МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

Б.А. КОРДЕМСКИЙ

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ

ЗАДАЧИ

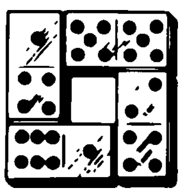
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

Б.А. Кордемский

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Б.А. КОРДЕМСКИЙ

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ



Москва
Издательство АСТ
Мир и Образование

УДК 51
ББК 22.1я9
К66

Издается по лицензии
ООО «Издательство «Мир и Образование»

Научное редактирование книги и подготовка ее к изданию выполнены А.М. Суходским

Кордемский, Борис Анастасьевич.

К66 Занимательные задачи / Б.А. Кордемский — Москва : Издательство АСТ : Мир и Образование, 2017. — 256 с.: ил. — (Математическая смекалка).

ISBN 978-5-17-104590-6 (Издательство АСТ)
ISBN 978-5-94666-840-8 (Мир и Образование)

В книгу вошли классические задачи мэтра отечественной научно-популярной литературы Б.А. Кордемского (1907–1999). Многие из них уже знакомы любителям поломать голову: знаменитая «Математическая смекалка» многократно переиздавалась в нашей стране и за рубежом.

На протяжении долгих лет разнообразные математические миниатюры Кордемского пользуются неизменной популярностью среди разных поколений: они нравятся и любознательным школьникам всех возрастов, и их родителям. «Занимательные задачи» помогут развить нестандартное мышление, найти новые способы для решения обыкновенных школьных задач и с неожиданной стороны посмотреть на привычные математические ситуации.

В конце книги приводятся ответы и подробные решения ко всем задачам.

УДК 51
ББК 22.1я9

ISBN 978-5-17-104590-6
(Издательство АСТ)
ISBN 978-5-94666-840-8
(Мир и Образование)

Предисловие

Настоящее издание представляет собой сборник задач из знаменитой книги «Математическая смекалка» мэтра отечественной научно-популярной литературы Б. А. Кордемского (1907—1999). Эта книга неоднократно переиздавалась как в нашей стране, так и за рубежом, в течение многих лет она была и остается настольной книгой многих поколений учащихся, а также всех тех, кто увлекается математикой независимо от возраста и желает потренировать свои мышление, находчивость и изобретательность. Книга представляет собой сборник математических миниатюр — разнообразных занимательных задач, математических игр, шуток и фокусов, тренирующих и шлифующих мышление читателя.

Цель данной книги состоит в том, чтобы влюбить тех, кто ею пользуется, в древнейшую, но вечно цветущую науку — математику, мир которой полон неразгаданных и разгаданных тайн, удивительных и драматических явлений, захватывающих событий и поразительных открытий.

Легкий юмор фабулы, неожиданность ситуации в условии задачи и развязке при ее решении, стройность геометрических форм, изящество решения, в котором сочетаются простота и оригинальность методов его получения, — вот основные элементы эстетики занимательных задач «на смекалку» и одновременно возбудители сил притяжения внимания мыслящего человека.

При написании книги автор отбирал и обрабатывал многочисленные задачи, содержащиеся в отечественной и зарубежной научно-популярной литературе, и систематизировал эти задачи по главам (хотя систематизация весьма условна). Многие задачи были составлены и решены самим автором.

В конце книги приводятся ответы и подробные решения ко всем задачам, но, по мнению автора, не следует торопиться заглядывать в них. Если решить какую-то задачу не удается сразу, то можно пропустить ее и перейти к другой, а к пропущенной задаче вернуться позже.

Настоящая книга не предназначена для легкого чтения «в один присест», а требует работы на протяжении, быть может, ряда лет, это — книга для регулярной умственной гимнастики небольшими порциями, помощник читателя в его постепенном математическом развитии.

Весь материал книги подчинен воспитательной и образовательной цели: побудить читателя к самостоятельному творческому мышлению, к дальнейшему совершенствованию своих математических знаний.

Желаем вам успеха!

А. М. Суходский

«Книга – книгой,
А мозгами двигай»

В. Маяковский

Глава 1

Затейные задачи

Раздел А

Проверьте свою смекалку сначала на таких задачах, для решения которых требуются лишь настойчивость, терпение, сообразительность и умение складывать, вычитать, умножать и делить целые числа.

1 Наблюдательные школьники

Школьники – мальчик и девочка – только что произвели метеорологические измерения.

Теперь они отдыхают на пригорке и смотрят на проходящий мимо них товарный поезд.

Паровоз на подъеме отчаянно дымит и пыхтит. Вдоль полотна железной дороги ровно, без порывов дует ветер.

– Какую скорость ветра показали наши измерения? – спросил мальчик.

– 7 метров в секунду.

– Сегодня мне этого достаточно, чтобы определить, с какой скоростью идет поезд.

– Ну да? – усомнилась девочка.

– А ты присмотрись повнимательнее к движению поезда.

Девочка немного подумала и тоже сообразила, в чем тут дело.

Рис. 1

А увидели они в точности то, что изображено на рис. 1. С какой же скоростью шел поезд?

2 Каменный цветок

Помните талантливого умельца мастера Данилу из сказки П. Бажова «Каменный цветок»?

Рассказывают, что Данила, будучи еще учеником, выточил два таких цветка (рис. 2), листья, стебли и лепестки которых разнимались, а из образовавшихся частей цветков можно было сложить пластинку в форме круга.

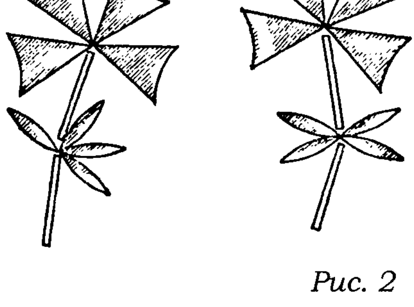


Рис. 2

Попробуйте! Перерисуйте цветочки на бумагу или картон, вырежьте лепестки, стебли и листья и сложите круг.

3 Перемещение шашек

Положите на стол 6 шашек в ряд попеременно – черную, белую, еще черную, еще белую и т. д. (рис. 3).

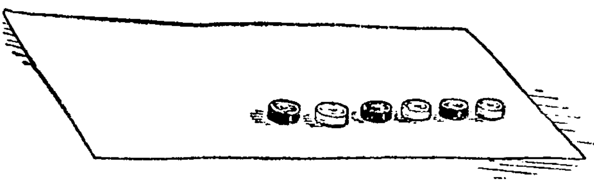


Рис. 3

Справа или слева оставьте свободное место, достаточное для четырех шашек.

Требуется переместить шашки так, чтобы слева оказались все белые, а вслед за ними все черные. При этом перемещать на свободное место нужно сразу две рядом лежащие шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Для решения задачи достаточно сделать три перемещения (три хода).

Если у вас нет шашек, воспользуйтесь монетами или нарежьте кусочки бумаги, картона.

4 В три хода

Положите на стол три кучки спичек. В одну кучку положите 11 спичек, в другую – 7, а в третью – 6. Перекладывая спички из любой кучки в любую другую, нужно сравнять все три кучки, чтобы в каждой было по 8 спичек. Это возможно, так как общее число спичек (24) делится на 3 без остатка; при этом требуется соблюдать такое правило: к любой кучке разрешается добавлять ровно столько спичек, сколько в ней есть. Например, если в кучке 6 спичек, то и добавить к ней можно только 6; если в кучке 4 спички, то и добавить к ней можно только 4.

Задача решается в три хода.

5 Сосчитайте!

Проверьте свою геометрическую наблюдательность: сосчитайте, сколько треугольников в фигуре, изображенной на рис. 4.

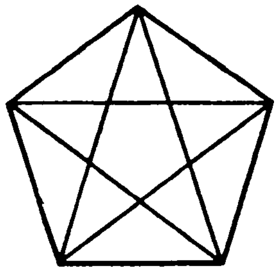


Рис. 4

6 Путь садовника

На рис. 5 изображен план небольшого яблоневого сада (точки – яблони). Садовник обработал все яблони подряд. Он начал с клетки, отмеченной звездочкой, и обошел одну за другой все клетки, как занятые яблонями, так и свободные, ни разу при этом не возвращаясь на пройденную клетку. По диагоналям он не ходил и на заштрихованных клетках не был, так как там помещались различные строения. Закончив обход, садовник оказался на той же клетке, с которой начал свой путь.

Начертите в своей тетради путь садовника.

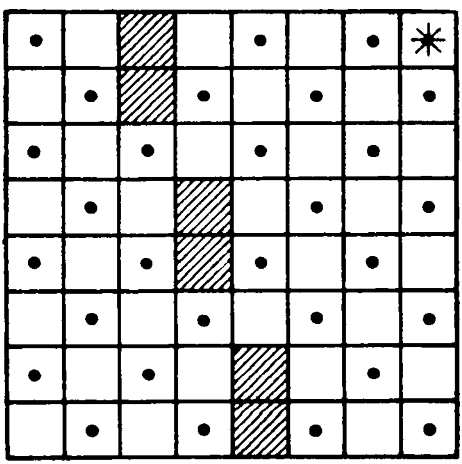


Рис. 5

7 Надо смекнуть

В корзине лежат пять яблок. Как разделить эти яблоки между пятью девочками, чтобы каждая девочка получила по одному яблоку и чтобы одно яблоко осталось в корзине?

8 Не долго думая

Скажите, сколько в комнате кошек, если в каждом из четырех углов комнаты сидит по одной кошке, против каждой кошки сидит по три кошки и на хвосте у каждой кошки сидит по кошке?

9 Вниз – вверх

Мальчик плотно прижал грань синего карандаша к грани желтого карандаша. Один сантиметр (в длину) прижатой грани синего карандаша, считая от нижнего конца, запачкан краской. Желтый карандаш мальчик держит неподвижно, а синий, продолжая прижимать к желтому, опускает на 1 см, затем возвращает в прежнее положение, опять опускает на 1 см и снова возвращает в прежнее положение; так он 10 раз опускает и 10 раз поднимает синий карандаш (20 движений).

Если допустить, что за это время краска не высыхает и не истощается, то на сколько сантиметров в длину окажется запачканным желтый карандаш после 20-го движения?

10 Переправа через реку (старинная задача)

Небольшой воинский отряд подошел к реке, через которую необходимо было переправиться. Мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг офицер замечает у берега двух мальчиков и лодку. Но лодка так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков – не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Каким образом?

Решайте эту задачу «в уме» или практически – используя шашки, спички или что-либо в этом роде и передвигая их по столу через воображаемую реку.

11 Волк, коза и капуста

Это также старинная задача, она встречается в сочинениях VIII в. и имеет сказочное содержание.

Рис. 6

Некий человек должен был перевезти в лодке через реку волка, козу и капусту. В лодке мог поместиться только один человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту, а в присутствии человека «никто никого не ел». Человек все-таки перевез свой груз через реку.

Как он это сделал?

12 Выкатить черные шарики

В узком и очень длинном желобе находятся 8 шариков: четыре черных слева и четыре белых чуть большего диаметра справа (рис. 7). В средней части желоба в стенке имеется небольшая ниша, в которой может поместиться только один шарик (любой). Два шарика могут расположиться рядом поперек желоба только в том месте, где находится ниша. Левый конец желоба закрыт, а в правом конце есть отверстие, через которое может пройти любой черный шарик, но не белый. Как выкатить из желоба все черные шарики? Вынимать шарики из желоба не разрешается.

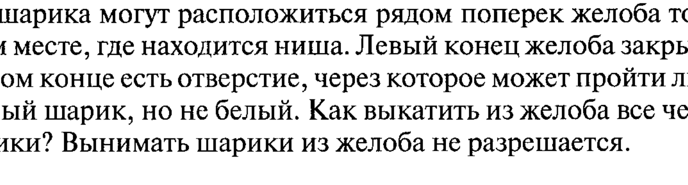


Рис. 7

13 Ремонт цепи

Знаете, над чем задумался молодой мастер (рис. 8)? Перед ним пять звеньев цепи, которые надо соединить в одну цепь, не используя дополнительных колец. Если, например, расковать кольцо 3 (одна операция) и зацепиться им за кольцо 4 (еще одна операция), затем расковать кольцо 6 и зацепиться за кольцо 7 и т. д., то всего получится восемь операций, а мастер стремится сковать цепь с помощью только шести операций. Ему это удалось. Как он действовал?

Рис. 8

14 Исправьте ошибку

Возьмите 12 спичек и выложите из них «равенство», изображенное на рис. 9.

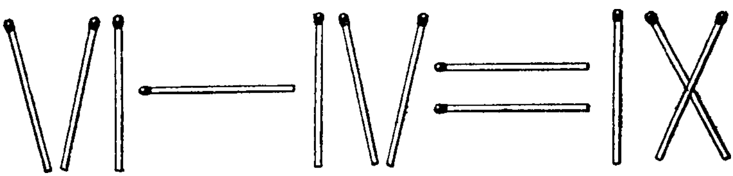


Рис. 9

Равенство, как видите, неверное, так как получается, что $6 - 4 = 9$.

Переложите одну спичку так, чтобы получилось правильное равенство.

15 Две шутки

1°. На столе лежат три спички. Не прибавляя ни одной спички, сделайте из трех – четыре. Ломать спички нельзя.

2°. Вот еще аналогичная шутка. Вы можете ее предложить своему товарищу.

Положите на стол три спички и предложите товарищу добавить к ним еще две так, чтобы получилось восемь. Разумеется, ломать спички нельзя.

16 Три квадрата

Из 8 палочек (например, спичек), четыре из которых вдвое короче остальных четырех, требуется составить три равных квадрата.

17 Сколько деталей?

В токарном цехе завода вытачивают детали из свинцовых заготовок. Из одной заготовки – деталь. Стружки, получившиеся при изготовлении шести деталей, можно переплавить и получить еще одну заготовку. Сколько деталей можно сделать таким образом из 36 свинцовых заготовок?

18 Попробуйте!

В квадратном зале для танцев требуется поставить вдоль стен 10 кресел так, чтобы у каждой стены стояло кресел поровну.

19 Расстановка флажков

Ко дню пуска гидроэлектростанции нужно украсить ее снаружи со всех четырех сторон гирляндами, лампочками и флажками. Флажков немного, всего 12.

Сначала расставили их по 4 с каждой стороны, как показано на схеме (рис. 10), потом сообразили, что эти же 12 флажков можно расставить по 5 и даже по 6 с каждой стороны. Первый проект понравился больше, и решили расставить по 5 флажков.

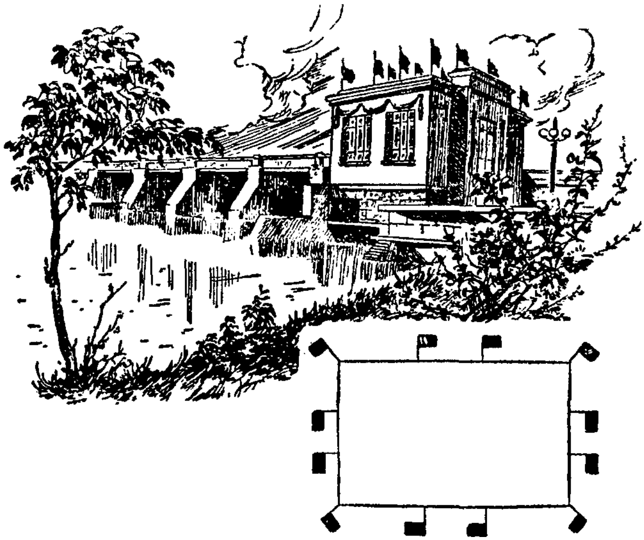


Рис. 10

Покажите на схеме, как расставили 12 флажков по 5 с каждой из четырех сторон и как могли бы их расставить по 6 флажков.

20 Сохранить четность

Возьмите 16 каких-нибудь предметов (бумажек, монет, слив или шашек) и расположите их по 4 в ряд (рис. 11). Теперь уберите 6 штук, но так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду осталось по четному числу предметов. Убирая разные 6 штук, можно получить разные решения.

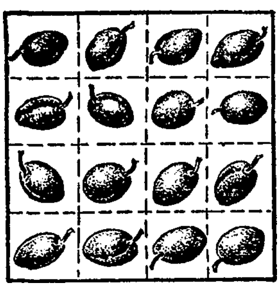


Рис. 11

21 «Волшебный» числовой треугольник

В вершинах треугольника я поместил числа 1, 2 и 3 (рис. 12), а вы разместите числа 4, 5, 6, 7, 8, 9 по сторонам треугольника так, чтобы сумма всех чисел вдоль каждой стороны треугольника была равна 17. Это нетрудно, так как я подсказал, какие числа следует поместить в вершинах треугольника.

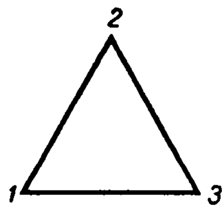


Рис. 12

Значительно дольше придется вам потрудиться, если я заранее не скажу, какие числа следует поместить в вершинах треугольника, и предложу снова разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, каждое по одному разу, вдоль сторон и в вершинах треугольника так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника была равна 20.

Когда получите искомое расположение чисел, поищите еще и новые расположения. Условия задачи могут выполняться при самых разнообразных расположениях чисел.

22 Как играли в мяч 12 девочек

Двенадцать девочек стали в круг и начали играть в мяч. Каждая девочка бросала мяч своей соседке слева. Когда мяч обходил весь круг, его перебрасывали в противоположном направлении. Через некоторое время одна девочка сказала:

– Будем лучше бросать мяч через одного человека.

– Но так как нас двенадцать, то половина девочек не будет участвовать в игре, – живо возразила Наташа.

– Тогда будем бросать мяч через двух! (Каждая третья ловит мяч.)

– Еще хуже: играть будут только четверо... Если хотите, чтобы все девочки играли, надо бросать мяч через четырех (пятая ловит). Другой комбинации нет.

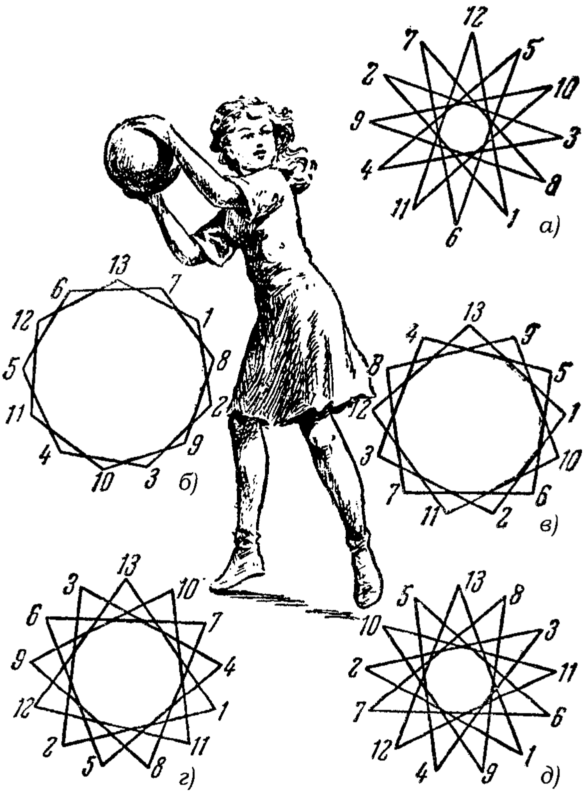


Рис. 13

– А если бросать мяч через шесть человек?

– Это будет та же самая комбинация, только мяч пойдет в противоположном направлении.

– А если играть через десять (каждая одиннадцатая ловит мяч)? – допытывались девочки.

– Таким способом мы уже играли...

Девочки стали рисовать схемы всех предлагавшихся способов игры и очень скоро убедились в том, что Наташа была права. Только одна схема игры (кроме первоначальной) охватывала всех участниц без исключения (рис. 13, *а*).

Вот если бы игравших девочек было тринадцать, то мяч можно было бы бросать и через одну (рис. 13, *б*), и через двух (рис. 13, *в*), и через трех (рис. 13, *г*), и через четырех (рис. 13, *д*), и всякий раз игра охватывала бы всех участниц. Выясните, можно ли при тринадцати играющих бросать мяч через пять человек? А можно ли бросать мяч через шесть человек при тринадцати играющих? Подумайте и для наглядности нарисуйте соответствующие схемы.

23 Четырьмя прямыми

Возьмите лист бумаги и нанесите на нем девять точек так, чтобы они расположились в форме квадрата, как показано на рис. 14. Перечеркните теперь все точки четырьмя прямыми, не отрывая карандаша от бумаги.

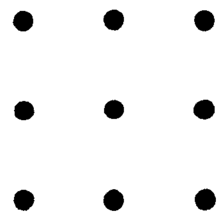


Рис. 14

24 Отделить коз от капусты

Решите теперь задачу, в некотором смысле противоположную предыдущей. Там мы соединяли точки прямыми, а здесь требуется провести три прямые так, чтобы отделить коз от капусты (рис. 15).

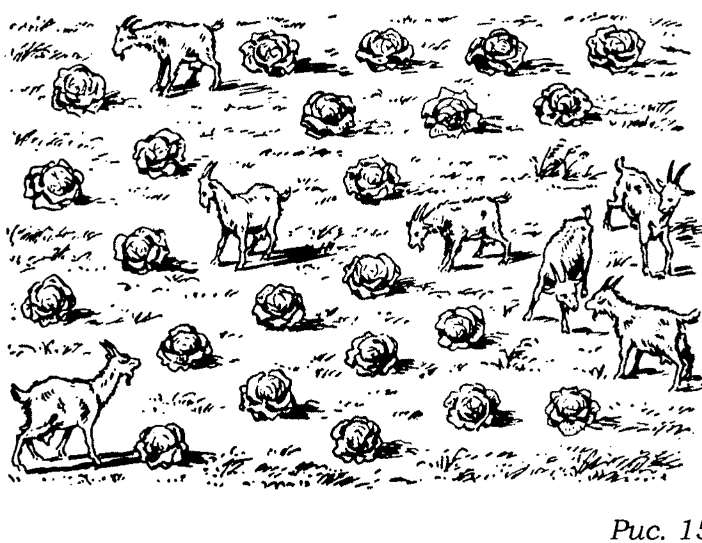


Рис. 15

На рисунке в книге проводить прямые не следует. Перерисуйте схему расположения коз и капусты в тетрадь и после этого попробуйте решить задачу. Можно совсем не проводить прямых, а воспользоваться вязальными спицами или тонкими проволочками.

25 Два поезда

Поезд вышел из Москвы в Санкт-Петербург и шел без остановок со скоростью 60 км/ч. Другой поезд вышел ему навстречу из Санкт-Петербурга в Москву и также шел без остановок, но со скоростью 40 км/ч.

На каком расстоянии будут эти поезда за 1 ч до их встречи?

26 Во время прилива (шутка)

Недалеко от берега стоит корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек; расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается поверхности воды. Океан сегодня очень спокоен, но начинается прилив, который поднимает воду за каждый час на 15 см. Через какое время покроется водой третья ступенька веревочной лесенки?

27 Циферблат

1°. Разделить циферблат часов (рис. 16) двумя прямыми на три части так, чтобы, сложив числа, в каждой части получить одинаковые суммы.

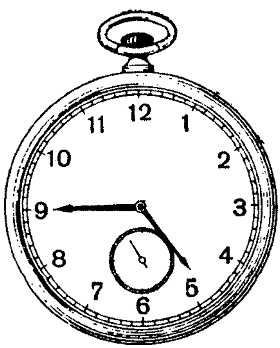


Рис. 16

2°. Можно ли этот циферблат разделить на шесть частей так, чтобы в каждой части находились два числа, причем суммы этих двух чисел в каждой из шести частей были бы равны между собой?

28 Сломанный циферблат

В музее я видел старинные часы с римскими цифрами на циферблате, причем вместо знакомой нам записи числа четыре (IV) стояли четыре палочки (IIII). Трещины, образовавшиеся на циферблате, делили его на четыре части, как изображено на рис. 17. Суммы чисел в каждой части оказались неодинаковыми: в одной – 21, в другой – 20, в третьей – 20, в четвертой – 17.

Я заметил, что при несколько ином расположении трещин сумма чисел в каждой из четырех частей циферблата была бы равна 20. При новом расположении трещин они могут и не проходить через центр циферблата. Перерисуйте циферблат в тетрадь и найдите это новое расположение трещин.

29 Три в ряд

Расположите на столе 9 пуговиц в форме квадрата по три пуговицы на каждой стороне и одну в центре (рис. 18). Если вдоль какой-нибудь прямой располагаются две пуговицы или более, то такое расположение будем называть «рядом». Так, *AB* и *CD* – ряды, в каждом из которых по три пуговицы, а *EF* – ряд, содержащий две пуговицы.

Определите, сколько на рисунке всего рядов, содержащих по три пуговицы в каждом, и сколько таких рядов, в каждом из которых только по две пуговицы.

Уберите теперь любые три пуговицы и оставшиеся 6 расположите в три ряда так, чтобы в каждом ряду было по три пуговицы.

30 Десять рядов

Нетрудно догадаться, как расположить 16 шашек в 10 рядов по четыре шашки в каждом ряду. Гораздо труднее расположить 9 шашек в 10 рядов так, чтобы в каждом ряду было по три шашки.

Решите обе задачи.

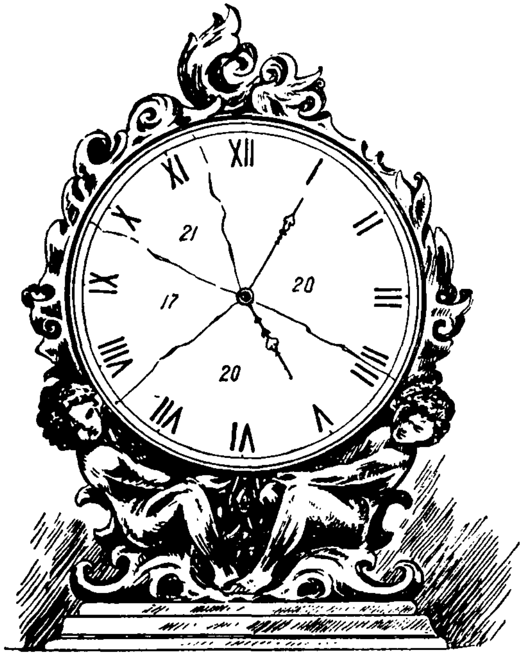


Рис. 17

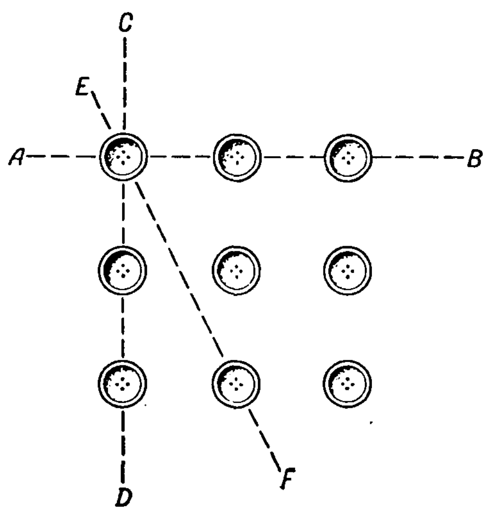


Рис. 18

31 Расположение монет

На листе бумаги нарисуйте фигуру, изображенную на рис. 19, увеличив при этом ее размеры в 2–3 раза, и приготовьте 17 фишек следующего достоинства: по 20 коп. – 5 штук, по 15 коп. – 3 штуки, по 10 коп. – 3 штуки, по 5 коп. – 6 штук*.

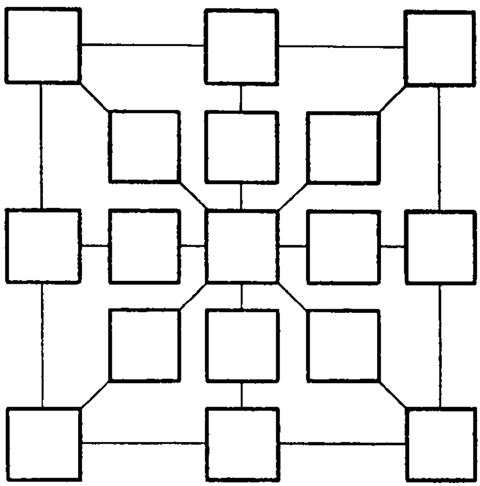


Рис. 19

Расположите приготовленные фишки по квадратикам нарисованной фигуры так, чтобы сумма копеек вдоль каждой прямой, изображенной на рисунке, была бы равна 55.

32 От 1 до 19

В девятнадцати кружках (рис. 20) требуется расставить все целые числа от 1 до 19 так, чтобы сумма чисел в любых трех кружках, лежащих на одной прямой, была бы равна 30.

* Изначально у автора речь шла о монетах, находившихся в обращении в СССР в 1961–1991 гг.

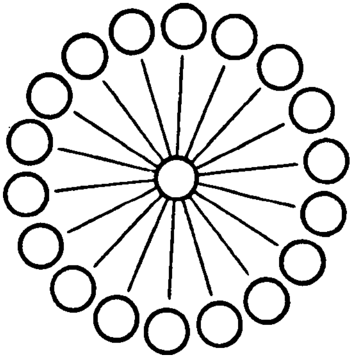


Рис. 20

33 Быстро, но осторожно

Следующие четыре задачи решайте «на скорость» – кто быстрее даст правильный ответ:

1°. В полдень из Москвы в Тулу выходит автобус с пассажирами. Часом позже из Тулы в Москву выезжает велосипедист и едет по тому же шоссе, но, конечно, значительно медленнее, чем автобус.

Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, кто из них будет дальше от Москвы?

2°. Что дороже: килограмм гривенников* или полкилограмма двугривенных?

3°. В 6 ч стенные часы пробили 6 ударов. По карманным часам я заметил, что время, протекшее от первого удара до шестого, составило ровно 30 с. Если для того, чтобы пробить 6 раз, часам понадобилось 30 с, то сколько будет продолжаться бой часов в полдень или в полночь, когда часы бьют 12 раз?

4°. Из одной точки вылетели три ласточки. Когда они будут в одной плоскости?

А теперь проверьте свои решения и загляните в раздел «Ответы и решения».

Ну как? Не попались ли вы в те небольшие ловушки, которые содержатся в этих несложных задачах?

Такие задачи тем и привлекательны, что они обостряют внимание и приучают к осторожности в привычном ходе мыслей.

* Гривенник – десятикопеечная русская монета.

34 Фигурный рак

Фигурный рак, изображенный на рис. 21, сложен из 17 кусочков.

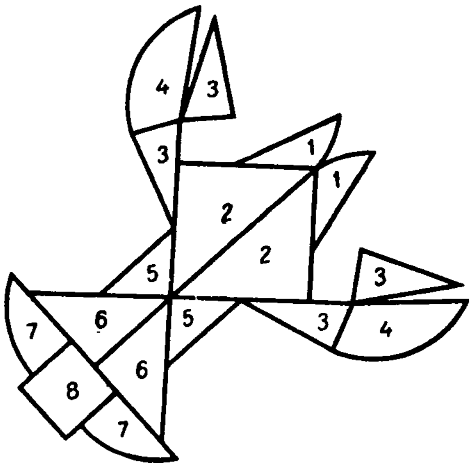


Рис. 21

Сложите из этих кусочков две фигуры сразу: круг и рядом с ним квадрат.

35 Стоимость тетради

За тетрадь заплатили 1 р. и еще половину стоимости тетради. Сколько стоит тетрадь?

36 Беспокойная муха

Два спортсмена одновременно начали велопробег навстречу друг другу.

В тот момент, когда между велосипедистами осталось всего 300 км, пробегом заинтересовалась муха. Слетев с плеча одного велосипедиста и опережая его, она помчалась навстречу другому. Встретив второго велосипедиста и убедившись, что все благополучно, она немедленно повернула обратно. Долетела муха до первого спортсмена и опять повернула ко второму.

Так она и летала между велосипедистами до тех пор, пока они не встретились. Тогда муха успокоилась и села одному из них на нос.

Муха летала между велосипедистами со скоростью 100 км/ч, а велосипедисты ехали со скоростью 50 км/ч.

Сколько километров пролетела муха?

37 Был ли такой год?

Имелся ли в XX столетии такой год, что если его записать цифрами, а бумажку повернуть верхним краем вниз, то число, образовавшееся на повернутой бумажке, будет выражать тот же год?

38 Две шутки

1°. Папа попросил дочку купить кое-что из вещей и сказал, что деньги лежат в конверте на письменном столе. Девочка, мельком взглянув на конверт, увидела написанное на нем число 98, вынула деньги и, не сосчитав их, положила в сумку, а конверт выбросила.

В магазине она купила на 90 р. вещей, а когда хотела расплатиться, оказалось, что у нее не только не остается 8 р., как она предполагала, но даже не хватает 4 р. Дома она рассказала об этом папе и спросила, не ошибся ли он, когда считал деньги. Отец ответил, что он сосчитал деньги правильно, а ошиблась она сама и, рассмеявшись, указал ей на ошибку. В чем была ошибка девочки?

2°. Приготовьте 8 бумажек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9 и расположите их в два столбца, как на рис. 22.

Перемещая всего лишь две бумажки, добейтесь того, чтобы суммы чисел в обоих столбцах были одинаковыми.

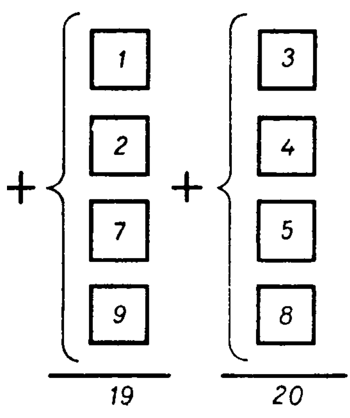


Рис. 22

39 Сколько мне лет?

Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, а теперь отец старше меня вдвое. Сколько мне лет теперь?

40 Оцените «на взгляд»

Перед вами два столбца чисел:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Всмотритесь: числа второго столбца образованы из тех же цифр, что и числа первого столбца, но с противоположным порядком их расположения. (Для усиления наглядности нули в левом столбце опущены.)

Какой столбец при сложении даст больший результат?

Сначала сравните эти суммы «на взгляд», т. е., еще не производя сложения, попытайтесь определить, одинаковы ли они или одна больше другой, а затем проверьте сложением.

41 Скоростное сложение

1°. Восемь шестизначных слагаемых

$$+\left\{\begin{array}{r} 328\,645 \\ 491\,221 \\ 816\,304 \\ 117\,586 \\ 671\,355 \\ 508\,779 \\ 183\,696 \\ 882\,414 \end{array}\right.$$

подобраны так, что, разумно их группируя, можно «в уме» найти сумму за 8 с. Выдержите ли вы такую скорость?

В разделе «Ответы и решения» есть указания, но... вы их дольше будете искать.

А своим друзьям покажите два фокуса, которые в шутку тоже можете назвать «скоростным сложением».

2°. Фокус 1. Скажите: «Не показывая мне, напишите столбиком столько многозначных чисел, сколько вам хочется. Затем я подойду, очень быстро напишу еще столько же чисел и моментально все их сложу».

Допустим, друзья написали:

$$\begin{array}{c}7621\\3057\\2794\\4518\end{array}$$

А вы припишите такие числа, каждое из которых дополнит до 9999 одно за другим все написанные числа. Такими числами будут:

$$\begin{array}{c}5481\\7205\\6942\\2378\end{array}$$

Действительно:

$$+\begin{array}{r}4518\\\underline{5481}\\9999\end{array}\qquad+\begin{array}{r}2794\\\underline{7205}\\9999\end{array}\qquad+\begin{array}{r}3057\\\underline{6942}\\9999\end{array}\qquad+\begin{array}{r}7621\\\underline{2378}\\9999\end{array}$$

Теперь нетрудно сообразить, как быстро подсчитать всю сумму:

$$+\left\{\begin{array}{r}7621\\3057\\2794\\4518\\5481\\7205\\6942\\\underline{2378}\end{array}\right.$$

Надо 9999 взять 4 раза, т. е. $9999 \cdot 4$, а такое умножение быстро производится в уме. Умножаем 10 000 на 4 и вычитаем лишних 4 единицы. Получается:

$$10\,000 \cdot 4 - 4 = 40\,000 - 4 = 39\,996.$$

Вот и весь секрет фокуса!

3°. Фокус 2. Напишите одно под другим какие-нибудь два числа. Я припишу третье и мгновенно слева направо напишу сумму всех трех чисел.

Положим, вы написали:

$$\begin{array}{r} 72\,603\,294 \\ 51\,273\,081 \end{array}$$

Я припишу, например, такое число: 48 726 918 и сразу назову вам сумму.

Какое число следует приписывать и как в этом случае быстро находить сумму, сообразите сами!

42 В какой руке? (математический фокус)

Дайте вашему товарищу две монеты: одну с четным числом копеек, а другую – с нечетным (например, двухкопеечную и трехкопеечную). Пусть он, не показывая вам, одну из этих монет (любую) возьмет в правую руку, а вторую – в левую. Вы можете легко угадать, в какой руке у него какая монета.

Предложите ему *утроить* число копеек, содержащихся в монете, зажатой в *правой руке,* и *удвоить* число копеек, содержащихся в монете, зажатой в *левой руке.* Пусть он сложит полученные результаты и назовет вам только образовавшуюся сумму.

Если названная сумма четная, то двухкопеечная монета – в правой руке; если же нечетная – она в левой руке.

Объясните, почему всегда так получается, и придумайте, как можно разнообразить этот фокус.

43 Сколько их?

У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев.

Сколько в этой семье братьев и сколько сестер?

44 Одинаковыми цифрами

Пользуясь только сложением, запишите число 28 с помощью пяти двоек, а число 1000 с помощью восьми восьмерок.

45 Сто

Используя любые арифметические действия, составьте число 100 либо из *пяти единиц*, либо из *пяти пятерок*, причем из пяти пятерок 100 можно составить двумя способами.

46 Двадцать

Из четырех нечетных чисел легко составить сумму, равную 10, а именно:

$$1 + 1 + 3 + 5 = 10,$$

или так:

$$1 + 1 + 1 + 7 = 10.$$

Возможно и третье решение:

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10.$$

Других решений нет (изменения в порядке следования слагаемых, конечно, не образуют новых решений).

Значительно больше различных решений имеет такая задача:

Составить число 20, складывая ровно восемь нечетных чисел, среди которых также разрешается иметь и одинаковые слагаемые.

Найдите *все различные* решения этой задачи и установите, сколько среди них будет таких сумм, которые содержат наибольшее число *неодинаковых слагаемых*?

Совет. Если вы будете подбирать числа наудачу, то и в этом случае натолкнетесь на несколько решений, но бессистемные пробы не дадут уверенности в том, что вы исчерпали все решения. Если же в «способ проб» вы внесете некоторый порядок, систему, то ни одно из возможных решений от вас не ускользнет.

47 Сколько маршрутов?

Из письма школьников: «Занимаясь в математическом кружке, мы вычертили план 16 кварталов нашего города. На прилагаемой схеме плана (рис. 23) все кварталы условно изображены одинаковыми квадратами.

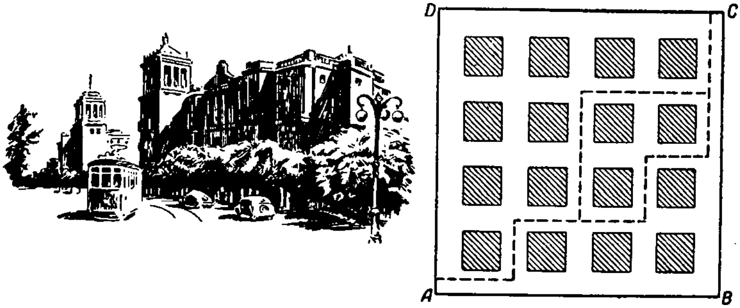


Рис. 23

Нас заинтересовал такой вопрос:

Сколько *разных* маршрутов можно наметить от пункта *А* к пункту *С*, если двигаться по улицам города только вперед и вправо, вправо и вперед? Отдельные части маршрута могут совпадать (см. пунктирные линии на схеме плана).

У нас сложилось впечатление, что это нелегкая задача. Верно ли мы ее решили, если насчитали 70 разных маршрутов?»

Что надо ответить на это письмо?

48 Изменить расположение чисел

На концах пяти диаметров все порядковые числа от 1 до 10 расположены так, как показано на рис. 24. При таком расположении только в одном случае сумма двух соседних чисел равна сумме двух противоположно расположенных чисел, а именно: $10 + 1 = 5 + 6$, но, например, $1 + 2 \neq 6 + 7$ или $2 + 3 \neq 7 + 8$.

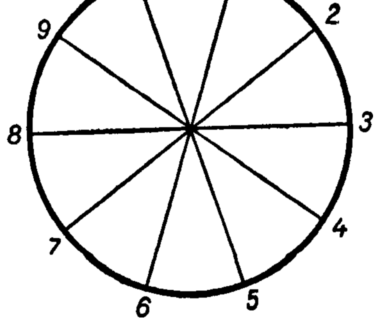


Рис. 24

Расположите данные числа так, чтобы сумма *любых двух соседних чисел* была бы равна сумме соответствующих двух противоположно расположенных чисел.

Можно ожидать, что эта задача имеет не одно решение, т. е. разные расположения данных чисел удовлетворяют условию задачи.

Попытайтесь найти такой путь решения, который позволил бы установить и число всех возможных решений.

49 Разные действия, один результат

Если между двумя двойками знак сложения заменить знаком умножения, то результат не изменится. Действительно, $2 + 2 = 2 \times 2$. Нетрудно подобрать и три числа, обладающих тем же свойством, а именно: $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. Есть и четыре однозначных числа, которые, будучи сложены и умножены друг на друга, дают один и тот же результат.

Кто быстрее подберет эти числа? Готово? Продолжайте состязание! Найдите пять, а потом шесть, а затем семь и т. д. однозначных чисел, обладающих тем же свойством. Имейте в виду при этом, что, начиная с группы в 5 чисел, ответы могут быть различными.

50 Девяносто девять и сто

Сколько надо поставить знаков «плюс» между цифрами 987 654 321, чтобы в сумме получилось 99?

Возможны два решения. Найти хотя бы одно из них нелегко, но зато вы приобретете опыт, который поможет вам быстро расставить знаки «плюс» между семью числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в сумме получилось 100 (расположение цифр изменять не разрешается). И здесь возможны два решения.

51 Разборная шахматная доска

Веселый шахматист разрезал свою картонную шахматную доску на 14 частей, как показано на рис. 25. Получилась разборная шахматная доска. Товарищам, приходившим к нему играть в шахматы, он предварительно предлагал головоломку: составить из данных 14 частей шахматную доску. Вырежьте из клетчатой бумаги такие же фигурки и убедитесь сами – трудно или легко из них составить шахматную доску.

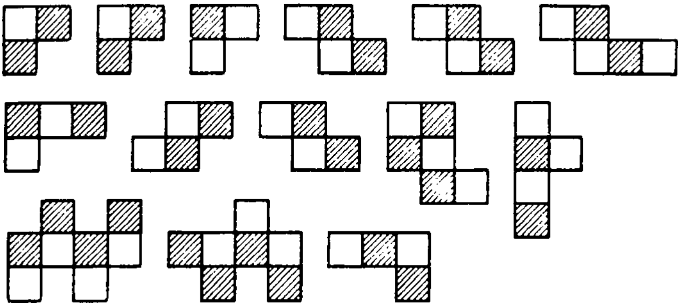


Рис. 25

52 Поиски мины

По окончании военной игры с группой суворовцев полковник решил предложить своим воспитанникам задачу «на смекалку». Он взял план местности, расчерченный на квадраты (рис. 26), и сказал:

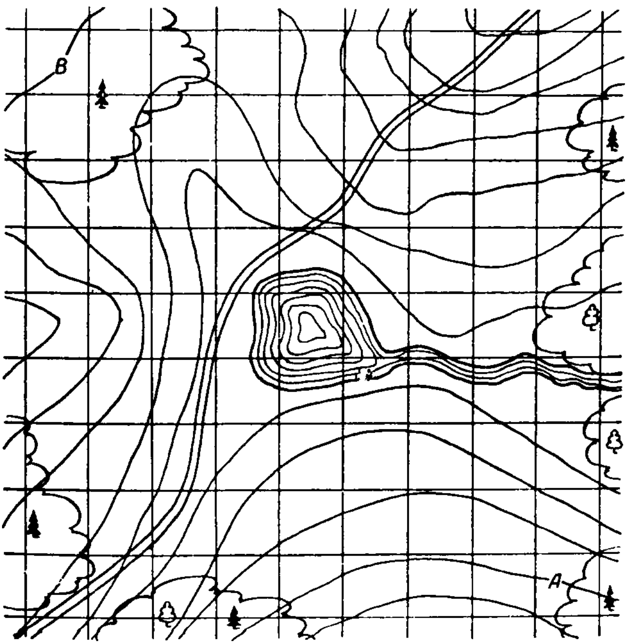


Рис. 26

«Два сапера с миноискателями должны обследовать эту местность, чтобы обезвредить вражеские мины. Для этого необходимо обойти все клетки местности, кроме центральной, которую занимает небольшой пруд. В ту клетку, где побывал один сапер, другому идти не следует. Двигаться можно только по горизонтали и вертикали, по диагоналям двигаться нельзя. Один сапер начинает свой маршрут с клетки *А* и выходит на клетку *В*, другой – начинает с клетки *В* и выходит на клетку *А*. Наметьте возможные маршруты саперов так, чтобы каждый из них прошел через одинаковое количество клеток. Эти несколько необычные условия я предлагаю лишь для проверки вашей смекалки».

Суворовцы перенесли план в тетради и через некоторое время справились с задачей. Полковник похвалил их за смекалку. Решите эту задачу и вы.

53 Собрать в группы по две

Десять спичек положены в ряд. Я могу распределить их в пять пар, перескакивая каждый раз одной спичкой через две, например так, как показано на рис. 27.

Найдите другой порядок распределения спичек данного ряда в пять пар при соблюдении тех же условий.

54 Собрать в группы по три

Пятнадцать спичек положены в ряд (рис. 28). Требуется собрать их в 5 групп по три спички в каждой. Перекладывать спички можно только по одной, каждый раз перескакивая через три спички.

Эта задача потруднее предыдущей: решите ее в десять перекладываний. Чтобы иметь возможность сравнить свое решение с ответом, записывайте порядок перемещения спичек.

Замечание. Обобщение задач 54 и 55 приводит к выводу, что для составления групп по n спичек в каждой перекладыванием каждой спички через n других необходимо $5n$ спичек.

55 Часы остановились

У меня нет карманных часов, а есть только стенные, которые остановились. Я отправился к своему знакомому, часы которого идут безукоризненно, узнал время и, не задерживаясь долго, вернулся

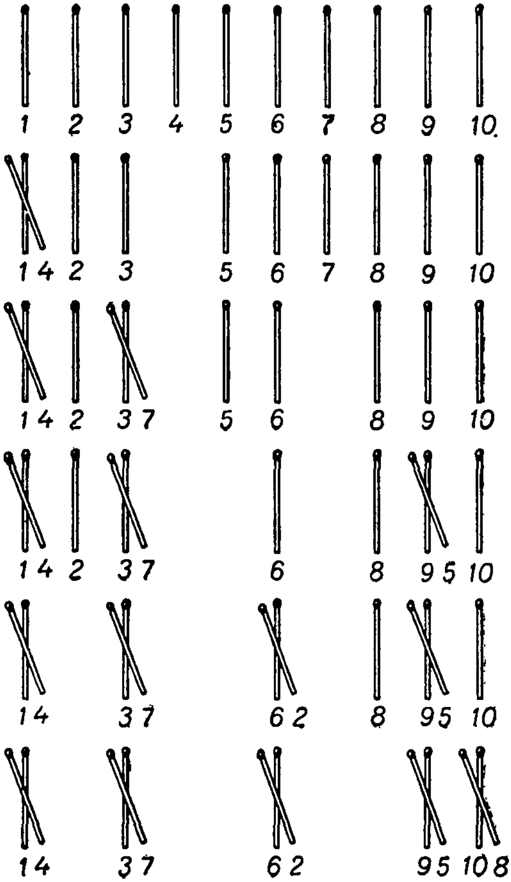

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 4 2 3 5 6 7 8 9 10
1 4 2 3 7 5 6 8 9 10
1 4 2 3 7 6 8 9 5 10
1 4 3 7 6 2 8 9 5 10
1 4 3 7 6 2 9 5 10 8

Рис. 27

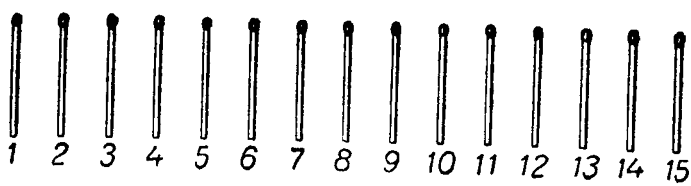

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Рис. 28

домой. Дома я быстро произвел несложные вычисления и поставил стрелки стенных часов в положение, соответствующее точному времени.

Как я действовал и как рассуждал, если предварительно мне не было известно, сколько времени занимает дорога?

56 Четыре действия арифметики

Перед вами семь строк последовательно расположенных цифр:

1 2 3 = 1

1 2 3 4 = 1

1 2 3 4 5 = 1

1 2 3 4 5 6 = 1

1 2 3 4 5 6 7 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Не меняя порядка расположения цифр, поставьте между ними знаки арифметических действий так, чтобы в результате этих действий в каждом ряду получилось бы по 1. Действия должны выполняться в порядке следования – слева направо, так что сложение, например, может предшествовать умножению. Как вы знаете, при записи в этом случае следует ставить скобки.

Если понадобится, то две соседние цифры можете считать двузначным числом.

57 Озадаченный шофер

О чем подумал шофер, когда он посмотрел на счетчик спидометра своей машины (рис. 29)? Счетчик показывал число 15 951. Шофер заметил, что количество километров, пройденных машиной, выражалось симметричным числом, т. е. таким, которое читалось одинаково как слева направо, так и справа налево: 15 951.

– Занятно!.. – пробормотал шофер. – Теперь нескоро, наверное, появится на счетчике другое число, обладающее такой же особенностью.

Однако ровно через 2 ч счетчик показал новое число, которое также в обе стороны читалось одинаково.

С какой скоростью ехал эти 2 ч шофер?

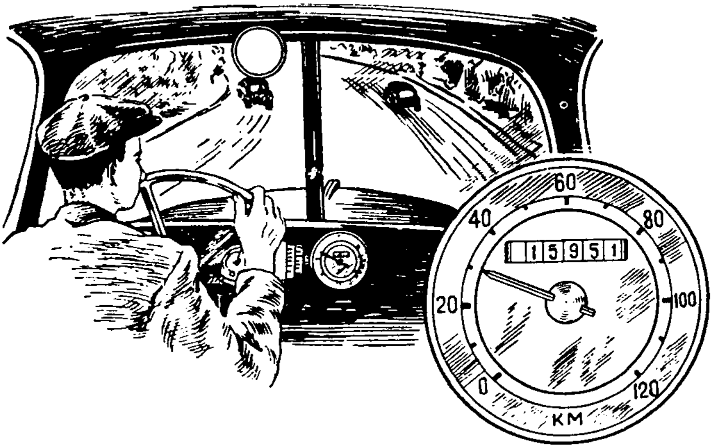


Рис. 29

58 Для гидроузла

В выполнении заказа по изготовлению измерительных приборов для гидроузла приняла участие бригада в составе бригадира и 9 молодых рабочих.

В течение дня каждый из юных рабочих смонтировал по 15 приборов, а бригадир – на 9 приборов больше, чем в среднем каждый из 10 членов бригады.

Сколько всего измерительных приборов было смонтировано бригадой за один рабочий день?

59 Хлебосдачу вовремя

Фермерское хозяйство должно было доставить в город машины с зерном к 11 ч утра. Если машины поедут со скоростью 30 км/ч, то колонна прибудет в город в 10 ч утра, а если со скоростью 20 км/ч, то в 12 ч дня.

Как далеко от фермы до города и с какой скоростью следует ехать, чтобы прибыть в город вовремя?

60 В дачном поезде

В вагоне электропоезда ехали из города на дачу две подруги-школьницы.

– Я замечаю, – сказала одна из подруг, – что обратные дачные поезда нам встречаются через каждые 5 мин. Как ты думаешь, сколько дачных поездов прибывает в город в течение одного часа, если скорости поездов в обоих направлениях одинаковы?

– Конечно, 12, так как 60 : 5 = 12, – сказала вторая подруга.

