру Γ и потоком вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ через ориентированную поверхность S^* (с краем Γ), можно записать в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{l}) &= \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \\ &= \int_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_S (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a}) dS, \end{aligned}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к поверхности S . Контур Γ ориентирован соответственно ориентации S^* (рис. 31).

578. Вычислить по формуле Стокса криволинейный интеграл (циркуляцию)

$$\int_{\Gamma} (y dx + z dy + x dz),$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси x .

Решение. Данный обход контура Γ соответствует ориентации куска плоскости $x + y + z = 0$, ле-

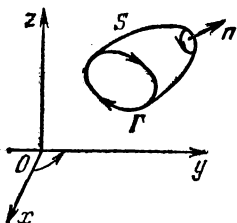


Рис. 31

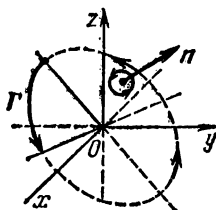


Рис. 32

жащей внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, нормалью, направленной вправо вверх (рис. 32):

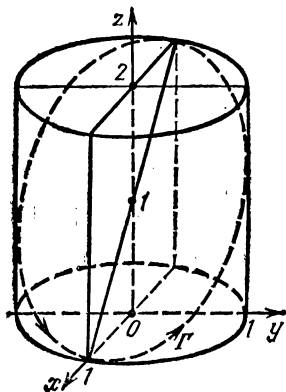


Рис. 33

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1/\sqrt{3}$$

$$(F(x, y, z) \equiv x + y + z = 0,$$

$$F'_x = F'_y = F'_z = 1, |\text{grad } F| = \sqrt{3}).$$

Для вектора a в данном случае $P = y$, $Q = z$, $R = x$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (y dx + z dy + x dz) = \\ = - \int_S (\cos \alpha + \cos \beta + \\ + \cos \gamma) dS = - \frac{3}{\sqrt{3}} \int_S dS, \end{aligned}$$

где S — круг радиуса b , лежащий в плоскости $x + y + z = 0$. Поверхностный интеграл первого рода от единичной функции, очевидно, равен площади поверхности, поэтому

$$\int_{\Gamma} (y dx + z dy + x dz) = - \frac{3}{\sqrt{3}} \pi b^2 = - \sqrt{3} \pi b^2.$$

579. Вычислить по формуле Стокса и непосредственно циркуляцию

$$\int_{\Gamma} ((y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz),$$

где Γ — эллипс $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ (рис. 33), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси z .

580. Вычислить по формуле Стокса интеграл

$$\int_{\Gamma} ((y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz),$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x + y + z = 0$ (см. задачу 578).

ГЛАВА 9

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

(см. [3], глава 4)

§ 1. Тригонометрические ряды

(см. [3], § 4.1, 4.2)

581. Построить графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}.$$

582. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$$

непрерывна и имеет непрерывную производную на $(-\infty, \infty)$.

583. Выяснить, в каких точках периода сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

584. Сколько раз можно дифференцировать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}?$$

585. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}.$$

§ 2. Ряд Фурье

(см. [3], § 4.3, 4.4, 4.6)

586. Разложить в ряд Фурье периода 2π функцию $f(x)$, если:

- а) $f(x) = x$ на $(-\pi, \pi)$;
- б) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на $(0, 2\pi)$;
- в) $f(x) = |x|$ на $(-\pi, \pi)$;
- г) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi; \end{cases}$
- д) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi; \end{cases}$
- е) $f(x) = \sin ax, -\pi < x < \pi$;
- ж) $f(x) = \operatorname{ch} ax, -\pi < x < \pi$.

587. Исследовать сходимость ряда Фурье для периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (\text{см. задачу 586, г}).$$

Решение. Данная функция на $[0, 2\pi]$ ограничена, кусочно непрерывна и кусочно монотонна. В точке разрыва $x = \pi$ она неопределена (рис. 34), т. е. она не удовлетворяет условию Дирихле. Однако значение коэффициентов Фурье не зависит от того, какие значения функция $f(x)$ принимает в отдельной

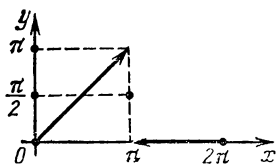


Рис. 34

точке. Поэтому доопределим функцию $f(x)$ в точке $x = \pi$, полагая

$$f(\pi) = \frac{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда ряд Фурье этой функции (см. задачу 586, г))

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

сходится во всех точках $x \in [0, 2\pi]$ к доопределенной функции, в частности сходится к $\pi/2$ в точке $x = \pi$,

т. е.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

588. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функции:

а) $f(x) = x, 0 < x < \pi;$

б) $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}, 0 < x < \pi.$

589. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода $2l$, заданную на $(-l, l)$ формулой $f(x) = |x|$.

§ 3. Ортогональные системы функций

(см. [3], § 4.5, 4.8, 4.9)

590. Найти скалярное произведение функций:

а) $f(x) = x, \varphi(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi;$

б) $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi/2.$

591. Найти норму

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

функций $f(x)$ ($a \leq x \leq b$):

а) $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1;$

б) $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi;$

в) $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1;$

г) $f(x) = 1 - x, 0 \leq x \leq 1.$

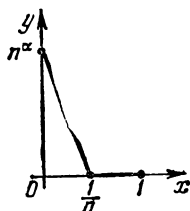


Рис. 35

592. Пусть дана последовательность функций (рис. 35)

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha - n^{1+\alpha}x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0, & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

При каком $\alpha \geq 0$ эта последовательность сходится к нулю в смысле среднего квадратического?

593. Исследовать на равномерную и среднеквадратическую сходимость последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n^\alpha x, & 0 \leq x \leq n^{-\alpha}, \\ 0, & n^{-\alpha} < x < \pi. \end{cases}$$

594. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ортогональны между собой на $(-1, 1)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n),$$

и удовлетворяют условию

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Решение. Отметим, что из определения многочлена Лежандра $P_n(x)$ следует, что его коэффициент при x^n равен $\frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{2^n n!}$. Отсюда

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{2^n}.$$

Далее, очевидно, что если $k < n$, то

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n = (x^2 - 1)^{n-k} A(x),$$

где $A(x)$ — некоторый многочлен. Поэтому при $k < n$

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n \right|_{x=\pm 1} = 0.$$

Пусть для определенности $m > n$. Интегрируя по частям n раз, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= c \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = \\ &= c P_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \Big|_{-1}^1 - c \int_{-1}^1 P'_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m dx = \\ &= (-1)c \int_{-1}^1 P'_n(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m dx = \dots \\ &\dots = (-1)^n c \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(x) \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} (x^2 - 1)^m dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n c \frac{(n+1) \dots 2n}{2^n} \int_{-1}^1 \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} (x^2 - 1)^n dx = \\
 &= c_1 \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{1}{2^m m!}, \quad c_1 = c P_n^{(n)}(x) = \frac{(n+1) \dots 2n}{n! 2^{m+n}}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx &= \frac{(-1)^n (n+1) \dots 2n}{n! 2^{2n}} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \\
 &= 2 \frac{(n+1) \dots 2n}{n! 2^{2n}} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.
 \end{aligned}$$

Вычислим интеграл

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \quad (n=0, 1, \dots).$$

Очевидно, $I_0 = 1$, $I_1 = 2/3$. Интегрируя по частям, получим следующую рекуррентную формулу:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Отсюда

$$I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} = \frac{2^n \cdot n!}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= 2 \frac{(n+1) \dots (2n-1) 2n}{2^{2n} n!} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)} = \\
 &= \frac{2}{2n+1}.
 \end{aligned}$$

§ 4. Интеграл Фурье

(см. [3], § 4.12, 4.14)

595. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

596. Найти функцию, определенную на $(0, \infty)$, косинус-преобразование которой равно

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin as}{s}.$$

597. Найти косинус-преобразование функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

598. Найти синус-преобразование функции

$$f(x) = e^{-sx}/x.$$

599. Вычислить интегралы:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sin xs \, dx}{x(a^2 + x^2)} \quad (a > 0, s \geq 0);$$

$$б) \int_0^{\infty} e^{-4x} \sin 3x \cos 2x \, dx; \quad в) \int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 3x \cos 4x \, dx.$$

ГЛАВА 10

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(см. [3], глава 5)

600. Пусть функция $f(\theta)$ периода 2π задана на $(-\pi, \pi)$ равенством $f(\theta) = |\theta|$. Построить гармоническую в единичном круге функцию, порожденную этими граничными значениями, и выяснить, с какой скоростью, в смысле среднего квадратического, функция $u(\rho, \theta)$ стремится к своим граничным значениям $f(\theta)$ при $\rho \rightarrow 1 - 0$.

601. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{\pi - 2x}{4} \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

и граничном условии

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Оценить интеграл

$$\Lambda = \left(\int_0^{\pi} |u(x, t) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

при $t \rightarrow +0$, т. е. выяснить характер средней квадратической сходимости решения $u(x, t)$ к $f(x)$ при $t \rightarrow +0$.

602. Найти решение уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f(x)$$

$$\left(f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases} \right)$$

и при краевых условиях

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

603. Решить уравнение колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

604. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая в верхней полуплоскости функция, принимающая значения $f(x)$ при $y = 0$. Доказать, что если $\forall x$ $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x+t) - f(x)| \leq L|t|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

то

$$|u(x, y) - f(x)| \leq cy^\alpha \quad (y > 0),$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от x и y .

605. Найти стационарное распределение температуры $u(x, y)$ в верхней полуплоскости и изотерму (линию уровня) $u = 1/2$, если на оси x поддерживается температура

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Функция $u(x, y)$ является гармонической в верхней полуплоскости.

606. Найти распределение температуры в бесконечном стержне, если начальное распределение температур было

$$f(x) = \exp(-x^2)$$

(в уравнении теплопроводности считать $a = 1$).

607. Доказать, что многочлены Лежандра $y = P_n(x)$ (см. задачу 594) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

ГЛАВА 11

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(см. [3], глава 6; [1], глава 5)

§ 1. Общие понятия

(см. [1], § 5.3)

608. Найти модули комплексных чисел:

а) $z = 4 + 3i$; б) $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$;

в) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

609. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $z = -1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

610. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z = -2$; б) $z = i$; в) $z = -1 - i\sqrt{3}$;

г) $z = \sin \alpha - i \cos \alpha$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$).

611. Вычислить $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

Решение. Представим число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в показательной форме

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right).$$

Отсюда

$$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = 2^{60} \exp(40\pi i) = 2^{60}.$$

612. Вычислить: а) $(\sqrt{3} - 3i)^6$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$.

613. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

614. Пусть $\operatorname{Re} w = x$, $\operatorname{Im} w = y^2$ ($w \neq 0$). Найти \bar{w} , $1/w$.

615. Доказать равенства:

а) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$; б) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$; в) $|\bar{z}| = |z|$.

616. Какие кривые заданы уравнениями:

а) $|z - z_0| = r$, $r > 0$; б) $|z + c| + |z - c| = 2a$, $a > c$ — действительные числа; в) $\operatorname{Re}(1/w) = 1/2$, $\operatorname{Im}(1/w) = 1/4$, $w = x + 2yi$; г) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; д) $\operatorname{Im} \left(\frac{z}{x^2} \right) = 1$?

617. Найти образы точек z_0 при указанных отображениях:

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; б) $w = \bar{z}/z$, $z_0 = 2 + 3i$.

618. В какую кривую отображается окружность $|z| = \sqrt{2}$ с помощью функции $w = z^2$?

Решение. Имеем $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} w = 2xy$. Исключая x и y из системы

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy, \\ x^2 + y^2 &= 2, \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2 = 4,$$

т. е. это окружность радиусом 2 с центром в начале координат в плоскости uOv (в плоскости w). Отметим, что окружность $|w| = 2$ описывается дважды, когда точка z пробегает полную окружность $|z| = \sqrt{2}$. так как

$$\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$$

Данную задачу можно решить и другим методом. Уравнение окружности $|z| = \sqrt{2}$ можно записать в виде

$$z = \sqrt{2} e^{i\varphi},$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поэтому

$$w = z^2 = (\sqrt{2} e^{i\varphi})^2 = 2e^{i2\varphi}.$$

Отсюда следует, что окружность $|z| = \sqrt{2}$ при отображении $w = z^2$ переходит в окружность $|w| = 2$,

причем окружность $|\omega| = 2$ описывается дважды, когда точка z пробегает окружность $|z| = \sqrt{2}$ один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

619. Установить, на какие линии плоскости ω отображаются с помощью функции $\omega = 1/z$ следующие кривые в плоскости z :

а) $|z| = 1/2$; б) $\arg z = \pi/4$; в) $\operatorname{Re} z = 0$.

§ 2. Предел функции. Производная

(см. [3], § 6.1, 6.2)

620. Найти предел функции $\omega = \bar{z}$ в точке $z = i$.

621. Выяснить, существует ли предел функции $\omega = \bar{z}/z$ в точке $O = (0, 0)$.

622. Будет ли непрерывной на плоскости z функция $\omega = \operatorname{Re} z$?

623. Выяснить, какие из функций имеют производную:

а) $\omega = z^2$; б) $\omega = \operatorname{Re} z$; в) $\omega = \bar{z}$; г) $\omega = z \cdot \bar{z}$.

624. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $\omega = \sin z$ в точке $z_0 = 0$.

625. В каких точках отображение $\omega = f(z)$ является конформным:

а) $\omega = z^3$; б) $\omega = \cos z$; в) $\omega = ze^z$?

§ 3. Условия Коши — Римана.

Гармонические функции

(см. [3], § 6.3, 6.4)

626. Выяснить, какие функции являются аналитическими:

а) $\omega = ze^z$; б) $\omega = \bar{z}z^2$; в) $\omega = \sin 3z$; г) $\omega = \operatorname{ch} 2z$.

627. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по известной ее действительной части $u(x, y)$:

а) $u = x^2 - y^2 + 2x$; б) $u = x^2 - y^2 + xy$;

в) $u = r\varphi \cos \varphi + r \ln r \sin \varphi$ ($z = re^{i\varphi}$).

628. Найти все гармонические функции вида $u = \varphi(x^2 + y^2)$.

Решение. Имеем

$$u''_{x^2} = 4x^2\varphi''(x^2 + y^2) + 2\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$u''_{y^2} = 4y^2\varphi''(x^2 + y^2) + 2\varphi'(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\Delta u = 4(x^2 + y^2)\varphi''(x^2 + y^2) + 4\varphi'(x^2 + y^2).$$

Таким образом, чтобы функция u была гармонической ($\Delta u = 0$), должно выполняться равенство

$$(x^2 + y^2)\varphi''(x^2 + y^2) + \varphi'(x^2 + y^2) = 0.$$

Полагая $x^2 + y^2 = t$, получаем

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{1}{t}, \quad \frac{d \ln \varphi'(t)}{dt} = -\frac{1}{t},$$
$$\varphi'(t) = C/t, \quad \varphi(t) = C \ln t + C_1.$$

Итак, гармонические функции имеют вид

$$u = C \ln(x^2 + y^2) + C_1,$$

где C и C_1 — произвольные константы.

629. Найти все гармонические функции вида $u = \varphi(y/x)$.

§ 4. Простейшие конформные отображения (см. [3], § 6.2, 6.15)

630. Найти конформное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя.

631. Отобразить единичный круг $|z| \leq 1$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ перешли соответственно в точки $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.

Решение. Данное отображение осуществляет дробно-линейная функция

$$\frac{w+1}{w-0} : \frac{1+1}{1-0} = \frac{z+i}{z-1} : \frac{i+i}{i-1} \quad \text{или} \quad w = \frac{i(1-z)}{1+z}.$$

Обратная функция

$$z = \frac{i-w}{w+i}$$

отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг так, что w_k переходят в z_k ($k = 1, 2, 3$).

632. Отобразить конформно угол $0 < \varphi < \pi/4$ на верхнюю полуплоскость (рис. 36).

633. Отобразить конформно полосу $0 \leq y < \pi$: а) на верхнюю полуплоскость; б) на всю плоскость.

634. Отобразить вертикальную полосу $0 \leq x \leq \pi/4$ на единичный круг $|w| \leq 1$ (рис. 37).

Решение. Переведем вертикальную полосу в горизонтальную. Для этого сделаем поворот на $\pi/2$,



Рис. 36

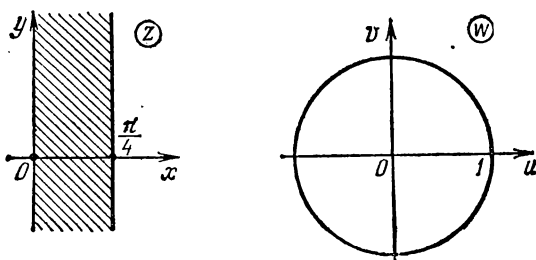


Рис. 37

который осуществляется функцией

$$z^* = z \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right) = iz.$$

В плоскости $z^* = x^* + iy^*$ мы получаем горизонтальную полосу $0 \leq y^* \leq \pi/4$. Расширим эту полосу в четыре раза:

$$z' = 4z^* = 4iz.$$

В плоскости z' мы получили горизонтальную полосу $0 \leq y' \leq \pi$. Эту полосу отображаем на верхнюю полуплоскость с помощью показательной функции

$$z'' = e^{z'} = e^{4iz}.$$

Теперь эту полуплоскость отображаем на единичный круг $|w| \leq 1$, например, с помощью функции из задачи 631:

$$w = \frac{i - z''}{z'' + i} = \frac{i - \exp(4iz)}{i + \exp(4iz)}.$$

635. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках $0, 1, i$ в плоскости z на треугольник соответственно с вершинами $1+i, 0, 2$ в плоскости w .

636. Найти конформное отображение круга $|z| < 5$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точки $5, 4+3i, -5$ перешли в точки $1, i, -1$.

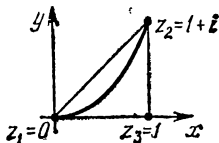
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

(см. [3], § 6.6)

637. Вычислить интеграл

$$\int_C (1+i-2\bar{z}) dz$$

по линиям, соединяющим точки $z_1=0, z_2=1+i$: а) по прямой; б) по параболе $y=x^2$; в) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3=1$ (рис. 38).



638. Вычислить $\int_0^{pi i} z \operatorname{ch} z dz$.

639. Вычислить $\int_0^{pi(1+i)} z \operatorname{ch} z dz$.

Рис. 38

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D , то функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

также является аналитической в D , причем

$$F'(z) = f(z).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) + \eta(\xi)] d\xi = \\ &= f(z) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\xi) d\xi = f(z), \end{aligned}$$

где $\eta(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow z$, в силу непрерывности f в точке z . При малых h $|\eta(\xi)| < \varepsilon$, поэтому для таких h

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\xi) d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} \left| \int_z^{z+h} d\xi \right| = \frac{\varepsilon}{|h|} \cdot |h| = \varepsilon.$$

Здесь мы считаем, что интегрирование производится по прямой, соединяющей точки z и $z+h$. Это можно делать, так как $f(z)$ аналитична, и следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Итак, мы доказали, что $F'(z) = f(z)$. Функцию $F(z)$ называют *первообразной* для $f(z)$.

Так же как в случае действительного переменного, можно установить, что две произвольные первообразные для функции $f(z)$ отличаются на постоянное слагаемое.

Отсюда вытекает, что если $\Phi(z)$ — первообразная для $f(z)$, то

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

— формула Ньютона — Лейбница.

640. Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz; \quad \text{б) } \int_0^i z \sin z dz.$$

§ 6. Формула Коши

(см. [3], § 6.7, 6.8)

Как нам известно, если $f(z)$ аналитическая в области D , ограниченной кусочно гладким контуром C , то имеет место интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (1)$$

$(z \in D).$

641. Вычислить интеграл

$$I = \int_C \frac{\exp(z^2) dz}{z^2 - 6z},$$

если: а) $C: |z-2|=1$; б) $C: |z|=1$; в) $C: |z-6|=1$ (рис. 39).

642. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{|z-1|=3/2} \frac{\exp(z^2) dz}{z(z+1)}; \quad \text{б) } \int_{|z+1|=1/2} \frac{\exp(z) dz}{z(z+1)}.$$

643. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ является аналитической на круге $|z-1| \leq 1$ (рис. 40). Поэтому,

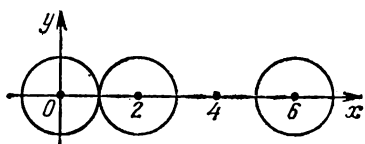


Рис. 39

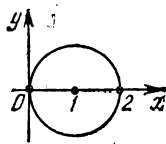


Рис. 40

используя формулу

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (2)$$

при $n=1$, где C — окружность $|z-1|=1$, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \frac{dz}{(z-1)^2} = 2\pi i \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' \Big|_{z=1} = \\ &= 2\pi i \frac{\pi(z+1) \cos \pi z - 2 \sin \pi z}{(z+1)^3} \Big|_{z=1} = -2\pi i \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2 i}{2}. \end{aligned}$$

644. Вычислить интеграл I вдоль окружности $|z|=2$

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

Указание. Построить контуры C_1 и C_2 , включающие в себя соответственно точки $z=-1$ и $z=1$ и лежащие внутри окружности $|z|=2$. Тогда

$\int_{|z|=2} \dots = \int_{C_1} \dots + \int_{C_2} \dots$, а затем применить формулы (1) и (2).

§ 7. Ряды в комплексной области

(см. [3], § 6.9, 6.10)

Найти радиусы R сходимости рядов:

$$645. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad 646. \sum_{k=0}^{\infty} k! z^k. \quad 647. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{k!}.$$

$$648. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \quad 649. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k.$$

$$650. \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n. \quad 651. \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n.$$

Разложить в ряд Тейлора в окрестности $z=0$ следующие функции:

$$652. \frac{1}{(1+z)^2}. \quad 653. \frac{1}{(1+z)(z-2)}.$$

654. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{5+2z}.$$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5+2z} &= \frac{1}{5+2(z-3+3)} = \frac{1}{11+2(z-3)} = \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{11}(z-3)}. \end{aligned}$$

Заменяя в разложении

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots$$

z на $\frac{2}{11}(z-3)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{5+2z} &= \frac{1}{11} \left\{ 1 - \frac{2}{11}(z-3) + \frac{2^2}{11^2}(z-3)^2 - \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{11} - \frac{2}{11^2}(z-3) + \frac{2^2}{11^3}(z-3)^2 - \dots \end{aligned}$$

Последний ряд сходится при

$$\frac{2}{11}|z-3| < 1, \quad \text{или} \quad |z-3| < \frac{11}{2}.$$

Таким образом, радиус его сходимости $R = 11/2$.

655. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = 1/(3-2z)$.

656. Определить область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n}{z^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}.$$

657. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

в областях: а) $0 < |z| < 1$; б) $1 < |z| < 2$; в) $|z| > 2$.

658. Разложить в ряд Лорана в кольце $0 < |z+1| < 2$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}.$$

Разложить в ряд Лорана в окрестности $z=0$ следующие функции:

$$659. \frac{\sin z}{z^2}. \quad 660. z^3 \exp(1/z).$$

§ 8. Изолированные особые точки. Вычеты

(см. [3], § 6.11—6.13)

661. Определить характер особой точки $z=0$ для функций:

$$а) f(z) = (e^z - 1)/z; \quad б) f(z) = 1/z^4; \quad в) f(z) = \exp(1/z^2).$$

662. Найти все особые точки и определить их характер у следующих функций:

$$а) \frac{z}{\sin z}; \quad б) \cos \frac{1}{z}; \quad в) z \sin \frac{1}{z}; \quad г) \operatorname{th} z.$$

663. Найти вычет функции

$$\frac{A}{z-a}$$

в точке $z = \infty$.

Решение. Имеем

$$\frac{A}{z-a} = \frac{A}{z \left(1 - \frac{a}{z}\right)} = \frac{A}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{A}{z} + \frac{Aa}{z^2} + \dots,$$

следовательно,

$$\operatorname{Выч}_{z=\infty} \frac{A}{z-a} = -A.$$

664. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2 \left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$$

в ее особых точках.

Решение. Легко видеть, что конечными особыми точками функции являются точки $z=0$, $z=\pi/4$.

Найдем пределы функции $f(z)$ в этих точках:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - (\pi/4)} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty.$$

Таким образом, $z=0$ — устранимая особая точка и $\operatorname{Выч}_{z=0} f(z) = 0$. Далее $z=\pi/4$ — полюс и

$$\operatorname{Выч}_{z=\pi/4} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}.$$

Точка $z=\infty$ также является особой, она существенно особая точка. Для нахождения вычета $f(z)$ в этой точке надо разложить функцию в ряд Лорана по степеням z :

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4z}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2(2k+1)}}{(2k+1)!}.$$

Перемножая ряды и группируя члены с одинаковыми степенями z , получаем

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\pi^4}{4!3!} + \frac{\pi^8}{4^8 5!} - \frac{\pi^{12}}{4^{12} 7!} + \dots\right) + \sum_{k \neq -1} c_k z^k,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{Выч}_{z=\infty} f(z) &= -\left(1 - \frac{\pi^4}{4!3!} + \frac{\pi^8}{4^8 5!} - \dots\right) = \\ &= -\frac{4^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{4^2} - \frac{\pi^6}{4^6 3!} + \frac{\pi^{10}}{4^{10} 5!} - \dots\right) = -\frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

Этот же результат мы получим, если воспользуемся основной теоремой о вычетах, согласно которой вычет функции $f(z)$ относительно $z=\infty$ равен сумме

вычетов относительно конечных особых точек, взятой со знаком минус (см. [3], § 6.13, теорема 1).

Укажем еще один способ нахождения вычета функции $f(z)$ в точке $z = \infty$. Функцию $\frac{1}{z^2} \sin z^2$ можно считать аналитической на плоскости z , если считать, что она равна 1 при $z = 0$. Поэтому она разлагается в степенной ряд по степеням $(z - \frac{\pi}{4})$, сходящийся на всей плоскости z :

$$\frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{\sin (\pi/4)^2}{(\pi/4)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^k.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sin (\pi/4)^2}{(\pi/4)^2} + \psi(z) = \\ &= \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sin (\pi/4)^2}{(\pi/4)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \end{aligned}$$

где степенной ряд справа сходится для всех z . Ведь $\psi(z)$ — аналитическая функция на плоскости z , и она разлагается в сходящийся на этой плоскости степенной ряд. Теперь, учитывая задачу 663, получим

$$\text{Выч}_{z=\infty} f(z) = \text{Выч}_{z=\infty} \frac{\sin (\pi/4)^2}{(\pi/4)^2} \cdot \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = - \frac{\sin (\pi/4)^2}{(\pi/4)^2}.$$

665. Найти вычеты функций в их особых точках:

а) $f(z) = z^2 \sin(1/z^2)$; б) $f(z) = z^2 \exp(1/z)$;

в) $f(z) = \frac{\exp(z)}{(z+1)^3(z-2)}$; г) $f(z) = (z-2)\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)$.

§ 9. Вычисление интегралов с помощью вычетов (см. [3], § 6.14)

Основной теореме о вычетах можно придать еще такой вид: интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ , проходимому против часовой стрелки, равен сумме вычетов относительно всех особых точек z_1, \dots, z_n , находящихся внутри Γ , умноженной на $2\pi i$:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч } f(z_k). \quad (1)$$

666. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} dz.$$

Решение. В области $|z| < 2$ функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z+1)}$ аналитична всюду, кроме точек $z=0$, $z=-1$. Найдем вычеты $f(z)$ в этих точках. $z=0$ — устранимая особая точка, поэтому $\text{Выч}_{z=0} f(z) = 0$. В точке $z=-1$ функция $f(z)$ имеет простой полюс, поэтому

$$\text{Выч}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z - 1}{z} = 1 - e^{-1}.$$

Согласно (1) получаем

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} dz = 2\pi i (1 - e^{-1}).$$

667. Вычислить интегралы:

а) $\int_{\Gamma} \frac{z dz}{(z-1)^2 (z-3)}$, где $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $\int_{|z|=5} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}$; в) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$, где $\Gamma: x^2 + y^2 = 2x$;

г) $\int_{\Gamma} \frac{z+1}{z^2 + 2z - 3} dz$, где $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

668. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$$

Решение. Введем функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ комплексного переменного z . Она удовлетворяет условию теоремы 1 § 6.14 [3] при $m=4$ и имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z=ai$:

$$\text{Выч}_{z=ai} f(z) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} (z - ai)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z + ai)^2} = \frac{1}{4ai}.$$

Тогда

$$I = 2\pi i \text{Выч}_{z=ai} f(z) = \frac{\pi}{2a}.$$

669. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}; \quad \text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

670. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0); \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

671. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx \quad (a > 0).$$

У к а з а н и е. Рассмотреть функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)}$$

и контур $\Gamma_{\varepsilon, R}$ (рис. 41). При малом ε и большом R функция $f(z)$ имеет один полюс внутри контура $\Gamma_{\varepsilon, R}$. Отметим, что $f(z)$ имеет особенность в точке $z = 0$ на действительной оси. Затем перейти к пределу:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz.$$

672. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bx \, dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Р е ш е н и е. Как нам известно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi},$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Введем в рассмотрение функцию $f(z) = \exp(-az^2)$ и контур Γ в виде прямоугольника со сторонами $2R$

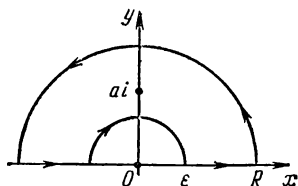


Рис. 41

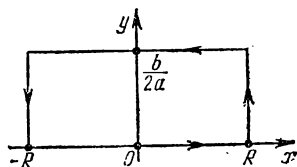


Рис. 42

и $b/(2a)$ (рис. 42). Внутри контура Γ функция $\exp(-az^2)$ аналитическая, поэтому

$$\int_{\Gamma} \exp(-az^2) dz = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \exp(-ax^2) dx + \int_0^{b/2a} i \exp[-a(R + iy)^2] dy + \\ + \int_R^{-R} \exp\left[-a\left(x + i\frac{b}{2a}\right)^2\right] dx + \\ + \int_{b/2a}^0 i \exp[-a(-R + iy)^2] dy = 0. \end{aligned}$$

Второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$ за счет множителя $\exp(-aR^2)$. Поэтому в пределе при $R \rightarrow \infty$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \exp(-ibx) \exp\frac{b^2}{4a} dx = 0.$$

Отсюда, выделяя действительную часть во втором слагаемом, имеем

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bx dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

или

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

ГЛАВА 12

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(см. [3], глава 7)

§ 1. Изображения простейших функций

(см. [3], § 7.1, 7.2)

673. Пользуясь определением, найти изображение Лапласа функций:

а) $f(t) = e^{2t}$; б) $f(t) = \sin 3t$.

674. Может ли функция $\varphi(p) = 1/\sin p$ быть изображением некоторого оригинала?

675. Используя свойство линейности изображения и свойство подобия, найти изображения функций:

а) $f(t) = t + 2$; б) $f(t) = 2 \sin 3t + e^{-2t}$ ($t \geq 0$).

676. Является ли функция

$$f(t) = \begin{cases} \exp(t^2), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

оригиналом?

677. Найти изображение функции $f(t) = \cos mt \cos nt$.

678. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала

$$L[f'; p] = pL[f; p] - f(0),$$

найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = \cos^2 3t$; б) $f(t) = \cos^4 t$.

679. Найти изображение функций, пользуясь теоремой о дифференцировании изображения ($F'(p) \doteq -tf(t)$):

а) $f(t) = t^2 \cos t$; б) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

680. Используя теорему об интегрировании оригинала

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p},$$

найти изображения следующих функций:

$$\text{а) } f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 3\tau d\tau; \quad \text{б) } f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos \tau d\tau.$$

681. Используя теорему об интегрировании изображения

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq,$$

найти изображения функций:

$$\text{а) } \frac{e^t - 1}{t}; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 t}{t}; \quad \text{в) } \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

682. Пользуясь теоремой смещения изображения, найти изображения функций:

$$\text{а) } e^{3t} \sin t; \quad \text{б) } e^t t^2 \cos t.$$

683. Пользуясь теоремой запаздывания оригинала

$$\hat{f}(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p),$$

найти изображения функций:

$$\text{а) } \sin(t - b) \sigma_0(t - b);$$

$$\text{б) } e^{t-3} \sigma_0(t - 3), \text{ где } \sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

684. Найти изображения следующих функций:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad f(t + 2) = f(t) \quad \forall t \geq 0;$$

$$\text{б) } f(t) = |\sin t|.$$

685. Найти изображение свертки:

$$\text{а) } \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau; \quad \text{б) } \int_0^t (t - \tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau.$$

§ 2. Отыскание оригинала по изображению

(см. [3], § 7.2)

686. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = 1 - \cos(1/p)$.

687. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}.$$

688. Найти оригинал для функций:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

689. Найти оригинал для функции $F(p) = 1/\sqrt{1+p^2}$.

Решение. Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!p^4} - \dots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k} p^{2k+1}}.$$

На основании теоремы 11 (см. [3], § 7.2)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} \cdot t^{2k} \equiv J_0(t),$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка (см. [3], § 1.25, 5.9).

690. Найти оригинал для рациональных функций $F(p)$, используя равенство

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \text{Выч}_{p=p_k} [F(p) e^{p_k t}],$$

где p_1, \dots, p_m — полюсы функции $F(p)$:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^3(p^2 + 2p + 2)}.$$

§ 3. Приложения операционного исчисления (см. [3], § 7.3)

691. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

- а) $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$;
- б) $x'' + x = 2 \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;
- в) $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

692. С помощью формулы Дюамеля решить уравнения:

- а) $x'' = \frac{1}{1+t^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$;
- б) $y'' + y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
- в) $y''' + y' = 10e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

693. Решить систему

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

Решение. Пусть $X(p) \doteq x(t)$, $Y(p) \doteq y(t)$. Составим операторные уравнения

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) + Y(p) = 0, \\ X(p) + pY(p) - y(0) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1, \\ X(p) + pY(p) = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, имеем

$$X(p) = \frac{1}{p-1}, \quad Y(p) = \frac{-1}{p-1}.$$

Отсюда

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = -e^t.$$

694. Решить системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \end{cases} \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \\ z(0) = 1, \quad z'(0) = 0;$$

$$\text{в) } \begin{cases} y' = 3z - y, \\ z' = y + z + e^x, \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0.$$

695. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2} dt; \quad \text{б) } I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt \cos t}{t} dt.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГЛАВА 1

696. Доказать неравенство

$$|x + x_1 + \dots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \dots + |x_n|).$$

697. Доказать неравенство Бернулли

$$(1 + x_1) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n,$$

где $x_j > -1$ ($j=1, \dots, n$) и все числа x_1, \dots, x_n одного знака.

698. Пусть $0 \leq x_j \leq \pi$ ($j=1, \dots, n$). Доказать, что

$$|\sin(x_1 + \dots + x_n)| \leq \sin x_1 + \dots + \sin x_n \equiv \sum_{j=1}^n \sin x_j.$$

699. Доказать равенство

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

700. Решить неравенство $||x+a| - |x-a|| < 1$, где a — любое положительное действительное число.

701. Пусть Q — множество всех рациональных чисел, а I — множество всех иррациональных чисел. Найти $Q \cup I$, $Q \cap I$, $Q \setminus I$.

Доказать равенства:

$$702. \lim_{n \rightarrow \infty} n2^{-n} = 0. \quad 703. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0 \quad (|q| < 1).$$

Найти пределы:

$$704. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(n-1)^3}{n^4} \right).$$

$$705. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right];$$

$$\text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

706. Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

У к а з а н и е. Воспользоваться неравенством $\ln(1+x) \leq x$ ($x > 0$).

707. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \geq 2)$$

и расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

708. Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью с ограниченным изменением*, если

$\exists M > 0$ такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq M$$

при любом натуральном $n \geq 2$.

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением обязательно сходится.

Решение. Обозначим $y_n = \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}|$. Если последовательность $\{x_n\}$ с ограниченным изменением, то последовательность $\{y_n\}$ будет ограничена сверху числом M и не убывает. Поэтому последовательность $\{y_n\}$ сходится.

По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \quad |y_n - y_m| < \varepsilon$ при $n, m > n_0(\varepsilon)$. Далее,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \sum_{j=m+1}^n (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n |x_j - x_{j-1}| = |y_n - y_m| \quad (n > m). \end{aligned}$$

Отсюда снова по критерию Коши заключаем, что $\{x_n\}$ сходится.

Отметим, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она не обязательно является последовательностью с ограниченным изменением

$$\left(x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0, \text{ но } \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| \approx \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right).$$

709. Выяснить, существует ли предел последовательности $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$, если $\lim x_n = a$.

710. Что можно сказать о пределе последовательности $\{x_n y_n\}$, если $x_n \rightarrow 0$, а y_n — произвольная последовательность? Привести примеры.

711. Если $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то следует ли отсюда, что одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ бесконечно малая? Рассмотреть пример $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = 1 - (-1)^n$.

712. Если $x_n \rightarrow a$, то $\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \rightarrow a$. Обратное утверждение неверно. Рассмотреть пример $x_n = (-1)^n$.

713. Привести пример последовательности:

а) имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа a и b ;

б) не имеющей конечных частичных пределов;

в) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

г) имеющей в качестве своего частичного предела любое действительное число.

714. Доказать, что:

а) $\overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$;

б) $\underline{\lim} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$.

Привести примеры, когда в этих соотношениях стоят знаки строгих неравенств.

Найти область E задания функции $y = f(x)$ и образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f :

715. $y = x^2/(2 + x^2)$. **716.** $y = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

717. $y = \sqrt{\cos x^2}$. **718.** $y = \arcsin(2 - x)$.

719. $y = \lg(1 - 2 \cos x)$. **720.** $y = (-1)^x$.

Найти образ $E_1 = f(E)$ множества E при помощи функции f , если:

721. $y = x^2$, $E = [-3, 2]$. **722.** $y = 2|x|$, $E = (-1, 3]$.

723. $y = 2|x|$, $E = \{1 < |x| \leq 3\}$.

724. $y = \sqrt{x - x^2}$, $E = (0, 1)$.

725. Найти $f(1)$, $f(2)$, $f(x+1)$, если:

а) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

726. Найти $f(x)$, если:

а) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$; б) $f\left(\frac{x}{x+2}\right) = x^2$.

Построить графики функций:

727. $y = x + \frac{1}{x}$ (гипербола).

728. $y = 1/(1 + x^2)$ (кривая Аньези).

729. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

730. $y = x + \frac{1}{x^2}$. **731.** $y = \pm x \sqrt{x}$.

732. $y = \sin \alpha x$, $\alpha = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).

733. $y = \sin x^2$. **734.** $y = \arcsin x$ ($|x| \leq 1$, $|y| \leq \pi/2$).

$$735. y = \arccos x \quad (|x| \leq 1, 0 \leq y \leq \pi).$$

$$736. y = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < \infty, |y| < \pi/2).$$

$$737. y = \arcsin \frac{1}{x}. \quad 738. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Исследовать на равномерную непрерывность на заданных множествах следующие функции:

$$739. f(x) = \frac{x}{3-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$740. f(x) = \frac{x}{3-x^2} \quad (-3 < x < 3).$$

$$741. f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$$

$$742. f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < \infty). \quad 743. f(x) = x \quad (0 \leq x < \infty).$$

Найти производные функций:

$$744. y = \frac{x^p (1-x)^q}{1+x}. \quad 745. y = \cos 3x - 3 \sin x.$$

$$746. y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right). \quad 747. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a}.$$

$$748. y = \log_x e. \quad 749. y = \ln (\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$750. y = \operatorname{arctg} (\operatorname{th} x). \quad 751. y = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

$$752. y = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}. \quad 753. y = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 2 & 6x & 12x^2 \end{vmatrix}.$$

754. Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$.

Решение. Так как по условию $\varphi(x)$ только непрерывна в точке $x=a$, то формально дифференцировать функцию $f(x)$ как произведение нельзя. Будем исходить из определения производной:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\varphi(x) - 0}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a). \end{aligned}$$

755. При каких натуральных n функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- а) непрерывна при $x=0$;
 б) дифференцируема при $x=0$;
 в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

756. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

757. При каких коэффициентах a, b, c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox ?

758. При каком значении a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

Найти производную y'_x от функций, заданных параметрически:

759. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. 760. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

$$761. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}. \quad 762. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$763. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right). \quad 764. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

З а м е ч а н и е. Если $\lim_{x \rightarrow a} \ln z(x) = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} z(x) = e^k$.

$$765. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

Найти производные и дифференциалы указанного порядка:

$$766. y = x \sqrt{1+x^2}, \text{ найти } y''.$$

$$767. y = \operatorname{tg} x, \text{ найти } y'''.$$

768. $y = \ln f(x)$, найти y'' . Здесь $f(x) > 0$ — дважды дифференцируемая функция.

$$769. y = x^2/(1-x), \text{ найти } y^{(8)}.$$

$$770. y = x^2/(1-x^2), \text{ найти } y'''.$$

$$771. y = e^x \cos x, \text{ найти } y^{(4)}.$$

$$772. y = x^5, \text{ найти } d^5 y.$$

$$773. y = \operatorname{ch} x \cdot \cos x, \text{ найти } d^6 y.$$

774. $y = [u(x)]^2$, найти $d^3 y$, считая функцию $u(x)$ достаточное число раз дифференцируемой.

$$775. y = \ln u(x), \text{ найти } d^3 y.$$

$$776. y = f(x), \text{ где } x = \varphi(t). \text{ Найти } d^2 y.$$

$$777. y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ найти } y^{(n)}.$$

$$778. y = \frac{1}{x(1-x)}, \text{ найти } y^{(n)}.$$

З а м е ч а н и е. Представить функцию в виде $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.

779. $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, найти $f^{(n)}(a)$, где $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$ -го порядка в окрестности точки a .

780. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0.$$

У к а з а н и е. Если $u(x) = (x^2 - 1)^n$, то имеет место равенство

$$(x^2 - 1) \frac{du}{dx} = 2nxu.$$

Продифференцировать $n+1$ раз данное равенство.

781. Доказать, что многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

782. Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные на множестве $E = \{-\infty < x < \infty, x \neq 1\}$. Установить связь между этими функциями.

783. Доказать тождество

$$3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi \quad (|x| \leq 1/2).$$

Разложить в ряд Тейлора функции:

$$\mathbf{784.} \ y = \operatorname{sh} x. \quad \mathbf{785.} \ y = \operatorname{ch} x.$$

786. При каких x справедливо, с точностью до 0,001, приближенное равенство

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}?$$

787. Используя разложения по формуле Тейлора, найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Определить участки строгой монотонности следующих функций:

$$788. y = \frac{ax}{1+x^2} \quad (a > 0). \quad 789. y = \frac{x}{1+b^2x^2} \quad (b > 0).$$

$$790. y = a^2x - b^2 \frac{x^3}{3} \quad (a > 0, b > 0).$$

791. $y = xe^{ax^2+bx+c}$, a , b , c — произвольные действительные числа.

Найти участки выпуклости и точки перегиба для функций:

$$792. y = a^2x - b^2 \frac{x^3}{3} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$793. y = xe^{bx} \quad (b \neq 0).$$

Исследовать на экстремум функции:

$$794. y = a^2x + \frac{1}{b^2x} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$795. y = \frac{x}{1+b^2x^2} \quad (b > 0).$$

$$796. y = (x-a)^2(x-b)^3 \quad (0 < a < b).$$

Построить графики функций:

$$797. y = \frac{4-x^2}{1+x^2}. \quad 798. y = (x-a)e^{1/x} \quad (a > 0).$$

ГЛАВА 2

Найти интегралы:

$$799. \int \frac{dx}{ax+b}. \quad 800. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}.$$

$$801. \int \frac{dx}{a^2x^2+b^2}. \quad 802. \int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}.$$

$$803. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}. \quad 804. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}.$$

$$805. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}. \quad 806. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$807. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx. \quad 808. \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$809. \int \frac{ax^2 + b}{a^2x^4 + b^2} dx \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } I &= \int \frac{ax^2 + b}{a^2x^4 + b^2} dx = \int \frac{a + \frac{b}{x^2}}{a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}} dx = \\ &= \int \frac{d \left(ax - \frac{b}{x} \right)}{a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}} = \left(ax - \frac{b}{x} = u \right) = \int \frac{du}{u^2 + 2ab}. \end{aligned}$$

Если числа a и b одного знака, то

$$I = \frac{1}{\sqrt{2ab}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2ab}} \operatorname{arctg} \frac{ax^2 - b}{x\sqrt{2ab}}.$$

Если числа a и b разных знаков, то

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^2 - 2|ab|} = \int \frac{du}{u^2 - (\sqrt{2|ab|})^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2|ab|}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{2|ab|}}{u + \sqrt{2|ab|}} \right| = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2|ab|}} \ln \left| \frac{ax^2 - x\sqrt{2|ab|} - b}{ax^2 + x\sqrt{2|ab|} - b} \right|. \end{aligned}$$

$$810. \int x \sqrt{ax + b} dx \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

$$811. \int \sin^2 x dx. \quad 812. \int \cos^2 x dx.$$

$$813. \int \cos^4 x dx. \quad 814. \int \operatorname{ch}^4 x dx.$$

$$815. \int \frac{dx}{\sqrt{(ax - b)(cx - d)}} \quad (ad - bc \neq 0, \quad a, \quad c - \text{положительные числа, } b, d - \text{произвольные действительные числа}).$$

Решение. Применим подстановку $ax - b = fu^2$, где $f = (bc - ad)/c$.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } x &= \frac{b}{a} + \frac{f}{a} u^2, \quad dx = 2 \frac{f}{a} u du, \quad cx - d = \\ &= \frac{c}{a} f (1 + u^2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx-d)}} &= \frac{2f}{a} \int \frac{u du}{\sqrt{fu^2 \frac{cf}{a} (1+u^2)}} = \\&= \frac{2}{a} \operatorname{sign} f \int \frac{du}{\sqrt{c/a} \sqrt{1+u^2}} = \frac{2}{\sqrt{ac}} \operatorname{sign} f \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \\&= \frac{2}{\sqrt{ac}} \operatorname{sign} f \operatorname{Arsh} u = \frac{2}{\sqrt{ac}} \operatorname{sign} f \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{ax-b}{f}}.\end{aligned}$$

В качестве первообразной для функции $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ можно также взять функцию $\ln|u + \sqrt{1+u^2}|$.

$$816. \int x^2 \operatorname{sh} x dx.$$

$$817. \int \arcsin x \frac{dx}{x^2}.$$

$$818. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$819. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$820. \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$821. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

$$822. \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2} \quad (\text{замена } \operatorname{tg} x = t).$$

Вычислить определенные интегралы:

$$823. \int_4^8 \sqrt{x-4} dx. \quad 824. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x dx.$$

$$825. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 \alpha d\alpha. \quad 826. \int_{\pi/2}^x \cos t dt.$$

Найти предел суммы с помощью определенного интеграла:

$$827. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Решение. Указанную сумму представим в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Отсюда видно, что данная сумма является интегральной суммой для функции $y = \frac{1}{1+x}$ на $[0, 1]$ при

дроблении $[0, 1]$ на равные части и при выборе точек $\xi_k = \frac{k}{n}$.

Функция $\frac{1}{1+x}$ на $[0, 1]$ является непрерывной, а следовательно, она интегрируема по Риману. Но тогда любая интегральная сумма функции $\frac{1}{1+x}$ стремится к определенному интегралу от этой функции, т. е. к

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

$$828. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$829. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}. \quad 830. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}.$$

$$831. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi \left(a + \frac{k}{n} (b-a) \right), \quad \text{где } \varphi(x) \text{ — непрерывная (или просто интегрируемая) функция на } [a, b].$$

Вычислить несобственные интегралы:

$$832. \int \frac{dx}{x^3}.$$

$$833. \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$834. \int_a^\infty \frac{dx}{x^a} \quad (\alpha > 1, a > 0).$$

$$835. \int_0^\infty e^{-x} \cos ax \, dx.$$

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$836. \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha (1+x^2)^\beta} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0).$$

$$837. \int_0^\infty \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{1+x^\beta} \, dx \quad (\beta \geq 0).$$

ГЛАВА 3.

Вычислить определители:

$$838. \begin{vmatrix} a^2 & 1 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & b^2 & 1 \end{vmatrix}. \quad 839. \begin{vmatrix} ax & a^2 + x^2 & 1 \\ ay & a^2 + y^2 & 1 \\ az & a^2 + z^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$840. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}. \quad 841. \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

$$842. \begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & y & x+y \end{vmatrix}.$$

843. Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

844. Найти x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Решить системы уравнений:

$$845. \begin{cases} x + y + z = a, \\ x + (1+a)y + z = 2a, \\ x + y + (1+a)z = 0. \end{cases}$$

$$846. \begin{cases} 5x + 4z + 2t = 3, \\ x - y + 2z + t = 1, \\ 4x + y + 2z = 1, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

$$847. \begin{cases} x - 4y + 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = 13, \\ 33x - 77y + 41z = 88. \end{cases}$$

$$848. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

849. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

850. Вычислить произведения матриц AB и BA :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

851. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

852. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 4

Определить области существования функций:

853. $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. 854. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

855. $u = \ln(x + y^2)$.

856. $u = 1/\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}$.

Найти линии уровня функций:

857. $z = x^2 + y^2$. 858. $z = 1/(x^2 + 2y^2)$.

859. $z = y - 2x^2$.

860. Найти расстояние между точками плоскости $(1, 7)$ и $(4, 3)$.

861. Найти предел последовательности точек $M^k = \left(\frac{k}{1+k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right)$ ($k = 1, 2, \dots$).

862. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 1 + x + y, & y \leq 0. \end{cases}$$

Выяснить, по каким множествам существуют пределы в точках $(x_0, 0)$, где x_0 — любое действительное число.

863. По каким направлениям φ существует конечный предел $\lim_{\rho \rightarrow +0} \exp\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$, если $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$?

864. По какому множеству E существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{y}{\sin y}$?

865. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости R_2 функцию $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

866. $u = x^3 + y^3 - 3x^2y^2$. 867. $u = x \sin(x + y^2)$.

868. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, если:

а) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; б) $u = \arccos \sqrt{x/y}$.

869. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0? \end{cases}$$

870. Функция $f(x, y, z)$ называется *однородной степени* (или *измерения*) m , если $\forall t > 0$ $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$.

Доказать, что дифференцируемая функция f , удовлетворяющая уравнению

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf,$$

обязательно является однородной функцией степени m .

Найти дифференциалы первого и второго порядков от функций:

871. $u = xy + y^2$. 872. $u = xy + yz + xz$.

873. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $d^2u \geq 0$.

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

874. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M_0 = (3, 4, 12)$.

875. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (т. е. $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$).

876. Данное положительное число p разложить на три положительных сомножителя так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

877. Разложить данное положительное число p на три положительных сомножителя ($p = xyz$) так, чтобы сумма $x^2 + y^2 + z^2$ была наименьшей.

878. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V , имеющий наименьшую площадь поверхности.

879. Пусть дан параболоид вращения

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$

Вписать в параболоид (в первом октанте) прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если:

а) нижнее его основание находится на плоскости xOy с вершиной в начале координат;

б) грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям;

в) верхнее основание имеет одну вершину на поверхности данного параллелепипеда.

880. Пусть дан эллиптический параболоид

$$z = 6 - x^2 - \frac{1}{4}y^2.$$

Вписать в этот параболоид (в первом октанте) прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. Расположение параллелепипеда такое же, как в задаче 879.

881. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг своего основания образует тело наибольшего объема.

882. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную осями координат и кривой

$$y = b^2 - a^2x^2 \quad (0 \leq x \leq b/a).$$

Найти криволинейную трапецию указанного вида с $b^2 + \frac{b}{a} = p$ (p — заданное число), которая при вращении около оси Ox образует тело наибольшего объема.

883. Функцию x^2 на $[1, 3]$ приближенно заменить линейной функцией $ax + b$ так, чтобы абсолютное отклонение

$$\Delta = \max_{1 \leq x \leq 3} |x^2 - ax - b|$$

было наименьшим.

Решение. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - ax - b$ на $[1, 3]$. Имеем $f(1) = 1 - a - b$, $f(3) = 9 - 3a - b$; $f'(x) = 2x - a = 0$ при $x = \frac{a}{2}$ ($2 \leq a \leq 6$); $f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - b$. Ясно, что $\Delta = \max\{|f(1)|, |f(3)|, |f(a/2)|\}$. Так как нам необходимо минимизировать величину Δ в зависимости от a и b , то подберем числа a и b так, чтобы $f(1) = f(3)$, т. е.

$$1 - a - b = 9 - 3a - b, \quad a = 4.$$

Теперь

$$\Delta = \max\{|3 + b|, |4 + b|\}.$$

Отсюда видно, что минимальное значение Δ будет тогда, когда $|3 + b| = |4 + b|$, т. е. при $b = -3,5$ ($\Delta_{\min} = 1/2$).

Итак, линейная функция $y = 4x - 3,5$ приближает функцию $y = x^2$ на $[1, 3]$ наилучшим образом среди всех линейных функций вида $y = ax + b$.

884. Решить задачу, подобную задаче 883, для функции x^3 на $[1, 4]$.

ГЛАВА 5

885. Доказать, что переменная

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

имеет предел.

Решение. Вначале докажем неравенство

$$x + \ln(1 - x) \leq 0 \quad (0 \leq x < 1).$$

В самом деле, функция $\varphi(x) = x + \ln(1 - x)$ имеет производную $\varphi'(x) = \frac{-x}{1-x} \leq 0$ ($0 \leq x < 1$). Поэтому функция $\varphi(x)$ убывает и так как $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) \leq 0$ ($0 \leq x < 1$).

На основании доказанного неравенства последовательность $\{x_n\}$ не возрастающая:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \\ &+ \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Далее (см. задачу 376), последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу нулем:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > 0 \quad \forall n.$$

Поэтому на основании теоремы о существовании предела монотонной ограниченной последовательности заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = C$$

или

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = C + \ln n + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$.

Предел C называют *постоянной Эйлера* ($C = 0,577216\dots$).

Найти суммы рядов:

$$886. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$887. \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

$$888. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}. \quad 889. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

890. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Решение. При всяком $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| &= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \\ &\geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому на основании критерия Коши заключаем, что гармонический ряд расходится.

891. Доказать, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha} \ln^{-\beta} k$:

- а) сходится при $\alpha > 1$ и любом β ;
- б) сходится при $\alpha = 1$ и $\beta > 1$;
- в) расходится при $\alpha < 1$ и любом β ;
- г) расходится при $\alpha = 1$ и $\beta \leq 1$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость рядов на указанных множествах:

$$892. \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$893. \sum_1^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2} \quad (x \geq 0). \text{ Указание. } \frac{x}{1 + n^4 x^2} = \\ = \frac{\sqrt{n^4 x^2}}{n^2 (1 + n^4 x^2)} \leq \frac{\sqrt{1 + n^4 x^2}}{n^2 (1 + n^4 x^2)} \leq \frac{1}{n^2 \sqrt{1 + n^4 x^2}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$894. \sum_1^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{1 + n^{\beta} x^2} \quad (|x| < \infty, \beta > 2(\alpha + 1), \alpha \geq 0).$$

Указание. $n^{\alpha} x (1 + n^{\beta} x^2)^{-1} \leq (n^{\beta} x^2)^{1/2} n^{\alpha} (1 + n^{\beta} x^2)^{-1} \times \\ \times n^{-\beta/2} \leq n^{\alpha - \frac{\beta}{2}} (1 + n^{\beta} x^2)^{-1/2} \leq n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}.$

$$895. \sum_1^{\infty} \frac{n^{\alpha} x^q}{1 + n^{\beta} x^p} \quad (x \geq 0, \alpha \geq 0, \beta > 0, p > 0, q > 0, \\ q \leq p, \beta > \frac{p}{q} (1 + \alpha)). \text{ Указание. } n^{\alpha} x^q (1 + n^{\beta} x^p)^{-1} = \\ = (n^{\beta} x^p)^{\frac{q}{p}} n^{\alpha} (1 + n^{\beta} x^p)^{-1} n^{-\beta \frac{q}{p}}.$$

$$896. \sum_1^{\infty} x^2 e^{-nx} \quad (0 \leq x < \infty).$$

Решение. Для того чтобы воспользоваться признаком Вейерштрасса, мы должны найти точную верхнюю границу функции $y(x) = x^2 e^{-nx} \geq 0$ на $[0, \infty)$. Ясно, что $y(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

Найдем стационарные точки функции $y(x)$. Имеем

$$y'(x) = (2x - nx^2) e^{-nx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = \frac{2}{n};$$

$$y\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

Поэтому

$$\sup_{0 \leq x < \infty} y(x) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

Ряд $4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-2}$ сходится, поэтому ряд $\sum_1^{\infty} x^2 e^{-nx}$ сходится равномерно.

$$897. \sum_1^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^3 + x^2} \quad (|x| < \infty).$$

Разложить в ряд Тейлора по степеням x следующие функции:

$$898. \exp(-x^2). \quad 899. \exp(x^2).$$

$$900. \text{ а) } \cos 2x; \text{ б) } \cos^2 x; \text{ в) } \frac{x^{10}}{1-x}.$$

ГЛАВА 6

Составить дифференциальное уравнение для семейства кривых:

$$901. \text{ а) } y = cx^2; \text{ б) } y = cx^n, \quad n — \text{натуральное.}$$

902. $y = x^n + cx$. 903. $x^2 + ay^2 = 2cx$, где a — произвольное фиксированное число.

Найти частное решение дифференциальных уравнений при начальном условии $y(2) = 4$:

$$904. xy' - y = 0. \quad 905. xy' + y = 0.$$

$$906. x^2 y' + y = 0. \quad 907. 2yx^2 dy = (1 + x^2) dx.$$

Решить уравнения Бернулли:

$$908. y' = \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} \quad \text{при} \quad y(-1) = 1.$$

$$909. y' + xy = xy^3.$$

910. Определить кривую $y = f(x)$, проходящую через точку $A = (a, a)$, если расстояние от начала координат до касательной к кривой в точке $(x, f(x))$ равно модулю абсциссы этой точки.

Пользуясь методом Ньютона (методом касательных), определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

$$911. f(x) \equiv x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x = 0 \text{ с точностью до } 0,001.$$

$$912. f(x) \equiv x + e^x = 0 \text{ с точностью до } 0,00001.$$

Решить уравнения:

$$913. y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0. \quad 914. y''' - 3y'' + 4y = 0.$$

915. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке $(0, 1)$ прямой $y = 2x + 1$.

Решить неоднородные уравнения:

916. $y'' - y = e^x$. 917. $y''' - 3y'' + 4y = 2e^{-x}$.

918. $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x} + e^{-2x}$.

Решить методом вариации постоянных следующие уравнения:

919. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$. 920. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решить системы уравнений:

921.
$$\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} - 3x - y = 0. \end{cases}$$

922.
$$\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0, \\ \dot{y} - x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

923.
$$\begin{cases} x'' - 4x' + 4x - y = 0, \\ y'' + 4y' + 4y - a^2x = 0, \end{cases}$$

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a > 0.$

Решение. Будем решать систему путем сведения ее к одному дифференциальному уравнению относительно одной из функций, скажем, $x(t)$. Дифференцируя первое уравнение системы два раза и подставляя значения y, y', y'' во второе уравнение, получаем $x^{(4)} - 8x'' + (16 - a^2)x = 0$.

Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид $r^4 - 8r^2 + 16 - a^2 = 0$. Решая это уравнение, находим $r_{1,2} = \pm \sqrt{4 + a}$, $r_{3,4} = \pm \sqrt{4 - a}$.

Если $0 < a < 4$, то все корни характеристического уравнения действительны и различны, поэтому общее решение $x(t) = c_1 e^{-\sqrt{4+a}t} + c_2 e^{\sqrt{4+a}t} + c_3 e^{-\sqrt{4-a}t} + c_4 e^{\sqrt{4-a}t}$.

Если $a = 4$, то $r_{1,2} = \pm \sqrt{8}$, $r_3 = r_4 = 0$ и $x(t) = c_1 e^{-\sqrt{8}t} + c_2 e^{\sqrt{8}t} + c_3 + c_4 t$.

При $a > 4$ корни $r_{3,4} = \pm \sqrt{4 - a}$ комплексные, $r_3 = i\sqrt{a-4}$, $r_4 = -i\sqrt{a-4}$. В этом случае $x(t) = c_1 e^{\sqrt{4+a}t} + c_2 e^{-\sqrt{4+a}t} + c_3 \cos t \sqrt{a-4} + c_4 \sin t \sqrt{a-4}$. Функцию $y(t)$ находим из первого уравнения системы:

$$y(t) = x'' - 4x' + 4x.$$

924. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x) dx}{x^2 + y^2},$$

где $f(x)$ непрерывна и положительна на $[0, 1]$.

925. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a),$$

если $f(x)$ непрерывна на $[A, B]$, где $A < a < x < B$.

926. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Решение. Функция $f(x, y)$, стоящая под знаком интеграла, непрерывна на множестве $D = \{0 \leq x \leq \leq \pi/2, -a \leq y \leq a\}$ при всяком конечном $a > 0$. Частная производная

$$f'_y = \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

непрерывна в D . Поэтому законно дифференцирование под знаком интеграла:

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Вычислим последний интеграл. Полагая $u = \operatorname{tg} x$, имеем

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + y^2 u^2)(1 + u^2)} = \\ &= \frac{1}{y^2 - 1} \int_0^{\infty} \left[\frac{y^2}{1 + y^2 u^2} - \frac{1}{1 + u^2} \right] du = \\ &= \frac{y^2}{y^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + y^2 u^2} - \frac{\pi}{2(y^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Пусть $y > 0$, тогда, полагая $u = \frac{v}{y}$, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+y^2 u^2} = \frac{1}{y} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} v \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2y}.$$

Если $y < 0$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+y^2 u^2} = \frac{1}{y} \int_0^{-\infty} \frac{dv}{1+v^2} = -\frac{\pi}{2y}.$$

Итак,

$$F'(y) = \frac{\pi}{2(y+1)} \quad (y > 0), \quad F'(y) = \frac{\pi}{2(1-y)} \quad (y < 0).$$

Учитывая, что $F(0) = 0$, после интегрирования получаем

$$F(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y \ln(1 + |y|).$$

927. Пусть $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция,

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ — бета-функция.

Доказать, что

$$\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

Доказательство. Имеем

$$\Gamma(x) \Gamma(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{x-1} \tau^{y-1} e^{-t-\tau} dt d\tau.$$

Сделаем замену переменных

$$t = u(1-v), \quad \tau = u \cdot v.$$

Якобиан данного преобразования $\frac{D(t, \tau)}{D(u, v)} = u > 0$.

Далее, $t + \tau = u$ ($0 < u < \infty$), $v = \frac{\tau}{t+\tau}$ ($0 \leq v \leq 1$).

Поэтому

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{x-1} (1-v)^{x-1} u^{y-1} v^{y-1} e^{-u} v \, du \, dv = \\ &= \int_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u} \, du \int_0^1 v^{y-1} (1-v)^{x-1} \, dv = \\ &= \Gamma(x+y) B(y, x) = \Gamma(x+y) B(x, y),\end{aligned}$$

так как легко проверить, что $B(x, y) = B(y, x)$

928. Доказать, что

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Для гамма-функции мы установили соотношение (см. [3], § 2.15)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Применяя это равенство, получаем

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) = \dots \\ &\dots = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \left(n - \frac{2n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \, dt = (t = u^2) = \int_0^\infty 2e^{-u^2} \, du = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Подставляя это значение, получаем требуемое равенство.

Вычислить интегралы:

929. $\iint_D xy^2 \, dx \, dy$, если область D ограничена параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$.

930. $\iint_D |xy| \, dx \, dy$, где D — круг радиусом 4 с центром в начале координат.

931. $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$, где D — область, ограниченная поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

932. $\iiint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz$, где D — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

933. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$y^2 = p^2 + 2px, \quad y^2 = p^2 - 2px \quad (p > 0).$$

934. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

935. Найти координаты x_0 , y_0 центра масс однородной пластины, ограниченной кривыми $x^2 = ay$, $y - x = 2a$ ($a > 0$).

ГЛАВА 8

Вычислить криволинейные интегралы:

936. $\int_c (x^2 + y^2) \, ds$, где c — кривая $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

937. $\int_c xy \, ds$, где c — дуга гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ ($0 \leq t \leq t_0$).

938. $\int_c (x^2 + a^2 y^2) \, ds$, где c — окружность $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

939. Найти длину дуги пространственной кривой Γ

$$x = at, \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}} ab t^2, \quad z = bt^3 \quad (a > 0, b > 0)$$

от точки $(0, 0, 0)$ до точки $A = \left(a, \sqrt{\frac{3}{2}} ab, b\right)$.

Решение. Из определения криволинейного интеграла (см. [3], § 3.2) видно, что в случае, если подынтегральная функция равна 1, криволинейный интеграл равен длине дуги кривой, вдоль которой

вычисляется этот криволинейный интеграл. Поэтому

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} ds = \int_0^1 \sqrt{a^2 + 6abt^2 + 9b^2t^4} dt = \\ = \int_0^1 (a + 3bt^2) dt = a + b.$$

940. Найти длину кривой

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t} \quad (0 < t < \infty).$$

941. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} (x dy - y dx),$$

где: а) Γ — отрезок прямой, соединяющей точки $O = (0, 0)$ и $A = (2, 4)$; б) Γ — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки O и A .

Вычислить криволинейные интегралы, предварительно убедившись, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал:

$$942. \int_{(-1, 2)}^{(2, 4)} (x dy + y dx). \quad 943. \int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}.$$

944. $\int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x + y) (dx + dy)$, где $f(t)$ — дифференцируемая функция.

$$945. \int_{(0, 0)}^{(a, \pi/4)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

946. Вывести формулы:

а) $\text{grad}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \text{grad } f + c_2 \text{grad } g$, где c_1, c_2 — постоянные;

б) $\text{grad} \left(\frac{f}{\varphi} \right) = \frac{\varphi \text{grad } f - f \text{grad } \varphi}{\varphi^2} \quad (\varphi(x) \neq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n))$;

в) $\text{grad } \psi[f] = \psi'(f) \text{grad } f$, где $\psi(t)$ — дифференцируемая функция одного переменного.

947. Найти $\text{grad } U(x, y, z)$, если: а) $U = r$; б) $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, f — дифференцируемая функция.

948. Найти величину и направление градиента поля

$$U(x, y) = ax^2 + by^2 - dxy \quad (a > 0, b > 0, d > 0)$$

в точке $A = (2, 1)$.

Определить, в каких точках $\text{grad } U$ равен нулю и в каких точках он перпендикулярен оси Oy .

949. Вывести формулы:

а) $\text{div}(c_1 a_1 + c_2 a_2) = c_1 \text{div } a_1 + c_2 \text{div } a_2$, где c_1, c_2 — постоянные;

б) $\text{div}(f \cdot c) = \text{grad } f \cdot c$, где c — постоянный вектор.

950. Вычислить $\text{div} \left(\frac{r}{r} \right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r = (x, y, z)$.

951. Вывести формулы:

а) $\text{rot}(c_1 a_1 + c_2 a_2) = c_1 \text{rot } a_1 + c_2 \text{rot } a_2$, где c_1, c_2 — постоянные;

б) $\text{rot}(Uc) = \text{grad } U \times c$, где c — постоянный вектор.

952. Вычислить $\text{rot } r$ и $\text{rot } rc$, где $r = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ — постоянный вектор.

953. Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал U , и найти U , если потенциал существует:

а) $a = (5x^2y - 4xy)i + (3x^2 - 2y)j$;

б) $a = (y + z, x + z, x + y)$.

954. Какие из уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах:

а) $(2x^2 + y)dx + (3x + 4y)dy = 0$;

б) $(ax^2 + by^2)dx + (2cxy + y^2)dy = 0$?

Решить уравнения:

955. $(x + y)dx + (x + 3y)dy = 0$.

956. $(x^2 + y^2 + 4x)dx + 2xydy = 0$.

957. $(y + z)dx + (x + 2z)dy + (x + 2y)dz = 0$.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

958. $\int_{\Gamma} [(cx + y)dx - (x + dy)dy]$, где Γ — эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, c, d — произвольные числа.

959. $\int_{\Gamma} [(x + cy)dx + (y + dx)dy]$, где Γ — эллипс (см. задачу 958), c, d — произвольные числа.

960. Найти интеграл $\int_{A \rightarrow B} [y^2 dx + (1 + 2xy)dy]$, если точки A и B лежат на оси Ox , а D — область,

ограниченная путем интегрирования AmB и отрезком AB .

961. Найти площадь S фигуры, ограниченной кривой $C: \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ($a > 0$, $b > 0$, $n > 0$) и осями координат.