Но школьница, задавшая вопрос, не согласилась с решением подруги и привела ей свои соображения.

А что вы думаете по этому поводу?

61 От 1 до 1 000 000 000

Рассказывают, что когда 9-летнему Гауссу* учитель предложил найти сумму всех целых чисел от 1 до 100, 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100, то маленький Гаусс сам сообразил, каким способом можно очень быстро выполнить это сложение.

Надо складывать первое число с последним, второе с предпоследним и т. д. Сумма каждой такой пары чисел равна 101 и повторяется она 50 раз.

Следовательно, сумма всех целых чисел от 1 до 100 равна $101 \times 50 = 5050$.

Этот же прием используйте для решения более трудной задачи:

найти *сумму всех цифр* у всех целых чисел от 1 до 1 000 000 000.

Обратите внимание: здесь речь идет не о сумме чисел, а о сумме цифр всех чисел!

Раздел Б

Для решения задач этого раздела требуется знакомство с простыми и десятичными дробями и действиями над ними.
Те, кто еще не изучал дроби, могут временно пропустить задачи этого раздела и перейти к следующим главам.

62 Часы

Путешествуя по разным странам, я попадал в такие места, где настолько велика разность температур воздуха днем и ночью, что ког-

* К.Ф. Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик.

да я сутками находился на открытом воздухе, это начинало сказываться на ходе часов. Я замечал, что от изменений температуры днем часы уходили вперед на $\frac{1}{2}$ мин, а за ночь отставали на $\frac{1}{3}$ мин. Утром 1 мая часы еще показывали верное время. К какому числу они уйдут вперед на 5 мин?

63 Лестница

В доме 6 этажей. Во сколько раз путь по лестнице на шестой этаж длиннее, чем путь по той же лестнице на третий этаж, если пролеты между этажами имеют по одинаковому числу ступенек?

64 Головоломка

Какой знак надо поставить между написанными рядом цифрами 2 и 3, чтобы получилось число, большее двух, но меньшее трех?

65 Интересные дроби

Если к числителю и знаменателю дроби $\frac{1}{3}$ прибавить ее знаменатель, то дробь увеличится вдвое.

Найдите такую дробь, которая от прибавления знаменателя к ее числителю увеличилась бы:

а) втрое, б) вчетверо.

(Знающие алгебру могут обобщить задачу и решить ее с помощью уравнения.)

66 Какое число?

Половина – треть его. Какое это число?

67 Путь школьника

Боря каждое утро совершает довольно длинный путь в школу. На расстоянии $\frac{1}{4}$ пути от дома до школы расположено здание с электрочасами на фасаде, а на расстоянии $\frac{1}{3}$ всего пути – железнодорожная станция. Когда он проходил мимо здания, на часах обычно было 7 ч 30 мин, а когда он доходил до станции, то часы показывали без 25 мин 8 ч.

Когда Боря выходил из дому и в какое время он приходил в школу?

68 На стадионе

Вдоль беговой дорожки расставлено 12 флажков на равных расстояниях друг от друга. Старт дается у первого флажка. У восьмого флажка спортсмен был через 8 с после начала бега. Через сколько секунд при неизменной скорости он окажется у двенадцатого флажка?

69 Выгадал ли?

Петя возвращался домой из Киева. Первую половину пути он проехал поездом в 15 раз быстрее, чем если бы он шел пешком. Однако вторую половину пути ему пришлось проехать на волах – в 2 раза медленнее, чем если бы он шел пешком.

Выгадал ли Петя сколько-нибудь времени по сравнению с ходьбой пешком?

70 Будильник

Будильник отстает на 4 мин в час; $3\frac{1}{2}$ ч назад он был поставлен точно. Сейчас на часах, показывающих точное время, ровно 12. Через сколько минут на будильнике также будет 12?

71 Вместо мелких долей крупные

Однажды понадобилось распределить 7 одинаковых прямоугольных пластинок равными долями между 12 деталями. Эти 7 пластинок принесли разметчику и попросили его, если можно, разметить пластинки так, чтобы не пришлось дробить ни одной из них на очень мелкие части. Значит, простейшее решение – резать каждую пластинку на 12 равных частей – не годилось, так как при этом получалось много мелких долей. Как же быть?

Возможно ли деление данных пластинок на более крупные доли? Разметчик подумал, произвел какие-то арифметические расчеты с дробями и нашел самый экономный способ деления данных пластинок.

Впоследствии он легко дробил 5 пластинок для распределения их равными долями между шестью деталями, 13 пластинок для 12 деталей, 13 пластинок для 36 деталей, 26 для 21 и т. п.

Как поступал разметчик?

72 Брусок мыла

На одну чашку весов положен брусок мыла, на другую $\frac{3}{4}$ такого же бруска и еще $\frac{3}{4}$ кг. Весы находятся в равновесии.

Сколько весит брусок?

73 Арифметические орешки

1°. Двумя цифрами напишите наименьшее целое положительное число.

2°. Число 37 записано с помощью пяти троек:

$$37 = 33 + 3 + \frac{3}{3}.$$

Найдите другой способ выразить число 37 пятью тройками.

3°. Напишите число 100 шестью одинаковыми цифрами.

4°. Напишите число 55, используя только пять четверок.

5°. Напишите число 20 с помощью четырех девяток.

6°. Из семи спичек выложено число $\frac{1}{7}$ (рис. 30).

Рис. 30

Превратите эту дробь в число $\frac{1}{3}$, не прибавляя и не убавляя данных спичек.

7°. Напишите число 20, используя только цифры 1, 3, 5 и 7, причем каждую из них ровно по три раза.

8°. Сумма двух чисел, образованных из цифр 1, 3, 5, 7 и 9, равна сумме двух чисел, образованных из цифр 2, 4, 6 и 8. Найдите эти числа, используя каждую цифру по одному разу.

Примечание. Применять неправильные дроби не разрешается.

9°. Какие два числа при умножении одного на другое и при вычитании одного из другого дают один и тот же результат?

Таких пар чисел бесконечно много. Как образуются эти пары?

10°. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составьте две равные дроби, сумма которых равна 1. Необходимо использовать все цифры и притом каждую из них только по одному разу. (Возможно несколько решений.)

11°. Используя по одному разу каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, составьте такие смешанные дроби, сумма которых составила бы 100. (Возможно несколько решений.)

74 Дроби – домино

Возьмите из ящика домино все пластинки, обе половины которых содержат по одинаковому количеству очков (дубли), и пластинки, не содержащие очков хотя бы на одной половине (бланши). Оставшиеся 15 пластинок можно рассматривать как дроби и расположить их в такие три ряда, в каждом из которых сумма дробей равна $2\frac{1}{2}$ (рис. 31).

Любопытно, что, перераспределяя эти 15 пластинок домино, можно получить такие дроби, сумма которых будет числом целым (но, вообще говоря, разным в разных рядах).

Используя некоторые из пластинок домино как неправильные дроби, например $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{3}{2}$ и т. д., попробуйте расположить все 15 пластинок в три ряда по пять пластинок в каждом, но так, чтобы сумма дробей в каждом ряду была равна числу 10.

С первого раза это, конечно, не выйдет. Придется подумать и попрактиковаться.

Какие числа, кроме указанных в этой задаче, вам удалось бы получить, располагая пластинки домино в три ряда и складывая

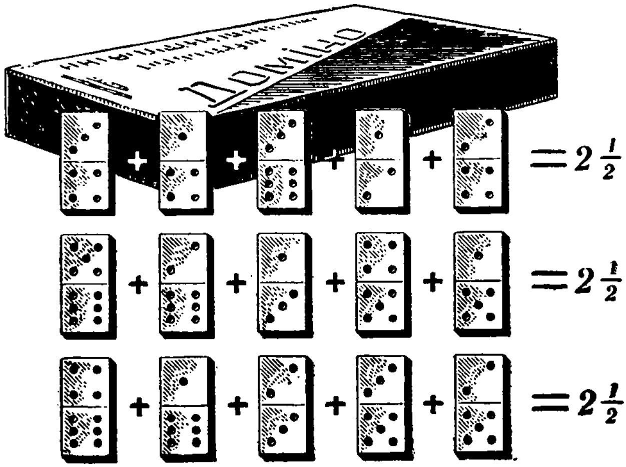


Рис. 31

соответствующие дроби (сумма во всех трех рядах должна быть одна и та же)?

75 Средняя скорость

Половину пути лошадь шла порожняком со скоростью 12 км/ч. Остальной путь она шла с возом, а ее скорость составляла 4 км/ч.

Какова была средняя скорость, т. е. с какой неизменной скоростью нужно было бы двигаться лошади, чтобы на весь путь затратить такое же количество времени?

76 Спящий пассажир

Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть всего пути он проехал спящим?

77 Какова длина поезда?

Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям; один со скоростью 36 км/ч, другой со скоростью 45 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шел мимо него в течение 6 с. Какова длина первого поезда?

78 Велосипедист

Когда велосипед проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду.

Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?

79 Соревнование

Токари Володя и Костя, получив от мастера по одинаковому заказу на изготовление партии деталей, хотели выполнить свои задания одновременно и раньше срока.

Однако через некоторое время оказалось, что Костя выполнил лишь половину того, что осталось выполнить Володе, а Володе осталось выполнить половину того, что он уже выполнил.

Во сколько раз должен был бы теперь увеличить свою дневную выработку Костя по сравнению с Володей, чтобы одновременно с ним успеть выполнить свой заказ?

80 Кто прав?

Маша решала арифметическую задачу. Последнее действие заключалось в определении объема земляных работ, а для этого надо было вычислить произведение трех чисел.

Маша благополучно перемножила первые два числа и только было приготовилась умножать полученный результат на третье число, как вдруг заметила, что второй сомножитель был записан ею неправильно; он оказался больше того числа, которое должно быть по условию, на $\frac{1}{3}$ его.

Тогда Маша, чтобы не переделывать заново уже выполненное действие, решила, что все равно получит правильный результат, если теперь третий сомножитель предварительно уменьшит на $\frac{1}{3}$ его самого, тем более что он был равен второму сомножителю.

– Так делать нельзя, – сказала ей подруга, – ты при этом ошиблась на 20 м^3.

– Какая же тут может быть ошибка? – возразила Маша. – Раз одно число я взяла увеличенным, а другое, равное ему, на такую же часть уменьшенным, то я думаю, что произведение осталось без изменения.

Кто прав?

И не сможете ли вы, пользуясь приведенными данными, найти правильный ответ?

Глава 2

Умение везде найдет применение

81 Где находится цель?

На рис. 32 в кружочках изображены экраны радиолокационных станций. На экранах светится или записывается зигзагообразная линия; под ней находится указатель расстояний.

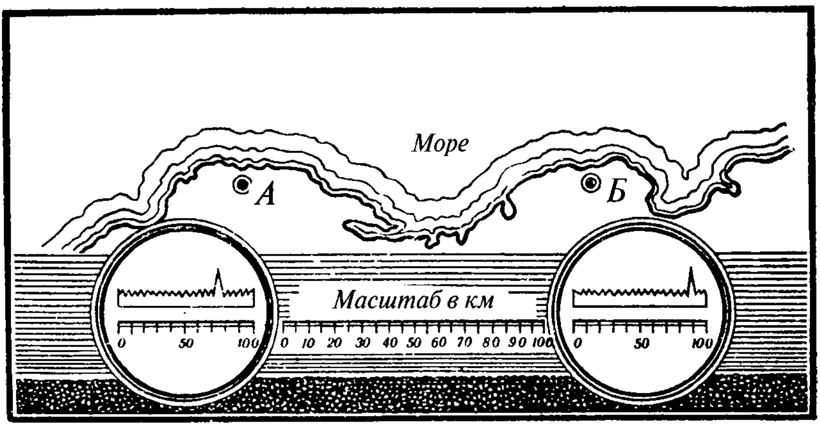


Рис. 32

Со станции отправляется радиоволна. На экране этот момент соответствует нулевой точке шкалы. Через некоторое время радиоволна, отразившись от цели (например, от корабля в море), возвращается обратно на станцию. В этот момент на экране появляется вытянутое вверх острие. За протекшее время радиоволна прошла двойное расстояние между станцией и целью. Но указатель расстояний размечен так, что число, помещенное под удлиненным острием, указывает расстояние от станции до цели. Экран слева дает показания береговой радиолокационной станции, находящейся в пункте *А*. Экран справа дает показания радиолокационной станции, находящейся в пункте *Б*.

Допустим, что оба экрана дали одновременные показания этих двух береговых станций, обнаруживших цель в море. Прочтите показания указателей экранов (рис. 32), а затем определите, в каком пункте находится цель.

82 Пять минут на размышление

Представьте себе деревянный куб со стороной 3 дм, вся поверхность которого окрашена в черный цвет.

Установите, сколько:

а) потребуется разрезов, чтобы разделить этот куб на кубики со стороной 1 дм;

б) получится таких кубиков;

в), г), д), е) кубиков будут иметь по четыре окрашенные грани; по три окрашенные грани; по две окрашенные грани; по одной окрашенной грани;

ж) останется неокрашенных кубиков.

83 Непредвиденная встреча

Два поезда, каждый состоящий из 80 вагонов, встретились на одноколейном пути, имеющем небольшую тупиковую ветку (рис. 33).

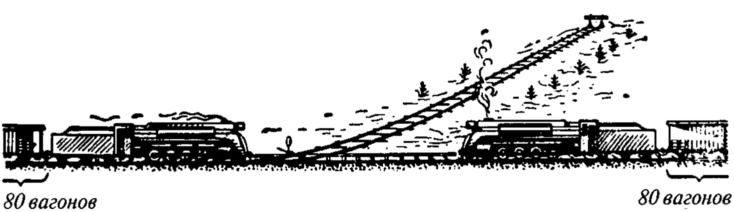


Рис. 33

Как разойтись этим поездам, если тупиковая ветка может вместить паровоз и с ним не больше 40 вагонов?

84 Попробуйте отвесить

В пакете содержится 9 кг крупы. Попробуйте с помощью чашечных весов с гирями в 50 и 200 г распределить всю крупу по двум пакетам: в один – 2 кг, в другой – 7 кг. При этом разрешается произвести только три взвешивания.

85 Передача

Шкивы *А*, *Б*, *В* и *Г* соединены передачами, как показано на рисунке 34. Если при таком соединении движение всех четырех шкивов возможно, то в каком направлении будет вращаться каждый шкив в том случае, когда шкив *А* вращается в направлении, указанном стрелкой?

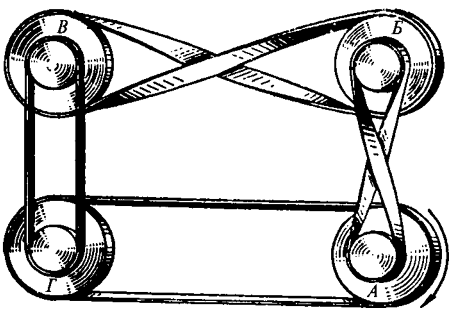


Рис. 34

Возможно ли движение шкивов, если все четыре ремня будут перекрещены, как, например, на шкивах *А* и *Б*? А если только один или три ремня будут перекрещены?

86 Семь треугольников

Скрепляя концы трех спичек шариками из пластилина, легко составить один правильный треугольник (рис. 35).

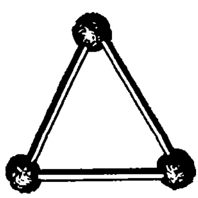


Рис. 35

Возьмите теперь 9 спичек и, так же скрепляя их концы, составьте 7 правильных треугольников.

87 Полотна художника

Один чудак-художник уверял меня, что самыми целесообразными размерами полотен для его произведений являются такие, при которых площадь полотна численно равна его периметру. Не будем обсуждать вопрос, содействуют ли такие размеры полотен художественных произведений лучшему их восприятию, но попытаемся все-таки установить, какие же размеры (допустим, только в целых числах) должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь и периметр выражались одним и тем же числом.

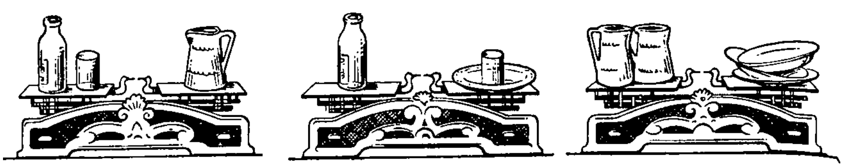
Это не очень легкая задача, и все же одна школьница придумала весьма изящное ее решение. При этом она даже доказала, что возможны всего лишь два прямоугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Кто из вас «откроет» решение девочки или взамен придумает не менее остроумное свое решение этой задачи?

88 Сколько весит бутылка?

На левой чашке весов (рис. 36, *а*) – бутылка со стаканом, а на правой – кувшин. Весы находятся в равновесии.

Переставим стакан с левой чашки весов на правую, а кувшин заменим тарелкой (рис. 36, *б*). Весы опять в равновесии.



а) *б)* *в)*

Рис. 36

Уберем бутылку с левой чашки весов и поставим сюда два одинаковых кувшина, а на правой заменим стакан двумя одинаковыми тарелками (рис. 36, *в*). Оказывается при этом, что два кувшина весят столько же, сколько три тарелки.

Во сколько раз бутылка тяжелее стакана?

89 Кубики

Мастеру, изготовлявшему детские игры, дали определенное количество деревянных кубиков одинакового размера, чтобы наклеить на кубики нужные для игры буквы и цифры. Но общая площадь наружной поверхности всех кубиков оказалась недостаточной. Ему потребовалась вдвое бóльшая площадь.

Как мастер удвоил сумму площадей всех граней кубиков, не добавляя новых кубиков?

90 Банка с дробью

Однажды на строительстве одного из оросительных каналов в полевых условиях нам потребовалось срочно изготовить свинцовую пластинку определенного объема. В походной мастерской свинца не оказалось; тогда мы решили расплавить охотничью дробь. У нас с собой была стеклянная поллитровая банка с делениями, как мензурка. Насыпали в нее дроби доверху.

Но получится ли из этой дроби пластинка нужного объема? Ведь свинец – не вода; его объем мензуркой не измеришь. Как же определить объем собранной дроби?

Кто-то предложил найти объем одной дробинки по формуле объема шара и сосчитать число дробинок. Но это сложно и долго, тем более, что дробинки оказались разной величины.

Если предмет однородный (из одного вещества), то его объем можно определить делением его массы на плотность вещества, из которого сделан предмет, но, как назло, никто из нас не мог вспомнить, какова плотность свинца.

И все-таки мы быстро и достаточно точно определили объем дроби, причем все расчеты состояли из одного действия – вычитания. Как мы это сделали?

91 Куда пришел сержант?

Выполняя приказ командира, сержант вышел из населенного пункта *М* по азимуту 330°. Дойдя до кургана, он пошел по азимуту 30° и дошел до отдельно стоящего дерева. Отсюда он повернул направо на 60°. Дойдя по этому направлению до моста, сержант пошел берегом реки по азимуту 150°. Выйдя через полчаса к мельнице, сержант опять изменил направление и пошел по азимуту 210°, ориентируясь на дом мельника. Придя к дому мельника, он еще раз свернул направо и, идя по азимуту 270°, вышел точно на заданное место.

Пользуясь транспортиром, аккуратно постройте в своей тетради весь маршрут сержанта и определите, куда пришел сержант, если известно, что по каждому азимуту он проходил 2,5 км?

92 Определить диаметр бревна

Каков примерно диаметр слоя бревна, из которого изготовлен фанерный лист, изображенный на рис. 37? Размеры листа 150 × 150 см. Напоминаю, что диаметр окружности D приближенно вычисляется по формуле: $D \approx \frac{C}{3{,}14}$, где C – длина окружности, но не ошибитесь в решении предложенной задачи. Учтите, что диаметр слоя бревна $D \neq \frac{150}{3{,}14}$.

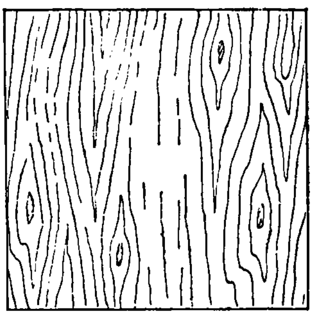


Рис. 37

93 Неожиданное затруднение

Студенту надо было начертить деталь в виде цилиндра с выемками на основаниях (рис. 38). Для измерения глубины выемки в таких случаях надевают на штангенциркуль специальное приспособление – глубиномер, но в данный момент у студента не было никаких измерительных приспособлений, кроме кронциркуля и масштабной линейки. Измеряя деталь с помощью кронциркуля, студент неожиданно натолкнулся на следующее препятствие: чтобы определить расстояние между самыми глубокими точками выемок вдоль оси цилиндра, ему нужно снять кронциркуль с детали и приложить его к масштабной линейке. Но как это сделать? Ведь, чтобы снять кронциркуль с детали, придется раздвинуть ножки кронциркуля и... потерять искомый размер. Как же быть?

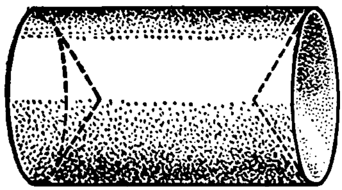


Рис. 38

94 Можно ли получить 100 % экономии?

Некто узнал о трех изобретениях: одно из них экономит 30 % топлива, другое – 45 %, третье – 25 %. Этот человек решил применить все три изобретения сразу, предполагая сэкономить 30 % + + 45 % + 25 % = 100 % топлива. Но разве это так? Сколько процентов экономии он получит на самом деле?

95 На пружинных весах

Имеется несколько пружинных весов. Предельная нагрузка для пружинных весов – 5 кг. Как, пользуясь только пружинными весами, найти массу бруса, равную на глаз 15–20 кг?

96 Конструкторская смекалка

1°. Как составить цепочку в три звена из трех ленточек, чтобы при разрезании *любого одного* звена цепочка распалась на три

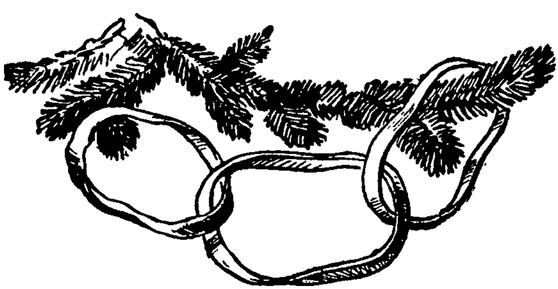


Рис. 39

части? Обычное зацепление, изображенное на рис. 39, очевидно, не годится, так как в этом случае цепочка распадается на три отдельные ленточки при разрезании только среднего звена, а не любого, как требуется в условии задачи.

2°. Как составить цепочку в пять звеньев из пяти лент так, чтобы существовало *только одно* звено, при разрезании которого цепочка распалась бы на пять отдельных частей?

3°. Как составить цепочку в пять звеньев из пяти лент, чтобы при разрезании *любого одного* звена цепочка распалась на пять отдельных частей?

97 Мишина неудача

Вот что увидел Миша. Его старший брат Игорь взял игрушечный деревянный кубик и так искусно его распилил, что в сечении получился правильный шестиугольник (рис. 40), затем карандашом провел отрезки, соединяющие вершины шестиугольника через одну, – получилась шестиконечная звезда.

В треугольных промежутках между лучами звезды (на рис. 40 незаштрихованные треугольники) Игорь ножиком срезал тонкий слой дерева, наклеил на звезду резиновую пластинку, аккуратно обрезал ее по контуру звезды и сказал: «Штамп готов».

Мише это понравилось, и он решил, что ему было бы полезно иметь точно такой же штамп пятиконечной звезды.

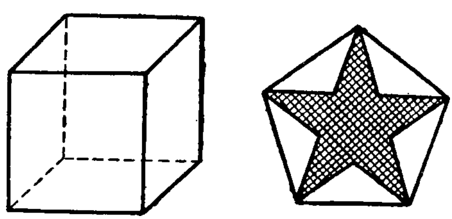


Рис. 40

Он знал, что пятиконечную звезду можно изготовить таким же способом из правильного пятиугольника (рис. 41). Для этого Миша тоже взял кубик из своего «строительного материала» и стал пытаться распилить его так, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник. Но Мишу постигла неудача.

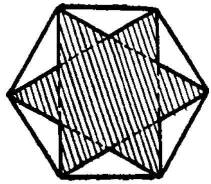


Рис. 41

Как он ни пытался одним разрезом кубика получить правильный пятиугольник, ничего не выходило. Получались правильные треугольники разных размеров, получались квадраты и правильные шестиугольники, причем уже только одного размера, а пятиугольника – ни одного.

Надо помочь Мише разобраться в следующих вопросах:

1°. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

2°. Как надо распилить кубик, чтобы в сечении получился правильный треугольник или правильный пятиугольник?

3°. Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный многоугольник с числом сторон, большим, чем 6?

98 Найти центр окружности

Как найти центр начерченной окружности (рис. 42) с помощью одного только чертежного треугольника без делений и карандаша (причем карандаш разрешается использовать только для того, чтобы проводить необходимые линии).

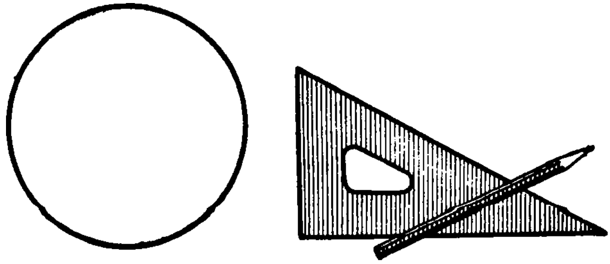


Рис. 42

99 Какой ящик тяжелее?

Имеются два одинаковых ящика кубической формы, наполненные шарами одинаковой плотности (т. е. изготовленными из одного и того же материала). В первом ящике находится 27 одинаковых крупных, а во втором – 64 одинаковых мелких шара.

Какой ящик тяжелее?

Предполагается, что в обоих ящиках шары уложены вплотную доверху так, что в каждом слое находится по одинаковому числу их и крайние шары каждого слоя касаются стенок ящика. Если ящик закрыть, то крышка также будет касаться шаров верхнего слоя.

100 Искусство столяра

На выставке работ молодых столяров нам показали удивительный деревянный куб. Он составлен из двух частей, соединенных плотно с помощью шипов, очертания которых заметны на каждой из четырех боковых граней куба (рис. 43). Части куба не склеены и, очевидно, должны разъединяться, но как?

Мы пытались тянуть их вверх и вниз, влево и вправо, вперед и назад – безуспешно.

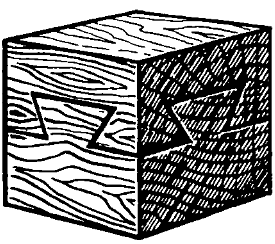


Рис. 43

Не догадаетесь ли вы, как же все-таки разъединялись части куба и какой вид имела каждая из них?

101 Геометрия на шаре

Каждому, кто изучал геометрию, приходилось, конечно, решать задачи на построение с помощью циркуля и линейки, т. е. вычерчивая дуги окружностей и прямые. При этом все необходимые построения производились на бумаге или классной доске.

Но вряд ли приходилось вам, решая геометрическую задачу, выполнять построения не только на плоском листе бумаги, но и на какой-нибудь кривой поверхности, предположим, на поверхности реального шара? Именно таким способом можно, например, определить диаметр данного реального шара, если пользоваться только циркулем и линейкой.

Положите на стол какой-нибудь шар, возьмите лист бумаги, циркуль, линейку без делений, карандаш и подумайте, как построить на бумаге *отрезок, равный диаметру шара.*

102 Нужна большая смекалка

Деревянный брусок (прямоугольный параллелепипед) с ребрами длиной в 8 см, 8 см и 27 см (рис. 44) требуется распилить лобзиком на четыре части, из которых можно было бы составить куб.

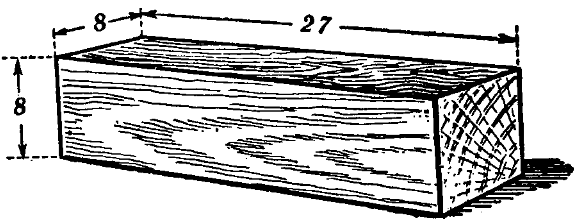


Рис. 44

Желательно, конечно, не пилить брусок наудачу, а сначала подумать, посчитать и спланировать на чертеже.

Это потребует от вас хороших пространственных представлений и сообразительности.

103 Трудные условия

Для тренировки своей смекалки представьте себе такое вынужденное положение: вам необходимо, пользуясь *только масштабной линейкой*, определить объем бутылки (с круглым, квадратным или прямоугольным дном), которая частично наполнена жидкостью.

Дно бутылки предполагается плоским. Выливать или доливать жидкость не разрешается.

Трудные условия! Но тем интереснее преодолеть затруднения.

104 Сборные многоугольники

Представьте себе, что в вашем распоряжении имеется неограниченное количество равных между собой многоугольников. Требуется, плотно прикладывая их друг к другу, составить из них один многоугольник такой же формы, какую имеют данные многоугольники, но большего размера, точнее – составить многоугольник, подобный данным.

Прикладывая друг к другу многоугольники, разрешается их как угодно поворачивать и переворачивать, но не гнуть и не разрывать на части.

Не каждый многоугольник пригоден для этой цели. Так, равные правильные шестиугольники хорошо укладываются на плоскости (вспомните пол, выложенный метлахскими плитками), но составить из них один правильный шестиугольник невозможно.

Из равных квадратов или равных правильных треугольников легко составить подобные им фигуры (рис. 45).

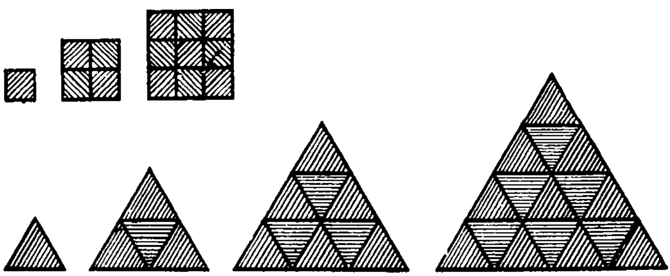
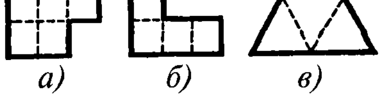


Рис. 45

Весьма пригодными «блоками для строительства» подобных себе фигур являются многоугольники, изображенные на рис. 46, и аналогичные им, которые можно составить из равных квадратов (например, из клеток клетчатой бумаги) или из равных правильных треугольников.

Многоугольники, подобные изображенным на рис. 46, можно составить как из 4 фигур каждого данного вида, так и из 9 или 16, или еще большего числа данных многоугольников.



а) *б)* *в)*

Рис. 46

Например, на рис. 47 показано, как из 4 многоугольников вида *а* или *б* или из 16 многоугольников вида *в*, изображенных на рис. 46, составляются подобные им фигуры.

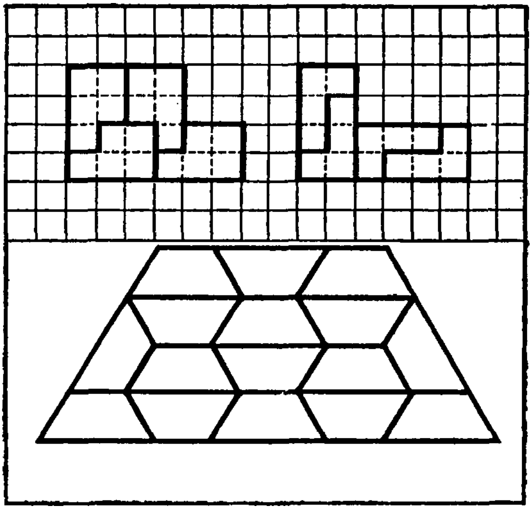


Рис. 47

Для такого «сооружения» фигур, подобных данной, как видно, необходимо иметь не меньше чем 4 одинаковые первоначальные фигуры, а затем либо 9, либо 16, вообще n^2 фигур, где n – определенное целое число.

Это вполне закономерно. Здесь практически подтверждается известная теорема геометрии о том, что площади подобных многоугольников относятся как квадраты их соответственных линейных размеров.

При составлении многоугольника из набора одинаковых, подобных ему многоугольников мы можем ожидать, что длины его сторон будут больше длин соответствующих сторон первоначального многоугольника в 2 или в 3, 4, ..., n раз. Тогда его площадь будет в 2^2 или в 3^2, 4^2, ..., n^2 раз больше площади первоначального многоугольника и, следовательно, для «строительства» требуемой фигуры понадобится соответственно 4 или 9, 16, ..., n^2 первоначальных фигур.

Задача. Составьте многоугольники, подобные изображенным на рис. 46: 1) из 9 фигур вида *а*; 2) из 9 фигур вида *б*; 3) из 4 фигур вида *в*; 4) из 16 фигур вида *б*; 5) из 9 фигур вида *в*.

Приготовьте из бумаги (в прямую и косую клетку) другие «блоки», аналогичные изображенным на рис. 46 (нарежьте их в большом количестве), и устройте соревнование – кто быстрее и из меньшего числа многоугольников данного вида составит подобные им фигуры.

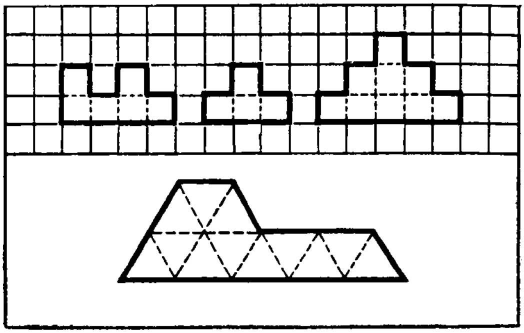


Рис. 48

Имейте в виду, что не каждый многоугольник можно составить из 4 или 9 подобных ему фигур.

Самым меньшим числом требующихся фигур может оказаться и 16, и 25, и 36, и вообще n^2, где n – любое целое число. Заранее это число не известно, поэтому и интересно, кому удастся для составления многоугольника использовать наименьшее количество данных фигур. Примерные «блоки» изображены на рис. 48. Можете их всячески разнообразить, но при этом помните, что могут быть «блоки», из которых нельзя сложить подобную им фигуру.

Глава 3

Свойства девятки

Некоторые особенности арифметических операций над целыми числами связаны с числом 9. Каждое подмеченное вами свойство девятки может послужить поводом к придумыванию разнообразных математических развлечений. Известен, например, признак делимости на 9: число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. Отсюда следует, что сумма цифр в произведении любого числа на 9 равна девяти или кратна девяти (т. е. делится на 9). Например, $354 \cdot 9 = 3186$, тогда $3 + 1 + 8 + 6 = 18$ (делится на 9).

Поэтому, когда один малыш жаловался, что ему трудно запомнить таблицу умножения первых десяти чисел на 9, отец малыша предложил ему простой способ помочь памяти пальцами своих рук.

Вот этот способ.

Движением пальца. Положите обе руки рядом на стол и протяните пальцы. Каждый палец слева направо будет означать соответствующее порядковое число: первый слева – 1, второй – 2, третий – 3, четвертый – 4 и т. д. до десятого, который будет обозначать число 10. Пусть требуется умножить любое число из первого десятка на 9. Для этого вам стоит только, не сдвигая рук со стола, приподнять вверх тот палец, который обозначает множимое. Тогда число остальных пальцев, расположенных слева от поднятого пальца, является числом десятков произведения, а число пальцев справа – числом единиц.

Пример. Умножим 7 на 9. Кладите руки на стол и поднимите седьмой палец (рис. 49); слева от поднятого пальца лежат 6 пальцев, а справа – 3. Значит, результат умножения 7 на 9 равен 63. Это удивительное на первый взгляд механическое умножение сразу же станет понятным, если вспомнить, что сумма цифр в каждом произведении чисел таблицы умножения на 9 равна девяти, а число десятков в произведении всегда на 1 меньше того числа, которое мы умножаем на 9. Поднятием соответствующего пальца это мы и отмечаем, а следовательно, и ... умножаем.

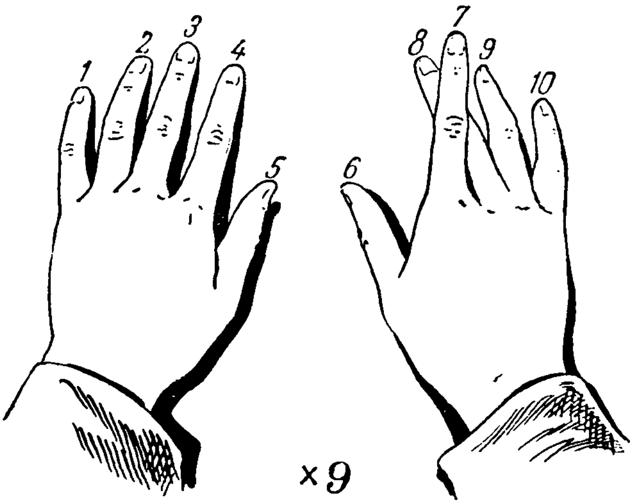


Рис. 49

Человеческая рука есть одна из первых счетных машин!

Еще некоторые свойства. Вот еще несколько интересных и полезных для дальнейшего свойств, связанных с числом 9.

1°. Всегда делится на 9:

а) разность между любым числом и суммой его цифр;

б) разность двух чисел с одинаковыми цифрами, но разным порядком их расположения;

в) разность двух чисел с одинаковыми суммами цифр у каждого из них.

2°. Если из каких-либо цифр составлены числа, отличающиеся только порядком следования цифр, то при делении на 9 каждого из них получается один и тот же остаток. Он равен остатку от деления на 9 суммы цифр какого-либо из упомянутых чисел.

3°. Остаток от деления суммы цифр числа на 9 будем называть «излишком». Тогда:

а) излишек суммы (разности) чисел равен излишку суммы (разности) излишков слагаемых;

б) излишек произведения двух чисел равен излишку произведения излишков этих чисел.

Вы легко проверите эти свойства на числовых примерах, а если знакомы с алгеброй, то можете их доказать.

В качестве самостоятельного упражнения найдите аналогичное соотношение для излишка частного от деления двух чисел.

Разобравшись в решении задач этой главы, вы можете многие из них использовать в качестве математических фокусов.

105 Какая цифра зачеркнута?

1°. Пусть ваш друг напишет, не показывая вам, число из трех или более цифр, разделит его на 9 и назовет вам остаток от такого деления. Теперь предложите ему зачеркнуть во взятом им числе одну цифру (любую); пусть число, образовавшееся после зачеркивания цифры, он опять разделит на 9 и снова назовет вам остаток от этого деления. Тогда вы сразу можете сказать, какая цифра была зачеркнута, руководствуясь следующими правилами:

а) если второй остаток меньше первого, то, вычитая из первого остатка второй, вы получите зачеркнутую цифру;

б) если второй остаток больше первого, то зачеркнутую цифру вы получите, вычитая второй остаток из первого, увеличенного на 9;

в) если остатки равны, то зачеркнута либо цифра 9, либо 0.

Почему так получается?

2°. Теперь предложите вашему другу придумать два числа с одинаковыми цифрами, но разным порядком их расположения, и вычесть из большего меньшее. Ни написанных чисел, ни полученной разности он вам, конечно, говорить не должен, но пусть он зачеркнет одну цифру разности (только не 0) и скажет вам сумму всех оставшихся цифр разности. Чтобы определить зачеркнутую цифру, вам достаточно дополнить названное им число до ближайшего кратного девяти.

Например,

72 105 – 25 071 = 47 034.

Зачеркиваем цифру 3. Сумма оставшихся цифр: 4 + 7 + 4 = 15. Дополнение числа 15 до ближайшего числа, делящегося на 9, т. е. до 18, равно 3, что и дает зачеркнутую цифру.

Почему это так?

Замечание. Задачу можно всячески разнообразить, основываясь на ранее указанных свойствах девятки. Например, можно предложить вычесть из данного числа сумму его цифр, зачеркнуть одну цифру разности (кроме 0 и 9) и по названной сумме оставшихся цифр разности отгадать зачеркнутую цифру таким же способом.

3°. Напишем произвольное число, например 7146. Одну цифру вычеркнем, например 4. Из оставшегося числа (в котором цифр на одну меньше) вычтем сумму цифр первоначального числа (18). В данном примере получим 716 – 18 = 698. Результат оглашен.

Как, зная результат вычитания, узнать зачеркнутую цифру?

4°. Напишите два или более числа с одинаковым количеством цифр. Я припишу еще столько же чисел и удалюсь, а вас попрошу зачеркнуть любую цифру, кроме нуля, и найти сумму оставшихся чисел. Если теперь вы скажете мне полученную сумму или хотя бы сумму цифр этой суммы, то я немедленно скажу вам, какая цифра зачеркнута.

Например,

$$\begin{array}{r l}
\left.\begin{array}{r}605\\218\end{array}\right\} & \textit{Числа, написанные вами}\\
\left.\begin{array}{r}\cancel{7}81\\394\end{array}\right\} & \textit{Числа, приписанные мною}\\
\hline
1298 &
\end{array}$$

Сумма цифр полученной суммы 1 + 2 + 9 + 8 = 20. Зачеркнута цифра 7.

Какие числа я должен приписать и как определить зачеркнутую цифру?

5°. В предыдущей задаче рекомендовалось приписывать столько же чисел, сколько было написано задумавшим. Но при тех же условиях можно ограничиться приписыванием только одного числа.

Например,

$$\begin{array}{r l}
\left.\begin{array}{r}3521\\40\cancel{8}6\\7219\end{array}\right\} & \textit{Числа, написанные вами}\\
4272 & \textit{Число, приписанное мною}\\
\hline
19018 &
\end{array}$$

Сумма цифр полученной суммы 1 + 9 + 1 + 8 = 19. Зачеркнута цифра 8.

Какое число я должен приписывать в этом случае и как определить зачеркнутую цифру?

6°. Ту же идею можно выразить в другом оформлении.

Предложите написать рядом несколько столбиков однозначных чисел, а вы припишите справа или слева (по желанию партнера) еще один столбец чисел так, чтобы каждое ваше число дополняло сумму чисел в строке до кратного девяти. Теперь смело можете предложить партнеру вычеркнуть любую цифру, сложить оставшиеся многозначные числа, а по названной вам сумме цифр суммы, пользуясь известным уже правилом, вы легко определите зачеркнутую цифру.

Например,

Приписано мною *Написано партнером*

$$
\begin{array}{r}
63216\\
44802\\
47\cancel{4}21\\
51921\\
\underline{95238}\\
302198
\end{array}
$$

Сумма цифр этой суммы без девятки:

$$3 + 2 + 1 + 8 = 14;\ \ 18 - 14 = 4.$$

Зачеркнута цифра 4.

Интересно, что приписывание своих чисел можно свести к однозначному числу, приписанному в любом месте. Догадайтесь, как?

106 Скрытое свойство

Число 1313 запоминается легко, поэтому с ним удобно манипулировать тому, кто пожелает показать своим товарищам фокус с угадыванием зачеркнутой цифры.

Для этого предложите друзьям написать число 1313 и вычесть из него число, заданное вами. Для вычитания вы можете предложить любое число: одному участнику – одно, другому – другое. Затем пусть каждый из участников к получившемуся у него после вычитания числу припишет справа или слева число, которое он вычитал, но увеличенное на 100 и в образовавшемся новом числе зачеркнет любую цифру, кроме нуля, а вам сообщит оставшиеся цифры. По этим цифрам вы легко определите цифру, зачеркнутую участником.

Какая особенность числа 1313, связанная со свойством девятки, помогает определить зачеркнутую цифру и как это сделать?

107 Еще несколько забавных способов отыскания отсутствующего числа

1°. Из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 я выбираю какие-то восемь и разбрасываю их произвольно по листу бумаги. Чтобы не показывать вам, какие цифры я выбрал, на рис. 50 они заменены кружками. В любом месте листа бумаги проведу прямую *AB* и назову ее «прямой итогов». Написанные цифры произвольно соединяю несколькими линиями, прямыми или кривыми — безразлично, но каждую цифру беру только по одному разу. На «прямой итогов» я запишу суммы цифр, расположенных вдоль каждой линии. Вам я покажу только те числа, которые получились на «прямой итогов», или скажу сумму их цифр.

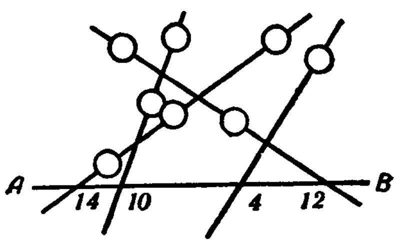


Рис. 50

Числа, выписанные на «прямой итогов» (см. рис. 50), дают следующую сумму цифр: 1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13. Зная только это последнее число, определите, какая цифра не вошла в число первоначально выбранных.

З а м е ч а н и е. Вместо того чтобы разбрасывать по бумаге выбранные цифры, я могу их произвольным образом расположить вдоль сторон заранее начерченного треугольника (рис. 51, *а*), или четырехугольника (рис. 51, *б*), или иного многоугольника и на «прямой итогов» записать суммы цифр, расположенных вдоль каждой стороны начерченной фигуры.

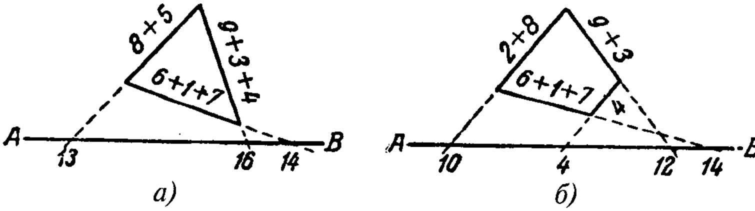


Рис. 51

2°. Теперь я разбросаю по листу бумаги числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Снова проведу «прямую итогов» и все цифры, кроме одной – избранной, соединю несколькими линиями так, чтобы каждая цифра принадлежала только одной линии. Чтобы не показывать вам, какую цифру я выбрал, на рис. 52 каждое число заменено прямоугольником с двумя отделениями, соответствующими цифрам этого числа. Выпишу на «прямой итогов» суммы цифр чисел, расположенных вдоль каждой линии, и попрошу вас опять-таки по этим суммам определить цифру, оставшуюся вне линий. Для тех, кто разобрался в предыдущей задаче, – это нетрудно.

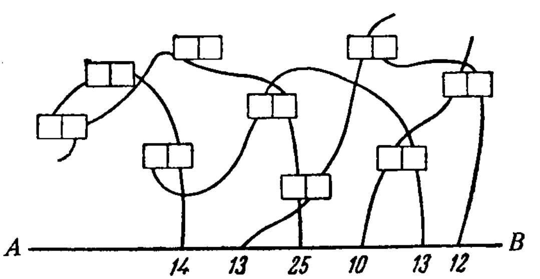


Рис. 52

3°. Напишите все порядковые числа от 1 до 8 и выберите любимое число. Остальные семь чисел произвольно расположите в две или более колонок. Сложите все числа, рассматривая их как многозначные, и сообщите мне сумму или сумму цифр суммы. Я быстро определю ваше любимое число. Как я это делаю?

108 По одной цифре результата определить остальные три

Некоторое двузначное число с одинаковыми цифрами было умножено на 99. Легко понять, что в произведении должно получиться четырехзначное число, но сохранилась только одна (третья) цифра результата. Как, зная эту цифру, восстановить весь результат?

Допустим, сохранившаяся цифра – 5. Каков весь результат?

109 Отгадывание разности

Напишите, не сообщая мне, любое трехзначное число с неодинаковыми крайними цифрами (допустим, 621) и составьте новое число из тех же цифр, но расположенных в обратном порядке (для данного примера 126). Вычислите разность между этими числами, вычитая из большего меньшее (621 – 126 = 495), и назовите мне последнюю цифру разности (5), а я скажу весь полученный результат.

Каким образом?

110 Определение возраста

Если переставить цифры лет A, то получится возраст B. Разность между возрастами A и B дает удвоенный возраст C, а B в 10 раз старше C. Определите возраст каждого.

111 В чем секрет?

Один из гостей нашей дружеской компании объявил нам, что берется, не раздумывая долго, написать любое количество чисел с нечетным числом цифр, каждое из которых будет обладать следующим удивительным свойством:

> если сложить все цифры написанного им числа, а затем сложить все цифры полученной суммы и так повторять до тех пор, пока сумма цифр не изобразится *одной* цифрой, то эта цифра непременно окажется той же, что и *средняя* цифра исходного числа.

Тут же он нас просто забросал такими числами. Среди чисел были и трехзначные, например 435, и пятизначные, такие как

46 **8**53, и даже тринадцатизначные, например **1** 207 94**1** 800 554. Он писал числа, содержащие такие цифры, которые мы требовали... И всегда объявленное им свойство цифр выполнялось.

Проверим это хотя бы на числах, приведенных в качестве примеров. Имеем:

$$4 + 3 + 5 = 12;\ 1 + 2 = 3;$$

$$4 + 6 + 8 + 5 + 3 = 26;\ 2 + 6 = 8;$$

$$1 + 2 + 7 + 9 + 4 + 1 + 8 + 5 + 5 + 4 = 46;\ 4 + 6 = 10;\ 1 + 0 = 1.$$

Действительно, окончательная сумма цифр каждый раз точно указывает среднюю цифру числа.

В чем же секрет нашего гостя?

Глава 4

С АЛГЕБРОЙ И БЕЗ НЕЕ

Вместе с развитием математики как науки совершенствовалось и искусство решения задач. Чисто арифметические приемы решения по мере развития буквенной символики постепенно уступали место алгебре с ее аппаратом уравнений. Обозначение неизвестных чисел буквами и последующее установление связей между неизвестными и известными числами, т. е. составление уравнения задачи, оказалось мощным, общедоступным и единообразным методом решения разнотипных задач.

Решая задачу, мы всегда рассуждаем, но при этом стремимся составить короткую цепочку рассуждений. В одних случаях удобнее и проще вести рассуждения «от неизвестного к известному», завершая их составлением одного или нескольких уравнений (алгебраический способ). На этом пути для наиболее целесообразного выбора неизвестного, относительно которого составляется уравнение, следует учитывать характерные особенности условия каждой задачи. Чтобы впоследствии успешно решать трудные задачи, необходимо владеть алгебраическими приемами рассуждений. В других случаях, наоборот, естественнее решать задачу отдельными этапами, «от известного к неизвестному», конкретно истолковывая каждый этап решения (арифметический способ).

Оба указанных способа рассуждений как бы дополняют друг друга; на каждом из них могут возникнуть остроумные и изящные приемы решения задач.

112 Взаимная помощь

Для выполнения некоторого задания были привлечены три бригады рабочих. Сначала из первой бригады перешло во вторую и третью столько рабочих, сколько имелось в каждой из них.

Через некоторое время в свою очередь вторая бригада передала в распоряжение первой и третьей столько рабочих, сколько к этому моменту имелось в каждой из них. К концу выполнения задания и третья бригада передала первой и второй столько рабочих, сколько было в каждой из них. После этого в каждой бригаде оказалось по 24 рабочих.

Сколько рабочих было первоначально в каждой бригаде?

113 Смышленый малыш

Три брата получили 24 яблока, причем каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет три года тому назад. Самый младший, мальчик очень смышленый, предложил братьям такой обмен яблоками:

– Я, – сказал он, – оставлю себе только половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну; после этого пусть наш средний брат тоже оставит себе половину, а остальные яблоки даст мне и старшему брату поровну, а затем и старший брат пусть оставит себе половину всех имеющихся у него яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну. Братья, не подозревая коварства в таком предложении, согласились удовлетворить желание младшего. В результате... у всех оказалось яблок поровну.

Сколько же лет было малышу и каждому из остальных братьев?

114 Охотники

Три охотника несколько дней подряд провели в тайге на охоте. В последний день охоты утром случилась неприятность: переходя вброд небольшую речку, два охотника подмочили свои патронташи. Часть их патронов оказалась негодной к употреблению. Тогда три друга поровну поделили между собой сохранившиеся патроны.

После того как каждый охотник сделал четыре выстрела, у всех охотников вместе осталось столько патронов, сколько было после дележа у каждого.

Сколько всего пригодных патронов было в момент дележа?

115 Встречные поезда

Два товарных поезда, оба длиной по 250 м, движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью 45 км/ч.

Сколько секунд пройдет после того, как встретились машинисты, до того, как встретятся кондукторы последних вагонов?