Решение. Легко видеть, что $x = a \cos^{2/n} \varphi$, $y = b \sin^{2/n} \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$) есть параметрические уравнения кривой C .

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx),$$

где Γ — контур, состоящий из кривой C и отрезков осей координат.

Далее,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) + \frac{1}{2} \int_b^0 (0 dy - y \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^a (x \cdot 0 - 0 dx) = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(2 \frac{ab}{n} \cdot \cos^{\frac{2}{n}+1} \varphi \cdot \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ab}{n} \sin^{\frac{2}{n}+1} \varphi \cdot \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{ab}{n} \int_0^{\pi/2} [\cos \varphi \cdot \sin \varphi]^{\frac{2}{n}-1} d\varphi. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменного: $\sin \varphi = z$, $d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{n} \int_0^1 z^{\frac{2}{n}-1} (1-z^2)^{\frac{1}{n}-1} dz = (z^2 = t) = \\ &= \frac{ab}{2 \cdot n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{ab}{2n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)} \end{aligned}$$

(см. задачи 927, 928).

Заметим, что при $n=2$ мы получаем четвертую часть площади эллипса ($\pi ab/4$).

ГЛАВА 9

Разложить в ряды Фурье следующие функции:

962. $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0, \\ bx, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ где a, b — постоянные.

963. $f(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

964. Периодическую функцию $f(x) = |\sin x|$. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

965. Периодическую функцию $f(x) = |\cos x|$.

966. Найти скалярное произведение функций

$$f(x) = \sin 2x, \quad \varphi(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

967. Найти норму функции $f(x) = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 2$).

Исследовать на равномерную и среднеквадратическую сходимость последовательности функций:

968. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ ($0 \leq x \leq 1$).

969. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ ($0 \leq x \leq 1$).

Решение. Легко видеть, что последовательность $f_n(x)$ сходится к функции

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & x = 1. \end{cases}$$

Сходимость будет неравномерная, так как

$$\sup_{0 \leq x < 1} f_n(x) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Покажем, что данная последовательность сходится к функции $\psi(x)$ в смысле среднеквадратического. Так как значение интеграла не зависит от значения функции в одной точке, то достаточно показать, что $f_n(x)$

сходится к нулю в смысле среднеквадратического:

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - 0\| &= \left(\int_0^1 \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right|^2 dx \right)^{1/2} = (x^n = z) = \\ &= \left(\int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{n}+1} dz}{n(1+z)^2} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(1+z)^2} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

970. Найти функцию $\varphi(x)$, если:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy = \exp(-x^2).$$

ГЛАВА 10

971. Решить методом Фурье уравнение поперечных колебаний балки

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq l, \quad t > 0)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

которые выражают тот факт, что оба конца балки закреплены;

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x). \quad (1)$$

Решение. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x).$$

Подставляя эту функцию в уравнение, получаем

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{T^{(4)}}{T} = \lambda^4 > 0.$$

Таким образом, для функций $X(x)$ и $T(t)$ мы получили обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для уравнения

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = 0 \quad (2)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$r^4 = \lambda^4.$$

Решая это уравнение, получаем четыре различных корня $r_1 = -\lambda$, $r_2 = \lambda$, $r_3 = -i\lambda$ и $r_4 = i\lambda$. Поэтому общее решение уравнения (2) запишется в виде

$$X(x) = a_1 \operatorname{ch} \lambda x + a_2 \operatorname{sh} \lambda x + b_1 \cos \lambda x + b_2 \sin \lambda x.$$

Исходя из условий задачи, функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0) = X(l) = \frac{\partial X(0)}{\partial x} = \frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Используя (3) для $x = 0$, получим

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2.$$

Итак,

$$X(x) = a_1 (\operatorname{ch} \lambda x - \cos \lambda x) + a_2 (\operatorname{sh} \lambda x - \sin \lambda x).$$

Далее, используя (3) при $x = l$, получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) + a_2 (\operatorname{sh} \lambda l - \sin \lambda l) &= 0, \\ \lambda a_1 (\operatorname{sh} \lambda l + \sin \lambda l) + \lambda a_2 (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, для определения коэффициентов a_1, a_2 мы получили линейную однородную систему. Чтобы система (4) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l & \operatorname{sh} \lambda l - \sin \lambda l \\ \lambda (\operatorname{sh} \lambda l + \sin \lambda l) & \lambda (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\operatorname{ch} \lambda l \cdot \cos \lambda l = 1. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет счетное число положительных решений

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

Теперь для определения коэффициентов a_1, a_2 достаточно рассмотреть одно из уравнений системы (4). Считая a_1 произвольным, находим a_2 (при $\lambda = \lambda_n$).

Тогда значению λ_n будет соответствовать функция

$$X_n(x) = (\operatorname{sh} \lambda_n l - \sin \lambda_n l) (\operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x) - \\ - (\operatorname{ch} \lambda_n l - \cos \lambda_n l) (\operatorname{sh} \lambda_n x - \sin \lambda_n x). \quad (6)$$

Итак, числа λ_n являются собственными значениями, а $X_n(x)$ — собственными функциями (соответствующими λ_n) краевой задачи (2), (3). Функции $X_1(x), \dots, X_n(x), \dots$ образуют ортогональную систему на $(0, l)$. В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} X_n^{(4)} - \lambda_n^4 X_n &= 0, \\ X_k^{(4)} - \lambda_k^4 X_k &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Умножая первое уравнение на X_k , а второе — на X_n и вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$X_n^{(4)} X_k - X_k^{(4)} X_n + (\lambda_n^4 - \lambda_k^4) X_k X_n = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} [X_k X_n^{(3)} - X_n X_k^{(3)}] - \frac{d}{dx} [X_k' X_n'' - X_n' X_k''] + \\ + (\lambda_n^4 - \lambda_k^4) X_k X_n = 0.$$

Интегрируя это уравнение на $[0, l]$, в силу условий (3) получим

$$\int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = 0 \quad (k \neq n).$$

Вычислим еще интеграл от квадрата функции $X_n(x)$:

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \lambda_n^{-4} \int_0^l X_n(x) X_n^{(4)}(x) dx = \\ = \lambda_n^{-4} \left[X_n(x) X_n'''(x) \Big|_0^l - \int_0^l X_n'(x) X_n'''(x) dx \right] = \\ = -\lambda_n^{-4} \int_0^l X_n' \cdot X_n''' dx = -\lambda_n^{-4} \left[X_n'(x) X_n''(x) \Big|_0^l - \right. \\ \left. - \int_0^l [X_n''(x)]^2 dx \right] = \lambda_n^{-4} \int_0^l [X_n''(x)]^2 dx.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^l [X_n''(x)]^2 dx &= \\ &= \left[x [X_n''(x)]^2 \Big|_0^l - 2 \int_0^l x X_n''(x) X_n'''(x) dx \right] = \\ &= l [X_n''(l)]^2 - 2 \int_0^l x X_n''(x) X_n'''(x) dx. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^l x X_n''(x) X_n'''(x) dx &= \\ &= \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} [x X_n'(x) X_n'''(x)] - X_n'(x) X_n'''(x) - \right. \\ &\quad \left. - x X_n'(x) X_n^{(4)}(x) \right\} dx = - \int_0^l X_n' X_n''' dx - \lambda_n^4 \int_0^l x X_n' X_n dx = \\ &= - \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} [X_n' X_n''] - (X_n'')^2 \right\} dx - \lambda_n^4 \int_0^l x X_n X_n' dx = \\ &= \int_0^l [X_n'']^2 dx - \lambda_n^4 \int_0^l x X_n X_n' dx. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^l x X_n X_n' dx &= x [X_n]^2 \Big|_0^l - \int_0^l X_n [X_n + x X_n'] dx = \\ &= - \int_0^l [X_n]^2 dx - \int_0^l x X_n X_n' dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^l X_n X_n' dx = - \frac{1}{2} \int_0^l [X_n]^2 dx.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \int_0^l [X_n]^2 dx &= l \lambda_n^{-4} [X_n''(l)]^2 - \\ &- 2 \lambda_n^{-4} \left[\int_0^l [X_n''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \lambda_n^4 \int_0^l [X_n]^2 dx \right] = \\ &= l \lambda_n^{-4} [X_n''(l)]^2 - 3 \int_0^l [X_n(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_0^l [X_n(x)]^2 dx = \frac{l}{4} \lambda_n^{-4} [X_n''(l)]^2.$$

Продолжим решение исходной задачи. При данном $\lambda = \lambda_n$ решение уравнения

$$T''(t) = -\lambda_n^4 T(t)$$

запишется в виде

$$T_n(t) = c_n \cos \lambda_n^2 t + d_n \sin \lambda_n^2 t \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Общее решение исходной задачи можно теперь записать так:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos \lambda_n^2 t + d_n \sin \lambda_n^2 t) X_n(x).$$

Коэффициенты c_n и d_n находим из условий (1):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l [X_n(x)]^2 dx} = \frac{4 \lambda_n^4 \int_0^l f(x) X_n(x) dx}{l [X_n''(l)]^2}, \\ d_n &= \frac{\int_0^l F(x) X_n(x) dx}{\lambda_n^2 \int_0^l [X_n(x)]^2 dx} = \frac{4 \lambda_n^2 \int_0^l F(x) X_n(x) dx}{l \cdot [X_n''(l)]^2}. \end{aligned}$$

Естественно, мы предполагали, что функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Стеклова ([3], § 5.10).

Отметим, что

$$[X_n''(l)]^2 = 4\lambda_n^4 (\operatorname{sh} \lambda_n l - \sin \lambda_n l)^2.$$

972. Решить задачу 971 при условии, что

$$f(x) = 2X_2(x) + 3X_3(x), \quad F(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l).$$

973. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi, \quad t > 0)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x) = ax \quad (-\pi < x < \pi)$$

и граничном условии

$$u(\pm \pi, t) = 0.$$

ГЛАВА 11

974. Найти действительную и мнимую части комплексных чисел:

а) $z = (2 + 3i)(3 - 2i)$; б) $z = (a + bi)(c + di)$;

в) $z = (a + bi)^3$; г) $z = \frac{2 + 3i}{1 + 2i}$.

975. Построить множество точек z , удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z| < 3$; б) $|z - i| < 1$;

в) $|z| < 3$, $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$;

г) $|z| = 3$; д) $2 \leq |z - i| \leq 3$.

976. Найти главное значение логарифма:

а) $\ln(-2)$; б) $\ln(1 + i)$; в) $\ln(x + yi)$.

977. Найти суммы:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

б) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;

в) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n - 1)x$;

г) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n - 1)x$.

978. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция. Проверить, что имеет место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

979. Найти сумму ряда

$$S(z) = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{12}}{12!} + \dots$$

Решение. Данный ряд сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, и все получающиеся ряды снова будут равномерно сходящимися.

Имеем:

$$S'(z) = \frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} + \dots, \quad S'(0) = 0;$$

$$S''(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} + \dots, \quad S''(0) = 0;$$

$$S'''(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} + \dots, \quad S'''(0) = 0;$$

$$S^{(4)}(z) = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \dots = S(z).$$

Таким образом, функция $S(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$S^{(4)}(z) = S(z).$$

и начальным условиям $S(0) = 1$, $S'(0) = S''(0) = S'''(0) = 0$. Решая это уравнение, получим

$$S(z) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} z + \cos z].$$

980. Найти сумму ряда

$$S(z) = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \dots$$

981. Найти сумму рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Решение. Согласно формуле Эйлера

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

поэтому достаточно исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Так как

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 t^{n-1} e^{inx} dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_0^1 t^{n-1} e^{inx} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=1}^N t^{n-1} e^{inx} dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=1}^N (te^{ix})^n \frac{dt}{t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{te^{ix} - (te^{ix})^{N+1}}{1 - te^{ix}} \frac{dt}{t} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{ix} - t^N e^{i(N+1)x}}{1 - te^{ix}} dt = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{1-\delta} \frac{e^{ix} - t^N e^{i(N+1)x}}{1 - te^{ix}} dt = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{1-\delta} \frac{e^{ix} dt}{1 - te^{ix}} = \int_0^1 \frac{e^{ix} dt}{1 - te^{ix}} = \\ &= -\ln(1 - te^{ix}) \Big|_0^1 = -\ln[1 - \cos x - i \sin x] = \\ &= -\ln|1 - \cos x - i \sin x| - i \operatorname{arctg} \frac{-\sin x}{1 - \cos x} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 4 \sin^2 \frac{x}{2} - i \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x - \pi}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 4 \sin^2 \frac{x}{2} + i \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую части в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}, \quad \text{получим}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\frac{1}{2} \ln 4 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Можно сразу выделить действительную и мнимую части из интеграла

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{ix} dt}{1 - te^{ix}} &= \int_0^1 \frac{dt}{e^{-ix} - t} = \\ &= \int_0^1 \frac{\cos x - t}{1 - 2t \cos x + t^2} dt + i \sin x \int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t \cos x + t^2}.\end{aligned}$$

После вычисления интегралов получим прежний результат.

982. Найти суммы рядов

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}, \quad S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

У к а з а н и е. $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^{n-2} - t^n) dt$. Необходимо исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} e^{inx}$.

983. Найти суммы рядов

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+\alpha)(n+\beta)}, \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n+\alpha)(n+\beta)}$$

$(\alpha > -1, \beta > -1, \alpha \neq \beta).$

У к а з а н и е. $\frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+\beta} \right] =$
 $= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^1 [t^{n+\alpha-1} - t^{n+\beta-1}] dt.$

984. Используя теорию вычетов, показать, что:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, & I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \\ I_3 &= \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2, & I_4 &= \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = \\ & & &= -\frac{\pi}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

Решение. Рассмотрим интеграл от функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ по контуру Γ , составленному из отрезка $[0, R]$ оси Ox ; отрезка $z = R + iy$, $0 \leq y \leq \pi$; отрезка $z = x + \pi i$, $0 \leq x \leq R$; отрезка $z = iy$, $0 \leq y \leq \pi$.

Будем считать, что контур Γ мы обходим против часовой стрелки. Функция $f(z)$ будет аналитической внутри Γ , и поэтому

$$\int_{\Gamma} \frac{z dz}{e^z - 1} = 0,$$

или

$$\int_0^R \frac{x dx}{e^x - 1} + \int_0^{\pi} \frac{(R + iy) i dy}{e^{R+iy} - 1} + \int_R^0 \frac{(x + \pi i) dx}{-(e^x + 1)} + \int_{\pi}^0 \frac{iy i dy}{e^{iy} - 1} = 0. \quad (1)$$

Так как

$$\begin{aligned} \left| \frac{(R + iy) i}{e^{R+iy} - 1} \right|^2 &= \frac{R^2 + y^2}{(e^R \cos y - 1)^2 + e^{2R} \sin^2 y} = \\ &= \frac{R^2 + y^2}{e^{2R} - 2e^R \cos y + 1} = \frac{R^2 + y^2}{e^R (e^R - 2 \cos y) + 1} \rightarrow 0, \\ R &\rightarrow \infty \quad (0 \leq y \leq \pi), \end{aligned}$$

то

$$\int_0^{\pi} \frac{(R + iy) i dy}{e^{R+iy} - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Переходя в (1) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$I_1 + I_2 + \int_0^{\pi} \frac{-y}{2} dy = 0, \quad \pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^{\pi} \frac{y \sin y dy}{2(1 - \cos y)}.$$

Отсюда

$$I_1 + I_2 = \pi^2/4,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{y \sin y dy}{2(1 - \cos y)} &= \pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \pi \int_1^{\infty} \frac{dz}{z(z+1)} = \\ &= \pi \ln \frac{z}{z+1} \Big|_1^{\infty} = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\infty} \frac{2x \, dx}{e^{2x} - 1} = (2x = v) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{v \, dv}{e^v - 1} = \frac{1}{2} I_1,$$

откуда

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1.$$

Из равенства $I_1 + I_2 = \pi^2/4$ находим, что $I_1 = \pi^2/6$ и $I_2 = \pi^2/12$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{y \sin y \, dy}{2(1 - \cos y)} &= \int_0^{\pi} y \frac{\cos \frac{y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} dy = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} y \frac{\cos y}{\sin y} dy = (y = u, \operatorname{ctg} y \, dy = dv) = \\ &= 2 \left[y \ln \sin y \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln \sin y \, dy \right] = -2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin y \, dy. \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin y \, dy = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Замена переменной $x = \frac{\pi}{2} - t$ в I_4 показывает, что $I_4 = I_3$.

985. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{7}{120} \pi^4.$$

ГЛАВА 12

986. Найти изображение Лапласа функции $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > -1$).

Решение. $\varphi(p) = L[f; p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^\alpha dt$. Полагая $pt = y$, получаем

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^\alpha dy = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha + 1),$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция.

В частности, если $\alpha = n$ — натуральное, то $\Gamma(n + 1) = n!$ и $\Phi(p) = L[l^n, p] = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

987. Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение функции $f(t) = t \operatorname{ch} at \cdot \cos bt$.

Пользуясь теоремой интегрирования изображения, найти изображения функций:

$$988. f(x) = \frac{e^{-ax} \sin kx}{x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin kx &\doteq \frac{k}{p^2 + k^2}, & e^{-ax} \sin kx &\doteq \frac{k}{(p+a)^2 + k^2}, \\ \frac{e^{-ax} \sin kx}{x} &\doteq \int_p^\infty \frac{k dq}{(q+a)^2 + k^2} = \operatorname{arctg} \frac{q+a}{k} \Big|_p^\infty = \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p+a}{k} = \operatorname{arctg} \frac{k}{p+a}. \end{aligned}$$

$$989. f(x) = \frac{\cos ax - \cos bx}{x}.$$

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

$$990. y' + ay = b, y(0) = 0.$$

$$991. y' + ay = f(x), y(0) = A.$$

Решение. Введем функцию $z(x) = y(x) - A$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$z' + a(z + A) = f(x)$$

и начальному условию $z(0) = 0$.

Данное уравнение будем решать с помощью формулы Дюамеля.

Решаем сначала уравнение

$$z_1' + az_1 = 1, \quad z_1(0) = 0.$$

Пусть $\bar{z}_1(p)$ — изображение решения $z_1(x)$. Тогда

$$p\bar{z}_1(p) + a\bar{z}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{z}_1(p) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} \right],$$

$$z_1(x) = \frac{1}{a} (1 - e^{-ax}).$$

Далее,

$$\bar{z}(p) = p\bar{z}_1(p) \left[F(p) - \frac{a}{p} A \right],$$

где $F(p)$ — изображение функции $f(x)$.

По формуле Дюамеля

$$\begin{aligned}\bar{z}(p) &\equiv p\bar{z}_1(p)\left[F(p) - \frac{a}{p}A\right] \doteq \\ &\doteq [f(x) - aA]z_1(0) + \int_0^x [f(\tau) - aA]z'_1(x-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^x [f(\tau) - aA]e^{-a(x-\tau)}d\tau.\end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } z(x) = \int_0^x f(\tau)e^{-a(x-\tau)}d\tau - Ae^{-ax}(e^{ax} - 1)$$

и

$$y(x) = Ae^{-ax} + \int_0^x e^{-a\tau}f(x-\tau)d\tau.$$

992. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = A$, $y'(0) = B$. У к а з а н и е. Вспомогательное уравнение имеет вид $(p^2 + 2p + 2)\bar{y}(p) = (A + B)p^2 + 2A$, $\bar{y}(p) = \frac{A(p+1)}{(p+1)^2 + 1} + \frac{A+B}{(p+1)^2 + 1}$.

993. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 3y' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}.$$

Решение. Составим операторное уравнение:

$$\begin{aligned}p^3\bar{y}(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) - 3p\bar{y}(p) + \\ + 3y(0) + 2\bar{y}(p) = \frac{8}{(p+1)^3} + \frac{4}{(p+1)^2} - \frac{10}{p+1}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\bar{y}(p) = \frac{p^2y(0) + py'(0) + y''(0) - 3y(0)}{(p-1)^2(p+2)} + \\ + \frac{2 - 16p - 10p^2}{(p-1)^2(p+2)(p+1)^3}.\end{aligned}$$

Так как у нас начальные условия отсутствуют, то $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ — произвольные числа. Разлагая правую часть последнего равенства на простейшие дроби, получим

$$\begin{aligned}\bar{y}(p) = \frac{c_1}{p-1} + \frac{c_2}{(p-1)^2} + \frac{c_3}{p+2} + \frac{2}{(p+1)^3} + \\ + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Согласно таблице изображений находим

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1) e^{-x}.$$

994. Найти общее решение уравнения $y^{(4)} + y''' = \cos x$.

995. Показать, что сумма ряда

$$S = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \varphi(n)$$

равна

$$S = (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(x) e^{-mx} dx}{1 \mp e^{-x}},$$

где $f(x) \equiv \varphi(p)$.

Решение.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \varphi(n) = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} f(x) \frac{(\pm 1)^m e^{-mx}}{1 \mp e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Найти сумму рядов:

$$996. S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Будем использовать задачу 995. В данном случае $m=1$, $\varphi(n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Следовательно, $f(x) = 1 - e^{-x}$. На основании формулы из задачи 995 получаем

$$S = \int_0^{\infty} (1 - e^{-x}) \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

$$997. S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

$$998. S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

Решить системы уравнений:

$$999. \left. \begin{aligned} y' &= 3z - y, \\ z' &= y + z + e^x, \end{aligned} \right\} y(0) = z(0) = 0.$$

$$1000. \left. \begin{aligned} y' - 2y - 4z &= \cos x, \\ z' - y + 2z &= \sin x, \end{aligned} \right\} y(0) = z(0) = 0.$$

$$1001. \left. \begin{aligned} y' &= z - t, \\ z' &= t - 2y, \\ t' &= 2y - z, \end{aligned} \right\} y(0) = 1, z(0) = t(0) = 0.$$

$$1002. \left. \begin{aligned} y'' + 2z &= 0, \\ z' - 2y &= 0, \end{aligned} \right\} y(0) = z(0) = 0, y'(0) = 1, z'(0) = 0.$$

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

8. $a = 0$, (1) $= 1/9$. 9. $a + b = 0$, (25) $= 25/99$. 10. $A + B = [2, 6]$, $AB = (3, 5]$, $A \setminus B = [2, 3]$. 11. а) $-3,1 < x < -2,9$; б) $x \leq -7$, $x \geq 13$; в) $x < -3/2$; г) $0 < x < 1/2$; д) $x \leq -3/2$, $x \geq 1/4$. 12. $a > -a$, если $a > 0$, $-a > a$, если $a < 0$. 13. а) $b \geq 0$; б) $b \leq 0$; в) $b < 0$; г) $b > 0$. 14. а) 1; б) 1; в) $\sqrt{2}/2$. 16. 0. 17. 0. 18. $1/2$ (см. задачу 1). 19. $1/3$ (см. задачу 2). 22. Не будет. Она просто неограничена. 27. $9/8$; $1/6$. 28. 2; -30 . 29. 0, 1, 1, 1; $-1/6$, $4/3$, $1/3$, 1. 30. -1 , 0, 1. 32. Указание. Воспользоваться неравенством $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ($k \geq 2$).

34. $E = (-\infty, \infty)$; $E_1 = (0, 1]$.

$$35. E = \left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right], \quad E_1 = \left[0, \frac{\sqrt{17}}{2} \right].$$

$$36. 1, -\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 5}, -f(x), 2/(1 + x^2), (1 + x^2)/(1 - x^2).$$

42. 0, 25; 2, ∞ .

$$43. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases} \quad (\text{рис. 43});$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \sin x, & \pi < x \leq 3\pi/2, \\ -1, & x > 3\pi/2 \end{cases} \quad (\text{рис. 44}).$$

44. а) 1; б) $2/3$; в) $1/2$; г) 3; д) $4/3$; е) 0; ж) $-1/16$; з) $1/144$; и) $1/\sqrt{2a}$; к) 0. 45. а) 3; б) 2; в) 4. 46. ∞ . 47. а) e^4 ; б) e^3 ; в) 1. 48. а) 4; б) $a^b \ln a$. 49. Непрерывна всюду (рис. 45). 50. Если $A = 2$, то $f(x)$ непрерывна всюду. Если $A \neq 2$, то $x = 1$ — устранимая точка разрыва (рис. 46). 51. $x = -1$, $x = 3$ — точки разрыва первого рода (рис. 47). 52. $x = -1$ — устранимая точка разрыва (рис. 48). 53. $x = -1$ — точка разрыва второго рода. 54. $x = \frac{2k+1}{2} \pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) — точки разрыва первого рода (рис. 49). 55. $x = 1$ — точка разрыва первого рода (рис. 50). 56. $x = 0$ — точка разрыва первого рода, если $a \neq 1$ (рис. 51). 57. $\delta \leq \epsilon/8$. 58. $\delta \leq \epsilon/12$. 59. $(b - dy)/(cy - a)$. 60. $3x$. 61. x . 62. $f' = 3x^2 - 2$, $f'(0) = -2$, $f'(2) = 10$.

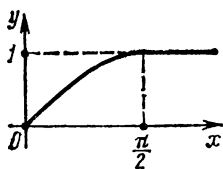


Рис. 43

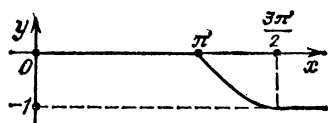


Рис. 44

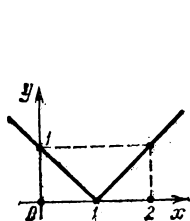


Рис. 45

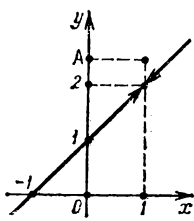


Рис. 46

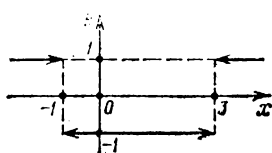


Рис. 47

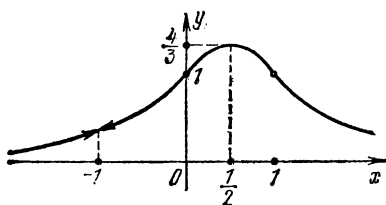


Рис. 48

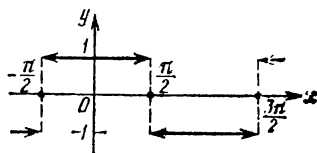


Рис. 49

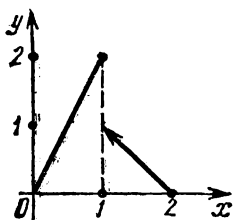


Рис. 50

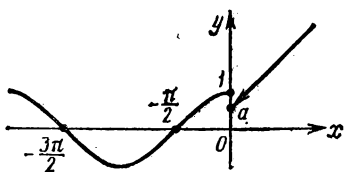


Рис. 51

$$63. f'(x) = \arcsin \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)\sqrt{2x+1}} \quad \left(x > -\frac{1}{2}\right);$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad 64. \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1).$$

$$65. \text{ а) } 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0); \quad \text{ б) } -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$(x > 0);$$

$$\text{ в) } \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4} \quad (|x| \neq 1); \quad \text{ г) } \frac{1+2x^2}{(1+x^2)^{1/2}};$$

$$\text{ д) } \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}} \quad (|x| < |a|);$$

$$\text{ е) } \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \quad (x > 0);$$

$$\text{ ж) } \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0); \quad \text{ з) } \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \dots);$$

$$\text{ и) } \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}; \quad \text{ к) } \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k - \text{целое}\right);$$

$$\text{ л) } -2^{\lg \frac{1}{x}} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{-2} \frac{\ln 2}{x^2}; \quad \text{ м) } e^x e^{e^x} (1 + e e^{e^x});$$

$$\text{ н) } a^a x^{a-1} + a x^{a-1} a^x \ln a; \quad \text{ о) } \frac{-2 \operatorname{sign} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0);$$

$$\text{ п) } \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

$$66. \frac{1}{\cos^4 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, k=0, \pm 1, \dots\right).$$

$$67. -2x \exp(-x^2).$$

$$68. \text{ а) } 2x \cos x^2; \quad \text{ б) } \sin 2x; \quad \text{ в) } 21x^6 \cos x^7 \sin^2 x^7; \quad \text{ г) } -\cos x \times$$

$$\times \sin(\sin x); \quad \text{ д) } -2x \sin x^2; \quad \text{ е) } -4x^3 \sin 2x^4.$$

$$69. \text{ а) } 1/\sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0); \quad \text{ б) } a/(a^2+x^2); \quad \text{ в) } 1/\sqrt{a^2+x^2};$$

$$\text{ г) } \operatorname{sign} \cos x, \quad x \neq \frac{2k+1}{2} \pi, k - \text{целое}; \quad \text{ д) } -1/\sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0);$$

$$\text{ е) } (3x^2+1)e^{x^3+x}.$$

$$70. \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi, k - \text{целое}).$$

$$71. \text{ а) } \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x; \quad \text{ б) } \frac{6}{x} \ln^2 x^2 \quad (x \neq 0); \quad \text{ в) } \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$(x > e); \quad \text{ г) } \frac{x}{x^4-1} \quad (|x| > 1); \quad \text{ д) } \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \quad (x > -1);$$

$$\text{ е) } 1/\cos x \quad (|x - 2k\pi| < \pi/2, k - \text{целое}); \quad \text{ ж) } -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0);$$

а) $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$; б) $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} (x \geq 0)$; в) $\frac{1}{1+x^2} (x \neq 1)$;
 г) $\frac{x^3}{x^6+1} \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$; д) $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$; е) $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
 ($x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k - \text{целое}$); ж) $\frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x$; з) $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

$$72. f'(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 1, \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 < x < 4 \end{cases} \quad (\text{рис. 52}).$$

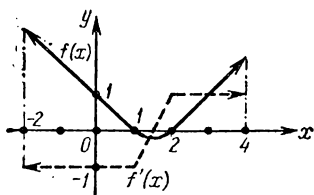


Рис. 52

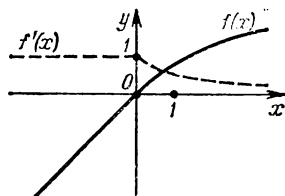


Рис. 53

$$73. f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 53}),$$

74. $\frac{y'}{y} = \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$. 75. $2 \operatorname{th} x$. 76. а) $2x \operatorname{ch}(x^2+1)$;

б) $18x^5 \operatorname{sh}^2 x^6 \operatorname{ch} x^6$.

77. $(2x+1) \operatorname{sh} 2(x^2+x+1)$. 78. а) $2 \operatorname{th} x / \operatorname{ch}^2 x$; б) $2x / \operatorname{ch}^2 x^2$

79. а) $\frac{1}{x \operatorname{ch}^2(1+\ln x)}$; б) $1/\sqrt{1+x^2}$; в) $\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/4}}$;

г) $\operatorname{cth} x (x > 0)$; д) $\frac{1}{x} \operatorname{sh} \ln x (x > 0)$; е) $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} e^{\operatorname{th} x}$;

ж) $(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x} [\operatorname{sh} x \ln \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{cth} x]$; з) $-(3 \operatorname{sh} x) / \operatorname{ch}^4 x$;
 и) $2 \operatorname{ch} x / \operatorname{sh}^2 x (x \neq 0)$.

80. $df(x) = (2x+1) \Delta x$; $df(1) = 3 \Delta x$; $\Delta f(1) = 3 \Delta x + (\Delta x)^2$;
 при $\Delta x = 0,1$ $df(1) = 0,3$, $\Delta f(1) = 0,31$. 81. $e^x (1+x) dx$. 82. $\operatorname{ch} x dx$.

83. $-x \operatorname{sh} x dx$. 84. $-\frac{2x dx}{1-x^2} (|x| < 1)$. 85. а) $(-2+4x^2) e^{-x^2}$;

б) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. 87. $120x dx^4$. 88. $e^x \left[\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right] dx^3$.

89. $y' = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2} (1+t)$, $y'' = \frac{3}{4(1-t)} (t \neq 1)$. 90. $y' =$

$= -\operatorname{ctg} t$, $y'' = -1/(2 \sin^3 t) (t \neq k\pi, k - \text{целое})$. 91. $y' = t$, $y'' =$

$= 1/f''(f)$. 92. $y' = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, $y'' = \frac{-1}{4 \sin^4(t/2)} (t \neq 2k\pi, k - \text{целое})$.

93. а) $y + 11x - 18 = 0$; $11y - x + 46 = 0$; б) не имеют. 94. $\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. 95. $\varphi = \pi/4$. 96. $\pi/6$. 98. а) $c = 1/\sqrt{3}$; б) $c = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 3A + 3}}{3} \forall B, C$; в) $c = 1/\sqrt{3} \forall A, B, C$.

100. а) Функция возрастает на $(-\infty, 1/2)$ и убывает на $(1/2, \infty)$; б) функция возрастает на $(-\infty, 1)$ и убывает на $(1, \infty)$.

103. a/b . 104. 2. 105. 1. 106. 4. 107. $1/4$. 108. 1. 109. а) $e^{-1/6}$; б) $e^{1/3}$; в) a/b ; г) 3; д) $-1/3$; е) 2; ж) $1/3$. з) 0; и) e^{-1} ; к) 1; л) 1; м) e^{-1} ; н) $a^a(-1 + \ln a)$; о) $1/n$; п) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; р) n/m ;

с) $1/2$, т) $2/\pi$. у) $1/2$. 111. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.

112. $f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. Указание. Использовать разложение по формуле Тейлора для функции e^x .

113. $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$. 114. $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. 115. $-1/12$. 116. 0. 117. $-1/6$. 118. $-1/2$.

119. а) 2,718281; б) 0,017453; в) 2,236. Указание. Представить число $\sqrt{5}$ в виде $\sqrt{5} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}}$ и воспользоваться формулой Тейлора для функции $(1+x)^m$ при $x=1/4$, $m=1/2$; г) $\ln 2 = 0,69315$, $\ln 3 = 1,09861$.

120. а) При $x = -1/2$ максимум, $y(-1/2) = 9,4$; б) при $x=0$ минимум, $y(0) = 0$; в) при $x=0$ минимум, $y(0) = 0$; при $x = \pm 1$ максимум, $y(\pm 1) = 1$; г) при $x = -1$ максимум, $y(-1) = -2$; при $x = 1$ минимум, $y(1) = 2$; д) при $x = 3\pi/4$ максимум,

$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, при $x = \frac{7\pi}{4}$ минимум, $y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$;

е) при $x=0$ максимум, $y(0) = 1/4$; ж) при $x = 1/2$ максимум, $y(1/2) = 1/4$; при $x = -1/2$ минимум, $y(-1/2) = -1/4$; з) при $x = 1$ максимум, $y(1) = 0$; при $x = 3$ минимум, $y(3) = -4$;

и) при $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$) максимум, $y(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}$;

при $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$) минимум, $y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3}{4}$; к) при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$) максимум,

$y\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; при $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$)

минимум, $y\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

121. а) 32; б) 10,1; 2. 122. $d = 7\sqrt{2}/8$. Указание. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{\sqrt{2}}|x^2 - x + 2|$. 123. а) 2; 0; б) $(1 + \sqrt{2})/2 > 1$; 0. 124. а) $x = 1$ — точка перегиба; график

направлен выпуклостью вниз на $(-\infty, 1)$; на $(1, \infty)$ график выпуклый кверху; б) $x = \pm 1/\sqrt{2}$ — точки перегиба; на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ график выпуклый кверху; на интервалах $|x| > 1/\sqrt{2}$ график направлен выпуклостью вниз (рис. 54). 125. а) Наклонная асимптота $y = x$; вертикальная — $x = 0$ (рис. 55); б) гори-

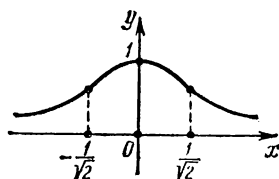


Рис. 54

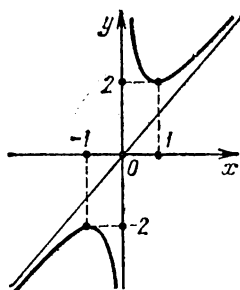


Рис. 55

зонтальная асимптота $y = 1$, вертикальная — $x = 0$, при $x \rightarrow +0$ (рис. 56); в) горизонтальная асимптота $y = 0$ (см. рис. 54); г) наклонная асимптота $y = x$ при $x \rightarrow \infty$; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$ (рис. 57). 126. а) $x = -1/3$ — точка

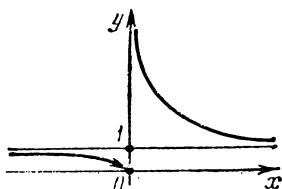


Рис. 56

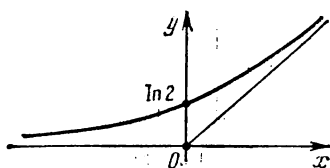


Рис. 57

минимума, $y(-1/3) = -\sqrt{10}$; $x = -1$, $x = 1/2$ — точки перегиба; а) $y = -1$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$, а $y = 1$ — при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 58); б) $x = 0$ — точка минимума; $x = -1$ — вертикальная асимптота; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$; график выпуклый вверх на $(-\infty, -1)$ и вниз на $(-1, \infty)$ (рис. 59). 127. а) См. рис. 60, Γ_1 ($t > 1$), Γ_2 ($-1 < t < 1$), Γ_3 ($t < -1$); б) см. рис. 61, Γ_1 ($t > 0$), Γ_2 ($t < 0$). 128. а) Стороны прямоугольника $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$; б) $x = a/6$; в) $PB = 12$ км; г) $a = d/\sqrt{3}$, $h = d\sqrt{2}/\sqrt{3}$. 129. Прямоугольник есть квадрат со стороной 2.

130. $\frac{|av \pm ub| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}$. Указание. Расстояние между кораблями (см. рис. 7) в произвольный момент времени t , согласно теореме косинусов, равно

$$r^2(t) = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt) \cos \theta.$$

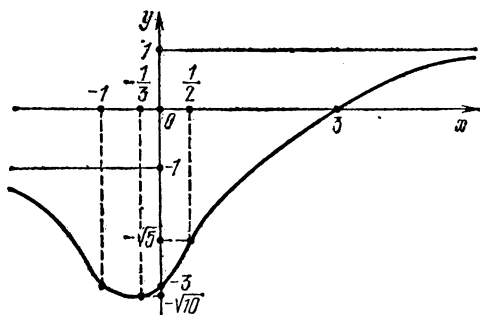


Рис. 58

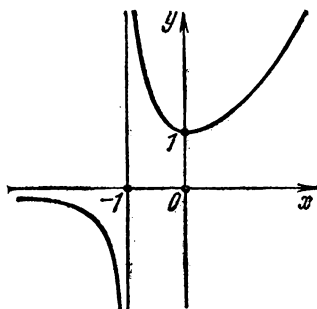


Рис. 59

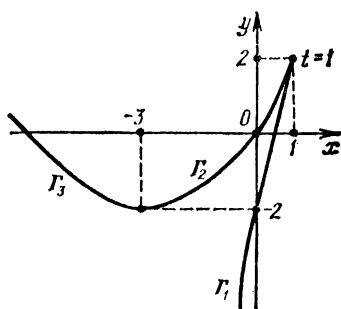


Рис. 60

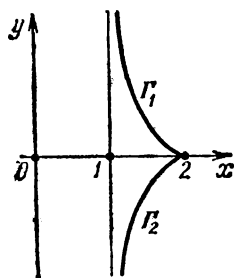


Рис. 61

Момент времени, когда корабли были на расстоянии a и b от места встречи, считаем равным нулю. Далее исследуем функцию $r^2(t)$ на экстремум.

131. а) $\rho \left(1 + \frac{2x}{\rho}\right)^{3/2}$; б) $\frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}{a^4b}$; в) $2\sqrt{y}$.
 132. $\xi = a(t - 3 \sin t)$, $\eta = 3a(1 - \cos t)$.

Г Л А В А 2

Для краткости записи в ответах пропускается постоянная C .

133. $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. 134. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$. 135. $x - \operatorname{arctg} x$. 136. $x - \cos x + \sin x$. 137. $x + \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$. 138. $-x + \operatorname{tg} x$. 139. $x - \operatorname{th} x$. 140. $x - \operatorname{cth} x$.
 141. $\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1+x^2}|$. 142. $\frac{1}{200}(2x-3)^{100}$.

143. а) $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x$; б) $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$;
 в) $a \ln |x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$; г) $\frac{4}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{24}{17}x^{12}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}x^4\sqrt{x^3}$;
 д) $-x + 3 \ln |x| + \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2}$; е) $\frac{2}{3}\sqrt{x}(x+6)$; ж) $\frac{1}{4} \ln(1+x^4)$;
 з) $-x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$; и) $x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$; к) $\frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$;
 л) $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$; м) $\frac{1}{22}(2x-9)^{11}$;
 н) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; о) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2})$;
 п) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}|$; р) $-\frac{1}{6}(3e^{-2x} + 2e^{-3x})$.

144. $-\sqrt{1-x^2}$. 145. $\ln(2+e^x)$. 146. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.
 147. $\frac{1}{3}[(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}]$. 148. $-\ln |\cos x|$. 149. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
 150. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2}$. 151. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right|$.

У к а з а н и е. Разделить числитель и знаменатель на $2^x 3^x$ и положить $t = (3/2)^x$.

152. а) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln |x + \sqrt{x^2-2}|$; б) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3}$;
 в) $\frac{-1}{2(1+x^2)}$; г) $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right|$; д) $\operatorname{arctg} e^x$; е) $x -$

$-\ln(1 + \sqrt{e^{2x} + 1})$; ж) $\frac{1}{3} \ln^3 x$; з) $\ln |\sin x|$; и) $\ln |\operatorname{th}(x/2)|$;
 к) $2 \operatorname{arctg} e^x$; л) $\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2$; м) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$; н) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$;
 о) $-2 \operatorname{cth} 2x$; п) $-\frac{1+2x}{10} (1-3x)^{2/3}$; р) $\frac{3}{56} (1+x^2)^{4/3} (4x^2-3)$;
 с) $x - \ln(1+e^x)$.

153. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. 154. $-(x+1)e^{-x}$. 155. $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$. 156. $-x \cos x + \sin x$. 157. $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$.
 158. $x \sin x + \cos x$. 159. $-\sqrt{x} + (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

160. а) $\frac{x}{2} \sin 2x - \frac{2x^2-1}{4} \cos 2x$; б) $-\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x$;
 в) $-\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$; г) $-\frac{1}{2} (1+x^2) e^{-x^2}$; д) $x(-1 + \ln x)$;
 е) $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\frac{-1}{n+1} + \ln x\right)$; ж) $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right) \operatorname{ch} 3x$;
 з) $x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x$; и) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x \ln \operatorname{tg} x$.

161. а) $\ln|x-2| + \ln|x+5|$; б) $\frac{9}{343} \ln \left| \frac{x+5}{x-2} \right| - \frac{9}{49(x-2)} - \frac{5}{14(x-2)^2}$.

162. а) $\operatorname{arctg}(x-1)$; б) $1/(1-x)$; в) $\ln|x^2-2x+2|$.

163. а) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; б) $\frac{1}{50} \times$
 $\times \left[2 \ln|x+2| - \ln(x^2+1) + 14 \operatorname{arctg} x + \frac{5(2x+1)}{x^2+1} \right]$.

164. а) $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$; б) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|$;
 в) $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} +$
 $+ 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right|$; г) $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;
 е) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; ж) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$
 $+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

165. $2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x})$.

166. а) $\frac{4}{1+\sqrt{x}} + 4 \ln(1+\sqrt{x})$;

$$\text{б)} \frac{3}{4} \ln \frac{x \sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[6]{x})^2 (1 - \sqrt[6]{x} + 2 \sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2 \sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4 \sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}};$$

$$\text{в)} \frac{2}{(1 + \sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1 + \sqrt[4]{x}}; \quad \text{г)} \frac{x^2}{2} - \frac{x \sqrt{x^2 - 1}}{2} + \frac{1}{2} \times$$

$$\times \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|; \quad \text{д)} \frac{1}{2} [x + 2 \sqrt{x} - \sqrt{x(1+x)} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})]. \quad \text{У к а з а н и е. Умножить числитель и знаменатель на выражение } \sqrt{1+x} - 1 - \sqrt{x}; \quad \text{е)} \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}.$$

$$167. \ln |1 + 2x + 2 \sqrt{1+x+x^2}|.$$

$$168. \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}|.$$

$$169. \text{ а)} \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}; \quad \text{б)} \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$170. \text{ а)} \sin x - \frac{\sin^3 x}{2}; \quad \text{б)} \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$171. \frac{1}{2} \ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right|. \quad 172. \text{ а)} \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right);$$

$$\text{б)} \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \text{в)} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}; \quad \text{г)} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right); \quad \text{д)} \frac{1}{2} \ln [\operatorname{sh}(2x-1) \times \\ \times \operatorname{ch}(2x+1)] \left(x > \frac{1}{2} \right).$$

$$174. \text{ а)} \text{ Так как } 2x/\pi < \sin x < x \quad [0, \pi/2], \text{ то}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} dx < \int_0^{\pi/2} \sin x dx < \int_0^{\pi/2} x dx;$$

$$\text{б)} \text{ так как } e^x > 1 + x \quad [0, 1], \text{ то } \int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (1+x) dx.$$

$$175. \text{ а)} \pi/6; \quad \text{б)} 1/2; \quad \text{в)} 1; \quad \text{г)} \ln \sqrt{2}; \quad \text{д)} \pi/3; \quad \text{е)} 1; \quad \text{ж)} 1; \\ \text{з)} -\frac{3}{4} + \ln 4. \quad 176. \pi/(2ab) \text{ (см. задачу 172). } 177. \pi \text{ (см. задачу 156).}$$

$$178. \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2} \quad \text{(см. задачу 154).} \quad 179. f'(1) - f(1) + f(0).$$

$$181. \text{ а)} \sin x^2; \quad \text{б)} -\sqrt{1+a^2}; \quad \text{в)} 0. \quad 183. 2. \quad 184. 4, 5. \quad 185. 2bh/3. \\ 186. \text{ лав. } 187. 3\pi a^2/2. \quad 188. (e^2 + 1)/4. \quad 189. 6a. \quad 190. 8a.$$

$$191. \text{ Принимая } \theta \text{ за параметр, имеем } x = \rho \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta = f(\theta) \sin \theta,$$

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

192. $3\pi a/2$. См. задачу 191; одна половина кривой описывается при изменении φ в пределах от 0 до $3\pi/2$. 193. 8a. Верхняя половина кардионды описывается при изменении φ от 0 до π .

194. а) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; б) $\frac{\pi h}{3}[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$; в) $\pi^2/2$; г) $\pi r a^2$.

195. а) $8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right)a^2$; б) 3π ; в) $\frac{\pi}{27}[10^{3/2} - 1]$; г) $\frac{12}{5}\pi a^2$.

196. а) По методу прямоугольников искомый интеграл

$$I \approx \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \frac{1}{1 + \xi_k},$$

где

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad x_k = \frac{k}{8} \quad (k = 0, 1, \dots, 8).$$

Подставляя значения ξ_k , получаем

$$I \approx 2 \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{2k+1} \approx 0,6927.$$

Остаток

$$R_8 \leq \frac{1}{8^2} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{384} \leq 0,0027.$$

По методу трапеций

$$I \approx \frac{1}{16} \{f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_7) + f(x_8)\} \approx 0,6941$$

с такой же погрешностью, как и для метода прямоугольников.

По методу Симпсона

$$I \approx \frac{1}{24} \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_7) + f(x_8)\} \approx 0,69315$$

с остатком квадратурной формулы

$$R_4 \leq \frac{M_4}{4^4 \cdot 2880} \leq 5 \cdot 10^{-5} \leq 10^{-4}.$$

Таким образом, метод Симпсона дает для значения интеграла первые три знака точные. Точное значение интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,693147 \dots$$

б) По методу прямоугольников $I \approx 0,8358$, а по методу трапеций $I \approx 0,8352$ с остатком $R_{12} \leq 0,004$. По методу Симпсона остаток $R_6 \leq \frac{10}{2880 \cdot 6^4} \leq 10^{-5}$. Поэтому, вычисляя значение I по формуле Симпсона, получаем четыре точных знака: $I \approx 0,83565$.

197. $L_3(x) = -\frac{1}{2}(x-3)x^2$. 198. а) $\pi/4$; б) $\frac{1}{1-\alpha}$,
 $0 < \alpha < 1$; в) ∞ , $\alpha \geq 1$; г) $\pi/2$; д) ∞ . 199. Все интегралы сходятся. 200. а) 1; б) $\frac{a}{a^2+b^2}$; в) $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$. 201. а) Сходится при $p > 0$, $a \neq 0$; при $a = 0$ сходится при $p > 1$; б) сходится, если p или q больше нуля; в) сходится при $m > -1$, $n - m > 1$.

ГЛАВА 3

202. 2. 203. -2 . 204. 1. 205. 1. 206. $\cos(\alpha + \beta)$. 207. $4ab$.
 208. 1. 209. 4. 210. 0. 211. а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) нечетная. 212. $A_{11} = bc - x^2$, $A_{12} = x^2 - cx$, $A_{13} = x^2 - bx$,
 $A_{21} = x^2 - cx$, $A_{22} = ac - x^2$, $A_{23} = x^2 - ax$, $A_{31} = x^2 - bx$,
 $A_{32} = x^2 - ax$, $A_{33} = ab - x^2$; $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$
 $= 2x^3 - x^2(a+b+c) + abc$. 213. а) 0; б) -4 . 214. а) 72; б) $(c-a)(b-a)(c-b)$.

215. $\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 =$
 строки на столбцы:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 11 & 14 & 10 \\ 9 & 13 & 9 \end{vmatrix} = 35;$$

строки на строки:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 11 & 14 & 10 \\ 9 & 13 & 9 \end{vmatrix} = 35;$$

столбцы на строки:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 12 & 14 & 11 \\ 8 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 35;$$

столбцы на столбцы:

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 12 & 14 & 11 \\ 8 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 35.$$

216. а) $C = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -21 & 1 \end{pmatrix}$.

217. Ранг $A = 2$, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

218. $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. 219. $x_1 = 3/2$, $x_2 = -1/2$. 220. $x = 3/2$,
 $y = -1/2$. 221. Система решений не имеет. 222. $x = -84$, $y =$
 $= -93/2$, $z = 31/2$. 223. Система имеет бесконечное множество

решений:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = 6 - 26z + 17t, \quad y = -1 + 7z - 5t,$$

где z, t — любые вещественные числа.

224. Ранг $A = 3$; ранг $B = 3$. 225. а) $5/\sqrt{2}$; 6) $x = \sqrt{2}, y = 1, z = -1$; в) $1/2$. 226. 3, $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 2. 227. а) $5/21$; 6) $1/\sqrt{2}$; в) $1/\sqrt{2}$. 228. Не может, потому что в данном случае $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 5/4 > 1$, чего быть не может. 229. $x = y = z = \sqrt{3}$.

230. $|a - b| = 22$. У к а з а н и е. $|a \pm b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 \pm 2(a, b)}$.

231. $|a + b| = 20$. 232. $\omega = \pi/4$. 233. $\lambda = -\frac{(a, a)}{(b, b)} = -\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2$.

234. $x = 2/5, y = z = 4/5$. 235. $(1, -2)$. У к а з а н и е. Данная задача эквивалентна делению отрезка AB на две равные части. 236. $x = 1/2, y = -5/4$.

237. Пусть точки деления $M_1 = (z_1, z_2), M_2 = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ (рис. 62). Определим числа μ и λ (см. [2], § 7) для точки M_1 :

$$\mu = \frac{|M_1 A|}{|AB|} = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{|M_1 B|}{|AB|} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$z_1 = 1 \cdot \lambda + 4\mu = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2,$$

$$z_2 = -5\lambda + 3\mu = -\frac{10}{3} + 1 = -\frac{7}{3},$$

$$M_1 = \left(2, -\frac{7}{3}\right).$$

Аналогично

$$\bar{z}_1 = 3, \quad \bar{z}_2 = 1/3 \quad (\mu = 2/3,$$

$$\lambda = 1/3), \quad M_2 = (3, 1/3).$$

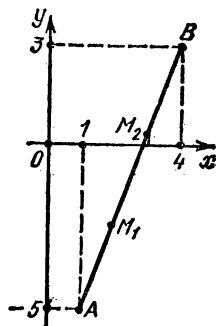


Рис. 62

238. M_1 и M_2 не лежат на данной прямой, M_2 лежит на этой прямой. 239. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$. Точка $M_2 = (2, 3)$ лежит на прямой, поэтому $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$. Если за точку, лежащую на прямой, взять другую точку, например $M_0 = (0, 13/3)$, то урав-

нение примет вид: $y - \frac{13}{3} = -\frac{2}{3}x$. 240. а) $-x - 2y + 4 = 0$.

б) $-2x + y + 3 = 0$. 241. $2x - 3y = 0$, $3x + 2y = 0$. 242. а) $\frac{-2x}{\sqrt{29}} -$

$-\frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}} = 0$; б) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; в) $-\frac{x}{\sqrt{5}} +$

$+\frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$. 243. а) $d = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $d =$

$= \frac{|-2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{68}} = \frac{19}{\sqrt{68}}$; в) $d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

244. $(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0$. 245. $-4x - y + 2z + 3 = 0$.

246. а) $A(x-1) + B(y-1) - 2(A+2B)(z-1) = 0$, где A, B — произвольные числа, одновременно не равные нулю; б) $2(x-1) +$

$+4(y-1) + (z-1) = 0$. 247. а), б), в) определяют параллельность плоскости. В случае в) мы даже имеем совпавшие плоскости. В случае г) плоскости не параллельны. 248. а) $\frac{2}{7}x -$

$-\frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - 1 = 0$; б) $\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - \frac{14}{9} = 0$. 249. а) $d =$

$= \frac{1}{7}|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7| = \frac{5}{7}$; б) $d = \frac{1}{3}|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1| =$

$= \frac{1}{3}$. 250. $\cos \varphi = 59/63$. 251. $x^2 + y^2 + z^2 = 144/29$. У к а з а н и е.

Радиус шара есть расстояние от начала координат до данной плоскости ($d = 12/\sqrt{29}$). 252. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-6/5} = 1$.

253. $-7(x-2) + (y+1) + 5(z-1) = 0$. У к а з а н и е. Из условий ортогональности плоскостей найти отношения $A/C, B/C$, где A, B, C — коэффициенты искомой плоскости. 254. а) $\alpha = \pi/3$,

$\beta = \pi/4, \gamma = \pi/3$; б) $\alpha = \pi/6, \beta = \pi/3, \gamma = 0$. 255. а) $5/3$; б) $3/14$.

У к а з а н и е. Взять точку на одной из плоскостей и найти ее расстояние до другой. 256. $(2, -1, 0)$; $(4/3, 0, -1/3)$; $(0, 2, -1)$.

257. а) $A_1D_2 = A_2D_1$; б) $A_1 = D_1 = 0, A_2 = D_2 = 0$. 258. $\frac{x-1}{2} =$

$= \frac{y-0}{-3} = \frac{z+1}{5}$. 259. $x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = -3 + 5t$.

260. а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; б) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$.

У к а з а н и е. В случае а) разрешаем систему относительно x и y , а в случае б) относительно z и y . 261. $\cos \varphi =$

$= \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{3}$.

262. $l = 3$. У к а з а н и е. Перейти к параметрическому заданию прямых. Предполагая, что прямые пересекаются в некоторой

точке, получаем систему

$$\begin{cases} 2t_0 - 1t_1 = 5; \\ 3t_0 + 4t_1 = -1. \\ 4t_0 - 2t_1 = 6, \end{cases}$$

из которой и находим значения l, t_0, t_1 . 263. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-0}{1}$. Указание. Вектор $(2, -4, 1)$ коллинеарен вектору

$a = (a_1, a_2, a_3)$, лежащему на прямой. 264. а) Векторы a и b ориентированы противоположно системе координат; б) векторы a и b ориентированы так же, как система координат (определи-
тель из координат векторов $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 > 0$). 265. $|a \times b| = 21$.

266. Да ($a \times b = 0$). 267. Векторы a и b должны быть колли-
неарны. 269. $\sin \varphi = \frac{|a \times b|}{|a| \cdot |b|} = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 270. $S = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right\| =$

$= 2$. 271. а) Компланарны; б) нет. 273. а) Линейно зависимы (см. задачу 224, матрица B); б) линейно независимы, ранг матрицы из координат векторов равен трем. 275. $\lambda = 15$.

276. а) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$; б) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,
 $BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $AB = \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}$; произведение BA не имеет
смысла.

277. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($n > 3$).

278. а) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3b & 3b + 2a \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

279. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = A^*$.

281. $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

282. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

283. а) Оператор A линейный. Его матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У к а з а н и е. В столбцах A стоят координаты образов базисных векторов. Например, для $e^1 = (1, 0, 0)$. $Ae^1 = (0, 2, 3)$; б) оператор A не является линейным:

$$A(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1, x_3 + y_3 + 1) \neq Ax + Ay = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2, x_3 + y_3 + 2).$$

$$284. BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$285. BA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$286. а) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ У к а з а н и е. В старом базисе}$$

$Ai^1 = i^1 + 3i^2 + 2i^3 + i^4$. Это можно записать так: $Ai^1 = i^1 + 2i^3 + 3i^2 + i^4$, поэтому первый столбец новой матрицы будет состоять из элементов 1, 2, 3, 1. Затем также преобразуем Ai^3, Ai^2, Ai^4

$$б) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \text{ У к а з а н и е. Преобразование } Ai^1$$

к необходимому виду приводит нас к решению системы:

$$Ai^1 = i^1 + 3i^2 + 2i^3 + i^4 = \alpha i^1 + \beta (i^1 + i^2) + \gamma (i^1 + i^2 + i^3) + \delta (i^1 + i^2 + i^3 + i^4).$$

Затем аналогично преобразуем $A(i^1 + i^2)$, $A(i^1 + i^2 + i^3)$, $A(i^1 + i^2 + i^3 + i^4)$.

287. $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. У к а з а н и е. Имеем $a^1 = i^1 + 2i^2$, $a^2 = -i^1 + i^2$, $b^1 = i^1 - 2i^2$, $b^2 = 3i^1 - i^2$, где (i^1, i^2) — исходный базис пространства. Выражение a^1 и a^2 через b^1, b^2 : $a^1 = -\frac{7}{5}b^1 + \frac{4}{5}b^2$, $a^2 = -\frac{2}{5}b^1 - \frac{1}{5}b^2$. Далее находим Ab^1, Ab^2 , выраженные через b^1, b^2 .

Эту же задачу можно решать в матричной форме. Пусть $a = (a^1, a^2)$, $b = (b^1, b^2)$, T — матрица перехода от базиса b к базису a , причем в столбцах T стоят координаты векторов a^1, a^2 в базисе b^1, b^2 . Тогда в матричной форме можно записать

$$a = bT, \quad (1)$$

где в данном случае

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Теперь пусть линейное преобразование φ в базисе a задается матрицей A и в базисе b матрицей B :

$$\varphi(a) = aA, \quad \varphi(b) = bB. \quad (2)$$

где в столбцах матриц A и B стоят координаты образов базисных векторов в соответствующем базисе, $\varphi(a) = (\varphi(a^1), \varphi(a^2))$, $\varphi(b) = (\varphi(b^1), \varphi(b^2))$. Очевидно, что

$$\varphi(a) = \varphi(b)T. \quad (3)$$

Поэтому из (2) и (1) имеем

$$\varphi(b)T = bBT \quad \text{и} \quad \varphi(a) = bTA,$$

откуда в силу (3) имеем $bBT = bTA$.

Таким образом, $BT = TA$,

$$B = TAT^{-1}. \quad (4)$$

Найдем теперь матрицу B по формуле (4). Легко подсчитать, что

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad AT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix},$$

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$288. B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{71}{15} & \frac{98}{15} \\ -\frac{32}{15} & -\frac{41}{15} \end{pmatrix}.$$

289. а) Векторы ортогональны; б), в) не ортогональны.

290. Векторы e^1, e^2, e^3 образуют ортогональный базис в R_3 , так как ранг матрицы из координат векторов равен трем (т.е. e^1, e^2, e^3 линейно независимы) и векторы попарно ортогональны;
 $x = \frac{1}{14}e^1 - \frac{1}{14}e^3$.

$$291. z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad t = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

292. а) Базис ориентирован противоположно основному базису; б) базис ориентирован так же, как i^1, i^2, i^3 ($\Delta = 1$).

293. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x'_1 - \frac{1}{2}x'_2, \quad x_2 = \frac{1}{2}x'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'_2$, т.е. переход от (x'_1, x'_2) к (x_1, x_2) осуществляется с помощью строк матрицы Λ^* .

294. Переход от координат (x_1, x_2) к координатам (x'_1, x'_2) в новом базисе производится с помощью строк матрицы $(A^*)^{-1}$, а переход от координат (x'_1, x'_2) к (x_1, x_2) совершается с помощью строк матрицы A^* . Имеем

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 2x'_2, \\ x_2 = x'_1 + x'_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2x_2, \\ x'_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

295. а) Не является; б) не является; в) является; г) не является; д) не является; е) не является, если прямая не проходит через начало координат; ж) является; з) является.

296. Вся плоскость; векторы, лежащие на любой прямой, проходящей через начало координат; начало координат.

297. Совокупность векторов, лежащих на прямой $x_2 = \frac{x_1}{k}$ ($k \neq 0$); $x_1 = 0$ при $k = 0$.

298. а) Размерность равна 3 (ранг матрицы из координат векторов равен 3). Базис образуют, например, векторы a^1, a^2, a^4 ; б) размерность равна 2. Базис образуют любые два вектора системы.

299. Подпространство L' состоит из векторов $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, для которых $(v, a^1) = (v, a^2) = 0$, т. е. координаты векторов v удовлетворяют условию $x_4 = x_1, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Вектор $a = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ортогонален ко всем векторам $v \in L'$, поэтому его координаты удовлетворяют условию

$$(y_1 + y_4 - 2y_3)x_1 + (y_2 - y_3)x_2 = 0 \quad \forall x_1, x_2.$$

Отсюда $y_2 = y_3, y_1 + y_4 - 2y_3 = 0$. Для чисел α и β получаем систему $\alpha + 2\beta = y_1, \beta = y_2, \beta = y_3, -\alpha = y_4$. Эта система разрешима при указанных y_1, y_2, y_3, y_4 , а именно, $\alpha = -y_4, \beta = y_2 = y_3$ (равенство $\alpha + 2\beta = y_1$ автоматически выполняется).

$$301. \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 302. A^*(f) = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}.$$

303. а) $\lambda_1 = 2$. У к а з а н и е. Исследовать на экстремум квадратичную форму $u = x^2 + y^2 + 2xy$ на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$; б) $\lambda_1 = 3$.

304. а) Форма неопределенная по знаку, так как $\Delta_2 = -3 < 0$; б) форма неопределенная по знаку ($\Delta_2 = -1 < 0$); в) форма строго положительная ($\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 2 > 0$).

$$305. \text{ а) } \lambda_1 = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} + \sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}] = \\ = \frac{1}{2} [1 - 1 + \sqrt{4 \cdot 4 + 4}] = \sqrt{5},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} - \sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}] = -\sqrt{5},$$

форма гиперболического типа: б) $\lambda_1 = \frac{27 + \sqrt{725}}{2} > 0$, $\lambda_2 = \frac{27 - \sqrt{725}}{2} > 0$, форма эллиптического типа; в) $\lambda_1 = 4 > 0$, $\lambda_2 = 0$, форма параболического типа.

306. а) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Канонический вид формы: $4\xi_1^2 + 4\xi_2^2 - 2\xi_3^2$; б) $8\xi_1^2 + 8\xi_2^2 + 5\xi_3^2$ — канонический вид формы.

307. а) Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = 0,$$

или

$$(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) = 0.$$

имеет корни $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Собственный вектор x^1 находим из системы

$$\left. \begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 &= 0, \\ 2x_1 &\quad - 2x_3 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $x_3 = x_1$, $-2x_2 = x_1$. Вектор $y^1 = \left(x_1, -\frac{x_1}{2}, x_1\right)$ является решением системы. Нормируя этот вектор, получаем

$$x^1 = \frac{y^1}{|y^1|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Аналогично получаем

$$x^2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad x^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Канонический вид формы: $9\xi_1^2 + 6\xi_2^2 + 3\xi_3^2$. Ортогональное преобразование

$$x_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3,$$

$$x_3 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_3.$$

$$\text{б) } 18\xi_1^2 + 18\xi_2^2 + 9\xi_3^2, \quad x_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3,$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3, \quad x_3 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3.$$

308. а) $AC - B^2 = 9 > 0$ — кривая эллиптического типа;

$$3(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 12; \quad \xi = x-1, \quad \eta = y-2;$$

$$3\xi^2 + 3\eta^2 = 12 \text{ — окружность радиусом } 2;$$

б) $AC - B^2 = 6 > 0$ — кривая эллиптического типа;
 $3\xi^2 + 2\eta^2 = 6$ — эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$;

в) $AC - B^2 = -2 < 0$ — корни гиперболического типа;

$$\xi^2 - 2\eta^2 = 2 \text{ — гипербола с полуосями } a = \sqrt{2}, b = 1;$$

г) $AC - B^2 = 9 > 0$ — кривая эллиптического типа;

$$3\xi^2 + 3\eta^2 = 0 \text{ — точка } (0, 0);$$

д) $AC - B^2 = -2 < 0$ — кривая гиперболического типа;

$$\xi^2 - 2\eta^2 = 0 \text{ — пара пересекающихся прямых } \xi - \sqrt{2}\eta = 0, \xi + \sqrt{2}\eta = 0;$$

е) $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; $4\xi - 3\eta^2 = 0$ — парабола с осью симметрии ξ ;

ж) $AC - B^2 = 6 > 0$ — кривая эллиптического типа;
 $3\xi^2 + 2\eta^2 = -1$ — мнимый эллипс.

309. а) $AC - B^2 = -16 < 0$ — кривая гиперболического типа; $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$;

$$x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad x^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta); \end{cases}$$

$$8\xi^2 - 2\eta^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - \frac{14}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 13 = 0$$

— уравнение кривой в системе (ξ, η) . Это уравнение можно записать так:

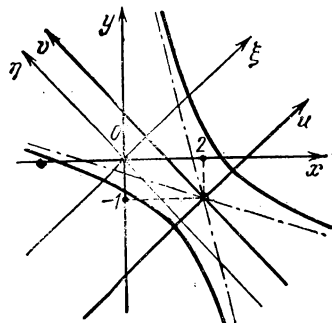


Рис. 63

$$8\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Параллельный перенос

$$u = \xi - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v = \eta + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

приводит уравнение к виду

$$u^2 - \frac{v^2}{4} = 1.$$

Это гипербола (рис. 63) с действительной осью u . Общее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - v + \frac{4}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + v - \frac{2}{\sqrt{2}}\right);$$

6) $AC - B^2 = 576 > 0$ — кривая эллиптического типа;

$$\lambda_1 = 32, \quad \lambda_2 = 18, \quad B < 0$$

$$x^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad x^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta), \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta); \end{cases}$$

$$32\xi^2 + 18\eta^2 + \frac{64}{\sqrt{2}} (\xi - \eta) + \frac{64}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) - 224 = 0,$$

$$32(\xi + \sqrt{2})^2 + 18\eta^2 = 288;$$

$$\frac{(\xi + \sqrt{2})^2}{9} + \frac{\eta^2}{16} = 1; \quad u = \xi + \sqrt{2}, \quad v = \eta;$$

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{16} = 1 - \text{эллипс с полуосями } a = 3, b = 4 \text{ (рис. 64);}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (u - v - \sqrt{2}), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} (u + v - \sqrt{2}).$$

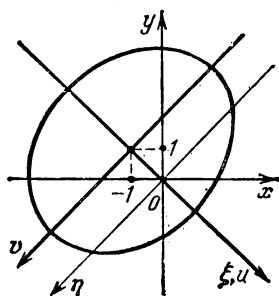


Рис. 64

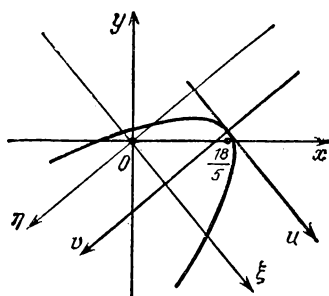


Рис. 65

в) $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$, $B < 0$;

$$x^1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right), \quad x^2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right);$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} (3\xi - 4\eta), \\ y = -\frac{1}{5} (4\xi + 3\eta); \end{cases}$$

$$25\xi^2 - \frac{20}{5} (3\xi - 4\eta) - \frac{110}{5} (4\xi + 3\eta) - 50 = 0, \quad (\xi - 2)^2 = 2(\eta + 3);$$

$$u = \xi - 2, \quad v = \eta + 3; \quad u^2 = 2v - \text{парабола с осью симметрии } v \text{ (рис. 65); } x = \frac{1}{5} (3u - 4v + 18), \quad y = -\frac{1}{5} (4u + 3v - 1).$$

310. $AC - B^2 = 0$ — кривая параболического типа; решая совместно уравнение прямой и кривой, получим уравнение

$$x^2(2 - k)^2 + 6x + 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид

$$9 - (2 - k)^2 = (1 + k)(5 - k) \quad (k \neq 2).$$

а) Поэтому при $k = -1$, $k = 5$ прямая имеет по одной общей точке с кривой. При $k = 2$ также будет одна общая точка у прямой $y = 2x$ и нашей кривой; б) $-1 < k < 5$, $k \neq 2$;

в) $k < -1$, $k > 5$.