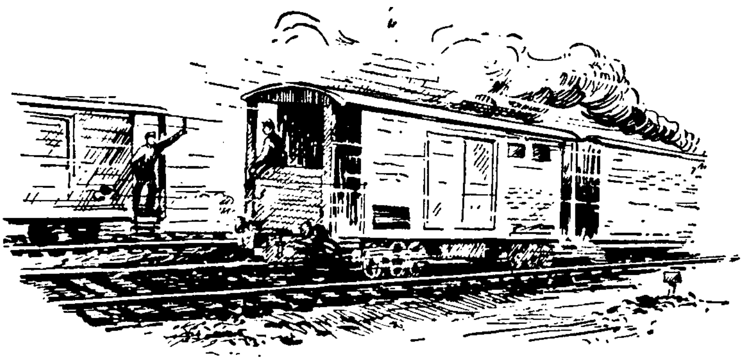


Рис. 53

116 Вера набирает рукопись

Мама поручила Вере набрать на компьютере рукопись.

– Буду набирать в среднем по 20 страниц в день, – решила Вера. Но первую половину рукописи она набирала лениво, только по 10 страниц в день. Зато вторую половину рукописи она набирала по 30 страниц в день.

– Вот и получилось в среднем по 20 страниц в день, – сделала вывод Вера.

– Ты неправильно считаешь, – сказала мама.

– Как неправильно? 10 + 30 = 40; 40 : 2 = 20. В первой половине рукописи я недонабирала по 10 страниц в день, а во второй я набирала больше средней нормы на те же 10 страниц.

– Тем не менее, – настаивала мама, – в среднем ты набирала менее 20 страниц в день. Подумай-ка еще как следует.

Убедительны ли доводы Веры? Что показывает ваш расчет?

117 История с грибами

Пятеро друзей: Маруся, Коля, Ваня, Андрюша и Петя пошли по грибы. Правда, грибами всерьез занялась одна Маруся, что же касается мальчиков, то они большую часть времени провалялись на траве, рассказывая друг другу всякие небылицы.

Рис. 54

В результате, когда собрались возвращаться домой, оказалось, что у мальчиков корзины пустые, в то время как Маруся в своей корзине насчитала 45 грибов.

– Неудобно вам, ребята, возвращаться домой с пустыми корзинами, – посочувствовала Маруся и рассыпала по корзинам мальчиков все свои грибы (в своей корзине не оставила ни одного гриба). Однако на обратном пути Коля и Андрюша натолкнулись на грибное место и дополнили свои корзинки, причем Коля нашел два гриба, а Андрюша удвоил количество бывших у него грибов. Ваня и Петя всю дорогу озорничали и растеряли часть своих грибов. Ваня потерял две штуки, а Петя потерял половину грибов, полученных от Маруси.

Когда дома стали считать принесенные грибы, у всех мальчиков оказалось грибов поровну. А когда грибники рассказали товарищам всю историю с грибами, любителей математики заинтересовал вопрос: смогут ли они на основании этого рассказа подсчитать, сколько грибов получил каждый мальчик от Маруси? Как вы полагаете?

118 Кто вернется раньше?

Два спортсмена, тренируясь, одновременно начали лодочные гонки: один по реке, вниз и вверх по течению, а другой на такое же расстояние по озеру со стоячей водой, расположенному рядом с рекой. Допустим, что усилия обоих гребцов совершенно одинаковы. Какой из них вернется раньше? Время, затрачиваемое на поворот, в расчет не принимается.

119 Пловец и шляпа

Пусть некто, выпрыгнув из лодки, уносимой течением реки, плывет некоторое время против течения, а затем поворачивает и догоняет лодку.

На что он затратил больше времени: на то, чтобы плыть против течения или на то, чтобы догнать лодку? Или, может быть, оба количества времени одинаковы?

При этом предполагается, что усилия пловца все время одинаковы.

Какой ответ на поставленный вопрос подсказывает вам первоначальная догадка и подтверждается ли она последующими рассуждениями?

А правильный ответ таков: пловец догонял лодку по течению столько же времени, сколько времени он плыл первоначально против течения.

В самом деле, течение реки уносит вниз с одинаковой скоростью как лодку, так и пловца, т. е. течение само по себе не влияет на расстояние между пловцом и лодкой, как будто бы течения и нет вовсе. Отсюда и следует, что даже при наличии течения пловец приближается к лодке столько же времени, сколько времени он удалялся от нее.

Теперь представьте себе, что с моста, перекинутого через небольшую речку, спрыгнул спортсмен и поплыл против течения. Одновременно с головы одного из наблюдателей, стоявших на том же мосту, свалилась шляпа и поплыла по течению. Через 10 мин пловец повернул назад, и, когда вновь подплыл к мосту, его попросили, не останавливаясь, плыть дальше и догнать шляпу.

Пловец догнал шляпу как раз под вторым мостом, который находился на расстоянии 1000 м от первого моста. Скорость пловца неизвестна, но известно, что он не изменял своих усилий на протяжении всего времени движения. Располагая только указанными данными, вы имеете возможность определить скорость течения этой реки. Сверяя свое решение этой задачи с тем, которое приведено в разделе «Ответы и решения», обратите внимание на изложенный там второй способ решения.

120 Два теплохода

Два учебных теплохода отчалили одновременно от пристани. Теплоход «Степан Разин» – вниз по течению, а теплоход «Тимирязев» – вверх. Собственные их скорости одинаковы. В момент отправления с теплохода «Степан Разин» упал спасательный круг, который поплыл по течению. Через час на обоих теплоходах было получено распоряжение по радио о перемене направления: идущему вниз повернуть вверх, а идущему вверх повернуть вниз. Успеет ли команда теплохода «Степан Разин» поднять плывущий по реке спасательный круг раньше, чем встретятся оба теплохода?

121 Проверьте свою смекалку!

Два глиссера движутся вдоль большого озера, туда и обратно, не задерживаясь у берегов. Скорость каждого глиссера постоянна. Они одновременно покинули противоположные берега: глиссер M покинул берег A, а глиссер N – берег B, и встретились первый раз в 500 м от берега A; возвращаясь, они встретились второй раз в 300 м от берега B.

По этим данным определите длину озера и отношение скоростей глиссеров. Смекалка поможет вам решить задачу «в уме» без сложных вычислений.

122 Во сколько раз больше?

Если от каждого из двух чисел отнять половину меньшего из них, то остаток от большего будет втрое больше остатка от меньшего.

Во сколько раз большее число больше меньшего?

123 Теплоход и гидросамолет

Теплоход отправился в дальний морской рейс. Когда он отошел от берега на расстояние 180 миль, за ним вылетел гидросамолет с экстренной почтой. Скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода. На каком расстоянии от берега гидросамолет нагонит теплоход?

124 Велофигуристы на арене

Ареной служит огромная ровная площадка с четырьмя круговыми дорожками. Четыре велосипедиста разрабатывают здесь свой совместный цирковой номер. Каждый велосипедист движется по своему кругу (рис. 55). Они начинают движение одновременно, причем каждый начинает из той точки своей беговой дорожки, которая ближе всего к центру арены. Скорости движения каждого выражаются следующими числами:

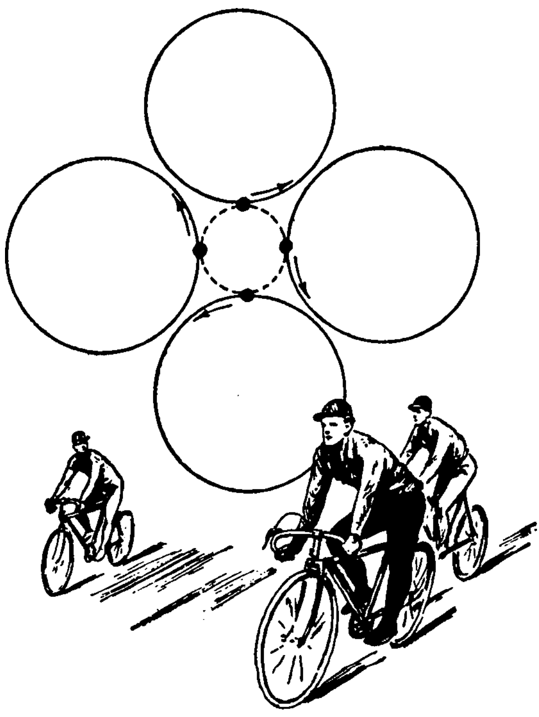


Рис. 55

$v_1 = 6$ ед./ч; $v_2 = 9$ ед./ч; $v_3 = 12$ ед./ч; $v_4 = 15$ ед./ч.

Длина окружности каждого круга составляет $\frac{1}{3}$ условной единицы длины. Продолжительность выступления велофигуристов равна 20 мин.

Будут ли велофигуристы на протяжении этих 20 мин еще один или несколько раз одновременно появляться в точках, из которых они начали движение?

125 Скорость работы токаря

Когда токарь повысил скорость резания чугуна на 1690 м/мин, то время на обработку детали сократилось с 35 мин до 2,5 мин.

Какой скорости резания он добился в тот период времени?

126 Поездка Джека Лондона

В одном из рассказов Джека Лондона описывается, как он на санях, запряженных пятью собаками, спешил из Скагвея к своему лагерю, где находился его умирающий товарищ.

В этом рассказе есть несколько весьма любопытных подробностей, которые позволяют сделать из него интересную задачу.

В течение первых суток пути сани с собаками передвигались с полной, заранее намеченной Джеком Лондоном скоростью. По истечении суток две собаки порвали упряжку и убежали со стаей волков. Писателю пришлось продолжать путь на трех собаках, которые тянули сани со скоростью, равной $\frac{3}{5}$ первоначальной скорости. Вследствие этой задержки он прибыл к месту назначения на двое суток позже намеченного срока.

По этому поводу автор рассказа замечает: «Если бы две убежавшие собаки пробежали в упряжке еще 50 миль, я опоздал бы только на один день против намеченного срока».

Возникает вопрос: каково было расстояние от Скагвея до лагеря? В рассказе об этом ничего не сказано, но приведенных данных достаточно, чтобы определить это расстояние.

127 Из-за неудачных аналогий возможны ошибки

Некоторые умозаключения и даже открытия делаются *по аналогии*, в основе которой лежит предположение о сходстве двух предметов в одних признаках или свойствах на том основании, что эти же предметы сходны в других признаках.

Но аналогия ничего не доказывает. Она может только навести на мысль, правильность которой еще требует проверки, подтверждения.

Хорошо проведенная аналогия имеет место и в математике.

Ясно, что всякое обнаруженное сходство в математических действиях, в применении правил и т. д. облегчает решение задач, помогает мысли, однако же, наблюдая *сходные* свойства и признаки, не забывайте о *различии* между ними.

Неудачные аналогии порождают неверные представления.

Бывает, спрашиваешь собеседника:

– На сколько единиц 40 больше 32?

– На 8,– отвечает он без затруднений.

– А на сколько единиц 32 меньше, чем 40?

– Тоже, конечно, на 8.

– Правильно. Теперь прикиньте, на сколько процентов число 40 больше числа 32? Впрочем, не трудитесь! Я скажу, на сколько. Ровно на 25 %. А вот на сколько процентов число 32 меньше числа 40 – надо посчитать...

– Что ж тут считать,– перебивает собеседник,– вы же ведь сами только сейчас сказали, что 40 больше 32 на 25 %, значит, и 32 меньше 40 тоже на 25 %...

Приходится самым подробным образом разъяснять собеседнику его ошибку.

Действительно, разность в обоих случаях одна и та же и равна 8. Но в первом случае мы относим ее к числу 32, принимаемому за 100 %, а во втором случае – к числу 40, принимаемому за 100 %. Но 8 от 40 составляет $\frac{1}{5}$, или 20 %. Итак, 40 больше 32 на 25 %, в то время как 32 меньше 40 на 20 %.

Причина ошибки собеседника – в ложной аналогии.

Предложите-ка своим знакомым такие задачи:

1°. Допустим, ваш ежемесячный заработок увеличился на 30 %. На сколько процентов возросла ваша покупательная способность?

2°. Пусть ваш ежемесячный заработок остался неизменным, но цены снижены на 30 %. На сколько процентов повысилась ваша покупательная способность?

3°. Букинистический магазин при продаже книги сделал скидки в 10 % с первоначально намеченной цены и при этом все же получил 8 % прибыли. Сколько процентов прибыли предполагал первоначально получить магазин при продаже книги?

4°. Если рабочий сократил время на изготовление детали на p %, то на сколько процентов увеличилась производительность его труда?

Ошибочные ответы на эти простые вопросы вы встретите не так уж редко, но ... предварительно проверьте себя.

128 Юридический казус

Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и составил такое завещание: в случае рождения сына отдать ему $\frac{2}{3}$ имущества, а $\frac{1}{3}$ – матери. В случае же рождения дочери она должна получить $\frac{1}{3}$, а мать – $\frac{2}{3}$ имущества.

Вдова завещателя родила близнецов – мальчика и девочку. Такого события завещатель не предвидел.

Как разделить имущество между всеми тремя наследниками с наилучшим приближением к условиям завещания?

Математическое решение этой задачи зависит от юридического толкования воли завещателя. Одно из возможных юридических обоснований решения задачи дал римский юрист Сальвиан Юлиан. Его решение приведено на с. 201, но не торопитесь туда заглядывать.

Подумайте, поспорьте между собой, предложите свое решение.

129 Парами и тройками

Я решил определить расстояние от моего дома до дома моего приятеля. Я шел равномерным шагом и полпути считал шаги парами, а полпути – тройками, причем пар получилось на 250 больше, чем троек.

Сколько шагов до дома моего приятеля?

130 Кто ехал на лошади?

Два человека – один на лошади, другой на машине – выехали одновременно из деревни в город. Один из них молодой, другой пожилой. Через некоторое время выяснилось, что если бы пожилой проехал расстояние, втрое большее, то осталось бы ему ехать вдвое меньше. Если бы молодой проехал расстояние, вдвое меньшее, то осталось бы ему ехать втрое больше.

Кто из них ехал на лошади – пожилой или молодой?

131 Два мотоциклиста

Два мотоциклиста выехали одновременно из одного и того же места на прогулку. Оба проехали одинаковое расстояние и вернулись домой в одно и то же время.

В пути мотоциклисты отдыхали. При этом известно, что один из них ехал вдвое больше времени, чем отдыхал другой; второй ехал втрое больше времени, чем отдыхал первый.

Кто из мотоциклистов ехал быстрее?

132 В каком самолете Володин папа?

– Скажи, папа,– обратился Володя с вопросом к своему отцу, летчику, – в каком из самолетов ты находился во время воздушного парада?

– Ты легко можешь вычислить это сам, – ответил отец Володе, нарисовав «девятку» самолетов (см. рис. 56).

– Я вспоминаю, что число самолетов по правую сторону от меня, умноженное на число самолетов, находившихся по левую сторону от меня, давало в результате число, на 3 меньшее, чем было бы в том случае, если бы мой самолет находился на три места правее.

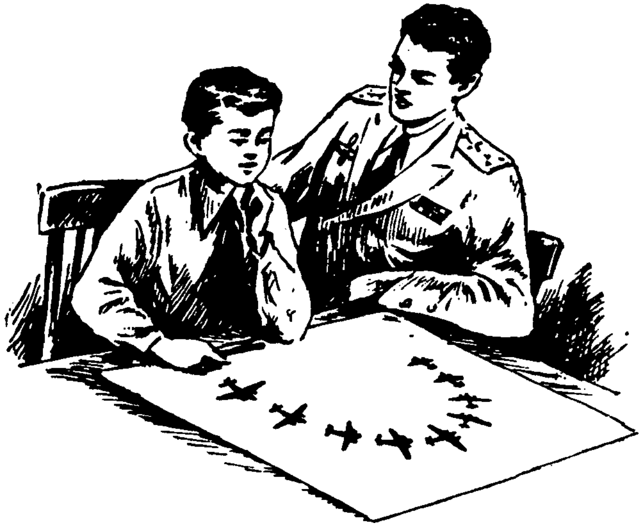


Рис. 56

Володя подумал и показал на рисунке тот самолет, в котором находился его отец.

Как нашел Володя самолет отца?

133 Раздробить на части

Раздробите 45 на четыре части так, что если к первой части прибавить 2, от второй отнять 2, третью умножить на 2, а четвертую разделить на 2, то все результаты будут равными.

Сумеете сделать?

134 Две свечи

Горят две свечи неодинаковой длины и разной толщины. Более длинная сгорает полностью за $3\frac{1}{2}$ ч, а короткая – за 5 ч. Через 2 ч одновременного горения длины свечей оказались равными.

Во сколько раз одна свеча первоначально была короче другой?

135 «Верное время»

В мастерскую «Верное время» принесли четверо часов: стенные, настольные, будильник и ручные.

Стенные часы по сравнению с сигналом точного времени отстают на 2 мин в час. Настольные часы по сравнению со стенными идут вперед на 2 мин в час. Будильник по сравнению с настольными отстает на 2 мин в час. Ручные по сравнению с будильником идут вперед на 2 мин в час. В 12 ч все часы были поставлены по сигналу точного времени.

Какое время покажут ручные часы в 19 ч в момент сигнала точного времени?

136 Часы

Беда с этими часами. В полдень 2 января и я, и Вася поставили их точно. Через несколько дней снова проверили. Оказалось, что мои часы немного спешат, а а Васины отстают. В пересчете на 1 ч получилось, что мои часы спешат на 1 с, а Васины отстают на 1,5 с в час. Мы заинтересовались такими вопросами:

если не переводить стрелки наших часов, то

1) когда в следующий раз мои и Васины часы покажут одно и то же время?

2) когда в следующий раз они покажут одновременно правильное время?

137 В котором часу?

1°. Через некоторое время после полудня мастер пошел обедать. Уходя, он заметил положение стрелок на часах. Когда мастер вернулся, он обнаружил, что минутная и часовая стрелки поменялись местами.

В котором часу вернулся мастер?

2°. Я отсутствовал дома больше двух часов, но меньше трех. Когда я вернулся домой, заметил, что за время моего отсутствия минутная и часовая стрелки наших стенных часов поменялись местами.

На сколько больше двух часов я отсутствовал?

3°. Школьник начал решать задачу между 4 и 5 часами вечера, когда стрелки часов совпадали, а закончил тогда, когда минутная стрелка оказалась против часовой (по одной прямой).

Сколько минут решал задачу школьник, и в котором часу он закончил решение?

138 Когда началось и окончилось совещание?

Совещание началось между 6 и 7 часами вечера, а окончилось между 9 и 10 часами вечера.

Определите точно, когда началось и окончилось совещание, если минутная и часовая стрелки за время совещания поменялись местами.

139 Сержант тренирует разведчиков

– Представьте себе, – сказал сержант, – что два разведчика из нашего отряда отправлены в один и тот же пункт. Оба они прошли одинаковый путь, но первый затратил на весь путь одно время, а второй – другое. Первый разведчик с какой-то определенной скоростью шел *половину* всего затраченного им *времени*. Второй разведчик с такой же скоростью шел *половину пути*. Вторую *половину* своего *времени* первый разведчик шел с *измененной* скоростью; с такой же измененной скоростью шел вторую *половину пути* второй разведчик.

Кто из них скорее пришел к месту назначения?

Для решения этой задачи разведчики брали разнообразные числа в качестве пути и скорости как первоначальной, так и измененной, производили соответствующие вычисления и каждый раз приходили к одному и тому же результату:

первый разведчик затратил меньше времени на весь путь, чем второй.

Те из разведчиков, которые решали задачу алгебраически, получали тот же ответ. Тем самым они доказывали, что в условиях задачи первый разведчик придет скорее второго независимо ни от расстояния, ни от численной величины их скоростей.

Сможете ли вы дать решение этой задачи «на буквах»?

140 По двум сообщениям

Сообщение первое:

– Поезд N прошел мимо меня в течение t_1.

Сообщение второе:

– Тот же поезд N прошел через мост длиной в a м в течение t_2 с.

Как по этим двум сообщениям определить длину и скорость поезда N в предположении, что скорость поезда неизменна?

141 Сколько построили новых станций?

– На одной из наших веток, – сказал начальник железной дороги, – в ближайшее время заканчивается строительство новых пассажирских железнодорожных станций. Мы должны образцово подготовиться к их открытию и не допускать перебоев в работе транспорта.

– Напечатаны ли новые комплекты билетов для пассажиров, пользующихся нашей веткой? – поинтересовался старший кассир дороги.

– Да, все необходимые билеты приготовлены, причем для того чтобы на любой станции нашей ветки пассажир мог получить заранее заготовленный билет до любой другой станции этой же ветки, пришлось в связи с открытием новых станций напечатать 46 дополнительных комплектов билетов.

Определите по этим данным, сколько станций было на железнодорожной ветке и сколько построили новых станций?

142 Выбрать четыре слова

В столбике 14 слов. В каждом слове, начиная со второго, число букв на одну больше, чем в предыдущем. В последнем слове «самообразование» – 15 букв:

УМ
МИР
ФЛАГ
СЛАВА
ПОБЕДА
СВОБОДА

ЕДИНСТВО
СОЦИАЛИЗМ
МАТЕМАТИКА
РАЗМЫШЛЕНИЕ
КВАЛИФИКАЦИЯ
ВООДУШЕВЛЕНИЕ
ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ
САМООБРАЗОВАНИЕ

Из всех этих четырнадцати слов выберите четыре слова так, чтобы были справедливыми следующие два равенства:

$$a^2 = bd,\ ad = b^2c.$$

Через a, b, c и d здесь обозначены количества букв соответственно в первом, втором, третьем и четвертом словах, выбранных вами. Какие это слова?

143 Допустимо ли такое взвешивание?

Хорошие чашечные весы должны быть равноплечими ($a = b$, см. рис. 57). К сожалению, весы, доставленные в бакалейный отдел, оказались немного неравноплечими, и пользоваться ими не разрешалось.

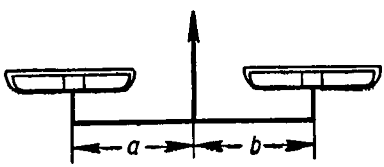


Рис. 57

– Недоброкачественные весы завтра будут заменены правильными, – сказал директор продавцу, – а пока торгуйте только расфасованным товаром.

Перед самым окончанием времени торговли была продана последняя пачка расфасованного сахара, но пришел еще один покупатель, пожелавший купить 2 кг сахара. Продавцу не хотелось отпускать покупателя неудовлетворенным. Он решил воспользоваться неверными весами и предложил покупателю следующий способ взвешивания:

– Я положу 1 кг гирь на левую чашку весов, не уравновешивая их, а сахар – на правую, а потом наоборот: гири на правую чашку, а сахар на левую. Я думаю, что это будет справедливо, так как если в первом пакете у вас будет сахара немного менее 1 кг, то во втором – на столько же более.

Может ли покупатель согласиться с таким способом взвешивания?

Дополнительные вопросы:

1°. Знаете ли вы о том, что существует способ (и даже не один) точного взвешивания на неправильных и не уравновешенных чашечных весах?

2°. Как определить массу груза на неравноплечих, но предварительно уравновешенных весах?

144 Слон и комар

Один любитель математических развлечений, занимаясь както различными преобразованиями алгебраических выражений, пришел к странному выводу, что масса слона равна массе комара! Он рассуждал следующим образом:

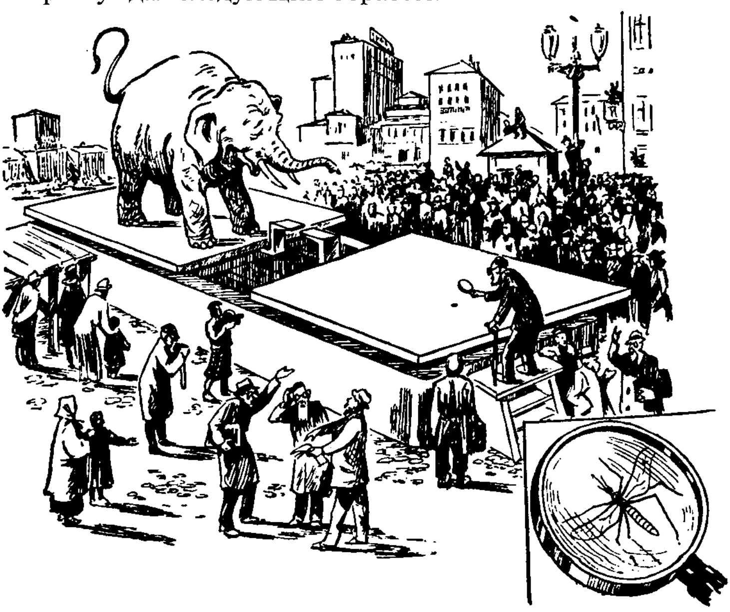


Рис. 58

Пусть x – масса слона, а y – масса комара. Обозначим сумму этих масс через $2v$:

$$x + y = 2v.$$

Из этого равенства можно получить еще два:

$$x - 2v = -y, x = -y + 2v.$$

Перемножим почленно эти два равенства:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy.$$

Прибавив к обеим частям полученного равенства по v^2, имеем

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2, \text{ или } (x - v)^2 = (y - v)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим: $x - v = y - v$, или $x = y$, т. е. масса слона (x) равна массе комара (y).

Разберитесь-ка, в чем тут дело?

145 Пятизначное число

Однажды мне встретилось интересное пятизначное число A. Приписав единицу впереди этого числа, я получил, конечно, число шестизначное: [1] [A]; приписав единицу в конце его, я тоже получил шестизначное число: [A] [1]; но второе шестизначное число оказалось втрое больше первого: $\frac{[A][1]}{[1][A]} = 3$. Найдите это число A.

146 Лет до ста расти вам без старости

В одном случае задача привлекательна предельной четкостью и лаконичностью условия, в другом, наоборот, некоторой витиеватостью, «запутанностью» условия, похожего на тонкое узорчатое кружево.

Не хотите ли, например, установить соотношение между моим и вашим возрастом по следующему «узорчатому» условию?

Сейчас мне и вам вместе 86 лет. Число моих лет составляет $\frac{15}{16}$ от возраста, которого вы достигнете тогда, когда мой возраст составит $\frac{9}{16}$ от того числа лет, которое вы имели бы, если бы дожили до возраста, в 2 раза большего числа моих лет в тот момент, когда я могу быть вдвое вас старше.

Сколько лет мне и сколько вам?

Решить эту задачу можно следующим довольно остроумным способом.

Решение. Всмотритесь в «кружево» условия задачи, и вы различите следующие «узоры», идущие от конца задачи к ее началу:

1°. В какой-то момент времени я могу быть старше вас вдвое. Если в этот момент ваш возраст равен x, то мой – это $2x$. Изобразим для наглядности это соотношение возрастов двумя отрезками, из которых один вдвое длиннее другого (рис 59, *а*).

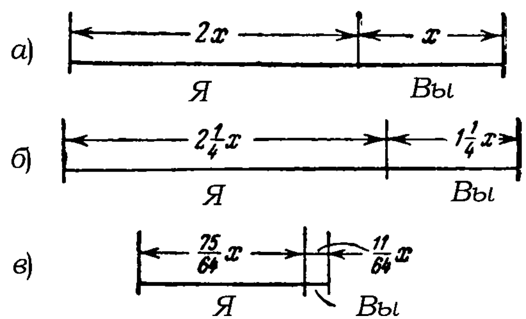


Рис. 59

Отсюда следует, что я старше вас на x лет, и эта разность наших возрастов всегда будет сохраняться.

2°. В какой-то другой момент времени мой возраст составляет $\frac{9}{4}$ от вашего, каким он был в момент 1°; отрезок, изображающий мой возраст, теперь должен иметь длину $2\frac{1}{4}x$, а ваш, как всегда, на x меньше, т. е. $1\frac{1}{4}x$ (рис. 59, *б*).

3°. Сейчас число моих лет составляет $\frac{15}{16}$ от вашего возраста, каким он был в момент 2°, т. е. $\frac{15}{16} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{75}{64}x$, а вам по-прежнему на x лет меньше: $\frac{75}{64}x - x = \frac{11}{64}x$ (рис. 59, *в*).

Так как сейчас нам вместе 86 лет, то $\frac{75}{64}x + \frac{11}{64}x = 86$. Отсюда $x = 64$. Следовательно, мне сейчас $\frac{75}{64} \cdot 64 = 75$ лет, а вам $\frac{11}{64} \cdot 64 = 11$ лет.

Решите самостоятельно аналогичную задачу.

Теперь мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь. Когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, нам вместе будет 63 года. Сколько теперь лет каждому из нас?

147 Задача Люка

Эту задачу придумал французский математик прошлого века Э. Люка. Его соотечественник математик Лезан рассказывает следующую историю, ручаясь за ее достоверность.

На одном научном конгрессе в присутствии многих известных математиков из разных стран Люка объявил, что он хочет предложить всем присутствующим такой вопрос.

– Я полагаю, – сказал Люка, – что каждый день в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется пароход и в тот же самый момент пароход той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Переезд совершается ровно в 7 суток как в том, так и в другом направлении. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встретит пароход, отправляющийся сегодня в полдень из Гавра?

Как вы ответили бы на вопрос Люка? Подумайте о графическом способе решения этой задачи.

148 Своеобразная прогулка

Два мальчика собирались совершить небольшое путешествие на велосипедах. В пути у одного из них велосипед поломался, и его пришлось оставить для починки. Несмотря на это, мальчики решили не прерывать путешествия и продолжать его отчасти пешком, отчасти на велосипеде следующим образом.

Отправляются одновременно оба: один на велосипеде, другой пешком. В известном месте велосипедист оставит велосипед и будет продолжать свой путь пешком. Его спутник, дойдя до условленного места, сядет на велосипед и в тот момент, когда догонит своего товарища, вновь уступит ему велосипед, сам же будет продолжать путь пешком.

На каком расстоянии от конечного пункта их путешествия следует оставить велосипед в последний раз, чтобы оба мальчика одновременно достигли конечного пункта, если от места аварии до цели им осталось 60 км; пешком они передвигаются со скоростью 5 км/ч, а на велосипеде – 15 км/ч.

Был ли выгодным для мальчиков такой способ передвижения?

Глава 5

Математика почти без вычислений

Решение всякой задачи в той или иной мере опирается «на рассуждения», но особую привлекательность имеют такие задачи, в которых основную, решающую роль играет правильное построение цепочки точных, иногда очень тонких рассуждений.

Некоторые из задач подобного рода являются скорее логическими, чем математическими, но и такие задачи развивают «математическое мышление», учат думать, анализировать, заставляют искать нешаблонные пути решения.

149 В темной комнате

Я вошел в комнату, чтобы взять из шкафа свои ботинки и носки. В комнате спала сестра, и было совсем темно. Я хорошо знал, в каком месте шкафа находятся мои три пары ботинок – все разных фасонов, и 12 пар носков – черных и коричневых. Мне не захотелось зажигать свет, чтобы не разбудить сестру.

Действительно, как ботинки, так и носки я обнаружил на своих местах, но, должен признаться, в беспорядке – просто груду из 6 ботинок и кучу из 24 носков.

Сколько ботинок и сколько носков (самое меньшее) мне надо вынести из темной комнаты в светлую, чтобы обеспечить себя парой ботинок одного фасона и парой носков одного цвета, причем фасон обуви и цвет носков мне были безразличны?

150 Яблоки

В ящике перемешаны яблоки трех сортов. Каково наименьшее количество яблок, которое надо взять наугад из ящика, не заглядывая в него, чтобы среди взятых яблок оказались: 1) хотя бы два яблока одного сорта; 2) хотя бы три яблока одного сорта?

151 Прогноз погоды (шутка)

Если в 12 ч ночи идет дождь, то можно ли ожидать, что через 72 часа будет солнечная погода?

152 День леса

В «день леса» двум бригадам – учащимся четвертого и шестого классов было поручено посадить деревья по обе стороны улицы в равном количестве на каждой стороне.

Четвероклассники вышли на работу пораньше и успели посадить 5 деревьев, пока не пришли шестиклассники. Однако оказалось, что четвероклассники сажали деревья не на своей стороне, и им пришлось идти на свою сторону и вновь начинать работу. Конечно, шестиклассники закончили свою работу раньше.

Тогда их бригадир предложил:

– Пойдем, поможем четвероклассникам!

Все согласились. Перешли на другую сторону улицы, посадили 5 деревьев, отдали, значит, долг, да еще успели посадить 5 деревьев, и вся работа была закончена.

– Хотя вы пришли раньше нас, а все-таки мы вас обогнали, – посмеялся один шестиклассник.

– Подумаешь, обогнали! На 5 деревьев только, – возразил кто-то.

– Нет, не на 5, а на 10, – зашумели шестиклассники. Спор разгорался. Одни настаивают на том, что на 5, другие пытаются как-то доказать, что на 10.

До истины, конечно, добрались, но спорили долго. Кто же прав?

153 У кого какое имя?

– Ребята, в наш летний лагерь завтра утром приедут три еще не знакомых вам мальчика: Буров, Гриднев и Клименко, – сказал вожатый, обращаясь к группе сидевших на лужайке ребят из старшего отряда.

– Я могу сообщить имена этих мальчиков: Коля, Петя и Гриша.

– Но кто же из них Буров, кто Гриднев и кто Клименко?

– Давайте, будем угадывать, – предложил кто-то из ребят.

– Я думаю, что Буров – это фамилия Коли, – раздался еще один голос.

– Нет, ты не угадал, – ответил вожатый. – И совсем не надо угадывать. Вы можете сами точно определить не только имена Бурова, Гриднева и Клименко, но даже и возраст каждого из этих мальчиков по тем немногим косвенным сведениям, которые я вам сейчас сообщу о них.

Предложение показалось заманчивым и было принято с удовольствием.

– К тому, что вы уже узнали о приезжающих мальчиках, я добавлю еще только следующие факты:

1°. Отец Нади Серовой, которую вы хорошо знаете, – родной брат матери Бурова.

2°. Петя пошел в школу, когда ему было 6 лет, и учится отлично. А в письме, которое я недавно получил, он пишет:

«...Наконец-то в этом году я начну изучать алгебру, геометрию, физику...»

Добавлю еще, что наш пасечник Семен Захарович Мокроусов приходится Пете родным дедушкой и ждет своего внука с нетерпением.

3°. Гриднев старше Пети на год.

4°. Гриша старше Пети на год.

– Это все?

– Да.

– Но не маловато ли мы узнали о мальчиках, – посомневался кто-то.

– Вполне достаточно, чтобы полностью решить поставленную задачу.

После непродолжительных споров, рассуждений и сопоставлений полученных фактов ребята нашли единственно возможное решение и точно определили имя и возраст своих новых товарищей: Бурова, Гриднева и Клименко.

154 Состязание в меткости

Три мальчика – Андрюша, Боря и Володя – стреляли из мелкокалиберных винтовок по специальной мишени, изображенной на рис. 60. Каждый из мальчиков сделал по 6 выстрелов. Места попаданий в мишень отмечены на рисунке точками. Когда подсчитали результаты, оказалось, что каждый из мальчиков выбил по 71 очку. При этом из всех 18 выстрелов только один дал попадание в центральный круг мишени (50 очков).

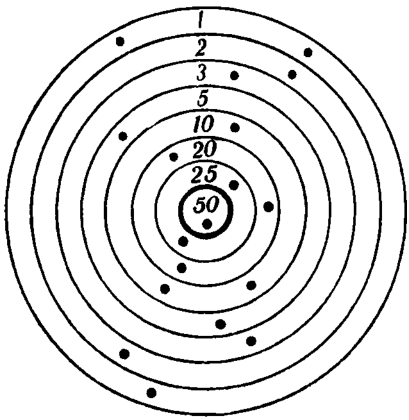


Рис. 60

Кому из мальчиков (Андрюше, Боре или Володе) принадлежал этот самый удачный выстрел – я забыл. Но вы это можете установить по следующим данным: первые два выстрела дали Андрюше 22 очка; первый выстрел Володи дал ему только 3 очка.

Кто же из мальчиков попал в центральное яблоко мишени?

155 Покупка

Девочка купила в магазине 42 карандаша: 15 обыкновенных по 1 р. 60 к., 7 цветных по 2 р. 80 к., 12 для черчения и 8 химических. Ей выписали чек на 89 р. Цены на химические карандаши и карандаши для черчения девочка не помнила, но знала количество этих карандашей, поэтому она сразу обнаружила ошибку в чеке и заявила об этом продавцу. Продавец пересчитал сумму, извинился и исправил чек.

Как девочка обнаружила ошибку?

156 Пассажиры одного купе

В купе одного из вагонов поезда Москва – Одесса ехали москвич, петербуржец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались буквами А, Б, В, Г, Д и Е.

В дороге выяснилось, что А и москвич – врачи; Д и петербуржец – учителя, а туляк и В – инженеры. Б и Е – участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил. Харьковчанин старше А, одессит старше В. Б и москвич сошли в Киеве, а В и харьковчанин в Виннице. Определите профессию каждого из этих шести пассажиров и место жительства каждого из них.

Примечание. Не лишен интереса вопрос о необходимости и достаточности количества фактов, устанавливаемых условием этой задачи.

Может быть, вы заинтересуетесь этим небольшим исследованием?

157 Воскресник

Перед началом учебного года ребята организовали воскресник по заготовке дров для школы. Шестеро из них взялись за распиловку кругляка разной длины на полуметровые отрезки. Школьники разбились на три пары. Один из каждой пары считался бригадиром. Бригадиров звали Володя, Петя и Вася. Володя с Мишей пилили двухметровые кругляки средней толщины. Петя с Костей – полутораметровые кругляки несколько большей толщины, чем двухметровые. Вася с Федей пилили метровые, очень толстые кругляки.

На другой день в школьной стенной газете была отмечена хорошая работа трех бригад пильщиков: бригад Лаврова, Галкина и Медведева.

Сообщалось, что Лавров и Котов напилили 26 штук кругляков, Галкин и Пастухов – 27 штук, Медведев и Евдокимов – 28 штук.

Как зовут Пастухова?

158 Уголовная история

(Из журнала «Scripta Mathematica»)

У учительницы одной из начальных школ штата Нью-Йорк пропал кошелек. Украсть кошелек мог только кто-нибудь из пяти учеников: Лилиан, Джуди, Дэвид, Тео или Маргарет.

При расспросе этих детей каждый из них дал по три показания:

Лилиан: 1) я не брала кошелек; 2) я никогда в своей жизни ничего не воровала; 3) это сделал Тео.

Джуди: 4) я не брала кошелек; 5) мой папа достаточно богат, и я имею свой собственный кошелек; 6) Маргарет знает, кто это сделал.

Дэвид: 7) я не брал кошелек; 8) с Маргарет я не был знаком до поступления в школу; 9) это сделал Тео.

Тео: 10) я не виновен; 11) это сделала Маргарет; 12) Лилиан лжет, утверждая, что я украл кошелек.

Маргарет: 13) я не брала кошелек; 14) в этом виновна Джуди; 15) Дэвид может поручиться за меня, так как знает меня с дня рождения.

При дальнейшем расспросе каждый из учеников признал, что из сделанных им трех заявлений два верных и одно неверное.

Определите, кто из учеников украл кошелек своей учительницы.

159 Сборщики трав

Летом два отряда школьников собирали лекарственные травы одного и того же сорта. За собранные травы ребятам уплатили некоторую сумму денег, большая часть которой составила долю первого отряда, так как ребята этого отряда собрали трав больше, чем ребята второго отряда.

Если, кроме общей суммы денег, уплаченной двум отрядам, известно также, сколько килограммов трав собрал каждый отряд, то распределение денег между двумя отрядами представляет весьма несложную задачу, но все необходимые арифметические действия ребята зашифровали, заменив звездочкой каждую цифру, кроме одной цифры 7, и предлагают вам расшифровать их решение.

Вот это зашифрованное решение:

а) Сколько всего собрано трав?

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} * \\ * \end{array} \\ \hline ** \end{array}$$

б) Сколько рублей стоит один килограмм трав?

$$\begin{array}{r|l} -\,*** & *7 \\ \cline{2-2} ** & ** \\ \cline{1-1} ** & \\ ** & \\ \cline{1-1} == & \end{array}$$

в) Сколько заработал первый отряд?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ** \\ * \end{array} \\ \hline ** \end{array}$$

г) Сколько заработал второй отряд?

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ** \\ * \end{array} \\ \hline ** \end{array}$$

160 Скрытое деление

За одним из столиков клубной комнаты настольных игр происходит молчаливое «сражение» двух юных шахматистов.

Рядом примостилась Оля – редактор математической стенной газеты «Думай!». Сейчас она составляет задачу для очередного номера газеты.

Покончив с делением семизначного числа на двузначное, Оля отложила лист с вычислениями в сторону и принялась за чертеж. Тогда сидевшие рядом шахматисты, не прерывая игры, начали одновременно развлекаться тем, что каждую шахматную фигуру, снятую с доски, ставили на цифры Олиного листа, не придерживаясь при этом какой-либо системы. К моменту окончания партии все цифры делимого, делителя, частного и всех промежуточных произведений и остатков, кроме самого последнего, равного единице, были закрыты шахматными фигурами.

– Оля, вот тебе и задача для газеты, – сказал один из шахматистов, – зарисуй или сфотографируй вот это «фигурное деление» и предложи читателям определить все цифры, скрытые под фигурами.

– А ведь в самом деле получается интересная задача, – обрадовалась Оля, – только подождите; давайте сначала подумаем, имеет ли она решение.

После непродолжительного размышления ребята пришли к заключению, что в таком виде задача еще мало привлекательна, так как допускает много различных решений, но если снять фигуру со средней цифры частного (это цифра 8), то задача становится вполне определенной и имеет единственное решение.

По рис. 61 найдите делимое, делитель и частное.

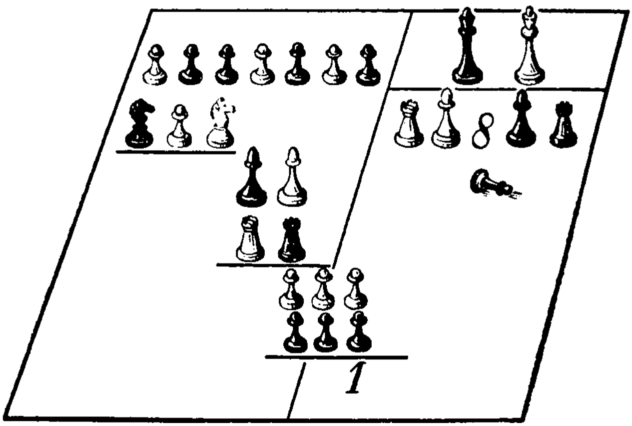


Рис. 61

161 Зашифрованные действия (числовые ребусы)

Арифметические действия зашифрованы: цифры заменены буквами и звездочками. Одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а разными буквами – неодинаковые цифры; звездочки же поставлены взамен всяких цифр, как одинаковых, так и неодинаковых. Каждый ребус можно расшифровать с помощью точных и последовательных рассуждений. Восстановите цифры вместо букв и звездочек.

Первый ребус

```
   ABC
 × BAC
  ____
  ****
   **A
 ***B
 ______
 ******
```

Второй ребус

```
    ***
 ×  *2*
   ____
    ***
  ****
  *8*
 ______
 **9*2*
```

Третий ребус

```
МУХА | ХА
ХА   |____
     | УХА
  КХ
  АР
  УХА
  УХА
   =
```

Четвертый ребус

```
**7*******  | ****7*
******      |______
            | **7**
****77*
*******
  *7****
  *7****
  *******
  ****7**
    ******
    ******
      =
```

Пятый ребус

(имеет четыре решения)

```
******4 | ***
***     |_____
        | *4**
**4*
****
 ****
 *4*
  ****
  ****
   =
```

Шестой ребус. Этот ребус усложнен тем, что не известно даже число цифр делителя, и все же ребус имеет единственное решение. Найдите его.

```
**********  |    ?
***         |_________
            | *****8**
  ***
  ***
   ***
   ***
      **
      **
       ***
       ***
        =
```

Седьмой ребус

(имеет два решения)

DO + RE = MI

FA + SI = LA

RE + SI + LA = SOL

Восьмой ребус

(имеет четыре решения)

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} ФУТ \\ \underline{БОЛ,} \end{array} \\ ИГРА \end{array}$$

где И = 0

162 Арифметическая мозаика

Изображенная здесь мозаика букв и математических знаков представляет собой еще два увлекательных арифметических ребуса, решение которых можно получить не слепым подбором, а логическим путем.

Первый ребус

$$\begin{array}{ccccccc} АТУ & + & ИАЗ & = & ИИТЕ \\ - & & - & & : \\ \underline{НЕГ} & : & \underline{ИОГ} & = & \underline{Е} \\ ПАУ & - & НЗ & = & ППА \end{array}$$

Второй ребус

$$\begin{array}{ccccccc} HEB & + & EUJ & = & LFJ \\ - & & + & & : \\ \underline{WUB} & : & \underline{EH} & = & \underline{UJ} \\ EHB & - & EJU & = & RA \end{array}$$

Как и в предыдущих ребусах, буквами зашифрованы цифры, причем разным буквам соответствуют разные цифры. Между зашифрованными числами поставлены математические знаки, показывающие действия по вертикалям сверху вниз, по горизонталям слева направо. Результат действия по вертикали записан на той же вертикали под чертой, результат действия по горизонтали записан на той же горизонтали после знака равенства.

Восстановите цифры вместо букв так, чтобы точно выполнить все указанные здесь действия.

Расшифровав числовое значение каждой буквы, расставьте буквы соответственно их числовому значению (от 0 до 9). Образуется слово, в первом ребусе – на русском языке, во втором – на немецком. Первое слово – математический термин, а второе слово означает важный шаг в жизни каждого человека.

163 Мотоциклист и верховой

На аэродром к прибытию самолета был выслан мотоциклист из почтового отделения. Самолет прибыл раньше установленного срока, и привезенную почту направили в почтовое отделение с верховым. Проехав полчаса, верховой встретил мотоциклиста, который принял почту, и, не задерживаясь, повернул обратно.

В почтовое отделение мотоциклист прибыл на 20 мин раньше, чем следовало.

На сколько минут раньше установленного срока самолет прибыл на аэродром?

164 Пешком и на автомобиле

Тому, кто разобрался в решении предыдущей задачи, нетрудно самостоятельно найти решение следующей задачи такого же рода.

Инженер, работающий за городом, ежедневно приезжает на станцию в 8 ч 30 мин. Точно в это же время к станции подъезжает служебная машина и, не задерживаясь, отвозит инженера на завод.

Однажды инженер приехал на станцию в 8 ч и, не дожидаясь автомобиля, пошел пешком к заводу. Встретив на пути свою машину, он сел в нее и приехал на завод на 10 мин раньше, чем обычно.

Определите, какое время показывали часы в момент встречи инженера с машиной и во сколько раз медленнее он идет пешком, чем едет на автомобиле.

165 «От противного»

Представьте себе, что имеются два утверждения «А» и «Б», взаимно исключающие друг друга. Из них справедливо, конечно, только какое-нибудь одно. Предположим, требуется доказать справедливость утверждения «А».

Вместо непосредственного, прямого доказательства справедливости утверждения «А» иногда прибегают к косвенному доказательству, т. е. доказывают, что противоположное утверждение «Б» несправедливо, так как приводит к противоречию с достоверными фактами. Этот метод рассуждений, называемый «доказательством от противного», широко применяется в геометрии и алгебре, иногда в арифметике. Однако его с успехом можно применять не только для доказательства теорем, но даже для решения задач.

Рассмотрим применение метода рассуждений «от противного» на таком примере.

Сумма двух чисел равна 75. Первое из них на 15 больше второго. Способом рассуждения «от противного» доказать, что второе число равно 30.

Решение. Предположим, что второе число не равно 30, тогда оно либо больше 30, либо меньше 30. Однако если второе число больше 30, то первое больше 45 и их сумма больше 75, что противоречит условию. Если же второе число меньше 30, то первое меньше 45 и их сумма меньше 75, что также противоречит условию.

Следовательно, второе число равно 30.

Следующие две задачи решите рассуждением «от противного»:

1°. Произведение двух целых чисел больше 75. Докажите, что хотя бы один из сомножителей больше 8.

2°. Произведение некоторого двузначного числа на 5 – также двузначное число. Докажите, что первая цифра данного множимого есть 1.

166 Обнаружить фальшивую монету

Вряд ли в действительности может возникнуть необходимость искать среди одинаковых монет фальшивую с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь, но ради тренировки примем эти условия как исходные для решения следующих трех задач «на рассуждения» (легкой, более трудной и самой трудной).

1°. Имеется 9 монет одинакового достоинства. Известно, что 8 из них имеют одинаковый вес, а одна – фальшивая – немного легче остальных. Требуется с помощью *двух* взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить фальшивую монету.

2°. При тех же условиях выделить фальшивую (более легкую) монету из 8 одинаковых монет также с помощью только *двух* взвешиваний.

3°. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается по массе от настоящих, но не известно, легче она настоящих или тяжелее. Все настоящие монеты имеют одинаковую массу. С помощью *не более трех* взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить фальшивую монету и одновременно установить, легче она или тяжелее остальных.

167 Логическая ничья

На конкурсе любителей задач и головоломок особенно отличились три человека: *А*, *Б* и *В*. Чтобы выделить из них победителя, решили провести еще одно испытание. Показали им пять бумажек: три белые и две черные. Затем всем троим завязали глаза и каждому наклеили на лоб по белой бумажке, а черные бумажки уничтожили. После этого повязки сняли и объявили, что победителем будет тот, кто первым определит цвет своей бумажки. Никто из соревнующихся не мог видеть цвета своей бумажки, но видел белые бумажки у своих товарищей. После некоторого размышления все трое пришли одновременно к заключению, что у каждого из них *белая* бумажка. Как они рассуждали?

168 Три мудреца

Утомившись от споров и летнего зноя, три древнегреческих мудреца – *А*, *Б* и *В* прилегли немного отдохнуть под древом сада Академии и уснули. Пока они спали, шутники испачкали углем их лбы. Проснувшись и взглянув друг на друга, все пришли в веселое настроение и начали смеяться, но это никого не тревожило, так как каждому казалось естественным, что двое других смеются друг над другом.

Внезапно один из мудрецов перестал смеяться, так как он сообразил, что его собственный лоб также запачкан.

Как он рассуждал?

169 Пять вопросов для школьников

Чисто математическая формулировка должна быть достаточно полной, но без ненужных слов. Краткость и точность математического языка является его отличительной и в то же время красивой чертой.

1°. Найдите ненужные слова в следующих знакомых вам математических предложениях:

а) Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

б) Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол содержит 30°.

2°. Используя соответствующие математические термины, упростите следующие фразы:

а) Часть секущей, заключенная внутри окружности.

б) Многоугольник с наименьшим числом сторон.

в) Хорда, которая проходит через центр окружности.

г) Равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне.

д) Две окружности неравных радиусов, имеющие общий центр.

3°. В треугольнике ABC (рис. 62) $AB = BC$, $AD = DC$. Найдите не менее пяти терминов, характеризующих отрезок BD.

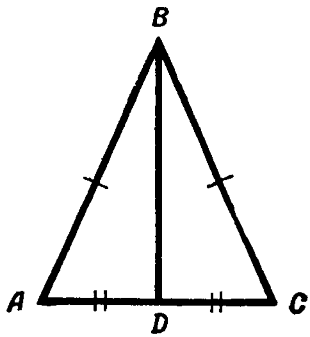


Рис. 62

4°. Вот семь родственных терминов: параллелограмм, геометрический образ, квадрат, многоугольник, плоская фигура, ромб, выпуклый четырехугольник. Расположите эти слова последовательно так, чтобы понятие, обозначенное предыдущим словом, включало в себя понятие, обозначенное последующим словом.

5°. Зная, что сумма всех внешних углов любого выпуклого многоугольника равна четырем прямым углам, сообразите, какое наибольшее число внутренних *острых* углов может быть в выпуклом многоугольнике.

170 Рассуждения вместо уравнения

Каждому человеку, сколько-нибудь изучавшему математику, знакомы те или иные приемы арифметики или, может быть, алгебры и других разделов математики, при помощи которых он и решает математическую задачу.

Есть, конечно, задачи совершенно непосильные человеку, не владеющему хотя бы алгеброй, но есть, естественно, и такие, перед которыми не следует отступать даже и тому, кто не умеет составлять и решать уравнения. Ведь может еще помочь самый обыкновенный здравый смысл, наблюдательность, рассудительность. Это – тоже законные приемы решения задач. Вот и решите-ка «по соображению» следующие 2 задачи:

1°. Если некоторое двузначное число прочитать справа налево, то полученное «обращенное» число будет в $4\frac{1}{2}$ раза больше данного. Что это за число?