311. $k = -3$, $k = -1/3$.

312. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$ (парабола, $AC - B^2 = 0$).

313. а) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$; $x+1 = \xi$, $y+2 = \eta$, $z = \zeta$; $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 9$ — поверхность шара радиусом 3;

б) $\frac{\xi^2}{4} + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{4} = 1$ — эллипсоид с полуосями $a = 2$,

$b = \sqrt{2}$, $c = 2$;

в) $\frac{\xi^2}{4} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\zeta^2}{4} = 1$ — однополостный гиперболоид с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$;

г) $\xi^2 + 2\eta^2 = 2\zeta$ — эллиптический параболоид ($p = 1$, $q = 1/2$);

д) $\frac{\xi^2}{4} - \eta^2 - \frac{\zeta^2}{4} = 1$ — двуполостный гиперболоид с полуосями $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$;

е) $\frac{\xi^2}{4} + \frac{\eta^2}{2} = 1$ — эллиптический цилиндр (уравнение не содержит переменной ζ).

314. а) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 5 - \lambda & -10 \\ 2 & -10 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = \\ = \lambda^2(18 - \lambda) + 81(\lambda - 18) = (\lambda^2 - 81)(18 - \lambda) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$. Найдем собственный вектор из системы

$$\begin{cases} (11 - \lambda_1)x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 + (5 - \lambda_1)x_2 - 10x_3 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2 + (2 - \lambda_1)x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 - 13x_2 - 10x_3 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2 - 16x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы из коэффициентов системы равен двум (все три собственных числа различны). Поэтому решаем систему двух уравнений (в данном случае любых двух).

$$\begin{cases} -7x_1 + 8x_2 = -2x_3, \\ 8x_1 - 13x_2 = 10x_3, \end{cases} \quad x_1 = -2x_3, \quad x_2 = -2x_3.$$

Вектор $v = (-2x_3, -2x_3, x_3)$ — решение системы; нормируя его, получаем собственный вектор

$$x^1 = (2/3, 2/3, -1/3).$$

Аналогично находим

$$x^2 = (2/3, -1/3, 2/3), \quad x^3 = (-1/3, 2/3, 2/3).$$

Линейное ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} \xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 - \frac{1}{3} \xi_3, & x_2 &= \frac{2}{3} \xi_1 - \frac{1}{3} \xi_2 + \frac{2}{3} \xi_3, \\ x_3 &= -\frac{1}{3} \xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 + \frac{2}{3} \xi_3 \end{aligned}$$

приводит квадратичную форму к виду

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 = 18\xi_1^2 + 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2.$$

Уравнение поверхности относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 принимает вид

$$18\xi_1^2 + 9\xi_2^2 - 9\xi_3^2 + 2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + 1 = 0.$$

Канонический вид поверхности $\left(u_1 = \xi_1 + \frac{1}{18}, u_2 = \xi_2 + \frac{1}{9}, u_3 = \xi_3 - \frac{1}{9}\right)$

$$-18u_1^2 - 9u_2^2 + 9u_3^2 = 17/18$$

— двуполостный гиперболоид.

б) Характеристическое уравнение $-\lambda(\lambda-4)(\lambda-2) - 8(4-\lambda) = 0$, или $(4-\lambda)^2(\lambda+2) = 0$ (разлагаем определитель по элементам первого столбца). Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$; собственные векторы

$$\begin{aligned} x^1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), & x^2 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right), \\ x^3 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \xi_1 - \frac{2}{\sqrt{30}} \xi_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} \xi_3, \\ x_2 &= 0 \cdot \xi_1 - \frac{5}{\sqrt{30}} \xi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \xi_3, \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} \xi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \xi_3. \end{aligned}$$

Каноническое уравнение поверхности

$$-2u_1^2 - 2u_2^2 + u_3^2 = 1$$

— двуполостный гиперболоид вращения.

315. Эллипс $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1$ с полуосями $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ в плоскости $x = 2$. Его вершины имеют координаты в пространстве $(2, 3, 0)$, $(2, -3, 0)$, $(2, 0, \sqrt{3})$, $(2, 0, -\sqrt{3})$.

316. $x^2 + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$.

317. а) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 2y - z, \\ x = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость yOz . Это уравнение окружности.

б) $\begin{cases} x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость xOz . Это уравнение эллипса ($AC - B^2 = 4 > 0$).

в) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ — уравнение проекции на плоскость Oxy . Это также уравнение эллипса.

318. Парабола: $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 3\left(z + \frac{1}{4}\right)$.

319. $z = c$. У к а з а н и е. Рассматриваем уравнение поверхности как неявное:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

321. а) $x^2 + y^2 = 2z$ — параболоид вращения или эллиптический параболоид;

б) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид вращения.

322. а) $(3, 4, -2)$, $(6, -2, 2)$. У к а з а н и е. Перейти к параметрическим уравнениям прямой.

б) Прямая и поверхность не имеют общих точек.

324. $9X^2 - 16Y^2 - 16Z^2 - 90X + 225 = 0$. У к а з а н и е. В силу симметрии ясно, что направляющая есть окружность, получающаяся в сечении сферы плоскостью $x = \alpha$. Значение α найти как абсциссу точки касания прямой, проходящей через точку S и касающейся большого круга $x^2 + y^2 = 9$ в плоскости xOz .

Г Л А В А 4

325. а) $x^2 + 4y^2 \leq 1$ — внутренность эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 1/2$, включая его границу (рис. 66);

б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \leq 1$ — область между ветвями гиперболы с полуосями $a = 3$, $b = 2$, включая сами ветви гиперболы (рис. 67);

в) $y^2 \geq 4x$ — внешность параболы, включая саму параболу (рис. 68);

г) вся плоскость, кроме начала координат $(0, 0)$;

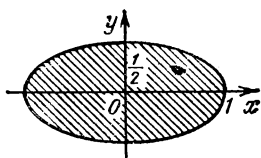


Рис. 66

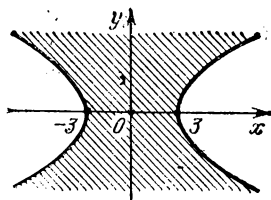


Рис. 67

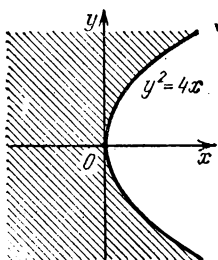


Рис. 68

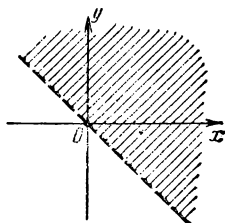


Рис. 69

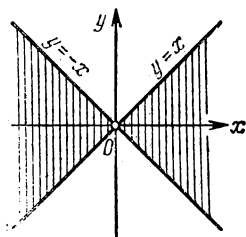


Рис. 70

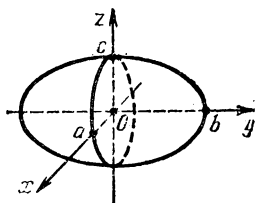


Рис. 71

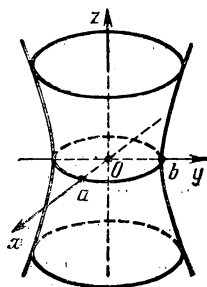


Рис. 72

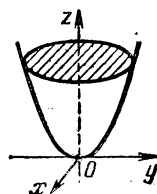


Рис. 73

- д) $x + y > 0$ — полуплоскость выше прямой $y = -x$ (рис. 69);
 е) $|y/x| \leq 1, x \neq 0$. Часть плоскости, примыкающая к оси x между прямыми $y = \pm x$, не включая начало координат (рис. 70).

326. а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ — часть пространства внутри эллипсоида с полуосями a, b, c , включая саму поверхность эллипсоида (рис. 71);

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ — часть пространства, находящаяся внутри однополостного гиперболоида, включая его поверхность (рис. 72);

в) $x^2 + y^2 < 2z$ — часть пространства, находящаяся внутри параболоида вращения (рис. 73);

г) $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ — часть пространства, находящаяся вне двуполостного гиперболоида, включая его поверхность (рис. 74);

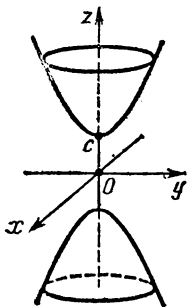


Рис. 74

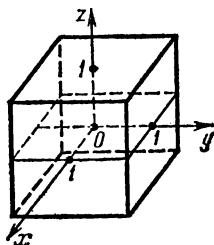


Рис. 75

д) $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ — внутренность куба с центром в начале координат с ребром равным 2, включая его грани. Этот куб ограничен плоскостями $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ (рис. 75).

327. $f(1, 0) = 1; f(1, 1) = 2; f(2, 1) = 9/2$.

328. $f(x, y) = (x^2 - y^2)/8$. Указание. Ввести новые переменные $u = x + 2y, v = x - 2y$.

329. а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - c$ — эллипсы ($c < 1$); при $c = 1$ — начало координат; при $c > 1$ — мнимые эллипсы, что означает, что плоскость $u = c$ не пересекает графика функции;

б) $y = cx^2$ — параболы с осью симметрии Oy . При $c > 0$ параболы находятся в верхней полуплоскости, а при $c < 0$ — в нижней. При $c = 0$ получаем ось x .

330. $\rho = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

331. Точка $M^0 = (0, 1)$; $\rho(M^k, M^0) = \sqrt{\frac{1}{(1+k)^2} + \frac{1}{(k^2+1)^2}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

332. Все точки множества $E_1 = \{|x| < 1, |y| < 1\} \subset E$ внутренние.

333. а) Будет, E — внутренность квадрата, ограниченного прямыми $\pm y = \pm x + 1$; б) не будет; E — внутренность двуполостного гиперболоида. Поэтому нельзя соединить две точки, находящиеся в верхней и нижней частях гиперболоида, непрерывной кривой, принадлежащей к E ; в) не будет.

334. а) 2; б) не существует; рассмотреть пути подхода к точке $(0, 0)$ $x = y$; $x \neq 0$, $y = 0$.

335. $c = 0$. Предел функции $\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$, когда точка (x, y) стремится к границе эллипса $x^2 + 4y^2 = 1$, равен нулю.

336. а) Нет; б) предел функции в направлении вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ равен $\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$; поэтому функция будет непрерывной

в $(0, 0)$ только в направлении векторов $\omega = (1, 0)$ и $\omega = (0, 1)$, т. е. в направлении осей координат. Таким образом, эта функция непрерывна в $(0, 0)$ по переменным x и y в отдельности и не является непрерывной по совокупности переменных.

337. У к а з а н и е. Функция $u = 1 - x^2 - y^2$ непрерывна на всей плоскости.

338. $u'_x = 3x^2 - 2y$, $u'_y = 2y - 2x$, $du = (3x^2 - 2y) dx + 2(y - x) dy$.

339. $u'_x = 2xy^3$, $u'_y = 3x^2y^2$, $du = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$.

340. $u'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}$,
 $du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}$.

341. а) $u'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $u'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $du = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$;

б) $u'_x = y + \frac{1}{y}$, $u'_y = x - \frac{x}{y^2}$, $du = \left(y + \frac{1}{y}\right) dx + x \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy$;

в) $u'_x = yx^{y-1}$, $u'_y = x^y \ln x$, $du = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$;

г) $u'_x = \operatorname{ch}(x + y)$, $u'_y = \operatorname{ch}(x + y)$, $du = (dx + dy) \operatorname{ch}(x + y)$;

д) $u'_x = \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y) \cdot 2xy$, $u'_y = (x^2 + \operatorname{ch} y) \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)$,
 $du = [2xy dx + (x^2 + \operatorname{ch} y) dy] \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)$.

342. а) $\Delta = r$; б) $\Delta = 4r\varphi - 1$.

343. а) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{e^{t+\tau}}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y} \cdot t} =$
 $= \frac{e^{t+\tau} + t^{-1}}{2\sqrt{e^{t+\tau} + \ln t}}$; $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} e^{t+\tau} = \frac{e^{t+\tau}}{2\sqrt{e^{t+\tau} + \ln t}}$;

б) $\frac{\partial u}{\partial t} = -y \sin(t + \tau) + x \cos(t - \tau) = -\sin(t - \tau) \sin(t + \tau) +$
 $+ \cos(t + \tau) \cos(t - \tau) = \cos 2t$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = -y \sin(t + \tau) - x \cos(t - \tau) =$
 $= -\cos 2\tau$.

344. а) $\text{grad } u = \{2, 1\}$ (рис. 76); б) $\text{grad } u = \{4, -6\}$ (рис. 77).

345. а) $\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, n) = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$; б) $\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, n) = 2\sqrt{3} - 3$.

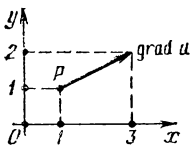


Рис. 76

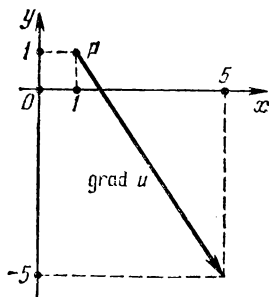


Рис. 77

346. $\text{grad } u = \{4, -6\}$. Единичный вектор этого направления $n_0 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right\}$, $\frac{\partial u}{\partial n_0} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - 6 \cdot \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$.

Можно сразу записать, что $\frac{\partial u}{\partial n_0} = |\text{grad } u| = 2\sqrt{13}$ — это максимальная производная по направлению.

347. а) Пусть α и β — углы, которые составляет градиент функции с осями x и y соответственно.

$$\cos \alpha = \frac{u'_x(P)}{|\text{grad } u(P)|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{u'_y(P)}{|\text{grad } u(P)|} = \frac{1}{2};$$

$\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$; б) $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/6$.

348. а) $u''_{xx} = 2 \frac{y - x^2}{(x^2 + y)^2}$, $u''_{yy} = \frac{-1}{(x^2 + y)^2}$, $u''_{xy} = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$,
 $d^2u = [2(y - x^2)dx^2 - 4x dx dy - dy^2]/(x^2 + y)^2$.

б) $u''_{xx} = \frac{-y^2}{(2xy + y^2)^{3/2}}$, $u''_{xy} = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{3/2}}$, $u''_{yy} = \frac{-x^2}{(2xy + y^2)^{3/2}}$,
 $d^2u = -(y dx - x dy)^2 / (2xy + y^2)^{3/2}$.

351. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} a^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ab \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$,
 $d^2u = a^2 f''_{\xi\xi} dx^2 + 2ab f''_{\xi\eta} dx dy + b^2 f''_{\eta\eta} dy^2$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$,
 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} (dx + dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \times$
 $\times (dx^2 - dy^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (dx - dy)^2$.

$$352. \text{ а) } u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2), \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{u-5}{-1};$$

$$\text{ б) } u - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1), \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{u-1}{-1}.$$

353. а) По формуле Тейлора

$$\Delta u = u(1+h, 2+k) - u(1, 2) = du + \frac{1}{2} d^2 u = \\ = 4h - 3k + h^2 - k^2 + kh$$

(производные порядка выше второго равны нулю);

$$\text{ б) } \Delta u = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k.$$

354. $y + xy + \frac{1}{3!}(3x^2y - y^3)$. З а м е ч а н и е. Можно воспользоваться одномерными формулами Тейлора для функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$355. 1 + \frac{[(x-1) + (y+1)]}{1!} + \\ + \frac{[(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2]}{2!} + \\ + \frac{[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3]}{3!} = \\ = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!}.$$

$$356. \text{ а) } \theta = 1/2; \text{ б) } 3\theta^2 + 2\theta = 2, \theta = (\sqrt{7} - 1)/3.$$

357. (2, 0) — стационарная точка; $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 4$, $z''_{xy} = 0$;
 $a_{11} = z''_{xx}(2, 0)$, $a_{22} = z''_{yy}(2, 0)$, $a_{12} = z''_{xy}(2, 0)$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8 > 0$, $a_{11} = 2 > 0$. значит, в точке (2, 0) функция имеет минимум, $z_{\min} = 0$.

358. Стационарная точка (2, 0); $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -8$, экстремума нет.

359. Стационарная точка (0, 0); $a_{11} = 0$, $a_{22} = -4$, $a_{12} = 4$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16 < 0$, экстремума нет.

360. Стационарные точки (0, 0), $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$; $z''_{xx} = 12x^2 - 4$, $z''_{yy} = 12y^2 - 4$, $z''_{xy} = 4$; $z''_{xx}(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 20$, $z''_{yy}(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 20$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 396 > 0$. В точках $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ локальный минимум. В точке (0, 0) $a_{11} = -4$, $a_{22} = -4$, $a_{12} = 4$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Вопрос об экстремуме открыт. Исследуя приращение функции на прямых $y = 0$ и $y = x$, убеждаемся, что экстремума в точке (0, 0) нет.

$$361. u_{\min} = -4/3 \text{ при } x = -2/3, y = -1/3, z = 1.$$

362. а) Функция не имеет наибольшего значения; $\sup z = 2$. Функция разрывна;

б) имеет. Область задания $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ замкнута и функция z непрерывна на этой области, поэтому она имеет наи-

большее значение; $(0, \pm 1)$ — стационарная точка; $z(0, \pm 1) = \pm 1/2$; на границе квадрата в точках $x = \pm 1, y = \sqrt{3} - 1$ функция достигает наибольшего значения, равного $(1 + \sqrt{3})/4$.

$$363. F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, F'_x = \frac{2x}{a^2}, F'_y = \frac{2y}{b^2}, \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

$$364. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$$

$$366. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi / D(\varphi, \psi)}{\partial v / D(u, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \psi / D(\varphi, \psi)}{\partial u / D(u, v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi / D(\varphi, \psi)}{\partial v / D(u, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi / D(\varphi, \psi)}{\partial u / D(u, v)},$$

где $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \Phi'_u & \Phi'_v \\ \Psi'_u & \Psi'_v \end{vmatrix}.$

$$367. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{u} \sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c}{u} \cos v. \text{ У к а з а н и е. } \frac{\partial z}{\partial x} = c \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производную $\frac{\partial v}{\partial x}$ находим из первых двух уравнений, рассматривая u, v как неявные функции от x и y .

$$368. \text{ а) } x + 6\sqrt{3}z - 37\sqrt{3} = 0; \text{ б) } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

$$369. x + 4y + 6z = \pm 21. \quad 370. x + z + a = 0, \quad \frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}.$$

371. Квадрат ($S = xy, 2x + 2y = l$, функция Лагранжа $L = xy + \lambda(2x + 2y - l)$).

372. Способ 1. Привести уравнение эллипса к каноническому виду. Собственные значения $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1; 9\xi^2 + \eta^2 = 9, \xi^2 + \frac{\eta^2}{9} = 1$. Значит, полуоси эллипса $a = 1, b = 3; 2a = 2, 2b = 6$.

Способ 2. Данный эллипс расположен симметрично относительно начала координат, поэтому квадрат расстояния от начала координат до точки эллипса (x, y) , равный $x^2 + y^2$, достигает наибольшего (наименьшего) значения, когда точка (x, y) попадает на большую (малую) ось эллипса. Поэтому необходимо исследовать функцию $u = x^2 + y^2$ на условный экстремум при связи

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

373. Равносторонний треугольник. У к а з а н и е. $S = \sqrt{l(l-x)(l-y)(l-z)}, x + y + z = 2l, x, y, z$ — стороны треугольника. Если в S подставить значение $l - z = x + y - l$,

то полученную функцию исследуем на обычный экстремум. Можно также исследовать задачу, составляя функцию Лагранжа:

$$L(S, \lambda) = S + \lambda(x + y + z - 2l).$$

ГЛАВА 5

374. а) $S = 1$. Указание. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$;

б) $S = \frac{13}{36}$. Указание. $\frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right)$, $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} \right]$;

в) $S = 1/4$. Указание. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right]$.

375. Указание. При доказательстве расходимости гармонического ряда по признаку Коши рассмотреть

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

377. Расходится $\left(\frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \right)$.

378. Расходится, $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{3}}$.

379. а) Сходится, $\sqrt{\frac{n}{n^4+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$; б) сходится, $\frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2}$.

380. а) Расходится; б) и в) сходятся. Указание. Применить теорему 1 § 9.4 из [1]. 381. Сходится. 382. Сходится.

383. Сходится. 384. Сходится. 385. Расходится. 386. Сходится при $\epsilon > 1$; расходится при $0 < \epsilon \leq 1$. 387. Сходится. 388. а) Схо-

дится, $u_n \leq \frac{2}{3n^{3/2}}$; б) сходится, $u_n \leq \int_0^{1/n} x^3 dx = \frac{1}{4n^4}$. 389. Схо-

дится условно. 390. Сходится абсолютно. 391. Указание.

$|a_k b_k| \leq \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$. 392. а) $x > 1$; б) $x > 0$; в) $-\infty < x < \infty$; г) $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

393. а) Сходится равномерно к нулю; б) сходится равномерно к нулю; б) сходится равномерно к нулю; г) сходится неравномерно к нулю $\left(\max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = \frac{1}{4} \not\rightarrow 0 \right)$.

395. а) Данный ряд сходится при $-1 \leq x < 1$. Продифференцированный ряд $\sum_1^{\infty} x^{n-1}$ сходится равномерно на множестве $[-\delta, \delta]$ при любом $\delta < 1$. Поэтому почленное дифференцирование законно на указанном множестве. Пусть $S(x) = \sum_1^{\infty} x^n/n$, тогда $S'(x) = \sum_1^{\infty} x^{n-1} = 1/(1-x)$. Интегрируя, получаем

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t) \Big|_0^x = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1);$$

б) данный ряд равномерно сходится для $|x| \leq \delta < 1$, что можно проверить по признаку Даламбера. Поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= [t + t^2 + \dots + t^{n+1} + \dots] \Big|_0^x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (|x| \leq \delta < 1). \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по x , получаем

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1);$$

$$\text{в) } S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (|x| < 1).$$

396. а) $R = 1$, $(-1, 1)$, при $x = \pm 1$ ряд сходится; б) $R = 0$, $x = 0$; в) $R = 1/3$, $(-1/3, 1/3)$, при $x = \pm 1/3$ ряд расходится.

$$397. \text{ а) } x + \frac{x^3}{3} + \dots; \text{ б) } x - \frac{x^3}{3} + \dots; \text{ в) } e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right).$$

$$398. \text{ а) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (-\infty < x < \infty);$$

б) $x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$. Указание. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $\operatorname{arctg} x$.

$$399. 32, 831. 400. e^{\mp 2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \pm 2)^n}{n!} \right] \quad (|x| < \infty). \text{ Указание. } e^x = e^{\mp 2} e^{x \pm 2}.$$

Г Л А В А 6

401. а) $y - 2xy' = 0$; б) $y'' = 0$; в) $y' = y$; г) $x + yy' = 0$;
 д) $y'' - y' - 2y = 0$.

402. а) Изоклинами являются прямые $x = k$ (прямые, параллельные оси y) (рис. 78). Точное решение уравнения $y = \frac{x^2}{2} + C$;
 б) $1 + y^2 = k$ — изоклины, $k \geq 1$. Это прямые, параллельные оси x (рис. 79); в) изоклины $x = -k$ (рис. 80).

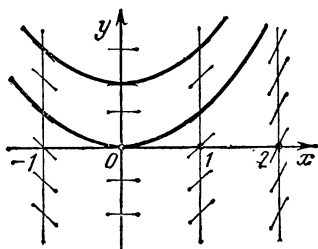


Рис. 78

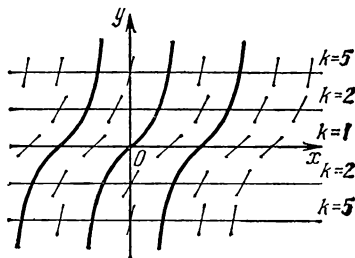


Рис. 79

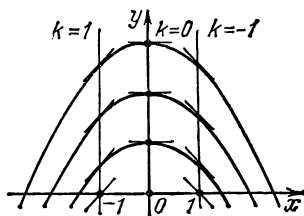


Рис. 80

403. $y = C(x + 1)e^{-x}$, $x = -1$. 404. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$.

405. $1 - e^{-s} = Ce^t$. 406. $y = -2/(1 + C \exp(-x^2))$.

407. $y = (x - 2)^3$. 408. $y = 2 - \cos x$. 409. $y = Cx^3$, $3y = \lambda y'$ — дифференциальное уравнение семейства кривых.

410. 0,5 кг. У к а з а н и е. Составим дифференциальное уравнение нашей задачи. Пусть $y(t)$ — количество соли в баке в момент времени t . Выясним, как изменится содержание соли за время Δt (от момента t до $t + \Delta t$). Так как по условию задачи в минуту поступает 5 л воды без соли, то за время Δt поступит $5\Delta t$ л воды, содержащей в себе $5\Delta t \cdot 0 = 0$ кг соли. В одном литре раствора содержится $\frac{y(t)}{100}$ кг соли, значит, в вытекающей смеси соли будет приблизительно (с точностью до бесконечно малой высшего порядка чем Δt)

$$5\Delta t \cdot \frac{y(t)}{100} \text{ кг} = 0,05\Delta t y(t) \text{ кг.}$$

Итак, в растворе, втекающем за время Δt , содержится 0 кг соли, а в вытекающем $0,05\Delta t y(t)$ кг. Приращение количества соли за это время

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 0 - 0,05\Delta t y(t).$$

Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -0,05y(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = C \exp(-0,05t)$. По условиям задачи $y(0) = 10$ кг, значит, $C = 10$. Через $t = 1$ ч = 60 мин получаем (при выводе уравнения мы считали изменение времени в минутах)

$$y(60) = 10 \exp(-3) \approx 1/2 \text{ кг.}$$

411. $t_0 = 40$ мин. У к а з а н и е. Если $\theta(t)$ — температура тела в момент времени t , то дифференциальное уравнение задачи запишется:

$$\frac{d\theta}{dt} = -k[\theta(t) - 20].$$

Общее решение этого уравнения $\theta(t) = 20 + C \exp(-kt)$. Значение постоянной C и коэффициента пропорциональности k находим из условий: $\theta(0) = 100$, $\theta(10) = 60$, $C = 80$, $k = 0,1 \ln 2$.

Далее, $\theta(t_0) = 25$, т. е. $25 = 20 + 80 \exp(-0,1t_0 \ln 2)$.

412. $x^2 + C(y + x) = 0$; $x = 0$. 413. $y = 0$; $x(y - x) = Cy$.

414. $y = C \exp(y/x)$. 415. Общее решение: $x^3(y + C) = Cy$.

416. $x = C \exp\left(\frac{2x^3}{3x^2 - 2y}\right)$.

417. Уравнение приводится к виду

$$y' = x \left(\cos^2 \frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^2} \right),$$

т. е. $\alpha = 2$, $f(t) = \cos^2 t + 2t$. Решение проводится путем замены $y = tx^2$. Можно также воспользоваться готовой формулой, полученной в [3], § 1.3, (7):

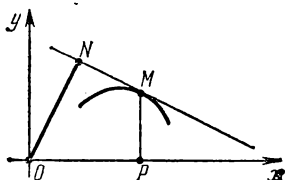


Рис. 81

$$\begin{aligned} x &= C \exp \left[\int \frac{dt}{f(t) - 2t} \right] = \\ &= C \exp \left[\int \frac{dt}{\cos^2 t} \right] = \\ &= C \exp(\operatorname{tg} t) = C \exp \left(\operatorname{tg} \frac{y}{x^2} \right). \end{aligned}$$

418. У к а з а н и е. Составим дифференциальное уравнение задачи (рис. 81). Пусть $M = (x, y)$ — точка касания; MN — касательная; $ON \perp MN$; по условию $ON = OP = |x|$. Если

$$Y - y = y'(X - x)$$

— уравнение касательной, то

$$ON = \frac{|-y + y'x|}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

— расстояние точки $(0, 0)$ до прямой MN . Таким образом,

$$|x| = \frac{|xy' - y|}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

откуда

$$(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Это однородное уравнение. Его общее решение $Cx = y^2 + x^2$.

419. Уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{1}{x^2} (4 - xy - y^2 x^2) = \frac{1}{x^2} f(xy),$$

т. е. $\alpha = -1$, $f(t) = 4 - t - t^2$. Общее решение $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$, $y = \frac{2}{x}$.

420. а) Уравнение приводится к виду

$$y' = \frac{-1}{3x^2} (2 + x^2 y^2),$$

т. е. $\alpha = -1$, $f(t) = -\frac{1}{3} (2 + t^2)$. Уравнение можно решать заменой $xy = t$ или по формуле (7) § 1.3 [3]:

$$x = C \exp \left(\int \frac{dt}{f(t) + t} \right), \quad x = C \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^3 = C \left(\frac{xy-1}{xy-2} \right)^3$$

(положим $\bar{C}^3 C = 1$),

$$y = \frac{2\bar{C}x^{1/3} - 1}{x(\bar{C}x^{1/3} - 1)} = \frac{1}{x} + \frac{\bar{C}x^{1/3}}{x(\bar{C}x^{1/3} - 1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{C^*x^{2/3} + x} \\ \left(C^* = -\frac{1}{\bar{C}} \right);$$

б) замена $yx^{-\alpha} = t$.

421. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$. 422. $y = Cx^2 + x^4$. 423. $y = e^x (\ln |x| + C)$. 424. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{1-e}{x}$. 425. $y = x(C + \sin x)$.

426. $x = \sin y(C - \cos y)$. Уравнение линейное относительно функции $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y.$$

427. $y = 0$, $y^3 = -1/[3 \cos^3 x(C + \operatorname{tg} x)]$. 428. $y^2 = Cx^2 - 2x$. 429. $y = 0$, $y = x^4 \ln^2 |Cx|$. 430. $y = 0$, $y = 1/(x^2 + Cx)$.

431. а) Будет. Все аксиомы расстояния легко проверяются; б) будет. Первая и вторая аксиомы очевидны. Проверим неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Если $x = y = z$, то $0 \leq 0 + 0$; если $x = y$, $z \neq x$, то $0 \leq 1 + 1 = 2$; если $x \neq y$, $x = z$, то $1 \leq 0 + 1 = 1$; если $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, то $1 \leq 1 + 1 = 2$.

432. Будет. Первая аксиома: если $f(x) \equiv g(x)$, то $\rho(f, g) = 0$. Обратно, пусть $\rho(f, g) = 0$. Тогда

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = 0.$$

Так как $[f(x) - g(x)]^2$ — неотрицательная непрерывная функция на $[a, b]$, то $[f(x) - g(x)]^2 \equiv 0$, т. е. $f(x) \equiv g(x)$ (см. [1], § 6.2, теорема 8). Вторая аксиома: $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ — очевидна. Третья аксиома: имеем

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$$

$\forall \lambda$, т. е. квадратный трехчлен относительно λ

$$\int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

Последнее возможно, если дискриминант уравнения неположителен:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0,$$

откуда

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

(неравенство Буняковского для интегралов, см. также [3], § 4.8). Далее, применяя неравенство Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx &\leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) + g(x)| |f(x)| dx + \int_a^b |f(x) + g(x)| |g(x)| dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left[\left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

или

$$\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

(неравенство Минковского для интегралов). Теперь по неравенству Минковского получаем

$$\begin{aligned}\rho(f, g) &= \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_a^b \{ [f(x) - \varphi(x)] + [\varphi(x) - g(x)] \}^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b [\varphi(x) - g(x)]^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \rho(f, \varphi) + \rho(\varphi, g)\end{aligned}$$

для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $\varphi(x)$.

433. $\alpha < 1/2$. У к а з а н и е. $\rho(f_n, 0) = \left(\int_0^{1/n} n^{2\alpha} dx \right)^{1/2} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}$.

434. Нет. Фундаментальная последовательность $\left\{ 3 - \frac{1}{n} \right\}$ сходится к числу 3, которое не принадлежит M .

435. а) Будет. $\rho(F(x), F(y)) = |F(x) - F(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq |x - y| (|x| + |y|) \leq \frac{2}{3} |x - y| = \alpha \rho(x, y)$, где $\alpha = 2/3 < 1$;

б) не будет. Если $x = 1$, $y = 0$, то $|F(x) - F(y)| = 1 = 1|x - y|$ ($\alpha = 1$).

436. $x_0 = 1/2$, $x_1 = F(x_0) = 1/2^2$, $x_2 = 1/2^4$, ..., $x_n = 1/2^{2^n}$, ...

437. а) $\bar{x} = 2/(1 + \sqrt{5})$. Будет, так как

$$\max_{1/2 \leq x \leq 1} |F'(x)| = \max_{1/2 \leq x \leq 1} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{4}{9} < 1;$$

б) ось $x_2 = 0$; в) прямые $x_2 = 0$, $x_2 = 1$.

438. а) $\delta < 1/36$. У к а з а н и е. Согласно теореме существования решения

$$\delta < \min \{a, 1/N, b/M\},$$

где

$$N = \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|, \quad M = \max_D |f(x, y)|.$$

В данном случае $M = 36$, $N = 24$. Решение данной задачи имеет вид $y = 2/(3 - 2x^2)$. Таким образом, при $x \rightarrow \sqrt{3/2}$ решение $y(x) \rightarrow \infty$. Значит, фактически решение существует в интервале $(0, \sqrt{3/2})$, который больше интервала $(1 - \delta, 1 + \delta)$ ($\delta < 1/36$).

Отметим, что во всем интервале $(0, 2) = (1 - a, 1 + a)$ решение данной задачи (с указанными начальными условиями) не существует;

б) $\delta < a = \sqrt{2}/4$. В данном случае $a = \frac{b}{M} = \frac{1}{N} = \frac{1}{8a}$.

Таким образом, решение существует в предельно возможном промежутке $[-\delta, \delta]$ ($\delta < a$), т.е. теорема существования дает неулучшаемый результат в смысле размера промежутка, где существует решение для данной правой части $f(x, y)$.

439. $y(1) \approx 1,248$. Указание. При приближенном решении уравнений всегда рекомендуется определять интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где существует решение $y(x)$. Число δ находится из теоремы существования. Если точка, в которой нас интересует значение решения, входит в указанный интервал, то можно применять метод Эйлера. Данный пример носит иллюстративный характер для метода Эйлера. Уравнение можно решить. Его решение, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид $y = \exp(x^2/4)$, т.е. решение существует на всей действительной оси, и поэтому метод Эйлера можно применять без всяких ограничений. По методу Эйлера

$$y(1) \approx y_0 + h \sum_{k=0}^9 f(x_k, y_k),$$

где $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, ..., $x_9 = 0,9$, $x_{10} = 1$; $y_0 = 1$; $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, ..., $y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8)$, $y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9)$. Таким образом, $y(1) \approx y_{10}$. Все эти вычисления можно свести в таблицу:

k	x_k	y_k	$hf(x_k, y_k)$
0	0	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,010
3	0,3	1,015	0,015
4	0,4	1,030	0,021
5	0,5	1,051	0,026
6	0,6	1,077	0,032
7	0,7	1,109	0,039
8	0,8	1,148	0,046
9	0,9	1,194	0,054
10	1	1,248	—

Истинное значение решения $y(1) = \exp(1/4) \approx 1,284$, т.е. приближенное значение решения мы получили с точным первым десятичным знаком.

440. $y(2) \approx 4,781$ (точное значение $y(2) = 3(e - 1)$). Указание. Решение уравнения существует на всей оси. Общее решение уравнения $y = Ce^x - x - 1$.

441. а) $y = C \exp(\pm x)$ (рис. 82). Особых решений нет;

б) $y(x + C)^2 = 1$; $y = 0$ (рис. 83). Особых решений нет;

в) $(x + C)^2 + y^2 = 1$; $y = \pm 1$ — особые решения (рис. 84). Интегральных кривых $y = \pm 1$ в каждой их точке касается еще одна интегральная кривая (окружность);

г) $y[1 + (x - C)^2] = 1$; $y = 0$; $y = 1$ — особое решение (рис. 85). Отметим, что $y = 0$ не является особым решением.

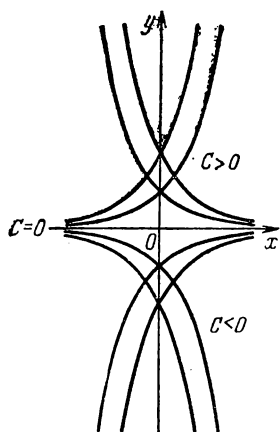


Рис. 82

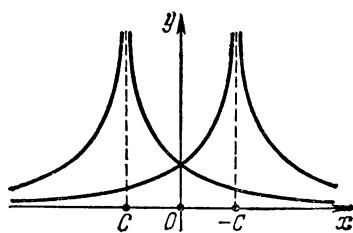


Рис. 83

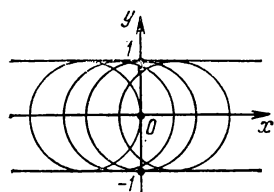


Рис. 84

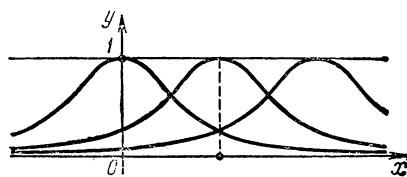


Рис. 85

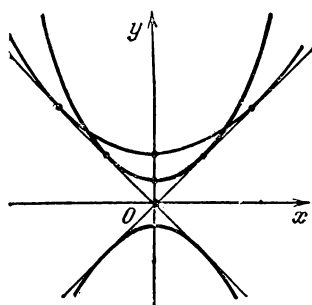


Рис. 86

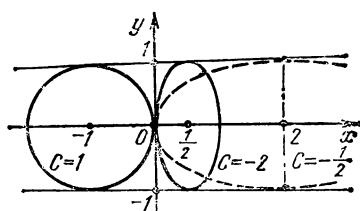


Рис. 87

Другие интегральные кривые не касаются этой интегральной кривой;

д) $x^2 + C^2 = 2Cy$ — параболы; $y = \pm x$ — особые решения (рис. 86);

е) $(Cx + 1)^2 = 1 - y^2$ — эллипсы; $y = \pm 1$ — особые решения (рис. 87). У к а з а н и е. Особые решения можно искать различными способами. Например, в случае д), разрешив уравнение от-

носительно y , получаем однородное уравнение $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

($x \neq 0$). Если частная производная по y от правой части последнего уравнения обращается в бесконечность вдоль гладкой кривой, то эта кривая может быть особым решением. В данном случае

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x} \right] = \frac{1}{x} \left[1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \right] = \infty$$

при $y = \pm x$. Проверкой убеждаемся, что $y = \pm x$ — решения нашего уравнения. Легко установить, что этих прямых касается в каждой точке еще одна интегральная кривая семейства $x^2 + C^2 = 2Cy$. Значит, $y = \pm x$ — особые решения.

Эти же решения можно находить из системы

$$\frac{\partial}{\partial C} \left. \begin{aligned} x^2 + C^2 - 2Cy &= 0, \\ (x^2 + C^2 - 2Cy) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x^2 + C^2 - 2Cy &= 0, \\ C - y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad y = \pm x.$$

Дальнейшее исследование проводится, как и выше.

442. а) Данное уравнение не содержит явно переменной y . Вводим параметр $\frac{dy}{dx} = p$, $x = p^3 + p$, $dy = p dx = p(3p^2 + 1) dp$;

$$\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \frac{3}{4} p^4 + \frac{p^2}{2} + C \end{cases}$$

— параметрическое задание решения;

б) данное уравнение не содержит явно переменной x . Вводим параметр $\frac{dy}{dx} = p$, $y = p^2 + 2p^3$, $dx = \frac{dy}{p} = (2 + 6p) dp$,

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C, \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}$$

— параметрическое задание решения; $y = 0$ — также решение уравнения;

в) данное уравнение также не содержит y . Параметр p можно ввести по формуле $\frac{dy}{dx} = p$. Тогда $x = p \sqrt{1 + p^2}$, $dy = p dx = p \left(\sqrt{1 + p^2} + \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp$, $3y = (2p^2 - 1) \sqrt{1 + p^2} + C$.

Здесь также можно ввести параметр по формуле $\frac{dy}{dx} = \text{sh } p$,

$$x = \operatorname{sh} p \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2p, \quad dy = \operatorname{sh} p \cdot dx = \operatorname{sh} p \cdot \operatorname{ch} 2p dp = \\ = (2 \operatorname{ch}^2 p - 1) d \operatorname{ch} p, \quad y = \frac{2}{3} \operatorname{ch}^3 p - \operatorname{ch} p + C.$$

$$\begin{cases} x = p \sqrt{1 + p^2}, \\ 3y = (2p^2 - 1) \sqrt{1 + p^2} + C \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2p, \\ y = \frac{2}{3} \operatorname{ch}^3 p - \operatorname{ch} p + C \end{cases}$$

— параметрическое задание решения.

444. $y = xC - \frac{1}{4} C^2$ — общее решение; особое решение находим из системы

$$\begin{cases} y - xC + \frac{1}{4} C^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial C} \left[y - xC + \frac{1}{4} C^2 \right] = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y - xC + \frac{1}{4} C^2 = 0, \\ -x + \frac{C}{2} = 0, \end{cases} \\ C = 2x, \quad y = x^2.$$

Проверкой убеждаемся, что $y = x^2$ является решением уравнения Клеро, следовательно, это особое решение (рис. 88). Из

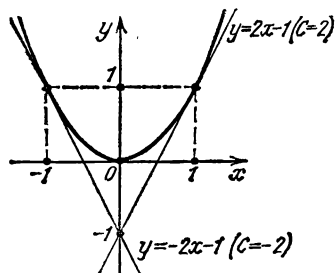


Рис. 88

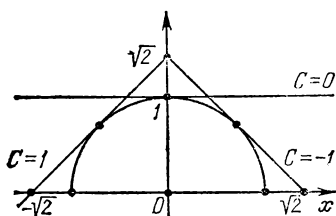


Рис. 89

рис. 88 видно, что парабола $y = x^2$ является огибающей для семейства прямых $y = xC - \frac{1}{4} C^2$.

445. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$ — общее решение. При $x = 0$ $y = \sqrt{1 + C^2} \geq 1$. Особое решение $x^2 + y^2 = 1$. Учитывая, что прямые $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$ пересекают ось y в точках с ординатой ≥ 1 , то особым решением является верхняя половина окружности (рис. 89). Это огибающая семейства прямых.

446. а) $y = -\cos x + C_1 x + C_2$;

б) $y = \frac{x^4}{24} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

447. Данное уравнение не содержит явно искомую функцию y . Понижение порядка достигается введением новой функции $z(x) = y'$. Имеем $z'(x) = y''$; $x^2 z' = z^2$. Таким образом, мы получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Легко видеть, что $z(x) \equiv 0$ является решением уравнения, тогда $y'(x) \equiv 0$, $y(x) = C$ — решение исходного уравнения.

Пусть $z \neq 0$; тогда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \quad (x \neq 0), \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{x} + C_1.$$

$$y = \int \frac{x dx}{C_1 x + 1} = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \ln |C_1 x + 1| + C_2 \quad (C_1 \neq 0).$$

Если $C_1 = 0$, то $z = x$, $y' = x$, $y = \frac{x^2}{2} + C$.

448. $2y = (1 + 2C_1)x^2 + C_1 \cos 2x + C_2 x + C_3$. У к а з а н и е.
 $z(x) = y''(x)$.

449. $y = -(x + C_1) \ln |C_2(x + C_1)| + x + C_3$; $y = C_1 x + C_2$.

450. Данное уравнение можно решить заменой $y'(x) = z(x)$. Однако легко видеть, что $2yy' = (y^2)'$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$(y')' = (y^2)',$$

откуда $y' = y^2 + p$, $x = \int \frac{dy}{y^2 + p}$.

Рассматривая случаи $p = 0$, $p < 0$, $p > 0$, получаем

$$x = -\frac{1}{y} + C_2; \quad 2C_1 x + C_2 = \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| \quad (p = -C_1^2);$$

$$y = C_1 \operatorname{tg} C_1 (x - C_2) \quad (p = C_1^2).$$

451. $y \ln |C_1 x| = 1$; $y = C_1 \operatorname{tg} (C_1 \ln |C_2 x|)$; $C_2 x = \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right|^{1/(2C_1)}$.

У к а з а н и е. Уравнение сводится к виду $(xy')' = (y^2)'$.

452. $y^2 = (C_1 + x)^2 + C_2$. У к а з а н и е. $yy'' + y'^2 = (yy')'$.

453. Данное уравнение не содержит явно аргумента x . Понижение порядка достигается введением новой функции $z(y) = y'(x)$. Отсюда

$$y''(x) = z'_y(y) \cdot y'_x = z'_y \cdot z.$$

Уравнение принимает вид

$$2y \frac{dz}{dy} z = z^2 + y^2.$$

Это однородное уравнение. Решая его, получаем ($y \neq 0$)

$$z = \pm \sqrt{y^2 + C_1 y}.$$

Далее,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y^2 + C_1 y}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 y}} = \pm dx,$$

$$\pm x + C_2 = \ln \left| y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1 y + y^2} \right|.$$

Функция $y(x) \equiv 0$ также является решением.

454. $y \ln|y| + x + C_1 y + C_2 = 0$; $y = C$. Указание. $y'(x) = z(x)$.

455. $x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2$; $y = C$. Указание. После введения новой функции $z(y) = y'_x$ относительно $z(y)$ получим линейное уравнение.

456. Данное уравнение содержит x и y . Однако оно является однородным относительно y , y' , y'' второй степени. Понижение порядка достигается введением новой функции $z(x)$ по формуле $y' = yz$ ($y \neq 0$). В этом случае $y'' = y(z^2 + z')$ и уравнение принимает вид $xz' = z$. Решая это уравнение, получаем $z = C_1 x$. Заменяя z на y'/y , получаем дифференциальное уравнение первого порядка $y' = C_1 x y$. Интегрируя, получаем $y = C_2 \exp(C_1 x^2/2)$. Это решение включает в себя и решение $y = 0$.

457. $y = C_2 x \exp(-C_1/x)$. Указание. $y' = yz(x)$. 458. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. 459. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

460. Характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 1 = 0$. Его корни можно найти, извлекая корень четвертой степени из единицы. Однако можно левую часть разложить на множители: $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$, откуда $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$. Поэтому общее решение исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

461. Корни характеристического уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$;

$$y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x).$$

462. а) Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ легко приводится к виду $(k^2 + 1)^2 = 0$. Таким образом, оно имеет корни $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$. Общее решение можно записать так:

$$y = e^{ix} (C_1 + C_2 x) + e^{-ix} (C_3 + C_4 x).$$

Если воспользоваться формулами Эйлера, то

$$y = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x;$$

б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

464. Общее решение однородного уравнения уже нам известно (см. задачу 461). Остается найти частное решение неоднородного уравнения.

а) Правая часть $f(x) = 2e^{3x}$ имеет специальный вид (см. [3], § 1.16), где $k_0 = 3$ не является корнем характеристического

уравнения, поэтому частное решение

$$\bar{y} = Ae^{3x},$$

где

$$A = \frac{2}{R_3(3)} = 1, \quad R_3(k) = k^3 - 5k^2 + 8k - 4.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + e^{3x};$$

б) $k_0 = 1$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение нужно искать в форме $\bar{y} = Axe^x$. Находя производные от \bar{y} и подставляя их в уравнение, найдем, что $A = 4$. Вообще, можно доказать, что

$$A = a/R'_n(k_0),$$

если $f(x) = a \exp(k_0 x)$ и k_0 — простой корень характеристического уравнения. Общее решение неоднородного уравнения запишется

$$y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + 4x e^x;$$

в) $k_0 = 2$ — корень кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y} = Ax^2 e^{2x}$. Находя необходимые производные от \bar{y} и подставляя их в исходное уравнение, найдем $A = 3/2$. Вообще, можно доказать, что если $f(x) = ae^{k_0 x}$ и k_0 — корень кратности 2 характеристического уравнения, то

$$A = \frac{a}{R''_n(k_0)}.$$

В данном случае $R''_3(k) = 6k - 10$, $a = 3$. Итак,

$$y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$$

465. См. задачу 462. а) $y = \frac{1}{4} e^x$; б) перейти к функциям $e^{\pm ix}$ согласно формулам Эйлера; $k_0 = \pm i$ — корни кратности 2 характеристического уравнения; $\bar{y} = -\frac{1}{8} x^2 \sin x$; в) $\bar{y} = -\frac{x^2}{8} (\cos x + \sin x)$; г) $\bar{y} = \frac{1}{9} \sin 2x$.

$$466. y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{\cos x}{10} - \frac{\sin x}{5}.$$

467. а) $\bar{y} = Ae^x$; б) $\bar{y} = (Ax^2 + Bx) e^{2x}$; в) $\bar{y} = A \cos x + B \sin x$; г) $\bar{y} = (A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5) e^{3x}$; д) $\bar{y} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$. Здесь правая часть $P(x) e^{k_0 x}$, $k_0 = 0$ является корнем характеристического уравнения; е) $\bar{y} = e^x [(A_1 + A_2 x) \sin x + (A_3 + A_4 x) \cos x]$.

468. а) Линейно зависимы: $\alpha \cdot 1 + \beta \sin^2 h + \gamma \cos 2x \equiv 0$ при $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$; б) линейно зависимы; в) линейно неза-

висимы, так как их определитель Вронского не равен нулю; г) линейно независимы ($W[x^2, x^3, x^4] = 2x^6 \neq 0, x \neq 0$).

469. а) $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$. Указание. Частные решения ищем в виде $y = x^k$. Функции x^2 и x^3 являются частными линейно независимыми решениями уравнения, поэтому их линейная комбинация дает общее решение уравнения; б) $y = C_1 x + C_2 x^3$; в) ищем решения в виде $y = x^k$; характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2 = 0$ имеет двукратный корень $k_1 = k_2 = 2$; $y = x^2$ — частное решение уравнения. Второе решение ищем в форме $y = Ax^2 \ln x$. Легко убедиться, что при любых A это есть решение уравнения Эйлера. Итак, общее решение $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^2$; г) уравнение переходит в уравнение Эйлера после умножения на x левой и правой частей уравнения; $y = C_1 + C_2 x^3 + C_3 \ln x$.

$$471. y = e^{x^2/2} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$$472. \text{ а) } y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^2}{3}; \text{ б) } y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^{10}}{99}.$$

473. Правые части уравнений не имеют специального вида

$$e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

Поэтому частное решение неоднородного уравнения надо искать методом вариации произвольных постоянных;

а) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Считая $C_1(x)$, $C_2(x)$ функциями от x , найдем их так, чтобы функция $\bar{y}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ была частным решением неоднородного уравнения. Для этого надо решить систему (см. [3], § 1.17)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W[\cos x, \sin x] = 1 \neq 0$. Решая систему, находим

$$C_1'(x) = -1, \quad C_2'(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = \int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x|.$$

Значит,

$$\bar{y} = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x|.$$

и общее решение неоднородного уравнения запишется:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$$

Теперь находим постоянные C_1 и C_2 по начальным условиям:

$$y(\pi/2) = C_2 = 1, \quad y'(\pi/2) = -C_1 + \pi/2 = 0, \quad C_1 = \pi/2$$

Итак, решение задачи Коши будет

$$y = \frac{\pi}{2} \cos x + \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|;$$

$$\text{б) } y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x \cos 2x - \\ - \frac{1}{2} \sin 2x + \sin 2x \ln |\cos x|;$$

$$\text{в) } y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \\ - x \cos x + \sin x \ln |\cos x|;$$

$$\text{г) } y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + (-x + x \ln |x|) e^{-x} = \\ = (a + bx) e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|.$$

$$474. \text{ а) } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{2}{3} x^2 + \frac{8}{9} x - \frac{8}{27};$$

$$z = -C_1 e^{2x} + \frac{C_2}{4} e^{-3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{9} x - \frac{2}{27}.$$

У к а з а н и е. Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4z = 4. \quad (1)$$

Из первого уравнения находим функцию $z = x - \frac{1}{4} \dot{y} - \frac{1}{2} y$.

Производную \dot{z} находим из второго уравнения:

$$\dot{z} = z - y + x^2 = x + x^2 - \frac{1}{4} \dot{y} - \frac{3}{2} y.$$

Подставляя это значение \dot{z} в (1), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом относительно функции $y(x)$:

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 4(1 - x - x^2);$$

б) данную систему можно решать так же, как и систему а). Однако можно применить теорию § 1.22 из [3]. Приведем систему к виду

$$\begin{cases} \left(0 + \frac{d}{dx}\right) y - z = 0, \\ y + \left(0 + \frac{d}{dx}\right) z = 0. \end{cases}$$

Это однородная система, поэтому она сводится к одному и тому же уравнению относительно любой из функций y или z . Составим определитель системы:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 + \lambda & -1 \\ 1 & 0 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \left(\lambda = \frac{d}{dx}\right).$$

Искомое уравнение относительно функции y имеет вид $D\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$. Общее решение этого уравнения —

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Функцию z находим из первого уравнения:

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Так как функция z удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению, как и функция y , то сразу можно было написать, что

$$z = a \cos x + b \sin x$$

и затем подобрать числа a и b так, чтобы функции y и z удовлетворяли нашей системе (т. е. мы подставляем функции y и z в систему и выражаем постоянные a и b через C_1 и C_2 или наоборот);

$$\text{в) } D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$ имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right) \left(\frac{d}{dt} + 1\right)^2 x(t) = 0.$$

а его характеристическое уравнение будет

$$(k - 2)(k + 1)^2 = 0, \quad k_1 = k_2 = -1, \quad k_3 = 2.$$

Общее решение дифференциального уравнения —

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

Функции $y(t)$ и $z(t)$ выражаются подобным образом:

$$y(t) = (a + bt) e^{-t} + d e^{2t}, \quad z(t) = (\alpha + \beta t) e^{-t} + \gamma e^{2t}.$$

Подставляя эти функции в систему, найдем, что $b = \beta = C_2 = 0$, $d = \gamma = C_3$, $a + \alpha = -C_1$, где a можно считать произвольным, тогда $\alpha = -C_1 - a$. Итак,

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t}, & y(t) &= a e^{-t} + C_3 e^{2t}, \\ z(t) &= -(C_1 + a) e^{-t} + C_3 e^{2t}; \end{aligned}$$

г) данная система неоднородная, поэтому для каждой функции y и z будет свое уравнение:

$$D\left(\frac{d}{dx}\right) y = \Phi_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= M_{11} \left(\frac{d}{dx}\right) f_1(x) + M_{21} \left(\frac{d}{dx}\right) f_2(x) = \\ &= M_{11} \left(\frac{d}{dx}\right) \cdot 1 + M_{21} \left(\frac{d}{dx}\right) x, \end{aligned}$$

$M_{sj} \left(\frac{d}{dx} \right)$ — алгебраическое дополнение элемента b_{sj} определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \left(\lambda = \frac{d}{dx} \right),$$

т. е.

$$M_{11}(\lambda) = \lambda, \quad M_{21}(\lambda) = 1, \quad M_{12}(\lambda) = -1, \quad M_{22}(\lambda) = \lambda.$$

Таким образом,

$$\Phi_1(x) = \frac{d}{dx} \cdot 1 + 1 \cdot x = x.$$

Окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение относительно функции $y(x)$: $\ddot{y} + y = x$ (функция z удовлетворяет уравнению $\ddot{z} + z = 0$). Решая эти уравнения, получаем

$$y = C_1 \cos x + C_3 \sin x + x, \quad z = C_2 \cos x - C_1 \sin x.$$

475. а) Решение. Способ 1. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Найдём собственные векторы $\alpha^1 = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)})$ и $\alpha^2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$.

$$(2 - 1)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \quad \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0, \quad \alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)},$$

где $\alpha_2^{(1)}$ — произвольное число. Для простоты запиши положим $\alpha_2^{(1)} = -1$, тогда $\alpha_1^{(1)} = 1$. Итак, $\alpha^1 = (1, -1)$. Аналогично из уравнения

$$(2 - 5)\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0$$

находим $\alpha^2 = (1, 3)$. Решения системы запишутся следующим образом:

$$Y^1(t) = \{e^t, -e^t\}, \quad Y^2(t) = \{e^{5t}, 3e^{5t}\}.$$

Общее решение —

$$Y(t) = C_1 Y^1(t) + C_2 Y^2(t) = \{C_1 e^t + C_2 e^{5t}, -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}\}.$$

В развернутом виде

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y_2(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Способ 2. После того как мы нашли корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, можно сразу написать общее решение:

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y_2(t) = a e^t + b e^{5t}$$

Подставляя эти функции в нашу систему, мы найдём a и b , выраженные через C_1 и C_2 . Здесь мы минуем процесс нахождения собственных векторов α^1 и α^2 ;

$$\text{б) } x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \quad y(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t};$$

$$\text{в) } y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$z = \frac{1}{5} e^{-x} [(C_2 - 2C_1) \cos x - (C_1 + 2C_2) \sin x];$$

$$\text{г) } D(\lambda) = -\lambda^3 + 1 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) - \text{корни характеристического уравнения};$$

$$x = C_1 e^t + e^{-t/2} \left(C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + C_3 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right),$$

$$y = C_1 e^t +$$

$$+ e^{-t/2} \left(\frac{C_3 \sqrt{3} - C_2}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{C_2 \sqrt{3} + C_3}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right),$$

$$z = C_1 e^t +$$

$$+ e^{-t/2} \left(\frac{-C_3 \sqrt{3} - C_2}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{C_2 \sqrt{3} - C_3}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right).$$

476. Решение однородной системы нам уже известно (см. задачу 475, б)):

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}.$$

а) Считая $C_1(t)$, $C_2(t)$ функциями от t , подберем их так, чтобы функции

$$\bar{x} = C_1(t) e^{-t} + C_2(t) e^{3t}, \quad \bar{y} = 2C_1(t) e^{-t} - 2C_2(t) e^{3t}$$

были решениями неоднородной системы (метод Лагранжа вариации постоянных). Дифференцируя эти функции и подставляя в систему, получаем

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{-t} + C_2'(t) e^{3t} = 1, \\ 2C_1'(t) e^{-t} - 2C_2'(t) e^{3t} = t, \\ C_1'(t) = \frac{2+t}{4} e^t, \quad C_2'(t) = \frac{2-t}{4} e^{-3t}. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = \frac{1}{4} (1+t) e^t, \quad C_2(t) = \frac{1}{36} (-5+3t) e^{-3t};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{9} + \frac{t}{3}, \quad \bar{y} = \frac{7}{9} + \frac{t}{3}.$$

Общее решение неоднородной системы имеет вид

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{9} + \frac{t}{3}, \quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} + \frac{7}{9} + \frac{t}{3};$$

$$6) C_1(t) = \frac{1}{16} (4e^{2t} + e^{4t}), \quad C_2(t) = -\frac{1}{4} (t + e^{-2t});$$

$$\bar{x} = \frac{1}{16} (1 - 4t) e^{3t}, \quad \bar{y} = e^t + \frac{1}{8} (1 + 4t) e^{3t},$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \frac{1 - 4t}{16} e^{3t},$$

$$y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} + e^t + \frac{1}{8} (1 + 4t) e^{3t}.$$

477. $y = 2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^4 + \dots$ Указание. Решение ищем в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

где в силу начальных условий $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

$$479. y = 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$480. y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \dots$$

481. а) Функцию Ляпунова можно взять в виде $v = x^2 + y^2$;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -2x^4 - 2y^4 \leq 0.$$

Точка покоя устойчива;

б) функция Ляпунова в виде квадратичной положительно определенной формы не подходит для данного примера. Будем искать ее в виде

$$v = x^\alpha + y^\beta$$

с четными показателями α и β . Найдем полную производную от v (вдоль решения x, y):

$$\frac{dv}{dt} = \alpha x^{\alpha-1} (2y^3 - x^5) + \beta y^{\beta-1} (-x - y^3 + y^5).$$

Чтобы эта функция была ≤ 0 в окрестности начала координат, нужно, чтобы отсутствовали члены вида $x^{\alpha-1} y^3$ и $y^{\beta-1} x$. Таким образом, должно быть $\alpha = 2$, $\beta = 4$. В этом случае

$$\frac{dv}{dt} = -2x^6 - 4y^6 + 4y^8 = -2[x^6 + 2y^6(1 - y^2)] \leq 0$$

в достаточно малой окрестности начала координат. Кроме того, $v = x^2 + y^4 \geq 0$ в окрестности начала и $v = 0$ только при $x = y = 0$. Поэтому по теореме Ляпунова решение $x(t) = y(t) \equiv 0$ устойчиво;

в) для функции $v = x^2 + y^2$

$$\frac{dv}{dt} = 2x(x^3 - y) + 2y(x + y^3) = 2x^4 + 2y^4 > 0$$

вне начала координат. Значит, нулевое решение неустойчиво по теореме Четаева.

482. а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 > 0$, система эллиптическая; $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$; точка покоя — устойчивый узел;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, система параболическая; $\lambda_1 = a_{11} + a_{22} = 5 > 0$; точка покоя неустойчива;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$, система гиперболическая; точка покоя неустойчива.

483. а) Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

имеет положительные корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, поэтому точка покоя есть неустойчивый узел;

б) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2 - 3i$, $\lambda_2 = -2 + 3i$. Действительная часть этих корней отрицательна, поэтому нулевое решение — устойчивый фокус;

в) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ разных знаков, значит, точка покоя — седло;

г) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -5 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_1 = -i\sqrt{6}$, $\lambda_2 = i\sqrt{6}$ с действительной частью $p = 0$, поэтому точка покоя — центр;

д) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0$$

имеет кратный положительный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, значит, точка покоя — неустойчивый узел.

ГЛАВА 7

484. $-\infty < x < \infty$; $F(x)$ непрерывна и дифференцируема

$$F'(x) = \frac{1}{x} (\sin 2\pi x - \sin \pi x).$$

485. $\frac{b}{2a^2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. Указание. Продифференцировать равенство по параметру a .

486. а) $F'(x) = 2x \exp(-x^5) - \exp(-x^2) - \int_x^{x^2} y^2 \exp(-xy^2) dy;$

б) $F'(x) = \frac{2}{x} \ln(1+x^2);$

в) $F'(x) = -f(x, -x) + 2 \int_0^x f'_u(u, v) dy,$ где $u = y + x,$

$v = y - x$. Указание. В начале в интеграле сделать замену $z = y - x$.

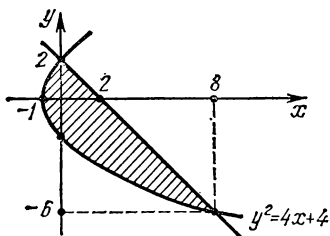


Рис. 90

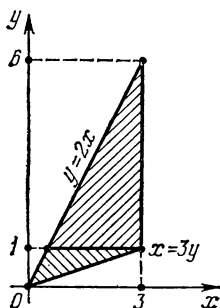


Рис. 91

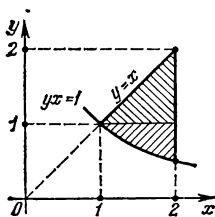


Рис. 92

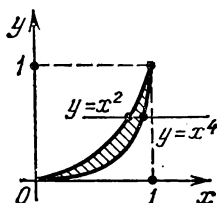


Рис. 93

487. а) $-1/10$; б) $1/2$. 488. $\ln(25/24)$. 489. 50,4. 490. $12/5$.

491. $I = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f(x, y) dy + \int_0^8 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} f(x, y) dy$ (рис. 90).

492. $I = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{3y} f(x, y) dx + \int_1^6 dy \int_{y/2}^3 f(x, y) dx$ (рис. 91).

$$493. I = \int_{1/2}^1 dy \int_{1/y}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx \quad (\text{рис. 92}).$$

$$494. I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx \quad (\text{рис. 93}).$$

$$495. I = \int_0^1 dx \int_0^{c\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{c\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy \quad (\text{рис. 94}).$$

$$496. I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x + y^2) dx = \frac{7}{6}.$$

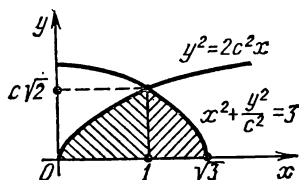


Рис. 94

$$497. I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \frac{1}{40}. \quad 498. \frac{1}{2} abc (a + b + c).$$

$$499. 1/48. \quad 500. 16.$$

$$501. \text{ а) } \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz;$$

$$\text{ б) } \int_{-\frac{1}{2}R\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}R\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}} dy \int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

$$502. \frac{1}{3} \pi a^3.$$

503. $I = \frac{4}{5} \pi abc$. Указание. В силу четности подынтегральной функции по всем переменным данный интеграл равен восьми интегралам по части эллипсоида, находящейся в первом

октанте. Вводим замену:

$$x = ar \cos t \cos \tau, \quad y = br \cos t \sin \tau, \quad z = cr \sin t \\ (0 < r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \pi/2, \quad 0 \leq \tau \leq \pi/2).$$

Якобиан данного преобразования

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, t, \tau)} \right| = abcr^2 \cos t,$$

поэтому $I = 8abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi/2} d\tau \int_0^{\pi/2} \cos t dt. \quad 504. \pi a^3/6.$

505. $2\pi ab/3$. У к а з а н и е. Учесть четность подынтегральной функции и ввести обобщенные полярные координаты:

$$x = ar \cos t, \quad y = br \sin t \\ (0 < r \leq 1, \quad 0 < t \leq \pi/2).$$

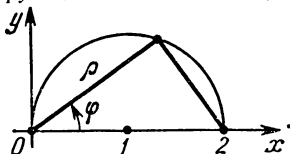


Рис. 95

Якобиан $\frac{D(x, y)}{D(r, t)} = abr. \quad 506. \pi R^4.$

507. $8a^2/9$. У к а з а н и е. Область интегрирования есть половина цилиндра высоты a , в основании которого лежит полуокруг $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ ($y > 0$). Уравнение полуокружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) в полярных координ-

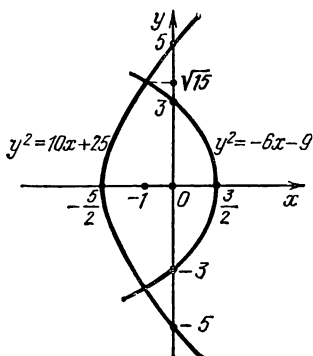


Рис. 96

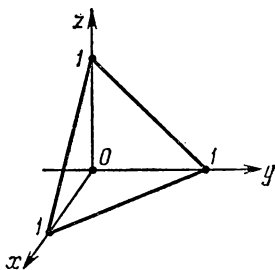


Рис. 97

натах имеет вид $\rho = 2 \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) (рис. 95). Поэтому

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^a z dz.$$

508. $4\pi R^5/15$. У к а з а н и е. Перейти к полярным координатам.

509. $\frac{16}{3} \sqrt{15}$ (рис. 96). 510. $V = \frac{1}{6}$ (рис. 97).

511. $V = a^3/3$ (рис. 98).

512. $V = 3\pi a^3/4$. Замечание. Для вычисления соответствующего интеграла удобно ввести полярные координаты (рис. 99). Уравнение полуокружности $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($y > 0$) в полярных координатах будет $\rho = 2a \cos \varphi$ ($0 < \varphi \leq \pi/2$).

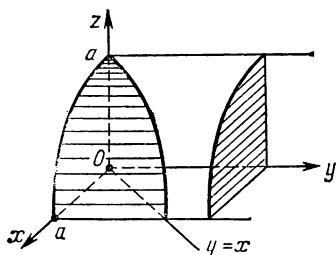


Рис. 98

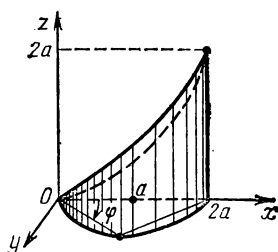


Рис. 99

$$\begin{aligned} 513. |S| &= \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} dx dy = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \end{aligned}$$

где D — треугольник

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq (a-x) \frac{b}{a} \end{array} \right\}.$$

514. $|S| = 8a^2 \arcsin(b/a)$. Указание. В силу симметрии искомая площадь равна восьми площадям, вырезанным на поверхности шара и находящимся в первом октанте.

$$\begin{aligned} |S| &= 8a \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 8a \int_0^a \arcsin \frac{b}{a} dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

где D — часть эллипса,

$$D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x > 0, y > 0 \right\}.$$

515. Пусть (x_c, y_c) — центр масс. В силу симметрии ясно, что $x_c = 0$. Площадь D половины эллипса, равная $\pi ab/2$,

численно равна массе фигуры, поэтому

$$y_c = \frac{2}{\pi ab} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi ab} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y \, dy = \frac{4b}{3\pi}.$$

516. а) $\frac{4}{3} \pi ab^2$. У к а з а н и е. Воспользоваться первой теоремой Гюльдина и задачей 515; б) $\frac{4}{3} \pi abc$. У к а з а н и е. $V = \iiint_{(V)} dx \, dy \, dz = 2c \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy$, где S — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; далее см. задачу 505.