В условии задачи данных немного, но, искусно их используя, можно решить эту задачу одними «рассуждениями» примерно так:

а) Искомое число больше 10, так как оно двузначное.

б) Оно меньше 25, так как $25 \cdot 4\frac{1}{2}$ – число трехзначное.

в) Оно четное, так как при умножении его на $4\frac{1}{2}$ получается число целое.

г) По условию обращенное число в 9 раз больше половины данного числа, значит, обращенное число кратно 9.

д) Так как обращенное число кратно 9, то сумма его цифр делится на 9, а данное число состоит из тех же цифр, что и обращенное, значит, и оно кратно 9.

Найдите продолжение этих рассуждений и закончите решение задачи.

2°. Произведение четырех последовательных целых чисел равно 3024. Найти эти числа.

Для «логического» решения этой задачи можно предложить следующую схему рассуждений:

а) Установить, что среди искомых чисел нет числа 10.

б) Среди искомых чисел должны быть числа, меньшие 10.

в) Из пп. а) и б) и из условия вывести, что все искомые числа меньше 10, т. е. однозначны.

г) Установить, что среди искомых чисел нет числа 5.

д) Разбить все остальные однозначные числа на две группы в соответствии с условием и выяснить, какая группа удовлетворяет этому условию.

171 По здравому смыслу

Галя Карпова, студентка педагогического института, готовится к своему «пробному уроку» по математике в 8-м классе средней школы.

– Покажи-ка мне, Галя, какие задачи ты надумала предложить своим ученикам, – поинтересовался Галин отец.

«Возраст ребенка, увеличенный на 3 года, дает число, из которого точно извлекается квадратный корень, и если действительно извлечь корень из этого числа, то получится возраст ребенка, уменьшенный на 3 года. Сколько лет ребенку?»

– Ну, что ж, неплохая задача для устных упражнений. Смекалистые ребята решат ее в одну минуту.

– Как для устных упражнений? Как в одну минуту? На этой задаче я предполагала еще раз показать ученикам преимущество алгебраического способа решения задачи – с помощью составления уравнения – перед арифметическим.

– В таком случае эта задача малопригодна. Всякий, кто вникнет в смысл твоей задачи, решит ее «в уме» почти без всяких вычислений.

Как решил задачу отец Гали?

Дополнительный вопрос для тех, кто умеет составлять и решать квадратные уравнения:

Как арифметически и алгебраически предполагала Галя решить эту задачу?

172 Да или нет?

Представьте себе, что ваш друг задумал некоторое целое число в промежутке от 1 до 1000. Чтобы угадать задуманное число, вы будете задавать вашему другу вопросы. Условимся далее, что на все вопросы он будет отвечать только «да» или «нет».

Может показаться невероятным, что достаточно всего лишь десяти вопросов, чтобы наверняка отгадать любое задуманное целое число в промежутке от 1 до 1000. Однако это так.

Сообразите, какие вопросы надо задавать.

Глава 6

Делимость чисел

Из всех действий арифметики самое своеобразное – это деление. Оно обладает особыми свойствами, можно сказать, особым «нравом». Возьмем хотя бы обращение с нулем. Для всех других арифметических действий нуль – равноправное число. Его можно и прибавлять, и вычитать; оно может быть множителем в действии умножения, но делителем никогда. Разделить на нуль вообще нельзя никакое число, никакое алгебраическое выражение. Это – важная особенность деления, и если к ней отнестись невнимательно, то легко попасть впросак; можно, скажем, «доказать» любое заведомо фальшивое утверждение – «парадокс».

Как вы отнесетесь, например, к такому утверждению:

Всякое количество равно своей половине.

«Доказательство». Пусть a и b – два равных количества: $a = b$. Умножим обе части этого равенства на a:

$$a^2 = ab.$$

Теперь уменьшим на b^2 и левую, и правую части равенства. Полученные разности $a^2 - b^2$ и $ab - b^2$ также будут равными:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Разложим обе части этого равенства на множители:

$$(a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Разделим теперь обе части равенства на $a - b$ и приходим к равенству:

$$a + b = b.$$

Так как $b = a$, то в последнем равенстве можем заменить b на a; тогда $a + a = a$, или $2a = a$. Разделив на 2, получим $a = \frac{a}{2}$, а это значит, что целое равно своей половине (?).

Формально все правильно, а по существу где-то в приведенных выкладках есть дефект. Вы, конечно, были внимательны и заметили, в какой части преобразований имеется изъян.

«Нрав» деления проявляется не только по отношению к нулю. Математическая теория уделяет много внимания свойствам целых чисел и законам, управляющим действиями над ними. Однако если ограничиться множеством одних только целых (положительных и отрицательных) чисел, то опять-таки «капризничает» только одно действие – деление. Оно, как вы знаете, не всегда выполнимо в области целых чисел. Принято считать, что целое число a делится на целое число b, если среди целых же чисел найдется такое число c, произведение которого на b дает число a; если же такого числа нет, то a не делится на b.

Все эти особенности деления и способствовали возникновению таких понятий, как простые числа, наибольший общий делитель (НОД), наименьшее общее кратное (НОК), признаки делимости чисел, а постепенное развитие теории делимости чисел привело к глубокому расширению всей теории чисел.

Полагаю, что работа над задачами этой главы в некоторой мере увеличит запас ваших школьных представлений о делимости чисел, а может быть, и побудит вас к систематическому изучению всей теории чисел.

173 Число на гробнице

В одной из египетских пирамид ученые обнаружили на каменной плите гробницы выгравированное иероглифами число 2520. Трудно точно сказать, за что выпала такая честь на долю этого числа. Может быть, за то, что оно без остатка делится на все без исключения целые числа от 1 до 10. Действительно, нет числа, меньшего чем 2520, обладающего указанным свойством. Нетрудно убедиться в том, что это число является наименьшим общим кратным первых десяти целых чисел.

174 Подарки к Новому году

Родительский комитет нашей школы решил устроить новогоднюю елку для детей. Готовя подарки, мы быстро разложили по пакетам конфеты и печенье. Но когда дело дошло до мандаринов, мы натолкнулись на забавное затруднение: сначала хотели разложить все мандарины по 10 штук в пакет (а в оставшиеся пакеты – яблоки) – не получилось: в одном из пакетов осталось 9 мандаринов; если бы положили по 9 мандаринов, то осталось бы 8 мандаринов в одном из пакетов; попробовали раскладывать по 8 мандаринов, осталось 7; стали раскладывать по 7, осталось 6; положили по 6, осталось 5.

– Что за история?! Неужели и дальше так будет продолжаться?

Взяли бумагу, карандаш и начали считать. И что бы вы думали: делим число имеющихся у нас мандаринов на 5, остается 4; делим на 4, остается 3; делим на 3, остается 2; делим на 2, остается 1. Вот какое удивительное число мандаринов было у нас.

А сколько же все-таки?

175 Может ли быть такое число?

Может ли быть такое число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 6 дает в остатке 4?

176 Корзина яиц (из старинного французского задачника)

Женщина несла на рынок корзину яиц. Прохожий нечаянно толкнул женщину, корзина упала, яйца разбились. Виновник несчастья, желая возместить потерю, спросил:

– Сколько всего яиц было в корзине?

– Точно не помню, – ответила женщина, – но знаю, что когда я вынимала из корзины по 2, по 3, по 4, по 5 или по 6 яиц, в корзине оставалось одно яйцо, а когда я вынимала по 7, в корзине ничего не оставалось.

Сколько яиц было в корзине?

177 Трехзначное число

Если от задуманного мной трехзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, а если отнять от него 8, то оно разделится на 8, если отнять от него 9, то оно разделится на 9. Какое число я задумал?

178 Четыре теплохода

В порту пришвартовались четыре теплохода. В полдень 2 января 2009 года они одновременно покинули порт.

Известно, что первый теплоход возвращается в этот порт через каждые 4 недели, второй – через каждые 8 недель, третий – через 12 недель, а четвертый – через 16 недель.

Когда в первый раз теплоходы снова сойдутся все вместе в этом порту?

179 Ошибка кассира

Обращаясь к кассиру, покупатель сказал:

– Получите, пожалуйста, с меня за две пачки соли по 90 к.; за два куска мыла по 2 р. 70 к., за три пачки сахара и за шесть коробок спичек, но стоимость пачки сахара и коробки спичек я не помню.

Кассир выдал покупателю чек на 29 р. 17 к. Взглянув на чек, покупатель вернул его кассиру и сказал:

– Вы, несомненно, ошиблись в подсчете общей суммы.

Кассир проверил и согласился. Пришлось извиниться и выдать покупателю другой чек.

Каким образом покупатель обнаружил ошибку?

180 Числовой ребус

Из арифметических соображений найти число t и числовое значение буквы a, заменяющей потерянную цифру в равенстве:

$$[3(230 + t)]^2 = 492a04.$$

181 Признак делимости на 11

Один из важнейших приемов решения задач таков: свести решение данной задачи к решению другой задачи, более простой.

Пусть требуется установить, делится ли некоторое многозначное число на другое данное число. Для того чтобы ответить на этот вопрос, в ряде случаев совсем не надо прибегать к непосредственному делению данного числа. Очень часто оказывается, что решение поставленной задачи можно свести к выяснению делимости некоторого другого, не многозначного числа, составленного по тому или иному правилу из цифр данного числа. Так и возникают признаки делимости чисел.

Знаком ли вам, например, такой несложный признак делимости чисел на 11?

Если сумма цифр данного числа через одну равна сумме остальных цифр через одну или разность этих сумм делится на 11, то и данное число делится на 11.

Если же указанные суммы цифр через одну не равны между собой и их разность не делится на 11, то и данное число не делится на 11.

Пример. Делится ли 3 528 041 на 11?

Применяем указанный признак. Имеем:

$$S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6,\ \ S_2 = 5 + 8 + 4 = 17,\ S_2 - S_1 = 11.$$

Так как $S_2 - S_1$ делится на 11, то число 3 528 041 обязательно должно делиться на 11. Если выполните деление непосредственно, то убедитесь в том, что признак вас не обманул.

Обосновать этот признак делимости нетрудно, если предварительно заметить, что числа такого вида, как, например, $10 + 1$, $100 - 1$, $1000 + 1$, $10\,000 - 1$, $100\,000 + 1$ и т. д. делятся на 11.

Рассмотрим сначала разности: $100 - 1 = 99$, $10\,000 - 1 = 9999$ и т. д.; все они записываются в виде четного числа девяток и, следовательно, делятся на 11; делятся на 11 и все суммы указанного вида: $10 + 1 = 11$, $1000 + 1 = 99 \cdot 10 + 11$, $100\,000 + 1 = 9999 \cdot 10 + 11$ и т. д., так как любая сумма разлагается на два слагаемых, каждое из которых делится на 11.

Перейдем теперь к установлению признака делимости на 11. Возьмем какое-нибудь многозначное число, например 3 516 282, и запишем его следующим образом:

$$2 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 1000 + 1 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 1\,000\,000.$$

Все вторые сомножители (единицы с нулями) преобразуем так, чтобы получились рассмотренные выше суммы и разности: $10 + 1$, $100 - 1$ и т. д. Имеем:

$$3\,516\,282 = 2 + 8(10 + 1 - 1) + 2(100 - 1 + 1) +$$
$$+ 6(1000 + 1 - 1) + 1(10\,000 + 1 - 1) +$$
$$+ 5(100\,000 + 1 - 1) + 3(1\,000\,000 + 1 - 1) =$$
$$= 2 + 8(10 + 1) - 8 + 2(100 - 1) + 2 + 6(1000 + 1) -$$
$$- 6 + (10\,000 - 1) + 1 + 5(100\,000 + 1) - 5 +$$
$$+ 3(1\,000\,000 - 1) + 3 = (2 - 8 + 2 - 6 + 1 - 5 + 3) +$$
$$+ [8(10 + 1) + 2(100 - 1) + 6(1000 + 1) + (10\,000 - 1) +$$
$$+ 5(100\,000 + 1) + 3(1\,000\,000 - 1)].$$

Все слагаемые в квадратных скобках делятся на 11. Значит, делимость данного числа на 11 полностью зависит от делимости на 11 числа, заключенного в первых круглых скобках: если оно делится (не делится) на 11, то и рассматриваемое число делится (не делится) на 11. Но в первой скобке записана разность сумм цифр данного числа через одну: $(2 + 2 + 1 + 3) - (8 + 6 + 5) = - 11$. Так как эта разность делится на 11, то на 11 делится и данное число.

Если бы разность сумм цифр данного числа через одну не делилась на 11, то не могло бы делиться на 11 и данное число. В самом деле, рассмотренный пример показывает прием, с помощью которого любое целое число (N) можно расчленить на два слагаемых (x и y): $N = x + y$, так, что одно из них (x) делится на 11, а другое (y) представляет собой разность сумм цифр данного числа через одну.

Ясно, что если оба слагаемых x и y делятся на 11, то N также делится на 11, если же x делится на 11, а y не делится, то и N не делится.

Обратно, если N и x делятся на 11, то и y должно делиться на 11; если же N не делится на 11, а x делится, то y не может делиться на 11.

Так решение вопроса о делимости любого многозначного числа на 11 сводится к более легкому выяснению делимости на 11 разности сумм цифр числа через одну.

Решите самостоятельно еще один арифметический ребус.

Как быстро обнаружить недостающую цифру a в восьмизначном числе $37a10201$ и каким числом надо заменить букву x в выражении $[11(492 + x)]^2$, чтобы равенство

$$[11(492 + x)]^2 = 37a10201$$

было верным?

182 Объединенный признак делимости на 7, 11 и 13

В таблице простых чисел, т. е. таких, которые делятся только на 1 и на себя, числа 7, 11 и 13 расположены рядом. Их произведение равно $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 = 1000 + 1$. Заметим, что $1000 + 1$ делится и на 7, и на 11, и на 13. Далее, если любое трехзначное число умножить на 1001, то произведение запишется таким же цифрами, как и множимое, только повторенными дважды.

Пусть $\overline{abc}$ – какое-либо трехзначное число (a, b и c – цифры этого числа). Умножим его на 1001:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \times\ 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abcabc} \end{array}$$

Следовательно, все числа вида $\overline{abcabc}$ делятся на 7, на 11 и на 13. В частности, на 7, 11 и 13 делится число 999 999, или, иначе, 1 000 000 – 1.

Указанные закономерности позволяют свести решение вопроса о делимости *многозначного* числа на 7, или на 11, или на 13 к делимости на них некоторого другого числа – *не более чем трехзначного*.

Пусть требуется определить, делится ли число 42 623 295 на 7, 11 и 13. Разобьем данное число справа налево на грани по три цифры. Крайняя левая грань может и не иметь трех цифр. Представляем теперь данное число в таком виде:

$$42\,623\,295 = 295 + 623 \cdot 1000 + 42 \cdot 1\,000\,000,$$

или (аналогично тому, как мы поступали при рассмотрении признака делимости на 11) :

$$42\,623\,295 = 295 + 623(1000 + 1 - 1) + 42(1\,000\,000 - 1 + 1) =$$
$$= (295 - 623 + 42) + [623(1000 + 1) + 42(1\,000\,000 - 1)].$$

Число в квадратных скобках обязательно делится и на 7, и на 11, и на 13. Значит, делимость данного числа на 7, 11 и 13 полностью определяется делимостью числа, заключенного в первых круглых скобках.

Рассматривая каждую грань данного числа как самостоятельное число, можно сформулировать следующий объединенный признак делимости на числа 7, 11 и 13:

Если разность сумм граней данного числа, взятых через одну, делится на 7, или на 11, или на 13, то и данное число делится на 7, или на 11, или на 13.

Вернемся к числу 42 623 295. Определим, на какое из чисел 7, 11 или 13 делится разность сумм граней данного числа: (295 + 42) – 623 = = –286. Число –286 делится на 11 и на 13, а на 7 оно не делится. Следовательно, число 42 623 295 делится на 11 и на 13, но на 7 не делится.

Очевидно, что делимость на 7, 11 и 13 четырех-, пяти- и шестизначных чисел, т. е. чисел, разбивающихся всего лишь на две грани (практически более частый случай), определяется делимостью на 7, 11 и 13 *разности граней* данного числа. Так, например, легко установить, что 29 575 делится на 7 и на 13, но не делится на 11. Действительно, разность граней равна 575 – 29 = 546, а число 546 делится на 7 и на 13 и не делится на 11.

Задача. Устанавливая объединенный признак делимости на 7, 11 и 13, мы имели дело с числом, разбивавшимся на три грани. Проведите обоснование этого признака на примере числа, разбивающегося на четыре грани по три цифры справа налево.

183 Упрощение признака делимости на 8

В школе обычно формулируют такой признак делимости на 8:

Если число, которое составляют последние три цифры данного числа, делится на 8, то и данное число делится на 8.

Значит, вопрос сводится к делимости на 8 некоторого трехзначного числа.

Но при этом ничего не говорится о том, как в свою очередь быстро узнать, делится ли это трехзначное число на 8. Делимость трехзначного числа на 8 также ведь не всегда сразу видна, приходится фактически производить деление.

Признак делимости на 4 проще. Здесь требуется, чтобы делилось на 4 число, состоящее только из двух последних цифр данного числа.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли упростить и признак делимости на 8? Можно, если дополнить его специальным признаком делимости трехзначного числа на 8.

На 8 делится всякое трехзначное число, у которого двузначное число, образованное цифрами сотен и десятков, сложенное с половиной числа единиц, делится на 4.

Пример. Дано число 592. Для решения вопроса о его делимости на 8 отделяем единицы и половину их числа прибавляем к числу из следующих двух цифр (десятков и сотен). Получаем 59 + 1 = 60. Число 60 делится на 4, значит, и число 592 делится на 8.

Докажите справедливость высказанного здесь признака делимости на 8 для трехзначного числа и сформулируйте упрощенный признак делимости на 8 для всякого числа.

Замечание 1. Ясно, что число, оканчивающееся нечетной цифрой, не может делиться на 8.

Замечание 2. В подавляющем большинстве случаев сумма двухзначного числа, упомянутого в признаке, с половиной единиц данного числа дает двухзначное число.

Эта сумма окажется трехзначной только для чисел в промежутке от 984 до 998, но даже и в этих случаях она не превысит числа 103 (99 + + 4 = 103).

184 Поразительная память

Объявите своим друзьям, что если даже ограничиться только шестизначными и девятизначными числами, делящимися на 37, то все равно их чрезвычайно много, и тем не менее вы знаете наизусть все такие числа.

Чтобы усилить эффект, скажите, что вы беретесь моментально приписать к любому заданному трехзначному числу еще три цифры или даже шесть цифр так, что полученное шестизначное или девятизначное число непременно будет делиться на 37.

Положим, вам задали число 412. Припишите к нему 143 справа или слева – безразлично. Получатся числа 143 412 или 412 143, каждое из которых делится на 37.

Здесь дело, конечно, не в феноменальной памяти. Память вы можете иметь самую обыкновенную, но надо знать довольно простой признак делимости на 37, заключающийся в следующем.

Разбиваем данное число справа налево на грани по три цифры (последняя грань слева может быть неполной). Рассматривая каждую грань как самостоятельное число, сложим эти числа. Если полученная сумма делится на 37, то и данное число делится на 37.

Например, число 153 217 делится на 37, поскольку $153 + 217 = 370$ также делится на 37.

Доказательство. Пусть N – число, разбивающееся на две грани. Представим его в форме $N = 1000a + b$, где a – число, составляющее левую грань, b – трехзначное число, составляющее правую грань данного числа. Если N делится на 37, то $1000a + b = 37k$ (k – целое положительное число). Докажем, что в этом случае $a + b$ также делится на 37.

В самом деле, выразим b из первого равенства и подставим в $a + b$. Тогда

$$a + b = a + (37k - 1000a) = 37k - 999a = 37\ (k - 27)$$

делится на 37.

Обратно, пусть $a + b$ делится на 37, тогда $a + b = 37k$. Выразим отсюда b и подставим в равенство $N = 1000a + b$. Получаем

$$N = 1000a + 37k - a = 999a + 37k = 37\ (27 + k),$$

т. е. N делится на 37.

Для чисел, разбивающихся на большее количество граней, рассуждения аналогичны.

Следовательно, секрет фокуса в умелом приписывании к заданному вашими друзьями трехзначному числу одного (для числа шестизначного) или двух (для числа девятизначного) своих трехзначных чисел таких, чтобы сумма всех приписанных вами чисел и числа, заданного вам, делилась на 37.

Как же этого достигнуть?

Очень просто. Приписывайте, например, такие числа, которые в сумме с заданными составляли бы *трехзначное число с одинаковыми цифрами*: 111, или 222, или 333 и т. д. до 999, так как всякое трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, делится на 37.

Если заданное число, скажем, 341, то приписывайте 103 (дополнение до 444) или 214 (дополнение до 555) и т. д. Такое дополнение в уме произвести очень легко. Это и обеспечит вам обещанную быстроту осуществления фокуса.

В случае требования написать девятизначное число, делящееся на 37, приписывайте три цифры произвольно, но с таким расчетом, чтобы последние три цифры могли образовать число, дополняющее всю сумму до какого-либо трехзначного числа с одинаковыми цифрами.

Так, если вам задано число 412, то можно приписать, скажем, сначала 101, а затем 042 как дополнение контрольной суммы до 555. Получится число 412 101 042.

При этом помните, что для разнообразия вы можете приписывать свои числа по разные стороны от назначенного.

Если заданное число само состоит из одинаковых цифр, например 333, то приписывать к нему число, также состоящее из одинаковых цифр, рискованно: таким приписыванием можно разоблачить себя. Чтобы этого избежать, прибавьте в уме 37 или 74 к числу, которое вы хотели бы приписать, или, наоборот, уменьшите его на 37 или 74.

Можно разрешить задать двузначное или однозначное число. В таком случае сначала припишите к нему любую третью цифру или вторую и третью, а дальше действуйте, как рассказано.

Задача. Докажите признак делимости на 37 для числа, разбивающегося на три грани.

185 Объединенный признак делимости на 3, 7 и 19

Произведение простых чисел 3, 7 и 19 равно 399. Подмечено следующее любопытное свойство:

Если число $100a + b$ (где b – двузначное число, a – любое целое положительное) делится на 399 или на какой-либо из его множителей, то вместе с ним на то же число делится и $a + 4b$.

Докажите это утверждение.

Сформулируйте и докажите обратную теорему.

На основании доказанного установите объединенный признак делимости чисел на 3, 7 и 19.

186 Делимость двучлена

1°. *Многочленом* называют алгебраическое выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где n – целое положительное число; коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – любые действительные числа; под буквой x также подразумевается любое действительное число.

2°. Если один многочлен (p) указанного вида равен произведению двух других (m_1 и m_2), т. е. $p = m_1 m_2$, то говорят, что многочлен p делится на многочлен m_1 (или m_2) и в частном получается многочлен m_2 (или m_1).

Например, $x^2 - 9$ делится на $3x + 9$ и в частном получается $\frac{1}{3}x-1$. Действительно,

$$(3x+9)\left(\frac{1}{3}x-1\right)=x^2-9.$$

Заметим, что некоторые коэффициенты частного – дробные числа, в то время как все коэффициенты делимого и делителя – целые.

3°. Из факта делимости одного многочлена с целыми коэффициентами на другой многочлен с целыми коэффициентами еще не следует, что делятся числа, в которые обращаются делимое и делитель при замене x любым целым числом, если, разумеется, делимость рассматривать с точки зрения арифметики целых чисел.

Например, как мы отмечали выше, $(x^2 - 9) : (3x + 9) = \frac{1}{3}x-1$. При $x = 6$ делимое обращается в число $6^2 - 9 = 27$, делитель – в число $3 \cdot 6 + 9 = 27$, и здесь делимое делится на делитель: $27 : 27 = 1$. Но при $x = 7$ делимое обращается в число $49 - 9 = 40$, делитель – в число $3 \cdot 7 + 9 = 30$, и теперь делимое не делится на делитель с точки зрения арифметики целых чисел.

4°. Если же все коэффициенты делимого, делителя и частного – целые числа, то число, в которое обращается многочлен-делимое, непременно делится на число, в которое обращается многочлен-делитель при замене x любым целым числом, кроме тех, которые обращают делитель в нуль.

Например,

$$(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12) : (x^2 - 4) = 2x - 3.$$

Все коэффициенты целые, следовательно, будут делиться и числовые значения делимого и делителя при замене x любым целым числом, кроме $x = \pm 2$, поскольку при этих значениях делитель обращается в нуль и деление невозможно. Так, при $x = 3$ имеем:

значение делимого: $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = 15$,

значение делителя: $3^2 - 4 = 5$.

Убеждаемся в том, что первое значение делится на второе: $15 : 5 = 3$. Тому же числу 3 равно и значение частного: $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

5°. Для решения некоторых задач, в частности для доказательства признаков делимости чисел, полезно знать, при каких условиях сумма и разность степеней двух чисел ($x^m + a^m$ и $x^m - a^m$, m – целое положительное число) делятся на сумму и разность их оснований ($x + a$ и $x - a$).

Алгебраические выражения $x^m + a^m$ и $x^m - a^m$ – это частные виды многочлена

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

(под всеми буквенными коэффициентами многочлена будем здесь подразумевать только целые числа, включая нуль).

Если, например, $m = 4$, $a_m = 1$, $a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_1 = 0$; $a_0 = 16$, то получается такой частный вид многочлена (1): $x^4 + 16$, или $x^4 + 2^4$.

Попробуем теперь разделить $x^4 + 2^4$ на $x + 2$:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^4 + 16 \\ \underline{x^4 + 2x^3} \end{array} & \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} -2x^3 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 4x^2 \\ \underline{4x^2 + 8x} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} -8x + 16 \\ \underline{-8x - 16} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 32 \text{ (остаток)} &
\end{array}$$

Значит, $x^4 + 2^4$ не делится на $x + 2$. Замечаем, что остаток не содержит x, а представляет собой некоторое число.

Легко понять, что при делении многочлена на двучлен вида $x + a$, т. е. на двучлен, содержащий x не выше, чем в первой степени, остатком является некоторое число (либо совсем нет остатка).

Чтобы деление совершилось без остатка, надо делимое уменьшить на величину остатка. Поэтому справедливо такое утверждение: *делимое минус остаток равно произведению делителя и частного.* Например,

$$(x^4 + 16) - 32 = (x + 2) \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

Убедитесь непосредственной проверкой в том, что это равенство алгебраических выражений обращается в равенство чисел при замене буквы x каким угодно числом. Равенство, обладающее такой особенностью, называют тождеством.

Предположим теперь, что вы берете произвольный многочлен вида (1), делите его на двучлен вида $x - a$ и составляете равенство

$$A = (x - a)B + C, \qquad (2)$$

где через A обозначен многочлен-делимое, через B – частное, а через C – остаток.

Спрашивается, всегда ли равенство (2) является тождеством?

Ответ: Всегда.

Доказательство этого утверждения в общем виде громоздко, но любой пример подтвердит его справедливость.

Такого рода тождество (2) любопытно тем, что с его помощью можно, *не выполняя деления*, узнать остаток. Например, я сообщил вам следующие данные: делимое $x^4 + 1$, делитель $x - 1$, частное $x^3 + x^2 + x + 1$. Какое число C является остатком?

Решение. Составим равенство

$$x^4 + 1 = (x - 1)\,(x^3 + x^2 + x + 1) + C.$$

Так как оно должно быть тождеством, то положим, например, $x = 1$. Тогда $1 + 1 = 0 + C$. Отюда $C = 2$. При любых других значениях x получается такое же значение C. Пусть еще, например, $x = 2$. Тогда $16 + 1 = (2 - 1)\,(8 + 4 + 2 + 1) + C$, или $17 = 15 + C$. Отсюда снова $C = 2$.

Значит, никакого иного остатка, кроме $C = 2$, и быть не может. Проверьте это делением.

Еще интереснее то, что можно не знать не только остаток, но и частное и все-таки определить остаток, не выполняя деления. Пусть, например, делимое $x^4 - 1$, а делитель $x + 1$. Как узнать остаток, не производя деления?

Обозначим многочлен, являющийся частным, через B, а остаток – по-прежнему через C. Тогда

$$x^4 - 1 = (x + 1)B + C.$$

Зная, что для остатка C получается одно и то же его значение при замене x любым числом, положим $x = -1$. Это значение x удобно тем, что оно не потребует вычисления значения частного В, так как при $x = -1$ выражение $(x + 1)B$ обратится в нуль.

Имеем $(-1)^4 - 1 = 0 + C$, или $1 - 1 = C$. Отсюда $C = 0$. Оказалось, что остаток равен нулю. Это значит, что $x^4 - 1$ делится без остатка на $x + 1$. Проверьте это делением!

6°. Теперь можно решить и более общую задачу.

При каких условиях двучлен $x^m + 1$ делится на $x + 1$? (m – целое положительное).

Р е ш е н и е. Пусть B – частное, а C – остаток. Имеем

$$x^m + 1 = (x + 1)B + C.$$

Положим $x = -1$, тогда $(-1)^m + 1 = C$. Ясно, что если m – четное ($m = 2n$), то $C = 2$; если же m – нечетное ($m = 2n + 1$), то $C = 0$.

Следовательно, если m – четное, то $x^m + 1$, или $x^{2n} + 1$, не делится на $x + 1$, если же m – нечетное, то $x^m + 1$, или $x^{2n+1} + 1$, делится на $x + 1$. Частное, как нетрудно убедиться, будет состоять из убывающих степеней x с чередующимися знаками, так что имеем следующую общую формулу:

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x + 1).$$

Что касается двучлена $x^m - 1$, то на $x - 1$ он делится при любом целом положительном m, а на $x + 1$ делится только при m четном.

Убедитесь в этом самостоятельно.

Для выяснения величины остатка (C) от деления двучлена вида $x^m + a^m$ на $x + a$ следует в тождестве $x^m + a^m = (x + a)B + C$ положить $x = -a$.

Применяя соответствующие рассуждения, нетрудно прийти к следующим выводам:

$$\left.\begin{array}{l} x^{2n} + a^{2n} \text{ не делится ни на } x + a, \text{ ни на } x - a; \\ x^{2n+1} + a^{2n+1} \text{ делится на } x + a, \text{ но не делится на } x - a; \\ x^{2n} - a^{2n} \text{ делится как на } x + a, \text{ так и на } x - a; \\ x^{2n+1} - a^{2n+1} \text{ не делится на } x + a, \text{ но делится на } x - a. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Напоминаю, что в случае делимости $x^m \pm a^m$ на $x + a$ или на $x - a$ делятся и целые числа, получающиеся в качестве делимого и делителя при замене букв a и x целыми числами.

Задача. Не вычисляя выражения $11^{10} - 1$, докажите, что оно делится на 100.

187 Старое и новое о делимости на 7

Почему-то число 7 очень полюбилось народу и вошло в его песни и поговорки:

Семь раз примерь, один раз отрежь.

Семь бед, один ответ.

Семь пятниц на неделе.

Один с сошкой, а семеро с ложкой.

У семи нянек дитя без глазу.

Было у тещеньки семеро зятьев.

Число 7 богато не только поговорками, но и разнообразными признаками делимости. Два признака делимости на 7 (в объединении с другими числами) вы уже знаете. Имеется также несколько индивидуальных признаков делимости на 7.

Выберите для себя любой, какой покажется наиболее интересным, из следующих признаков:

1°. Первый признак делимости на 7. Возьмем для испытания число 5236. Запишем это число следующим образом:

$$10^3 \cdot 5 + 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6$$

(так называемая «систематическая» форма записи числа), и всюду основание 10 заменим основанием* 3: $3^3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 6 = 168$.

Если полученное число делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7.

Так как 168 делится на 7, то и 5236 делится на 7.

Доказательство. Пусть $a_{m-1}, a_{m-2}, \dots a_2, a_1, a_0$ — цифры последовательных разрядов m-значного числа N; тогда

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \dots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0,$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \dots + 3^2a_2 + 3a_1 + a_0.$$

Вычтем из первого выражения второе:

$$N - P = (10^{m-1} - 3^{m-1})\,a_{m-1} + (10^{m-2} - 3^{m-2})a_{m-2} + \dots$$
$$\dots + (10^2 - 3^2)a_2 + (10 - 3)\,a_1.$$

На основании формул (3) и утверждения 4° (см. задачу 186) можно утверждать, что все двучлены в скобках делятся на $10 - 3 = 7$. Следовательно, если при этом вычитаемое P делится (не делится) на 7, то и уменьшаемое N делится (не делится) на 7, а также если уменьшаемое N делится (не делится) на 7, то и вычитаемое P делится (не делится) на 7.

* Другими словами, прочтем число так, как будто оно записано не в десятичной, а в *троичной системе*, не смущаясь тем, что цифр, отличных от 0, 1 и 2, в троичной системе, собственно, не должно бы быть.

2°. Видоизменение первого признака делимости на 7. Умножим первую слева цифру испытуемого числа на 3 и прибавим следующую цифру; результат умножим на 3 и прибавим следующую цифру и т. д. до последней цифры. Для упрощения после каждого действия разрешается из результата вычитать 7 или число, кратное семи.

Если окончательный результат делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7.

Пример. Делится ли число 48 916 на 7?

Умножаем первую слева цифру на 3: $4 \cdot 3 = 12$. Для дальнейших расчетов число 12 можно заменить числом 5, которое получается умножением 12 на 7. Заменяя число a числом b, которое отличается от a на 7 или на число, кратное семи, будем ставить между ними значок $\equiv$. Запись первого действия примет вид $4 \cdot 3 = 12 \equiv 5$. Затем прибавляем к 5 вторую цифру 8 и снова делаем соответствующую замену: $5 + 8 = 13 \equiv 6$.

Далее:

$$6 \cdot 3 = 18 \equiv 4,\ 4 + 9 = 13 \equiv 6,\ 6 \cdot 3 = 18 \equiv 4,\ 4 + 1 = 5,$$
$$5 \cdot 3 = 15 \equiv 1,\ 1 + 6 = 7.$$

Окончательный результат есть 7. Следовательно, число 48 916 делится на 7.

Преимущество этого правила в том, что оно легко применяется в уме. Разберитесь теперь в его доказательстве.

Доказательство. Пусть

$$N = 10^{m-1} a_{m-1} + 10^{m-2} a_{m-2} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Действуя в соответствии с правилом, получаем последовательно:

$$3 a_{m-1} + a_{m-2},$$
$$3^2 a_{m-1} + 3 a_{m-2} + a_{m-3},$$
$$3^3 a_{m-1} + 3^2 a_{m-2} + 3 a_{m-3} + a_{m-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = 3^{m-1} a_{m-1} + 3^{m-2} a_{m-2} + \ldots + 3a_1 + a_0.$$

Найдем разность чисел N и P:

$$N - P = a_{m-1}(10^{m-1} - 3^{m-1}) + a_{m-2}(10^{m-2} - 3^{m-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_1(10 - 3).$$

Так как m – число целое положительное (число цифр), то все двучлены в скобках делятся на $10 - 3 = 7$ (см. формулу (3) и утверждение 4° в задаче 186). Следовательно, делимость числа P на 7 связана с делимостью числа N на 7.

Замечание. Любопытно, что окончательный результат, уменьшенный на 7 или на 14, показывает остаток от деления данного числа N на 7. Проверьте!

3°. Второй признак делимости на 7. В этом признаке надо действовать точно так же, как и в предыдущем, с той лишь разницей, что умножение следует начинать не с крайней левой цифры данного числа, а с крайней правой и умножать не на 3, а на 5.

Пример. Делится ли на 7 число 37 184?

Имеем:

$4 \cdot 5 = 20 \equiv 6$, $6 + 8 = 14 \equiv 0$, $0 \cdot 5 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 \cdot 5 = 5$; прибавление цифры 7 можно пропустить; $5 \cdot 5 = 25 \equiv 4$, $4 + 3 = 7 \equiv 0$. Число 37 184 делится на 7.

Доказательство. Пусть

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Действуя в соответствии с указанным признаком, получаем последовательно:

$$5a_0 + a_1,$$
$$5^2a_0 + 5\,a_1 + a_2,$$
$$5^3a_0 + 5^2a_1 + 5a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = 5^{m-1}a_0 + 5^{m-2}a_1 + \ldots + 5a_{m-2} + a_{m-1}.$$

Умножим обе части последнего равенства на 10^{m-1} и из полученного результата вычтем N:

$$10^{m-1}P = 50^{m-1}a_0 + 10 \cdot 50^{m-2}a_1 + \ldots$$
$$+\, 10^{m-2} \cdot 50a_{m-2} + 10^{m-1}a_{m-1},$$
$$10^{m-1}P - N = a_0(50^{m-1} - 1) + 10a_1(50^{m-2} - 1) + \ldots$$
$$+\, 10^{m-2}a_{m-2}(50 - 1).$$

Все двучлены в скобках делятся на $50 - 1 = 49$, а значит, и на 7, но 10^{m-1} не делится на 7. Следовательно, делимость на 7 числа N связана с делимостью на 7 числа P.

4°. Третий признак делимости на 7. Этот признак менее легок для осуществления в уме, но он тоже очень интересен.

Удвоим последнюю цифру и вычтем вторую справа, удвоим результат и прибавим третью цифру справа и т. д., чередуя вычитание и сложение и уменьшая каждый результат, где возможно, на 7 или на число, кратное семи. Если окончательный результат делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7.

5°. Доказательства трех следующих довольно любопытных теорем попытайтесь выполнить самостоятельно.

Теорема 1. *Если какое-либо двузначное число делится на 7, то делится на 7 и число обращенное, увеличенное на цифру десятков данного числа.*

Пример 1. Число 14 делится на 7, следовательно, делится на 7 и число 41 + 1.

Теорема 2. *Если какое-либо трехзначное число делится на 7, то делится на 7 и число обращенное, уменьшенное на разность цифр единиц и сотен данного числа.*

Пример 2. Число 126 делится на 7, поэтому делится на 7 и число 621 – (6 – 1), т. е. 616.

Пример 3. Число 693 делится на 7; значит, делится на 7 и число 396 – (3 – 6), т. е. 399.

Теорема 3. *Если сумма цифр трехзначного числа равна 7, то оно делится на 7 только при условии, что цифры десятков и единиц одинаковы.*

Обратно, если сумма цифр трехзначного числа равна 7 и цифры десятков и единиц одинаковы, то такое число делится на 7.

188 Распространение признака на другие числа

Изложенные выше три признака делимости чисел на 7 похожи на известные условия делимости чисел на 3 и на 9. В обоих случаях из цифр данного числа N с помощью простых арифметических действий составляется некоторое новое число P, от делимости которого на данный делитель зависит и делимость данного числа. Число P составляется так, что разность $N - P$ (или сумма $N + P$) делится на данный делитель. Основой метода является делимость двучлена $a^n + b^n$ на $a + b$ при нечетном n и двучлена $a^n - b^n$ на $a \pm b$ при четном n.

Применяя тот же метод рассуждений, можно убедиться в справедливости следующего любопытного признака делимости на 13, 17 и 19.

Для определения делимости данного числа на 13, 17 или 19 надо умножить крайнюю левую цифру этого числа соответственно на 3, 7 или 9 и вычесть следующую цифру; результат снова умножить соответственно на 3, 7 или 9 и прибавить следующую цифру и т. д., чередуя вычитания и прибавления последующих цифр после каждого умножения. После каждого действия результат можно уменьшить или увеличить соответственно на число 13, 17, 19 или кратное ему.

Если окончательный результат делится (не делится) на 13, 17, 19, то и данное число делится (не делится) на 13, 17, 19.

Пример 1. Делится ли число 2 075 427 на 19?

Применяем правило:

$$2 \cdot 9 = 18 \equiv -1$$

(если нежелательно производить действия с отрицательными числами, то можно оставить 18, не вычитая из него 19);

$$-1 - 0 = -1,\ -1 \cdot 9 = -9,\ -9 + 7 = -2,\ -2 \cdot 9 = -18 \equiv 1;$$

$$1 - 5 = -4,$$

$$-4 \cdot 9 = -36 \equiv 2,\ 2 + 4 = 6,\ 6 \cdot 9 = 54 \equiv 16;$$

$$16 - 2 = 14 \equiv -5,\ -5 \cdot 9 = -45 \equiv 12,\ 12 + 7 = 19 \equiv 0.$$

Итак, данное число делится на 19.

Пример 2. Делится ли число 81 452 на 13?

Применяем правило:

$$8 \cdot 3 = 24 \equiv -2, \qquad -2 - 1 = -3;$$

$$-3 \cdot 3 = -9, \qquad -9 + 4 = -5;$$

$$-5 \cdot 3 = -15 \equiv -2, \qquad -2 - 5 = -7 \equiv 6,$$

$$6 \cdot 3 = 18 \equiv 5; \qquad 5 + 2 = 7.$$

Значит, данное число не делится на 13, причем в остатке получается 7.

Глава 7

Числа древние, но вечно юные

А. Простые числа

189 Числа простые и составные

Как известно, число a называют делителем целого числа N, если в результате деления N на a снова получается целое число.

Самое меньшее целое число – это 1. Оно делится без остатка только на самого себя; значит, у числа 1 только один делитель. Всякое другое целое число имеет либо два делителя (единицу и самого себя), либо больше, чем два делителя.

Только на единицу и на себя делятся, например, такие числа, как 2, 3, 5, 7 и другие.

Число 4 имеет три делителя: 1, 2 и 4; число 6 – четыре делителя: 1, 2, 3 и 6 и т. д.

Числа, имеющие только два делителя, условились называть *простыми* (или *первоначальными*) числами. Числа, у которых больше чем два делителя, называют *составными*.

Наименьшим простым числом является число 2. Это единственное четное простое число. Все остальные простые числа, очевидно, следует искать только среди нечетных чисел, но, разумеется, далеко не всякое нечетное число – простое.

Например, нечетные числа 3, 5, 7, 11, 13 – простые, а нечетные числа 9, 15, 21 – составные; число 9 имеет три делителя: 1, 3, 9, число 15 – четыре делителя: 1, 3, 5, 15.

Любое составное число можно разлагать на сомножители до тех пор, пока оно не распадется на одни только простые числа. Например, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$ и т. д.

Простые числа являются как бы первичными элементами, из которых составляются все числа. Понятен поэтому интерес к простым числам со стороны математиков.

190 «Эратосфеново решето»

Как же выбрать простые числа из состава всех целых чисел? Очевидно, что чем больше число, тем труднее решать вопрос, имеет ли оно еще делители, меньшие самого себя.

Когда зерна отделяют от примесей, применяют специальные сита с отверстиями, соответствующими размерам зерен.

Вот таким же примерно способом отделяют и простые числа от составных.

Предположим, что требуется выделить все простые числа в пределах от 2 до некоторого данного целого числа N. Выпишем сначала подряд все целые числа от 2 до N: 2, 3, 4, 5,..., N. Первое простое число есть 2. Подчеркнем его, а все числа, кратные двум (четные), зачеркнем. Первое из оставшихся чисел есть 3. Подчеркнем его как простое, а все числа «через два на третье» (т. е. кратные трем) зачеркнем. Первое число из оставшихся теперь есть 5 (число 4 уже зачеркнуто). Подчеркнем его как простое и зачеркиваем все числа «через четыре на пятое» (т. е. кратные пяти) и т. д.

Все подчеркнутые числа и образуют таблицу простых чисел в пределах от 2 до N:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,

11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,

~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~,

31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~,

....

Такой способ постепенного «просеивания» чисел был придуман более чем 2000 лет назад греческим математиком Эратосфеном (276–196 гг. до н. э.). Эратосфен не зачеркивал числа, кратные 2, 3, 5 и т. д., а прокалывал дырочки над ними. Получалось нечто вроде решета, сквозь отверстия которого как бы просеивались составные числа, а простые оставались. Поэтому указанный способ получения таблицы простых чисел и называют *эратосфеновым решетом.*

Как видите, этот способ очень кропотливый, но вполне надежный.

В настоящее время таблица простых чисел доведена до 10 миллионов, т. е. имеется таблица всех простых чисел от 1 до 10 000 000. За пределами этой таблицы известны только отдельные простые числа. Так, например, математик-самоучка И. М. Первушин в 1883 г. доказал, что число

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

является простым.

Длительное время число

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

было наибольшим из известных простых чисел. Наибольшим известным простым числом по состоянию на август 2014 года является

$$2^{57\,885\,161} - 1.$$

Кроме того, И. М. Первушин доказал, что составным является число $22^{25} + 1$, так как оно делится на 167 772 161. Число $2^{2^{25}}$ содержит 2 525 223 цифры... Результаты Первушина были проверены в Петербургской и Парижской академиях наук и подтверждены.

Очень кропотливую работу по установлению делителей больших чисел вида $2^p \pm 1$ проделал М. И. Слободской, будучи еще студентом Грозненского педагогического института. Он самостоятельно нашел и доказал интересную теорему, позволяющую сразу находить делитель числа $2^p - 1$ для разнообразных значений числа p. Например, он показал, в частности, что число $2^{5\,002\,331} - 1$, содержащее свыше полутора миллионов цифр, делится на число 10 004 663.

Математики, конечно, не могли мириться с тем, что простые числа добываются кустарными способами. Им, естественно, хотелось создать такую общую формулу, которая в зависимости от всевозможных целых значений величины n давала бы только простые числа. Но, увы, такая формула оказалась «синей птицей». Ее никто так и не поймал до сих пор.

191 Новое «решето» для простых чисел

За два тысячелетия, отделяющие нас от Эратосфена, техника «отсеивания» простых чисел развилась от примитивного «решета» до применения электронных машин, выполняющих вычисления с колоссальной быстротой.

Но для «мелких надобностей» неплохо иметь под руками и обыкновенное «решето». Постепенно появились некоторые усовершенствования и в этой «ручной технике» отсеивания простых чисел. Например, такое новое «решето» придумал математик С. П. Сундарам (Индия):

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...

....

Это «решето» представляет собой таблицу, состоящую из бесконечного количества бесконечных арифметических прогрессий, причем *каждый член первой прогрессии*

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

начинает новую прогрессию. Разностями прогрессий являются все нечетные числа, начиная с 3:

$$d_1 = 3,\ d_2 = 5,\ d_3 = 7,\ d_4 = 9 \text{ и т. д.}$$

Если какое-либо число N встречается в этой таблице, то число $2N + 1$ – непременно составное. Если же числа N в этой таблице нет, то $2N + 1$ – число простое.

Примеры.

1. В таблице нет числа $N = 3$, следовательно, $2N + 1 = 7$ – число простое.

2. В таблице нет числа $N = 5$, значит, $2N + 1 = 11$ – число простое.

3. Числа $N = 6$ также нет в таблице, поэтому $2N + 1 = 13$ – число простое.

4. Число $N = 7$ есть в таблице, следовательно, $2N + 1 = 15$ – число составное и т. д.

Заменяя N в формуле $2N + 1$ по порядку всеми числами, которых нет в таблице (они как бы просеяны сквозь данное «решето»), можно получить все простые числа, кроме числа 2.

Как доказать, что $2N + 1$ – число составное для чисел, «задержавшихся в решете», и простое для «просеявшихся чисел»?

192 Полсотни первых простых чисел

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

193 Еще один способ получения простых чисел

Возьмем единицу и любое количество n первых простых чисел. Все эти числа произвольным образом распределим на две группы. Перемножив числа каждой группы, получим два произведения. Если сумма или разность этих произведений даст число N, меньшее, чем квадрат $(n + 1)$-го простого числа, то N – простое число.

Возьмем, например, единицу и четыре первых простых числа, т. е. 1, 2, 3, 5 и 7. Пятое простое число – это 11. Заметим, что $11^2 = 121$. Значит, указанным способом мы сможем получить простые числа, меньшие, чем 121.

Распределим взятые числа на две группы: 2, 3, 5, 7 и 1. Найдем число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209$.

Так как полученное число 209 больше 121, то поручиться за то, что оно простое, мы не можем. Действительно, в таблице простых чисел (см. п. 192) его нет.

Распределим взятые числа по-иному: 1, 3, 5, 7 и 2. Найдем два числа:

$$N_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 = 103,\ N_2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 = 107.$$

Каждое из них меньше, чем 121, следовательно, оба должны быть простыми. В самом деле, если бы они были составными, то распадались бы на простые сомножители, но из способа получения этих чисел следует, что ни одно из них не делится на 2, 3, 5 или 7.

Не могут числа N_1 или N_2 делиться и на следующее простое число, т. е. на 11.

В самом деле, допустим, что N_1 (или N_2) делится на 11. Так как каждое из них меньше 121, то частное будет меньше 11 и, следовательно, не может содержать иных простых множителей, кроме 2, 3, 5 или 7. Но в таком случае N_1 (или N_2) делилось бы на какой-то из этих множителей, что противоречит способу получения числа N_1 (или N_2).

Если к первой группе отнесем числа 1, 5 и 7, а ко второй 2 и 3, то сможем получить еще два простых числа:

$$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 29 \text{ и } 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 41.$$

Еще несколько возможных комбинаций:

$$1 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11,\ 1 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 7 = 23,\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37 \text{ и т. д.}$$

Очевидно также, что можно повысить степень любого сомножителя первой или второй группы, и сумма или разность произведений будут по-прежнему давать простое число, если только они останутся меньшими, чем квадрат $(n - 1)$-го простого числа.

Действительно,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2^3 = 97, \qquad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 = 113,$$

$$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3^2 = 17, \qquad 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3^2 = 53,$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 7 = 47, \qquad 1 \cdot 3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7 = 103 \text{ и т. д.}$$

Составляя подобного рода комбинации всего лишь из трех чисел: 1, 2 и 3, можно получить все простые числа, меньшие 25. Вы без больших затруднений сможете обосновать этот способ получения простых чисел.

194 Сколько простых чисел?

Таблица простых чисел не имеет последнего числа, т. е. их количество бесконечно. Это доказал еще Евклид*. Но распределяются простые числа в натуральном ряде очень неравномерно. Первый десяток натуральных чисел содержит 4 простых, т. е. 40 %. Первая сотня натуральных чисел содержит 25 простых, т. е. 25 %. Миллион первых натуральных чисел содержит уже только 8 % простых чисел и т. д.

* Доказательство Евклида имеется в учебниках по теории чисел.

Как с помощью расчета определить хотя бы приближенно, сколько же простых чисел содержится в ряде натуральных чисел от 1 до любого числа N?

Этот вопрос оказался настолько трудным, что точной формулы нет и до сих пор. Однако существует приближенная формула, позволяющая тем точнее находить число n простых чисел, приходящихся на N первых чисел натурального ряда («плотность» распределения простых чисел), чем больше N:

$$n \approx \frac{0{,}43429...}{\lg N} \cdot N.$$

Б. Числа Фибоначчи

195 Публичное испытание

В начале XIII в. в городе Пизе (Италия) жил большой знаток всевозможных соотношений между числами и весьма искусный вычислитель Леонардо (с добавлением к его имени Пизанский). Его звали еще Фибоначчи, что значит сын Боначчи. В 1202 г. он издал книгу под названием «Книга об абаке», содержащую всю совокупность знаний того времени по арифметике и алгебре.

Эта книга получила широкое распространение и более двух веков являлась наиболее авторитетным источником знаний в области чисел.

По обычаям того времени Фибоначчи участвовал в математических турнирах (публичное состязание в наилучшем и наиболее быстром решении трудных задач; нечто вроде наших математических олимпиад). Одна из задач, предложенных на турнире, имела следующее содержание:

Найти полный квадрат, остающийся полным квадратом как после увеличения, так и после уменьшения его на 5.

Фибоначчи после некоторых размышлений нашел такое число. Оно оказалось дробным: $\frac{1681}{144}$, или $\left(\frac{41}{12}\right)^2$.

Действительно,

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144}, \frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144},$$

иначе

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2,\ \left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Какими соображениями руководствовался Фибоначчи во время турнира, мы никогда не узнаем, но задачу он решил блестяще.

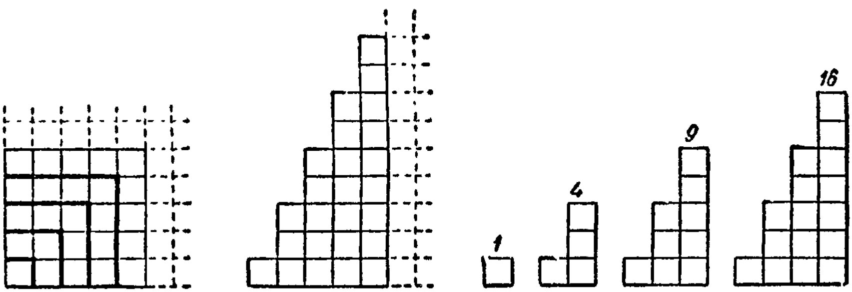
Впрочем, может быть не так уж далека от истины догадка, высказанная в свое время студентом Лесотехнического института в г. Йошкар-Ола В. Незабудкиным:

– Не исходил ли Фибоначчи в своем решении этой задачи из геометрического представления всякого полного квадрата как суммы последовательных нечетных чисел.