517. $x_c = y_c = 0$, $z_c = \frac{2}{5}a$. У к а з а н и е. См. задачу 506. Вводя сферические координаты

$$x = r \cos \psi \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad (0 \leq r \leq a, 0 \leq \psi \leq \pi/2, 0 < \varphi \leq 2\pi),$$

$$z = r \sin \psi$$

получаем

$$z_c = \frac{2}{\pi a^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^4 \cos \psi \sin \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{4}{5} a \int_0^{\pi/2} \sin \psi \, d\psi = \frac{4}{5} a.$$

518. $x_c = 0$, $y_c = 8/5$. У к а з а н и е. Площадь фигуры $|S| = 32/3$;

$$y_c = \frac{3}{32} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{3}{32} \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} y \, dy.$$

519. $\frac{512}{15} \pi$. У к а з а н и е. См. задачу 518 и первую теорему Гюльдина.

521. а) $\pi/4$; б) ∞ ; в) $1/4$.

522. $F(y) = \ln(1+y)$. У к а з а н и е. Интеграл $F(y)$ сходится для любых $y > -1$.

$$F'(y) = \int_0^{\infty} e^{-x(y+1)} \, dx = \frac{1}{y+1}$$

равномерно сходится при любых $y \geq y_0 > -1$, поэтому дифференцирование под знаком интеграла по параметру y законно в указанном промежутке. Учитывая, что $F(0) = 0$, получаем $F(y) = \ln(y+1)$.

523. $F(y) = \sqrt{\pi y} \ (y > 0)$. У к а з а н и е. Как нам известно,

$$\int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$F'(y) = \int_0^{\infty} \exp(-yx^2) dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}}.$$

Последний интеграл равномерно сходится при $y \geq y_0 > 0$.

524. Интегрируя $\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}$ по параметру y в пределах от β до α , получаем

$$\int_{\beta}^{\alpha} \left[\int_0^1 x^y dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_{\beta}^{\alpha} x^y dy \right] dx = \int_0^1 \frac{x^y}{\ln x} \Big|_{\beta}^{\alpha} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\ln x} dx,$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1) \Big|_{\beta}^{\alpha} = \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1}.$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{\ln x} dx = \ln \frac{\alpha+1}{\beta+1}.$$

Отметим, что в области $0 < x < 1$, $-1 < \beta < y < \alpha$ исходный интеграл сходится равномерно.

525. Сходится. У к а з а н и е. Рассмотреть круг с выброшенной из него ε -окрестностью начала координат $U_{\varepsilon}(0)$ и перейти к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \iint_{S \setminus U_{\varepsilon}(0)} \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 r \ln r dr d\varphi = 2\pi \int_{\varepsilon}^1 r \ln r dr = \\ &= 2\pi \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \ (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

526. а) Сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса

$$|\cos xy| \leq 1, \quad \left| \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2};$$

б) сходится неравномерно. Замена $x\sqrt{y} = u$ показывает, что

$$\int_0^{\infty} \sqrt{y} \exp(-yx^2) dx = \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du,$$

т. е. он не зависит от параметра y . При $y = 0$ интеграл равен нулю. Итак, интеграл $F(y)$ есть разрывная функция при $0 \leq y < \infty$. Значит, интеграл сходится неравномерно. Его сходимость будет равномерной, если $0 < y_0 \leq y < \infty$.

ГЛАВА 8

527 $\sqrt{5} \ln 2$; уравнение AB : $y = \frac{1}{2}(x - 4)$. 529. 24.

530. $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$. Указание. Уравнение дуги эллипса $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$). Принимая x за параметр, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy \, ds &= \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} dx = \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2} \, dx. \end{aligned}$$

$$531. \int_{\Gamma} y \, ds = 2 \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \, dx = \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

532. Перейдем к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ или $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 2a \cos \varphi$ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$). Дифференциал дуги этой окружности будет

$$ds = \sqrt{f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{4a^2 \sin^2 \varphi + 4a^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 2a d\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x - y) \, ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a \cos^2 \varphi - 2a \cos \varphi \sin \varphi) 2a d\varphi = \\ &= 4a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = 2a^2 \pi. \end{aligned}$$

$$533. m = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2 \sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a > b).$$

$$535. 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}.$$

536. $x_c = \frac{4}{3}a$, $y_c = \frac{4}{3}a$. Указание. Длина дуги полуархимедовых циклоид

$$|\Gamma| = \int_0^\pi \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4a;$$

$$x_c = \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi x \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{4}{3}a,$$

$$y_c = \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi y \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{4}{3}a.$$

537. $2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}$. Указание.

$$I_{x=0, y=0}^{(2)} = \int_\Gamma (x^2 + y^2) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

539. 2. Указание. Воспользоваться свойством интеграла

$$\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

540. а) 512/15; б) 64/3; в) 0. 541. а) 1; б) 1; в) 1.

542. $\text{grad } u = \{2x + y, 4y + x, 6z - 6\}$. 543. а) $z^2 = xy$;

б) $x = y = z$. 544. $\text{rot } a = \{0, 0, 0\}$. 545. $\text{rot } a = \{1, 1, 0\}$.

546. а) Имеет, так как $\text{rot } a = 0$ и пространство R^3 — одно-связная область; б) имеет, $\text{rot } a = 0$; в) не имеет, $\text{rot } a = \{0, 1 - y, z\} \neq 0$ в R^3 .

548. а) Является; б) является; в) не является
($\text{rot}\{2 - y, x\} \neq 0$ или $\frac{\partial}{\partial y}(2 - y) \neq \frac{\partial x}{\partial x}$).

549. $x^2 + x^3y - y^3 = C$. 550. $3x^2y - y^3 = C$. 551. $xe^{-y} - y^2 = C$.

552. $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$. Указание. Потенциальную функцию $U(x, y)$ для вектора $a = \left\{ \frac{3x^2 + y^2}{y^2}, -\frac{2x^3 + 5y}{y^3} \right\}$ нахо-

дим как интеграл второго рода от вектора a . За путь интегрирования берем любую кривую, не пересекающую ось x . Например, можно взять ломаную (рис. 100), соединяющую точки $(1, 1)$, $(x, 1)$, (x, y) ($x > 0$, $y > 0$). Если точка (x, y) лежит в нижней полуплоскости, то за начальную точку берем любую точку ниже оси x , например точку $(0, -1)$.

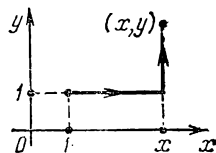


Рис. 100

553. $\text{rot}\{yz, xz, xy\} = 0$; $U(x, y, z) = xyz$. Общее решение $xyz = C$. Любую из переменных можно рассматривать как функцию от двух других независимых переменных.

$$554. xy + xz + yz = C. \quad 555. y(x^2 + z^2) = C.$$

$$556. \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy. \quad 557. \iint_{\Omega} e^{xy} (y - x) dx dy. \quad 558. 0.$$

$$559. -1/3.$$

560. $\pi R^4/2$. У к а з а н и е. Применить формулу Грина и перейти к полярным координатам.

$$561. m\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy) = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t + a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t) dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

562. $\operatorname{rot} a = 0$. Значит, на плоскости вектор a имеет потенциальную функцию. Работа вектора a есть криволинейный интеграл второго рода, который не зависит от пути интегрирования, следовательно, и работа не зависит от формы пути перемещения:

$$A = \int_{\Gamma} (a ds) = \int_{\Gamma} (2xy dx + x^2 dy),$$

где Γ — любая кривая, соединяющая точки $(1, 1)$ и $(2, 5)$. Вычисляя интеграл по конкретной кривой, мы и получаем величину работы. Здесь лучше найти потенциальную функцию, решая уравнение в полных дифференциалах: $2xy dx + x^2 dy = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решая, получаем $U(x, y) = x^2 y$. Теперь работа $A = U(2, 5) - U(1, 1) = 20 - 1 = 19$.

$$564. \frac{8}{3} \pi a^4.$$

$$565. m = \int_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

где Ω — часть круга $x^2 + y^2 \leq a^2$, находящаяся в первой четверти, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $m = \frac{1}{8} \pi^2 a^3$.

566. $\pi^2 [a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]$. У к а з а н и е. Элемент площади геликоида $dS = |r_u| \cdot |r_v| du dv = \sqrt{1 + u^2} du dv$.

568. $\pi a^4/2$. У к а з а н и е. Каждое слагаемое сводить к двойному интегралу по соответствующей проекции на координатные плоскости.

569. 0. У к а з а н и е. Вычисление провести для каждой из четырех граней отдельно. Например, на нижней грани S_1^* (ориентированный треугольник) внешняя нормаль $n(A) = -k$, $z = 0$,

Поэтому

$$\int_{S_1^*} (yz \, dy \, dz + xz \, dx \, dz + xy \, dx \, dy) = \\ = \int_{S_1^*} xy \, dx \, dy = - \int_{\Delta_1} xy \, dx \, dy = - \frac{a^4}{24},$$

где

$$\Delta_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a - x \end{array} \right\}.$$

Аналогично для других граней, лежащих в координатных плоскостях. Для грани S_4^* , лежащей в плоскости $x + y + z = a$, косинус угла внешней нормали с осью z определяется равенством

$$\cos(n, z) = 1/\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

поэтому

$$\int_{S_4^*} (yz \, dy \, dz + xz \, dx \, dz + xy \, dx \, dy) = \\ = \iint_{\Delta_3} yz \, dy \, dz + \iint_{\Delta_2} xz \, dx \, dz + \iint_{\Delta_1} xy \, dx \, dy = \frac{1}{8} a^4.$$

Окончательно,

$$\int_{S^*} \dots = \int_{S_1^*} \dots + \int_{S_2^*} \dots + \int_{S_3^*} \dots + \int_{S_4^*} \dots = -\frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{8} = 0.$$

$$570. \operatorname{div} a = 3(x^2 + y^2 + z^2). \quad 571. \operatorname{div} a = \frac{2}{r} f(r) + f'(r).$$

$$572. \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 6.$$

$$573. \text{ а) } \operatorname{rot} a = 0;$$

$$\text{ б) } \operatorname{rot}(f(r) \cdot c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)c_1 & f(r)c_2 & f(r)c_3 \end{vmatrix} = \frac{f'(r)}{r} c \times r.$$

$$574. \text{ а) } 0. \text{ Вектор } a = \{yz, zx, xy\}, \text{ поэтому } \operatorname{div} a = 0;$$

$$\text{ б) } 2 \iiint_Q (x + y + z) \, dx \, dy \, dz; \text{ здесь } a = \{x^2, y^2, z^2\};$$

$$\text{ в) } 2 \iiint_Q \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \text{ здесь } a = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\}, \quad r = \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{г) } \iiint_G \Delta u \, dx \, dy \, dz; \text{ здесь } a = \text{grad } u; \text{ div (grad } u) = \Delta u, \text{ где}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$575. \, 1/2; \text{ div } a = 3; \iiint_G 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz.$$

$$576. \, 0 \text{ (см. задачу 567)}. \, 577. \, 0.$$

$$579. \, -4\pi. \text{ У к а з а н и е. } a = \{y - z, z - x, x - y\}, \, n = \{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}.$$

$$\int_{\Gamma} ((y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz) = \int_S -\frac{4}{\sqrt{2}} \, dS,$$

где S — эллипс, лежащий в плоскости $x + z = 1$. Из рис. 33 видно, что его большая полуось равна $\sqrt{2}$, а малая полуось равна 1. Площадь этого эллипса равна $\pi\sqrt{2}$. При непосредственном вычислении следует записать уравнение эллипса в параметрическом виде, принимая за параметр z ($0 \leq z \leq 2$): $x = 1 - z$, $y = \pm \sqrt{2z - z^2}$. Далее, интеграл по Γ разбиваем на две части для $y > 0$ и $y < 0$. Отметим, что в первом случае z изменяется от 0 до 2, а во втором случае — от 2 до 0.

$$580. \, 0.$$

Г Л А В А 9

583. $\forall x$, если $\alpha > 1$; $0 < x < 2\pi$, если $0 < \alpha \leq 1$. У к а з а н и е. При $0 < \alpha \leq 1$ применить признак Дирихле. ($\alpha_k = k^{-\alpha}$, $\beta_k(x) = \cos kx$).

$$584. \text{ Сколько угодно. } 585. \, -\infty < x < \infty.$$

$$586. \, \text{а) } 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2};$$

$$\text{г) } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k};$$

$$\text{д) } -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n};$$

е) если a — целое, то $\sin ax$; если a — не целое, то

$$\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2};$$

ж) $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2} \right].$

588. а) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)x}{(2k+1)^2}.$

У к а з а н и е. При разложении в ряд по синусам мы продолжаем функцию $f(x)$ на $(-\pi, 0)$ нечетным образом и затем периодически на всю числовую ось (рис. 101). Далее см. задачу 586, а).

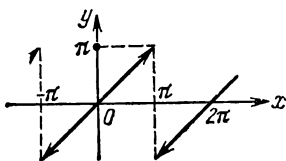


Рис. 101

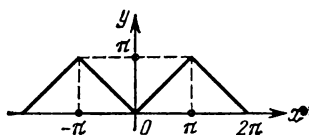


Рис. 102

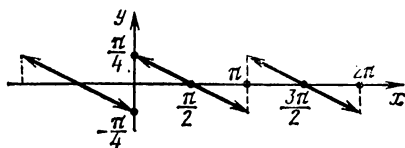


Рис. 103

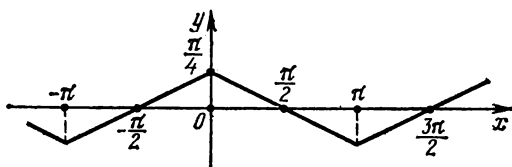


Рис. 104

При разложении в ряд по косинусам мы продолжаем функцию $f(x)$ на $(-\pi, 0)$ четным образом (рис. 102). Затем см. задачу 586, в). Отметим, что продолженная периодически функция в данном случае непрерывна на всей оси. Ряд Фурье сходится равномерно на всей оси;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$ (рис. 103); $\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$ (рис. 104).

$$589. \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} \cos\left(\frac{2n+1}{l} \pi x\right).$$

590. а) π ; б) $\pi/4$.

591. а) $\|f\| = 1/\sqrt{5}$; б) $\|f\| = \sqrt{\pi/2}$; в) $\|f\| = \sqrt{(e^2 - 1)/2}$;
г) $\|f\| = 1/\sqrt{3}$.

592. $0 \leq \alpha < 1/2$.

593. При любом $\alpha > 0$ сходится к нулю неравномерно ($\max_{0 \leq x \leq \pi} f_n(x) = 1$). При любом $\alpha > 0$ сходится к нулю в смысле среднего квадратического.

$$595. F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ts \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos ts \, dt = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin as}{s}.$$

596. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0 & x > a. \end{cases}$ У к а з а н и е. Воспользоваться повторным интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \, ds \int_0^{\infty} f(t) \cos ts \, dt,$$

верным для функции $f(x)$ кусочно непрерывной и абсолютно интегрируемой на $(0, \infty)$ (см. задачу 595).

$$597. F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1+s)a}{1+s} + \frac{\sin(s-1)a}{s-1} \right].$$

$$598. Q(s, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\sin rx}{x} \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{r}{s}.$$

У к а з а н и е. Дифференцируя по параметру r , получаем ([3], § 4.14, 4))

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos rx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s}{s^2 + r^2}.$$

Отсюда

$$Q = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{r}{s} + C, \quad Q(s, 0) = 0, \quad C = 0.$$

599. а) $\frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-as})$ (см. задачу 598 и [3], § 4.14, 6));
б) 63/697; в) 51/290.

ГЛАВА 10

$$600. \Lambda \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(\rho, \theta) - f(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1 - \rho) \rightarrow 0 \text{ при}$$

$\rho \rightarrow 1 - 0$. Указание. Ряд Фурье функции $f(\theta)$ имеет вид (см. задачу 586, в))

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\theta}{(2k+1)^2}.$$

Гармоническую функцию (в единичном круге), порожденную функцией $f(\theta)$, можно записать в виде ([3], § 5.3):

$$u(\rho, \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k+1} \frac{\cos(2k+1)\theta}{(2k+1)^2}.$$

Отсюда на основании равенства Парсеваля получаем

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(4 \sum_0^{\infty} (1 - \rho^{2k+1})^2 \frac{1}{(2k+1)^4} \right)^{1/2} = \\ &= \left(4 \sum_0^{\infty} (1 - \rho)^2 (1 + \rho + \dots + \rho^{2k})^2 \frac{1}{(2k+1)^4} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq (1 - \rho) \left(4 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)^{1/2} = (1 - \rho) \left(4 \cdot \frac{\pi^2}{8} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1 - \rho) \end{aligned}$$

(см. задачу 587).

Замечание. Гармоническая функция $u(\rho, \theta)$ стремится к $f(\theta)$ вдоль каждого радиуса (рис. 105) при $\rho \rightarrow 1 - 0$, также

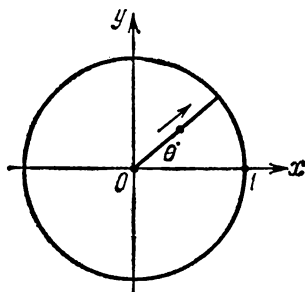


Рис. 105

в обычном смысле, но скорость сходимости будет немного хуже, чем $(1 - \rho)$.

В самом деле, при фиксированном ρ ($1/2 < \rho < 1$) подберем натуральное число N так, чтобы $1/(N+1) < 1 - \rho \leq 1/N$,

тогда (см. задачу 376)

$$\begin{aligned}
 |u(\rho, \theta) - f(\theta)| &\leq \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} (1 - \rho^{2k+1}) \frac{|\cos(2k+1)\theta|}{(2k+1)^2} \leq \\
 &\leq c \sum_0^N \frac{1 - \rho^{2k+1}}{(2k+1)^2} + c \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \\
 &\leq c(1-\rho) \sum_0^N \frac{1}{2k+1} + \frac{c}{N+1} \leq c(1-\rho) \ln N + \frac{c}{N+1} \leq \\
 &\leq c(1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + c(1-\rho) \leq c(1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 1-0,
 \end{aligned}$$

где постоянные c в различных неравенствах, вообще говоря, различны.

601. Разложим функцию $f(x)$ в ряд по синусам (см. задачу 588, б))

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}.$$

Решение поставленной задачи имеет вид (см. [3], § 5.5, (11))

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n} \exp(-4n^2 t) \sin 2nx.$$

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\Lambda = \left[\sum_1^{\infty} \frac{\pi}{4n^2} (1 - \exp(-4n^2 t))^2 \right]^{1/2}.$$

Зафиксируем t ($0 < t \leq 1$) и подберем натуральное число N так, чтобы $1/(N+1)^2 \leq t < 1/N^2$. Тогда

$$\Lambda \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{\pi}{4n^2} (1 - \exp(-4n^2 t))^2 + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \right)^{1/2}.$$

Применяя теорему Лагранжа и используя оценки задачи 376, получаем

$$\begin{aligned}
 \Lambda &\leq \left(\sum_1^N \frac{\pi}{4n^2} (4n^2 t \exp(-4n^2 \xi))^2 + \frac{c}{N+1} \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq c \left(\sum_1^N t^2 n^2 + \frac{1}{N+1} \right)^{1/2} \leq c \left(t^2 N^3 + \frac{1}{N+1} \right)^{1/2} \leq ct^{1/4} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

$$602. u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3} \right] \times$$

$\times \sin(2n+1)x$ (см. [3], § 5.5, (8), (11)).

603. Используя формулу Даламбера, имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+(x-t)^2} + \frac{1}{1+(x+t)^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} [\operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg}(x-t)].$$

$$605. u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t) dt}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = \\ = \frac{y}{\pi} \int_{-l-x}^{l-x} \frac{d\xi}{\xi^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{l-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{l+x}{y} \right].$$

Если $u = 1/2$, то $\operatorname{arctg}((l-x)/y) + \operatorname{arctg}((l+x)/y) = \pi/2$, т. е. $(l^2 - x^2)/y^2 = 1$ — полуокружность ($y > 0$) радиусом l с центром в начале координат.

$$606. u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right).$$

ГЛАВА 11

608. а) $|z| = 5$; б) $|z| = 1$; в) $|z| = 4$.

609. а) $z = 2[\cos(-2\pi/3) + i \sin(-2\pi/3)]$;

б) $2[\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)]$.

610. а) $2e^{i\pi}$; б) $1 \cdot e^{i\pi/2}$; в) $2e^{-2\pi i/3}$; г) $1 \cdot \exp\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) i$.

612. а) 1728; б) 1.

613. а) $\sqrt[8]{2} \exp\left(\frac{-\pi + 8k\pi}{16} i\right)$ ($k = 0, 1, 2, 3$); б) $\pm 1, \pm i$.

614. $\bar{w} = x - iy^2$, $\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{x - iy^2}{x^2 + y^4}$.

616. а) Окружность радиусом r с центром в точке z_0 ;

б) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b^2 = a^2 - c^2$. Указание.

$|z - c|$ — расстояние от точки $(c, 0)$ до $z = (x, y)$. По определению эллипс это геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных есть величина постоянная;

в) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{x}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{-2y}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{4}$.

Это эллипсы: $(x-1)^2 + 4y^2 = 1$, $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$;

г) $xy = 1$ — гипербола; д) $y = x^2$ — парабола.

617. а) -1 ; б) $-(5 + 12i)/13$.

619. а) Окружность $|w| = 2$ или $u^2 + v^2 = 4$. При $z = \rho e^{i\varphi}$ $w = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$, и, следовательно, окружность $|w| = 2$ проходится по часовой стрелке, если z пробегает окружность $|z| = 1/2$ против часовой стрелки;

б) луч, идущий по биссектрисе четвертой четверти из ∞ в 0 ;

в) ось Ov за исключением точки $O = (0, 0)$. Если точка z движется по оси y от $-\infty$ до $+\infty$, то точка w движется сначала от 0 до $+\infty$, затем от $-\infty$ до 0 .

620. $\lim_{z \rightarrow i} \bar{z} = -i$.

621. Не существует, так как $\operatorname{Re} w = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

622. Будет.

623. а) $w' = 2z$; б) производная не существует ни в одной плоскости z ; в) не имеет; г) имеет производную, равную нулю только в точке 0 .

624. $f'(z) = \cos z$, $|f'(z)|_{z=0} = |\cos 0| = 1$, $|\arg f'(z)|_{z=0} = |\arg \cos 0| = 0$.

625. а) $z = 0$; $w' = 3z^2$; б) в точках z , не являющихся нулями функции $\sin z$, т.е. $z \neq (k\pi, 0)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); в) $z \neq -1$.

626. а) Является; б) не является; в) является; г) является.

627. а) $f(z) = z^2 + 2z + Ci$, где $\operatorname{Im} C = 0$; б) $f(z) = z^2(2 - i)/2 + Ci$, где $\operatorname{Im} C = 0$; в) $f(z) = u + iv = (C - z \ln z)i$, где $v = r\varphi \sin \varphi - r \ln r \cos \varphi + C$, $\operatorname{Im} C = 0$ и $\ln z = \ln r + i\varphi$.

629. $u = C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_1$.

630. $\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$, где z_1, z_2, z_3 и

w_1, w_2, w_3 — любые тройки действительных чисел, идущих в возрастающем порядке.

632. $w = z^4$. 633. а) $w = e^z$; б) $w = e^{2z}$. 635. $w = (1 + i)(1 - z)$.

636. $w = \frac{2z - 5}{10 - z}$.

637. Подынтегральную функцию можно записать в виде $1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$. а) $2(i - 1)$; б) $-2 + \frac{4}{3}i$; в) -2 .

638. 2.

639. $1 + \operatorname{ch} \pi - \pi(1 + i) \operatorname{sh} \pi$. Указание. Функция $w = z \operatorname{ch} z$ аналитична на всей плоскости, поэтому можно интегрировать по любому пути, соединяющему точки 0 и $\pi(1 + i)$. Воспользоваться формулами $\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$.

640. а) $7 + 19i$; б) $-i/e$. 641. а) $I = 0$, так как подынтегральная функция аналитична в круге $|z - 2| \leq 1$; б) $I =$

$= -\frac{\pi}{3}i$; в) $I = \frac{\pi i}{3} e^{36}$.

642. а) $2\pi i$; б) $2\pi i (-e^{-1})$. Указание. $\int_C \dots = \int_{C_1} \dots +$
 $+ \int_{C_2} \dots$ где C_1 и C_2 — контуры, описанные вокруг особых точек
 $z = -1$ и $z = 0$, целиком лежащие внутри контура C и не пересекающиеся между собой.

644. $-\frac{\pi i}{2e}$. 645. ∞ . 646. 0 . 647. ∞ . 648. ∞ . 649. 1 . 650. 1 .
 651. 1 .

652. $\sum_0^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$ ($|z| < 1$). Указание. Продифференцировать разложение

$$\frac{1}{1+z} = \sum_0^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1).$$

653. $\frac{1}{3} \sum_0^{\infty} [(-1)^{n+1} - 2^{-n-1}] z^n$ ($|z| < 1$). Указание.

Сначала разложить функцию на простейшие дроби.

655. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} (z-3) - \frac{2^2}{3^3} (z-3)^2 + \dots$ ($|z-3| < \frac{3}{2}$).

656. а) $|z| > 2$; б) $|z+1| > 1/4$.

657. а) $-\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_0^{\infty} z^n = \sum_0^{\infty} (1 - 2^{-n-1}) z^n$;

б) $-\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^n} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^n}$; в) $\sum_0^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1}$.

658. $\frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{5}{64}(z-1)^2 - \dots$

$$\dots = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{2^{n+4}} (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 2).$$

Указание. Можно воспользоваться формулой для коэффициентов ряда Лорана

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{dz}{(z-1)^{n+1}},$$

где γ — любая окружность с центром в точке $z_0 = 1$, лежащая в кольце $0 < |z-1| < 2$. Функция $f(z) = 1/(z^2-1)^2$ аналитична в этом кольце.

Можно также использовать метод разложения $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 = \\ = \frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{4(z+1)} + \frac{4}{4(z+1)^2}.$$

При разложении функций $\frac{1}{z+1}$ и $\frac{1}{(z+1)^2}$ по степеням $(z-1)$ можно использовать прием задачи 654.

$$659. \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad (|z| > 0).$$

$$660. z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots \quad (|z| > 0).$$

661. а) Устранимая особая точка; б) полюс четвертого порядка; в) существенно особая точка.

662. а) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = \infty$ — существенно особая точка; б) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка; в) $z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка; г) $z_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$ — простые полюсы ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Указание. Числа z_n являются нулями функции $w = \operatorname{ch} z$. Функцию $\operatorname{th} z$ в окрестности z_n можно представить в виде

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{ch}(z - z_n)}{(z - z_n) \frac{\operatorname{sh}(z - z_n)}{z - z_n}}.$$

$z = \infty$ — существенно особая точка, так как предел $\operatorname{th} z$ при $z \rightarrow \infty$ не существует: при $z = x$ $\operatorname{th} x \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$; при $z = iy$ $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} iy}{\operatorname{ch} iy} = \frac{i \sin y}{\cos y} = i \operatorname{tg} y$ и при $y \rightarrow \infty$ предел не существует.

$$665. \operatorname{Выч}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{Выч}_{z=\infty} f(z) = 0;$$

$$б) \operatorname{Выч}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!}, \operatorname{Выч}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{3!};$$

$$в) \operatorname{Выч}_{z=-1} f(z) = -\frac{17}{54e}, \operatorname{Выч}_{z=2} f(z) = \frac{e^2}{27}, \operatorname{Выч}_{z=\infty} f(z) = \frac{17}{54e} - \frac{e^2}{27};$$

$$г) \operatorname{Выч}_{z=2} f(z) = 1/2, \operatorname{Выч}_{z=\infty} f(z) = -1/2. \text{ Здесь мы воспользовались основной теоремой о вычетах. Разложение функции } (z-2)\operatorname{exr}(1/(z-2)) \text{ по степеням } z \text{ — довольно громоздкая задача.}$$

$$667. а) -\frac{3}{2}\pi i; б) \pi i; в) -\pi i/\sqrt{2}; г) \pi i.$$

$$669. а) \pi/\sqrt{2}; б) \pi/ab(a+b); в) 2\pi/3;$$

$$г) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \pi = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

670. а) $\pi e^{-a/2}$; б) 0. Указание. Рассмотреть функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} e^{iz}.$$

671. $I = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}).$

ГЛАВА 12

673. а) $\frac{1}{p-2}$; б) $\frac{3}{p^2+9}$. 674. Нет, так как $\varphi(p)$ — периодическая. 675. а) $\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$; б) $2 \cdot \frac{3}{p^2+9} + \frac{1}{p+2}$.

676. Не является, так как порядок роста функции $\exp(t^2)$ выше любой показательной функции $\exp(s_0 t)$ (при любом постоянном s_0) при $t \rightarrow \infty$.

677. $\frac{p(p^2 + m^2 + n^2)}{(p^2 + m^2 + n^2)^2 - 4m^2n^2}.$

678. а) $F(p) = \frac{p^2 + 18}{p(p^2 + 36)}$; б) $F(p) = \frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$.

Указание. $f(t) = \cos^4 t$, $f(0) = 1$, $F(p) \doteq f(t)$;

$f'(t) = -4 \cos^3 t \sin t = -2 \cos^2 t \sin 2t =$

$$= -(1 + \cos 2t) \sin 2t = -\sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t;$$

$f'(t) \doteq -\frac{2}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{4}{p^2 + 16}.$

679. а) $\frac{2p^3 - 6p}{(p^2 + 1)^3} \left(\left(\frac{p}{p^2 + 1} \right)'' \doteq t^2 \cos t \right)$; б) $\frac{6p}{(p^2 - 9)^2}.$

680. а) $\frac{6}{(p^2 - 9)^2}$; б) $\frac{2p^2 - 6}{(p^2 + 1)^3}$ (см. задачу 679).

681. а) $\ln \frac{p}{p-1}$; б) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}$; в) $\frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}.$

682. а) $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, $e^{3t} \sin t \doteq \frac{1}{(p-3)^2 + 1}$;

б) $\frac{2(p-1)^2 - 6(p-1)}{[(p-1)^2 + 1]^3} = \frac{2(p-1)(p-4)}{(p^2 - 2p + 2)^3}$ (см. задачу 679).

682. а) Для функции $f(t) = \sin t \cdot \sigma_0(t)$ имеем $f(t) \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, поэтому по теореме запаздывания $\sin(t-b) \sigma_0(t-b) \doteq e^{-pb} \frac{1}{p^2 + 1}$; б) $\frac{e^{-3t}}{p-1}.$

684. а) $\frac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p})}$; б) $\frac{1}{p^2 + 1} \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 - e^{-\pi p}}.$

Указание.

$$\begin{aligned}
 L[|\sin t|; p] &= \sum_0^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-pt} |\sin t| dt = \\
 &= \sum_0^{\infty} \left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-pt} \sin t dt - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} e^{-pt} \sin t dt \right] = \\
 &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{p^2 + 1} [e^{-(2k+1)p\pi} + e^{-2kp\pi} + e^{-2(k+1)p\pi} + e^{-p(2k+1)\pi}] = \\
 &= \frac{1}{p^2 + 1} \left[\sum_0^{\infty} e^{-pk\pi} + \sum_1^{\infty} e^{-pk\pi} \right].
 \end{aligned}$$

685. а) $\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$; б) $\frac{2}{p^3} \cdot \frac{p}{p^2-1} = \frac{2}{p^2(p^2-1)}$.

686. $f(t) = \frac{1}{2!} \frac{t}{1!} - \frac{1}{4!} \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{6!} \frac{t^5}{5!} - \dots$

687. $f(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$. **Указание.**

Разложить рациональную функцию $F(p)$ на простейшие дроби и воспользоваться таблицей изображений.

688. а) $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$; б) $f(t) = t - \sin t$.

690. а) $e^{-2t} \sin t$; б) $\frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t$.

691. а) $x(t) = (t+1)e^{-t}$; б) $x(t) = (t-1)\sin t$.

в) $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5}e^{-t} \sin 2t$.

692. а) $x(t) = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$. **Указание.** Рассмотрим сначала задачу $x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$. Ее решение $x_1(t) = t^2/2$. По формуле Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2} (t-\tau) d\tau;$$

б) $y = (\sin x - x \cos x)/2$; в) $y = e^{2x} + 4 \cos x - 2 \sin x - 5$.

694. а) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$;

б) $x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t$,

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t;$$

$$\text{в) } y(x) = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} - e^x, \quad z(x) = \frac{3}{4} e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-2x} - \frac{2}{3} e^x.$$

695. а) $\frac{\pi}{2a} e^{-ax}$. Указание.

$$\begin{aligned} L[I(x); p] &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-px} \cos xt \, dx \right) \frac{dt}{a^2 + t^2} = \\ &= \int_0^\infty \frac{p}{p^2 + t^2} \cdot \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{p}{a^2 - p^2} \cdot \int_0^\infty \left[\frac{1}{p^2 + t^2} - \frac{1}{a^2 + t^2} \right] dt = \\ &= \frac{p}{a^2 - p^2} \left[\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{t}{p} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right] \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{p}{a^2 - p^2} \cdot \frac{a - p}{ap} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{a + p}. \end{aligned}$$

Отсюда $I(x) = \frac{\pi}{2a} \exp(-ax)$.

$$\begin{aligned} \text{б) } L[I(x); p] &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-px} \sin xt \, dx \right) \frac{\cos t}{t} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{t}{p^2 + t^2} \cdot \frac{\cos t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{p^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2p} e^{-p}. \end{aligned}$$

Согласно таблице изображений $I(x) = \frac{\pi}{2} \sigma_0(x-1)$, $x \neq 1$.