Основываясь на этом предположении, В. Незабудкин нашел оригинальное и наглядное решение задачи Фибоначчи, интересное именно тем, что оно по идее близко к методам той эпохи.

Привожу его решение с небольшими изменениями.

Выпрямив гномоны, дополняющие единичный квадрат до любого целого квадрата (рис. 63, *а*), получим бесконечную ступенчатую фигуру с одинаковыми порожками в две клетки (рис. 63, *б*). Обрывая эту фигуру на любом столбике справа, получим ряд ступенчатых фигур, изображающих все целые числа-квадраты (рис. 63, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 63

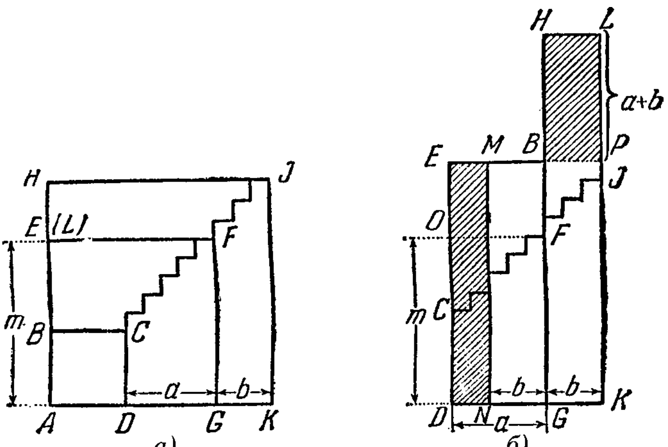
Из рис. 63 видно, что среди целых чисел-квадратов нет и не может быть таких, которые удовлетворяли бы условию задачи.

Следовательно, искомое число – дробь вида $\frac{m^2}{n^2}$. Вычитая 5 и прибавляя 5, получаем:

$$\frac{m^2-5n^2}{n^2},\ \frac{m^2}{n^2},\ \frac{m^2+5n^2}{n^2}.$$

По условию $m^2 - 5n^2$, m^2 и $m^2 + 5n^2$ – целые числа-квадраты. Такие числа существуют, если существуют находящиеся рядом равновеликие гномоны *BEFGDC* и *EHJKGF* (рис. 64, *а*), в каждом из которых число клеток равно $5n^2$. Тогда, вычитая из квадратного числа *AEFG* (m^2) гномон *BEFGDC* ($5n^2$), получаем квадратное число *ABCD* ($m^2 - 5n^2$), а прибавляя к числу *AEFG* гномон *EHJKGF* ($5n^2$), получаем квадратное число *AHJK* ($m^2 + 5n^2$). Найдем эти числа.

Разрежем гномоны по ступенчатой линии *GFJ* (каждая ступенька – сторона клетки) и из полученных частей составим прямоугольники *DEBG* и *GHLK* (рис. 64, *б*).



а) б)

Рис. 64

Отложим $GN = GK = b$ и проведем $NM \parallel DE$. Так как *DEBG* и *GHLK* равновелики, то пл. *BHLP* = пл. *DEMN*.

Тогда $\frac{\text{пл. } DEBG}{\text{пл. } DEMN} = \frac{a}{a-b}$, или $\frac{5n^2}{b(a+b)} = \frac{a}{a-b}$.

Следовательно, $n^2 = \dfrac{ab(a+b)}{5(a-b)}$. Естественно предположить, что, например, a кратно пяти: $a = 5k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда $n^2 = \dfrac{kb(5k+b)}{5k-b}$ и $b = 4k$ есть единственно возможное значение b, обращающее эту дробь в целое число-квадрат. При этом $n = 6k$.

Итак, $a = 5k$, $b = 4k$, $n = 6k$. Знаменатель искомой дроби $n^2 = (6k)^2$. Найдем числитель m^2. Имеем

$$ED = \frac{\text{пл. } DEMN}{a-b} = \frac{\text{пл. } BHLP}{a-b} = \frac{b(a+b)}{a-b} = 36k.$$

Далее, $m = FG$, но $FG = EC$ и $FG = OD$, а также $OC = OF = a$; $ED = EC + OD - OC$, или $ED = 2EC - a$.

Отсюда

$$EC = \frac{ED+a}{2} \text{ и } m = FG = EC = \frac{ED+a}{2} = \frac{36k+5k}{2} = \frac{41k}{2}.$$

Искомая дробь $\dfrac{m^2}{n^2} = \dfrac{\left(\dfrac{41}{2}k\right)^2}{(6k)^2} = \left(\dfrac{41}{12}\right)^2$, т. е. то самое число, которое нашел Фибоначчи.

Все даже самые искусные попытки алгебраического решения этой задачи в лучшем случае приводили к уравнению четвертой степени с двумя неизвестными.

196 Ряд Фибоначчи

Фибоначчи составил такой ряд из натуральных чисел, который впоследствии оказался полезным в науке:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Закон образования этого ряда очень прост: первые два члена — единицы, а затем каждый последующий член получается сложением двух непосредственно ему предшествующих. Например, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$ и т. д.

Любая пара соседних чисел ряда Фибоначчи удовлетворяет одному из уравнений

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

либо

$$x^2 - xy - y^2 = -1,$$

причем большее число является значением неизвестного x, а меньшее – значением неизвестного y.

Например,

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=13, \\ y=8 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

являются корнями первого уравнения, а

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=8, \\ y=5, \end{cases} \begin{cases} x=21, \\ y=13 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

являются корнями второго уравнения.

Доказательство этого утверждения для общего случая будет приведено в п. 198 (свойство 3).

Ряд Фибоначчи известен не только математикам, но и биологам.

Если листья на ветке сидят одиноко, то они всегда располагаются вокруг стебля, но не по окружности, а по винтовой линии, т. е. каждый последующий лист находится несколько выше и в стороне от предыдущего. При этом для каждого вида растений характерен свой угол расхождения двух соседних листьев, который, как утверждают биологи, выдерживается более или менее точно во всех частях стебля. Этот угол обычно выражают дробью, показывающей, какую часть окружности он составляет. Так, у липы и вяза угол расхождения листьев составляет $\frac{1}{2}$ окружности; у бука – $\frac{1}{3}$, у дуба и вишни – $\frac{2}{5}$, у тополя и груши – $\frac{3}{8}$, у ивы – $\frac{5}{13}$ и т. д. Тот же угол у данного вида растений сохраняется также и в расположении веток, почек, чешуек внутри почек, цветов.

Наиболее распространены среди растений следующие углы расхождения (в частях окружности):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \ldots$$

Здесь ряд числителей и ряд знаменателей – числа Фибоначчи, причем каждая из дробей (начиная с третьей) получается из двух предыдущих сложением их числителей и знаменателей:

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3},\ \frac{3}{8}=\frac{1+2}{3+5}\ \text{и т. д.}$$

197 Парадокс

С числами Фибоначчи косвенно связан занятный геометрический парадокс.

Очевидно, что если какую-либо плоскую фигуру разрезать на несколько частей, затем, прикладывая полученные части друг к другу (но не накладывая одну на другую), составить новую фигуру, то по форме новая фигура может отличаться от первоначальной, но ее площадь должна остаться прежней.

Это очевидное утверждение считается в геометрии одним из тех первичных основных положений, на которых строится вся теория измерения площадей.

На рис. 65 показано превращение квадрата в прямоугольник.

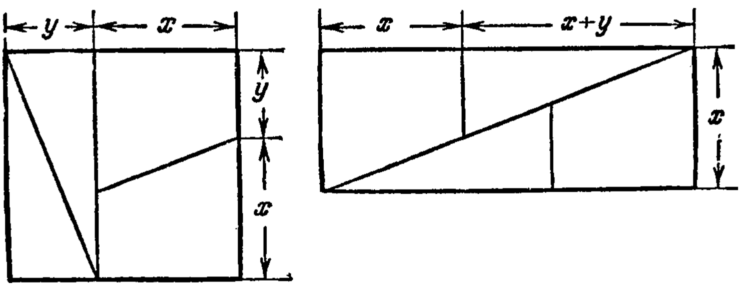


Рис. 65

Квадрат разрезан на два равных треугольника и на две равные трапеции, длины сторон которых пока обозначены буквами x и y. Из этих частей составлен прямоугольник. Если такое превращение квадрата в прямоугольник действительно возможно, то на какие же части x и y надо при этом делить сторону квадрата?

Один мой юный друг решил установить это практически и натолкнулся при этом на поразительное явление.

– Дай, думаю, – пишет он в письме, – я сам выполню это превращение практически. Копировать рисунок с книги мне не хотелось. Я решил сам разметить свой квадрат, пользуясь указаниями рис. 65.

Нарисовал я на клетчатой бумаге квадрат в 64 клетки и задумался над вопросом: на какие части x и y разделить сторону квадрата. Сначала я подумал, что это безразлично, и положил $x = 6$, $y = 2$. Разметил квадрат, разрезал его на два равных треугольника и две равные трапеции, начал составлять прямоугольник, как указано на рис. 65, и ... ничего не вышло! Сплошного прямоугольника не получилось. Не получался сплошной прямоугольник и при других значениях x и y, например при $x = 4{,}5$, $y = 3{,}5$.

Только при $x = 5$, $y = 3$ я смог составить прямоугольник из образовавшихся частей квадрата, но тут же был ошеломлен новой неприятностью: площадь прямоугольника оказалась равной 65 клеткам, т. е. на одну клетку *большей*, чем площадь первоначально взятого квадрата (рис. 66).

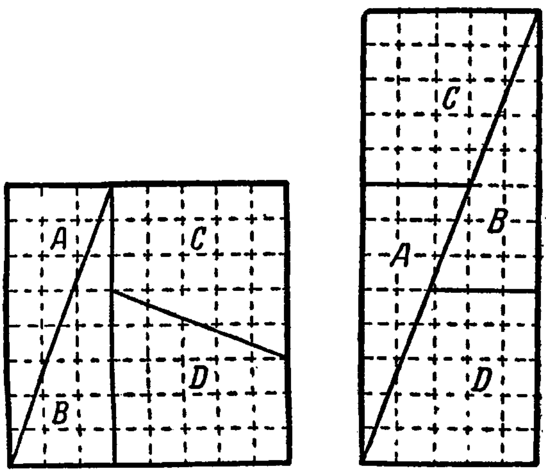


Рис. 66

В самом деле, длина прямоугольника (см. рис. 65) должна содержать $x + x + y = 2x + y = 2 \cdot 5 + 3 = 13$ ед.; у меня и получилось ровно 13 ед.; ширина прямоугольника x, и у меня получилась ширина прямоугольника 5 ед. (рис. 66). Значит, его площадь содержит ровно $13 \cdot 5 = 65$ клеток!

Но это еще не все. По той же выкройке (см. рис. 65) я делил на части и другой квадрат со стороной в 13 ед. Если я брал $x = 8$ и $y = 5$, то из частей квадрата складывался прямоугольник, но ... в этот раз с площадью, меньшей площади квадрата, причем также ровно на 1 клетку.

Судите сами: площадь квадрата содержит $13^2 = 169$ клеток, а площадь прямоугольника содержит $(2x + y)x = (2 \cdot 8 + 5) \cdot 8 = 168$ клеток!

Еще два *примера*.

1. Беру квадрат в $21 \cdot 21 = 441$ клетку. Делю сторону на части $x = 13$, $y = 8$. Разрезаю. Складываю. Получается прямоугольник. Подсчитываю площадь:

$$(2x + y)x = (2 \cdot 13 + 8) \cdot 13 = 442 \text{ клетки!}$$

Опять лишняя клетка.

2. Беру квадрат в $34 \cdot 34 = 1156$ клеток. Делю сторону на части $x = 21$, $y = 13$. Разрезаю. Складываю. Получается прямоугольник. Подсчитываю площадь:

$$(2x + y)x = (2 \cdot 21 + 13) \cdot 21 = 1155 \text{ клеток.}$$

Не хватает одной клетки!

Что за история! Почему так получается?

Что бы вы ответили моему юному другу? Обдумайте хорошенько весь этот парадокс, прежде чем прочтете решение. Какую роль в нем играют числа Фибоначчи?

198 Свойства чисел ряда Фибоначчи

Обнаружено много интересных соотношений между числами ряда Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

1°. Принцип образования членов этого ряда приводит к следующему соотношению между любыми его тремя последовательными членами S_{n-2}, S_{n-1} и S_n:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Эта формула дает возможность по первым двум членам ряда установить его третий член, по второму и третьему — четвертый, по третьему и четвертому — пятый и т. д.

2°. Интересно было бы сразу найти любой член ряда S_n, зная лишь номер n его места. Оказывается, это вполне возможно, но здесь мы столкнемся с одной из удивительных неожиданностей, которые нередки в математике.

Любой член ряда Фибоначчи – число целое, номер места – также число целое. Естественно было бы ожидать, что любой член S_n ряда получается в зависимости от номера n занимаемого им места с помощью действий только над целыми числами (например, как в прогрессиях). Но это не так. Не только целые числа, но даже все целые и дробные (рациональные числа) не в состоянии образовать интересующую нас формулу.

Из затруднительного положения помогают выйти два иррациональных числа:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Вспомните, как эти же два числа обращали в нуль разность R между площадями прямоугольника и квадрата (см. решение задачи из п. 197 на с. 234). Поистине неожиданная встреча!

Так, если n – номер места, то любой член S_n ряда Фибоначчи можно найти по формуле

$$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}. \qquad (1)$$

При $n = 1$ получим

$$S_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

при $n = 2$ находим

$$S_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Так как для двух соседних членов ряда эта формула подтверждается, а всякий последующий член ряда Фибоначчи получается как сумма двух предыдущих, то далее нет смысла проверять справедливость формулы (1) для отдельных случаев; можно сразу убедиться в ее справедливости для любого номера n. Напишем ее выражение для двух соседних n:

$$S_{n-2} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \text{ и } S_{n-1} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Формула (1) будет справедлива для любого n, если сумма этих двух выражений даст соответствующее выражение для S_n:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-2}(a_1+1) - a_2^{n-2}(a_2+1)}{\sqrt{5}}.$$

Зная, что представляют собой a_1 и a_2, легко проверить, что $a_1 + 1 = a_1^2$ и $a_2 + 1 = a_2^2$.

Возвращаясь к сумме $S_{n-2} + S_{n-1}$, имеем

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2}a_1^2 - a_2^{n-2}a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = S_n,$$

что и требовалось доказать.

3°. Зная, что любой член S_n ряда Фибоначчи определяется по номеру n занимаемого им места:

$$S_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \text{ где } a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

легко доказать, что любая пара S_n и S_{n+1} соседних чисел ряда Фибоначчи удовлетворяет одному из уравнений $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, причем если $y = S_n$, то $x = S_{n+1}$. Заменяя неизвестные x и y соответствующими выражениями

$$y = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \quad x = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

получим

$$\frac{\left(a_1^{n+1} - a_2^{n+1}\right)^2}{5} - \frac{\left(a_1^{n+1} - a_2^{n+1}\right)\left(a_1^n - a_2^n\right)}{5} - \frac{\left(a_1^n - a_2^n\right)^2}{5} = \pm 1,$$

$$a_1^{2n+2} - 2a_1^{n+1}a_2^{n+1} + a_2^{2n+2} - a_1^{2n+1} + a_1^n a_2^{n+1} + a_1^{n+1}a_2^n - a_2^{2n+1} - a_1^{2n} + 2a_1^n a_2^n - a_2^{2n} = \pm 5.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми основаниями:

$$a_1^{2n}(a_1^2-a_1-1)+a_2^{2n}(a_2^2-a_2-1)+a_1^n a_2^n(-2a_1a_2+a_2+a_1+2)=\pm 5.$$

Подставляя значения a_1 и a_2 в выражения, записанные в скобках, получим $5a_1^n a_2^n=\pm 5$, или $5(a_1a_2)^n = \pm\, 5$. Но

$$a_1a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1.$$

Следовательно, при n четном имеем $5(-1)^n = 5$, а при n нечетном имеем $5(-1)^n = -5$.

4°. Забавный вид имеет формула суммы n членов ряда Фибоначчи:

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=S_{n+2}-1,$$

т. е. сумма n первых членов ряда Фибоначчи на 1 меньше $(n + 2)$-го члена того же ряда.

Доказательство. Согласно закону образования членов ряда имеем

$$\begin{aligned}S_{n+2}&=S_{n+1}+S_n,\\ S_{n+1}&=S_n+S_{n-1},\\ S_n&=S_{n-1}+S_{n-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_4&=S_3+S_2,\\ S_3&=S_2+S_1.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства и приводя подобные члены, получим

$$S_{n+2}=(S_n+S_{n-1}+\ldots+S_1)+S_2;$$

следовательно,

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=S_{n+2}-S_2,\ S_1+S_2+\ldots+S_n=S_{n+2}-1,$$

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}-1.$$

5°. Сумма квадратов чисел ряда Фибоначчи выражается через произведение двух соседних членов того же ряда по формуле

$$S_1^2+S_2^2+\ldots+S_n^2=S_n\cdot S_{n+1}. \qquad (2)$$

Например,

$$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5 \text{ и т. д.}$$

Для доказательства применим метод математической индукции. Пусть формула (2) верна для некоторого числа членов k:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2 = S_k \cdot S_{k+1}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства по S_{k+1}^2:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2 + S_{k+1}^2 = S_k \cdot S_{k+1} + S_{k+1}^2 = S_{k+1}(S_k + S_{k+1}) = S_{k+1} \cdot S_{k+2}.$$

Значит, формула, справедливая, по предположению, для k слагаемых, осталась справедливой и для $k + 1$ слагаемых.

Как показала непосредственная проверка, формула (2) справедлива для $k = 2$. Таким образом, она будет справедливой и для любого целого числа n.

Используя формулу (1) или метод математической индукции, докажите самостоятельно еще следующие соотношения.

6°. Квадрат каждого члена ряда Фибоначчи, уменьшенный на произведение предшествующего и последующего членов, дает попеременно то +1, то –1.

Например, $2^2 - 1 \cdot 3 = +1$, $3^2 - 2 \cdot 5 = -1$, $5^2 - 3 \cdot 8 = +1$, ...

Вообще,

$$S^2_n - S_{n-1}S_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

7°. $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2n-1} = S_{2n}$.

8°. $S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$.

9°. В ряде Фибоначчи каждое третье число – четное, каждое четвертое делится на 3, каждое пятое – на 5, каждое пятнадцатое – на 10.

10°. Невозможно построить треугольник, сторонами которого являются числа ряда Фибоначчи.

11°. Если взять любые четыре последовательных члена ряда Фибоначчи и рассматривать произведение крайних членов и удвоенное произведение средних как длины катетов прямоугольного треугольника, то длиной его гипотенузы будет один из членов этого ряда*:

$$(a_n \cdot a_{n+3})^2 + (2a_{n+1} \cdot a_{n+2})^2 = a^2_{2n+3}.$$

В. Фигурные числа

199 Свойства фигурных чисел

1°. Еще задолго до нашей эры ученые, комбинируя натуральные числа, составляли из них затейливые ряды, придавая элементам этих рядов то или иное геометрическое истолкование.

Так, например, в V – IV вв. до н. э. возникли представления о рядах так называемых фигурных чисел.

Рассмотрим сначала такой ряд, в котором разность между каждым последующим и предыдущим членами равна одному и тому же натуральному числу (арифметическая прогрессия), например

$$1, 2, 3, 4, 5,\dots \text{ (разность } d = 1),$$

$$1, 3, 5, 7, 9,\dots \text{ (разность } d = 2),$$

$$1, 4, 7, 10, 13,\dots \text{ (разность } d = 3);$$

или в общем виде:

$$1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, 1 + 4d, \dots$$

У каждого элемента ряда есть свое место. Чтобы получить n-й элемент ряда (назовем его a_n), надо к первому элементу ряда прибавить произведение разности ряда на число, которое на 1 меньше номера места, занимаемого этим элементом a_n:

$$a_n = 1 + d(n - 1).$$

Элементы каждого из таких рядов называют *линейными фигурными* числами (или *фигурными числами первого порядка*).

2°. Из рядов с линейными фигурными числами составим последовательные суммы этих чисел: первую «сумму» из одного первого элемента ряда линейных фигурных чисел, вторую сумму – складывая первые два элемента того же ряда, третью сум-

---

* Дополнительные сведения о свойствах чисел Фибоначчи имеются в книге: Н.Н. Воробьев. Числа Фибоначчи, М., 1951.

му – складывая первые три элемента, ..., n-ю сумму – складывая первые n элементов.

Так, первый ряд линейных фигурных чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

производит следующий новый ряд сумм:

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + 2 = 3, S_3 = 1 + 2 + 3 = 6, S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$
$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \ldots,$$

или

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

Эти числа называют *треугольными.*

Второй ряд линейных фигурных чисел

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

производит такой ряд сумм:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

Эти числа называют *квадратными.*

Из третьего ряда линейных фигурных чисел

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

можно произвести ряд *пятиугольных* чисел

$$1, 5, 12, 22, 35, \ldots$$

Аналогично можно получить шестиугольные, семиугольные и т. п. числа.

Все эти многоугольные числа называют *плоскими* фигурными числами (или *фигурными числами второго порядка*).

3°. Геометрические «имена», которые получили эти числа, объясняются возможностью дать им наглядное истолкование. Построим правильный треугольник, квадрат, правильные пятиугольник, шестиугольник и т. д. со сторонами, равными 1. Затем исходя в каждой фигуре от одной из вершин, удлиним все стороны в 2, 3, 4, ... раз, т. е., как говорят, построим многоугольники, перспективно-подобные данным (рис. 67).

Во всех вершинах полученных фигур и на их сторонах на расстояниях, равных 1, поместим кружочки. Подсчет кружочков, расположенных в каждом треугольнике, приводит к ряду треугольных чисел

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

Подсчет кружочков, расположенных в каждом квадрате, дает последовательность квадратных чисел

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

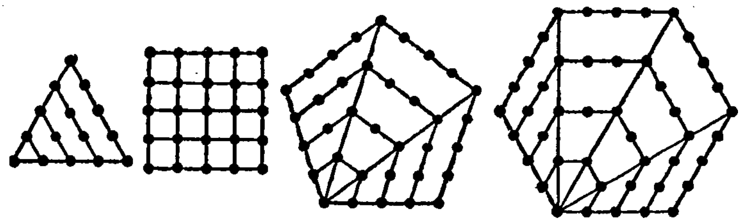


Рис. 67

Аналогичные подсчеты кружочков в каждом пятиугольнике, шестиугольнике и т. д. приводят соответственно к последовательностям чисел пятиугольных, шестиугольных и т. д.

4°. Сведения о плоских фигурных числах приведены в таблице:

d	Фигура	Числа						Общий член S_n
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	Треугольник	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	Квадрат	1	4	9	16	25	...	n^2
3	Пятиугольник	1	5	12	22	35	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
4	Шестиугольник	1	6	15	28	45	...	$n(2n-1)$
...	....	...	...	...	...	...	...	...
d		1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$		$\frac{n[dn-(d-2)]}{2}$

Общий член S_n каждого ряда плоских фигурных чисел, как это следует из их определения, представляет собой сумму n элементов соответствующего ряда линейных фигурных чисел:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ \ldots,\ 1+d(n-1),$$

где $d = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Другими словами, S_n – это сумма n членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1$, $a_n = 1 + d(n-1)$ и разность $d = 1, 2, 3, \ldots$

Напомним формулу суммы членов арифметической прогрессии:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Согласно этой формуле имеем

$$S_n = \frac{[1+1+d(n-1)]n}{2} = \frac{n[dn-(d-2)]}{2}.$$

Отсюда при $d = 1$ получаем формулу для S_n первой строки таблицы, при $d = 2$ получаем формулу для S_n второй строки таблицы и т. д.

5°. Между натуральными числами и плоскими фигурными числами, а также между самими плоскими фигурными числами существует много любопытных зависимостей.

Пьер Ферма (1601–1665), юрист и общественный деятель из города Тулузы (Франция), занимавшийся математикой в часы досуга, что, однако, не помешало ему сделать крупнейшие открытия в теории чисел, обнаружил, например, что:

а) всякое натуральное число есть либо треугольное, либо сумма двух или трех треугольных чисел;

б) всякое натуральное число есть либо квадрат, либо сумма двух, трех или четырех квадратных чисел;

в) всякое натуральное число есть либо пятиугольное, либо сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных чисел;

г) вообще, всякое натуральное число можно представить в виде суммы k-угольных чисел, количество которых не более, чем k.

Для отдельных частных случаев это утверждение доказал Эйлер, а общее доказательство дал в 1815 г. французский математик Коши.

В качестве упражнения возьмите какое-нибудь натуральное число и разложите его на сумму треугольных, квадратных или пятиугольных чисел. Можно соревноваться, кто быстрее сделает.

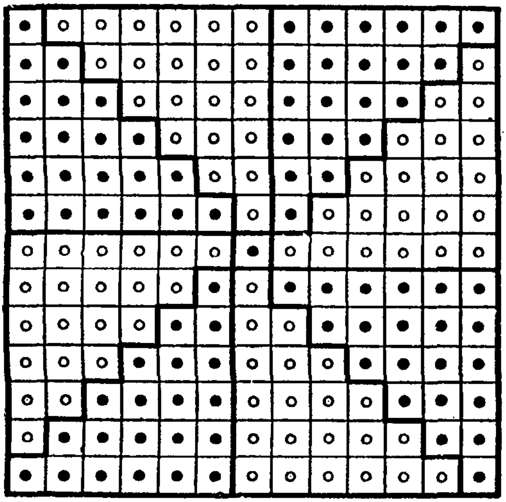
6°. Греческий математик Диофант (III в. до н. э.) нашел простую связь между треугольными числами T и квадратными K:

$$8T + 1 = K.$$

Эту формулу Диофанта можно наглядно представить себе на примере треугольного числа 21.

На рис. 68 изображены 169 пятнышек, размещенных в квадрате. Они образуют квадратное число K. Одно пятнышко занимает центр квадрата, а остальные 168 сгруппированы в 8 треугольных чисел T в форме восьми «прямоугольных треугольников» с ломаными гипотенузами.

Получается: $8T + 1 = K$.



$8T+1=K$

Рис. 68

7°. В качестве самостоятельного упражнения докажите алгебраически:

а) справедливость формулы Диофанта,

б) что никакое треугольное число не может оканчиваться цифрами 2, 4, 7 и 9,

в) что всякое шестиугольное число есть треугольное с нечетным номером.

8°. Для суммы степеней натуральных чисел, т. е. одного из видов линейных фигурных чисел, известна формула:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Якоби нашел другую интересную зависимость между теми же числами:

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^4 = 1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7).$$

Аналогичная зависимость обнаружена между суммами степеней треугольных чисел, т. е. одного из видов плоских фигурных чисел:

$$3\left[1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}\right]^3 =$$

$$=\left[1^3+3^3+\ldots+\frac{[n(n+1)]^3}{2^3}\right]+2\left[1^4+3^4+\ldots+\frac{[n(n+1)]^4}{2^4}\right].$$

Например,

$$3(1 + 3 + 6)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 2(1^4 + 3^4 + 6^4) = 3000,$$

$$3(1 + 3 + 6 + 10)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 10^3 + 2(1^4 + 3^4 + 6^4 + 10^4) =$$
$$= 24\,000.$$

9°. Составляя последовательные суммы из плоских фигурных чисел $V_1 = S_1$, $V_2 = S_1 + S_2$, $V_3 = S_1 + S_2 + S_3$, $V_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ и т. д., получим *пространственные фигурные числа* (или *фигурные числа третьего порядка*) V_1, V_2, V_3, ...

Так, ряд треугольных чисел

1, 3, 6, 10, 15, ...

производит следующий ряд фигурных чисел третьего порядка:

1, 4, 10, 20, 35, ...

Эти числа называют еще *пирамидальными*, так как для их геометрического представления выкладываются пирамиды из шаров одинакового диаметра.

Подложив под шар три шара, получим «пирамиду» из четырех шаров как изображение числа 4. Затем, подложив снизу еще 6 шаров, получим пирамиду из 10 шаров как изображение числа 10 (рис. 69) и т. д.

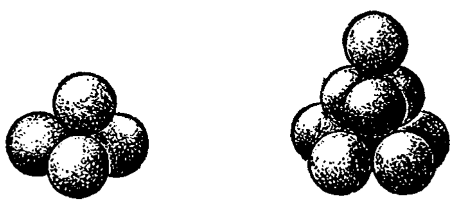


Рис. 69

10°. Сведения о фигурных числах третьего порядка приведены в таблице:

d	Числа						Общий член V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
1	1	4	10	20	35	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
2	1	5	14	30	55	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3	1	6	18	40	75	...	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$
4	1	7	22	50	95	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
...	...	...	...	...	...	...	....
d	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$	...	$\frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)]$

Вывести формулу общего члена V_n для пространственных фигурных чисел труднее, чем для плоских. Этот вывод предполагает знание основ комбинаторики, и мы его не приводим.

200 Пифагоровы числа

Иногда возникает необходимость построить прямоугольный треугольник, у которого оба катета и гипотенуза выражаются *целыми числами*. Такие целые числа называют *пифагоровыми*, поскольку они должны удовлетворять найденному Пифагором соотношению между катетами x, y и гипотенузой z:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Выбрав длины катетов x и y произвольно, можно вычислить гипотенузу z по формуле $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; однако трудно наугад так выбрать целые значения x и y, чтобы z также оказалось целым. Например, при $x = 3$, $y = 4$ получаем $z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; это хорошо известный «египетский» треугольник (3, 4, 5), однако при $x = 2$, $y = 6$ гипотенуза $z = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ не выражается целым числом.

Тем не менее существует бесчисленное множество пифагоровых чисел.

Любое комплексное число $a + bi$, где a и b – целые, производит пифагоровы числа.

Напомним прежде, что буквой i обозначается такое комплексное число, что $i^2 = -1$. С учетом этого соотношения комплексное число возводится в квадрат по формуле квадрата суммы.

Например,

а) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$;

б) $(2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i$.

Квадрат всякого комплексного числа $a + bi$ также есть комплексное число вида $x + yi$. Числа x, y и $a^2 + b^2$ всегда являются пифагоровыми.

Так, для примера а) имеем:

$$x = 5, y = 12, a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

причем $5^2 + 12^2 = 13^2$;

для примера б) имеем:

$$x = -21, y = 20, a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29,$$

причем $21^2 + 20^2 = 29^2$.

Пусть требуется получить тройку пифагоровых чисел из чисел 1 и 4. Составляем комплексное число $1 + 4i$ (или другое: $4 + i$). Возводим в квадрат:

$$(1 + 4i)^2 = -15 + 8i.$$

Теперь имеем

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \ (17 = 1^2 + 4^2).$$

Простой, легко запоминающийся способ!

Если эти вычисления произвести в буквенной форме, то получатся хорошо известные формулы для подбора пифагоровых чисел x, y и z:

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Отсюда

$$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2,$$

где a и b – произвольные целые числа.

Дополнительно заметим, что куб любого комплексного числа аналогично приводит к решению уравнения

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Пусть, например, $a + bi = 1 + 2i$. Возведем в куб:

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot 4i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$$

(так как $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$).

Отсюда имеем

$$x = 11, y = 2, z = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Действительно,

$$11^2 + 2^2 = 5^3.$$

Еще пример:

$$(5 + 3i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3 = -10 + 198i.$$

Имеем

$$10^2 + 198^2 = 34^3.$$

Таким способом можно легко найти любое количество решений в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 = z^n$$

для любого целого n.

Найдите, например, какую-нибудь тройку чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^4$.

Ответы и решения

К главе 1

1. Надо обратить внимание на дым, идущий из трубы паровоза. Если бы поезд стоял, то дым паровоза отклонялся бы в ту сторону, куда дует ветер. Если бы, наоборот, поезд двигался вперед при отсутствии ветра, то дым от паровоза отклонялся бы назад. Как показано на рис. 1, дым от движущегося паровоза поднимается вверх, значит, поезд имеет скорость, равную скорости ветра, т. е. 7 м/с, или около 25 км/ч.

2. Решение показано на рис. 70.

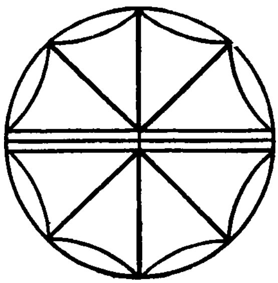


Рис. 70

3. Перенумеруем шашки слева направо, как показано на рис. 71. Если свободное место оставлено слева, то перенесем шашки № 2 и № 3 влево и поместим их в начале ряда так, чтобы шашка № 3 оказалась рядом с шашкой № 1 (перемещение *I* на рис. 71). На освободившееся место поместим шашки № 5 и № 6 (перемещение *II*). Перенесем теперь шашки № 6 и № 4 налево, к шашке № 2 (перемещение *III*).

Выполните решение задачи в обратном порядке. От последнего расположения шашек, также в три хода, вернитесь к первоначальному их расположению.

Теперь это нетрудно!

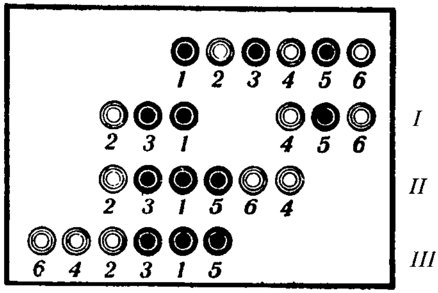


Рис. 71

4. Схема решения:

Кучка	Начальное распределение	1-й ход	2-й ход	3-й ход
Первая	11	11 – 7 = 4	4	4 + 4 = 8
Вторая	7	7 + 7 = 14	14 – 6 = 8	8
Третья	6	6	6 + 6 = 12	12 – 4 = 8

5. 35 треугольников. А теперь самостоятельно подсчитайте, сколько всевозможных четырехугольников в фигуре, изображенной на рис. 4.

6. Один из возможных путей показан стрелкой на рис. 72.

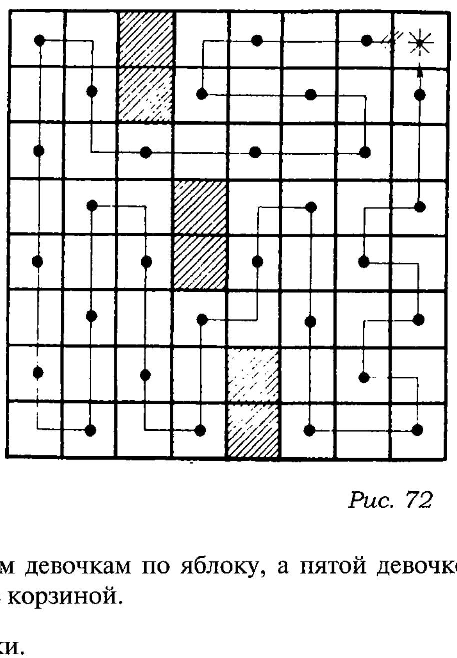


Рис. 72

7. Дать четырем девочкам по яблоку, а пятой девочке – оставшееся яблоко вместе с корзиной.

8. Четыре кошки.

9. В начальном положении карандашей запачкан 1 см длины желтого карандаша. При движении синего карандаша вниз пачкается второй сантиметр его длины, а при последующем движении вверх второй сантиметр синего карандаша пачкает второй сантиметр желтого.

Таким образом, каждая пара движений карандаша вниз – вверх пачкает 1 см длины желтого карандаша. Значит, 10 пар движений запачкают 10 см длины, а вместе с начальным сантиметром будет запачкано 11 см длины желтого (а также и синего) карандаша.

10. Сначала мальчики переправились через реку. Один из них остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. В лодку сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, остававшийся там, пригнал обратно лодку к солдатам, взял своего товарища, отвез на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в нее сел второй солдат и переправился...

Так после каждых двух перегонов лодки через реку и обратно переправлялся один солдат. Это повторялось столько раз, сколько было человек в отряде.

11. Волк не ест капусту, следовательно, начинать переправу надо с козы, так как волка и капусту можно оставить на берегу без человека (рис. 73, *а*).

Переправив козу на другой берег, человек возвращается (рис. 73, *б*), берет в лодку капусту и также перевозит ее на другой берег (рис. 73, *в*), где ее оставляет, но зато берет в лодку козу и везет ее обратно – на первый берег (рис. 73, *г*).

Здесь он оставляет козу и перевозит волка (рис. 73, *д*). Капусту он оставляет с волком, а сам возвращается за козой (рис. 73, *е*), перевозит ее, и переправа благополучно оканчивается (рис. 73, *ж*).

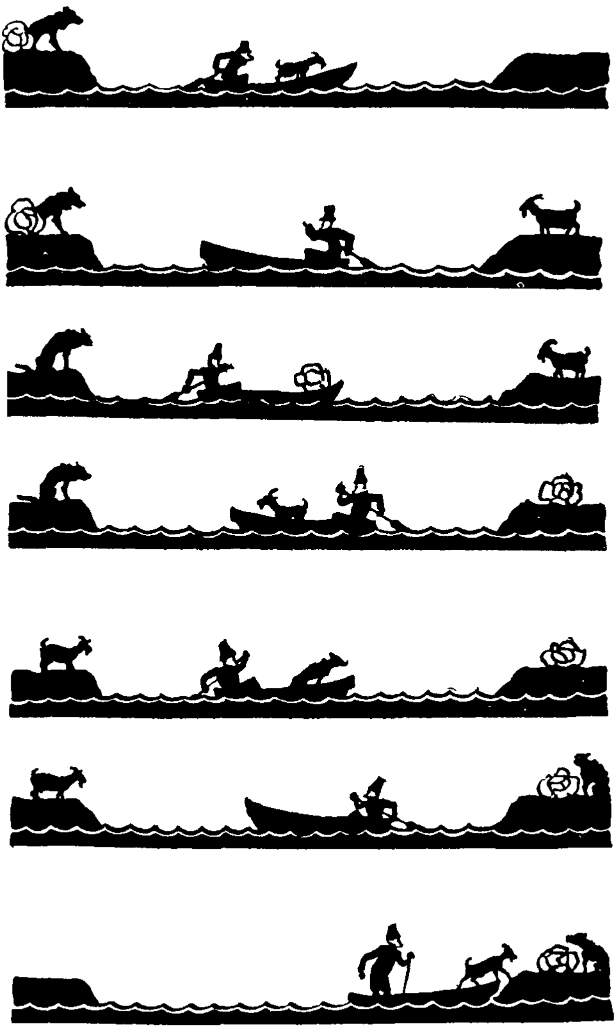


Рис. 73

12. Схема необходимых движений изображена на рис. 74.

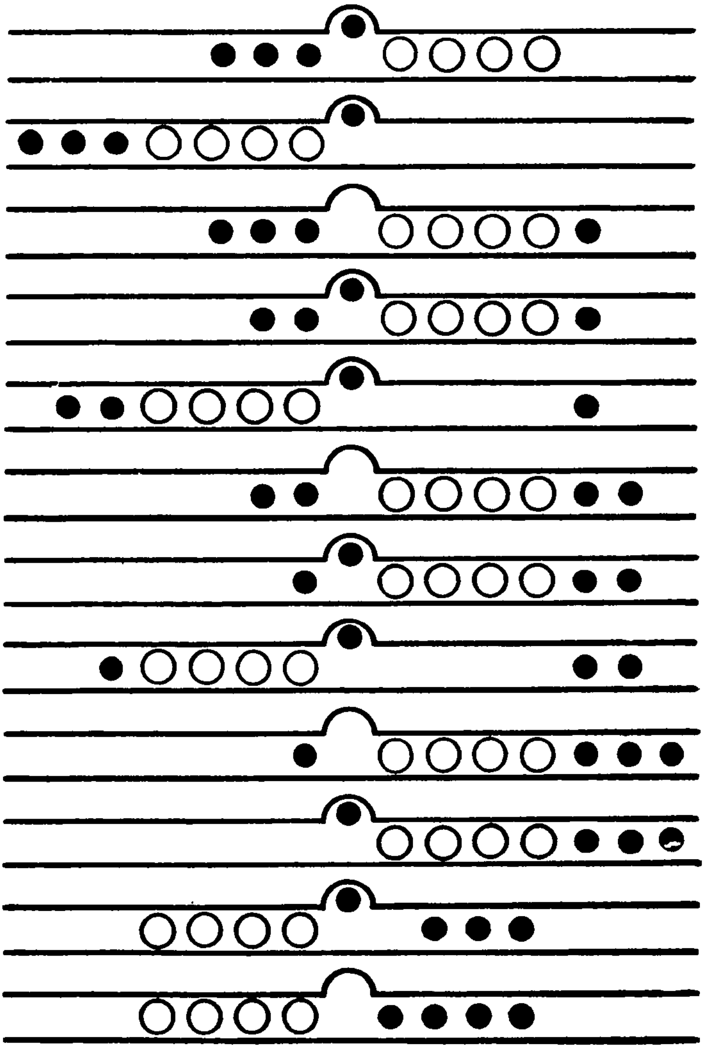


Рис. 74

13. Мастер расковал три кольца одного звена (три операции) и ими соединил остальные четыре звена (еще три операции, всего шесть).

14. Первое решение (рис. 75):

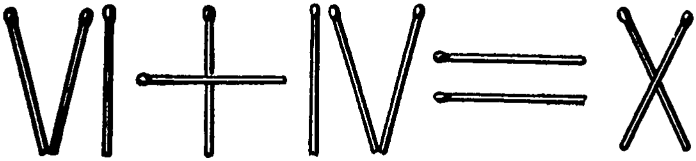


Рис. 75

Второе решение (рис. 76):

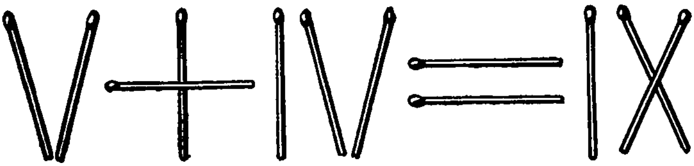


Рис. 76

15. 1°. Решение показано на рис. 77:

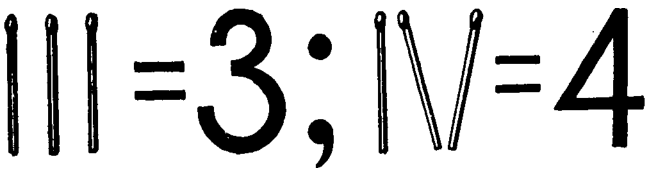


Рис. 77

2°. Из данных пяти спичек надо составить римскую цифру восемь (рис. 78).

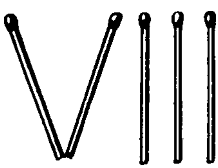


Рис. 78

16. Решение показано на рис. 79.

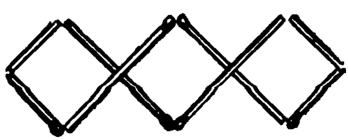


Рис. 79

17. При недостаточно внимательном отношении к условию задачи рассуждают так: 36 заготовок – это 36 деталей; так как стружки каждых шести заготовок дают еще одну новую заготовку, то из стружек 36 заготовок образуется 6 новых заготовок – это еще 6 деталей; всего 36 + 6 = 42 детали. При этом забывают, что стружки, получившиеся от шести последних заготовок, также составят новую заготовку, т. е. еще одну деталь. Следовательно, всего будет не 42, а 43 детали.

18. Расположение кресел, удовлетворяющее условию задачи, показано на рис. 80.

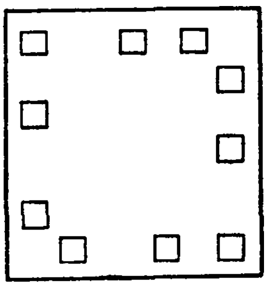


Рис. 80

19. Схемы распределения флажков показаны на рис. 81.

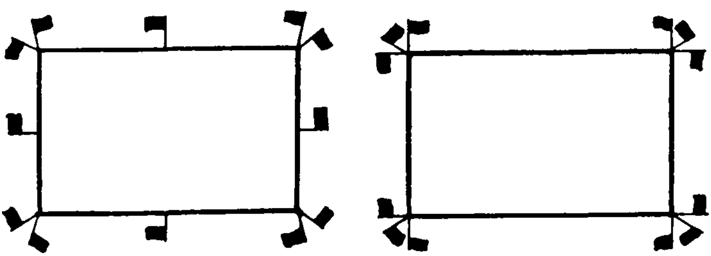


Рис. 81

20. Два из возможных решений показаны на рис. 82.

21. Возможные варианты расположения чисел показаны на рис. 83. Сумма чисел вдоль каждой стороны первого треугольника равна 17, а вдоль каждой стороны второго и третьего – 20. Могут быть и иные расположения чисел.

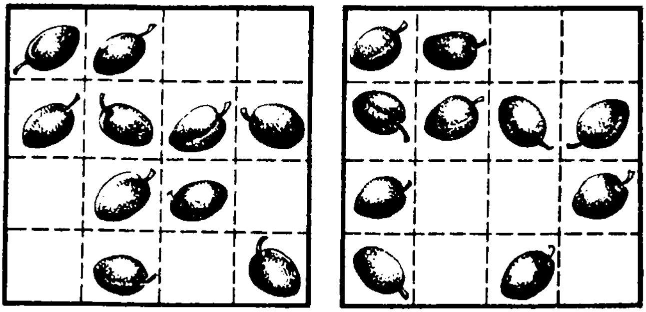


Рис. 82

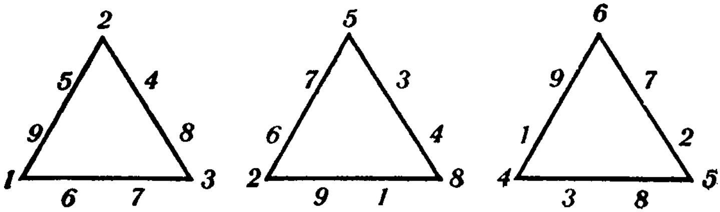


Рис. 83

22. При тринадцати играющих можно мяч бросать и через пять человек (рис. 84). Если бросать через шесть человек (ловит мяч каждый седьмой), то окажется, что мяч полетел в противоположном направлении.

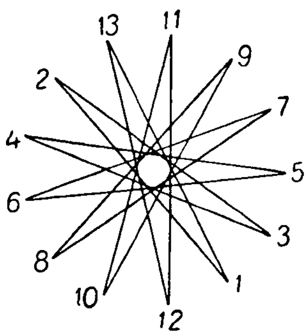


Рис. 84

23. Одно из возможных решений показано на рис. 85.

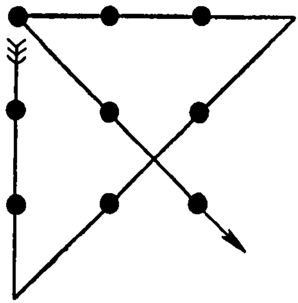


Рис. 85

24. Решение показано на рис. 86.

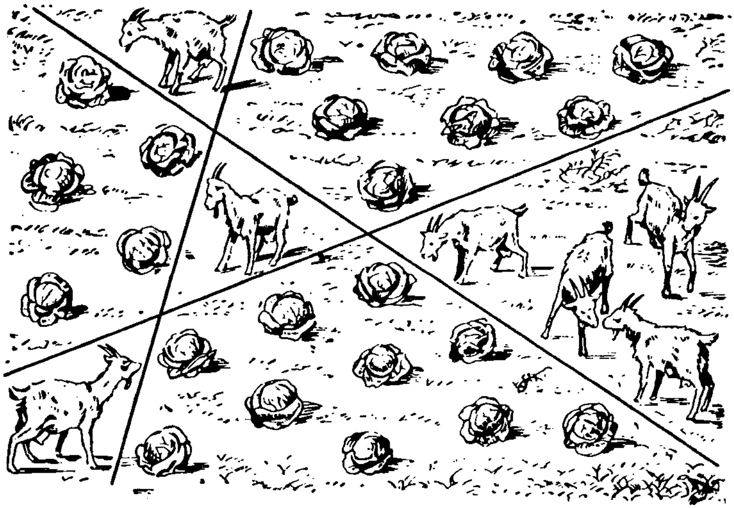


Рис. 86

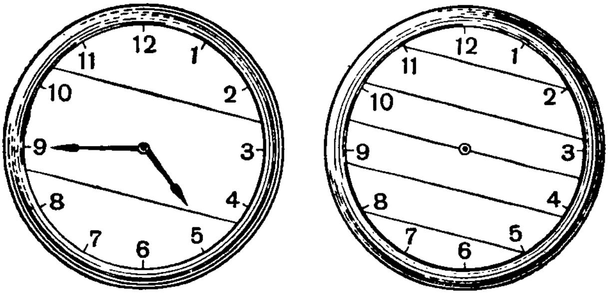
25. Где бы оба поезда ни встретились, за 1 ч до их встречи они будут друг от друга на расстоянии 60 + 40 = 100 км.

26. Когда задача касается какого-либо физического явления, непременно следует учитывать все его стороны, чтобы не попасть впросак. Так и здесь, никакие расчеты не приведут к истинному результату, если не учесть, что вместе с водой поднимутся и корабль, и лестница, так что в действительности вода никогда не покроет третьей ступеньки.

27. 1°. Сумма всех чисел на циферблате равна 78. Значит, сумма чисел в каждой части циферблата должна быть равна 78 : 3 = 26. Замечаем, что

$$12 + 1 = 13 \text{ и } 11 + 2 = 13.$$

Отсюда напрашивается то решение, которое изображено на рис. 87, *а*.



а) *б)*

Рис. 87

2°. Сумма чисел в каждой из шести частей циферблата должна быть равна 78 : 6 = 13. Находим на циферблате такие пары чисел, сумма которых равна 13, и получаем решение, изображенное на рис. 87, *б*.

28. В числах IX, X и XI три десятки (X) расположены рядом. Ясно, что две из них должны войти в один кусок. Возможны только два случая для испытания. После нескольких проб вы получите такое расположение трещин, которое изображено на рис. 88. Сумма чисел в каждом куске циферблата равна 20.

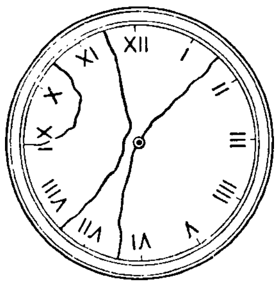
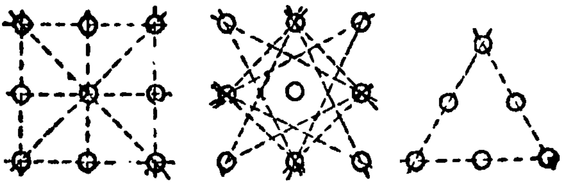


Рис. 88

29. По три пуговицы – 8 рядов (рис. 89, *а*), по две пуговицы – 12 рядов (рис. 89, *б*) (ряды изображены пунктирными прямыми).

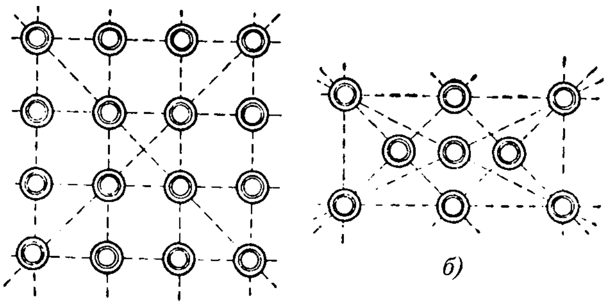
Оставшиеся 6 пуговиц располагаются в три ряда по три пуговицы в каждом в форме треугольника (рис. 89, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 89

30. Расположение шестнадцати шашек в 10 рядов по четыре в ряд показано на рис. 90, *а*. Расположение девяти шашек в 10 рядов показано на рис. 90, *б*.



б)

а)

Рис. 90

31. Требуемое расположение фишек (монет) показано на рис. 91.

32. Замечая, что 1 + 19 = 20, 2 + 18 = 20, 3 + 17 = 20 и т. д., записываем слагаемые каждой суммы в противоположные кружочки, а число 10 поместим в центральный кружочек. Полностью решение задачи показано на рис. 92.

33. 1°. Часто отвечают, что пассажиры автобуса будут дальше от Москвы, чем велосипедист, а это неверно, так как встретившиеся путешественники находятся в одном месте и, следовательно, на одинаковом расстоянии от Москвы.

2°. Килограмм металла всегда дороже, чем полкилограмма того же металла.

3°. Так как 6 ударов продолжались 30 с, то на 12 ударов потребуется 60 с, или 1 мин, – вот часто встречающийся неправильный ход мысли.

Ведь когда часы били 6 ударов, между ударами было только 5 промежутков, каждый из которых длился 30 : 5 = 6 с. А между первым и двенадцатым ударами – 11 промежутков продолжительностью по 6 с каждый.

Значит, на 12 ударов потребуется 66 с.

4°. Всегда.

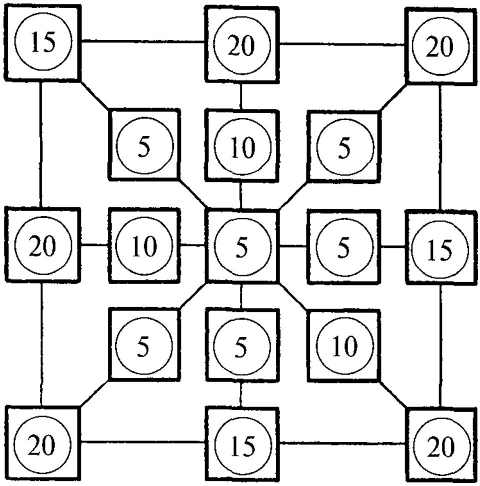


Рис. 91

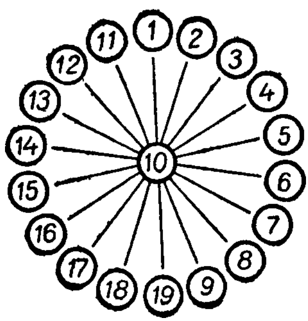


Рис. 92

34. Решение показано на рис. 93.

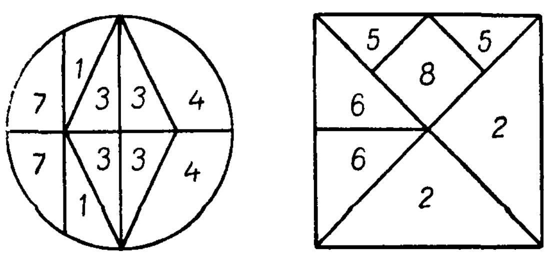


Рис. 93

35. 2 р.

36. На первый взгляд задача кажется сложной, требующей специальных рассуждений. Вдумавшись, легко понять, что муха, не останавливаясь, летала ровно 3 ч, а следовательно, пролетела 300 км.

37. 1961 год. Единица при поворачивании бумажки остается единицей, 6 превращается в 9, а 9 – в 6.

38. 1°. Девочка прочитала число в перевернутом виде: 98 вместо 86.

2°. Поменять местами бумажки с числами 8 и 9, при этом 9 перевернуть как 6. Тогда в каждом столбике будет по 18.

39. 23 года. Разность между возрастами отца и сына равна 23 годам; следовательно, сыну должно быть 23 года, чтобы отец был вдвое старше его.

40. На первый взгляд кажется, что результаты сложения чисел каждого столбца не должны быть одинаковыми, но, присмотревшись внимательнее, можно заметить, что если во втором столбце девять единиц ($9 \cdot 1$), то соответственно в первом столбце – одна девятка ($1 \cdot 9$); во втором столбце восемь двоек ($8 \cdot 2$), но в первом – две восьмерки ($2 \cdot 8$), во втором столбце семь троек ($7 \cdot 3$), но в первом – три семерки ($3 \cdot 7$) и т. д.

Отсюда следует, что результаты сложения чисел в обоих столбцах должны быть одинаковыми. Убедитесь в этом простым сложением.

41.1°. В первой и пятой строках числа единиц дополняют друг друга до 10, а числа десятков, сотен и всех остальных разрядов соответственно дополняют друг друга до 9, следовательно, сумма чисел в этих двух строках равна 1 000 000.

Та же особенность обнаруживается и в остальных трех парах чисел: втором и шестом, третьем и седьмом, четвертом и восьмом.

Сумма каждой пары чисел равна 1 000 000. Значит, сумма всех восьми чисел равна 4 000 000.

3°. Вероятно, вы догадались, что нужно приписывать такое число, все цифры которого дополняют до 9 цифры одного из двух написанных чисел, например второго. При этом условии последняя цифра суммы, очевидно, будет на 1 меньше последней цифры первого слагаемого, а все остальные цифры суммы будут такие же и в том же порядке, как и у первого слагаемого, а самой первой цифрой суммы будет всегда 1.

Таким образом, начиная записывать сумму слева направо, напишите 1, затем повторите все цифры первого слагаемого, кроме последней, которую надо уменьшить на 1.

Попрактикуйтесь, прежде чем будете показывать товарищам математические фокусы.

42. Пусть монета с четным числом копеек (например, двухкопеечная) – в правой руке, а монета с нечетным числом копеек (например, трехкопеечная) – в левой. Тогда утроенное четное число останется числом четным и удвоенное нечетное будет также четным, а сумма четных чисел – обязательно *четная*.

Пусть теперь монета с нечетным числом копеек (например, трехкопеечная) – в правой руке, а монета с четным числом копеек (например, двухкопеечная) – в левой. Тогда утроенное нечетное число останется числом нечетным, а удвоенное четное будет числом четным. Сумма же чисел нечетного и четного – обязательно нечетная.

Разнообразить фокус можно так: предлагать умножать содержимое правой руки не обязательно на 3, а вообще на любое нечетное число, а содержимое левой руки – на любое четное число.

43. 4 брата и 3 сестры.

44. $22 + 2 + 2 + 2$ и $888 + 88 + 8 + 8 + 8$.

45. $100 = 111 - 11$, $100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$, $100 = (5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.

46. Подобно тому, как заполнение ящика предметами разной величины начинают с наибольших предметов, так и составление заданной суммы лучше начинать с наибольших возможных слагаемых. По условию, слагаемыми должны быть восемь нечетных чисел.

Рассуждаем так. Ни одно из чисел 19, 17 и 15 не может быть слагаемым, так как в каждом из этих случаев не наберется остальных семь слагаемых. Если взять слагаемым число 13, то для составления числа 20 необходимо и достаточно прибавить к 13 семь раз по 1:

$$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Если первое слагаемое 11, то вторым слагаемым не могут быть 9, 7 или 5 (не набирается необходимого числа остальных слагаемых). Пробуем число 3. Имеем: $11 + 3 = 14$. До 20 остается 6, и нам нужно 6 слагаемых. Следовательно, получаем второе решение:

$$11 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Берем первым слагаемым число 9. Оно не может быть вторым слагаемым ($9 + 7 = 16$; остается 4 на 6 слагаемых). Попробуем число 5. Имеем $9 + 5 = 14$. На 6 слагаемых остается 6 единиц. Это возможно. Получаем третье решение:

$$9 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Пробуем число 3. Имеем 9 + 3 = 12. Остается 8 единиц на 6 слагаемых. Прибавим еще 3. Тогда 9 + 3 + 3 = 15. Остается 5 единиц на 5 слагаемых. Получаем четвертое решение:

$$9 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Система проб, я думаю, теперь ясна. Продолжайте рассуждения самостоятельно, полагая в качестве первого слагаемого 7, а затем 5 и 3. Всего получится 11 решений:

$$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$11 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$9 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$9 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 20.$$

Имеется только одно решение (шестое сверху), которое приводит к сумме, состоящей из наибольшего числа (из четырех) неодинаковых слагаемых.

47. Непосредственно считать все возможные маршруты от A до C сложно – запутаетесь. Надо начать с подсчета маршрутов до перекрестков, более близких к начальному пункту A (рис. 94).

Очевидно, что в каждый перекресток, находящийся на сторонах AB и AD, ведет только один путь; в перекресток $2b$ ведут два пути. В перекресток $2c$ можно попасть, во-первых, из пункта $2b$, значит, также двумя маршрутами, и, во-вторых, из пункта $1c$, т. е. еще одним маршрутом. Следовательно, всего к перекрестку $2c$ ведут 2 + 1 = 3 маршрута (найдите их). Аналогично рассуждая, получим, что и к перекрестку $3b$ ведут 3 маршрута.

В перекресток $3c$ ведут те же 3 маршрута, которыми можно попасть в перекресток $3b$, и те 3 маршрута, которыми можно попасть в перекресток $2c$, т. е. всего 6 маршрутов. Продолжая эти рассуждения, заметим, что вообще количество маршрутов, ведущих к любому перекрестку, равно сумме маршрутов, ведущих к двум смежным перекресткам, расположенным слева и снизу от рассматриваемого. Если, например, мы определили, что число маршрутов, ведущих в $3c$, равно 6, а в $2d$ равно 4, то число маршрутов, ведущих в $3d$, будет равно 10 и т. д.

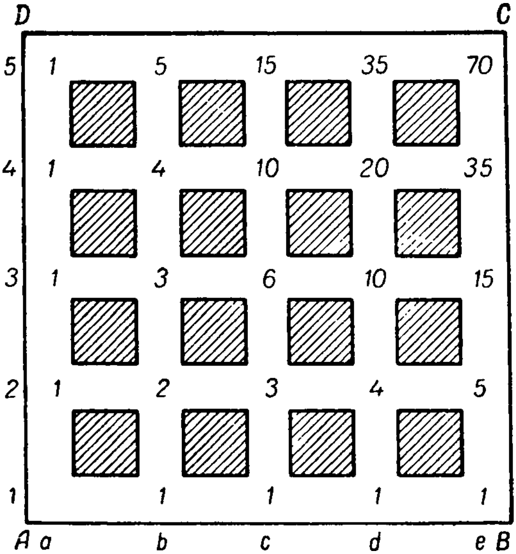


Рис. 94

Так можно определить число маршрутов, ведущих из начального пункта A к любому перекрестку. Таким образом, к конечному пункту C можно придти 70 различными путями.

(Число маршрутов равно C_8^4 ; вообще, C_{m+n}^n , где m – число кварталов вдоль AB, n – число кварталов вдоль BC.)

48. Если на концах какого-либо диаметра поместить числа A и a, а на концах соседнего диаметра – числа B и b, то по условию $A + B = a + b$. Отсюда $A - a = b - B$, т. е. разности противоположно расположенных чисел должны быть равны между собой.

В этом ключ к отысканию всех решений.

Теперь очевидно, что для решения надо разбить все данные целые числа от 1 до 10 на 5 пар с одинаковыми разностями чисел в каждой паре. Простое испытание показывает, что возможны только две группы пар, удовлетворяющих этому условию:

а) с разностью 1:

1 – 2; 4 – 3; 5 – 6; 8 – 7; 9 – 10;

б) с разностью 5:

1 – 6; 7 – 2; 3 – 8; 9 – 4; 5 – 10.

Расположим эти числа по кругу, находим два основных решения (рис. 95). Все остальные решения можно получить из основных, перемещая пары чисел с одного диаметра на другой, поскольку чередование пар внутри одной группы может быть произвольным.

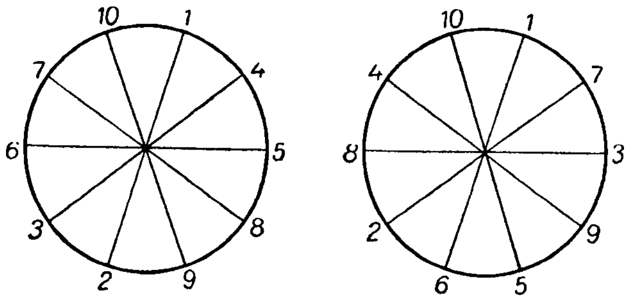


Рис. 95

Так, рядом с парой 1 – 2, расположенной на первом диаметре, можно поместить на втором диаметре пару 4 – 3 или пары 6 – 5, 8 – 7, 10 – 9.

Это дает четыре различных решения. В каждом из получающихся положений на третьем диаметре можно поместить любую из оставшихся трех пар. Это дает $4 \cdot 3 = 12$ решений. В каждом из них имеются две возможности для размещения оставшихся двух пар на четвертом и пятом диаметрах. Это приводит к $12 \cdot 2 = 24$ решениям для каждой группы пар чисел.

Всего получается 48 решений. (Число решений равно удвоенному числу перестановок из четырех элементов: $2P_4$.)

49. Из четырех чисел возможна только одна группа:

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4.$$

Из пяти чисел – три группы:

$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Требуемые группы из шести, семи и т. д. чисел по аналогии составьте самостоятельно. Возьмите, например, два числа 2 и 6 и их сумму $2 + 6$ дополните единицами до произведения $2 \cdot 6 = 12$, а произведение $2 \cdot 6$ в свою очередь умножьте на соответствующее количество единиц.

50. $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$ или $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$; $1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$ или $1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$.

51. Возможное решение показано на рис. 96.

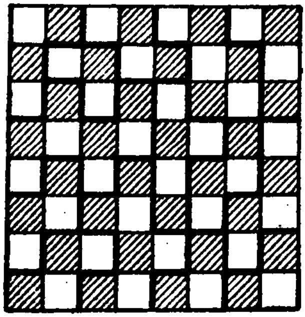


Рис. 96

52. Одно из возможных решений представлено на рис. 97. Путь одного сапера изображен сплошной линией, а путь другого – пунктиром. Оба сапера обошли ровно по 40 клеток поля, побывав на каждой клетке по разу.

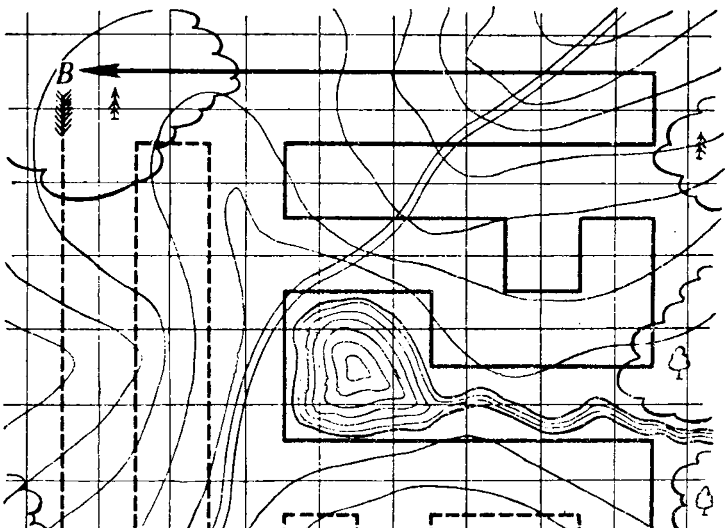


Рис. 97

53. Надо иметь в виду, что не всякое иное решение будет новым или, как говорят в математике, существенно отличным от приведенного в тексте. Предположим, вы нашли такой порядок распределения спичек (ср. с решением, представленным на рис. 27): № 7 к № 10, № 4 к № 8, № 6 к № 2, № 5 к № 9 и № 1 к № 3. Это решение не является «совсем другим», как требуется в условии, так как полностью повторяет порядок распределения, предложенный в тексте задачи; в этом легко убедиться, если спички перенумеровать не слева направо, а справа налево.

Существенно новым решением будет, например, следующее: № 5 к № 2, № 7 к № 10, № 3 к № 8, № 1 к № 4, № 9 к № 6.

54. Чтобы легко было пользоваться указанной далее схемой перемещения спичек, напишите на бумаге 15 целых чисел, начиная с 1, и над каждым числом расположите спички, как показано на рис. 28.

Перемещайте спички в следующем порядке: № 5 к № 1, № 6 к № 1 или схематично: $5 \to 1$, $6 \to 1$, $9 \to 3$, $10 \to 3$, $8 \to 14$, $7 \to 14$, $4 \to 2$, $11 \to 2$, $13 \to 15$, $12 \to 15$.

Второе решение: $5 \to 1$, $6 \to 1$, $9 \to 3$, $10 \to 3$, $8 \to 14$, $4 \to 13$, $11 \to 14$, $15 \to 13$, $7 \to 2$, $12 \to 2$.

55. Вся «изюминка» решения заключается в том, что, уходя из дома, я догадался пустить в ход стенные часы и заметить по ним, когда я вышел, а затем – вернулся. Так по своим часам я смог определить, сколько я отсутствовал. Придя к знакомому и уходя от него, я заметил показания его часов. Это дало мне возможность определить продолжительность пребывания у знакомого.

Вычитая из времени, которое я отсутствовал дома, продолжительность пребывания у знакомого, я получил количество времени, затраченного на дорогу туда и обратно. Прибавив половину этого количества времени к показанию часов товарища, когда я от него уходил, я в сумме получил то показание часов, на которое следовало поставить мои стенные часы.

56. $(1 + 2) : 3 = 1.$

$12 : 3 : 4 = 1,$

$[(1 + 2) \cdot 3 - 4] : 5 = 1,$

$(1 \cdot 2 + 3 - 4 + 5) : 6 = 1,$

$\{[(1 + 2) \cdot 3 - 4] : 5 + 6\} : 7 = 1,$

$[(1 + 2) : 3 \cdot 4 + 5 + 6 - 7] : 8 = 1,$

$(1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1.$

57. Счетчик показывал 15 951. Цифра десятков тысяч не могла измениться через 2 ч. Следовательно, первой и последней цифрой нового симметричного числа остается 1. Цифра тысяч могла и должна измениться, так как за 2 ч машина прошла, конечно, больше 49 км, но никак не больше 1 000 км; значит, цифра тысяч, а вместе с нею и цифра десятков – 6.

Очевидно, что цифра сотен – 0 или 1, и счетчик показывал либо число 16 061, либо число 16 161.

Число сотен вряд ли могло достигнуть двух, так как в этом случае получилось бы, что машина за 2 ч прошла 16 261 – 15 951 = 310 км, т. е. ее скорость составила бы 310 : 2 = 155 км/ч, что маловероятно.

Если счетчик показал число 16 061, то за 2 ч машина прошла 16 061 – 15 951 = = 110 км и, следовательно, имела скорость 110 : 2 = 55 км/ч. Во втором случае скорость – 105 км/ч.

58. Для решения задачи надо знать количество приборов, смонтированных бригадиром. А для этого в свою очередь надо знать, сколько приборов в среднем было смонтировано каждым из 10 членов бригады. Распределив поровну между девятью юными рабочими 9 приборов, изготовленных добавочно бригадиром, заключаем, что в среднем каждый член бригады смонтировал 15 + 1 = 16 приборов. Отсюда следует, что бригадир изготовил 16 + 9 = 25 приборов, а вся бригада (15 · 9) + 25 = 160 приборов.

Знающие алгебру могут решить эту задачу, составив уравнение с одним неизвестным.

59. При скорости 30 км/ч машина будет проходить каждый километр за 2 мин, а при скорости 20 км/ч – каждый километр за 3 мин. Значит, при скорости 20 км/ч машина будет терять одну минуту на каждом километре. Но при этой скорости она теряет, как сказано в условии, 2 ч, или 120 мин, следовательно, расстояние от колхоза до города 120 км.

С какой скоростью нужно ехать, чтобы прибыть вовремя?

Часто полагают, что необходимой скоростью должно быть среднее арифметическое между 20 и 30 км/ч, или $\frac{20+30}{2} = 25$ км/ч, но это неверно.

На весь путь должно быть потрачено 5 ч $\left(\frac{120}{30}+1=5\right)$, значит, чтобы доставить зерно в город точно к 11 ч, надо ехать со скоростью $\frac{120}{5} = 24$ км/ч.

60. Если бы мы наблюдали движение встречных поездов из вагона *стоящего* поезда, то расчет первой подруги был бы верен. Но наш вагон движется навстречу обратным поездам, следовательно, если от встречи нашего поезда с одним обратным поездом до встречи с другим обратным поездом прошло 5 мин, то это значит, что второй поезд придет на то место, где мы встретились с первым, еще через 5 мин, т. е. промежутки времени между прибытиями встречных поездов равны 10 мин.

Таким образом, в течение часа в город прибывает не 12 поездов, а только 6.

61. Требуется найти *сумму цифр* чисел 1, 2, 3, 4, ..., 999 999 998, 999 999 999, 1 000 000 000. Надо сгруппировать числа парами:

999 999 999 и 0, 999 999 998 и 1, 999 999 997 и 2 и т. д.

Всего будет полмиллиарда (500 000 000) пар, а сумма цифр в каждой паре равна 81. Последнее число 1 000 000 000 не имеет пары, и сумма его цифр равна 1.

Искомая сумма цифр равна

$$(500\,000\,000 \cdot 81) + 1 = 40\,500\,000\,001.$$

62. За сутки часы уходят вперед на $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, т. е. на $\frac{1}{6}$ мин. На первый взгляд кажется, что часы уйдут вперед на 5 мин за $5 : \frac{1}{6} = 30$ дней, т. е. к утру 31 мая. Но это не так.

Уже 28 мая утром часы будут впереди на $27 \cdot \frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$ мин, а так как за день они уходят вперед на $\frac{1}{2}$ мин, то в эти сутки, 28 мая, к ночи часы будут спешить на 5 мин.

63. В $2\frac{1}{2}$ раза.

64. Запятую; получится 2,3.

65. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$.

66. Если $\frac{1}{2}$ – это одна треть искомого числа, то все число содержит 3 раза по $\frac{1}{2}$, т. е. $1\frac{1}{2}$.

67. Расстояние от здания до станции составляет $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ всего пути школьника. Это расстояние он проходил за 5 мин, Следовательно, на весь путь ему нужно $12 \cdot 5 = 60$ мин, или 1 ч; $\frac{1}{4}$ пути он проходил за $60 : 4 =$ $= 15$ мин, значит, он выходил в 7 ч 15 мин, а в школу приходил в 8 ч 15 мин.

68. Ответ – не 12 с! Дело в том, что от первого флажка до восьмого – 7 промежутков. От первого до двенадцатого – 11 промежутков. Каждый промежуток между флажками спортсмен пробегает за $\frac{8}{7}$ с, следовательно, на 11 промежутков ему потребуется $\frac{8}{7} \cdot 11 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ с.

69. Во времени Петя не выгадал, а потерял. На вторую половину дороги он затратил столько времени, сколько отняло бы у него все путешествие пешком. Значит, при избранном им способе передвижения он не только не может выгадать во времени, но должен прогадать. Он и потерял как раз столько времени, сколько он ехал поездом, т. е. потерял $\frac{1}{15}$ времени, которое нужно, чтобы пройти пешком половину дороги, т. е. $\frac{1}{30}$ времени, которое ему нужно, чтобы пройти пешком все расстояние.

70. За $3\frac{1}{2}$ ч будильник отстает на 14 мин. В 12 ч на будильнике будет 11 ч 46 мин. До 12 ч остается 14 мин, но за это время будильник отстанет еще почти на минуту. Таким образом, стрелки будильника покажут 12 ч почти через 15 минут.

71. Разметчик заметил, что $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.
Значит, если из семи данных пластинок четыре разрежем на три равные части каждую, то получим 12 третей, т. е. по $\frac{1}{3}$ для каждой детали.

Остальные три пластинки разрежем на четыре равные части каждую, получим 12 четвертей, т. е. по $\frac{1}{4}$ для каждой детали.

Для распределения 5 пластинок между 6 деталями замечаем, что $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$. Значит, из трех пластинок получаем 6 половинок и из остальных двух – 6 третей.

Далее, $\frac{13}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$. Следовательно, на каждую деталь берем по одной дольке от четырех пластинок, каждую из которых делим на три равные части, и по три дольки от остальных девяти пластинок, каждую из которых делим на четыре равные части.

Аналогично $\frac{13}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$; 9 пластинок делятся на 4 равные части каждая и 4 пластинки – на 9 частей каждая.

Так как $\frac{26}{21} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7}$, то в этом случае 14 пластинок делятся на 3 части каждая и 12 пластинок – на 7 частей каждая.

Пользуясь указанным приемом, придумайте сами еще несколько аналогичных задач.

72. Так как $\frac{1}{4}$ бруска весит $\frac{3}{4}$ кг, то весь брусок весит 3 кг.

73. 1°. $\frac{3}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{9}{9}$ и т. д. **2°.** $37 = \frac{333}{3 \cdot 3}$.

3°. Например, $100 = 99 + \frac{99}{99}$. **4°.** $55 = 44 + \frac{44}{4}$.

5°. $20 = 9 + \frac{99}{9}$. **6°.** См. рис. 98; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

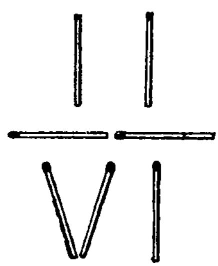


Рис. 98

7°. $20 = 1 + 3 + 5 + 7 + \frac{75}{75} + \frac{33}{11}$. **8°.** $79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}$.

9°. 1 и $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$, где n – любое целое число, начиная с 1, или

x и $\frac{x}{x+1}$, где x – произвольное число (кроме $x = -1$).

10°. $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$; $0{,}5 + \frac{1}{2}(9 - 8)(7 - 6)(4 - 3) = 1$.

Возможны и другие решения.

11°. $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$; $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

Возможны и другие решения.

74. Одно из возможных решений:

$\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}=10$; $\frac{2}{1}+\frac{5}{1}+\frac{2}{6}+\frac{6}{3}+\frac{4}{6}=10$; $\frac{4}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=10$.

75. Не подумав, можно ответить: 8 км/ч $\left(\frac{12+4}{2}=8\right)$, но это не так. Примем все расстояние за 1. Тогда на первую половину пути лошадь затратила $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{24}$ ед. времени, а на вторую половину $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ ед. времени. На весь путь затрачено $\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$ ед. времени. Следовательно, средняя скорость равна $1 : \frac{1}{6} = 6$ км/ч.

76. Пассажир спал на протяжении $\frac{2}{3}$ от половины всего пути, следовательно, на протяжении $\frac{1}{3}$ всего пути.

77. Скорость перемещения пассажира, находящегося во втором поезде, относительно движущегося первого поезда равна $45 + 36 = 81$ км/ч, или $\frac{81\,000}{60 \cdot 60}$ м/с $= \frac{45}{2}$ м/с.

Следовательно, длина первого поезда равна $\frac{45}{2} \cdot 6 = 135$ м.

78. Велосипедист прошел пешком $\frac{1}{3}$ пути, т. е. вдвое меньше того, что проехал, а времени затратил вдвое больше. Следовательно, он ехал в 4 раза быстрее, чем шел.

79. Володя выполнил $\frac{2}{3}$ задания, и ему осталось выполнить $\frac{1}{3}$ задания. Костя выполнил $\frac{1}{6}$ задания, и ему осталось выполнить $\frac{5}{6}$ задания.

Следовательно, Косте надо увеличить ежедневную выработку в $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2}$ раза, чтобы догнать Володю и одновременно с ним закончить работу.

80. Права подруга Маши. От увеличения одного сомножителя на $\frac{1}{3}$ его произведение увеличилось в $\frac{4}{3}$ раза. От уменьшения другого сомножителя на $\frac{1}{3}$ его (независимо от того, равен ли он тому сомножителю, который был увеличен) произведение уменьшилось в $\frac{3}{2}$ раза. В результате произведение уменьшилось в $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ раза, и, значит, оно равно $\frac{8}{9}$ правильного произведения. Ошибка в $\frac{1}{9}$ раза составляет 20 м^3, поэтому верный ответ: 180 м^3.

К главе 2

81. Согласно показаниям экранов локаторов цель находится в 75 км от станции *А* и в 90 км от станции *Б*.

Взяв циркулем на масштабе, изображенном внизу рис. 32, отрезки, соответствующие расстояниям в 75 и 90 км, надо провести две дуги: одну из *А* радиусом, соответствующим расстоянию в 75 км, другую из *Б* радиусом, соответствующим расстоянию в 90 км. Дуги пересекутся в точке на море, где и находится обнаруженная цель.

82. а) 6 разрезов; б) 27 кубиков; в) ни одного; г) 8 – столько, сколько вершин у куба; д) 12 – столько, сколько ребер у куба; е) 6 – столько, сколько граней у куба; ж) один.

83. Для того чтобы разойтись, поезда с электровозами *А* и *Б* должны выполнить такие маневры (см. схему на рис. 99):

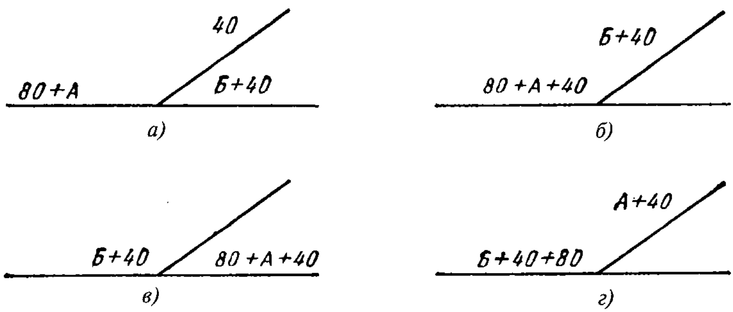


Рис. 99

1°. Электровоз *Б* вместе с вагонами проходит за стрелку влево, заводит на ветку 40 вагонов, а с остальными возвращается назад (рис. 99, *а*).

2°. Электровоз *А* уводит с ветки эти 40 вагонов; освободившееся место на ветке занимает электровоз *Б* с 40 вагонами (рис. 99, *б*).

3°. Электровоз *А* ведет 40 вагонов впереди себя и 80 вагонов сзади по свободному пути за стрелку вправо, а электровоз *Б* с 40 вагонами переходит с ветки на основной путь влево (рис. 99, *в*).

4°. Электровоз *А* (который теперь находится справа) вместе со всеми 120 вагонами проходит за стрелку влево, оставляет там свои 80 вагонов и заводит на ветку 40 вагонов, принадлежащих второму поезду (рис. 99, *г*).

5°. С ветки электровоз *А* возвращается к своим вагонам, забирает их и идет своим путем – направо.

Электровоз *Б* вместе с 40 вагонами подходит к ветке, прицепляет находящиеся там остальные 40 вагонов и благополучно следует налево.

84. Первое взвешивание: развесить крупу на две равные части (это можно сделать без гирь) по 4,5 кг. Второе взвешивание: одну из полученных частей еще раз развесить пополам – по 2,25 кг. Третье взвешивание: от одной из этих частей отвесить (с помощью гирь) 250 г. Останется 2 кг.

85. При таком соединении, которое показано на рис. 34, движение шкивов возможно. При этом если шкив *А* движется по ходу часовой стрелки, то шкив *Б* будет двигаться против движения часовой стрелки, шкивы *В* и *Г* – по движению часовой стрелки.

Если все четыре ремня будут перекрещены, то движение шкивов тоже возможно, а если только какой-нибудь один или любые три, то невозможно.

86. Не выходя за пределы одной плоскости, т. е. располагая все 7 треугольников так, чтобы они лежали, скажем, на столе, эту задачу решить невозможно.

Нужно обязательно «выйти в пространство» и составить две пирамиды с общим основанием так, как это показано на рис. 100.

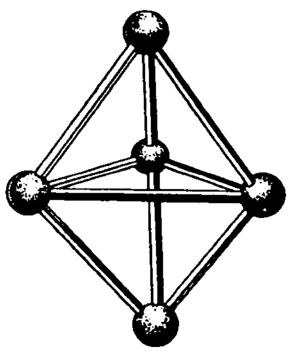
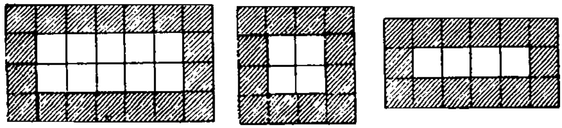


Рис. 100

87. Сначала возьмем произвольный прямоугольник с целочисленными сторонами и разобьем его на единичные квадраты (рис. 101). Рассмотрим теперь «каемку» шириной в одну квадратную клетку, примыкающую к сторонам прямоугольника (на рис. 101, *а* «каемка» заштрихована).

Площадь «каемки» – это уже часть площади прямоугольника, но число единичных квадратов в «каемке» всегда на 4 меньше, чем число, выражающее периметр прямоугольника. Следовательно, оставшаяся «сердцевина» прямоугольника (незаштрихованная часть на рис. 101, *а*) непременно должна содержать 4 единичных квадрата.



а) *б)* *в)*

Рис. 101

«Сердцевина» искомого прямоугольника – также прямоугольник. Но 4 единичных квадрата можно лишь двумя способами расположить в форме прямоугольника (незаштрихованные части на рис. 101, *б* и *в*). Окаймляя их, получаем два решения:

1) квадрат 4×4;

2) прямоугольник 6×3.

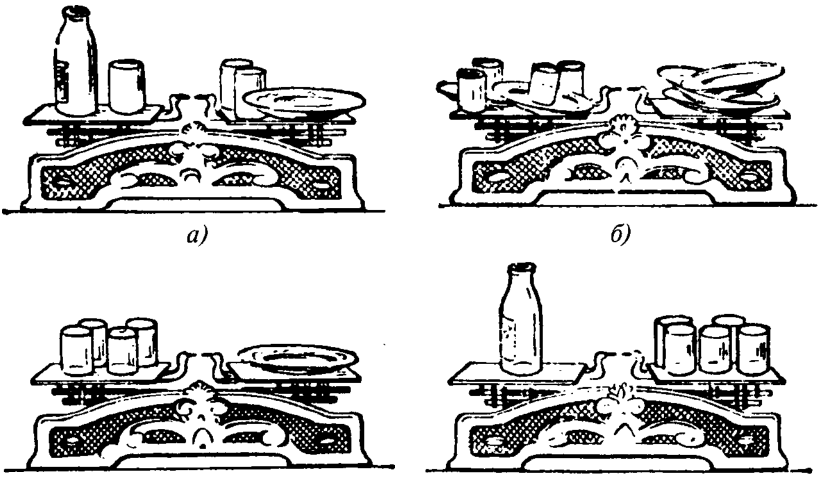
Алгебраическое решение задачи приводит к неопределенному уравнению с двумя неизвестными. В самом деле, пусть x и y – размеры искомого прямоугольника. Тогда его периметр равен $2(x + y)$, а площадь равна xy.

По условию $2(x + y) = xy$.

Если x и y необязательно целые, то такое уравнение имеет бесчисленное множество решений, но в целых числах оно, как это следует из рассуждений школьницы, имеет только три решения: $x = 4$, $y = 4$; $x = 6$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 6$. В геометрическом смысле последние два решения тождественны.

88. Вспомним условия задачи (см. рис. 36). Начнем с рис. 36, *а*, на котором показано, что бутылка со стаканом уравновешивают кувшин. Далее, на левой чашке весов (рис. 36, *б*) находится бутылка, а на правой – тарелка со стаканом. Добавив по одному стакану на обе чашки весов, мы не нарушим равновесия. Следовательно, бутылка со стаканом уравновесят тарелку и два стакана (рис. 102, *а*). Сравнивая левые чашки весов на рис. 36, *а* и 102, *а*, заключаем, что кувшин весит столько же, сколько тарелка и 2 стакана. С другой стороны, так как два кувшина уравновешивают три тарелки (рис. 36, *в*), три тарелки весят столько же, сколько две тарелки с четырьмя стаканами (рис. 102, *б*).

Снимем теперь по две тарелки с каждой чашки весов, изображенных на рис. 102, *б*, тогда окажется, что вес одной тарелки равен весу четырех стаканов (рис. 102, *в*). Вернемся к весам, изображенным на рис. 36, *б*. Вместо одной тарелки поставим четыре стакана; пять стаканов уравновесят бутылку (рис. 102, *г*), что и дает ответ: бутылка в 5 раз тяжелее стакана. Попутно выясняется, что кувшин в 6 раз тяжелее стакана.



а) б) в) г)

Рис. 102

89. Мастер разрезал каждый кубик на 8 кубиков (рис. 103). Площадь грани каждого кубика стала в 4 раза меньше, но число кубиков – в 8 раз больше, следовательно, общая площадь наружной поверхности всех кубиков увеличилась вдвое.

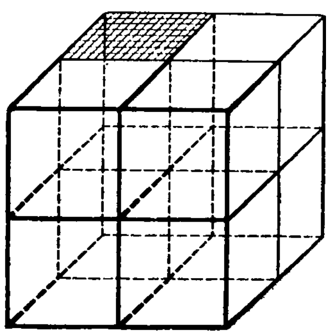


Рис. 103

90. Мы налили полную банку воды. Вода заполнила все промежутки между дробинками. Теперь объем воды вместе с объемом свинца составил объем банки.

Вынув свинец из банки, мы определили объем воды, оставшейся в банке, и вычитанием объема воды из объема банки определили объем свинца.

91. Как видно из построения (рис. 104), сержант пришел в тот же пункт, откуда начал движение.

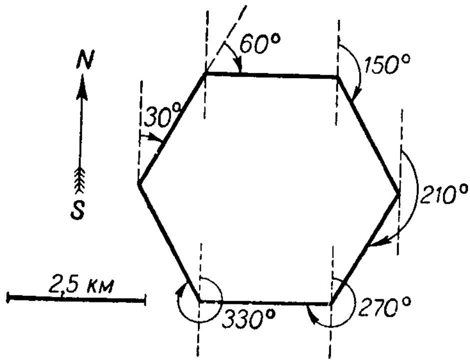


Рис. 104

92. Непосредственное измерение расстояния (см. рис. 37) от одного среза сучка до другого среза того же сучка показывает, что оно составляет около $\frac{2}{3}$ ширины всего листа фанеры.

Ширина листа фанеры равна 150 см. Тогда расстояние между сучками (т. е. длина окружности слоя бревна) составляет 100 см, а диаметр слоя бревна равен ≈ 100 : 3,14 ≈ 32 см.

93. Не снимая кронциркуля с детали, нужно на одной из его ножек карандашом поставить метку, указывающую положение второй ножки.

Сняв затем кронциркуль, можно по этой отметке установить его ножки в первоначальном положении и, приложив к масштабной линейке, определить искомый размер.

94. Никакими изобретениями нельзя довести экономию топлива до 100 %, так как энергия не может возникнуть «из ничего». Уже одно только это обстоятельство показывает, что подсчет экономии был произведен непродуманно.

Если применение каждого изобретения экономит определенное количество топлива независимо от применения других изобретений, то одновременное применение трех изобретений даст бóльшую экономию топлива, чем применение любого одного из них, но, конечно, не 100 %.

Подсчет следует производить так. Пусть до применения изобретений расходуется 100 кг топлива. После применения изобретения, экономящего 30 % топлива, будет расходоваться 70 кг.

Второе изобретение экономит 45 % от 70 кг топлива, т. е. снижает расход топлива до $0,55 \cdot 70 = 38,5$ кг. Следующее изобретение экономит 25 % от 38,5 кг топлива, т. е. снижает расход топлива до $0,75 \cdot 38,5 = 28,875$ кг. Итак, общая экономия топлива равна $100 - 28,875 = 71,125$ кг, что составляет 71,125 % экономии.

Можно изменить порядок подсчета результатов действия изобретений; например, сначала учесть действие изобретения, экономящего 45 % топлива, далее 30 %, затем 25 % или еще в ином порядке – окончательный результат будет одинаков. Убедитесь в этом.

Если же действие одного изобретения на экономию топлива зависит от действия остальных изобретений, то практически может оказаться так, что эффект от применения всех трех изобретений будет такой же, как от одного наиболее сильного изобретения, т. е. в данном случае 45 %.

95. Надо подвесить груз на крючки четырех пружинных весов (рис. 105). Каждый из крючков воспримет на себя определенную часть массы бруса. Сумма показаний всех весов даст массу бруса. Рисунок показывает, что она равна 16 кг.

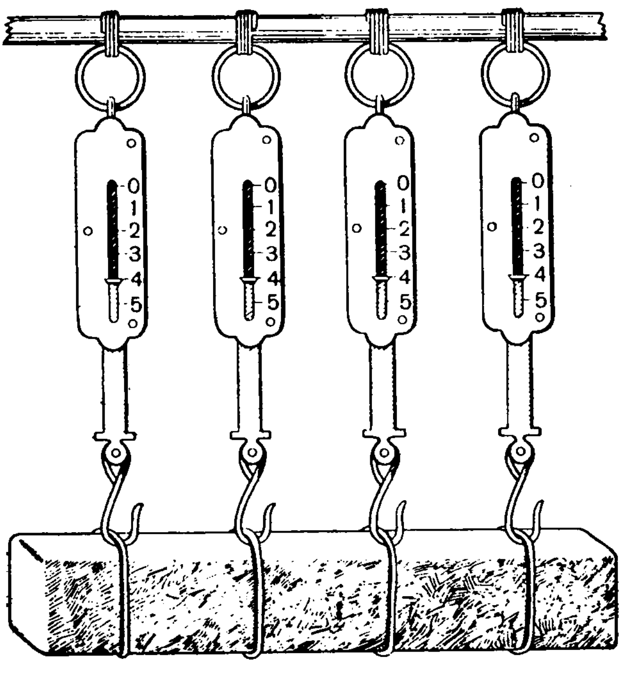


Рис. 105

96. На рис. 106, *а, б, в* даны соответственно решения задач **1°**, **2°**, **3°**.

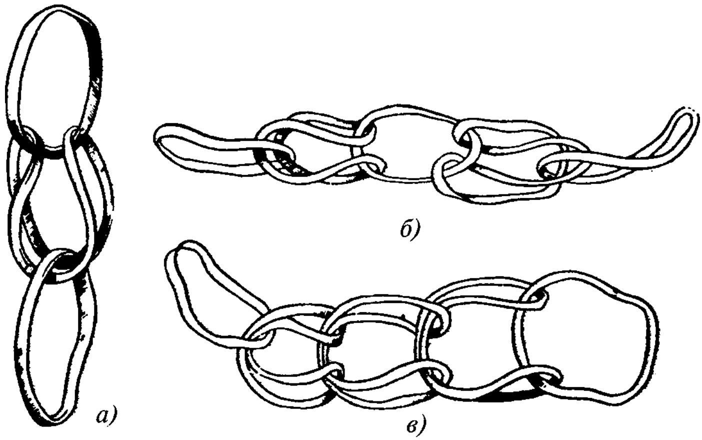


Рис. 106

97. 1°. Получить в сечении куба правильный пятиугольник невозможно. В самом деле, для получения правильного пятиугольника секущая плоскость должна пересечь пять из шести граней куба. Но все его грани попарно параллельны. Следовательно, в сечении должна получиться фигура, имеющая параллельные стороны (если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии пересечения параллельны), чего в правильном пятиугольнике быть не может.

2°. Если разрезать куб по плоскости, проходящей через три его вершины, например, D_1, A и C (рис. 107), то в сечении, очевидно, получится правильный треугольник AD_1C, так как его сторонами являются диагонали AD_1, AC и D_1C равных квадратов.

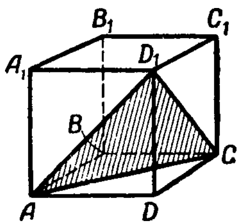


Рис. 107

Правильный треугольник получается не только в сечении AD_1C, но и в параллельном ему сечении A_1BC_1, а также в любом сечении, параллельном указанным сечениям, но расположенном ***не между ними***.

Самостоятельно выясните, какая фигура получится при пересечении куба плоскостью, параллельной сечениям AD_1C и A_1BC_1, расположенной ***между ними***.

Чтобы получить в сечении правильный шестиугольник, необходимо провести плоскость через точки a, b, c, d, e, f – середины ребер A_1B_1, AA_1, AD, DC, CC_1, B_1C_1 (рис. 108). Используя середины других ребер, можно еще получить правильные шестиугольники (всего 4), но все они будут равными.

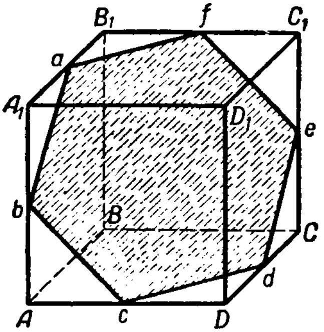


Рис. 108

3°. Секущая плоскость может пересечь каждую грань куба не больше одного раза, а всего в кубе 6 граней. Следовательно, в сечении куба плоскостью невозможно получить многоугольник с числом сторон, большим, чем 6.

98. Накладываем чертежный треугольник на окружность так, чтобы вершина C треугольника совместилась с какой-нибудь точкой окружности, и отмечаем точки D и E пересечения катетов с окружностью. Отрезок DE является диаметром (рис. 109).

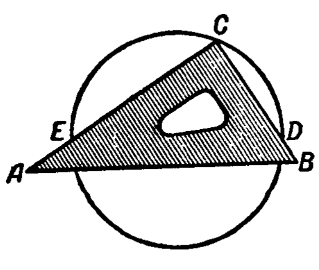


Рис. 109

Аналогично построим второй диаметр. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности.

99. Так как оба ящика имеют форму куба, то в одном ящике будут укладываться три шара в ряд, а в другом – четыре. Одинаковые ящики имеют равные ребра, следовательно, диаметр крупного шара больше диаметра мелкого шара в $\frac{4}{3}$ раза, а объем и масса больше в $\frac{64}{27}$ раза (так как объем, а также масса шара пропорциональны кубу его диаметра).

Итак, каждый крупный шар должен быть тяжелее мелкого шара в $\frac{64}{27}$ раза, но зато крупных шаров в $\frac{64}{27}$ раза меньше, чем мелких шаров в таком же ящике. Отсюда получается, что оба ящика имеют одинаковую массу.

100. Части куба представляют собой фигуры, изображенные на рис. 110. В сложенном виде их прямые углы A и A_1, а также B и B_1 совпадали.

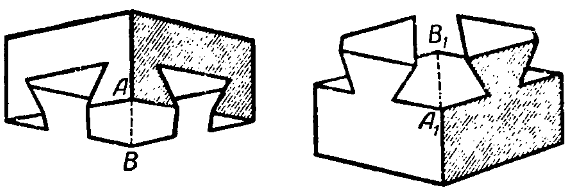


Рис. 110

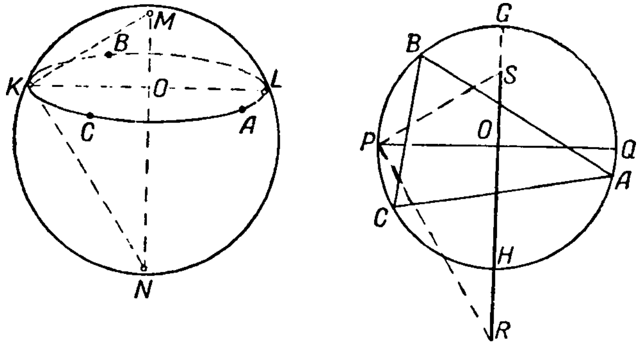
Части куба разъединяются только движением с угла на угол по линии AB.

101. Поставив ножку циркуля в любую точку M шара, произвольным радиусом описываем на его поверхности окружность, на которой берем три произвольные точки A, B и C (рис. 111, *а*). Расстояния между ними засекаем циркулем и откладываем их на бумаге в форме треугольника ABC (рис. 111, *б*).

Далее описываем окружность около треугольника ABC и проводим два взаимно перпендикулярных диаметра PQ и GH.

Эта окружность равна окружности, которую мы описали на шаре, следовательно, $PQ = KL$.

Пусть точка P на этой окружности соответствует точке K на поверхности шара. Засекаем циркулем расстояние KM и из точки P радиусом KM отмечаем на GH точку S. Строим $PR \perp PS$ до пересечения в точке R с продолжением GH. Отрезок SR и будет равен диаметру шара.

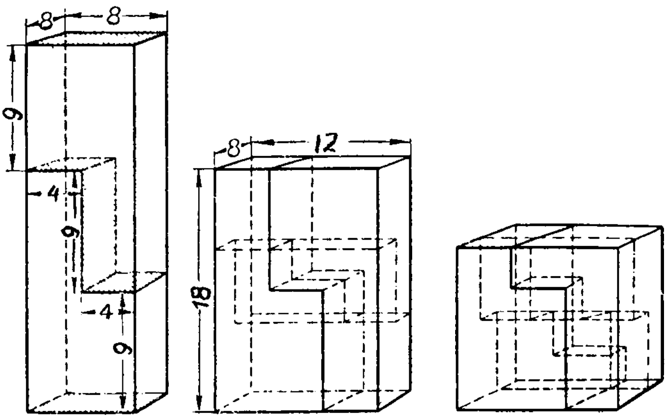


а) *б)*

Рис. 111

В самом деле, если соединить отрезками точку K с концами диаметра MN, то полученный прямоугольный треугольник MKN будет равен прямоугольному треугольнику SPR, так как у них $KM = PS$ и $KO = PO_1$.

102. Разрежем брусок (параллелепипед) на два равных ступенчатых тела (рис. 112, *а*), причем высоту ступени возьмем равной 9 см, а ширину – 4 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 112

Переместим верхнюю часть бруска на ступеньку ниже, составим новый брусок (параллелепипед) с ребрами 12 см, 8 см и 18 см (рис. 112, *б*).

Полученный брусок (параллелепипед) снова разрежем таким же образом на два ступенчатых тела, но теперь уже в направлении, перпендикулярном предыдущему. Высоту ступеньки возьмем равной 6 см, а ширину – 4 см. Каждое ступенчатое тело разделится при этом еще на два ступенчатых тела так, что всего их будет четыре.

Переместив две верхние части бруска на ступеньку ниже, составим куб (рис. 112, *в*).

103. Так как по условию дно бутылки имеет форму круга, или квадрата, или прямоугольника, то его площадь можно легко определить с помощью только одной масштабной линейки. Обозначим площадь дна через S.

Измерим высоту h_1 жидкости в бутылке. Тогда объем той части бутылки, которую занимает жидкость, равен Sh_1 (рис. 113).

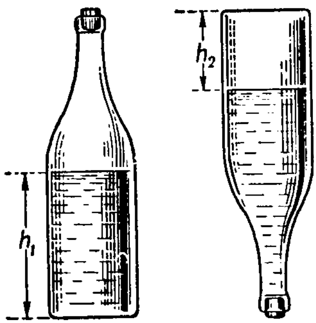


Рис. 113

Опрокинем бутылку вверх дном и измерим высоту h_2 ее части от уровня жидкости до дна бутылки. Объем этой части бутылки равен Sh_2. Остальную часть бутылки занимает жидкость, объем которой уже определен – он равен Sh_1.

Отсюда следует, что объем всей бутылки равен

$$Sh_1 + Sh_2 = S(h_1 + h_2).$$

104. См. рис. 114.

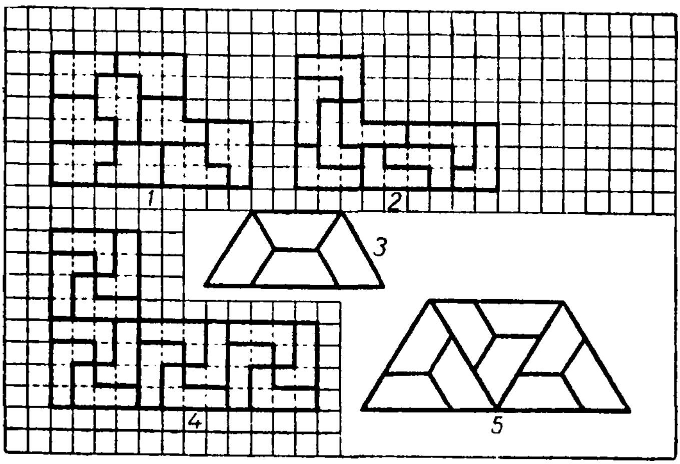


Рис. 114

К главе 3

105. 1°. Остаток от деления числа на 9 тот же самый, что и от деления суммы его цифр на 9 (свойство 2). Так как сумма цифр уменьшена на величину, выраженную зачеркнутой цифрой, то и остаток уменьшится на ту же величину. Очевидно также, что величина остатка не изменится, если зачеркнутая цифра 9 или 0.

2°. В силу свойства 1б разность задуманных чисел делится на 9, значит, сумма цифр разности кратна девяти, и если названное вам число не делится на 9, то только за счет зачеркнутой цифры, которая, очевидно, и определяется дополнением названного числа до ближайшего кратного девяти. Если же само названное число кратно девяти, то это значит, что зачеркнута цифра 9.

Вариант задачи, указанный в замечании, основан на свойстве 1.

3°. Надо подсчитать сумму цифр полученной разности ($6 + 9 + 8 = 23$). Дополнение этой суммы до ближайшего числа, кратного девяти, определит зачеркнутую цифру.

В данном примере: $27 - 23 = 4$; зачеркнутая цифра 4.

Правило следует из свойств девятки.