Если

$$x = 1, \quad \text{то} \quad I(1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin 2t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{4}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГЛАВА 1

700. Если $0 < a < 1/2$, то решением неравенства являются любые действительные числа x . Если $a \geq 1/2$, то решением неравенства являются числа $x \in (-1/2, 1/2)$.

701. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset; \quad \mathbb{Q} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}.$$

702. Указание. $n \leq 2^{n/2}$ при $n \geq 4$. Поэтому $n 2^{-n} \leq 2^{-n/2} < e$ при $n > 2 \log_2 \frac{1}{e}$.

704. $1/4$.

705. а) 1; б) $1/2$. Указание. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

707. Указание. $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (\alpha \geq 2)$.

709. Если $a \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1$. Если $a = 0$, то предел последовательности $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$ может не существовать, если же он существует, то он принадлежит $[-1, 1]$. Рассмотреть примеры: $x_n = 1/n$; $x_n = (-1)^n/n$;
 $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$; $x_n = q^n \quad (|q| < 1)$.

710. Предел может существовать, а может и не существовать:

$$x_n = 1/n, \quad y_n = (-1)^n, \quad x_n = 1/n, \quad y_n = (-1)^n n.$$

713. а) $\left\{ a + 1, b + 1, a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, a + \frac{1}{3}, b + \frac{1}{3}, \dots \right\}$;

б) $\{-1^2, 2, -2^2, 3, -3^2, \dots, -n^2, n + 1, \dots\}$;

в) $\left\{ 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots, n, \frac{1}{n}, \dots \right\}$;

г) множество всех рациональных чисел, мы знаем, счетно. Далее, любое действительное число c является пределом последовательности рациональных чисел ($c = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{(n)}$). Таким образом, искомая последовательность состоит из всех рациональных чисел $\{r_n\}$.

714. а) Обозначим $M_1 = \overline{\lim} x_n$, $M_2 = \overline{\lim} y_n$, $M = \overline{\lim} (x_n + y_n)$. Пусть подпоследовательность $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ сходится и такова, что подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$ также сходятся и

$$M = \lim (x_{n_k} + y_{n_k}).$$

Тогда

$$M = \lim x_{n_k} + \lim y_{n_k} \leq M_1 + M_2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$ расходящиеся. Выберем сходящуюся подпоследовательность из $\{x_{n_k}\}$ и обозначим ее через $\{x_{n_{kj}}\}$. Тогда, так как у нас последовательность $\{x_{n_{kj}} + y_{n_{kj}}\}$ сходится (к числу M), то подпоследовательность $\{y_{n_{kj}}\}$ также будет сходящейся. Поэтому

$$\begin{aligned} M = \lim (x_{n_k} + y_{n_k}) &= \lim (x_{n_{kj}} + y_{n_{kj}}) = \\ &= \lim x_{n_{kj}} + \lim y_{n_{kj}} \leq M_1 + M_2. \end{aligned}$$

В качестве примера можно рассмотреть последовательности $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$. В этом случае $M_1 = M_2 = 1$, $M = 0$.
 б) Доказательство проводится так же, как в случае а).

$$715. E = (-\infty, \infty), E_1 = [0, 1].$$

$$716. E = [-2, 2], E_1 = [0, 2].$$

$$717. E = \left\{ |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

$$718. E = [1, 3], E_1 = [-\pi/2, \pi/2].$$

$$719. E = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right], \\ E_1 = (-\infty, \lg 3].$$

$$720. E = \{p/(2q+1), p, q - \text{целые числа}\}, E_1 = \{\pm 1\}.$$

$$721. E_1 = [0, 9]. 722. E_1 = [0, 6]. 723. E_1 = (1, 6].$$

$$724. E_1 = (0, 1/2].$$

$$725. \text{ а) } f(1) = 0, f(2) = -\frac{1}{3}, f(x+1) = -\frac{x}{x+2};$$

$$\text{ б) } f(1) = 0, f(2) = -2, f(x+1) = -x - x^2;$$

$$\text{ в) } f(1) = 0, f(2) = 1, f(x+1) = \sin \frac{\pi}{x+1}.$$

$$726. \text{ а) } f(x) = x^2 - 5x + 6; \text{ б) } f(x) = \frac{4x^2}{(1-x)^2}.$$

739. Равномерно непрерывна. 740. Не является равномерно непрерывной. 741. Равномерно непрерывна. 742. Не является равномерно непрерывной. 743. Равномерно непрерывна.

$$744. y' = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2], \\ x \neq -1.$$

$$745. y' = -3(\cos x + \sin 3x).$$

$$746. y' = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi, k - \text{целое}).$$

$$747. y' = \frac{2ax}{x^4 + a^2} \quad (a \neq 0).$$

$$748. y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} \quad (x > 0, x \neq 1).$$

$$749. y' = \operatorname{th}^3 x. \quad 750. y' = 1/\operatorname{ch} 2x. \quad 751. y' = 3x^2 + 15.$$

$$752. y' = 6x^2. \quad 753. y' = 12x^5.$$

$$755. \text{ а) } n > 0; \text{ б) } n > 1; \text{ в) } n > 2.$$

756. Вообще нельзя ($\sin x < \cos x$ при $0 \leq x < \pi/4$, но $(\sin x)' > \cos x$).

$$757. b^2 - 4ac = 0. \quad 758. a = \frac{1}{2e}.$$

$$759. y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t \quad (0 < |t| < \pi).$$

$$760. y'_x = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t \quad (|t| > 0). \quad 761. 1. \quad 762. 1/3. \quad 763. 1/2.$$

$$764. e^{-1/6}. \quad 765. e^{-1/3}. \quad 766. y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

$$767. y''' = \frac{-4 \cos^2 x + 6}{\cos^4 x}. \quad 768. y'' = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

$$769. y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}. \quad 770. y''' = 24x \frac{1+x^2}{(1-x^2)^4}.$$

$$771. y^{(4)} = -4e^x \cos x. \quad 772. d^5 y = 120 dx^5.$$

$$773. d^6 y = 8 \sin x \cdot \operatorname{sh} x dx^6.$$

$$774. d^3 y = 2 [3 du \cdot d^2 u + u d^3 u].$$

$$775. d^3 y = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} du d^2 u + \frac{1}{u} d^3 u.$$

$$776. d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x.$$

$$777. y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad - bc)}{(cx + d)^{n+1}} \quad (ad - bc \neq 0).$$

$$778. y^{(n)} = n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]. \quad 779. f^{(n)}(a) = n! \varphi(a).$$

782. Если функции имеют одинаковые производные, то они отличаются друг от друга на постоянную величину:

$$\forall x \quad f(x) - g(x) = c.$$

Значение постоянной c можно найти, придавая x значения, для которых функции $f(x)$ и $g(x)$ известны.

Например, пусть $x < 1$. Полагая $x = 0$, получим

$$f(0) - g(0) = c, \quad \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = c, \quad \frac{\pi}{4} - 0 = c, \quad c = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, для $x < 1$

$$\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Для установления связи между функциями $f(x)$ и $g(x)$ при $x > 1$ перейдем в равенстве $f(x) - g(x) = c$ к пределу при $x \rightarrow +\infty$:

$$\operatorname{arctg} (-1) - \operatorname{arctg} (+\infty) = c, \quad -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = c, \quad c = -\frac{3\pi}{4}.$$

Итак, для $x > 1$

$$\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$784. \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad 785. \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

786. $|x| < 0,39$. Указание. Необходимо оценить остаточный член формулы Тейлора для функции $y = \cos x$ при $n = 4$.

$$787. a) 1/2; b) 19/90.$$

788. При $|x| < 1$ функция возрастает; при $|x| > 1$ функция убывает.

789. При $|x| < 1/b$ функция возрастает; при $|x| > 1/b$ функция убывает.

790. При $|x| < a/b$ функция возрастает; при $|x| > a/b$ функция убывает.

791. Если $a > 0$ и $b^2 \leq 8a$, то функция всюду возрастает. Если $a = 0$, то при $x > -1/b$ функция возрастает, а при $x < -1/b$ — убывает. Если $a > 0$ и $b^2 > 8a$, то при

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 8a}}{4a} < x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8a}}{4a}$$

функция убывает, а при

$$x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8a}}{4a} \quad \text{и} \quad x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8a}}{4a}$$

возрастает. Если $a < 0$, то $b^2 > 8a$, и в этом случае при

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8a}}{4a} < x < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8a}}{4a}$$

функция возрастает, а при

$$x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8a}}{4a} \quad \text{и} \quad x > \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8a}}{4a}$$

убывает.

792. $x = 0$ — точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ кривая направлена выпуклостью вниз, а на $(0, \infty)$ — вверх.

793. $x = -2/b$ — точка перегиба; на $(-\infty, -2/b)$ кривая направлена выпуклостью вверх, а на $(-2/b, \infty)$ — вниз.

794. При $x = 1/(ab)$ — минимум, $y(1/(ab)) = 2a/b$; при $x = -1/(ab)$ — максимум, $y(-1/(ab)) = -2a/b$.

795. При $x = 1/b$ — максимум, $y(1/b) = 1/(2b)$; при $x = -1/b$ — минимум, $y(-1/b) = -1/(2b)$.

796. При $x = a$, $x = \frac{3a + 2b}{5}$ — минимум, $y(a) = 0$,
 $y\left(\frac{3a + 2b}{5}\right) = \frac{108}{3125}(a - b)^5$.

797. $y(\pm 2) = 0$; при $x = 0$ — максимум, $y(0) = 4$; $x = \pm 1/\sqrt{3}$ — точки перегиба, $y(\pm 1/\sqrt{3}) = 11/4$; $y = -1$ — горизонтальная асимптота; на $(-\infty, 0)$ функция возрастает, а на $(0, \infty)$ — убывает; на $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ график выпуклый кверху, а на $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$ — выпуклый книзу.

798. Если $0 < a < 1/4$, то $x = \frac{a}{1-a}$ — точка перегиба,
 $y\left(\frac{a}{1-a}\right) = \frac{2a^2}{1-2a} e^{\frac{1-2a}{a}}$; при $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}$ — максимум, а при $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$ — минимум; на $(-\infty, 0)$ функция возрастает и выпукла кверху; на $\left(0, \frac{a}{1-2a}\right)$ кривая выпукла

кверху, а на $\left(\frac{a}{1-2a}, \infty\right)$ — выпукла книзу; на $(0, x_1)$ функция возрастает, на (x_1, x_2) — убывает, на (x_2, ∞) — возрастает; прямая $y = x + 1 - a$ является наклонной асимптотой; если $a \geq 1/4$, то функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; $x = \frac{a}{1-2a}$ — точка перегиба; на $(0, \infty)$, $\left(0, \frac{a}{1-2a}\right)$ кривая выпукла кверху, а на $\left(\frac{a}{1-2a}, \infty\right)$ — выпукла книзу, $x = 0$, $y = x + 1 - a$ — асимптоты; $y(0+0) = -\infty$, $y(0-0) = 0$.

ГЛАВА 2

$$799. \frac{1}{a} \ln |ax + b|. \quad 800. \frac{2}{a} \sqrt{ax + b}.$$

$$801. \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} x. \quad 802. \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right|.$$

$$803. \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b} x. \quad 804. \frac{1}{a} \ln |ax + \sqrt{a^2 b^2 - b^2}|.$$

$$805. \frac{1}{a} \operatorname{Arsh} \frac{a}{b} x. \quad 806. -e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

$$807. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}. \quad \text{Указание. Разделить числитель}$$

и знаменатель на x^2 и сделать замену

$$u = x - \frac{1}{x}, \quad \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

$$808. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} - 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \quad (\text{см. задачу 807}).$$

$$810. \frac{2}{15a^2} (ax + b)^{3/2} (3ax - 2b). \quad \text{Указание. } x \equiv \\ \equiv \frac{1}{a} (ax + b) - \frac{b}{a}.$$

$$811. \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}. \quad 812. \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

$$813. \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x.$$

$$814. \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x.$$

$$816. x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x.$$

$$817. x - \frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right|.$$

$$818. x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$819. e^{\sqrt[3]{x}} [3x^{2/3} - 6 \sqrt[3]{x} + 6]. \quad 820. \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2}.$$

$$821. \frac{1}{4}(1-2x)\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}.$$

$$822. -\frac{\operatorname{tg} x}{4(2+\operatorname{tg}^2 x)} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$823. 16/3. \quad 824. 0. \quad 825. \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \quad 826. -1 + \sin x. \quad 828. 1/2.$$

$$829. \pi/4. \quad 830. \frac{1}{1+p} \quad (p \neq -1). \quad 831. \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

$$832. 1/2. \quad 833. \pi/4. \quad 834. \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}. \quad 835. \frac{1}{1+a^2}.$$

836. Сходится при $2\beta + \alpha > 1$. 837. Сходится при $\alpha > -2$, $\beta > 1 + \alpha$.

ГЛАВА 3

$$838. (a-c)(ab+bc-ab^2c-1). \quad 839. a(z-x)(z-y)(y-x).$$

$$840. ab. \quad 841. abcd + bcd + acd + abd + abc.$$

842. $2(x^3+y^3)$. 844. $x=0$, $x = \frac{2-3a}{1+a}$, $a \neq -1$; если $a=-1$, то $x=0$ — единственный корень уравнения.

845. $x=a$, $y=1$, $z=-1$. 846. $x=1$, $y=-1$, $z=-1$, $t=1$.

$$847. x = 5 - \frac{2}{11}z, \quad y = 1 + \frac{5}{11}z, \quad z - \text{любое.}$$

848. $x=1$, $y=-1$, $z=2$. 849. Ранг $A=4$, если $be-cd \neq 0$; ранг $A=2$, если $be-cd=0$.

$$850. AB = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$851. A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 23 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & -20 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$852. X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 42 & 9 & 20 \\ 7 & -3 & 5 \\ -35 & 1 & -18 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 4

$$853. x^2 + y^2 > 1. \quad 854. 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi, \quad k - \text{целое.}$$

855. $y^2 > -x$ (часть плоскости, находящаяся вне параболы $y^2 = -x$).

$$856. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1 \text{ (внешность трехосного эллипсоида).}$$

857. $x^2 + y^2 = c$ — окружности радиусом \sqrt{c} ($c > 0$): при $c = 0$ — начало координат; при $c < 0$ — мнимые окружности, что означает, что плоскость $z = c$ не пересекает графика функции (ее поверхности).

858. $x^2 + 2y^2 = 1/c$ — эллипсы ($c > 0$) с полуосями $a = \sqrt{1/c}$, $b = \sqrt{1/(2c)}$.

859. $y = c + 2x^2$ — параболы ($\forall c$) с осью симметрии Oy и вершинами в точках $(0, c)$. Ветви параболы направлены вверх.

860. $\rho = \sqrt{(4-1)^2 + (3-7)^2} = 5$. 861. $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = M^0 = (1, e)$.

862. Если $x_0 = 0$, то в точке $(0, 0)$ существует обычный предел (по всей плоскости, из которой выброшена точка $(0, 0)$) функции, равный единице:

$$|f(x, y) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon, \text{ для } y > 0 \text{ и } \forall \varepsilon > 0;$$

$$|f(x, y) - 1| = |1 + x + y - 1| =$$

$$= |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

$\forall (x, y), y \leq 0$, при $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon/2$.

Если $x_0 \neq 0$, то предел функции $f(x, y)$ не существует при рассмотрении всех точек из окрестности точки $(x_0, 0)$. Однако очевидно, что $f(x, y)$ имеет предел по множеству $E = \{(x, y), y > 0\}$ в каждой точке $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, и этот предел равен 1.

Если рассматривать множество $E_1 = \{(x, y), y \leq 0\}$, то функция $f(x, y)$ имеет предел по E_1 в точках $(x_0, 0)$, равный $1 + x_0$. Более того, $f(x, y)$ непрерывна в точках $(x_0, 0)$ по множеству E_1 .

863. $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$.

864. $E = R_2 \setminus \{x = 0\} + \{y = 0\}$, т.е. множество E есть плоскость, из которой выброшены оси координат. Соответствующий предел равен единице.

865. Будет равномерно непрерывной.

$$\begin{aligned} & (|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{y_1^2 + y_2^2}|) \leq \\ & \leq \frac{|x_1 - y_1| \cdot (|x_1| + |y_1|) + |x_2 - y_2| \cdot (|x_2| + |y_2|)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \\ & \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq 2\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} = \\ & = 2\rho(x, y), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2). \end{aligned}$$

$$866. \quad u'_x = 3x^2 - 6xy^2, \quad u'_y = 3y^2 - 6x^2y;$$

$$u''_{x^2} = 6x - 6y^2, \quad u''_{y^2} = 6y - 6x^2, \quad u''_{xy} = -12xy = u''_{yx}.$$

$$867. \quad u'_x = \sin(x + y^2) + x \cos(x + y^2), \quad u'_y = 2xy \cos(x + y^2),$$

$$u''_{x^2} = 2 \cos(x + y^2) - x \sin(x + y^2),$$

$$u''_{y^2} = 2x \cos(x + y^2) - 4xy^2 \sin(x + y^2),$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = 2y \cos(x + y^2) - 2xy \sin(x + y^2).$$

869. Не существует. 870. Рассмотреть функцию $F(t) = f(tx, ty, tz)$ и показать, что она постоянна.

871. $du = y dx + (x + 2y) dy$, $d^2u = 2dx dy + 2dy^2$.

872. $du = (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$,
 $d^2u = 2(dx dy + dx dz + dy dz)$.

873. $d^2u = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [(y dx - x dy)^2 + (z dy - y dz)^2 + (z dx - x dz)^2]$

874. $3x + 4y + 12z = 169$ — уравнение касательной плоскости;
 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$ — уравнение нормали.

875. $axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1$ — касательная плоскость
 $\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}$ — нормаль.

876. Все сомножители равны между собой.

877. $x = \sqrt{2p}$, $y = z = \sqrt[4]{\frac{p}{2}}$.

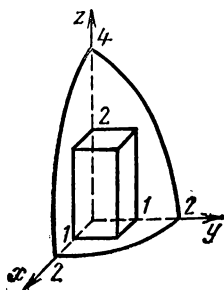


Рис. 106

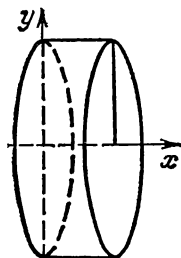


Рис. 107

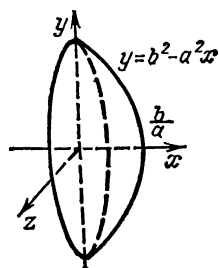


Рис. 108

878. Куб. 879. $V = xyz = 2$, $z = 2$, $x = y = 1$ (рис. 106).

880. $V = xyz = 9$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $y = \sqrt{6}$, $z = 3$.

881. $x = \frac{p}{3}$, $y = \frac{2}{3}p$, $V = \frac{4}{27}\pi p^3$ (рис. 107).

882. $b^2 = \frac{2}{3}p$, $a^2 = \frac{6}{p}$, $y = \frac{2p}{3} - \frac{6}{p}x^2$ (рис. 108).

884. $a = 21$, $b = -10 - 7\sqrt{7}$, $\Delta_{\min} = 7\sqrt{7} - 10$.

886. $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$.

$$887. \text{ У к а з а н и е. } \frac{1}{2} S_n = S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \\ = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}};$$

отсюда

$$S_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^n} = \\ = 1 + \frac{1-2^{1-n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

$$888. \text{ У к а з а н и е. } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2).$$

$$889. \text{ У к а з а н и е. } \frac{n+1}{2n-1} < \frac{2}{3} \quad (n > 5).$$

891. Применить интегральный признак.

$$898. 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

$$899. 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

$$900. \text{ а) } 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{ б) } 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty). \text{ У к а з а н и е. } \cos^2 x = \\ = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]; \text{ в) } \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

Г Л А В А 6

$$901. \text{ а) } y'x = 2y; \quad \text{ б) } xy' = ny. \quad 902. xy' = y + (n-1)x^n.$$

$$903. ay^2 - x^2 = 2axy y'. \quad 904. y = 2x. \quad 905. xy = 8. \quad 906. y = 4e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}.$$

$$907. y^2 = \frac{2x^2 - 2 + 29x}{2x}. \quad 908. y = \frac{2x}{1 - 3x^2}.$$

$$909. y^2 = \frac{1}{1 + ce^{x^2}}.$$

910. $y^2 + (x-a)^2 = a^2$ — окружность радиусом a с центром в точке $(a, 0)$. У к а з а н и е. Необходимо сначала составить дифференциальное уравнение, решением которого является искомая кривая $y = f(x)$.

Как нам известно, уравнение касательной к кривой в точке $(x, f(x))$ имеет вид

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

Приводя это уравнение к нормальному виду, получим, что расстояние от начала координат до этой касательной будет

$$d = \frac{|f(x) - f'(x)x|}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Согласно условию задачи это расстояние должно равняться $|x|$. Поэтому получаем

$$y - xy' = \pm x\sqrt{1 + y'^2}$$

— искомое дифференциальное уравнение. Возводя в квадрат обе части уравнения, будем иметь

$$2xydy = (y^2 - x^2)dx.$$

Кроме того, по условию задачи кривая $y = f(x)$ проходит через точку $A(a, a)$, т. е. $y(a) = a$.

Решая однородное дифференциальное уравнение $2xydy = (y^2 - x^2)dx$ при начальном условии $y(a) = a$, мы и получим ответ, который приведен выше.

911. $x_1 = 0,472$, $x_2 = 9,999$.

Итерационная последовательность метода Ньютона определяется равенством

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Оценка погрешности — на основании неравенств (9), (10) из учебника [3], § 1.5.

912. $x = -0,56715$. З а м е ч а н и е. Единственный корень функции находится на $[-1, 0]$.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x + e^x}{(1 + e^x)^2};$$

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + xe^x}{(1 + e^x)^2}, \quad \max_{-1 \leq x \leq 0} F'(x) = \frac{1}{4}.$$

913. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$

914. $y = c_1 e^{-x} + (c_2 x + c_3) e^{2x}.$ 915. $y = -\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} e^x.$

У к а з а н и е. Из условий задачи ясно, что $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Это начальные условия.

916. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{x}{3} e^x.$

$$917. y = \left(c_1 + \frac{2}{9}x\right)e^{-x} + (c_2x + c_3)e^{2x}.$$

$$918. y = (c_1 + x)e^{-2x} + (c_2 - x)e^{-3x}.$$

$$919. y = \left(c_1 - \frac{x}{2}\right)\cos 2x + \left(c_2 + \frac{1}{4}\ln \sin 2x\right)\sin 2x.$$

$$920. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$921. x = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, \quad y = -\frac{dx}{dt} = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t}.$$

$$922. x = (1 - 2t)e^{-2t}, \quad y = (1 + 2t)e^{-2t}.$$

Г Л А В А 7

924. $F(y)$ имеет разрыв при $y = 0$.

925. Функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ является непрерывной и дифференцируемой ($F'(x) = f(x)$).
Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt &= \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{x+h} f(t) dt - F(x) \right] = \\ &= \frac{1}{h} [F(x+h) - F(a+h) - F(x)]. \end{aligned}$$

Так как $F(a) = 0$, то последнее отношение представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a+h) - F(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(x+h) - F'(a+h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(a+h)] = \\ &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

$$929. 1/21. \quad 930. 128. \quad 931. \frac{1}{48} a^6. \quad 932. \frac{\pi^2}{4} abc \text{ (см. задачу 503).}$$

$$933. \frac{4}{3} p^2. \quad 934. V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx = \frac{88}{105}.$$

$$935. x_0 = \frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{8}{5} a.$$

ГЛАВА 8

936. $2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

937. $\frac{a}{6} [(\operatorname{ch} 2t_0)^{3/2} - 1]$. 938. $\pi(1 + a^2)$. 940. $\sqrt{3}$. 941. а) 0;

б) $8/3$. 942. 10. 943. $1/2$. 944. $\int_0^{a+b} f(t) dt$. 945. $\frac{\sqrt{2}}{2} e^a - 1$.

947. а) $\operatorname{grad} U = \frac{\mathbf{r}}{r}$; б) $\operatorname{grad} U = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

948. $\operatorname{grad} U(A) = (4a - d, 2b - 2d) = (4a - d) \mathbf{i} + 2(b - d) \mathbf{j}$;
 $|\operatorname{grad} U(A)| = \sqrt{(4a - d)^2 + 4(b - d)^2}$; $\operatorname{grad} U = 0$ в точке

$(0, 0)$, если $d^2 \neq 4ab$; $\operatorname{grad} U = 0$ на прямой $y = \sqrt{\frac{a}{b}} x$. если $d^2 = 4ab$. Градиент U перпендикулярен оси Oy в точках прямой

$y = \frac{dx}{2b}$.

950. $2/r$. 952. $\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0$; $\operatorname{rot} r\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{c}}{r}$.

953. а) Не имеет, $\operatorname{rot} \mathbf{a} \neq 0$; $U = xy + xz + yz + c$.

954. а) Не является; б) является при $b = c$.

955. $x^2 + 2xy + 3y^2 = c$.

956. $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + xy^2 = c$.

957. $xy + xz + 2yz = c$.

958. $-2\pi ab \forall c, d$.

959. $\pi(d - c)ab$.

960. 0. Указание. $\int_{AB} [y^2 dx + (1 + 2xy) dy] = 0$.

ГЛАВА 9

962. $\frac{\pi}{4} (a - b) -$

$-\frac{2}{\pi} (a - b) \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} + (a + b) \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$.

963. $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx$.

$$964. |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}. \text{ Полагая } x=0, \text{ получаем}$$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$965. |\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

$$966. 4/3.$$

$$967. \sqrt{86/15}.$$

968. Сходится в смысле среднеквадратического к нулю и сходится неравномерно к нулю (см. задачу 393, г)).

$$970. \text{ а) } \varphi(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0); \quad \text{ б) } \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \exp(-x^2/4) \quad (|x| < \infty).$$

Г Л А В А 10

$$972. u(x, t) = 2 \cos \lambda_2^2 t X_2(x) + 3 \cos \lambda_3^2 t X_3(x).$$

$$973. u(x, t) = 2a \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \exp(-n^2 t) \frac{\sin nx}{n}$$

(см. задачу 962).

Г Л А В А 11

974. а) $\operatorname{Re} z = 12$, $\operatorname{Im} z = 5$; б) $\operatorname{Re} z = ac - bd$, $\operatorname{Im} z = bc + ad$; в) $\operatorname{Re} z = a^3 - 3ab$, $\operatorname{Im} z = 3a^2b - b^3$; г) $\operatorname{Re} z = 8/5$, $\operatorname{Im} z = -1/5$.

975. а) Открытый круг радиусом 3 с центром в начале координат; б) открытый круг на плоскости xOy с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом 1; в) открытая четвертая часть круга радиусом 3 с центром в точке $(0, 0)$, находящаяся во второй четверти; г) окружность радиусом 3 с центром в начале координат; д) замкнутое кольцо, находящееся между концентрическими окружностями радиусами 2 и 3 с центром в точке $(0, 1)$.

$$976. \text{ а) } \ln 2 + \pi i;$$

$$\text{ б) } \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i;$$

$$\text{ в) } \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (z = x + iy).$$

$$977. \text{ а) } \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$б) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \text{ У к а з а н и е. } \sum_{k=1}^n e^{ikx} = \frac{e^{(n+1)x} - e^x}{e^x - 1},$$

Выделить действительную и мнимые части, использовать формулу Эйлера $e^{xi} = \cos x + i \sin x$; в) $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$;

$$г) \frac{\sin^2 nx}{\sin x}. \text{ У к а з а н и е. } \sum_{k=1}^n e^{(2k-1)xi} = \frac{e^{(2n+1)xi} - e^{xi}}{e^{2xi} - 1} =$$

$$= \frac{\sin nx (\cos nx + i \sin nx)}{\sin x}.$$

$$980. S(z) = \frac{1}{3} \left[e^z + 2e^{-z/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} z \right].$$

$$982. S(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2} \sin x,$$

$$S_1(x) = \sin x \left(\frac{1}{4} - \log 2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

$$983. S(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^1 \frac{(t - \cos x)(t^\beta - t^\alpha) dt}{1 - 2t \cos x + t^2},$$

$$S_1(x) = \frac{\sin x}{\beta - \alpha} \int_0^1 \frac{(t^\alpha - t^\beta) dt}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

Отметим, что при целых неотрицательных α, β данные интегралы могут быть вычислены в элементарных функциях, как интегралы от рациональной функции.

Г Л А В А 12

$$987. L[f; p] = \frac{(p^2 + a^2)[p^4 + 2p^2b^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2p^2a^2]}{[p^4 + (a^2 + b^2)^2 + 2p^2(b^2 - a^2)]^2} -$$

$$- \frac{b^2[p^4 + 4p^2a^2 + 2p^2b^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^4]}{[p^4 + (a^2 + b^2)^2 + 2p^2(b^2 - a^2)]^2},$$

в частности, если $a = b$, то

$$L[f; p] = p^2(p^4 - 2a^4)/[p^4 + 4a^4]^2.$$

$$989. \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}. \quad 990. y(x) = \frac{b}{a} (1 - e^{-ax}).$$

$$992. y(x) = e^{-x}[A \cos x + (A + B) \sin x].$$

$$994. y(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + c_4 e^{-x} + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x).$$

$$997. S = \pi^2/6, S_1 = \pi^2/12 \text{ (см. задачу 984).}$$

$$998. S = \pi^4/90, S_1 = \frac{7}{720} \pi^4 \text{ (см. задачу 985).}$$

$$999. y(x) = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} - e^x,$$

$$z(x) = \frac{3}{4} e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-2x} - \frac{2}{3} e^x.$$

$$1000. y = 4x + 2 - 2 \cos x - 3 \sin x, \quad z = 2 \sin x - 2x.$$

$$1001. y = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cos x \sqrt{5},$$

$$z = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cos x \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin x \sqrt{5},$$

$$t = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cos x \sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin x \sqrt{5}.$$

$$1002. y = \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sh} x + \sin x \operatorname{ch} x,$$

$$z = \frac{1}{2} \sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	3
Предисловие к первому изданию	4
Глава 1. Введение в анализ	5
§ 1. Действительные числа. Множества	5
§ 2. Предел последовательности	6
§ 3. Функция. Предел функции	8
§ 4. Производная	10
Глава 2. Интегралы	19
§ 1. Неопределенный интеграл	19
§ 2. Определенный интеграл	22
§ 3. Приложения определенного интеграла	23
§ 4. Несобственные интегралы	26
Глава 3. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	27
§ 1. Определители и матрицы	27
§ 2. Системы линейных уравнений	28
§ 3. Векторы	29
§ 4. Деление отрезка в данном отношении	30
§ 5. Прямая линия	30
§ 6. Плоскость	31
§ 7. Прямая в пространстве	32
§ 8. Ориентация системы векторов. Векторное и смешанное произведение векторов	32
§ 9. Зависимые и независимые системы векторов	37
§ 10. Линейные операторы. Базис	37
§ 11. Линейные подпространства	41
§ 12. Самосопряженные операторы. Квадратичные формы	43
§ 13. Кривые второго порядка	44
§ 14. Поверхности второго порядка	47
Глава 4. Функции многих переменных	51
§ 1. Основные понятия	51
§ 2. Предел функции. Непрерывность	52
§ 3. Частные производные. Дифференциалы	54
§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков	55
§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	55

§ 6. Формула Тейлора	56
§ 7. Экстремумы	56
§ 8. Неявные функции. Условный экстремум	57
Глава 5. Ряды	58
§ 1. Числовые ряды	58
§ 2. Функциональные ряды	61
§ 3. Степенные ряды	62
Глава 6. Дифференциальные уравнения	62
§ 1. Общие понятия	62
§ 2. Уравнения первого порядка	62
§ 3. Метрические пространства. Сжимающие операторы. Теорема существования решения	64
§ 4. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения	66
§ 5. Понижение порядка дифференциального уравнения	67
§ 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	68
§ 7. Уравнение Эйлера. Уравнения с переменными коэффициентами	69
§ 8. Метод вариации постоянных	70
§ 9. Системы дифференциальных уравнений	71
§ 10. Решение уравнений с помощью степенных рядов	71
§ 11. Устойчивость по Ляпунову	72
Глава 7. Кратные интегралы	73
§ 1. Интегралы, зависящие от параметра	73
§ 2. Кратные интегралы	74
§ 3. Замена переменных в кратном интеграле	76
§ 4. Применение кратных интегралов	77
§ 5. Несобственные интегралы	79
Глава 8. Векторный анализ	80
§ 1. Криволинейные интегралы первого рода	80
§ 2. Интеграл от вектора вдоль кривой	82
§ 3. Потенциал. Ротор вектора	84
§ 4. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах	85
§ 5. Формула Грина	85
§ 6. Интеграл по поверхности первого рода	86
§ 7. Поток вектора через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода)	88
§ 8. Формула Гаусса — Остроградского	92
§ 9. Формула Стокса	93
Глава 9. Ряды и интеграл Фурье	95
§ 1. Тригонометрические ряды	95
§ 2. Ряд Фурье	96
§ 3. Ортогональные системы функций	97
§ 4. Интеграл Фурье	99
Глава 10. Уравнения математической физики	100

Глава 11. Функции комплексного переменного	102
§ 1. Общие понятия	102
§ 2. Предел функции. Производная	104
§ 3. Условия Коши — Римана. Гармонические функции	104
§ 4. Простейшие конформные отображения	105
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного	107
§ 6. Формула Коши	103
§ 7. Ряды в комплексной области	110
§ 8. Изолированные особые точки. Вычеты	111
§ 9. Вычисление интегралов с помощью вычетов	113
Глава 12. Операционное исчисление	117
§ 1. Изображения простейших функций	117
§ 2. Отыскание оригинала по изображению	118
§ 3. Приложения операционного исчисления	119
Приложение	120
Ответы	163

Яков Степанович Бугров
Сергей Михайлович Никольский

Высшая математика
ЗАДАЧНИК

Редактор *Т. А. Панькова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *И. Я. Кришталь, О. М. Березина*

ИБ № 12871

Сдано в набор 10.02.86. Подписано к печати 05.09.86.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Гарнитура литератур-
ная. Печать высокая. Усл. печ. л. 13,44 Усл. кр.-отг. 13,65.
Уч.-изд. л. 14,43. Тираж 86,000 экз. Зак. № 54. Цена 55 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие
Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского
объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколо-
вой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский про-
спект, 29.

55 коп.