4°. К каждому написанному вами числу я дописываю такое, цифры которого дополняют цифры вашего числа до девяти, тогда сумма должна быть кратна девяти, и она останется кратной девяти, если вы зачеркнули 9; если же вы зачеркнули другую цифру, не 9, то полученная сумма цифр суммы не будет кратна девяти и зачеркнутая цифра определится числом, дополняющим названную вами сумму до ближайшего числа, кратного девяти.

5°. Приписывается число, каждая цифра которого дополняет сумму цифр соответствующего столбика до девяти или числа, кратного девяти. Искомая цифра находится по общему правилу.

6°. Сначала надо приписать столбец чисел, дополняющих сумму чисел каждой строки до кратного девяти, сложить приписанные числа (девятки можно при этом не учитывать) и вместо всего столбца этих чисел приписать только остаток от деления их суммы на 9.

Так, в данном примере сумма приписанных чисел (без девятки) равна $6 + 4 + 4 + 5 = 19$. Остаток от деления 19 на 9 равен 1. Следовательно, вместо столбца чисел 6, 4, 4, 5 и 9 достаточно было бы приписать одно число 1.

106. Вы предложили, например, из 1313 вычесть 48. Получилось 1265. Приписали 148 и зачеркнули, скажем, цифру 6. Осталось 125 148. Теперь нужно сложить эти цифры: $1 + 2 + 5 + 1 + 4 + 8 = 21$. До ближайшего числа, кратного девяти, не хватает шести ($27 - 21 = 6$), значит, зачеркнута цифра 6.

Почему именно так – понять нетрудно. Мы знаем, что при вычитании чисел излишки вычитаются, а при сложении – складываются (см. свойство 3).

Здесь мы приписываем то же число, которое вычитаем, увеличенное на 100, следовательно, излишек результата на 1 больше излишка исходного числа 1313. Так как сумма цифр этого числа равна $1 + 3 + 1 + 3 = 8$ и излишек также равен 8, то число, получающееся в окончательном результате (до вычеркивания цифры), будет кратно девяти, и определить вычеркнутую у него цифру можно дополнением суммы его цифр до ближайшего числа, кратного девяти.

Понятно, что в качестве исходного числа можно взять любое другое, сумма цифр которого равна 8 или имеет излишек, равный 8.

Для разнообразия к разности, о которой говорится в задаче, можно предлагать приписывать непосредственно то число, которое вычиталось (без предварительного увеличения на 100), но в таком случае для отыскания зачеркнутой цифры к сумме оставшихся цифр следует прибавить 1, если излишек исходного числа был 8, а потом уже дополнять до числа, кратного девяти. (Вообще прибавлять к сумме цифр надо разность между числом 9 и излишком исходного числа.)

107. **1°.** Надо подсчитать сумму цифр, полученных на «прямой итогов», и вычесть ее из ближайшего к этой сумме числа, кратного 9. Разность и покажет искомую цифру.

Дело в том, что пока комплект цифр 1, ..., 9 полный, их сумма кратна девяти. Действительно, сумма $(1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5)$, очевидно, делится на 9. Числа на «прямой итогов» образованы сложением цифр этого комплекта. Если бы в сложении участвовали все данные цифры, то сумма чисел на «прямой итогов» или сумма цифр этих чисел также была бы кратна девяти, а так как одна из цифр комплекта не участвует в сложении, то сумма цифр на «прямой итогов» будет отличаться от числа, кратного 9, на число, определяющее интересующую нас цифру. В частности, сумма цифр на «прямой итогов» (см. рис. 50) равна $1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13$. До 18 не хватает пяти, значит, искомая цифра 5.

2°. Искомая цифра 3. Сумма цифр на «прямой итогов» (см. рис. 52) равна $1 + 4 + 1 + 3 + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 = 24$. До 27 не хватает трех, значит, вне линий должна остаться цифра 3.

Способ решения обосновывается соображениями, аналогичными приведенным при решении предыдущей задачи.

3°. По причине, ясной из предыдущего, искомое число равно дополнению суммы цифр сообщенного числа до ближайшего числа, кратного 9.

108. Рассмотрим таблицу всех возможных результатов:

$11 \times 99 =$	1	0	8	9
$22 \times 99 =$	2	1	7	8
$33 \times 99 =$	3	2	6	7
$44 \times 99 =$	4	3	5	6
$55 \times 99 =$	5	4	4	5
$66 \times 99 =$	6	5	3	4
$77 \times 99 =$	7	6	2	3
$88 \times 99 =$	8	7	1	2
$99 \times 99 =$	9	8	0	1

Нетрудно заметить следующие свойства этих произведений:

1. Первая цифра результата дополняет третью цифру до девяти, а вторая – четвертую до девяти.

2. Вторая цифра – на 1 меньше первой.

3. Цифры множимого совпадают с первой цифрой произведения.

Знание этих свойств дает возможность, не заглядывая в таблицу, определить результат любого из рассмотренных умножений по одной его цифре.

По условию, третья цифра результата есть 5. Значит, первая цифра 4 (свойство 1), вторая цифра 3 (свойство 2), четвертая цифра 6 (свойство 1). Таким образом, искомое число 4356.

Свойство 3 позволяет определить сразу и множимое, не выполняя деление произведения на множитель. В данном случае оно равно 44.

109. Средней цифрой разности является 9, а крайние цифры дополняют одна другую до 9.

В самом деле, пусть A, B и C – цифры некоторого трехзначного числа. Запишем данное число арифметически: $[A]\,[B]\,[C]$. Обращенное число есть $[C]\,[B]\,[A]$. Пусть $A > C$, тогда $[A]\,[B]\,[C] > [C]\,[B]\,[A]$. Составим разность

$$\begin{array}{r} [A]\,[B]\,[C] \\ -\ \underline{[C]\,[B]\,[A]} \end{array}$$

Последняя цифра разности есть $10 + C - A$ (так как $C < A$, то для вычитания занимаем 10 единиц из числа десятков B). Средней цифрой разности является $10 + (B - 1) - B = 9$ (число десятков уменьшилось на 1, и для вычитания занимаем 10 десятков из числа сотен A).

Таким образом, действительно средняя цифра разности есть 9.

Первая цифра разности есть: $(A - 1) - C$. Сумма первой и последней цифр разности $A - 1 - C + 10 + C - A = 9$.

110. Разность между двумя любыми числами с переставленными цифрами всегда есть девять или кратна 9. Как нетрудно проверить, все условия задачи будут выполнены только для случая, когда разность возрастов A и B равна 9. Тогда возраст C составляет половину от 9, т. е. 4,5 года; B в 10 раз старше C, следовательно, ему 45 лет; в свою очередь, возраст A равен 54 годам.

111. Догадались ли вы, что гость составлял числа так: средней цифрой числа была произвольная цифра, кроме нуля, а сумма остальных цифр делилась на 9 без остатка. Но мало догадаться; надо и доказать, что любое число с такой особенностью цифр будет обладать свойством, указанным в условии.

Для этого прежде всего учтем, что если некоторое число S делится на 9, то, складывая все его цифры, мы получим новое число S_1, которое также делится на 9. Далее, если число S_1 – неоднозначное, то, складывая его цифры, мы получим еще одно число S_2, которое также обязано делиться на 9, и т. д. Продолжая этот процесс, мы неизбежно придем к однозначному числу, делящемуся на 9. Но единственное однозначное число, которое делится на 9, – это само число 9.

Теперь рассмотрим число ... $\overline{cbaxmnp}$ ..., сумма всех цифр которого без средней, т. е.

$$S = \ldots c + b + a + m + n + p \ldots,$$

по условию, делится на 9.

Если число S однозначное, то оно равно 9, если же неоднозначное, то сумма его цифр или какая-либо из последующих сумм цифр получающихся указанным образом чисел, как сказано, обязательно равна 9. Следовательно, повторяя несколько раз процесс сложения *всех* цифр сначала у данного числа ... $\overline{cbaxmnp}$..., затем у суммы его цифр и т. д., мы неизбежно придем к числу $9 + x$, где x – средняя цифра данного числа. А окончательная сумма цифр для числа $9 + x$ равна x. В самом деле, придадим числу $9 + x$ такой вид: $10 + (x - 1)$. Сумма его цифр равна: $1 + 0 + x - 1 = x$.

К главе 4

112. Решение задачи лучше всего начать «с конца». Третья бригада, передав часть рабочих первой и второй бригадам, удвоила количество рабочих, имевшихся у них к этому моменту, после чего у всех трех бригад оказалось по 24 рабочих. Следовательно, перед этим они имели: первая – 12 рабочих, вторая – также 12, а третья – 48 рабочих. Такое распределение рабочих получилось после того, как вторая бригада помогла первой и третьей удвоить число имевшихся у них рабочих. Следовательно, еще раньше рабочие распределялись так: в первой бригаде 6 рабочих, в третьей 24, а так как вторая бригада отдала первой и третьей 30 рабочих, то у нее было 12 + 30 = 42 рабочих. Так распределилось количество рабочих после того, как первая бригада удвоила число рабочих второй и третьей. Итак, первоначально вторая и третья бригады имели соответственно 21 и 12, а первая 6 + 33 = 39 рабочих.

113. В конце обмена у каждого из братьев оказалось по 8 яблок. Следовательно, у старшего перед тем, как он отдал половину яблок своим братьям, было 16 яблок, а у среднего и младшего – по 4 яблока. Далее, перед тем как делил свои яблоки средний брат, у него было 8 яблок, у старшего – 14 яблок, а у младшего – 2. Значит, перед тем как делил свои яблоки младший брат, у него было 4 яблока, у среднего – 7 яблок и у старшего – 13.

Так как каждый получил сначала столько яблок, сколько ему было лет три года тому назад, то младшему сейчас 7 лет, среднему 10 лет, а старшему 16.

114. После дележа патронов охотники втроем израсходовали 12 штук. После этого у всех вместе осталось столько штук, сколько после дележа было у каждого, т. е. общее число патронов уменьшилось в три раза. Иными словами, охотники израсходовали две части, а одна часть осталась. Две части составляют 12 штук, а одна часть – 6 штук. Значит, осталось 6 патронов. Это и есть число патронов, доставшихся каждому при дележе. Следовательно, перед дележом было 18 годных патронов.

115. В момент встречи машинистов расстояние между кондукторами составляет 250 + 250 = 500 м. Так как каждый поезд движется со скоростью 45 км/ч, то кондукторы сближаются со скоростью 45 + 45 = 90 км/ч, или 25 м/с.

Искомое время равно 500 : 25 = 20 с.

116. Простота и краткость решения любой задачи зависят от удачного выбора исходного пункта в цепочке рассуждений или, говоря языком алгебры, от выбора неизвестного. Решая данную задачу, замечаем, что вторую половину рукописи Вера набирала втрое быстрее, чем первую.

Обозначим через n количество дней, затраченное Верой на набор второй половины рукописи (при арифметическом решении примем за одну часть). Тогда первую половину рукописи Вера набирала $3n$ дней по 10 страниц в день. Значит, полрукописи составляют $3n \cdot 10 = 30n$ страниц, а вся рукопись содержит $60n$ страниц. Всю рукопись Вера набирала $3n + n = 4n$ дней. Следовательно, при любом количестве страниц рукописи в среднем Вера набирала $60n : 4n = 15$ страниц в день. Мама была права. Решите эту же задачу при другом выборе неизвестного.

117. Пусть x – число грибов, принесенных каждым мальчиком домой. Из условия задачи следует, что Маруся дала Коле $x - 2$ гриба, Ване $x + 2$ гриба, Андрюше $\frac{x}{2}$ и Пете $2x$ грибов, а всего

$$(x-2) + (x+2) + \frac{x}{2} + 2x = 4\frac{1}{2}x.$$

По условию $4\frac{1}{2}x = 45$, откуда $x = 10$.

Ответ. Коля получил от Маруси 8 грибов, Ваня – 12 грибов, Андрюша – 5 грибов, Петя – 20 грибов. А когда пришли домой, у каждого мальчика было по 10 грибов.

118. Нередко отвечают: «оба вернутся одновременно». Считающие так обосновывают свой ответ тем, что хотя спортсмен, гребущий по течению реки, опережает своего партнера на некоторое количество времени, но на обратном пути, против течения, он столько же времени теряет.

Это – ошибочное рассуждение. Текущая вода действительно сокращает время, когда лодка идет по течению, и удлиняет его, когда движение происходит в противоположном направлении; в одном случае река как бы помогает движению, в другом – препятствует. Однако помощь длится меньшее количество времени, чем сопротивление, значит, естественно ожидать, что спортсмен, плывущий по реке, вернется на старт позже спортсмена, плывущего по стоячей воде.

К тому же выводу приводит рассмотрение такого крайнего случая. Пусть собственная скорость движения лодки (т. е. скорость, которую могла бы иметь лодка в стоячей воде при том же напряжении сил гребца) равна скорости течения воды. Тогда спортсмен, двигаясь по течению реки, достигнет намеченной точки вдвое быстрее, чем его партнер, плывущий по озеру. Но когда первый спортсмен повернет обратно, река его остановит, и вернуться к месту отплытия вплавь он вообще не сможет.

Перейдем к общему случаю. Пусть x – скорость течения воды, а v – собственная скорость движения лодки. Тогда в стоячей воде путь s в один конец занимает $\frac{s}{v}$ ед. времени, а такой же путь s по течению занимает $\frac{s}{v+x}$ ед. времени. Выигрыш во времени равен $\frac{s}{v}-\frac{s}{v+x}$, что после приведения к общему знаменателю дает

$$\frac{s}{v}-\frac{s}{v+x}=\frac{sx}{v(v+x)} \text{ ед. времени.}$$

Тот же путь s против течения занимает $\frac{s}{v-x}$ ед. времени и по сравнению с движением в стоячей воде проигрыш во времени составляет

$$\frac{s}{v-x}-\frac{s}{v}=\frac{sx}{v(v-x)} \text{ ед. времени.}$$

Сопоставляя дроби $\frac{sx}{v(v+x)}$ и $\frac{sx}{v(v-x)}$, устанавливаем, что первая дробь меньше второй, так как она отличается от второй дроби только бóльшим знаменателем. Следовательно, на реке больше проигрывается во времени при движении лодки против течения, чем выигрывается при движении ее по течению.

Итак, из двух гребцов вернется на старт раньше тот, который движется в стоячей воде.

Проведите самостоятельно исследование такого вопроса: как изменение величины скорости течения воды будет влиять на проигрыш времени для гребца, плывущего по реке.

119. Сведения, приведенные в условии задачи, позволяют установить, что время, затраченное пловцом на движение против течения от первого моста до места поворота назад, равно времени его движения по течению от места поворота до второго моста, под которым он догнал шляпу. Отсюда следует, что пловец, а вместе с ним и шляпа двигались по воде 20 мин. За это время шляпа проплыла со скоростью течения расстояние между первым и вторым мостами, т. е. 1000 м. Следовательно, скорость течения равна 1000 : 20 = 50 м/мин.

Приведем еще один способ решения этой задачи, основанный на иных, но тоже остроумных рассуждениях. Будем рассматривать положение «с точки зрения шляпы».

Условимся считать, что не шляпа, увлекаемая текущей водой, плывет от первого моста ко второму, а второй мост плывет со скоростью воды по направлению к шляпе, покоящейся неподвижно под первым мостом в неподвижной воде. Суть дела от этого не изменится. Не так ли? Что же получается? Шляпа упала на воду. Шляпа стоит на месте, а к ней плывет второй мост. А что будет с пловцом? Пловец в неподвижной воде плывет в одну сторону 10 мин, затем столько же времени (поскольку вода неподвижна) плывет обратно. Проплыв 20 мин, он возвращается на прежнее место и, следовательно, снова встречается со шляпой. В то же мгновение, проплыв 1000 м, к пловцу и шляпе подплывает второй мост.

Значит, мост двигался со скоростью 1000 : 20 = 50 м/мин. Это и есть скорость течения, а скорость пловца безразлична.

120. К спасательному кругу теплоходы подойдут одновременно. Действительно, если наблюдение за движением вести от пристани, то теплоход, идущий вниз, приобретает дополнительную скорость, равную скорости течения, а теплоход, идущий вверх, теряет такую же скорость. Если же наблюдение за движением вести со спасательного круга, который со скоростью течения воды плывет следом за идущим вниз теплоходом, то для этого теплохода теряется весь выигрыш в скорости и, наоборот, восстанавливается проигрыш в скорости для теплохода, идущего вверх. Другими словами, относительно плывущего круга получается так, как будто он стоит на месте, а теплоходы передвигаются в стоячей воде. Отсюда следует, что через час оба теплохода будут на одинаковом расстоянии от плывущего круга (так как их собственные скорости одинаковы) и, переменив направление движения, подойдут к нему также через час, т. е. одновременно.

121. Глиссер M, покинув берег A, прошел 500 м и встретился с глиссером N. Вместе они прошли расстояние, равное длине озера (рис. 115). Продолжая движение, глиссер M достиг берега B и на обратном пути снова встретился с глиссером N на расстоянии 300 м от берега B. К этому моменту оба глиссера прошли длину озера трижды (см. схему на рис. 115). Отсюда следует, что от начала движения глиссеров до их второй встречи прошло в 3 раза больше времени, чем от начала их движения до первой встречи.

Так как к моменту первой встречи глиссер M прошел 500 м, то к моменту второй встречи он прошел $500 \cdot 3 = 1500$ м (при постоянной скорости пройденный путь пропорционален времени). Длина озера на 300 м меньше пути, пройденного глиссером M от начала движения до второй встречи, т. е. она равна $1500 - 300 = 1200$ м.

От начала движения глиссера M и от начала движения глиссера N до момента их первой встречи прошло одинаковое время, следовательно, отношение их скоростей равно отношению пройденных ими за это время расстояний, т. е. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{500}{1200-500} = \frac{5}{7}$.

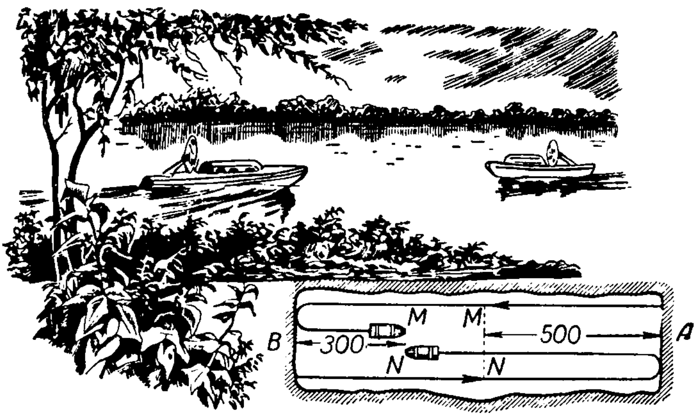


Рис. 115

122. Если половину меньшего числа обозначить через m, то остаток от меньшего числа также равен m, а остаток от большего числа равен $3m$. Тогда меньшее число равно $m + m = 2m$, а большее $3m + m = 4m$. Значит, большее число больше меньшего в $4m : 2m = 2$ раза.

123. Алгебраическое решение. Обозначим скорость теплохода через x; тогда скорость гидросамолета есть $10x$. Расстояние, пройденное гидросамолетом до встречи с теплоходом, равно s; за то же время теплоход прошел расстояние $s - 180$. Следовательно, $\frac{s}{10x} = \frac{s-180}{x}$.

Умножаем обе части равенства на $10x$ $(x \neq 0)$ и получаем $s = 200$ миль.

Арифметическое решение. В то время, за которое гидросамолет пролетает 10 миль, теплоход удаляется на 1 милю. Таким образом, когда гидросамолет пролетит первоначальные 180 миль, теплоход удалится на 18 миль. Пока гидросамолет пролетит следующие 10 миль, теплоход пройдет девятнадцатую милю и между ними останется 9 миль. На двадцатой миле гидросамолет догонит теплоход. При этом они оба удалятся от берега на расстояние 200 миль.

124. Зная скорости движения велофигуристов, заключаем, что одну условную единицу длины они проезжают соответственно за $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{15}$ ч. Но на один круг каждый из них затрачивает только $\frac{1}{3}$ указанного времени, т. е. $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{36}$ и $\frac{1}{45}$ ч (длина окружности каждого круга составляет $\frac{1}{3}$ условной единицы длины). За час велофигуристы совершат 18, 27, 36 и 45 полных оборотов, а за 20 мин – 6, 9, 12 и 15 оборотов. Все найденные числа – целые, следовательно, по истечении 20 мин велофигуристы сойдутся в исходных точках. Вообще велофигуристы могут сходиться в исходных точках только через такие общие для всех промежутки времени, по истечении которых они совершат целые (хотя и неодинаковые) числа оборотов. Наибольшее возможное число встреч велофигуристов на протяжении 20 мин определится величиной наибольшего общего делителя чисел 6, 9, 12 и 15. Для этих чисел НОД равен 3. Следовательно, в течение 20 мин велофигуристы будут сходиться 3 раза, через каждые $6\frac{2}{3}$ мин ($20 : 3 = 6\frac{2}{3}$).

125. Между величиной скорости обработки детали и временем, затраченным на ее обработку, существует обратная пропорциональная зависимость. Это значит, что если количество времени t_1, затраченное на обработку детали при скорости резанья v_1, изменилось до величины t_2 при скорости резанья v_2, то отношение $\frac{t_2}{t_1}$ равно отношению $\frac{v_1}{v_2}$:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

По условию $t_2 = 2{,}5$ мин при скорости v_2 м/с, $t_1 = 35$ мин при скорости $v_1 = v_2 - 1690$ м/мин.

Составив пропорцию $\frac{2{,}5}{35} = \frac{v_2 - 1690}{v_2}$, а затем решив ее, находим $v_2 = 1820$ м/мин.

126. Расстояние от Скагвея до лагеря, куда спешил Джек Лондон, составляет $133\frac{1}{3}$ мили.

В условии задачи сказано, что 50 миль, пройденные с полной скоростью, ускорили бы прибытие писателя в лагерь на один день. Следовательно, 100 миль, пройденные с полной скоростью, ускорили бы его прибытие на два дня, и Джек Лондон прибыл бы в лагерь без опоздания. Из этого можем заключить, что к концу первого дня пути до лагеря оставалось еще 100 миль. Если бы писатель все время передвигался с полной скоростью, то он вместо 100 миль прошел бы $\frac{100 \cdot 5}{3} = 166\frac{2}{3}$ мили. Лишние $66\frac{2}{3}$ мили сэкономили бы ему два дня пути. Отсюда вытекает, что заранее намеченная им скорость составляла $33\frac{1}{3}$ мили в день. В первые сутки он и проехал $33\frac{1}{3}$ мили.

Прибавив к этому оставшиеся 100 миль, найдем искомое расстояние. Оно равно $100 + 33\frac{1}{3} = 133\frac{1}{3}$ мили.

127. 1°. Если ежемесячный заработок увеличился на 30 %, то и покупательная способность повысилась на столько же.

2°. Если заработок остался неизменным, но понизились цены на 30 %, то покупательная способность поднимается не на 30 %, как многие думают, а больше. В самом деле, если, скажем, на 1 р. можно купить один предмет стоимостью 1 р., то после снижения стоимости предмета до 70 к. (на 30 %) на 1 р. можно купить $\frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ предмета, т. е. на $\frac{3}{7}$ предмета больше, а $\frac{3}{7}$ – это примерно 43 %.

3°. Незаконная аналогия и здесь может привести к ошибочному ответу: $10 + 8 = 18$ %. В действительности первоначально предполагавшаяся прибыль равна 20 %.

В самом деле, продавая книгу со скидкой в 10 %, магазин получал 8 % прибыли. Это значит, что 90 % от назначенной цены составляют 108 % себестоимости книги.

Нетрудно определить, сколько процентов себестоимости книги составляла бы вся назначенная цена. Для этого запишем пропорцию:

$$\frac{90}{100} = \frac{108}{x}$$

Отсюда $x = 120$ %. Значит, первоначально предполагавшаяся прибыль равна 20 %.

4°. Многие считают, что на сколько процентов сокращается время изготовления детали, на столько же процентов должна увеличиваться производительность труда. Легко показать, что это – заблуждение.

Пусть на изготовление одной детали требуется 1 ч. После сокращения расходуемого времени на p % оно будет на $\frac{p}{100}$ ч меньше, т. е. будет составлять

$1-\dfrac{p}{100}$ ч. Значит, за 1 ч будет изготовлена не одна деталь, а $1:\left(1-\dfrac{p}{100}\right)=$ $=\dfrac{100}{100-p}$ деталей, или на $\dfrac{100}{100-p}-1=\dfrac{p}{100-p}$ деталей больше.

Выразив этот прирост продукции в процентах, получим $\dfrac{100p}{100-p}$ %. Так, если, например, норма времени сократится на 50 % ($p = 50$), то производительность труда возрастет не на 50 %, а на 100 %, т. е. удвоится.

128. Если существенной стороной воли завещателя считать отношение доли m матери к доле s сына и к доле t дочери, то из условия следует, что дочь должна получить вдвое меньшую часть наследства, нежели мать, а сын — вдвое большую, чем мать. Значит, наследство нужно разделить на 7 равных частей, из которых две части следует выдать матери, четыре части сыну и одну часть дочери, т. е. $m : s : t = 2 : 4 : 1$.

Так и предложил делить наследство Сальвиан Юлиан. Но такое решение неблагоприятно для матери. В самом деле, ведь волю завещателя можно истолковать так, что он имел в виду оставить матери по *меньшей мере* $\dfrac{1}{3}$ состояния, а решение римского юриста предоставляет ей только $\dfrac{2}{7}$ наследства. Поэтому если встать на защиту интересов матери, то ей следует отдать $\dfrac{1}{3}$ всего наследства, остальные $\dfrac{2}{3}$ наследства разделить между сыном и дочерью в отношении 4 : 1. Тогда сын получит $\dfrac{2}{15}\cdot 4=\dfrac{8}{15}$, а дочь $\dfrac{2}{15}\cdot 1=\dfrac{2}{15}$ всего наследства, или $m : s : t = 5 : 8 : 2$. Из двух приведенных решений мы видим, что воля завещателя сформулирована недостаточно четко, так как возможны два толкования его воли.

129. Пусть искомое расстояние равно $2x$ шагов. В одной половине этого расстояния содержится $\dfrac{x}{2}$ пар шагов; в другой половине $\dfrac{x}{3}$ троек шагов. По условию пар на 250 больше, чем троек. Следовательно,

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=250,\ \frac{x}{6}=250,\ x=1500 \text{ шагов.}$$

Все расстояние $2x = 3000$ шагов.

130. Пусть расстояние от деревни до города равно x км. Если пожилой проехал y км, то ему остается ехать $(x - y)$ км. Если бы он проехал $3y$ км, то ему осталось бы ехать $(x - 3y)$ км.

По условию расстояние $x - 3y$ вдвое меньше расстояния $x - y$. Следовательно,

$$x - y = 2(x - 3y), \text{ или } x - y = 2x - 6y.$$

Отсюда $y = \frac{1}{5}x$.

Пусть молодой проехал первоначально z км; ему остается ехать $(x - z)$ км.

Если бы он проехал $\frac{z}{2}$ км, то ему осталось бы ехать $\left(x - \frac{z}{2}\right)$ км. По условию

$$3(x - z) = x - \frac{z}{2}.$$

Отсюда $z = \frac{4}{5}x$.

Но $\frac{4}{5}x$ больше, чем $\frac{1}{5}x$, т. е. $z > y$, а это значит, что первоначально молодой проехал больше, чем пожилой. Следовательно, молодой ехал на машине, а пожилой на лошади.

131. Пусть первый мотоциклист ехал x часов, отдыхал $\frac{y}{3}$ ч; второй мотоциклист отдыхал $\frac{x}{2}$ ч, ехал y ч.

Так как оба мотоциклиста находились в пути одно и то же время, то

$$x + \frac{y}{3} = \frac{x}{2} + y, \text{ или } \frac{x}{2} = \frac{2}{3}y.$$

Отсюда $x = \frac{4}{3}y$, т. е. $y < x$.

Итак, второй мотоциклист ехал быстрее первого.

132. Если искомый самолет находится на n-м месте, считая слева направо, то справа от него $9 - n$ самолетов (см. рис. 56), а слева $n - 1$ самолет. Произведение этих чисел равно $(9 - n)(n - 1)$. Если бы самолет находился на три места правее, то справа от него было бы $6 - n$ самолетов, а слева $n + 2$ самолета. По условию

$$(6 - n)(n + 2) - (9 - n)(n - 1) = 3.$$

Отсюда $n = 3$.

Итак, искомый самолет третий, считая слева направо.

133. Искомые части: 8, 12, 5 и 20.

134. Пусть x – длина более длинной свечи, а y – длина короткой. За 1 ч первая свеча сгорит на $x : 3\frac{1}{2} = \frac{2}{7}x$, а вторая – на $y : 5 = \frac{1}{5}\ y$. За 2 ч они сгорят соответственно на $\frac{4}{7}x$ и $\frac{2}{5}y$. От первой свечи останется $\frac{3}{7}x$, а от второй $\frac{3}{5}y$. По условию $\frac{3}{7}x = \frac{3}{5}\ y$; следовательно, одна свеча была короче другой в $\frac{5}{7}$ раза.

135. На первый взгляд может показаться, что отставание стенных часов полностью компенсируется убеганием вперед на столько же минут настольных часов. В свою очередь отставание будильника компенсируется убеганием вперед ручных часов, поэтому ручные часы покажут точное время. Но это не так.

В самом деле, через 1 ч точного времени стенные часы покажут 58 мин. За 60 мин по стенным часам настольные часы покажут 62 мин. Следовательно, каждая минута стенных часов соответствует $\frac{62}{60}$ мин по настольным часам, а 58 мин по стенным часам (т. е. 1 ч точного времени) соответствуют $\frac{58 \cdot 62}{60}$ мин по настольным часам.

Далее, 60 мин по настольным часам соответствуют 58 мин по будильнику. Значит, каждая минута настольных часов отвечает $\frac{58}{60}$ мин по будильнику, а $\frac{58 \cdot 62}{60}$ мин по настольным часам (т. е. 1 ч точного времени) отвечают $\frac{58 \cdot 62}{60} \cdot \frac{58}{60}$ мин по будильнику.

Точно так же каждая минута по будильнику соответствует $\frac{62}{60}$ мин по ручным часам. Поэтому $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{60 \cdot 60}$ мин по будильнику (т. е. 1 ч точного времени) отвечают $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{60 \cdot 60} \cdot \frac{62}{60}$ мин по ручным часам. Произведя вычисления, приближенно получим 59,86 мин.

Значит, за каждый час точного времени ручные часы отстают на 0,14 мин. Таким образом за 7 ч точного времени они отстанут на $0{,}14 \cdot 7 = 0{,}98 \approx 1$ мин.

В 19 ч точного времени ручные часы покажут 18 ч 59 мин.

136. Пусть наши часы снова покажут одно и то же время через x ч. Это случится тогда, когда мои часы убегут, а Васины отстанут *вместе* на 12 ч (43 200 с). Мои часы за x ч отстанут на x с, а Васины – на 1,5 с. Получаем уравнение

$$x + 1{,}5x = 43\,200.$$

Отсюда $x = 17\,280$ ч, или 720 дней.

Почти два года пришлось бы ждать мне и Васе, пока наши часы опять покажут одно и то же время.

Еще дольше пришлось бы ждать совпадения показаний наших часов с сигналом точного времени.

Действительно, для этого мои часы должны убежать вперед на 12 ч, а Васины – отстать на 12 ч.

С моими часами это случилось бы через 43 200 ч, или через 1800 дней, а с Васиными – в 1,5 раза раньше, т. е. через 1200 дней. *Одновременное* совпадение показаний моих и Васиных часов с сигналом точного времени произошло бы через число дней, кратное числам 1800 и 1200, т. е. через 3600 дней – почти через 10 лет!

137. 1°. За время отсутствия мастера стрелки часов в сумме описали полный круг циферблата. Так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то пройденные ими расстояния составляют соответственно $\frac{12}{13}$ и $\frac{1}{13}$ всего круга. Отсюда следует, что мастер отсутствовал $\frac{12}{13} \cdot 60 = 55\frac{5}{13}$ мин.

Если путь, пройденный стрелками, считать в минутах и обозначить через x число минут, прошедшее от положения обеих стрелок на цифре 12 до положения минутной стрелки в момент ухода мастера на обед, то часовая стрелка за эти x мин продвинется только на $\frac{1}{12}x$, и, значит, в момент ухода мастера «расстояние» между стрелками составит $x - \frac{x}{12} = \frac{11}{12}x$ мин.

Получаем уравнение

$$\frac{11}{12}x = \frac{1}{13} \cdot 60.$$

Отсюда $x = 5\frac{5}{143}$ мин. Следовательно, ушел мастер на обед в $5\frac{5}{143}$ мин первого и отсутствовал $55\frac{5}{13}$ мин.

Когда он вернулся, было $55\frac{5}{13} + 5\frac{5}{143} = 60\frac{60}{143}$ мин после 12, т. е. $\frac{60}{143}$ мин второго.

2°. Через 2 ч после того как я ушел гулять, минутная стрелка часов окажется на том же месте, а часовая продвинется на $\frac{2}{12}$ всего циферблата.

Чтобы стрелки часов обменялись положениями более чем через 2 ч, они совместно должны пройти $\frac{10}{12}$ всего циферблата, или еще 50 мин. Минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, значит, на оставшийся ей путь она затратила $\frac{12}{13} \cdot 50 = 46\frac{2}{13}$ мин. Следовательно, сверх двух часов я отсутствовал еще $46\frac{2}{13}$ мин.

3°. Между 4 и 5 часами стрелки часов совпадают через $20 : \frac{11}{12} = 21\frac{9}{11}$ мин после 4. Минутная стрелка окажется против часовой через $50 : \frac{11}{12} = 54\frac{6}{11}$ мин после 4. Следовательно, школьник решал задачу $54\frac{6}{11} - 21\frac{9}{11} = 32\frac{8}{11}$ мин. Он закончил решение в 4 ч $54\frac{6}{11}$ мин.

138. Из условия задачи следует, что в момент, когда началось совещание, часовая стрелка находилась между шестым и седьмым часовыми делениями циферблата, а минутная – между девятым и десятым делениями (рис. 116).

Примем за единицу угловой путь, пройденный часовой стрелкой в течение часа (т. е. путь, соответствующий пяти минутным делениям). Если совещание началось в x ч, то угловой путь, пройденный часовой стрелкой от ее положения, соответствующего 12 ч, также равен x.

Если совещание окончилось в y ч, то угловой путь, пройденный часовой стрелкой от ее начального положения (от 12 ч), тоже будет равен y. Этот же угловой путь y прошла минутная стрелка за промежуток време-

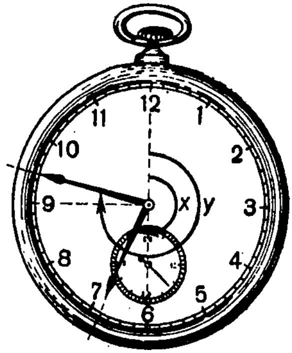


Рис. 116

ни от 6 ч 00 мин (тогда она была на цифре 12) до момента начала совещания. В свою очередь за этот же промежуток времени часовая стрелка (которая движется в 12 раз медленнее) прошла от цифры 6 угловой путь, равный $\frac{y}{12}$. Имеем

$$x = 6 + \frac{y}{12}.$$

К моменту окончания совещания стрелки поменялись местами. Рассуждая аналогично, получим

$$y = 9 + \frac{x}{12}.$$

Решив совместно эти уравнения, находим, что $x = 6\frac{114}{143}$ ч = 6 ч 47 мин $49\frac{133}{143}$ с – время начала совещания; $y = 9\frac{81}{143}$ ч = 9 ч 33 мин $59\frac{23}{143}$ с – время окончания совещания.

139. Так как первый разведчик половину всего времени шел с большей из двух неравных скоростей, то с большей скоростью он прошел, очевидно, *больше половины пути*, а второй разведчик с такой же скоростью прошел только *половину пути*.

Пусть для определенности начальная скорость каждого разведчика больше измененной скорости. Тогда первую половину пути оба разведчика шли одинаковое время, но вторую половину пути первый разведчик прошел за меньший промежуток времени, чем второй, так как второй шел с уменьшенной скоростью всю вторую половину пути, а первый – только часть ее. Значит, и весь путь первый разведчик прошел за меньший промежуток времени, чем второй. Вот и все решение задачи – краткое и изящное.

Нетрудно и алгебраически обосновать утверждение, что с большей скоростью первый разведчик прошел бо́льшую часть пути. Пусть m и n – скорости разведчиков, причем $m > n$, t – половина всего количества времени, затраченного первым разведчиком, s – путь, пройденный им со скоростью m, и s_1 – путь, пройденный им со скоростью n.

При $m > n$ имеем

$$\frac{s}{t} > \frac{s_1}{t}, \text{ откуда } s > s_1.$$

На алгебраическом языке можно продолжить решение так:

весь путь: $mt + nt$;

полпути: $\dfrac{mt+nt}{2} = \dfrac{(m+n)t}{2}$;

полное время первого разведчика: $x = 2t$;

полное время второго разведчика:

$$y = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n}.$$

Рассмотрим разность $y - x$. Находим

$$y - x = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n} - 2t = \frac{(mn+n^2+m^2+mn-4mn)t}{2mn} = \frac{(m-n)^2 t}{2mn}.$$

Так как все множители в правой части положительны, то $y - x > 0$, т. е. $y > x$. Итак, второй разведчик шел дольше, чем первый.

140. Пусть x – длина поезда, y – его скорость. Так как поезд проходит мимо наблюдателя за t_1 секунд, т. е. за это время он проходит путь, равный собственной длине x, то $y = \dfrac{x}{t_1}$. За t_2 секунд он проходит мост длиной a метров, т. е. за это время проходит путь, равный сумме собственной длины и длины моста.

Следовательно, $y = \dfrac{x+a}{t_2}$. Отсюда $x = \dfrac{at_1}{t_2 - t_1}$; $y = \dfrac{a}{t_2 - t_1}$.

141. Пусть на железнодорожной ветке имеются n станций, тогда каждая станция должна располагать $n - 1$ комплектом билетов, а всего, следовательно, необходимо $n(n-1)$ комплектов билетов.

Если на ветке было x станций, а будет y станций, то потребуется $y(y-1) - x(x-1)$ новых комплектов билетов. По условию имеем уравнение

$$y(y-1) - x(x-1) = 46, \text{ или } y^2 - x^2 - (y-x) = 46,$$
$$(y-x)(y+x-1) = 46.$$

Оба сомножителя должны быть целыми и положительными числами, а $46 = 2 \cdot 23$ и $46 = 1 \cdot 46$.

В первом случае

$$y - x = 2, \text{ а } y + x - 1 = 23.$$

Решив эту систему уравнений, получаем: $x = 11$, $y = 13$. Значит, на ветке было 11 станций, а после открытия двух новых будет 13 станций.

Второй случай ($46 = 1 \cdot 46$) означал бы, что число новых станций $y - x = 1$, но из выступления начальника дороги следует, что новых станций больше одной.

142. Перемножив левые и правые части равенств $a^2 = bd$ и $ad = b^2c$, получим $a^3d = b^3dc$, или, сокращая на d, имеем $a^3 = b^3c$.

Отсюда следует, что c должно быть кубом некоторого целого числа. Из целых чисел от 2 до 15 есть только одно, являющееся кубом, а именно 8. Значит, $c = 8$. Отсюда следует, что $a^3 = 8b^3$, или $a = 2b$.

Так как по условию $a^2 = bd$, то $4b^2 = bd$, т. е. $4b = d$. Но b не может быть равно 2, так как тогда $d = 8$, но у нас уже $c = 8$, а среди данных слов нет двух по 8 букв, и b не может быть больше 3, так как среди данных слов нет слов с 16 буквами и больше. Следовательно, $b = 3$. Отсюда $a = 6$ и $d = 12$. Итак, избранные слова имеют 6, 3, 8 и 12 букв. Такими словами из числа данных являются: победа, мир, единство, квалификация.

143. Нет, не может. Истинная масса сахара, полученного покупателем, будет больше 2 кг.

Произведем расчет. Если весы находятся в равновесии, то равноплечие они или неравноплечие – все равно будет выполняться равенство $ap = bq$, где a и b – длины правого и левого плеч коромысла весов, а p и q – массы грузов на правой и левой чашках весов (рис. 117).

По условию, $a \neq b$; пусть 1 кг гирь соответствует в первом случае x кг сахара, а во втором y кг. Тогда $a \cdot 1 = bx$ и $b \cdot 1 = ay$. Отсюда $x = \frac{a}{b}$, а $y = \frac{b}{a}$, и общая масса сахара, купленного покупателем, равна $x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ кг.

Но сумма любого положительного числа $\frac{a}{b}$ (кроме 1) и числа $\frac{b}{a}$, ему обратного, всегда больше 2. Действительно, $(a - b)^2 > 0$, если $a \neq b$.

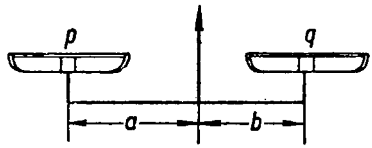


Рис. 117

Отсюда $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, или $a^2 + b^2 > 2ab$. Разделив обе части неравенства на ab, получаем

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Следовательно, продавец ошибался, полагая, что, взвешивая половину груза на одной чашке неравноплечих весов, а другую половину – на другой чашке, он получит правильную истинную массу всего груза. Истинная масса суммы двух «половин» груза всегда будет больше массы гирь.

Способы точного взвешивания на неправильных весах.

1°. Уравновесить товар чем-либо, например, дробью. Снять товар и вместо него на чашку весов поставить гири, уравновешивающие дробь. Эти гири и укажут массу товара.

2°. «Взвесить» товар дважды, ставя гири сначала на одну чашку весов, а затем – на вторую. Если в первом случае «масса» товара равна p, а во втором она равна q, то истинная масса равна $\sqrt{p \cdot q}$. Вы это легко докажете самостоятельно.

144. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства

$$(x - v)^2 = (y - v)^2,$$

любитель алгебраических преобразований упустил из виду два возможных результата: либо $x - v = y - v$, либо $x - v = v - y$. Верный же из них – только второй и вот почему. Так как x и y – числа положительные, то из исходного равенства $x + y = 2v$ следует, что если $x > v$, то $y > v$ (первый случай), а если $x < v$, то $y > v$ (второй случай).

В первом случае $x - v > 0$, а $y - v < 0$, следовательно, равенство $x - v = y - v$ не может быть верным (положительное число не может быть равным отрицательному).

Во втором случае $x - v < 0$, а $y - v > 0$, что опять не подтверждает справедливости равенства $x - v = y - v$. Равенство же $x - v = v - y$ не противоречит условиям ни первого, ни второго случаев. Приняв это равенство, наш любитель избежал бы ошибки, но ... и не получил бы, как и следовало ожидать, никакого нового результата. Из равенства $x - v = v - y$ снова следовало бы исходное равенство $x + y = 2v$.

145. Приписывая 1 впереди пятизначного числа [A], очевидно, мы его увеличиваем на 100 000. Таким образом, [1] [A] – это A + 100 000. Если же мы приписываем единицу в конце числа A, то это равносильно умножению его на 10 и прибавлению единицы к этому произведению. Значит, [A] [1] – это $A \cdot 10 + 1$.

Из условия следует, что

$$\frac{10A+1}{A+100\,000}=3.$$

Отсюда $10A + 1 = 3A + 300\,000$, или $7A = 299\,999$ и, наконец, $A = 42\,857$.

146. Если мой возраст изобразить отрезком AB (рис. 118), а ваш – отрезком CD, то отрезок KB покажет, сколько лет назад мой возраст был равен вашему. Но столько лет назад ваш возраст был меньше на отрезок $ND = KB$ и выражался отрезком CN, который в два раза меньше отрезка AB. Отсюда следует, что и отрезок MB содержит 2 раза отрезок KB; отрезок AB содержит 4 раза отрезок KB, а CD – 3 раза.

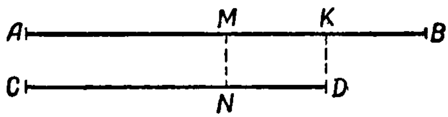


Рис. 118

Когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то ваш возраст изобразится отрезком, равным отрезку AB, который, как установлено, содержит 4 раза отрезок KB. Но и мой возраст за это время увеличится на отрезок KB и будет изображаться отрезком, содержащим 5 раз отрезок KB.

По условию $4KB + 5KB = 63$, т. е. отрезок KB изображает 7 лет. Значит, в настоящее время вам 21 год, а мне 28 лет. Семь лет назад вам было 14 лет, что действительно составляет половину моего настоящего возраста.

147. Часто дают неправильный ответ, например 7. Это объясняется тем, что учитывая те пароходы, которые еще должны отправиться в путь, забывают о тех, которые уже в дороге. Убедительное и наглядное решение можно получить с помощью графиков движения каждого из пароходов (рис. 119).

На примере парохода, график которого изображен линией AB, видно, что пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк, встретит в море 13 судов да еще два: одно в момент отхода (прибывшее из Нью-Йорка) и одно в момент прихода в Нью-Йорк (отбывающее из Нью-Йорка), или всего 15 судов. График показывает также и то, что встречи пароходов будут происходить ежедневно в полдень и в полночь.

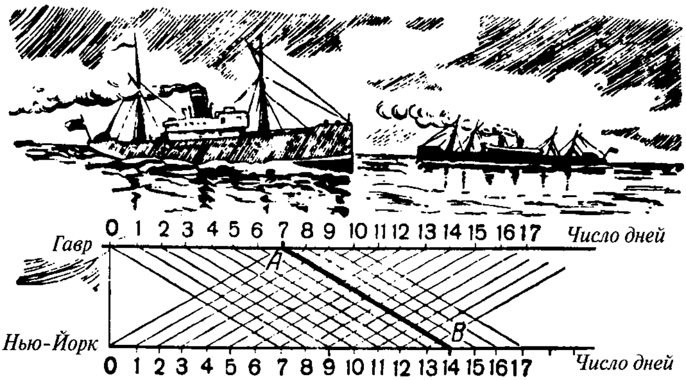


Рис. 119

148. Здесь для решения и анализа задачи также удобен графический способ. По вертикальной оси (рис. 120, *а*) откладываем расстояния (в километрах), а по горизонтальной – моменты времени (в часах), масштабы произвольные.

Если весь путь совершается на велосипеде (со скоростью 15 км/ч), то, как показывает конечная точка A графика OA, для этого требуется 4 ч. Если же весь путь совершается пешком (без остановок, со скоростью 5 км/ч), то, как показывает точка B графика OB, для этого требуется 12 ч. Но оба мальчика двигались попеременно пешком и на велосипеде и закончили свой путь одновременно, следовательно, графики их движений должны иметь общую конечную точку.

В условии не сказано, сколько раз меняли мальчики способ своего передвижения. Предположим – по одному разу. В этом случае графики их движений должны образовать параллелограмм.

В самом деле, пусть график OC движения велосипедиста сменился в некоторой точке C графиком CE, характеризующим движение пешком и, следовательно, параллельным OB.

График OD движения второго мальчика при перемене движения пешком на велосипедное «переламывается» в такой точке D, которая находится на одном уровне с точкой C относительно горизонтальной оси, так как этот мальчик должен дойти пешком до того места, где товарищ оставил ему велосипед (т. е. пройти такой же путь, какой проехал на велосипеде первый мальчик). Остальную часть пути второй мальчик едет на велосипеде, следовательно, отрезок DE графика его движения на велосипеде параллелен OA.

Итак, фигура $OCED$ – параллелограмм, фигура $CDBE$ – также параллелограмм ($CE \parallel DB$ и $CD \parallel BE$).

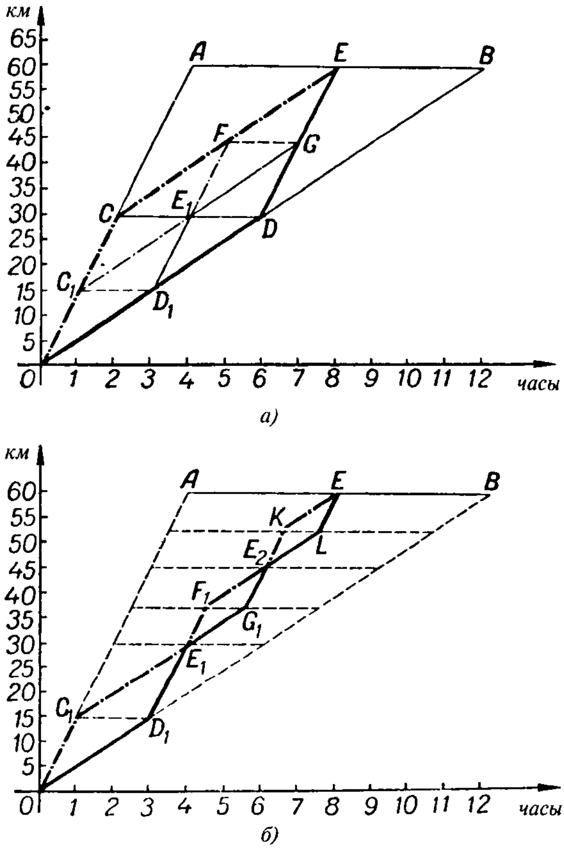


Рис. 120

Сопоставляя стороны параллелограммов, получаем $OD = CE$ и $CE = DB$. Отсюда следует, что $OD = DB$.

Значит, точки D и C соответствуют середине всего пути. В этом случае смена способа передвижения происходит только один раз на расстоянии 30 км от конечной цели прогулки мальчиков. Точка E является серединой отрезка AB и показывает, что при избранном мальчиками способе передвижения на весь путь им потребуется только 8 ч вместо 12 ч в случае, если бы весь путь они оба прошли пешком.

Но смена способов передвижения может произойти и не один раз. По условию мальчик, едущий на велосипеде, догнав товарища, уступает ему велосипед, а сам продолжает путь пешком. Момент такой передачи велосипеда одним мальчиком другому характеризуется на диаграмме точкой встречи графиков движения. Очевидно, что такой точкой, аналогично точке E, может быть и точка E_1 – середина отрезка CD.

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить, например, следующие графики движения: OC_1E_1FE для первого мальчика и OD_1E_1GE для второго мальчика. В этом случае перемена способа передвижения в последний раз происходит в 15 км от конечного пункта прогулки мальчиков (уровень FG на рис. 120, *а*).

Легко понять, что графики движения мальчиков можно разнообразить.

Например, после встречи мальчиков, соответствующей моменту E_1 (рис. 120, *б*), можно предложить им такие графики движения: $E_1F_1E_2KE$ для первого мальчика и $E_1G_1E_2LE$ для второго. В этом случае последняя перемена способа передвижения мальчиков произойдет еще ближе к конечному пункту их прогулки, всего лишь в 7,5 км от него (уровень KL на рис. 120, *б*).

Как видно, условие задачи допускает бесчисленное множество вариантов графиков движения мальчиков, и в этом смысле задача недостаточно определена. Но один ответ остается вполне определенным. Сколько бы раз мальчики ни меняли способ своего передвижения, весь их путь будет продолжаться ровно 8 ч.

К главе 5

149. Четыре ботинка и три носка. Среди четырех ботинок, взятых из шкафа, два обязательно будут одного фасона; среди трех носков два будут одного цвета.

Если же взять только два или три ботинка, то может случиться так, что они все окажутся разных фасонов, а если взять только два носка, то эти носки могут оказаться разной окраски.

150. 1) 4 яблока; 2) 7 яблок.

151. Нельзя, так как через 72 ч, т. е. через трое суток, опять будет 12 ч ночи, а солнце ночью не светит (если дело не происходит за Полярным кругом в полярный день).

152. Шестиклассники перевыполнили свое задание на 5 деревьев, а потому четырехклассники недовыполнили свое задание на 5 деревьев.

Значит, старшие посадили на 10 деревьев больше, чем младшие.

153. 1. Фамилия Пети не Гриднев (это противоречило бы п. 3° условия).

2. Мать Бурова – родная сестра Серова (п. 1° условия), т. е. ее девичья фамилия – Серова; но дедушка Пети – Мокроусов (п. 2° условия); значит, он отец Петиной матери, а не его отца, так как отец Пети – или Буров, или Клименко (см. п. 1 решения). Таким образом, мать Бурова и мать Пети – не одно и то же лицо.

Этим устанавливается, что Буров – не Петя. Но Буров – и не Коля, как это выяснилось в самом начале разговора вожатого с ребятами.

Если же Буров – не Петя и не Коля, значит, его имя – Гриша.

3. Так как Буров – Гриша, то Гриднев – не Гриша, но он и не Петя (см. п. 1 решения). Следовательно, Гриднев – Коля, а Клименко – Петя.

4. Петя в этом году начнет изучать алгебру, геометрию и физику (п. 2° условия), значит, он будет учиться в 7-м классе средней школы, а в первый класс он пошел, когда ему было 6 лет, значит, ему в настоящее время 12 лет (разумеется, так как он учится отлично, то он не оставался ни в одном классе на второй год).

5. По условию Гриднев и Гриша старше Пети на 1 год (п. 3° и 4° условия), значит, Гридневу и Бурову по 13 лет.

Окончательно: Буров Гриша, 13 лет, Гриднев Коля, 13 лет, Клименко Петя, 12 лет.

154. Сначала нужно выписать оценки (числа очков) всех 18 выстрелов, затем распределить их в три ряда (по шесть чисел в каждом) так, чтобы сумма чисел в каждом ряду дала 71 очко.

Возможен только один вариант такого распределения, а именно:

Ряд № 1: 25, 20, 20, 3, 2, 1 – всего 71 очко;

Ряд № 2: 25, 20, 10, 10, 5, 1 – всего 71 очко;

Ряд № 3: 50, 10, 5, 3, 2, 1 – всего 71 очко.

Так как первые два выстрела дали Андрюше 22 очка, то ему и принадлежит ряд № 1, поскольку только в этом ряду имеются два числа, дающих в сумме 22.

Первый выстрел дал Володе 3 очка, значит, ему принадлежит ряд № 3 (во втором ряду нет числа 3). В этом ряду и находится число 50.

Следовательно, в центральное яблоко мишени попал Володя. Ряд № 2, очевидно, принадлежит Боре.

155. Число карандашей для черчения и химических, а также цены на обыкновенные и цветные карандаши кратны 4. Следовательно, и сумма стоимостей всех карандашей также должна быть кратна 4, но 890 не делится на 4, значит, в подсчете суммы была ошибка.

156. Задачи такого рода решаются методом исключения. Перечислим утверждения, содержащиеся в условии:

1°. *А* и москвич – врачи.

2°. *Д* и петербуржец – учителя.

3°. *В* и туляк – инженеры.

4°. *Б* и *Е* – участники Отечественной войны, а туляк в армии не служил.

5°. Харьковчанин старше *А*.

6°. Одессит старше *В*.

7°. *Б* и москвич сошли в Киеве.

8°. *В* и харьковчанин сошли в Виннице.

Из этих утверждений, как логические следствия, выявляются скрытые факты.

Например, из утверждений 1° и 2° следует, что *А* – не москвич (1), но *А* – и не петербуржец (1–2); *Д* – не петербуржец (2), но *Д* – и не москвич (1–2) и т. п.

Составим таблицу всех основных и выведенных фактов, помещая в соответствующих клетках таблицы номера условий, из которых следует исключение возможности данного сочетания:

	А	Б	В	Г	Д	Е
Москвич	1	7	7–8 1–3	–	1–2	*
Петербуржец	1–2	*	2–3	–	2	–
Киевлянин	–	–	*	–	–	–
Туляк	1–3	4	3	*	2–3	4
Одессит	*	–	6	–	–	–
Харьковчанин	5	7–8	8	–	*	–

Из таблицы сразу следует, что *В* – киевлянин (отмечаем звездочкой). Остальные пассажиры – не киевляне (ставим «минусы» в свободных клетках строки «киевлянин»).

Сразу выясняется местожительство *А*. Пассажир *А* – одессит. Ставим в соответствующей клетке таблицы звездочку; в остальных свободных клетках этой строки проставляем «минусы».

Продолжая этот прием, окончательно устанавливаем:

А – одессит, *Б* – петербуржец, *В* – киевлянин, *Г* – туляк, *Д* – харьковчанин, *Е* – москвич.

Теперь легко определяются и специальности пассажиров: *А* и *Е* – врачи, *Б* и *Д* – учителя, *В* и *Г* – инженеры.

Замечание. Таблица показывает, что всего из условия задачи было использовано 17 фактов. Достаточность этого количества фактов следует из того, что задача все-таки решена и в процессе решения не было никаких противоречий. Но все ли 17 фактов являются необходимыми для решения задачи? Очевидно – нет, так как два факта, например, подтверждают, что *В* – не москвич.

Какое же количество фактов является необходимым?

Так как каждый пассажир является жителем одного из шести городов, то для установления методом исключения местожительства первого пассажира необходимо 5 фактов, указывающих, в каких пяти городах он не живет.

После этого для установления местожительства второго пассажира необходимо и достаточно располагать только четырьмя фактами того же типа и т. д.

Следовательно, для наиболее экономной формулировки задачи о шести пассажирах и для ее решения необходимо и достаточно иметь $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ фактов указанного типа.

В этой задаче два факта – лишние.

157. При распиловке метровых кругляков на полуметровые дрова количество отрезков должно быть кратно двум. При распиловке полутораметровых количество отрезков кратно трем, а при распиловке двухметровых – кратно четырем.

Лавров и Котов напилили 26 отрезков (кратно двум), Галкин и Пастухов – 27 (кратно трем), а Медведев с Евдокимовым – 28 (кратно четырем).

Следовательно, полутораметровые дрова пилили Галкин и Пастухов, которых по условию звали Петей и Костей, но Петя – бригадир, а Пастухов – не бригадир. Значит, Пастухов – Костя.

158. Рассуждения можно провести, например, в такой последовательности. Если (3) верно, то и (10), и (12) – ложь, а это невозможно по условию. Следовательно, (3) – ложь (т. е. кошелек украл не Тео). Так как (3) – ложь, то и

(9) – ложь. Так как (9) – ложь, то (8) – верно. Так как (8) – верно, то (15) – ложь. Если (15) – ложь, то (14) – верно. Следовательно, виновна Джуди.

159. 1°. Делитель второго действия представляет собой сумму чисел, сложенных в первом действии. Следовательно, становится известным, что общее количество собранных трав выражается двузначным числом с цифрой 7 на конце. Первая цифра этого числа, очевидно, 1, так как сумма любых двух однозначных чисел меньше 20. Итак, собрано 17 кг трав.

2°. Два однозначных числа, а именно 8 и 9, составляют в сумме 17. Других однозначных чисел, составляющих в сумме 17, быть не может, так как увеличение первого слагаемого с 8 до 9 вызывает уменьшение второго слагаемого с 9 до 8, т. е. числа остаются теми же, а уменьшение первого слагаемого хотя бы на 1 превращает второе слагаемое в двузначное число, что противоречит условию.

3°. Делимое второго действия должно быть равно сумме результатов третьего и четвертого действий, т. е. сумме двух двузначных чисел, но сумма даже наибольших двузначных чисел, равная $99 + 99 = 198$, начинается с 1; следовательно, во втором действии первая цифра делимого – это 1.

4°. Первая цифра частного во втором действии, очевидно, также 1, так как делимое и делитель начинаются с 1 и делитель представляет собой число, меньшее, чем число, составленное из первых двух цифр делимого, иначе в частном не было бы двузначного числа. Отсюда же следует, что вторая цифра делимого больше 7.

5°. Вторая цифра делимого во втором действии – это 8 или 9, но 9 отпадает, так как тогда третья строка начиналась бы с 2, а двузначное число, начинающееся с 2, не может без остатка делиться на 17. Значит, вторая цифра делимого есть 8. Тогда первая цифра третьей строки – это 1, а вторая – это 7, поскольку деление на 17 произошло без остатка. Таким образом, частное во втором действии равно 11.

Ответ. Первый отряд получил $9 \cdot 11 = 99$ р., второй получил $8 \cdot 11 = 88$ р.

160. В частном 5 цифр, а под делимым подписано только 3 произведения. Следовательно, две из пяти цифр частного должны быть нулями. Судя по произведениям – это не первая и не последняя цифра частного. Значит, нули – вторая и четвертая цифры, прикрытые белым и черным слонами. Далее, когда двузначный делитель умножается на 8, получается двузначное произведение, но когда делитель умножается на число, скрытое в частном под белой ладьей, получается трехзначное произведение. Следовательно, число, закрытое белой ладьей, должно быть больше 8 – очевидно, 9. Последнее число частного при умножении на делитель также дает трехзначное произведение, следовательно, последняя цифра частного, как и первая, равна 9. Частное определилось полностью: 90 809.

Найдем теперь делитель. Произведение его на 8 дает двузначное число, а произведение его на 9 – трехзначное число. Единственное двузначное число, отвечающее этому требованию, – это 12, так как $12 \cdot 8 = 96$, а $12 \cdot 9 = 108$. Итак, делитель равен 12. Умножив делитель 12 на частное 90 809 и прибавив остаток 1, получим делимое, равное 1 089 709.

161. **Первый ребус.**

1°. Рассмотрим сначала произведение числа ABC на A (четвертая строка). Последняя цифра этого произведения – это A, следовательно, она не 1, так как в противном случае и C было бы 1, но разные буквы по условию соответствуют неодинаковым цифрам.

2°. Замечаем также, что A не больше 3, так как в противном случае рассматриваемое произведение содержало бы более трех цифр, а из условия видно, что оно трехзначное. Следовательно, A может быть только либо числом 2, либо числом 3.

3°. Пусть $A = 3$. Каким должно быть C, чтобы произведение 3 на C оканчивалось цифрой 3? Этому условию удовлетворяет только $C = 1$ $(3 \cdot 1 = 3)$. Но C не может быть единицей, так как произведение числа ABC на C – число четырехзначное (третья строка). Следовательно, A не равно 3, но тогда $A = 2$. Снова ищем C такое, чтобы произведение $2 \cdot C$ оканчивалось цифрой 2. Единственно возможное значение для C – число 6.

4°. Теперь рассмотрим произведение числа $2B6$ на B (пятая строка). Последняя цифра этого произведения равна B; она же получается в результате умножения 6 на B. Для B возможны три значения: 4, 6 и 8, но $246 \cdot 4 = 984$ – число трехзначное, а произведение должно быть четырехзначным; значение 6 также отпадает, поскольку $C = 6$. Значит, $B = 8$. Итак, $ABC = 286$ и $BAC = 826$.

Второй ребус. 1°. Так как от умножения трехзначного числа на 2 получается четырехзначное число (четвертая строка), а в третьей и пятой строках – числа трехзначные, то оба крайних числа второй строки должны быть меньше 2, значит, оба они равны 1. Таким образом, множитель равен 121.

2°. Так как пятая строка получается умножением множимого на 1, то имеющаяся в пятой строке цифра 8 показывает, что вторая цифра множимого (первая строка) есть 8, а следовательно, и вторая цифра третьей строки – также 8 (третья строка получается умножением первой строки на 1). Значит, имеем:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *8*\\ 121\end{array}\\ \hline *8*\\ +\begin{array}{r} ****\\ *8*\end{array}\\ \hline **9*2*\end{array}$$

3°. Первая цифра первой строки больше 4, иначе четвертая строка не была бы четырехзначным числом, но если бы первой цифрой первой строки была даже 9, то все равно первая цифра четвертой строки не больше 1. Очевидно также, что последняя цифра четвертой строки есть 4 (сумма должна оканчиваться цифрой 2, см. шестую строку).

4°. Теперь ясно, что первой цифрой шестой строки может быть только 1, а первой цифрой пятой (следовательно, также третьей и первой строк) – либо 8, либо 9, иначе шестая строка не была бы шестизначным числом. Теперь имеем

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \times & * & 8 & * \\
 & & & 1 & 2 & 1 \\ \cline{4-6}
 & & & * & 8 & * \\
 & + & 1 & * & * & 4 \\
 & * & 8 & * & & \\ \hline
1 & * & 9 & * & 2 & *
\end{array}$$

5°. Так как последняя цифра четвертой строки есть 4 (см. п. 3°), то последняя цифра первой, третьей и пятой строк – либо 2, либо 7.

6°. Третья цифра четвертой строки – либо 6, либо 7, так как является последней цифрой произведения $2 \cdot 8$, в крайнем случае увеличенного на 1. Вторая цифра четвертой строки – либо 7, либо 9 в зависимости от того, будет ли первая цифра первой строки 8 или 9 (см. п. 4°). Если бы второй цифрой четвертой строки была цифра 7, то столбец, в котором она находится $(7 + 8)$, пришлось бы дополнять числом 4, чтобы обеспечить соответствующую этому столбцу цифру 9, указанную в произведении, но сумма трех чисел третьего столбца (даже если бы они все были девятками) не может дать больше двух единиц следующего разряда (наибольшее возможное ее значение 28).

Следовательно, второй цифрой четвертой строки является 9.

7°. Из пп. 6° и 4° следует, что первой цифрой первой строки (значит, и третьей, и пятой строк) может быть только цифра 9:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \times & 9 & 8 & * \\
 & & & 1 & 2 & 1 \\ \cline{4-6}
 & & & 9 & 8 & * \\
 & + & 1 & 9 & * & 4 \\
 & 9 & 8 & * & & \\ \hline
1 & * & 9 & * & 2 & *
\end{array}$$

8°. Так как последняя неизвестная цифра множимого определяет все остальные цифры произведения, то ясно, что третья цифра первой строки – не 2, а 7 (см. п 5°). Если бы последняя цифра первой строки была 2, то это не обеспечило бы 9 в качестве третьей цифры шестой строки.

Так оказалось возможным восстановить все зашифрованные цифры. Окончательный результат:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}987\\ \underline{121}\end{array}\\
987\\
1974\\
\underline{987}\\
119427
\end{array}
$$

Третий ребус. 3125 : 25 = 125.

Четвертый ребус. 7 375 428 413 : 125 473 = 58 781.

Пятый ребус. 1 337 174 : 943 = 1418,

или 1 202 464 : 848 = 1418,

или 1 343 784 : 949 = 1416,

или 1 200 474 : 846 = 1419.

Шестой ребус. 1 091 889 708 : 12 = 90 990 809.

Седьмой ребус. $DOREMIFASOL \equiv \begin{cases} 34\,569\,072\,148 \text{ или} \\ 23\,679\,048\,135. \end{cases}$

Восьмой ребус. $+\begin{array}{r}192\\ \underline{382}\\ 574\end{array};\quad +\begin{array}{r}273\\ \underline{546}\\ 819\end{array};\quad +\begin{array}{r}482\\ \underline{157}\\ 639\end{array};\quad +\begin{array}{r}591\\ \underline{273}\\ 864\end{array}$ и др.

162. Первый ребус. Замечаем, что в первом столбце при вычитании из *У* единиц *Г* единиц снова получается *У* единиц. Это значит, что $Г = 0$.

Рассмотрим разность $ИАЗ - ИОГ = НЗ$. Так как $Г = 0$, а цифры сотен одинаковы, то

$$A - O = H \qquad (1)$$

Рассмотрим разность $ПАУ - НЗ = ППА$ и преобразуем ее в сумму: $ППА + НЗ = ПАУ$. Так как цифры сотен совпадают, то должна иметь место одна из двух систем:

$$\begin{cases} A + З = У \\ П + Н = А \end{cases} \qquad (2)$$

(сумма единиц меньше 10);

$$\begin{cases} A + З = У + 10 \\ П + Н + 1 = А \end{cases} \qquad (3)$$

(сумма единиц больше 10).

Сопоставляя уравнение (1) с уравнением $П + Н = А$, получаем $П + Н - О = Н$. Отсюда $П = О$, что исключено, поскольку разные цифры зашифрованы разными буквами. Значит, справедлива система (3), а не (2).

Затем, сопоставляя уравнение (1) с уравнением $П + Н + 1 = А$, получаем $П + Н + 1 = Н + О$. Отсюда следует

$$П + 1 = О. \qquad (4)$$

Так как $Г = 0$, то, сокращая на 10 числа $НЕГ$ и $ИОГ$, получаем $НЕ : ИО = Е$, или $ИО \cdot Е = НЕ$. Отсюда получаем следующие две системы:

$$\begin{cases} ЕО = Е \\ ЕИ = Н \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} ЕО = Е + 10 \\ ЕИ + 1 = Н \end{cases} \qquad (6)$$

Если справедлива система (5), то $О = 1$ и тогда в силу (4) $П = 0$, но это исключено, так как уже известно, что $Г = 0$. Значит, имеет место система (6). Сопоставляя уравнения $ЕО = Е + 10$ и $П + 1 = О$, получаем: $Е(П + 1) = Е + 10$, или

$$ЕП = 10. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь уравнение $ИИТЕ : Е = ППА$. Придадим ему следующий вид:

$$(100П + 10П + А) \cdot Е = 1000И + 100И + 10Т + Е.$$

Отсюда

$$100ПЕ + 10ПЕ + АЕ = 1000И + 100И + 10Т + Е$$

или в силу (7):

$$1000 + 100 + АЕ = 1000И + 100И + 10Т + Е.$$

Это равенство, очевидно, может иметь место только при $И = 1$ и, значит,

$$АЕ = 10Т + Е \qquad (8)$$

Далее рассмотрим сумму $АТУ + ИАЗ = ИИТЕ$. Так как И = 1, то

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} А\,Т\,У \\ 1\,А\,З \end{array} \\ \hline 11\,Т\,Е \end{array}.$$

Зная, что $А < 10$ и сумма десятков не может превысить одну сотню, получаем $А + 1 + 1 = 11$. Отсюда $А = 9$.

Теперь имеем

$$\begin{array}{r} +\,9\,ТУ \\ \underline{1\,9\,З} \\ 11\,ТЕ \end{array}.$$

Случай $У + З = Е$ невозможен, так как отсюда следовали бы абсурдные равенства: $Т + 9 = Т$ или $Т + 9 = Т + 10$.

Таким образом, имеем

$$У + З = Е + 10. \qquad (9)$$

Рассмотрим уравнение $АТУ - НЕГ = ПАУ$. Заменим $А$ ее значением и придадим этому уравнению следующий вид:

$$\begin{array}{r} -\,П\,9\,У \\ \underline{Н\,Е\,0} \\ 9\,Т\,У \end{array}.$$

Так как $Е$ – не нуль и не единица, то

$$9 + Е = Т + 10,\ \text{т. е. } Е - Т = 1, \qquad (10)$$

$$П + Н + 1 = 9,\ \text{т. е. } П + Н = 8. \qquad (11)$$

Сопоставляя (8) и (10), получаем систему

$$\begin{cases} АЕ = 10Т + Е \\ Е - Т = 1 \end{cases}$$

и так как $А = 9$, то $Е = 5$, а $Т = 4$.

Из (7) следует, что $П = 2$; из (11) – что $Н = 6$; из (1) – что $О = 3$.

Значения букв $З$ и $У$ определяются из системы, состоящей из уравнения (9) и первого уравнения системы (3):

$$\begin{cases} У + З = Е + 10, \\ А + З = У + 10. \end{cases}$$

Так как $А = 9$ и $Е = 5$, то $З = 8$ и $У = 7$.

Сведем все полученные результаты в таблицу:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Г	*И*	*П*	*О*	*Т*	*Е*	*Н*	*У*	*З*	*А*

Остается лишь прочесть образовавшееся слово.

Второй ребус. Решение аналогично решению первого ребуса (чуть труднее). Значения букв приведены в таблице:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	*E*	*R*	*U*	*F*	*S*	*W*	*A*	*H*	*L*

Немецкое слово Berufswahl в переводе на русский язык означает «выбор профессии» – действительно, весьма важный шаг в жизни человека.

Примечание. Интересной задачей является придумывание аналогичных ребусов-мозаик.

163. Мотоциклист находился в пути на 20 мин меньше, чем ему обычно требовалось для того, чтобы совершить путь до аэродрома и обратно. Экономия во времени произошла благодаря тому, что мотоциклисту в этот раз не пришлось доезжать до аэродрома. Эти 20 мин он затратил бы от места встречи с верховым до аэродрома и обратно. Следовательно, чтобы проехать этот путь в один конец, например от места встречи с верховым до аэродрома, мотоциклисту потребовалось бы 10 мин. Но мы знаем, что мотоциклист встретился с верховым после того, как тот пробыл в пути 30 мин, т. е. спустя полчаса по прибытии самолета. Так как мотоциклист выехал из почтового отделения вовремя, то, прибавив к этим 30 мин те 10 мин, которые необходимы мотоциклисту, чтобы добраться до аэродрома, мы устанавливаем, что самолет прибыл на аэродром на 40 мин раньше установленного срока.

164. 8 ч. 25 мин; пешком инженер идет медленнее, чем едет на автомобиле, в 5 раз.

165. **1°.** Предположим, что ни один из сомножителей не больше 8. Тогда возможны три случая: а) каждый сомножитель равен 8; б) один из сомножителей равен 8, другой меньше 8; в) оба сомножителя меньше 8. Легко установить, что в каждом из этих случаев произведение меньше 75, что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей больше 8.

2°. Предположим, что первая цифра множимого отлична от 1. Тогда она не менее 2, а само число не менее 20. Однако произведение 20 на 5 равно 100, значит, произведение рассматриваемого двузначного числа на 5 не меньше 100, т. е. не является числом двузначным, что противоречит условию. Следовательно, первая цифра данного двузначного числа есть 1.

166. **1°.** Разбиваем 9 монет на три равные группы и кладем по три монеты на каждую чашку весов (*первое взвешивание*); третью группу оставляем в стороне. Возможны два случая.

Первый случай. Весы остаются в равновесии; тогда искомая монета – среди оставленных в стороне. Выбираем из этих трех оставленных монет любые две и кладем по одной на каждую чашку весов (*второе взвешивание*). Если теперь равновесия не будет, то чашка с фальшивой (более легкой) монетой поднимется вверх; если же весы останутся в равновесии, то искомая монета – третья, не попавшая на весы.

Второй случай. Равновесия нет; следовательно, искомая монета – на той чашке, которая поднимется вверх. Таким образом, и в этом случае первое же взвешивание определяет тройку монет, среди которых – искомая. Вторым взвешиванием (так же как и в первом случае) выделяем искомую монету.

2°. Решается аналогично задаче **1°**. Дополнительная трудность состоит в том, что надо догадаться разбить данные 8 монет на неравные группы: две группы по три монеты в каждой и одна группа в две монеты. Кладем на весы первые две группы – по три монеты на каждую чашку весов (*первое взвешивание*). Если весы останутся в равновесии, то искомая монета – среди оставшихся двух и ее, как более легкую, сразу выделим вторым взвешиванием. Если же весы не останутся в равновесии, то фальшивая монета – на той чашке весов, которая поднялась вверх. Выбираем теперь из этих монет любые две и кладем по одной на каждую чашку весов (*второе взвешивание*). Если равновесия не будет, то опять-таки чашка с фальшивой монетой поднимется вверх; если же весы останутся в равновесии, то искомая монета – третья, не попавшая на весы.

3°. Вся трудность состоит в том, что относительно фальшивой монеты неизвестно заранее, легче она или тяжелее настоящих. Поэтому здесь, разделив монеты на три группы по четыре монеты в каждой, необходимо их перенумеровать. На одну чашку весов положим первую группу монет, имеющих, скажем, номера 1, 2, 3 и 4, а на вторую чашку – вторую группу монет с номерами 5, 6, 7 и 8 (*первое взвешивание*). Возможны два случая.

Первый случай. Весы в равновесии. Следовательно, фальшивая монета – среди третьей группы монет с номерами 9, 10, 11 и 12. Сравним теперь массу трех из них, например, №№ 9, 10 и 11 с монетами №№ 1, 2 и 3 (*второе взвешивание*). Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета – двенадцатая, и сравнивая ее, например, с первой, о которой стало известно, что она – настоящая (*третье взвешивание*), определяем, будет ли фальшивая монета тяжелее настоящей или легче. Если же второе взвешивание не даст равновесия, то фальшивая монета или № 9, или № 10, или № 11, причем по положению чашки весов с этими монетами сразу же выясняется, какая она – более тяжелая или более легкая. Допустим, перетянула чашка с монетами №№ 9, 10, 11. Значит, фальшивая – более тяжелая. Чтобы выделить ее из этих трех номеров, достаточно еще одного (третьего) взвешивания. Для этого положим на весы монеты №№ 9 и 10. Тогда либо фальшивая перетянет, либо она имеет № 11.

Второй случай. Первое взвешивание не привело к равновесию. Перетянула, скажем, чашка с монетами №№ 1, 2, 3 и 4. Тогда либо искомая монета среди №№ 1, 2, 3 и 4 и более тяжелая, либо среди №№ 5, 6, 7 и 8 и более легкая. При этом становится известным, что монеты третьей группы под №№ 9, 10, 11 и 12 – настоящие. *Вторым взвешиванием* сравним монеты №№ 9, 10, 11 и 5 (три настоящие и одну из группы более легких) с монетами №№ 3, 4, 6 и 7 (две из группы более тяжелых и две из группы более легких). Тогда имеются три возможности.

а) Весы в равновесии. Это значит, что выбранные монеты – настоящие, а фальшивая либо среди №№ 1 и 2 и более тяжелая, либо под № 8 и более легкая. Сравнивая монеты №№ 1 и 2 (*третье взвешивание*), установим, что фальшивая – легкая под № 8, если весы останутся в равновесии, либо что фальшивая – тяжелая № 1 или № 2 – та, которая перетянет.

б) Перетянет группа монет №№ 9, 10, 11 и 5. Тогда в этой группе не может быть фальшивой, так как №№ 9, 10 и 11 – настоящие, а если бы фальшивой была монета № 5, взятая из группы более легких, то не могла бы перетянуть чашка с тремя настоящими монетами и одной фальшивой – легкой. Значит, фальшивая – на второй чашке весов, среди №№ 3, 4, 6 и 7 и именно среди тех, которые взяты из группы более легких, т. е. либо № 6, либо № 7. Более легкая из этих двух (*третье взвешивание*) и является фальшивой.

в) Перетянет группа монет №№ 3, 4, 6 и 7. Тогда – либо фальшивая монета более тяжелая и, следовательно, находится на перетянувшей чашке среди монет, взятых из группы более тяжелых, т. е. фальшивая монета или под № 3, или под № 4, либо фальшивая монета более легкая и, следовательно, находится в группе монет №№ 9, 10, 11 и 5. В последнем случае – это монета № 5, так как известно, что монеты под №№ 9, 10 и 11 настоящие.

Таким образом, фальшивой монетой может быть одна из трех: № 3 или № 4 (и тогда она более тяжелая), или № 5 (и тогда она более легкая). Кладем на весы монеты №№ 3 и 4 (*третье взвешивание*), и тогда либо фальшивая (более тяжелая) та из них, которая перетянет, либо, в случае равновесия, фальшивой (более легкой) монетой будет монета № 5.

167. *А* рассуждал так: «У моих товарищей бумажки белые, значит, у меня бумажка может быть белой, а может быть и черной. Предположим, что она черная. Тогда *Б* имеет основания достоверно заявить о цвете своей бумажки, так как он может сказать себе: “Я вижу, что у *А* бумажка черная, а у *С* – белая, значит, у меня может быть либо белая, либо черная, но она не может быть черная, так как тогда *С*, зная, что черных бумажек только две, и видя у меня и у *А* черные бумажки, немедленно заявил бы о цвете своей бумажки. Но *С* не заявил об этом немедленно, поэтому он думает, не черная ли у него бумажка, но тогда, значит, он видит у меня белую бумажку”. Но *Б* тоже молчит, следовательно, моя бумажка – не черная. Но если она – не черная, значит, – *белая*».

Так рассуждал *А*, уверенный в способности своих товарищей столь же логично мыслить. Аналогично рассуждали и остальные два товарища, поэтому все они одновременно и пришли к правильному заключению о том, что у каждого из них бумажка белая.

168. Мудрец *А* рассуждал так: «Каждый из нас может думать, что его собственное лицо чистое; *Б* уверен, что его лицо чистое, и смеется над измазанным лбом мудреца *В*. Но если бы *Б* видел, что мое лицо чистое, то он был бы удивлен смеху *В*, так как в этом случае у *В* не было бы повода для смеха. Однако *Б* не удивлен, значит, он может думать, что *В* смеется надо мной. Следовательно, мое лицо черное».

169. **1°.** а) Ненужное слово: «двух»; б) ненужные слова: «прямоугольного треугольника» и «острый».

2°. а) Хорда; б) треугольник; в) диаметр; г) правильный треугольник; д) концентрические окружности.

3°. Высота, медиана, ось симметрии, геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка АС.

4°. Геометрический образ → плоская фигура → многоугольник → выпуклый четырехугольник → параллелограмм → ромб → квадрат.

5°. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна четырем прямым углам, следовательно, никакой выпуклый многоугольник не может иметь более чем три тупых внешних угла. Отсюда вытекает, что никакой выпуклый многоугольник не может иметь более трех острых внутренних углов. Три острых угла могут быть в треугольнике.

170. **1°.** Ранее уже установлено, что искомое число четное и кратно 9, следовательно, оно кратно 18. Установлено также, что оно больше 10, но меньше 25. Отсюда сразу следует, что искомое число есть 18, так как между 10 и 25 число 18 – единственное число, делящееся на 18.

Проверка: $18 \cdot 4\frac{1}{2} = 81$.

2°. а) Среди искомых чисел нет числа 10, так как иначе их произведение оканчивалось бы нулем.

б) Если бы все искомые числа были больше 10, то произведение их было бы больше $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, т. е. больше 10 000. Значит, среди искомых чисел должны быть числа, меньшие 10.

в) Установлено, что по крайней мере одно из искомых чисел меньше 10. Но искомые числа по условию отличаются одно от другого последовательно на 1, и так как ни одно из них не должно быть равно 10, то все четыре искомых числа меньше 10 (однозначные).

г) Среди искомых однозначных чисел нет числа 5, так как в противном случае было бы и число 4 или 6, а следовательно, произведение искомых чисел оканчивалось бы нулем.

д) Рассмотрим две возможные группы однозначных чисел, удовлетворяющих условию:

$$1, 2, 3, 4 \text{ и } 6, 7, 8, 9.$$

Первая группа отпадает, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; следовательно, если задача имеет решение, то искомыми числами могут быть только 6, 7, 8 и 9.

Проверка: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

171. Отец Гали рассуждал так: возраст ребенка должен быть не меньше трех лет (по условию) и не больше 12 (по смыслу слова «ребенок»). Значит, через три года ребенку будет не меньше 6 и не больше 15 лет. Но между числами 6 и 15 есть только одно такое число (целое), из которого точно извлекается квадратный корень, а именно 9. Значит, возраст ребенка равен $9 - 3 = 6$ годам.

Галя предполагала решить задачу следующими двумя способами:

Арифметическое решение. Пусть a – возраст ребенка три года назад. По условию квадрат этого числа больше его на 6, т. е. $a^2 - a = 6$, или $a(a - 1) = 6$.

Если предположить, что a – число целое, то a и $a - 1$ являются делителями числа 6. Но $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Из этих двух разложений только первое дает множители, отличающиеся на 1. Следовательно, $a = 3$, и возраст ребенка равен $3 + 3 = 6$ годам.

Алгебраическое решение. Пусть x – возраст ребенка в настоящее время. Три года назад ему было $x - 3$ лет, а через три года будет $x + 3$ лет. По условию $x + 3 = (x - 3)^2$. Отсюда $x^2 - 7x + 6 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$. Но по смыслу задачи $x > 3$. Итак, имеем одно решение: $x = 6$.

172. Тот промежуток чисел, в котором находится задуманное число, разделите пополам и выясните, в какой половине находится задуманное число. С уменьшенным вдвое промежутком опять поступите так же, и т. д.

Откуда же видно, что для этого достаточно десяти вопросов?

Дело в том, что десятикратное деление пополам промежутка чисел от 1 до 1000 приведет к промежутку, состоящему только из двух чисел, из которых одно – искомое. В самом деле, возьмем промежуток, состоящий из двух чисел: 1 и 2. Удвоив его, получим промежуток чисел от 1 до 4. Снова удвоим. Верхней границей промежутка является число 8, или 2^3. Еще раз удвоим. Верхняя граница отодвинется до числа 16, или 2^4.

Продолжая удваивать промежуток чисел, будем раздвигать его границы от 1 до 2^5, затем от 1 до 2^6 и т. д., пока верхняя граница промежутка не достигнет числа $2^{10} = 1024$, которое, как видите, даже немного превышает 1000.

Пример. Пусть задумано число 860. Спрашиваем:

1. Задуманное число больше 512? – Да.

Значит, искомое число находится в промежутке от 512 до 1000; будем для удобства считать, что оно – в промежутке 512 – 1024. Берем «про себя» половину этого промежутка, т. е. 256, прибавляем к 512 и спрашиваем:

2. Оно больше 768? – Да.

Отмечаем «про себя», что искомое число находится в промежутке от 768 до 1024. Прибавляем к 768 половину этого промежутка, т. е. 128, и спрашиваем:

3. Оно больше 896? – Нет.

Запоминаем, что искомое число в промежутке от 768 до 896. Прибавляем к 768 (или убавляем от 896) половину этого промежутка, т. е. 64, и спрашиваем:

4. Оно больше 832? – Да.

Искомое число в промежутке от 832 до 896. Прибавляем к 832 половину этого промежутка, т. е. 32, и спрашиваем:

5. Оно больше 864? – Нет.

Искомое число в промежутке 832 – 864 (длиной в 32 единицы).

6. Оно больше 848? – Да.

Промежуток сузился до 16 единиц: от 848 до 864.

7. Оно больше 856? – Да.

Промежуток уменьшился до 8 единиц: от 856 до 864.

8. Оно больше 860? – Нет.

Искомое число в промежутке 856 – 860.

9. Оно больше 858? – Да.

Значит, искомым числом может быть только либо 859, либо 860. Спрашиваем:

10. Оно больше 859? – Да.

Задуманное число – 860.

К главе 6

173. Наименьшим общим кратным нескольких чисел НОК является произведение всех простых множителей одного числа и недостающих множителей остальных чисел. Для чисел первого десятка НОК составляется, очевидно, из следующих множителей: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$, что и дает число 2520.

Любопытно отметить, что НОК чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 совпадает с НОК второй половины этого десятка чисел, т. е. с НОК чисел 6, 7, 8, 9 и 10.

Это иллюстрирует общее положение о том, что НОК любого четного количества чисел натурального ряда от 1 до $2n$ совпадает с НОК второй их половины: $n + 1, n + 2, ..., 2n$.

174. Во всех случаях раскладывания мандаринов по пакетам не хватает только одного мандарина. Следовательно, если бы мы имели на один мандарин больше, то их число делилось бы на 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 и 2.

Но таким числом, как вы знаете из решения предыдущей задачи, является 2520 или кратное ему.

Значит, мы имели самое меньшее 2519 мандаринов.

175. Таких чисел бесконечное множество. Наименьшее из них 58. В самом деле, разность между делителем и остатком во всех случаях равна 2. Следовательно, если к искомому числу добавить 2, то оно разделится без остатка на любой из указанных в задаче делителей.

Так как НОК чисел 3, 4, 5 и 6 есть 60, то вычитая 2, получаем 58.

176. Известно, что НОК чисел 2, 3, 4, 5 и 6 равно 60. Надо найти число, кратное 7, на 1 большее кратного 60. Заметим, что

$$60n + 1 = 7 \cdot 8n + 4n + 1.$$

Число $60n + 1$ делится на 7, если $4n + 1$ делится на 7. Наименьшее из подходящих значений n – число 5.

Значит, в корзине могло быть 301 яйцо. При следующем подходящем значении $n = 12$ получается 721 яйцо. Но этот случай (и все последующие) исключается: такую тяжесть женщина не могла нести.

177. Очевидно, что задуманное число кратно 7, 8 и 9. Значит, оно равно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Других множителей у него нет, так как при наличии самого меньшего из них, т. е. еще одной двойки, искомое число стало бы уже четырехзначным.

178. Поскольку НОК чисел 4, 8, 12 и 16 есть 48, теплоходы сойдутся через 48 недель, т. е. 4 декабря 2009 г.

179. Цены на соль и мыло кратны числу 3. Количества пачек сахара и коробок спичек также кратны трем. Поэтому стоимость всех покупок должна быть кратна числу 3. Этой кратности не было в сумме, обозначенной на чеке (сумма цифр $2 + 9 + 1 + 7 = 19$ не делится на 3). Значит, в подсчетах имеется ошибка.

180. Решение основывается на том наблюдении, что левая часть уравнения делится на 9, значит, и правая часть должна делиться на 9. Следовательно, должна делиться на 9 и сумма цифр: $4 + 9 + 2 + a + 4$. Но $4 + 9 + 2 + 4 = 19$. Поэтому $a = 8$. Других значений a иметь не может, так как заменяет цифру.

Извлекая теперь квадратный корень из числа 492 804, получим $3(230 + t) = 702$. Отсюда $t = 4$.

181. Левая часть равенства делится на 11. Значит, и правая часть должна делиться на 11. В соответствии с признаком делимости на 11 имеем $1 + 2 + 1 + 7 = a + 3$, отсюда $a = 8$. (Другие случаи, предусмотренные признаком делимости, здесь не имеют места, так как дают для a отрицательные или двузначные значения.)

Извлекая квадратный корень из числа 37 810 201, получаем 6149. Теперь имеем несложное уравнение:

$$11(492 + x) = 6149.$$

Решив его, найдем, что $x = 67$.

182. Мы знаем, что числа $10^3 + 1$ и $10^6 - 1$ делятся на 1001. Нетрудно убедиться, что число $10^9 + 1$ также делится на 1001, а значит, и на 7, 11 и 13.

Теперь берем произвольное число, разбивающееся на четыре грани, например 31 218 001 416, и представляем его в следующем виде:

$$31\,218\,001\,416 = 416 + 1 \cdot 10^3 + 218 \cdot 10^6 + 31 \cdot 10^9 =$$
$$= 416 + 1(10^3 + 1 - 1) + 218 \cdot (10^6 - 1 + 1) + 31\,(10^9 + 1 - 1) =$$
$$= (416 - 1 + 218 - 31) + [(10^3 + 1) + 218 \cdot (10^6 - 1) + 31(10^9 + 1)].$$

Число, заключенное в квадратных скобках, делится на 7, 11 и 13. Следовательно, делимость испытуемого числа на 7, 11 и 13 зависит только от делимости числа, заключенного в первых круглых скобках, которое представляет собой разность сумм граней через одну: $(416 + 218) - (1 + 31) = 602$.

Число 602, а вместе с ним и испытуемое число делятся на 7 и не делятся на 11 и на 13.

183. Запишем трехзначное число в обычной алгебраической форме: $100x + 10y + z$. Требуется доказать, что оно делится на 8 при условии, что двузначное число $10x + y$, образуемое цифрами сотен x и десятков y, сложенное с половиной числа единиц z, т. е. число $10x + y + \frac{z}{2}$, делится на 4.

Пусть $10x + y + \frac{z}{2} = 4k$, где k – любое целое положительное число. Выразим отсюда z и подставим в запись трехзначного числа:

$$20x + 2y + z = 8k,\ z = 8k - 20x - 2y,$$

$$100x + 10y + z = 100x + 10y + 8k - 20x - 2y = 80x + 8y + 8k.$$

Очевидно, что последнее выражение, а значит, и исходное трехзначное число делится на 8.

Ну, а если $10x + y + \frac{z}{2}$ не делится на 4? Следует ли отсюда, что и данное число $100x + 10y + z$ не делится на 8?

Ответ дает обратная теорема:

Если $100x + 10y + z$ делится на 8, то и $10x + y + \frac{z}{2}$ непременно делится на 4.

Действительно, пусть $100x + 10y + z = 8k$. Выразив отсюда z и подставив в $10x + y + \frac{z}{2}$, получим $10x + y + \frac{z}{2} = 10x + y + \frac{1}{2} \cdot (8k - 100x - 10y) =$ $= -40x - 4y + 4k$.

Делимость этого выражения на 4 очевидна.

Теперь признак делимости трехзначного числа на 8 установлен полностью. Объединяя его с общеизвестным признаком делимости многозначного числа на 8, можно считать доказанным, что данное число делится (не делится) на 8, если делится (не делится) на 4 число, образуемое цифрами сотен и десятков данного числа, сложенное с половиной числа его единиц.

184. Пусть N – число, разбивающееся на три грани. Представим его в следующей форме: $N = 10^6a + 10^3b + c$, где a, b и c – числа, составляющие грани. Пусть $a + b + c$ делится на 37. Тогда $a + b + c = 37k$. Выразим отсюда c и подставим в N:

$$N = 10^6a + 10^3b + 37k - a - b = a(10^6 - 1) + b(10^3 - 1) + 37k.$$

Числа $10^6 - 1$, $10^3 - 1$ и 37 делятся на 37, следовательно, и число N делится на 37.

Обратную теорему докажите самостоятельно.

185. Примените такой же прием доказательства, как в решении предыдущей задачи. Из доказанного свойства будет следовать такое правило определения делимости данного числа на 3, 7 и 19:

Отделить от данного числа последние две цифры и к оставшемуся числу прибавить отделенное число, умноженное на 4; если нужно, повторить процесс до получения результата, делимость которого на 3, 7, 19 или на $399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$ была бы очевидной. Если результат делится (не делится) на 399 или на его множители, то и данное число делится (не делится) на 399 или на его множители.

Выясним, например, с помощью этого способа делимость на 3, 7 и 19 чисел 138 264 и 40 698. Имеем:

для числа 138 264:

$64 \cdot 4 = 256$,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}1382\\ 256\end{array} \\ \hline 1638\end{array}; \quad 38 \cdot 4 = 152; \quad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}16\\ 152\end{array} \\ \hline 168\end{array}$$

Продолжать процесс дальше нет смысла. Заключаем: 168, а значит, и данное число 138 264 делятся на 3 и на 7, но не делятся на 19.

для числа 40 698:

$98 \cdot 4 = 392$,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}406\\ 392\end{array} \\ \hline 798\end{array}; \quad 98 \cdot 4 = 392; \quad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}7\\ 392\end{array} \\ \hline 399\end{array}$$

399 делится на 3, 7 и 19, следовательно, и данное число 40 698 делится и на 3, и на 7, и на 19, а также и на 399.

186. Известно, что $x^m - 1$ делится на $x - 1$ (см. с. 120). Следовательно,

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

Первый сомножитель – это 10. Второй сомножитель также делится на 10, поскольку состоит из 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1 (любая целая степень числа 11 оканчивается на 1). Так как каждый из двух сомножителей делится на 10, то их произведение делится на 100, следовательно, и $11^{10} - 1$ делится на 100.

К главе 7

191. Для доказательства сначала найдем общий член каждого ряда таблицы. Как известно, общий член (a_n) всякой арифметической прогрессии равен ее первому члену (a_1), сложенному с произведением разности прогрессии (d) на число предшествующих членов: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Будем обозначать n-й член k-го ряда через a_{nk}, а разность k-го ряда через d_k.

Для первого ряда таблицы: $a_{11} = 4$, $d_1 = 3$, следовательно,

$$a_{n1} = 4 + 3(n - 1) = 1 + 3n.$$

Для второго ряда: $a_{12} = 7$, $d_2 = 5$, значит,

$$a_{n2} = 7 + 5(n - 1) = 2 + 5n.$$

Для третьего ряда: $a_{13} = 10$, $d_3 = 7$, поэтому

$$a_{n3} = 10 + 7(n - 1) = 3 + 7n.$$

Для k-го ряда: $a_{1k} = 1 + 3k$, $d_k = 1 + 2k$, следовательно,

$$a_{nk} = 1 + 3k + (1 + 2k)(n - 1) = k + (2k + 1)n.$$

Формула $a_{nk} = k + (2k + 1)n$, где $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и независимо от него $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, выражает любой член таблицы.

Пусть какое-либо число N содержится в таблице; тогда оно равно одному из чисел a_{nk}, т. е. $N = k + (2k + 1)n$. Но

$$2N + 1 = 2[k + (2k + 1)n] + 1 = 2k + 1 + 4kn + 2n = 2k + 1 + 2n(2k + 1) =$$
$$= (2k + 1)(2n + 1),$$

т. е. число $2N + 1$ состоит из произведения по крайней мере двух множителей, из которых ни один не равен 1; значит, $2N + 1$ – число составное, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть $2N + 1$ – любое составное нечетное число, поэтому его обязательно можно разложить на два нечетных множителя, из которых ни один не равен 1:

$$2N + 1 = (2k + 1)(2n + 1),$$

где k и n – какие-либо числа натурального ряда. Решив полученное равенство относительно N, найдем

$$N = \frac{(2k+1)(2n+1) - 1}{2} = k + (2k+1)n = a_{nk},$$

т. е. в этом случае N должно быть одним из чисел таблицы.

Таким образом, мы доказали, что числа N, содержащиеся в таблице, производят по формуле $2N + 1$ только составные числа и что для всякого заданного составного нечетного числа вида $2N + 1$ имеется непременно в таблице производящее его число N.

Но все простые числа (кроме 2) – нечетные и всякое нечетное число (кроме 1) – либо составное, либо простое. Отсюда заключаем, что простое нечетное число вида $2N + 1$ не имеет соответствующего производящего числа N в составе таблицы.

197. Мой юный друг слишком доверился своему глазу и не подкрепил своих действий *доказательствами*, что и привело его к кажущимся противоречиям.

Вопреки его утверждениям, он *ни разу не получал сплошного прямоугольника* из частей квадрата; обязательно должны были получаться щели, может быть, незаметные для глаза, или незаметное наложение одной части на другую.

Проанализируем какой-нибудь из его «благоприятных» случаев, например тот, когда сторона квадрата в 64 клетки делилась на части длиной в 5 и 3 ед. (см. рис. 66). Складывая треугольник A с трапецией C и треугольник B с трапецией D, как показано на рис. 121, мы не можем получить слияния линий EFK и EHK в одну диагональ EK прямоугольника, так как линии EFK и EHK – не прямые, а ломаные с очень небольшим изломом в точках F и H.

Это легко доказать. Пусть M – точка, в которой пересекается сторона KL прямоугольника с продолжением стороны EF треугольника EFN.

Если EFK – прямая, а не ломаная, то точка M совпадет с точкой K. Проверим, совпадают ли эти точки.

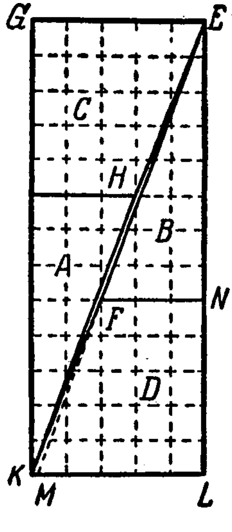


Рис. 121

Из подобия треугольников EFN и EML имеем

$$ML : FN = EL : EN, \text{ или } ML : 3 = 13 : 8.$$

Отсюда $ML = \dfrac{13 \cdot 3}{8} = 4{,}875$, в то время как $KL = 5$.

Точка M, как видите, не совпадает с вершиной K, значит, EFK, а также и EHK – ломаные.

Площадь прямоугольной фигуры $KLEG$ действительно содержит 65 клеток, но в ней есть ромбовидная щель $EFKH$, площадь которой как раз и составляет одну клетку.

Остается ответить на два вопроса:

1) почему у «экспериментатора» расхождение между площадью квадрата и площадью «прямоугольника» во всех случаях, казавшихся ему удачными, составляло ровно одну клетку;

2) при каком делении сторон квадрата он мог бы получить сплошной прямоугольник, а следовательно, и полное совпадение площадей?

Обратимся к помощи алгебры. Площадь квадрата (см. рис. 65) равна $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Площадь прямоугольника (см. рис. 65) равна $(2x + y)x = 2x^2 + xy$. Разность между площадью прямоугольника и площадью квадрата равна $R = x^2 - xy - y^2$. Площади квадрата и прямоугольника будут равными, если

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Разделив на y^2, получим квадратное уравнение относительно $\dfrac{x}{y}$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Взяв только положительное решение, имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Только для такого (иррационального) отношения частей x и y стороны квадрата при разрезании его на два равных треугольника и две равные трапеции возможно полноценное превращение квадрата в прямоугольник.

При рациональных значениях x и y величина R не может быть равна нулю. При *целых* значениях x и y *наименьшая* возможная разность между площадями $R = 1$. Вот этой наименьшей целой разности R мой юный друг и достигал, когда брал в качестве значений x и y пару соседних чисел ряда Фибоначчи (в первом опыте $x = 5$, $y = 3$, во втором $x = 8$, $y = 5$, в двух следующих $x = 13$, $y = 8$ и $x = 21$, $y = 13$), так как именно они удовлетворяют одному из уравнений $x^2 - xy - y^2 = 1$ или $x^2 - xy - y^2 = -1$ (см. п. 196).

Оглавление

Раздел Б

Глава 2. Умение везде найдет применение

Глава 3. Свойства девятки

Глава 4. С алгеброй и без нее

Глава 6. Делимость чисел

Глава 7. Числа древние, но вечно юные

А. Простые числа

Б. Числа Фибоначчи

В. Фигурные числа

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

К главе 1

К главе 2

К главе 3

К главе 4

К главе 5

К главе 6

К главе 7

Научно-популярное издание

6+

Кордемский Борис Анастасьевич

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Ответственный редактор *С. А. Федоров*
Корректор *Р.М. Синаюк*
Компьютерная верстка: *В. В. Брызгалова*
Дизайнер обложки *А.А. Кузьмина*
Фотоматериалы предоставлены ООО «ФотоБанкРесурс»

Подписано в печать 16.05.2017.
Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л. 16,0.
Тираж 3000 экз. Заказ №4513.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ООО «Издательство АСТ»
129085, Москва, Звездный бульвар, д.21, стр. 3, ком.5
Наши электронные адреса: WWW.AST.RU
E-mail: astpub@aha.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование»
109451, Москва, ул. Верхние Поля, д. 40, кор.1, пом. V, комн. 1.
Тел/факс (495)742-43-51, 742-43-54
www.mio-books.ru E-mail: mail@mio-books.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Формат: 84x108 $^{1}/_{32}$;
объем: 672 с.; переплет

Формат: 84x108 $^{1}/_{32}$;
объем: 672 с.; обложка

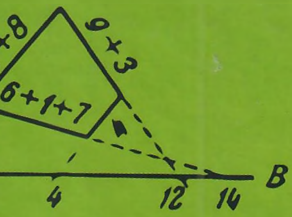
«Новый полный справочник школьника» весьма авторитетных в своей области авторов Т.Н. Масловой и А.М. Суходского по праву считается классическим образцом «правильного» пособия для учащихся.

В пособии в краткой и доступной форме представлен как основной, так и дополнительный материал всех разделов школьного курса математики, изучаемого в 5—11 классах; содержится большое количество примеров и задач с подобными решениями.

Справочник поможет ученикам школ и поступающим в вузы:
- повторить соответствующий материал при подготовке к уроку, тестированию, контрольной работе или экзамену;
- уточнить, как решаются типовые примеры и задачи школьного курса математики;
- быстро найти нужное понятие, определение или свойство, а также вспомнить формулу или теорему;
- успешно подготовиться к выпускным экзаменам в школе — сдаче ОГЭ и ЕГЭ.

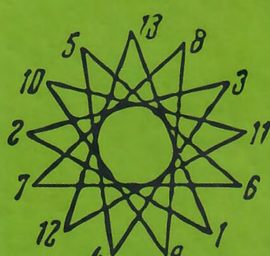
Издательство АСТ

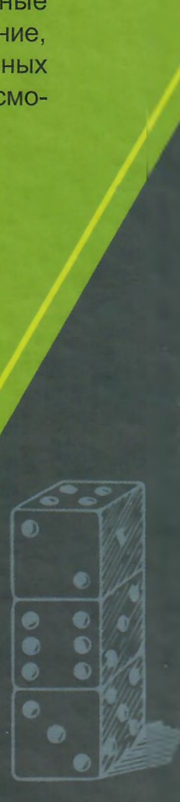
www.ast.ru



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

В этот сборник вошли классические задачи мэтра отечественной научно-популярной литературы Б.А. Кордемского (1907–1999). Многие из них уже знакомы любителям поломать голову: знаменитая «Математическая смекалка» многократно переиздавалась в нашей стране и за рубежом. На протяжении долгих лет задачи Кордемского пользуются неизменной популярностью среди разных поколений: они нравятся и любознательным школьникам всех возрастов, и их родителям. «Занимательные задачи» помогут развить нестандартное мышление, найти новые способы для решения обыкновенных школьных задач и с неожиданной стороны посмотреть на привычные математические ситуации.





ISBN 978-5-17-104590-6
9 785171 045906
www.ast.ru